

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Ivan Felix da Silva

**Uma Proposta de Ensino de Matemática com Auxílio de
Jogos**

João Pessoa – PB

2016

Ivan Felix da Silva

**Uma Proposta de Ensino de Matemática com Auxílio de
Jogos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB

2016

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN
Maria Teresa Macau - CRB 15/176

S586u Silva, Ivan Felix da.
Uma proposta de ensino de matemática com auxílio de jogos / Ivan Felix da Silva.- João Pessoa, 2016.

43p. : il.-

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba.

Orientadora: Prof^a Dr^a Miriam da Silva Pereira.

1. Jogos e recreações matemáticas. 2. Matemática - Ensino. 3. Atividades lúdicas. Título.

Uma Proposta de Ensino de Matemática com Auxílio de Jogos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Miriam da Silva Pereira

Aprovado em: ____/____/____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.^a Dra. Miriam da Silva Pereira (Orientadora)

Prof. Dr. Flank D. Morais Bezerra

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto

Dedico este trabalho em especial
à minha mãe Marieta,
por estar sempre presente
na minha vida
e por ter me ensinado
as maiores qualidades do ser humano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Deus, que me permitiu estar em seu reino.

A meus pais, José Félix e Marieta, que sem eles eu não existiria.

A minha esposa Andréia, que sempre me apoiou e me deu muita força para prosseguir.

As minhas duas filhas, Isabela e Isadora, que às vezes deixei de estudar para poder brincar com elas, meu maior tesouro.

A minha Irmã Janaina, a meu cunhado José, que sempre me incentivaram a voltar a estudar.

Ao meu tutor Adriano, que nunca demonstrou dificuldades para me ajudar.

A professora Nilzete, que cedeu sua turma para o meu primeiro estágio na sala de aula.

Aos meus amigos de curso, Alexandre, José Ailton, Josinaldo e Graciele, que contribuíram muito no decorrer das atividades.

A minha orientadora Miriam, por aceitar o convite e também por sua participação ativa.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar”.

(François Vienter)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar que é possível motivar o interesse pela Matemática através do uso de jogos e quebra-cabeças em sala de aula. Apresentamos alguns jogos que podem ser usados para motivar e sedimentar a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos e discutimos acerca de uma experiência prática realizada com uma turma do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Jogos. Motivação. Aprendizado. Conceitos.

ABSTRACT

The objective of this work is to show that it is possible to motivate the interest in mathematics through the use of games and puzzles. We present some games that can be used to motivate learning some mathematical concepts and discuss about a practical experiment conducted with a group of elementary school.

Keywords: Games. Motivation. Learning. Concepts.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	9
1 – O Jogo e o Ensino de Matemática.....	10
1.1 – Fundamentação Teórica.....	10
1.2 – Os Números Naturais.....	12
1.3 – O Axioma de Indução.....	17
1.4 – Divisibilidade.....	20
1.5 – Equações de Primeiro Grau.....	22
1.6 – O Cálculo Mental.....	24
2 – Alguns Jogos Matemáticos.....	27
2.1 – Jogo da ASMD (+)(-)(x)(÷).....	27
2.2 – Jogo do Nim.....	30
2.3 – Jogue os dados e complete o valor.....	32
2.4 – Torre de Hanói.....	34
3 – Uma experiência Prática.....	38
3.1 – A experiência de Intervenção.....	38
3.2 – Considerações Finais.....	41
REFERÊNCIAS.....	43

INTRODUÇÃO

Quando era criança, praticava diversos tipos de jogos com meus amigos de infância e não sabia o quanto era importante para o meu aprendizado. Somente nas disciplinas de “Tópicos Especiais em Matemática” do curso de graduação em Licenciatura em Matemática foi que percebi que podemos usar os jogos como uma ferramenta de ensino. Podemos usar jogos para despertar o interesse dos alunos para a Matemática e ajudar a modificar o atual cenário que consiste na maioria dos alunos pouco interessados nesta disciplina.

Nos últimos anos, existe um grande número de pesquisadores na área de educação matemática que destacam a necessidade de se apresentar novas propostas de ensino que aproximem, sempre que possível, os conteúdos teóricos à realidade dos alunos. Abordagens de ensino que privilegiem resolução de problemas, o uso de computadores, a modelagem matemática e jogos vêm ganhando cada vez mais destaque. O objetivo dos professores deve ser desenvolver nos estudantes o espírito investigativo, o raciocínio lógico e a aprendizagem significativa.

Neste sentido, este trabalho tem o objetivo de destacar o uso de jogos como uma ferramenta de ensino da Matemática. Nossa intenção é mostrar que existem atividades que podem ser introduzidas no cotidiano da sala de aula que podem ajudar a modificar o pensamento negativo que frequentemente está associado a esta disciplina motivando muitas vezes a reprovação de muitos alunos e até mesmo a evasão escolar.

No primeiro capítulo apresentamos alguns fundamentos teóricos que justificam a introdução de jogos no ensino de Matemática. Além disso, apresentamos alguns dos principais conceitos matemáticos relacionados a alguns jogos.

