



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Rodrigo da Silva Jacinto

Álgebra Linear – Uma Aplicação à Genética

João Pessoa – PB
2016

Rodrigo da Silva Jacinto

Álgebra Linear – Uma Aplicação à Genética

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

João Pessoa – PB
2016

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN
Rosilene Fernandes Machado - CRB15/220

J12a Jacinto, Rodrigo da Silva.
Álgebra Linear : uma aplicação à genética / Rodrigo da Silva Jacinto.
João Pessoa, 2016.
69 p. : il.

Monografia (Licenciatura em Matemática/EaD) – Universidade
Federal da Paraíba.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis.

1. Álgebra linear - Genética. 2. Matrizes. 3. Diagonalização de matrizes.
4. Autovetores. I. Título.

UFPB/BS-CCEN

CDU 512.64:575(043.2)

Álgebra Linear – Uma Aplicação à Genética

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

Aprovado em: _____ / _____ / _____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque

Prof. Dr. Joedson Silva Santos

Prof. Dr. José Gomes de Assis
(Orientador)

DEDICATÓRIA

**Dedico este trabalho à minha filha
Mariana de Lima Jacinto, fonte de
inspiração e determinação.**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à Deus por me abençoar durante toda minha vida, me fortalecendo e concebendo a força necessária para superar as dificuldades.

À minha família, pelas palavras de incentivo, carinho e colaboração para conclusão de mais uma etapa na minha formação cidadã.

À minha esposa, por estar incondicionalmente ao meu lado durante toda esta jornada me estimulando e suportando dos os estresses vividos nesta caminhada.

À Universidade Federal da Paraíba, por assumir com tanta dedicação este projeto da Universidade Aberta do Brasil, o qual me ajudou na construção de uma sólida formação em Matemática.

A todos os professores e tutores que me auxiliaram neste caminho, contribuindo no desenvolvimento de competências necessárias para a atuação na educação.

Ao meu orientador Professor Doutor José Gomes de Assis pelas suas correções e incentivos tão importantes no enriquecimento da construção deste trabalho.

Enfim, a todos e todas que me ajudaram neste percurso, auxiliando-me, incentivando-me e dando-me a força para chegar até o fim.

“ O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele. ”

(Immanuel Kant)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar a importância da Álgebra Linear e suas aplicações, em particular no campo da Genética, bem como expor de maneira prática a interdisciplinaridade que permeia entre os componentes curriculares. É apresentado um breve histórico do surgimento da Álgebra Linear, uma revisão sobre Matrizes e suas Propriedades, Transformações Lineares, Diagonalização de Matrizes, Autovalores, Autovetores e ter uma compreensão de Limites para assim abordarmos as aplicações dos conteúdos citados interligados à Genética.

Palavras-chaves: Diagonalização de Matrizes. Autovalores. Autovetores. Limites. Genética.

ABSTRACT

This work aims to show the importance of Linear Algebra and its private applications, in the occupation area of genetics, as well as expose of practical way the interdisciplinarity that pervades between the curriculum components. We present a brief history of the rise of linear algebra as well as a review of matrices and their properties, Linear Transformations, Matrices Diagonalization, Eigenvalues, Eigenvectors and have an intuitive understanding of limits for so approach the application of the said content linked to genetics.

Keywords: Matrices Diagonalization. Eigenvalues. Eigenvectors. Limits. Genetics.

LISTA DE SIGLAS

PSS – PROCESSO SELETIVO SERIADO	10
UFPB – UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA	10
UEPB – UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA	10
UAB – UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL	10
TCC – TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO	11
EAD – EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA	11
LI – LINEARMENTE INDEPENDENTE	27
LD – LINEARMENTE DEPENDENTE	27

SUMÁRIO

1	MEMORIAL DO ACADÊMICO	10
	1.1 Histórico da formação escolar	10
	1.2 Histórico da formação universitária	10
2	CAPÍTULO INTRODUTÓRIO	12
	2.1 Introdução	12
	2.2 Justificativa	12
	2.3 Objetivo Geral	12
	2.4 Objetivos Específicos	12
	2.5 Metodologia da Pesquisa	13
3	REFERENCIAL TEÓRICO	14
	3.1 Uma Breve Abordagem Histórica da Álgebra Linear	14
	3.2 Definições, Propriedades de Matrizes e Conceito Preliminar de Determinante	17
	3.3 Espaços e Subespaços Vetoriais	23
	3.4 Transformações Lineares	28
	3.5 Autovalores e Autovetores	38
	3.6 Diagonalização de Matrizes	45
	3.7 Noção de Limites	48
4	APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NA GENÉTICA	50
	4.1 Características Hereditárias Autossômicas	50
	4.2 Aplicação 1. Distribuição de Genótipos numa população	50
	4.3 Aplicação 2. Modificando a Aplicação 1	57
	4.4 Doenças Recessivas Autossômicas	60
	4.5 Aplicação 3. Controle de Doença Recessiva Autossômica	60
	4.6 Hereditariedade Ligada ao Sexo	62
	4.7 Aplicação 4. Programa de Procriação Consanguínea entre Irmãos	63
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
	REFERÊNCIAS	69

CAPÍTULO 1 – MEMORIAL DO ACADÊMICO

1.1 Histórico da formação escolar

A minha formação escolar foi realizada no ensino regular, com permanência na educação formal por 14 anos, com conclusão do ensino médio em 2007, sendo dois anos no Pré-Escolar I e II, um ano na alfabetização, quatro anos no fundamental I, de 1ª à 4ª série, quatro anos no ensino fundamental II, de 5ª à 8ª série, e três anos de ensino médio, do 1º ao 3º ano, todos cursados em escola particular.

Nos anos iniciais cursei com bolsa integral, pois meu pai trabalhava na escola. No início dos anos finais e ensino médio, tive a ajuda financeira da minha madrinha para investir em meus estudos. Não fiquei retido em nenhum ano, concluindo o ensino médio aos dezoito anos de idade. Foi quando, em 2007, fiz o Processo Seletivo Seriado (PSS) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) para cursar Matemática, alcançando aprovação, porém acabei abandonando o curso devido as condições a que fui acometido. Morava em Guarabira e tinha que me deslocar para João Pessoa passando a semana toda e voltando para minha cidade apenas nos fins de semana, não trabalhava e os gastos financeiros pesavam, ficava na casa de parentes distantes, entre outros motivos que me fizeram perder o ânimo de concluir o curso.

No ano seguinte fiz o vestibular para a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) para cursar Geografia, pois tinha um campus em Guarabira, fui aprovado, mas abandonei. Meu pai conseguiu-me um emprego em uma empresa de ônibus em João Pessoa, onde ele trabalhava e mesmo eu pernoitando todos os dias em casa, não chegava a tempo de ir à universidade.

1.2 Histórico da formação universitária

No final do ano de 2011 a UFPB realizou um vestibular para preenchimento de vagas no programa da Universidade Aberta do Brasil (UAB), com vagas para docentes da rede pública de ensino e vagas para demanda social. Tive acesso ao edital e inscrevi-me para as vagas de demanda social, no polo de João Pessoa, onde obtive a aprovação e iniciei o curso em março de 2012. Fiquei muito motivado para iniciar um curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade a distância, porém com certa relutância e anseios, pois além de se tratar de um curso a distância, onde atualmente ainda sofre certo tipo de preconceito, deve-se ter comprometimento, muita dedicação para os estudos além da capacidade de ser autodidata, pois mesmo com as interações com os tutores, a grande maioria do tempo estuda-se sozinho.

Apesar de contar com um valioso recurso que é a internet, a qual contribui na hora de pesquisar e esclarecimento de dúvidas através de livros com didática mais simples e vídeos de professores explicando um determinado assunto, fica difícil obter os esclarecimentos

necessários em alguns conteúdos, em que esses recursos são escassos, mas dessa forma consegue-se desenvolver a maturidade intelectual, fazendo com que o aluno tenha o hábito de pesquisar e ter a curiosidade de buscar novos conhecimentos.

Concluí todas as disciplinas dentro de sua blocagem exceto a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso - TCC, pois tive alguns contratempos, mas todas as que concluí foram com as devidas aprovações. Sempre preferi, durante o curso, não deixar nenhuma atividade para a reposição, pois estava ciente de que este fato poderia atrapalhar bastante o andamento das minhas atividades universitárias e não universitárias. Dediquei-me a todas as disciplinas, sempre buscando interagir os conhecimentos do cotidiano com os que foram adquiridos e debatidos durante as disciplinas.

Disciplinas técnicas, que tem como objetivos a construção do conhecimento matemático, tais como: Matemática Básica I, Matemática Básica II, Matemática Básica III, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vetorial, Álgebra Linear, Séries e Equações Diferenciais e Ordinárias, Cálculo das Probabilidades, Matemática Elementar, Fundamentos da Matemática, Física, Introdução à Álgebra e Introdução à Análise Real, fazem com que os objetos de estudo da Matemática sejam compreendidos e construídos de maneira gradativa no decorrer do curso fazendo com que o professor tenha uma base sólida de conhecimentos que levaram a Matemática se apresentar da forma que a conhecemos.

Disciplinas como: Filosofia, Sociologia, Fundamentos Psicológicos, Política e Gestão Escolar e Economia da Educação, foram de grande importância na minha formação, pois estas despertaram a reflexão sobre as bases educacionais, formação do indivíduo, da sociedade e, por conseguinte, da humanidade, fazendo-se necessário o entendimento de fatos que ocorrem durante cada etapa de história dessa formação.

As disciplinas para a formação docente, tais como: Didática, Argumentação, Tópicos Especiais, Estágios Supervisionados foram de imensa relevância para a percepção das realidades e das diferentes situações que ocorrem âmbito escolar e nas atividades docentes em sala de aula e fora dela.

Também ressalto a importância das disciplinas que nos ajudam a ter o abarcamento do processo de produção e divulgação de conhecimentos científicos, são elas: Metodologia do Trabalho Científico, Pesquisa Aplicada à Matemática, Pesquisa no Cotidiano Escolar e as disciplinas que tem como principal finalidade a obtenção de conhecimentos históricos da Educação a Distância – EAD e a utilização dos meios tecnológicos para melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem da Matemática, são elas: Introdução à Educação a Distância e Introdução à Computação.

CAPÍTULO 2 – CAPÍTULO INTRODUTÓRIO

2.1 Introdução

A Matemática é uma ciência que sempre esteve presente em nosso cotidiano, dos primórdios históricos da humanidade até os dias atuais. E, mesmo sem notarmos, está presente em várias áreas de conhecimentos.

A Álgebra Linear é um ramo da Matemática que tem tomado bastante notoriedade atualmente devido à sua aplicabilidade em diversos campos de estudos como a criptografia, programação linear, circuitos elétricos, produção mecânica de peças, modelos econômicos lineares, entre outros. Por ser uma disciplina versátil nas aplicações, a Álgebra Linear tem uma grande relevância, pois contribui para os avanços tecnológicos e científicos.

O propósito deste trabalho é mostrar que a Matemática está inserida em diversos campos de estudos dando como exemplo a Genética que é um ramo da Biologia que estuda a hereditariedade bem como outros assuntos relacionados aos genes. As aplicações demonstram a relevância que a Álgebra Linear tem nesses estudos. No Egito Antigo, por exemplo, os Faraós, e os que pertenciam à linhagem genética do mesmo, recorriam a casamentos entre irmãos para assim manterem a pureza da linhagem real. E a Teoria das Matrizes fornece um referencial matemático para compreendermos a propagação dos traços genéticos através das gerações.

2.2 Justificativa

O trabalho realizado aqui deseja demonstrar algumas aplicações da Álgebra Linear inseridas na Genética, portanto, esse trabalho está muito distante de ser uma conclusão de estudos, o que vamos propor aqui é a discussão dessas aplicações.

2.3 Objetivo Geral

Fazer uma breve revisão dos conceitos básicos de matrizes, operadores lineares e limites e aplicá-las em uma situação particular da Biologia.

2.4 Objetivos Específicos

- Estudar as matrizes e suas propriedades;
- Entender o que são transformações lineares;
- Compreender o que são os Autovalores e Autovetores e a Diagonalização de Matrizes;
- Compreender Limites;

- Demonstrar algumas aplicações das quais utilizam matrizes, autovalores, autovetores, diagonalização de matrizes e a compreensão de limites.

2.5 Metodologia da Pesquisa

A pesquisa desenvolvida nesse trabalho trata-se de analisar um referencial teórico sobre matrizes, autovalores, autovetores, diagonalização de matrizes e a compreensão de limites afim de compreender a relação da Matemática com outros componentes curriculares.