No segundo capítulo, apresentamos os jogos: ASMD (+)(-)(x)(÷), Jogo do Nim, jogue os dados e complete o valor e a Torre de Hanói. No terceiro capítulo, descrevemos uma experiência de intervenção em sala de aula e terminamos com algumas considerações finais.

1 – O Jogo e o Ensino de Matemática

1.1 – Fundamentação Teórica

O ensino tradicional de Matemática, nos níveis fundamental e Médio é, frequentemente, baseado em aulas teóricas e expositivas. O papel do aluno é, essencialmente, copiar de forma passiva o que o professor escreve no quadro e, em seguida, resolver diversos exercícios similares aplicando um modelo de solução apresentado previamente pelo professor.

Muitos pesquisadores na área da Educação Matemática destacam a importância de usar contribuições de outras áreas do conhecimento para auxiliar no ensino de matemática. Pesquisas relacionadas às diversas áreas ajudam a discutir sobre o processo educativo e evidenciam a necessidade de realizar reflexões sobre novas propostas de ensino para que levem em consideração os inúmeros elementos que interferem na ação pedagógica do professor.

Considerando especialmente o ensino de matemática, já existem muitas possibilidades de trabalhar conceitos usando propostas metodológicas diferenciadas, como a resolução de problemas, o uso de computadores, o processo de modelagem matemática e o uso de jogos.

A utilização de jogos é interessante, pois propicia a introdução gradual da linguagem matemática, a socialização entre alunos e professor e cria um ambiente para que a aprendizagem seja significativa. De acordo com os PCN's, podemos afirmar que:

Para crianças pequenas, os jogos são as ações que elas repetem sistematicamente, mas que possuem um sentido funcional (jogos de exercício), isto é, são fontes de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema. Essa repetição funcional também deve estar presente na atividade escolar, pois é importante no sentido de ajudar a criança a perceber regularidades. (BRASIL, 1997, p. 35).

O uso de jogos com estratégia de ensino de matemática é uma ferramenta que pode ser utilizada já nas séries iniciais do ensino fundamental, pois, ela auxilia no desenvolvimento de uma crítica para solucionar problemas e esta habilidade é fundamental nas demais séries de ensino.

Já nas séries iniciais de ensino, as crianças são desafiadas a entender as descobertas científicas e conceitos cada vez mais abstratos. Desta forma, é necessário investir em recursos que facilitem o processo de ensino-aprendizagem. A relação dos jogos e do aprendizado matemático é bastante interessante e eficaz para aumentar o potencial crítico e criativo do aluno. Sobre o uso de jogos na educação infantil, Kishimoto (2010) diz:

Utilizar o jogo na educação infantil significa transportar para o campo do ensino-aprendizagem condições para maximizar a construção do conhecimento, introduzindo as propriedades do lúdico, do prazer, da capacidade de iniciação e ação ativa e motivadora. (KISHIMOTO p. 41)

Outro ponto importante é que os jogos matemáticos proporcionam a coletividade, pois não se joga sozinho. Para jogar, formamos grupos que interagem entre si, discutindo os conceitos envolvidos, expressando suas dúvidas. Neste sentido, Grando (2000) afirma:

É muito importante propiciar, em situações escolares, momentos de atividades de trabalho em grupo, para que os sujeitos sejam capazes de compreender e respeitar as formas de participação dos colegas de trabalho. Além do que, trata-se de um exercício para o próprio autoconhecimento. Em atividades grupais, os sujeitos são capazes de se conhecer, conhecer mais seus próprios limites, atitudes, valores e capacidades, a fim de contribuir para que o trabalho se desenvolva da melhor forma. (Grando p. 91)

Para que o uso dos jogos alcance seu objetivo como instrumento de ensino o professor tem papel fundamental. Ele deve planejar a aplicação e o objetivo do jogo, para que a atividade não fique resumida à apenas uma brincadeira, fugindo do seu propósito. Para Sant'Anna (2007), é preciso selecionar conteúdos que transformem e acompanhem a vida da criança. Os conteúdos devem ser significantes e surgir da própria realidade em que a criança vive e não apenas puras abstrações. Por tratar-se de ação educativa, Kishimoto (2010) conclui:

...ao professor cabe organizá-la de forma que se torne atividade que estimule a autoestruturação do aluno. Desta maneira é que a atividade possibilitará tanto a formação do aluno como a do professor que, atento aos "erros" e "acertos" dos alunos, poderá buscar o aprimoramento do seu trabalho pedagógico. (KISHIMOTO p. 95)

Nesse caso, é o aprimoramento do professor em relação à forma de usar este recurso que fará muita diferença de como este aprendizado será acolhido pelo

aluno. Assim, motivar os alunos através do uso de jogos no ensino da matemática é uma estratégia bastante desafiadora, pois muitos professores não estão capacitados para tais mudanças no currículo escolar. Mas, é fundamental a formação permanente do docente para desenvolver esta (e outras) estratégia de ensino, pois, uma das responsabilidades do professor é contribuir na formação de pessoas criativas, críticas e que estejam capacitadas para viver em uma sociedade moderna e contribuir positivamente para a melhora da realidade que os cerca. O importante não é apenas aprender, e sim aprender para ensinar.

Assim, ao introduzir os jogos no cotidiano das aulas de Matemática, criamos uma oportunidade de facilitar a aprendizagem e proporcionar o prazer e a motivação em aprender. Além disso, podemos despertar a curiosidade pelo novo e permitir que o desenvolvimento do aluno aconteça de maneira natural e satisfatória.

1.2 – Os Números Naturais

De acordo com BOYER a construção do conceito de números naturais teve uma evolução gradual e contou com contribuições de várias civilizações tais como: os Maias, os Egípcios, os Hindus, os Romanos, os Chineses, os Babilônicos, os Árabes, entre outros. Este processo evidencia a complexidade da ideia de número. Por exemplo, explicar a alguém o que é o “7” é uma tarefa relativamente complexa para muitas pessoas.

Segundo (HEFEZ), no fim do século 19 com a axiomatização da grande parte dos conceitos matemáticos foi que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos.

É possível construir o conjunto dos números naturais seguindo a construção feita por Giuseppe Peano que, a partir de quatro axiomas, constrói o conjunto dos números naturais, define as operações de soma e produto e prova destes números.

Neste trabalho, seguimos a apresentação dos números naturais dada por HEFEZ que considera um número maior de axiomas verdadeiro e, em seguida obtém algumas propriedades deste conjunto.

Denotamos o conjunto de todos os números naturais como

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

e

$$IN^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

As operações usuais de adição e multiplicação são denotadas por

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

e

$$(a, b) \rightarrow a \cdot b = ab,$$

para quaisquer que sejam a e b números naturais.

Note que a adição e a multiplicação estão bem definidas, isto é,

$$a, b, a', b' \in IN, a = a' e b = b' \Rightarrow a + b = a' + b' e a \cdot b = a' \cdot b'.$$

Além disso, vamos assumir que estas operações têm as seguintes propriedades:

1. Comutatividade:

$$a, b \in IN, a + b = b + a e a \cdot b = b \cdot a.$$

2. Associatividade:

$$a, b, c \in IN, (a + b) + c = a + (b + c) e (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. Existência de elemento neutro:

$$a \in IN, a + 0 = a e a \cdot 1 = a.$$

4. A multiplicação é distributiva com relação à adição:

$$a, b, c \in IN, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

5. Integridade: Dados $a, b, \in IN^*$, então que $a \cdot b \in IN^*$. Equivalentemente, pela formulação contrapositiva:

$$a, b \in IN, a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

6. Tricotomia: Dados $a, b \in IN$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

$$\text{i) } a = b \quad \text{ii) } c \in \mathbb{N}^*, b = a + c \quad \text{iii) } c \in \mathbb{N}^*, a = b + c.$$

Seja a e b dois números naturais. Dizemos que a é menor do que b , simbolizado por $a < b$, toda vez que a propriedade (ii) acima é verificada.

Com esta definição, temos que a propriedade (iii) acima equivale a afirmar que $b < a$. Portanto, a tricotomia implica que, dados dois números naturais a e b uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

$$\text{i) } a = b \quad \text{ii) } a < b \quad \text{iii) } b < a.$$

Utilizamos a notação $b > a$, que se lê b é maior do que a , para representar $a < b$.

Notemos que para todo $a \in \mathbb{N}^*$, temos que $0 + a = a$. Logo, $0 < a$ para todo $a \in \mathbb{N}^*$. Além disso, temos, também, que se $a + b = 0$, então $a = b = 0$. De fato, se $a \neq 0$ teríamos $b < 0$, o que é absurdo, logo $a = 0$. Analogamente, mostra-se que $b = 0$. Portanto, se $a \in \mathbb{N}^*$ ou $b \in \mathbb{N}^*$, então $a + b \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 1: $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Temos que $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Se $a \cdot 0 \neq 0$, então $a \cdot 0 \in \mathbb{N}^*$ e, portanto, segue, da igualdade acima, que $a \cdot 0 > a \cdot 0$, o que é absurdo. Logo, $a \cdot 0 = 0$.

Proposição 2: A relação "menor do que" é transitiva, isto é,

$$a, b, c \in \mathbb{N}, a < b \text{ e } b < c \Rightarrow a < c.$$

Demonstração:

Suponhamos $a < b$ e $b < c$, temos que existem $d, f \in \mathbb{N}^*$ tais que $b = a + d$ e $c = b + f$. Usando a associatividade da adição, temos que

$$c = b + f = (a + d) + f = a + (d + f),$$

com $d + f \in \mathbb{N}^*$ o que implica que $a < c$.