A pesquisa é classificada em *Exploratória*, pois envolve um levantamento bibliográfico, que contribui para uma maior familiaridade com o tema, os procedimentos e também como uma pesquisa *Quantitativa*, por se tratar de uma interpretação dos fenômenos baseado em dados numéricos.

A primeira consiste na realização de um levantamento bibliográfica para a construção do referencial teórico afim de nos familiarizarmos com os conteúdos que serão utilizados para aplicação nos problemas que serão apresentados. Foram consultados livros, monografias publicadas na internet que auxiliaram na melhoria deste trabalho.

A segunda etapa será a demonstração da aplicação dos conteúdos apresentados, afim de compreendermos e solucionarmos os problemas que serão propostos.

CAPÍTULO 3 – REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Uma Breve Abordagem Histórica da Álgebra Linear

O texto apresentado a seguir foi retirado e resumido de uma dissertação apresentada como trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática de Robinson Nelson dos Santos, onde este aborda o histórico do desenvolvimento da teoria dos determinantes e das matrizes, sendo considerado os primeiros passos do surgimento da Álgebra Linear.

Segundo Bourbaki (1999), a Álgebra Linear é uma das ramificações mais antigas da Matemática, citando, aqui, problemas que datam da antiguidade, como por exemplo sistemas de equações lineares com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 2y = 2. \end{cases}$$

Bourbaki também cita que a Álgebra Linear teve sua origem basicamente prática. Índícios das técnicas utilizadas foram encontrados no papiro de Rhind, de aproximadamente 1650 a.C., encontrado no Egito. Nesse papiro foram encontrados diversos problemas que para sua resolução utilizavam apenas equações lineares simples. Temos como exemplo um método utilizado que ficou conhecido na Europa como “Regra da Falsa Posição”:

$$x + \frac{x}{8} = 36.$$

Nesse método substitui-se a incógnita por um valor conveniente para x , por exemplo tomando $x = 8$ temos:

$$8 + \frac{8}{8} = 8 + 1 = 9.$$

Para chegar ao valor 36 temos que multiplicar 9×4 que resulta em 36, logo $8 \times 4 = 32$ que é o valor de x .

Atualmente vemos a utilização de matrizes e determinantes como instrumentos para resolução de sistemas de equações lineares, muito se deve aos registros de antigas civilizações que contribuíram para o desenvolvimento de nossa ciência. Os babilônicos, segundo Eves (2004, p.62), possuíam problemas geométricos grafados em tabuletas datadas de aproximadamente 1600 a.C., e que esses problemas eram expressados especialmente pela Álgebra.

Também foram encontrados vestígios da Álgebra Linear na China, Martzloff (1987, p.249) encontrou um impressionante algoritmo para a resolução de sistema lineares que ficou conhecido como Método Fangcheng.

Temos como exemplo prático do Método Fangcheng o seguinte problema:

Supõe-se que temos 3 pacotes de cereal de alta qualidade, 2 pacotes de cereal de qualidade média e 1 pacote de cereal de baixa qualidade, totalizando 39 dou de grãos (dou é um recipiente antigo chinês utilizado para armazenar grãos e alimentos). Também se supõe termos 2 pacotes de cereal de alta qualidade, 3 de qualidade média e 1 de baixa qualidade, totalizando 34 dou; 1 pacote de alta qualidade, 2 de qualidade média e 3 de baixa qualidade, totalizando 26 dou de grãos. Pergunta-se: quantos dou de grãos há em 1 pacote de cereais de alta, média e baixa qualidade, respectivamente?

O problema apresentado pode ser escrito da seguinte forma algébrica:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$$

Esse sistema é representado, segundo o método, como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, multiplicamos todos os termos da coluna central pelo primeiro termo da coluna direita 3, chamaremos de passo 1, assim obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix}.$$

Agora subtraímos o número à direita de cada um dos números do centro, chamaremos de passo 2, obtemos, no centro:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix}.$$

Repetimos o passo 2 sucessivamente até que o primeiro número da coluna central seja eliminado. Novamente utilizamos os passos 1 e 2, agora entre as colunas 1 e 3, eliminando-se o primeiro elemento da coluna 1. Por último, os passos 1 e 2 entre as colunas 1 e 2, eliminando-se assim o segundo número da coluna 1. O resultado será facilmente reconhecido como uma matriz na forma triangular:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}.$$

Temos então um novo sistema de equações cuja a forma é:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 0x + 3y + z = 24 \\ 0x + 0y + 36z = 99. \end{cases}$$

Facilmente notamos que $z = 99/36 = 2,75$. O valor das incógnitas y e x são obtidas, respectivamente, substituindo sucessivamente os resultados obtidos.

Martzloff percebe que esse método é, necessariamente, semelhante ao método desenvolvido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o método da Eliminação de Gauss dispõe os coeficientes das equações em linhas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 1 & 1 & 26 \end{bmatrix}.$$

Fazendo assim os mesmos procedimentos do método chinês obteremos o mesmo resultado.

Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra Linear, como Gottfried W. Leibniz (1646-1716). Kline (1927, p.606) conta que Leibniz reescreveu as equações eliminando as incógnitas e chegou a uma regra que atualmente a conhecemos como determinante de um sistema linear, que posteriormente foi proposta de forma mais abrangente por Gabriel Cramer (1704-1752), este fato representou um grande avanço para Álgebra Linear. Cramer apresentou sua fórmula em 1750, a que hoje chamamos de Regra de Cramer conforme relata Muir (1890, p.9).

Em 1772, Joseph L. Lagrange (1736-1813) explorava o problema de movimento de três corpos celestes e em suas pesquisas encontrou identidades cujas formas sugerem técnicas de multiplicação de matrizes, abrindo caminho para que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) elaborasse o seu teorema de multiplicação de determinantes.

Segundo Dieudonné (1981, p.71), apenas no século XVIII o conceito de Transformação Linear foi difundido entre os matemáticos e teve em Gauss como principal divulgador deste novo conceito.

Com o passar do tempo as expressões foram substituídas por arranjos retangulares, essa tendência teve início com Gauss e foi sistematizada por Arthur Cayley (1814-1897) e James J. Sylvester na Teoria das Matrizes.

No século XIX, foi de grandes avanços na percepção matemática sobre dimensão infinita. Os matemáticos já sabiam interpretar geometricamente cálculos feitos em 2 ou 3 dimensões e com isso abriu-se a possibilidade de lidar com sistemas de n variáveis, numa geometria de n dimensões, no entanto reconhecessem que os procedimentos não teriam relação com a realidade, conforme relata Dieudonné (1981, p.21). Segundo Bashmakova

(2000, p. 153) apenas por volta de 1870 foi que a nova geração de matemáticos se apropriou do conceito de n dimensões.

É de fácil compreensão o porquê do conceito de dimensão infinita ter um papel fundamental no surgimento da Álgebra Linear. Em 1858, Cayley publicou seu livro *A Memoir on the Theory of Matrices*. Neste estudo, ele apresentou as matrizes como arranjos com m linhas e n colunas, compostos pelos coeficientes de uma transformação linear e que serviam como notação abreviada dessa última. Segundo Kline (1972, p.805), Cayley simplesmente encontrou na matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Uma maneira de expressar a equação:

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy.$$

Segundo Kline (1972, p.804), o termo matriz deve-se a Sylvester. Até o final do século XIX não existiam teorias ou regras definidas que pudessem ser uma base para o que chamamos atualmente de Álgebra Linear. Como foi citado, existia apenas uma intuição por parte dos matemáticos.

De acordo com Lima (2012), Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles. Quando os espaços possuem dimensões finitas, as transformações lineares possuem matrizes. Também possuem matrizes as formas bilineares (são funções $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$) e, mais particularmente, as formas quadráticas (polinômios homogêneos de grau dois em suas variáveis).

3.2 Definições, Propriedades de Matrizes e Conceito Preliminar de Determinante

Conforme definido por Steinbruch e Winterle (1987), chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de $m \times n$ elementos, que podem ser polinômios, funções, entre outros, dispostos em m linhas e n colunas.

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A matriz também pode ser representada na forma:

$$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Com i variando de $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, m\}$ e j variando de $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$.

Definição 1. Uma matriz é denominada retangular quando $m \neq n$. Uma matriz é denominada matriz quadrada quando $m = n$.

Definição 2. Dada uma matriz quadrada $A_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$, é denominada diagonal principal todos os elementos a_{ij} cujo $i = j$, ou seja, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ é a diagonal principal.

Definição 3. Dada uma matriz quadrada $A_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$, é denominada diagonal secundária todos os elementos a_{ij} cujo $i + j = n + 1$, ou seja, $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ é a diagonal secundária.

Definição 4. Dada duas matrizes A e B de ordem $m \times n$, $A = B$, se somente se, $a_{ij} = b_{ij}$.

Definição 5. Dada duas matrizes A e B , de ordem $m \times n$ a operação soma apenas ocorre se as duas matrizes forem de mesma ordem. A soma é dada da seguinte forma:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(A + B)_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 6. Se α é um escalar e dada a matriz A , de ordem $m \times n$, a operação produto por este escalar é uma matriz B , também de ordem $m \times n$, tal que:

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

$$B_{m \times n} = \alpha \cdot A_{m \times n}$$

$$B_{m \times n} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição 7. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e B uma matriz de ordem $n \times p$, define-se produto da matriz A pela matriz B a matriz C , do tipo $m \times p$, tal que cada elemento de C , c_{ij} , satisfaz:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Ou seja, cada elemento de C é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B e, a seguir, somando-se os produtos obtidos.

Exemplo 1. Seja as matrizes $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz C resultante da multiplicação das matrizes A e B .

Solução:

$$C_{2 \times 3} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

3.2.1 Propriedades da Aritmética Matricial

Segundo Anton e Rorres (2001), supondo que o tamanho das matrizes sejam tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, vale as seguintes regras da aritmética matricial:

- Lei da Comutatividade para Adição.

$$A + B = B + A.$$

- Lei da Associatividade para Adição.

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

- Lei da Associatividade para Multiplicação

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$(\alpha\beta) \cdot C = \alpha \cdot (\beta \cdot C)$$

$$\alpha \cdot (B \cdot C) = (\alpha \cdot B) \cdot C = B \cdot (\alpha \cdot C).$$

- Lei da Distributividade à Esquerda

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$\alpha \cdot (A - B) = \alpha A - \alpha B.$$

- Lei da Distributividade à Direita

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C$$

$$(\alpha + \beta) \cdot C = \alpha \cdot C + \beta \cdot C$$

$$(\alpha - \beta) \cdot C = \alpha \cdot C - \beta \cdot C.$$

Definição 8. As matrizes que possuem o número de linhas $m = 1$ são chamadas de matrizes de ordem 1 por n , matriz linha ou vetor – linha.

$$A_{1 \times n} = [a_{11} a_{12} \dots a_{1n}].$$

Definição 9. As matrizes que possuem o número de colunas $n = 1$ são chamadas de matrizes de ordem m por 1, matriz coluna ou vetor – coluna.

$$A_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Definição 10. Dada uma matriz A , A^t ou A' é denominada matriz transposta de A quando os elementos das linhas da matriz A são iguais aos elementos das colunas de A^t ou A' .

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^t = A' = A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Definição 11. Uma matriz quadrada D é denominada matriz diagonal quando todos os elementos $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

$$D_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 12. Uma matriz quadrada T_s é denominada matriz triangular superior quando abaixo da diagonal principal, os elementos a_{ij} são iguais à 0.

$$T_{s_{n \times n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 13. Uma matriz quadrada T_i é denominada matriz triangular inferior quando acima da diagonal principal, os elementos a_{ij} são iguais à 0.

$$T_{i_{n \times n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 14. A matriz quadrada E é denominada matriz escalar quando todos os elementos a_{ij} , cujo $i = j$ são iguais e todos os elementos a_{ij} , cujo $i \neq j$ é igual à 0.

$$E_{1 \times 1} = [5]$$

$$E_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_{n \times n} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 15. A matriz quadrada I é denominada matriz identidade quando os elementos de sua diagonal principal são iguais à 1 e todos os outros elementos são iguais a 0.

$$I_{1 \times 1} = [1]$$

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 16. Denomina-se matriz zero ou matriz nula, a matriz cujo todos os elementos a_{ij} são iguais a zero.

$$0_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 17. Uma matriz A^{-1} é denominada inversa de uma matriz A quando $A \cdot A^{-1} = I$.

Exemplo 2. Dada a matriz $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1} .

Solução:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot b & 1 \cdot c + 2 \cdot d \\ 2 \cdot a + 1 \cdot b & 2 \cdot c + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela Definição 4 da seção 3.2 obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \\ 2 \cdot a + 1 \cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot c + 2 \cdot d = 0 \\ 2 \cdot c + 1 \cdot d = 1. \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas temos que a inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Conceito Preliminar de Determinante

Consideremos a equação $a \cdot x = b$, com $a \neq 0$. A solução desse sistema é $x = \frac{b}{a}$. Observamos que o denominador está diretamente associado à matriz dos coeficientes do sistema, ou seja $[a]$.