Proposição 3: A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que":

$$a, b, c \in \mathbb{N}, a < b \Leftrightarrow a + c < b + c.$$

Demonstração: Suponha que $a < b$. Logo, existe $d \in \mathbb{N}^*$, tal que $b = a + d$. Somando c a ambos os lados desta última igualdade, pela comutatividade e associatividade da adição, temos:

$$b + c = c + b = c + (a + d) = (c + a) + d = (a + c) + d,$$

o que mostra que $a + c < b + c$.

Reciprocamente, suponha que $a + c < b + c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades:

(i) $a = b$, então $a + c = b + c$, portanto, falso.

(ii) $b < a$, logo pela primeira parte da demonstração, temos que $b + c < a + c$; também é falso.

(iii) $a < b$. Esta é a única possibilidade que resta.

Proposição 4: A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que":

$$a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*, a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Demonstração:

Suponhamos que $a < b$. Logo, existe, $d \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = a + d$. Multiplicando por c ambos os lados dessa última igualdade, pelas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação, decorre:

$$b \cdot c = c \cdot b = c \cdot (a + d) = c \cdot a + c \cdot d = a \cdot c + c \cdot d,$$

o que mostra que $a \cdot c < b \cdot c$, pois, pela integridade, $c \cdot d \in \mathbb{N}^*$.

Reciprocamente, suponha que $a \cdot c < b \cdot c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades a analisar:

(i) $a = b$, então $a \cdot c = b \cdot c$, o que é falso.

(ii) $b < a$, logo, pela primeira parte da demonstração segue que $b \cdot c < a \cdot c$, o que também é falso.

(iii) Segue da lei da tricotomia que $a < b$.

Proposição 5: A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:

$$a, b, c \in \mathbb{N}, a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Demonstração:

Como a adição está bem definida no conjunto dos números naturais (Propriedade 1), a implicação

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

é imediata.

Suponhamos agora que $a + c = b + c$. Assim, temos as seguintes possibilidades:

- (i) $a < b$. Pela Proposição 3, temos que $a + c < b + c$, o que é um absurdo.
- (ii) $b < a$. Pelo mesmo argumento acima, $b + c < a + c$, o que é também um absurdo.
- (iii) $a = b$. Esta é a única alternativa válida.

Proposição 6: A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:

$$a, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}^*, a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

Demonstração:

Segue da Propriedade 1 que $a = b$ implica $a \cdot c = b \cdot c$ segue da definição da multiplicação em \mathbb{N} (Propriedade 1).

Suponhamos agora que $a \cdot c = b \cdot c$. Temos três possibilidades:

- (i) $a < b$, então pela Proposição 4, segue que $a \cdot c < b \cdot c$, o que é um absurdo.
- (ii) $b < a$, pelo mesmo argumento acima, $b \cdot c < a \cdot c$, o que é um absurdo.
- (iii) $a = b$. Está é a única alternativa válida.

Podemos generalizar esta definição da seguinte maneira: Diremos que a é menor ou igual do que b , ou que b é maior ou igual do que a , escrevendo $a \leq b$ ou $b \geq a$, se $a < b$ ou $a = b$.

Note que $a \leq b$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + c$. Assim,

- 1) Para todo número natural a , temos $a \leq a$ (reflexiva);
- 2) Para quaisquer naturais a, b , se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica);
- 3) Para quaisquer naturais a, b, c , se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva).

Dados dois números naturais a e b com $a \leq b$, segue da definição que existe um número natural c tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número b menos a , denotado por $b - a$, como sendo o número c . Em símbolos:

$$b - a = c.$$

Dizemos que c é o resultado da subtração de a de b . Portanto,

$$c = b - a \Leftrightarrow b = a + c.$$

Observamos que a operação de subtração nem sempre está bem definida no universo dos números naturais. Só existe o número natural $b - a$ se, e somente se, $a \leq b$.

Em particular, $a - a = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}$, e que, por definição, $(b - a) + a = b$.

Proposição 7: Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $a \leq b$, então

$$c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a.$$

Demonstração:

Notemos que, se $b \geq a$, então $c \cdot b \geq c \cdot a$, o que implica $c \cdot b - c \cdot a$ está bem definido.

Suponhamos agora que $b - a = d$, logo $b = a + d$. Multiplicando por c ambos os membros desta última igualdade, obtemos $c \cdot b = c \cdot (a + d) = c \cdot a + c \cdot d$, o que implica:

$$c \cdot d = c \cdot b - c \cdot a.$$

Substituindo d por $b - a$ na igualdade acima, obtemos:

$$c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a.$$

1.3 – O Axioma de Indução

Na seção anterior, descrevemos algumas propriedades dos números naturais, porém elas não são suficientes para caracterizar completamente este conjunto. Por exemplo, os números racionais não negativos, assim como os números reais não negativos possuem todas as propriedades apresentadas acima. No entanto, há uma propriedade adicional que só os naturais possuem que é o *Axioma de Indução*.

Axioma de Indução: Seja S um subconjunto de \mathbb{N} tal que

- i) $0 \in S$.
- ii) S é fechado com respeito à operação de "somar 1" a seus elementos, ou seja,

$$n \in S \Rightarrow n + 1 \in S.$$

Então, $S = \mathbb{N}$.

Sejam $A \subset \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{N}$, usamos a seguir a seguinte notação:

$$a + A = \{a + x; x \in A\}.$$

Assim,

$$a + \mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}; m \geq a\}.$$

Definição: Uma sentença aberta em n é uma frase de conteúdo matemático onde figura a letra n como palavra e que se torna uma sentença verdadeira ou falsa quando n é substituído por um número natural bem determinado.

O Axioma de Indução permite estabelecer o seguinte resultado que é um bom instrumento para provar resultados sobre subconjuntos dos números naturais: **O**

Princípio de Indução Matemática.

Proposição 8: Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $p(n)$ uma sentença aberta em n . Suponhamos que:

- (i) $p(a)$ é verdadeira, e que,
- (ii) Para todo $n \geq a$, $p(n)$ é verdadeira implicar $p(n + 1)$ verdadeira;

Então, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração:

Seja $V = \{n \in \mathbb{N}; p(n) \text{ é verdadeira}\}$ e consideramos o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\}.$$

Notamos que $a + S \subset V$. Segue da condição (i) que $a + 0 = a \in V$. Logo, $0 \in S$.

Por outro lado, se $m \in S$, então $a + m \in V$ e, por (ii), temos que $a + m + 1 \in V$; logo $m + 1 \in S$.

Assim, pelo Axioma de Indução, temos que $S = \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V,$$

o que prova o resultado.

É importante perceber que, usamos o Princípio de Indução da seguinte forma: verificamos a veracidade da afirmação para $n = a$ e supondo $p(n)$ verdadeiro, para algum n natural, mostramos que $p(n + 1)$ é verdadeiro. Isto pode gerar alguma confusão, pois poderíamos pensar que estamos usando a tese do teorema para provar o teorema, o que não é o caso, pois a tese é que $p(n)$ é verdade para todo n maior ou igual a .

Corolário 1. Não existe nenhum número natural n tal que $0 < n < 1$.

Demonstração:

Seja

$$p(n): n > 0 \rightarrow n \geq 1$$

é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como a sentença $0 > 0$ é falsa, então $p(0): 0 > 0 \Rightarrow 0 \geq 1$ é verdadeira.

Por outro lado, note que $p(n + 1): n + 1 > 0 \Rightarrow n + 1 \geq 1$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, $n + 1 \geq 1$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$, pois é equivalente, por cancelamento, a $n \geq 0$, o que é sempre verdade.

Logo, sendo $p(n + 1)$ verdade para todo n , segue-se que $p(n)$ implica $p(n + 1)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, o resultado decorre do Princípio de Indução Matemática.

Corolário 2. Dado um número natural n qualquer, não existe nenhum número natural m tal que $n < m < n + 1$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que exista um número natural m com $n < m < n + 1$. Logo, existiria um número $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $n + k = m < n + 1$, que, pela Proposição 3, implicaria que $0 < k < 1$, o que é uma contradição, tendo em vista o Corolário 1 acima.

Corolário 3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Se $a \cdot b = 1$, então $a = b = 1$.

Demonstração:

Inicialmente, note que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois, caso contrário, $a \cdot b = 0$.

Agora, se $a \neq 1$ e $b \neq 1$, então, pelo Corolário 1, segue-se que $a > 1$ e $b > 1$. Logo, $a \cdot b > b > 1$; contradição. Portanto, $a = 1$ ou $b = 1$. Qualquer uma dessas possibilidades implica $a = b = 1$.

É importante perceber a diferença entre a Indução Matemática com o procedimento usado nas ciências naturais. O Princípio de Indução Matemática é usado para estabelecer verdades matemáticas que são verdadeiras sobre subconjuntos infinitos de \mathbb{N} .

Exemplo. Vamos usar o Princípio de Indução Matemática para provar uma fórmula em função de $n \geq 1$ para determinar a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Este exemplo foi apresentado por Francesco Maurolycus em 1575. Mais, precisamente, queremos determinar uma fórmula para:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Podemos iniciar calculando esta expressão para alguns valores de n :

$$S_1 = 1, S_2 = 4, S_3 = 9, S_4 = 16, S_5 = 25.$$

Analisando as expressões dadas acima, podemos conjecturar que $S_n = n^2$. Para verificar que esta conjectura é verdadeira para todo natural n vamos usar o Princípio de Indução Matemática.

Seja $p(n): S_n = n^2$. Então, $p(1): S_1 = 1 = 1^2$, portanto verdadeira. Suponhamos que $p(k)$ verdadeira para algum k maior do que 1, isto é, $S_k = k^2$. Vamos mostrar que $p(k + 1)$ é verdadeira.

De fato, somando $2n + 1$ a ambos os lados da igualdade $S_n = n^2$, obtemos:

$$S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

Isto é, $p(n + 1)$ é verdade.

Pelo Princípio de Indução Matemática, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

1.4 – Divisibilidade

Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b , escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Neste caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a .