Observemos agora no sistema 2×2 :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2. \end{cases}$$

Desde que seja possível as operações, encontramos:

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Observe que os denominadores são iguais e estão associados a matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Esses números são casos particulares do que é chamado de determinante de uma matriz.

Segundo Boldrini (1980), o conceito preliminar de determinante é um número associado a uma matriz $A = [a_{ij}]$ e é representado por $\det A$ ou $|A|$.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

O determinante de matrizes de ordem iguais ou maiores que três utilizamos um método conhecido como Teorema de Laplace. O teorema de Laplace consiste em escolher uma das linhas ou colunas da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

$$\text{O } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}.$$

Onde $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det D_{ij}$ são os cofatores e D_{ij} é a matriz onde foram retiradas a i -ésima linha e a j -ésima coluna.

Exemplo 3. Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o determinante dessa matriz é dado da seguinte

forma:

Escolheremos a primeira linha de $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, então temos:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det D_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det D_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det D_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reduzimos o determinante da matriz M ordem três em soma de determinantes de matrizes de ordem dois, calculando temos que:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

3.3 Espaços e Subespaços Vetoriais

Para que possamos prosseguir faz-se necessário que tenhamos uma base sólida dos conceitos de espaços e subespaços vetoriais. Aqui apresentaremos algumas definições relevantes para compreensão das operações utilizadas.

Definição 1. Segundo Boldrini (1980), um espaço vetorial real é um conjunto V , não vazio, onde estão definidas duas operações:

$$\text{Soma: } V \times V \xrightarrow{+} V;$$

$$\text{Multiplicação por escalar: } \mathbb{R} \times V \rightarrow V.$$

Definição 2. Dados os vetores $u, v \in V$, a soma de u e v corresponde a um vetor $u + v \in V$, a essa operação chamamos adição.

Definição 3. Dado um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e um vetor $v \in V$, o produto entre α e v faz corresponder um vetor $\alpha \cdot v \in V$, a essa operação denominamos multiplicação por escalar.

Essas operações devem obedecer algumas condições que são denominadas axiomas de um espaço vetorial para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e todo v, u e $w \in V$.

Em relação à adição:

Comutatividade:

$$\mathbf{A}_1) u + v = v + u.$$

Associatividade:

$$\mathbf{A}_2) (u + v) + w = u + (v + w).$$

Existe apenas $0 \in V$, chamado vetor nulo tal que:

$$\mathbf{A}_3) 0 + v = v + 0 = v.$$

Para todo $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, tal que:

$$\mathbf{A}_4) v + (-v) = 0.$$

Com relação a multiplicação:

Associatividade:

$$\mathbf{A}_5) (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v).$$

Distributividade:

$$\mathbf{A}_6) (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

$$A_7) \alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u.$$

Para todo $u \in V$, existe um escalar $1 \in \mathbb{R}$, tal que:

$$A_8) 1 \cdot u = u \cdot 1 = u.$$

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Temos algumas propriedades que decorrem dos axiomas que definem o espaço vetorial.

P₁ – O vetor nulo de um espaço vetorial V é único. Há um único vetor 0 que satisfaz A_3 , pois se 0_1 satisfaz a mesma propriedade, então:

$$0_1 = 0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0.$$

P₂ – Para cada vetor u de um espaço vetorial V existe um único vetor $(-u)$ de u .

Seja u_1 , tal que $u_1 + u = 0$

$$-u = -u + 0 = -u + (u + u_1) = (-u + u) + u_1 = 0 + u_1 = u_1.$$

P₃ – Para todo $u \in V$, $0 \cdot u = 0$.

$$\begin{aligned} 0 \cdot u &= u \cdot (0 + 0) = 0 \cdot u + 0 \cdot u \\ -0 \cdot u + 0 \cdot u &= -0 \cdot u + 0 \cdot u + 0 \cdot u \\ 0 &= 0 + 0 \cdot u \\ 0 &= 0 \cdot u. \end{aligned}$$

P₄ – Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot 0 = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 \\ -\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 &= -\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 \\ 0 &= \alpha \cdot 0. \end{aligned}$$

P₅ – Se u, v e $w \in V$ e $u + v = u + w$, então $v = w$.

P₆ – Se $u, w \in V$, então existe um único vetor v tal que $u + v = w$.

P₇ – Para todo $u \in V$, ocorre: $-(-u) = u$.

P₈ – Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $u \in V$, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha \cdot u)$.

P₉ – Qualquer que seja $v \in V$, tem-se: $(-1) \cdot v = -v$.

P₁₀ – $\alpha \cdot v = 0$ implica $\alpha = 0$ ou $v = 0$.

Os conjuntos $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots, \mathbb{R}^n$, são espaços vetoriais com relação a adição e multiplicação por escalar usuais. Verificados os oito axiomas no \mathbb{R}^2 , os mesmos ficam provados nos conjuntos citados acima.

O conjunto \mathbb{R} é formado pelos vetores que são os números reais onde estão bem definidas as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, portanto também é um espaço vetorial.

O conjunto das matrizes $M_{m \times n}$, também é um espaço vetorial.

O conjunto dos polinômios $P_n = \{a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_i \cdot x^n, i \in \mathbb{R} \text{ de grau } \leq n\}$, em particular $P_2 = \{a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2\}$ também é um espaço vetorial com relação as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Os símbolos \oplus, \odot são usados para definir operações de soma e multiplicação não usuais.

Exemplo 1. Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, verifique se V é um espaço vetorial munida das seguintes operações:

$$u \oplus v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \odot v = (\alpha x_1, y_1).$$

Com relação a adição, os axiomas A_1, A_2, A_3 e A_4 são satisfeitos, já com relação a multiplicação por escalar, o axioma A_6 , não é satisfeito. Vejamos:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot u &= (\alpha + \beta) \cdot (x_1, y_1) = \\ &= ((\alpha + \beta) \cdot x_1, y_1) = (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_1, y_1) \\ \alpha \cdot u + \beta \cdot u &= \alpha \cdot (x_1, y_1) + \beta \cdot (x_1, y_1) = \\ &= (\alpha \cdot x_1, y_1) + (\beta \cdot x_1, y_1) = \\ &= (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_1, y_1 + y_1) = \\ &= (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_1, 2 \cdot y_1) = \\ &(\alpha + \beta) \cdot u \neq \alpha \cdot u + \beta \cdot u. \end{aligned}$$

Logo V não é um espaço vetorial.

Definição 4. Subespaços vetoriais é um subconjunto $W \subset V$ que satisfaz as seguintes condições:

- $0 \in W$, o vetor-nulo pertence a W , logo W não é vazio;
- $\forall u, v \in W, u + v \in W$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in W, \alpha \cdot u \in W$.

Os demais axiomas de espaço vetorial são satisfeitos pelo fato de W ser um conjunto não vazio de V .

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{0\}$ e o próprio V . Esses são chamados subespaços triviais de V . Os outros são denominados subespaços próprios de V .

Por exemplo, os subespaços triviais de $V = \mathbb{R}^3$ são $\{(0, 0, 0)\}$ e o próprio \mathbb{R}^3 . Os subespaços próprios do \mathbb{R}^3 são as retas e os planos que passam pela origem.

Para $V = \mathbb{R}^2$, os subespaços triviais são: $\{(0, 0)\}$ e \mathbb{R}^2 , enquanto os subespaços próprios são as retas que passam pela origem.

Exemplo 2. Seja $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$, verifique se W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 .

$$0 = (0,0) \in W.$$

Logo W não é vazio:

$$(x, y) = (x, 2 \cdot x) = (0, 2 \cdot 0) = (0,0).$$

Seja $u(x_1, y_1), v(x_2, y_2) \in W$ então:

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \\ &= (x_1, 2 \cdot x_1) + (x_2, 2 \cdot x_2) = \\ &= (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = \\ &= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \\ u + v &= (x_1 + x_2, 2 \cdot (x_1 + x_2)) \\ u + v &\in W. \end{aligned}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u &= \alpha \cdot (x_1, y_2) = \\ &= \alpha \cdot (x_1, 2 \cdot x_1) = \\ &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot 2 \cdot x_1) = \\ &= (\alpha \cdot x_1, 2 \cdot (\alpha \cdot x_1)) \\ \alpha \cdot u &= (\alpha \cdot x_1, 2 \cdot (\alpha \cdot x_1)) \\ \alpha \cdot u &\in W. \end{aligned}$$

Logo W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 .

Observação 1. Os vetores também podem ser escritos como combinação linear de outros vetores. Dizemos que um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ quando existem escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que:

$$v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + \dots + \dots a_n \cdot v_n.$$

Definição 5. Seja V um espaço vetorial e um subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, com $S \neq \emptyset$, seja $[S]$ um subconjunto de V formado por todos os vetores que são combinações lineares de S . O conjunto $[S]$ é um subespaço vetorial de V denominado subespaço gerado, onde S é o conjunto gerador e $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ os vetores geradores.

Definição 6. Seja $[S]$ um subespaço gerado e V um espaço vetorial, quando ocorre $[S] = V$, dizemos que V é um espaço vetorial gerado por S .

Definição 7. Seja V um espaço vetorial e um subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ dizemos que o subconjunto S é Linearmente Independente (LI) se, e somente se, a equação $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$ admite apenas a solução trivial $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Definição 8. Seja V um espaço vetorial e um subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ dizemos que o subconjunto S é Linearmente Dependente (LD) se, é possível uma igualdade do tipo $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$, com pelo menos uma solução $a_i \neq 0$, com $i = \{1, 2, \dots, n\}$.

3.3.1 Propriedades de Dependência e Independência Linear

P₁ – Se um conjunto $S = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então S é LI.

De fato, como $v \neq 0$, ocorre $a \cdot v = 0$, se, e somente se, $a = 0$.

P₂ – Se o conjunto $S \subset V$ possuir o vetor nulo então S é LD.

De fato, seja $S = \{v_1, v_2, 0, \dots, v_n\}$, então temos $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$, com $a_3 \neq 0$, portanto S é LD.

P₃ – Se uma parte do conjunto $S \subset V$ é LD, então S é LD.

De fato, sejam $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r, \dots, v_n\}$ e $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset S$, S_1 é LD, então existem escalares $a_i \neq 0$ em que se verifica $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_i \cdot v_i + \dots + a_r \cdot v_r = 0$ e esses mesmos $a_i \neq 0$ se verifica na igualdade $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_i \cdot v_i + \dots + a_r \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$, logo S é LD.

P₄ – Se um conjunto $S \subset V$ é LI, então qualquer parte S_1 de S também é LI.

De fato, se S_1 fosse LD, pela propriedade anterior, S seria LD, o que contradiz a hipótese.

P₅ – Se um conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é LI e $W = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w\}$ é LD, então w é combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

De fato, como W é LD então existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n, b \neq 0$, nem todos nulos, tais que $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n + b \cdot w = 0$, se $b = 0$, então um dos a_i , $i = \{1, 2, \dots, n\}$, são diferentes de zero na igualdade $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$, fazendo com que S seja LD, o que contradiz a hipótese. Logo $b \neq 0$ e, portanto:

$$b \cdot w = -(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots - a_n \cdot v_n)$$

$$w = \frac{-a_1}{b} \cdot v_1 - \frac{a_2}{b} \cdot v_2 - \dots - \frac{a_n}{b} \cdot v_n.$$

Definição 9. Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é chamado base de um espaço vetorial V , se:

- S é LI;
- S gera V , ou seja, $[S] = V$.

Definição 10. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denotamos $\dim V$ a dimensão do espaço vetorial V que representa o número de vetores de qualquer uma de suas bases.

- Se V possui uma base com n vetores, então $\dim V = n$;
- Se $V = \{0\}$, então $\dim V = 0$;
- Se V possui uma base com infinitos vetores, então $\dim V = \infty$.

Observação 2. Qualquer conjunto LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado para se formar uma base para V .

Prova:

Sejam $\dim V = m$ e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ vetores LI. Se v_1, v_2, \dots, v_n geram V , ou seja $[v_1, v_2, \dots, v_n] = V$, então os vetores v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base para V , pela Definição 10 da seção 3.3, $m = n$, e não há mais o que demonstrar.

Se existe um $v_{n+1} \notin \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tal que v_{n+1} não é combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n , logo os vetores são LI. Se $[v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}] = V$, então encontramos uma base que gera V .