Proposição 9: Sejam, $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. Tem-se que

- i) $1|c, a|a$ e $a|0$.
- ii) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração:

- (i) Note que estas propriedades são imediatas das seguintes igualdades $c = 1 \cdot c, a = a \cdot 1$ e $a \cdot 0 = 0$.
- (ii) Se $a|b$ e $b|c$ então, existem $f, g \in \mathbb{N}$, tais que $b = a \cdot f$ e $c = b \cdot g$. Substituindo o valor de b da primeira equação na outra, obtemos:

$$c = b \cdot g = (a \cdot f) \cdot g = a \cdot (f \cdot g),$$

o que nos mostra que $a|c$.

O item (i) da proposição acima nos diz que todo número natural é divisível por 1 e, se não nulo, por si mesmo.

Proposição 10: Se $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Então:

$$a|b \text{ e } c|d \Rightarrow a \cdot c|b \cdot d.$$

Demonstração:

Se $a|b$ e $c|d$, então existem $f, g \in \mathbb{N}$, tais que $b = a \cdot f$ e $d = c \cdot g$. Portanto, $b \cdot d = (a \cdot c)(f \cdot g)$, logo, $a \cdot c|b \cdot d$.

Em particular, se $a|b$, então $a \cdot c|b \cdot c$, para todo $c \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 11: Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, tais que $a|(b + c)$. Então:

$$a|b \Leftrightarrow a|c.$$

Demonstração:

Como $a|(b + c)$, existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b + c = f \cdot a$.

Agora, se $a|b$, temos que existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot g$. Juntando as duas igualdades acima, temos:

$$a \cdot g + c = f \cdot a = a \cdot f,$$

de onde segue-se que $a \cdot f > a \cdot g$, e, conseqüentemente, $f > g$. Portanto, da igualdade acima e da Proposição 7, obtemos

$$c = a \cdot f - a \cdot g = a \cdot (f - g),$$

o que implica que $a|c$, já que $f - g \in \mathbb{N}$.

A prova da outra implicação é totalmente análoga.

Proposição 12: Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ e $b \geq c$, tais que $a|(b - c)$. Então:

$$a|b \Leftrightarrow a|c.$$

Demonstração: A prova deste resultado é feita de maneira semelhante à prova da proposição anterior.

Proposição 13: Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, e $x, y \in \mathbb{N}$ são tais que $a|b$ e $a|c$. Então: $a|(xb + yc)$; e se $xb \geq yc$, então $a|(xb - yc)$.

Demonstração:

$a|b$ e $a|c$ implicam que existem $f, g \in \mathbb{N}$ tais que $b = af$ e $c = ag$. Logo,

$$xb \pm yc = x(af) \pm y(ag) = a(xf \pm yg),$$

o que prova o resultado, pois, nas condições dadas, $xf \pm yg \in IN$.

Proposição 14: Dados $a, b \in IN^*$, temos que $a|b$ implica que $a \leq b$.

Demonstração:

De fato, se $a|b$, existe $c \in IN^*$ tal que $b = ac$. Como, do Corolário 1, $c \geq 1$, segue-se que $a \leq ac = b$.

1.5 – Equações de Primeiro Grau

Uma equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. O prefixo “equa” da palavra equação vem do latim e quer dizer “igual”.

Uma equação do primeiro grau tem a seguinte forma $ax + b = 0$, onde a e b são números conhecidos, com $a \neq 0$ e x representa um valor desconhecido.

Exemplos. As seguintes expressões são equações do primeiro grau:

- a) $3x - 2 = 4$
- b) $15 - y = 5$
- c) $10x + 2y = 6z$
- d) $40n + 10 = 30$

Exemplo. Consideremos a seguinte equação

$$2x^2 + 6x + 4 = 4x + 2x^2 - 2$$

Aparentemente esta expressão não representa um exemplo de equação do primeiro grau. Porém, podemos proceder da seguinte forma para simplificar esta expressão: Unimos os termos semelhantes no primeiro membro e igualamos a zero, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x^2 + 6x - 4x + 4 + 2 &= 0 \\ 2x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Exemplos.

- a) $5 + 3 = 1 + 7$, este não é um exemplo de equação de primeiro grau pois não é uma sentença aberta.
- b) $7 \neq 9$, este não é um exemplo de equação de primeiro grau, pois não é uma igualdade.

- c) $-6 < 2$, este não é um exemplo de equação de primeiro grau, pois não é sentença aberta, nem igualdade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, é importante que se desenvolvam alguns aspectos da Álgebra já nas séries iniciais do ensino fundamental para que sirvam de base para os conceitos que serão posteriormente incluídos. A exploração de situações-problema, ajuda ao aluno reconhecer diferentes funções da Álgebra tais como: generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, resolver problemas aritmeticamente difíceis.

A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (Brasil, 1998, p.40).

O ensino de equações de primeiro grau gera uma oportunidade adequada para que se integre o conceito tradicional de ensino com as atividades contextualizadas fornecendo ao aluno a possibilidade de aprendizagem efetiva.

Exemplos.