Caso contrário, existe um $v_{n+2} \notin \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$, tal que v_{n+2} não é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$, logo os vetores são LI. Se $[v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}] = V$, então está provado. Se não, prosseguimos de modo análogo. Como $\dim V = m$, não podemos ter mais de m vetores, pela Definição 10 da seção 3.3, após finitos passos teremos obtido uma base para V .

3.4 Transformações Lineares

As transformações lineares são uma das mais importantes áreas de conhecimento que compõem a Matemática. Elas têm um papel importante e são aplicadas em diversas áreas profissionais, como, por exemplo, na computação gráfica, onde o uso das transformações lineares servem para criar imagens tridimensionais.

As transformações lineares também são utilizadas na Economia, as empresas as utilizam para confrontar qual o produto gerará mais lucro, ou seja, são ferramentas que auxiliam na escolha de qual produto terá menor custo de fabricação, fazendo com que a empresa possa oferecer o melhor preço para seus produtos. São aplicadas também na Engenharia Elétrica, para a compreensão dos circuitos elétricos, entre outras aplicações.

Definição 1. Segundo Boldrini (1980), definimos a aplicação $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear de V em W , se:

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$$

para todo u e $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y) = (2x, -y, x - y)$ é linear.

De fato:

Seja $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, então:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$T(u + v) = (2(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$$

$$T(u + v) = (2x_1 + 2x_2, -y_1 - y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$$

$$T(u + v) = (2x_1 + 2x_2, -y_1 - y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2)$$

$$T(u + v) = (2x_1, -y_1, x_1 - y_1) + (2x_2, -y_2, x_2 - y_2) = T(u) + T(v)$$

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x_1, y_1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1)$$

$$T(\alpha \cdot u) = (2(\alpha \cdot x_1), -\alpha \cdot y_1, (\alpha \cdot x_1) - \alpha \cdot y_1)$$

$$T(\alpha \cdot u) = (2\alpha \cdot x_1, -\alpha \cdot y_1, \alpha \cdot x_1 - \alpha \cdot y_1)$$

$$T(\alpha \cdot u) = (\alpha \cdot (2x_1), \alpha \cdot (-y_1), \alpha \cdot (x_1 - y_1))$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (2x_1, -y_1, x_1 - y_1) = \alpha \cdot T(u).$$

3.4.1 Propriedades de uma Transformação Linear

P₁ – Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, então:

$$T(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2) = a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2)$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Da mesma maneira temos:

$$T(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n) = a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) + \dots + a_n \cdot T(v_n)$$

para todo $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Isto significa que a imagem de uma combinação linear é a uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

P₂ – Seja o conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ uma base de V , e que as imagens dos vetores dessa base, $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$, são conhecidas. É sempre possível determinar a imagem $T(v)$ de qualquer vetor $v \in V$.

Tendo v como combinação linear dos vetores da base, ou seja:

$$v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n.$$

E da relação acima tem-se:

$$T(v) = a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) + \dots + a_n \cdot T(v_n).$$

Assim, uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ fica totalmente definida quando se conhece as imagens dos vetores de uma base de V .

Exemplo 2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, sendo $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, uma base de \mathbb{R}^3 . Determinar $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(v_1) = (1,-2)$, $T(v_2) = (3,1)$ e $T(v_3) = (0,2)$.

$$\begin{aligned} v &= a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 \\ (5,3,-2) &= a_1 \cdot (1,0,0) + a_2 \cdot (0,1,0) + a_3 \cdot (0,0,1) \\ a_1 &= 5 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= -2 \\ T(v) &= a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) + a_3 \cdot T(v_3) \\ T(5,3,-2) &= 5 \cdot (1,-2) + 3 \cdot (3,1) + (-2) \cdot (0,2) \\ T(5,3,-2) &= (5 \cdot 1, 5 \cdot (-2)) + (3 \cdot 3, 3 \cdot 1) + ((-2) \cdot 0, (-2) \cdot 2) \\ T(5,3,-2) &= (5, -10) + (9, 3) + (0, -4) \\ T(5,3,-2) &= (14, -11). \end{aligned}$$

Definição 2. Seja uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, denomina-se núcleo de T ao conjunto de vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$. A simbologia dada ao conjunto é $N(T)$ ou $\ker(T)$.

$$N(T) = \ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Observação 1. Todo $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$. Visto que $T(0) = 0$.

Exemplo 3. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, 2x-y)$. O núcleo é $\ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; T(x,y) = (0,0)\}$ então:

$$\begin{aligned} (x+y, 2x-y) &= (0,0) \\ \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Somando as equações do sistema acima temos

$$\begin{aligned} 3x + 0 &= 0 \\ 3x &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Como $x = 0$, então

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 0 + y &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\ker(T) = \{(0,0) \in \mathbb{R}^2\}$$

3.4.2 Propriedades do Núcleo de uma Transformação Linear

P₁ – O conjunto $\ker(T) \subset V$ de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é um subespaço vetorial.

De fato:

Sejam $v_1, v_2 \in \ker(T)$, então $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

Isto significa que $v_1 + v_2 \in \ker(T)$.

$$T(a_1 \cdot v_1) = a_1 \cdot T(v_1) = a_1 \cdot 0 = 0$$

Ou seja, $a_1 \cdot v_1 \in \ker(T)$.

Logo $\ker(T)$ é um subespaço vetorial.

P₂ – Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é injetora se, somente se, $\ker(T) = \{0\}$.

Observação 2. Uma aplicação $T: V \rightarrow W$ é injetora se $T: V \rightarrow W$ se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$, ou de outra maneira, seja $v_1, v_2 \in V$ e $v_1 \neq v_2$, então $T(v_1) \neq T(v_2)$.

Prova:

Se T é injetora, então $\ker(T) = \{0\}$.

De fato:

Seja $v \in \ker(T)$, então $T(v) = 0$, sabemos pela Observação 1 da seção 3.4 que $T(0) = 0$, temos que $T(v) = T(0)$, como T é injetora por hipótese, implica em $v = 0$.

Logo o vetor zero é o único elemento de $\ker(T)$.

Se $\ker(T) = \{0\}$, então T é injetora.

Sejam $v_1, v_2 \in V$, de modo que $T(v_1) = T(v_2)$. Então $T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2) = 0$, logo $v_1 - v_2 \in \ker(T)$. Por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor zero, então $v_1 - v_2 = 0$, $v_1 = v_2$.

Como $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$, então T é injetora.

Definição 3. Denomina-se Imagem de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ ao conjunto de vetores $w \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $v \in V$. Esse conjunto é indicado por $Im(T)$ ou $T(V)$.

$$Im(T) = \{w \in W / T(v) = w, \text{ para algum } v \in V\}.$$

Observação 3. O conjunto $Im(T) \subset W$ e $Im(T) \neq \emptyset$, pois $0 = T(0)$. Se $Im(T) = W$, então T é sobrejetora, pois para todo w existe pelo menos um $v \in V$, tal que $T(v) = w$.

Exemplo 4. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (x, y, 0)$. $Im(T) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}$.

Notemos que o núcleo $\ker(T) = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$, pois $T(0, 0, z) = (0, 0, 0)$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

3.4.3 Propriedades da Imagem de uma Transformação Linear

P₁ – A imagem de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é um subespaço vetorial de W .

De fato:

Sejam $w_1, w_2 \in Im(T)$ e $a_1 \in \mathbb{R}$, então existem v_1 e $v_2 \in V$, tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Mostraremos que existem vetores v e u pertencentes a V , tais que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e $a_1 \cdot w_1 \in Im(T)$. Fazendo $v = v_1 + v_2$, então:

$$T(v) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

Isto significa que $w_1 + w_2 \in Im(T)$.

Fazendo $u = a_1 \cdot v_1$

$$T(a_1 \cdot v_1) = a_1 \cdot T(v_1) = a_1 \cdot w_1.$$

Ou seja, $a_1 \cdot w_1 \in Im(T)$.

Logo $Im(T)$ é um subespaço vetorial.

Teorema 1. Seja V um espaço de dimensão finita e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. A dimensão do núcleo da transformação somado a dimensão da imagem da transformação resulta na dimensão de V .

$$\dim \ker(T) + \dim Im(T) = \dim V.$$

De fato:

Seja $S_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base para $\ker(T)$, pelo Observação 2 da seção 3.3 podemos ampliar S_1 de modo obtermos uma base $S_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ para V . Mostraremos que $S = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ é uma base de $Im(T)$.

Sejam $w \in Im(T)$ e $u \in V$, tais que $T(u) = w$. Como u é combinação linear de S_2 , existem escalares a_i e $b_j \in \mathbb{R}$, com $i = \{1, 2, \dots, n\}$ e $j = \{1, 2, \dots, m\}$, tais que:

$$u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n + b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_m \cdot v_m$$

$$T(u) = T(a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n + b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_m \cdot v_m)$$

$$T(u) = T(a_1 \cdot u_1) + T(a_2 \cdot u_2) + \dots + T(a_n \cdot u_n) + T(b_1 \cdot v_1) + T(b_2 \cdot v_2) + \dots + T(b_m \cdot v_m)$$

$$T(u) = a_1 \cdot T(u_1) + a_2 \cdot T(u_2) + \dots + a_n \cdot T(u_n) + b_1 \cdot T(v_1) + b_2 \cdot T(v_2) + \dots + b_m \cdot T(v_m)$$

$$w = a_1 \cdot T(u_1) + a_2 \cdot T(u_2) + \dots + a_n \cdot T(u_n) + b_1 \cdot T(v_1) + b_2 \cdot T(v_2) + \dots + b_m \cdot T(v_m).$$

Como os vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \in \ker(T)$, suas imagens são nulas então temos que:

$$w = b_1 \cdot T(v_1) + b_2 \cdot T(v_2) + \dots + b_m \cdot T(v_m).$$

Portanto, $S = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ gera $Im(T)$. $[S] = Im(T)$.

Suponhamos que $b_1 \cdot T(v_1) + b_2 \cdot T(v_2) + \dots + b_m \cdot T(v_m) = 0$, com $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Então $T(b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_m \cdot v_m) = 0$, o que resulta $b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_m \cdot v_m \in \ker(T)$. Logo existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_m \cdot v_m &= a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n \\ a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n - (b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2 + \dots + b_m \cdot v_m) &= 0 \\ a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n + (-b_1) \cdot v_1 + (-b_2) \cdot v_2 + \dots + (-b_m) \cdot v_m &= 0. \end{aligned}$$

Como $S_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é uma base para V , então $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Logo S é LI. Portanto, S é uma base para $\text{Im}(T)$. Pela Definição 10 da seção 3.3 temos:

$$\begin{aligned} \dim V &= n + m \\ \dim \ker(T) &= n \\ \dim \text{Im}(T) &= m. \end{aligned}$$

Logo $\dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V$.

Corolário 1. Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se $\dim V = \dim W$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

De fato:

Se T é injetora, implica em $\ker(T) = \{0\}$ pela Propriedade 2 da subseção 3.4.2 e Observação 2 da seção 3.4. Então temos $\dim \ker(T) = 0$, portanto pelo Teorema 1 da seção 3.4, temos $0 + \dim \text{Im}(T) = \dim V$. Por hipótese $\dim \text{Im}(T) = \dim W$, então $\text{Im}(T) = W$, por tanto T é sobrejetora.

Reciprocamente, se T é sobrejetora implica dizer que $\text{Im}(T) = W$, então $\dim \text{Im}(T) = \dim W$. Por hipótese $\dim \text{Im}(T) = \dim V$, implica $\dim \ker(T) = \{0\}$ pelo Teorema 1 da seção 3.4. Então T é injetora pela Propriedade 2 da subseção 3.4.2 e Observação 2 da seção 3.4.

Portanto, quando temos uma transformação linear na qual $\dim V = \dim W$, se T é injetora ou sobrejetora, então T é bijetora (injetora e sobrejetora ao mesmo tempo).

Corolário 2. Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se $\dim V = \dim W$ e T é injetora, então T transforma a base $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V em uma base $T(\alpha) = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ de W .

De fato:

Como $\dim V = \dim W = m$, precisamos mostrar que $T(\alpha)$ é LI. Seja $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Consideremos a igualdade $a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) + \dots + a_n \cdot T(v_n) = 0$.

Então $T(a_1 \cdot v_1) + T(a_2 \cdot v_2) + \dots + T(a_n \cdot v_n) = 0$ e, portanto, $T(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n) = 0$. Como T é injetora implica $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$, sendo $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base LI, então $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Logo $T(\alpha)$ é LI e uma base de W .

Definição 4. Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V e $v \in V$, tal que $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$. Chamamos de matriz coordenada ou coordenadas do vetor v em relação a β , os números reais a_1, a_2, \dots, a_n . Denotamos por:

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5. Sejam o espaço vetorial \mathbb{R}^2 e a base canônica $\alpha = \{(1,0), (0,1)\}$. Podemos representar o vetor $v = (1,2)$, pertencente a \mathbb{R}^2 , em relação a base α .

$$v = (1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)$$

$$[1,2]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definição 5. Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ duas bases de V . Dado um vetor $w \in V$, podemos escrevê-lo como combinação linear das duas bases:

$$w = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \dots + x_n \cdot u_n$$

$$w = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \dots + y_n \cdot v_n.$$

$$\text{Logo } [w]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [w]_{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base de V , podemos escrever $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ como combinação linear de $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Temos:

$$v_1 = a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + \dots + a_{n1} \cdot u_n$$

$$v_2 = a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + \dots + a_{n2} \cdot u_n$$

$$\vdots$$

$$v_n = a_{1n} \cdot u_1 + a_{2n} \cdot u_2 + \dots + a_{nn} \cdot u_n.$$

Logo:

$$w = y_1 \cdot (a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + \dots + a_{n1} \cdot u_n) + y_2 \cdot (a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + \dots + a_{n2} \cdot u_n) + \dots + y_n \cdot (a_{1n} \cdot u_1 + a_{2n} \cdot u_2 + \dots + a_{nn} \cdot u_n)$$

$$w = y_1 \cdot a_{11} \cdot u_1 + y_1 \cdot a_{21} \cdot u_2 + \dots + y_1 \cdot a_{n1} \cdot u_n + y_2 \cdot a_{12} \cdot u_1 + y_2 \cdot a_{22} \cdot u_2 + \dots + y_2 \cdot a_{n2} \cdot u_n + \dots + y_n \cdot a_{1n} \cdot u_1 + y_n \cdot a_{2n} \cdot u_2 + \dots + y_n \cdot a_{nn} \cdot u_n$$

$$w = (a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \cdots + a_{1n} \cdot y_n) \cdot u_1 + (a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \cdots + a_{2n} \cdot y_n) \cdot u_2 + \cdots \\ + (a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \cdots + a_{nn} \cdot y_n) \cdot u_n = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n.$$

Escrevemos na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ou, simbolicamente:

$$[w]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [w]_\beta.$$

A matriz $[I]_\alpha^\beta$ é chamada de matriz de mudança de base β para base α .

Exemplo 6. Sejam $\alpha = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1), (1,0)\} \in \mathbb{R}^2$, encontremos a matriz de mudança de base β para base α .

Escrevendo a base β como combinação linear da base α , temos:

$$(1,1) = a_{11} \cdot (1,0) + a_{21} \cdot (0,1)$$

$$(1,0) = a_{12} \cdot (1,0) + a_{22} \cdot (0,1)$$

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta.$$

Definição 6. Toda matriz de mudança de base é invertível.

Prova:

Sejam $[I]_\alpha^\beta$ e $[I]_\theta^\alpha$ as matrizes de mudança de base de β para α e de α para θ , respectivamente, logo $[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta$ e $[v]_\theta = [I]_\theta^\alpha \cdot [v]_\alpha$. Como $[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta$, então $[v]_\theta = [I]_\theta^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta$.

Suponhamos que a base β seja igual a base θ , então a matriz de mudança de base $[I]_\theta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[I]_\theta^\alpha = [I]_\beta^\alpha$.

$$[v]_\theta = [I]_\theta^\beta \cdot [v]_\beta$$

$$[v]_\theta = [I]_\theta^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta.$$

Comparando as equações acima, temos

$$[I]_\theta^\beta = [I]_\theta^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta.$$

Como $\beta = \theta$ e pela Definição 17 da seção 3.2, segue que

$$[I]_\theta^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta = [I]_\beta^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto $[I]_\beta^\alpha$ é a inversa de $[I]_\alpha^\beta$.

Exemplo 7. Utilizando o Exemplo 6 da seção 3.4, dado o vetor $v = (2,1) \in \mathbb{R}^2$, encontremos a matriz coordenada desse vetor na base $\beta \in \mathbb{R}^2$.

Para acharmos v na base β , precisamos encontrar a inversa de $[I]_{\alpha}^{\beta}$, que é $[I]_{\beta}^{\alpha}$. Fazendo os cálculos temos que:

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$$

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $v = (2,1) = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,0)$

Definição 7. Sejam $T: V \rightarrow W$, uma transformação linear, e, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, tais que $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são bases de V e W , respectivamente.

Seja $u \in V$, então u pode ser escrito como combinação linear da base α de V .

$$u = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n.$$

Logo:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n) = T(x_1 \cdot v_1) + T(x_2 \cdot v_2) + \dots + T(x_n \cdot v_n) = \\ &= x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \dots + x_n \cdot T(v_n). \end{aligned}$$

Sendo $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ vetores de W , podem ser escritos como combinações lineares da base β .

$$T(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{m1} \cdot w_m$$

$$T(v_2) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \dots + a_{m2} \cdot w_m$$

⋮

$$T(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{mn} \cdot w_m.$$

Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} T(u) &= x_1 \cdot (a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + \dots + a_{m1} \cdot w_m) + x_2 \cdot (a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + \dots + a_{m2} \cdot w_m) \\ &+ \dots + x_n \cdot (a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + \dots + a_{mn} \cdot w_m) = \\ &= (x_1 \cdot a_{11} \cdot w_1 + x_1 \cdot a_{21} \cdot w_2 + \dots + x_1 \cdot a_{m1} \cdot w_m) + \\ &+ (x_2 \cdot a_{12} \cdot w_1 + x_2 \cdot a_{22} \cdot w_2 + \dots + x_2 \cdot a_{m2} \cdot w_m) + \\ &+ \dots + (x_n \cdot a_{1n} \cdot w_1 + x_n \cdot a_{2n} \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot a_{mn} \cdot w_m) = \\ &= (x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot a_{12} + \dots + x_n \cdot a_{1n}) \cdot w_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(x_1 \cdot a_{21} + x_2 \cdot a_{22} + \dots + x_n \cdot a_{2n}) \cdot w_2 + \\
&+ \dots + (x_1 \cdot a_{m1} + x_2 \cdot a_{m2} + \dots + x_n \cdot a_{mn}) \cdot w_m = \\
&= (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n) \cdot w_1 + \\
&+(a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n) \cdot w_2 + \\
&+ \dots + (a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n) \cdot w_m.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $T(u)$ pode ser escrito como combinação linear da base β de W .

$$T(u) = y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2 + \dots + y_m \cdot w_m.$$

Logo temos:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\
y_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Onde podemos escrever esse sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ou, simbolicamente:

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [u]_\alpha.$$

A matriz $[T]_\beta^\alpha$ é chamada de matriz da transformação linear em relação as bases α e β .

Exemplo 8. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2 \cdot x - y + z, 3 \cdot x + y - 2 \cdot z)$, e as bases $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$, com $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$, e $\beta = \{u_1, u_2\}$, com $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (0, 1)$.

$$T(v_1) = (2 \cdot 1 - 0 + 0, 3 \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 0) = (2, 3) = a_{11} \cdot (1, 0) + a_{21} \cdot (0, 1)$$

$$T(v_2) = (2 \cdot 0 - 1 + 0, 3 \cdot 0 + 1 - 2 \cdot 0) = (-1, 1) = a_{12} \cdot (1, 0) + a_{22} \cdot (0, 1)$$

$$T(v_3) = (2 \cdot 0 - 0 + 1, 3 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 1) = (1, -2) = a_{13} \cdot (1, 0) + a_{23} \cdot (0, 1).$$

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} = 2 \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} = 3 \end{cases} \\
\begin{cases} 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} = -1 \\ 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} = 1 \end{cases} \\
\begin{cases} 1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} = 1 \\ 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} = -2. \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos as seguintes soluções:

$$a_{11} = 2$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= 3 \\
 a_{12} &= -1 \\
 a_{22} &= 1 \\
 a_{13} &= 1 \\
 a_{23} &= -2.
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 [T(u)]_{\beta} &= [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [u]_{\alpha} \\
 [T(u)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot [u]_{\alpha} \\
 [T(u)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot [u]_{\alpha} \\
 [T]_{\beta}^{\alpha} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3.5 Autovalores e Autovetores

Os autovalores e autovetores são definições de extrema importância, sendo bastante estudados por possuírem inúmeras aplicações em diversos campos de conhecimento como a mecânica quântica, processamento de imagens, mecânica dos sólidos, estatísticas, entre outros. A seguir iniciaremos com os conceitos de operador linear, autovalores e autovetores e outras definições importantes.

Definição 1. Uma transformação linear $T: V \rightarrow V$ é denominada operador linear. Um vetor $v \in V$, com $v \neq 0$, é chamado de autovetor do operador T , se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$T(v) = \lambda \cdot v.$$

O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda \cdot v$ é chamado de autovalor do operador T associado ao vetor $v \in V$.

Exemplo 1. Sejam o operador linear $T: V \rightarrow V$, $T(x, y) = (-x + 2 \cdot y, 6 \cdot x - 2 \cdot y)$ e o vetor $v \in V$, com $v = (2, 3)$.

$$T(2, 3) = (-2 + 2 \cdot 3, 6 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = (-2 + 6, 12 - 6) = (4, 6) = \lambda \cdot (2, 3).$$

Logo:

$$\lambda = 2.$$

O vetor $v = (2, 3)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 2$, pois

$$\begin{aligned}
 T(v) &= \lambda \cdot (v) \\
 T(v) &= (4, 6) = 2 \cdot (2, 3) = 2 \cdot v.
 \end{aligned}$$

Definição 2. Seja o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja a matriz canônica é $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ou seja, $[T(v)]_M = M \cdot v$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$ são autovalor e correspondente autovetor do operador T , temos que:

$$M \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Como $v \in \mathbb{R}^3$, então v é uma matriz-coluna de ordem 3×1 .

Reescrevendo a equação, temos:

$$M \cdot v - \lambda \cdot v = 0.$$

Como $v = I \cdot v$, I é a matriz identidade, temos:

$$M \cdot v - \lambda \cdot I \cdot v = 0$$

$$(M - \lambda \cdot I) \cdot v = 0.$$

Se escrevermos explicitamente essa equação teremos:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \\ & \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \\ & \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo essa multiplicação matricial chegaremos a um sistema de três equações com três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero então a solução do sistema é trivial, $x = y = z = 0$, ou seja v é o vetor nulo. Mas, o objetivo é encontramos os autovetores associados ao autovalor λ , ou seja, $v \neq 0$, então o determinante da matriz dos coeficientes tem que ser igual a zero.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

Denominamos $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$, equação característica do operador T ou da matriz M , e suas raízes são os valores próprios do operador T ou da matriz M . O $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$ é um polinômio em λ , denominado polinômio característico. A substituição de λ pelos seus

valores na equação $\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ permite determinar os vetores próprios associados.

Definição 3. Seja um operador linear $T: V \rightarrow V$. Denominamos autoespaço associado à λ , ao conjunto de autovetores associados à λ .

Exemplo 2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$, temos que a matriz canônica do operador T é:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$(3 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) +$$

$$- [1 \cdot (5 - \lambda) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (3 - \lambda) + (3 - \lambda) \cdot (-1) \cdot (-1)] = 0$$

$$(9 - 6\lambda + \lambda^2) \cdot (5 - \lambda) + 1 + 1 +$$

$$- [(5 - \lambda) + (3 - \lambda) + (3 - \lambda)] = 0$$

$$(45 - 30\lambda + 5\lambda^2 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3) + 2 - (11 - 3\lambda) = 0$$

$$(45 - 39\lambda + 11\lambda^2 - \lambda^3) + 2 - 11 + 3\lambda = 0$$

$$45 - 39\lambda + 11\lambda^2 - \lambda^3 - 9 + 3\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por (-1) , temos:

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0.$$

Caso existam soluções inteiras serão divisores do termo independente (-36) . O número 2 é divisor de (-36) . Ao dividirmos o polinômio $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36$ por $(\lambda - 2)$ obtemos $\lambda^2 - 9\lambda + 18$, logo:

$$(\lambda^2 - 9\lambda + 18) \cdot (\lambda - 2) = 0.$$

Portanto, $\lambda = 2$ é uma das raízes da equação. Resolvendo $\lambda^2 - 9\lambda - 18 = 0$, obtemos $\lambda = 3$ e $\lambda = 6$. Logo os valores próprios do operador T são:

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 6.$$

A substituição de λ pelos seus valores na equação $(M - \lambda.I).v = 0$ nos permite a determinação dos vetores próprios associados. Como $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, o sistema toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Para $\lambda = 2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 - 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 - 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 1.x - 1.y + 1.z = 0 \\ -1.x + 3.y - 1.z = 0 \\ 1.x - 1.y + 1.z = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $y = 0$ e $z = -x$.