- a) A terça parte da idade de Maria diminuída de 5 unidades é igual a 10 anos. Vamos denotar a idade de Maria, que é a quantidade desconhecida, por x . Desta forma, a terça parte da idade de Maria é representada algebricamente por $x/3$. Assim, uma equação de primeiro grau que modela o problema é

$$x/3 - 5 = 10$$

- b) O triplo de um número é igual ao quádruplo de 90. Que número é esse? Se x representa o número procurado, então uma equação que modela o problema é dada por

$$3x - 360 = 0$$

- c) O dobro do antecessor, menos 3 é igual 25.

Se x representa o número procurado, então o antecessor de x é $x - 1$. Logo, dobro do antecessor é $2(x - 1)$. Então, uma equação que modela o problema é dada por

$$2x - 30 = 0$$

Para encontrar a solução de uma equação realizamos uma série de operações que nos conduzem a equações equivalentes cada vez mais simples e que nos permitem facilmente as raízes da equação.

1.6 – O Cálculo Mental

Quando somos apresentados a um problema que envolve operações de adição e multiplicação, o natural seria tentar buscar o resultado aproximado mentalmente. Porém, nas escolas, essas estratégias não recebem tanto atenção quanto o ensino do raciocínio algébrico (escrito).

Segundo Buys (2008), podemos caracterizar o cálculo mental, por: i) operar com os números e não com os dígitos; ii) usar propriedades das operações, relações numéricas e combinações entre elas; iii) implicar um bom desenvolvimento do número e um conhecimento dos factos numéricos elementares; e iv) permitir o recurso a registros intermédios em suporte de papel (em algumas situações).

O cálculo mental é importante para a construção do conceito de número, pois, é através da prática da mente que se adquire rapidez na hora solucionar problemas matemáticos relacionados ao quotidiano e ao aprendizado escolar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a área de Matemática, afirmam que:

No mundo atual saber fazer cálculos com lápis e papel é uma competência de importância relativa e que deve conviver com outras modalidades de cálculo, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras. (BRASIL, 1998, p. 45).

O cálculo mental e o cálculo através de algoritmos devem ser desenvolvidos paralelamente, pois, os diferentes procedimentos e tipos de cálculo preservam relações muito próximas. Além disso, ele também contribui no desenvolvimento do cálculo escrito à medida que permite ao aluno perceber algumas propriedades e regularidades das operações.

Neste sentido, os jogos fornecem uma metodologia adequada para que os alunos construam seus próprios conhecimentos, pois neste contexto eles são levados a construir estratégias que os conduzam a um objetivo determinado pelo jogo. Em alguns jogos são exigidos rapidez nas respostas, em outros, o importante é reconhecer determinadas propriedades do sistema de numeração decimal, etc.

É importante que o professor tenha a percepção que o trabalho com o cálculo mental é individual, pois quando em contato com a situação problema cada aluno pode usar estratégias e procedimentos diferentes para resolver o cálculo proposto.

Através do uso do cálculo mental os alunos podem se familiarizar mais facilmente com os números e, além disso, podem explorar diferentes caminhos de resolução dos problemas. Desta forma, os alunos são incentivados a não usar imediatamente alguns algoritmos conhecidos, mas que empregam um maior tempo para resolução.

Exemplos. Veja alguns procedimentos do cálculo mental:

a) Adição:

$$7 + 3 + 32 + 25 =$$

$$10 + 50 + 7 = 67$$

Calcular primeiro as dezenas exatas e os números que formam dezenas, depois as unidades restantes.

b) Subtração:

$$35 - 27 = (35 - 20) - 7 = 15 - 7 = 8$$

(Decomposição do subtraendo).

c) Multiplicação:

$$6 \times 26 = (6 \times 20) + (6 \times 6) = 120 + 36 = 156$$

(Decomposição de um dos fatores)

d) Divisão:

$$384 \div 24 = (\div 2)$$

$$192 \div 12 = (\div 2)$$

$$96 \div 6 = (\div 2)$$

$$48 \div 3 = (\div 3)$$

$$16$$

(Usando simplificações sucessivas)

A compreensão dos alunos sobre o conceito de número e as operações algébricas relacionadas a eles será diretamente beneficiado através do uso do cálculo mental. Independente da série do estudante, se ele resolve expressões de maneira automatizada e não consegue criar estratégias de resoluções em frente aos

problemas práticos, o uso do cálculo mental é um importante aliado para ajudar na compreensão dos sistemas de numeração. É fundamental que esse déficit na aprendizagem seja resolvido, pois ele pode ter como consequência dificuldades de aprendizagem posteriores.

Outro objetivo do cálculo mental é possibilitar aos estudantes saberem de cor alguns resultados ou conseguir calculá-los facilmente. Notamos que a memorização deve estar fundamentada na construção e na identificação de relações que deem sentido a ela. Podemos tomar como exemplo a tabuada que quando é devidamente compreendida ajuda na construção de estratégias de cálculo mental, cada vez mais elaboradas.