Então os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são todos os vetores da forma $(x, 0 - x)$ ou $x \cdot (1, 0 - 1)$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 2$ é representado por $S_2 = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, 0, -1)]$.

Para $\lambda = 3$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 - 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 - 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 - 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0.x - 1.y + 1.z = 0 \\ -1.x + 2.y - 1.z = 0 \\ x - y + 0.z = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $z = y$ e $x = y$, logo os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são todos os vetores da forma (x, x, x) ou $x \cdot (1, 1, 1)$, com $x \neq 0$. O

autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ é representado por $S_3 = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, 1, 1)]$.

Para $\lambda = 6$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3-6 & -1 & 1 \\ -1 & 5-6 & -1 \\ 1 & -1 & 3-6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ -1 \cdot x - 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0 \\ x - y - 3 \cdot z = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $y = -2 \cdot z$ e $z = x$, logo os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 6$ são todos os vetores da forma $(x, -2 \cdot x, x)$ ou $x \cdot (1, -2, 1)$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 6$ é representado por $S_6 = \{(x, -2 \cdot x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, -2, 1)]$.

Observação 1. Os vetores próprios associados a valores próprios distintos de um operador linear $T \rightarrow T$, são vetores LI.

A demonstração a seguir será feita para o caso λ_1 e λ_2 distintos. A prova é análoga no caso de n valores próprios distintos.

Seja $T(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 \cdot v_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Vamos levar em consideração a igualdade $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = 0$, pela linearidade de T temos:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) &= 0 \\ a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicamos a igualdade considerada $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = 0$ por λ_1 e subtraímos a igualdade obtida $a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 = 0$.

Obtemos:

$$a_2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot v_2 = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, temos $a_2 = 0$, fazendo a substituição na igualdade $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = 0$, temos $a_1 \cdot v_1 = 0$, mas como $v_1 \neq 0$, então $a_1 = 0$.

Logo o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI.

Observação 2. No caso particular acima, se o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiver $\{v_1, v_2\}$ como conjunto formado pelos autovetores associados aos autovalores distintos λ_1 e λ_2 , este conjunto será uma base para \mathbb{R}^2 . De forma análoga acontece no caso de $T: V \rightarrow V$, linear com

$\dim V = n$, tiver n autovalores distintos, o conjunto de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ autovetores associados, serão uma base para V .

Exemplo 3. Seja um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-3 \cdot x - 5 \cdot y, 2 \cdot y)$, cuja a matriz canônica é $M = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(M - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$$

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -3 - \lambda & -5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(-3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) + \{-[0 \cdot (-5)]\} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Resolvendo a equação acima, temos que

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -3.$$

Para $\lambda = 2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 - 2 & -5 \\ 0 & 2 - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -5 \cdot x - 5 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$x = -y.$$

Logo os autovetores associado ao autovalor $\lambda = 2$, são os vetores da forma $(x, -x)$ ou $x \cdot (1, -1)$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 2$ é representado por $S_2 = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, -1)]$.

Para $\lambda = -3$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 - (-3) & -5 \\ 0 & 2 - (-3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x - 5 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 5 \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$y = 0.$$

Logo os autovetores associado ao autovalor $\lambda = -3$, são os vetores $(x, 0)$ ou $x \cdot (1, 0)$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -3$ é representado por $S_{-3} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, 0)]$.

Portanto, o conjunto $\{(1, -1), (1, 0)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .

Podemos encontrar o operador linear T , dados a base formada pelos autovetores e seus respectivos autovalores.

Exemplo 4. Seja linear $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ os autovalores de um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e seus respectivos autovetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 0)$. Para determinarmos o operador linear $T(x, y)$ tomemos um vetor $u = (x, y)$ escrito como combinação linear da base formada pelos autovetores de T .

$$\begin{aligned} u &= a \cdot v_1 + b \cdot v_2 \\ (x, y) &= a \cdot (1, -1) + b \cdot (1, 0) \\ \begin{cases} 1 \cdot a + 1 \cdot b &= x \\ -a + 0 \cdot b &= y. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo;

$$\begin{aligned} a &= -y \\ b &= x + y \\ u &= (x, y) = -y \cdot v_1 + (x + y) \cdot v_2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 \cdot v_1 = 2 \cdot (1, -1) = (2, -2) \\ T(v_2) &= \lambda_2 \cdot v_2 = (-3) \cdot (1, 0) = (-3, 0). \end{aligned}$$

Pela linearidade, temos

$$\begin{aligned} T(u) &= -y \cdot T(v_1) + (x + y) \cdot T(v_2) \\ T(u) &= -y \cdot (2, -2) + (x + y) \cdot (-3, 0) \\ T(u) &= (-2 \cdot y, 2 \cdot y) + (-3 \cdot x - 3 \cdot y, 0) \\ T(u) &= T(x, y) = (-3 \cdot x - 5 \cdot y, 2 \cdot y). \end{aligned}$$

Observação 3. Podemos reescrever $T(v_1)$ e $T(v_2)$ do Exemplo 4 da seção 3.5 da seguinte forma:

$$T(v_1) = 2 \cdot (1, -1) + 0 \cdot (1, 0) = (2, -2)$$

$$T(v_2) = 0 \cdot (1, -1) + (-3) \cdot (1, 0) = (-3, 0).$$

Onde a matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ representa o operador T na base dos autovetores e é uma matriz diagonal cujo os elementos da diagonal principal são λ_1 e λ_2 .

3.6 Diagonalização de Matrizes

A diagonalização de matrizes é muito utilizada em Economia, na Engenharia Elétrica, na Engenharia Civil, dentre outras áreas. Tem significativa relevância em situações problemas que envolvem autovalores e autovetores. Serão apresentadas algumas definições para melhor compreensão das aplicações propostas.

Definição 1. Sejam a matriz diagonal D e a matriz canônica do operador linear M . D e M são chamadas de matrizes semelhantes, pois representam o mesmo operador linear em bases diferentes.

De fato:

Seja $T: V \rightarrow V$, um operador linear. Se α e β são bases de V e $[T]_{\alpha}^{\alpha} = M$ e $[T]_{\beta}^{\beta} = D$ as matrizes que representam a transformação linear nas bases α e β , respectivamente, então, pelo conceito de matriz de uma transformação linear, temos que:

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\alpha} &= [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha} \\ [T(v)]_{\beta} &= [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}. \end{aligned}$$

Sendo $[I]_{\alpha}^{\beta}$, a matriz de mudança de base de β para α , então escrevemos:

$$\begin{aligned} [v]_{\alpha} &= [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} \\ [T(v)]_{\alpha} &= [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot T[v]_{\beta}. \end{aligned}$$

Substituindo $[v]_{\alpha}$ e $[T(v)]_{\alpha}$ em $[T(v)]_{\alpha} = [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$, temos:

$$[I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [T(v)]_{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}.$$

Pela Definição 6 da seção 3.4 a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\beta}$ é invertível, segue que:

$$T[v]_{\beta} = [I]_{\alpha}^{\beta^{-1}} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}.$$

Substituindo $[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}$, temos:

$$[T]_{\beta}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} = [I]_{\alpha}^{\beta^{-1}} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta}.$$

Dessa igualdade, tiramos que:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\alpha}^{\beta^{-1}} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\beta}.$$

Substituindo $[I]_{\alpha}^{\beta} = P$, $[T]_{\beta}^{\beta} = D$ e $[T]_{\alpha}^{\alpha} = M$, chegamos a conclusão:

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P.$$

Definição 2. Seja uma matriz canônica M de um operador linear T . A matriz M é dita diagonalizável se existir uma matriz invertível P , tal que $P^{-1} \cdot M \cdot P$ resulte em uma matriz diagonal D .

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P.$$

Dizemos que P diagonaliza M .

A definição pode ser descrita de uma outra forma equivalente: um operador linear $T: V \rightarrow V$ é diagonalizável se existe um conjunto autovetores de T que formam uma base para o espaço vetorial V .

Observação 1. As colunas de uma matriz P são formadas pelos autovetores de T .

Exemplo 1. Seja um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4 \cdot x + 5 \cdot y, 2 \cdot x + y)$, a matriz canônica do operador linear é $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determinaremos os autovalores de M .

$$(M - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$$

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(4 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) + [-(5 \cdot 2)] = 0$$

$$\lambda^2 - 5 \cdot \lambda - 6 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = -1.$$

Para $\lambda = 6$, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 - 6 & 5 \\ 2 & 1 - 6 \end{bmatrix} \cdot v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2 \cdot x + 5 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 0. \end{cases}$$

Logo os autovetores associado ao autovalor $\lambda = 6$, são os vetores da forma $(x, \frac{2}{5} \cdot x)$ ou $x \cdot (1, \frac{2}{5})$. Cujos autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 6$ é representado por $S_6 = \{(x, \frac{2}{5} \cdot x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, \frac{2}{5})]$.

Para $\lambda = -1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 - (-1) & 5 \\ 2 & 1 - (-1) \end{bmatrix} \cdot v = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{cases} 5 \cdot x + 5 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo os autovetores associado ao autovalor $\lambda = -1$, são os vetores da forma $(x, -x)$ ou $x \cdot (1, -1)$. Cujo autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -1$ é representado por $S_{-1} = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, -1)]$.

Pela Definição 2 da seção 3.6 e pela Observação 1 da seção 3.6 temos uma base formada por autovetores de T , onde as colunas da matriz P é formada pelos autovetores.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Onde P é a matriz que diagonaliza M , isto é:

$$P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D.$$

Alguns problemas matemáticos necessitam que calculemos potências elevadas de matrizes, finalizaremos este capítulo mostrando que estes cálculos podem ser facilitados em matrizes diagonalizáveis.

Seja uma matriz $A_{m \times m}$ diagonalizável e P uma matriz invertível, temos que:

$$(P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot I \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A^2 \cdot P = D^2.$$

Podemos generalizar, para qualquer inteiro positivo n ,

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot A^n \cdot P &= D^n \\ P \cdot P^{-1} \cdot A^n \cdot P \cdot P^{-1} &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\ I \cdot A^n \cdot I &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\ A^n &= P \cdot D^n \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Esta equação representa a n -ésima potência de A em função da n -ésima potência da matriz diagonal D .

O cálculo de D^n é simples, por ser uma matriz diagonal temos que:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{bmatrix}; D^n = \begin{bmatrix} d_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm}^n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2. Utilizaremos o Exemplo 1 da seção 3.6, com $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, para calcular

M^3 .

Temos que:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}; P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 2 & -\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$M^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6^3 & 0 \\ 0 & -1^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 2 & -\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & 155 \\ 62 & 61 \end{bmatrix}.$$

3.7 Noção de Limites

Definição 1. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ é chamado ponto de acumulação do conjunto X , quando todo o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a , contém algum ponto $x \in X$ tal que $x \neq a$. O conjunto dos pontos de acumulação será representado por X' . Expressamos simbolicamente a definição da seguinte forma:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Definição 2. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de valores reais definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X , portanto, $a \in X'$. Chama-se o número L de limite de $f(x)$, quando x tende para a , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, obtemos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Expressamos simbolicamente da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Podemos compreender, de maneira informal, do seguinte modo: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa dizer que podemos ter $f(x)$ arbitrariamente próximo de L quanto se queira, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, mas não igual, a a . Portanto, não nos interessa o comportamento de $f(x)$ quando $x = a$, mas sim quando x assume valores próximos a a . Esse é o significado da restrição $0 < |x - a|$.

Observação 1. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0.$$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a , temos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Observação 2. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_+$, onde X'_+ é o conjunto dos pontos de acumulação maiores e próximos de a , denominamos limite lateral a direita o valor L quando $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Observação 3. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_-$, onde X'_- é o conjunto dos pontos de acumulação menores e próximos de a , denominamos limite lateral a esquerda o valor L quando $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Observação 4. Dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se, e somente, se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Exemplo 1. O $\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 3 = 7$. Neste exemplo basta substituímos diretamente $x = 2$

Para encontrarmos certos limites precisamos utilizar alguns artifícios algébricos.

Exemplo 2. O $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot (2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2 \cdot (1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})}{(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{2}{1} = 2$

Exemplo 3. O $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot \text{sen } x}{x} = 0$. Pela Observação 1 de 3.6, $-1 < \frac{|x|}{x} < 1$ é limitada e o $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$, logo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \cdot \text{sen } x}{x} = 0$.

Exemplo 4. O $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$.

Exemplo 5. O $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (x-5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} x - 5 = 0$

Observação 5. Alguns limites do tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, resultam em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Para estes casos podemos determinar o limite utilizando a Regra de L'Hospital, que consiste em determinar, caso existam, as derivadas de $f(x)$ e $g(x)$ no ponto $x = a$ e utilizá-las para calcular o limite.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Exemplo 6. O $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Exemplo 7. O $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = 2$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \cos 2x = 2$.

Exemplo 8. O $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Esses são alguns exemplos práticos para se ter uma noção de limites dentro do contexto que será utilizado nas aplicações da álgebra linear.

CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NA GENÉTICA

Neste capítulo veremos algumas aplicações para verificarmos a hereditariedade de características de animais ou plantas. Segundo Anton e Rorres (2001) a álgebra linear desempenha uma função importante para a genética, pois podemos investigar a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações calculando potências de matrizes.

4.1 Características Hereditárias Autossômicas

Consideremos por suposição que a característica hereditária é comandada por um conjunto de dois genes A e a . Cada indivíduo de cada sexo carregam estes dois genes por hereditariedade autossômica, os prováveis pares são AA , Aa , aa , e denominamos genótipo do indivíduo a cada um destes pares. Estes genes são responsáveis por certas características, por exemplo, nos seres humanos com o genótipo AA e Aa possuem olhos castanhos e os que possuem o aa , possuem olhos azuis, dizemos então que o gene A é dominante e o a é recessivo, pois externamente os que possuem o genótipo Aa possuem olhos castanhos.

Na hereditariedade autossômica um indivíduo recebe um gene de cada par de genes de seus pais para formar seu par único e próprio. Até o momento, é conhecido que essa herança genética é uma questão de sorte qual dos dois genes o pais passarão a seus filhos. Na tabela abaixo listamos todas as probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as combinações de genótipos dos pais.

Tabela 1. Probabilidades dos Possíveis Genótipos dos Descendentes

Genótipo do Descendente	Genótipo dos Pais					
	$AA \times AA$	$AA \times Aa$	$AA \times aa$	$Aa \times Aa$	$Aa \times aa$	$aa \times aa$
(AA)	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
(Aa)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(aa)	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

4.2 Aplicação 1. Distribuição de Genótipos numa população

Suponha que um agricultor tenha uma grande população de plantas em que esta consiste de alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos AA , Aa e aa . O agricultor deseja implementar um programa de criação no qual cada planta da população é fertilizada por uma planta do genótipo AA . Queremos encontrar aqui uma expressão para a distribuição para os três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações, ou seja, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos que:

$a_n \rightarrow$ representa a fração das plantas de genótipo AA na n -ésima geração.

b_n → representa a fração das plantas de genótipo Aa na n -ésima geração.

c_n → representa a fração das plantas de genótipo aa na n -ésima geração.

Assim temos a_0 , b_0 e c_0 as frações que representam a distribuição inicial e sabemos que $a_n + b_n + c_n = 1$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, pois a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

Pela Tabela 1 da seção 4.1 podemos obter a distribuição de genótipos em cada geração em função das gerações precedentes.

Ao analisarmos o cruzamento $AA - AA$ temos que a probabilidade é 100% dos descendentes serem do genótipo AA .

No cruzamento $AA - Aa$, temos que a probabilidade 50% dos descendentes serem do genótipo AA e 50% do genótipo Aa .

E, finalmente, no cruzamento $AA - aa$, a probabilidade é 100% dos descendentes serem do tipo Aa .

Logo, a fração a_n que representa a população do genótipo AA na n -ésima geração será a probabilidade dos descendentes do cruzamento $AA - AA$ serem de genótipo AA multiplicado pela fração da população que representa os descendentes de genótipo AA da geração anterior, somado, com a probabilidade dos descendentes do cruzamento $AA - Aa$ serem de genótipo AA multiplicado pela fração da população que representa os descendentes de genótipo Aa da geração anterior.

A fração b_n que representa a população do genótipo Aa na n -ésima geração será a probabilidade dos descendentes do cruzamento $AA - Aa$ serem de genótipo Aa multiplicado pela fração da população que representa os descendentes de genótipo Aa da geração anterior, somado, à probabilidade dos descendentes do cruzamento $AA - aa$ serem Aa multiplicado pela fração da população que representa os descendentes de genótipo aa da geração anterior.

Já a fração c_n que representa a população de genótipo aa na n -ésima geração será igual a zero, pois não há probabilidade de surgirem descendentes do tipo aa .

Assim, expressamos as afirmações acima pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \cdot a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot b_{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{2} \cdot b_{n-1} + 1 \cdot c_{n-1} \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (1)}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

A primeira equação nos dá a seguinte informação, que todos os descendentes de genótipo AA serão do tipo AA neste programa de criação e que metade dos descendentes de genótipo Aa será do tipo AA .

Na segunda equação, que a metade dos descendentes de genótipo Aa será do tipo Aa e que todos os descendentes de genótipo aa será do tipo Aa .

E na terceira equação, que não existem descendentes de genótipo aa .

As equações (1) podem ser escritas na forma matricial.

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (2)}$$

$$x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Observemos que a matriz M tem as mesmas colunas da Tabela 1 da seção 4.1. Encontramos então a equação:

$$x^{(n)} = M \cdot x^{(n-1)} \quad \text{Eq. (3)}$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Como $x^{(n-1)} = M \cdot x^{(n-2)}$, temos:

$$x^{(n)} = M \cdot M \cdot x^{(n-2)} = M^2 \cdot x^{(n-2)} \quad \text{Eq. (4)}$$

Fazendo sucessivamente esse procedimento chegamos na seguinte equação:

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)} \quad \text{Eq. (5)}$$

Onde $x^{(0)}$ é a distribuição inicial.

Se encontrarmos uma expressão explícita para M^n , poderemos usar a equação $x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)}$. Para encontrarmos uma expressão explícita diagonalizamos M , ou seja, procuramos uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que:

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Então temos que:

$$M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \quad \text{Eq. (6)}$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Onde } D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix}.$$

Determinaremos os autovalores e autovetores da matriz M .

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(M - \lambda \cdot I) \cdot v = 0.$$

Logo:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, o $\det(M - \lambda \cdot I) = 0$,

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1 - \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \cdot (-\lambda) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 +$$

$$- \left[0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (-\lambda) + (1 - \lambda) \cdot 1 \cdot 0 \right] = 0$$

$$(1 - \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \cdot (-\lambda) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \lambda + \lambda^2 \right) \cdot (-\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{3}{2} \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2} \cdot \lambda = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por (-1) , temos:

$$\lambda^3 - \frac{3}{2} \cdot \lambda^2 + \frac{1}{2} \cdot \lambda = 0.$$

Portanto, as raízes do polinômio característico são os valores próprios do operador T são:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

A substituição de λ pelos seus valores na equação $(M - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$ nos permite a determinação dos vetores próprios associados.

Como $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, o sistema toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Para $\lambda = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 - 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $y = -2 \cdot x$ e $z = x$.

Então os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$ são todos os vetores da forma $(x, -2 \cdot x, x)$ ou $x \cdot (1, -2, 1)$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 0$ é representado por $S_0 = \{(x, -2 \cdot x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, -2, 1)]$.

Para $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $z = 0$ e $y = 0$, logo os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são todos os vetores da forma $(x, 0, 0)$ ou $x \cdot (1, 0, 0)$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ é representado por $S_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, 0, 0)]$.

Para $\lambda = \frac{1}{2}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $y = -x$ e $z = 0$, logo os autovetores associados ao autovalor $\lambda = \frac{1}{2}$ são todos os vetores da forma $(x, -x, 0)$ ou $x \cdot (1, -1, 0)$, com $x \neq 0$. O autoespaço associado ao autovalor $\lambda = \frac{1}{2}$ é representado por $S_{\frac{1}{2}} = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ ou por $[(1, -1, 0)]$.

Logo, pela Definição 2 da seção 3.6, M é diagonalizável. Encontramos, então, os seguintes autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ e seus respectivos autovetores $v_1 = (1, -2, 1)$,

$v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (1, -1, 0)$. Logo temos $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, a matriz formada pelos

autovalores e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz formada pelos autovetores. Utilizando a Definição

17 da seção 3.2, determinamos $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Usando a equação (6), temos que:

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= M^n \cdot x^{(0)} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot x^{(0)} \\ x^{(n)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ x^{(n)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ x^{(n)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot c_0 \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot c_0 \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. (7)}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

Estas são as fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na n -ésima geração de plantas em função das frações dos genótipos iniciais.

Quando n tende ao infinito as frações $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ tendem a zero, portanto as equações (7) ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a_0 + b_0 + c_0 = 1 \\ b_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$c_n \rightarrow 0$$

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso significa que no limite todas as plantas da população serão de genótipo AA.

4.3 Aplicação 2. Modificando a Aplicação 1

Vamos supor que cada planta dessa população é fertilizada por uma de mesmo genótipo. Temos que:

a_n → representa a fração das plantas de genótipo AA na n-ésima geração.

b_n → representa a fração das plantas de genótipo Aa na n-ésima geração.

c_n → representa a fração das plantas de genótipo aa na n-ésima geração.

Pela Tabela 1 da seção 4.1 podemos obter a distribuição de genótipos em cada geração em função das gerações precedentes, expressas pelas equações abaixo:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4} \cdot b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot b_{n-1}$$

$$c_n = \frac{1}{4} \cdot b_{n-1} + c_{n-1}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

A primeira equação nos dá a seguinte informação, que todos os descendentes de genótipo AA serão do tipo AA neste programa de criação e que um quarto dos descendentes de genótipo Aa será do tipo AA.

Na segunda equação, que a metade dos descendentes de genótipo Aa será do tipo Aa.

E na terceira equação, que um quarto dos descendentes do genótipo Aa serão do tipo aa e que todos os descendentes de genótipo aa serão do tipo aa.

Usando a mesma notação da aplicação anterior, temos que as equações acima podem ser escritas na forma matricial.

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Observemos que a matriz M tem as mesmas colunas da Tabela 1 da seção 4.1. Encontramos então a equação:

$$x^{(n)} = M \cdot x^{(n-1)}$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Como $x^{(n-1)} = M \cdot x^{(n-2)}$, temos:

$$x^{(n)} = M \cdot M \cdot x^{(n-2)} = M^2 \cdot x^{(n-2)}$$

Fazendo sucessivamente esse procedimento chegamos na seguinte equação:

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)}$$

Onde $x^{(0)}$ é a distribuição inicial.

Diagonalizando M encontramos os seguintes autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Como $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, então dizemos que λ_1 possui multiplicidade dois, os vetores são do formato $(x, 0, z)$, notamos que o autoespaço associado é bidimensional, para $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, os vetores são da forma $(x, -2x, x)$ ou $x \cdot (1, -2, 1)$. Para formarmos uma base de autovetores escolheremos dois autovetores LI, v_1 e v_2 , do autoespaço associado ao autovalor λ_1 e um único autovetor v_3 associado ao autovalor λ_3 . Temos:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot x^{(0)}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$a_n = a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] \cdot b_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0$$

$$c_n = c_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] \cdot b_0$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

Estas são as fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na n -ésima geração de plantas em função das frações dos genótipos iniciais.

Quando n tende ao infinito as frações $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ tendem a zero, portanto as equações ficam da seguinte forma:

$$a_n \rightarrow a_0 + \frac{1}{2} \cdot b_0$$

$$b_n \rightarrow 0$$

$$c_n \rightarrow c_0 + \frac{1}{2} \cdot b_0$$

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 + \frac{1}{2} \cdot b_0 \\ 0 \\ c_0 + \frac{1}{2} \cdot b_0 \end{bmatrix}$$

Isso significa que no limite todas as plantas da população serão de genótipo AA e aa .

4.4 Doenças Recessivas Autossômicas

Há muitas doenças genéticas que são controladas por hereditariedade autossômica, no qual um gene normal A domina o gene anormal a . Um indivíduo que possui os pares de genes AA é normal, já o que possui o genótipo Aa é normal, mas é portador do gene que carrega a doença, entretanto o indivíduo que carrega o genótipo aa é afetado pela doença. Nos seres humanos existem vários tipos de doenças recessivas autossômicas, onde algumas delas estão associadas a um determinado grupo racial. A fibrose cística, por exemplo, é uma doença onde um determinado gene intervém na produção de suor, dos sucos digestivos e dos mucos. Isso compromete o funcionamento das glândulas exócrinas que produzem substâncias (muco, suor ou enzimas pancreáticas) mais espessas e de difícil eliminação, é predominante entre brancos. A anemia falciforme é uma doença que afeta as hemácias e causa uma deficiência no transporte de oxigênio e gás carbônico, é predominante entre negros. A beta-talassemia, doença genética predominante entre pessoas de origem da região do Mar Mediterrâneo, afeta a hemoglobina causando anemia. Entre outras doenças recessivas autossômicas.

4.5 Aplicação 3. Controle de Doença Recessiva Autossômica

Suponhamos que um criador de animais possua uma população de animais portadora de uma doença autossômica recessiva. Suponhamos também que esses animais afetados pela doença não sobrevivem até a maturidade. Uma possível maneira de controlar a doença é o criador cruzar um macho normal com uma fêmea de qualquer genótipo, pois os descendentes terão um pai e uma mãe normais ou um pai normal e uma mãe portadora do gene recessivo. Não podendo haver cruzamento de um pai normal e uma mãe afetada pela doença visto que indivíduos do genótipo aa não sobrevivem até a maturidade. Assim não haverá descendentes afligidos pela doença, neste programa de criação, embora ainda haja portadores do gene recessivo. Determinaremos a fração de portadores da doença em gerações futuras.

$a_n \rightarrow$ representa a fração de descendentes normais, do genótipo AA , na n -ésima geração.

$b_n \rightarrow$ representa a fração de descendentes portadores da doença, do genótipo Aa , na n -ésima geração.

Pela Tabela 1 da seção 4.1 podemos obter a distribuição de genótipos em cada geração em função das gerações precedentes, expressas pelas equações abaixo:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot b_{n-1}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

A primeira equação nos dá a seguinte informação, que todos os descendentes de genótipo AA serão do tipo AA neste programa de criação e que metade dos descendentes de genótipo Aa será do tipo AA .

Na segunda equação, que a metade dos descendentes de genótipo Aa será do tipo Aa .

Temos que as equações acima podem ser escritas na forma matricial.

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Encontramos então a equação:

$$x^{(n)} = M \cdot x^{(n-1)}$$

para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Como $x^{(n-1)} = M \cdot x^{(n-2)}$, temos:

$$x^{(n)} = M \cdot M \cdot x^{(n-2)} = M^2 \cdot x^{(n-2)}.$$

Fazendo sucessivamente esse procedimento chegamos na seguinte equação:

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)}$$

Diagonalizando M encontramos os seguintes autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Os autovetores associados são respectivamente $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, -1)$. Temos:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos que:

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot x^{(0)}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$a_n = a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

Como $a_0 + b_0 = 1$

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot b_0.$$

Estas são as fórmulas explícitas para a fração dos dois genótipos na n -ésima geração de plantas em função das frações dos genótipos iniciais.

Quando n tende ao infinito as frações $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero, portanto as equações ficam da seguinte forma:

$$a_n \rightarrow 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

Ou seja, no limite, a população de animais será do tipo AA , não sendo portadores da doença. É importante observar que a fração que representa os portadores da doença cai pela metade a cada geração de descendentes.

4.6 Hereditariedade Ligada ao Sexo

Além da hereditariedade autossômica temos também a hereditariedade ligada ao sexo, neste tipo de hereditariedade o macho possui um gene, A ou a , e a fêmea possui dois genes, AA , Aa ou aa . Nos seres humanos o daltonismo, que é uma perturbação na percepção visual na qual o indivíduo não consegue discernir as cores verde e vermelho, a hemofilia, que é um distúrbio que afeta a coagulação sanguínea e a distrofia muscular, doença que enfraquece progressivamente os músculos, são algumas das características comandadas pela hereditariedade ligada ao sexo.

A oração “ligada ao sexo” significa dizer que essas características são controladas pelos genes encontrados no cromossomo X, em que o macho possui um e a fêmea dois. A hereditariedade destes genes se comporta da seguinte maneira: um descendente macho recebe

um dos dois genes de sua mãe com igual probabilidade, já a descendente fêmea recebe o único gene de seu pai e um dos dois genes de sua mãe com igual probabilidade. A tabela abaixo nos mostra a probabilidade dos descendentes neste tipo de hereditariedade.

Tabela 2. Probabilidades dos Possíveis Genótipos Descendentes

			Genótipos dos Pais (Pai, Mãe)					
			(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)
Descendentes	Macho	(A)	1	½	0	1	½	0
		(a)	0	½	1	0	½	1
	Fêmea	(AA)	1	½	0	0	0	0
		(Aa)	0	½	1	1	½	0
		(aa)	0	0	0	0	½	1

4.7 Aplicação 4. Programa de Procriação Consanguínea entre Irmãos

Vamos construir um programa de procriação consanguínea relacionada com a hereditariedade ligada ao sexo. Vamos iniciar com um macho e uma fêmea, selecionamos dois descendentes, um de cada sexo, e os cruzamos e assim sucessivamente. Essa procriação consanguínea é muito utilizada em animais. Entre seres humanos, esse tipo de cruzamento era utilizado no antigo Egito para assegurar a pureza da linhagem da família real.

O casal macho-fêmea pode ser qualquer um dos seis tipos que correspondem as seis colunas da Tabela 2 da seção 4.6.

(A, AA) (A, Aa) (A, aa) (a, AA) (a, Aa) (a, aa)

Os pares de irmãos cruzados em sucessivas gerações possuem certas probabilidades de serem destes seis tipos. Escreveremos as frações que representam a probabilidade de cada par de irmãos cruzados na n -ésima geração.

a_n → representa a probabilidade dos irmãos serem de genótipo (A, AA) na n -ésima geração.

b_n → representa a probabilidade dos irmãos serem de genótipo (A, Aa) na n -ésima geração.

c_n → representa a probabilidade dos irmãos serem de genótipo (A, aa) na n -ésima geração.

d_n → representa a probabilidade dos irmãos serem de genótipo (a, AA) na n -ésima geração.

$e_n \rightarrow$ representa a probabilidade dos irmãos serem de genótipo (a, Aa) na n -ésima geração.

$f_n \rightarrow$ representa a probabilidade dos irmãos serem de genótipo (a, aa) na n -ésima geração.

Estas frações representam o vetor coluna $x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix}$, para todo $n = 1, 2, \dots$

Suponhamos que o par de irmãos escolhidos na $(n - 1)$ geração seja (A, AA) , a probabilidade do par de irmãos escolhidos na n -ésima geração será de 100% para (A, AA) . Pois a probabilidade é de 100% dos descendentes machos na n -ésima serem do genótipo A e de 100% das fêmeas na n -ésima geração serem do genótipo AA .

Se o par de irmãos escolhidos na $(n - 1)$ geração for (A, Aa) , temos que a probabilidade dos descendentes machos na n -ésima geração é de 50% do genótipo A e 50% do genótipo a e a probabilidade das descendentes fêmeas na n -ésima geração é de 50% do genótipo AA e 50% do genótipo Aa , logo a probabilidade do par de irmãos escolhidos são de 25% para (A, AA) , 25% para (A, Aa) , 25% para (a, AA) e 25% para (a, Aa) .

Fazendo o mesmo procedimento para os outros pares de irmãos escolhidos na $(n - 1)$ geração, temos a seguinte tabela de probabilidade para escolha dos pares de irmãos.

Tabela 3. Probabilidades de pares de irmãos na n -ésima Geração

		Pares de Irmãos Escolhidos da $(n - 1)$ -ésima Geração					
		(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)
Pares de Irmãos na n -ésima Geração	(A, AA)	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
	(A, Aa)	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0
	(A, aa)	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0
	(a, AA)	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
	(a, Aa)	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0
	(a, aa)	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1

Pela Tabela 3 da seção 4.7 temos que:

$$x^{(n)} = M \cdot x^{(n-1)}$$

Para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Com o auxílio do computador, obtemos os autovalores e autovetores de M , que são:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = -\frac{1}{2}, \lambda_5 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{5}), \lambda_6 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{5})$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (-3 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4} \cdot (-1 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4} \cdot (-1 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4} \cdot (-3 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot (-3 + \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4} \cdot (-1 - \sqrt{5}) \\ \frac{1}{4} \cdot (-1 - \sqrt{5}) \\ 1 \\ \frac{1}{4} \cdot (-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}.$$

Temos que:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4} \cdot (-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4} \cdot (-3 + \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \frac{1}{4} \cdot (-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4} \cdot (-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4} \cdot (-1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{4} \cdot (-1 - \sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \cdot (-3 - \sqrt{5}) & \frac{1}{4} \cdot (-3 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \cdot (1 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \cdot (5 + \sqrt{5}) & \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} & \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} & \frac{1}{20} \cdot (5 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \cdot (5 - \sqrt{5}) & -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} & \frac{1}{20} \cdot (5 - \sqrt{5}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $x^{(n-1)} = M \cdot x^{(n-2)}$, temos:

$$x^{(n)} = M \cdot M \cdot x^{(n-2)} = M^2 \cdot x^{(n-2)}.$$

Fazendo sucessivamente esse procedimento chegamos na seguinte equação:

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)}$$

$$x^{(n)} = M^n \cdot x^{(0)} = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot x^{(0)}.$$

Dado as frações da distribuição inicial para formarmos o vetor $x^{(0)}$, os cálculos não são tão trabalhosos. A matriz D^n possui quatro entradas com valores absolutos menores que 1, e quando n tende ao infinito, D^n tende à matriz abaixo:

$$D^n \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$x^{(n)} \rightarrow P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot x^{(0)}$$

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3} \cdot b_0 + \frac{1}{3} \cdot c_0 + \frac{2}{3} \cdot d_0 + \frac{1}{3} \cdot e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3} \cdot b_0 + \frac{2}{3} \cdot c_0 + \frac{1}{3} \cdot d_0 + \frac{2}{3} \cdot e_0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x^{(n)}$, quando tende ao infinito, nos mostra que na n -ésima geração os pares de irmãos serão de genótipo (A, AA) ou do genótipo (a, aa).

Um exemplo prático seria, se os pais iniciais forem do tipo (a, Aa) , ou seja, a distribuição inicial seria $e_0 = 1$, $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0$. Então quando n tende ao infinito:

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Assim, no limite há probabilidade de $\frac{1}{3}$ dos pares de irmãos serem do genótipo (A, AA) e $\frac{2}{3}$ de serem do genótipo (a, aa) .

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como foco o estudo da diagonalização de matrizes e da potência de matrizes, e demonstrar a resolução das aplicações em que se utiliza este estudo. Nesse contexto há diversas aplicações onde se pode utilizar os estudos da Álgebra Linear. Aqui nos limitamos a utilização da diagonalização e potência de matrizes e a resolução de sistemas equações lineares.

Nota-se que no decorrer deste trabalho foram estudadas várias definições e conceito necessários para compreender o tema em análise, por exemplo, definições de matrizes e suas propriedades, conceito preliminar de determinantes, espaços e subespaços vetoriais, combinações lineares, dependência e independência linear, base e dimensão, transformações lineares, núcleo e imagem, autovalores e autovetores entre outras. A Álgebra Linear é desenvolvida pelo estudo dos espaços vetoriais e este estudo está presente em toda estrutura da disciplina.

A apresentação deste estudo nos fornece a importância de sua utilidade e nos leva ao entendimento de que a Álgebra Linear não deve ser estudada como uma disciplina isolada e sem nexos com outros campos de estudos. Devemos valorizar esta relação com outras áreas de conhecimento e aproveitar este enorme campo de aplicações para um melhor entendimento da disciplina.

REFERÊNCIAS

BOURBAKI, Nicolas. **Elements of the history of mathematics**. New York: Springer Verlag, 1999.

MARTZLOFF, Jean Claude. **A history of chinese mathematics**. New York: Springer Verlag, 1987.

DIEUDONNÉ, Jean. **History of Functional Analysis**. (North-Holland Mathematics Studies.) NorthHolland, 1981.

BASHMAKOVA, Isabella, SMIRNOVA, Galina. **The beginnings and evolution of algebra**. New York: Cambridge University Press, 2000. (Dolciani Mathematical Expositions; nº 23)

KLINGBARDT, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1972.

MUIR, Thomas. **The theory of determinants in the historical order of development**. London: McMillan and Co.Ltd., 1890. Versão digitalizada obtida na Universidade de Michigan (<http://name.umdl.umich.edu/acm9341.0001.001>).

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real Volume 1, funções de uma variável**. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

SANTOS, Robinson Nelson dos. **Uma breve história do desenvolvimento da teoria dos determinantes e das matrizes**. Dissertação (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

COLARES, Gilderléia Bezerra. **Autovalores e Autovetores e Aplicações**. Monografia (Curso de Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Paraná, 2011.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

WINTERLE, Paulo, STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra linear**. São Paulo: 2ª ed. McGraw-Hill, 1987.

BOLDRINI, José Luíz, COSTA, Sueli Irene Rodrigues, FIGUEIREDO, Vera Lúcia, WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. São Paulo: 3ª ed. Harper & Row do Brasil, 1980.

SANTANA, Erlâne Silva. **Diagonalização de operadores lineares e forma de Jordan**. Monografia (Curso de Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática) – Universidade Estadual do Maranhão, Cidelândia, 2014.