Existem diversas razões que contribuem para que os docentes não usem a estratégia do cálculo mental. Podemos citar a crença que apenas algumas pessoas têm boa memória e rapidez mental necessárias para se resolver contas via uso do cálculo mental. Além disso, a falta de materiais didáticos atualizados sobre o assunto e a pressão de se cumprir todo o currículo programático.

Porém, muitas destas razões são equivocadas e podemos apresentar alguns objetivos que levariam a justificar a abordagem do estudo do cálculo mental na sala de aula:

- fazer com que as crianças construam e selecionem procedimentos adequados à situação-problema apresentada, aos números e às operações;
- desenvolver e sistematizar procedimentos de cálculo por estimativa e estratégias de verificação e controle de resultados;
- utilizar instrumentos de cálculo, decidindo, em cada situação sobre a pertinência e vantagem que representa sua utilização;
- elaborar e utilizar estratégias pessoais de cálculo mental, para a resolução de problemas simples, a partir de seu conhecimento das propriedades do sistema de numeração e das quatro operações básicas;
- valorizar a importância e utilidade das medições e cálculos aproximados em determinadas situações da vida cotidiana, para desenvolver estratégias pessoais. (SEQUERRA, 2001, p. 61)

2 – Alguns Jogos Matemáticos

2.1 – Jogo da ASMD (+)(-)(x)(÷)

O objetivo deste jogo é desenvolver habilidades relacionadas as operações de adição, subtração, divisão e multiplicação. Ele estimula e melhora a rapidez para o cálculo mental e trabalha com o raciocínio lógico do aluno. O nome do jogo é uma sigla referente às iniciais dos nomes das operações básicas da Matemática: adição (A), subtração (S), multiplicação (M) e divisão (D).

Este jogo pode ser usado no 4º ano do ensino fundamental, porém também adaptado para as demais séries de ensino, conforme seja necessário. Segundo os PCN's:

O segundo ciclo tem como característica geral o trabalho com atividades que permitem ao aluno progredir na construção de conceitos e procedimentos matemáticos. No entanto, esse ciclo não constitui um marco de terminalidade da aprendizagem desses conteúdos, o que significa que o trabalho com números naturais e racionais, operações, medidas, espaço e forma e o tratamento da informação deverá ter continuidade, para que o aluno alcance novos patamares de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 58).

Usamos cartolina ou outro material semelhante para confeccionar o seguinte tabuleiro:

JOGO DA A(+) S(-) M(x) D(÷)				
10	10	10	10	10
9	9	9	9	9
8	8	8	8	8
7	7	7	7	7
6	6	6	6	6
5	5	5	5	5
4	4	4	4	4
3	3	3	3	3
2	2	2	2	2
1	1	1	1	1

Figura 1 – tabuleiro do jogo da ASMD

Em seguida, dentro de uma garrafa pet colocamos três dados.



Figura 2 – três dados e uma garrafa pet.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=W_ZkMGoGvRk>. Acesso em: março de 2016

Separamos cinco tampinhas de refrigerantes de cores diferentes, para facilitar a identificação do jogador. Também podem ser feitos de madeira ou papelão.



Figura 3 – as tampinhas em cores diferentes.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=W_ZkMGoGvRk>. Acesso em: março de 2016

Antes de iniciar o jogo, pede-se que cada aluno faça uma jogada com os dados para ver quem consegue uma pontuação maior e em seguida se organizam ordenadamente de acordo com a pontuação.

O primeiro jogador irá lançar os três dados na sua vez; em seguida, deve realizar uma operação utilizando a soma, multiplicação, divisão e subtração (podem ser duas operações diferentes ou iguais), se acertar o resultado, coloca a tampinha no resultado obtido na operação; se errar, não acontece nada e é a vez do próximo e se não souber passa a vez.

Observamos que, para colocar a sua tampinha no número que está no tabuleiro deve-se respeitar a sequência de 1 a 10; é necessário que o resultado dessa operação seja o número da sequência que o jogador precisa para avançar.

Por exemplo, se ao jogar os dados obtivemos os números 2, 3 e 6 e o aluno inicia pelo número 1 do tabuleiro, ele terá de realizar uma operação e o resultado necessariamente necessita ser 1.

Utilizando estes números, temos mais de uma maneira de fazer os cálculos, veja:

$$\begin{aligned}(2 \times 3) \div 6 &= 1 \text{ ou } (3 \times 2) \div 6 = 1 \\ (6 \div 3) \div 2 &= 1 \text{ ou } (6 \div 2) \div 3 = 1 \\ (6 - 3) - 2 &= 1 \text{ ou } (6 - 2) - 3 = 1 \\ 6 - (3 + 2) &= 1 \text{ ou } 6 - (2 + 3) = 1\end{aligned}$$

Mas, se o número desejado pelo jogador fosse 2, com esses números do exemplo anterior, não teria solução.

Cada jogador só tem direito a uma jogada por vez e vence quem alcançar o número 10 primeiro.

2.2 – Jogo do Nim

O jogo do Nim é um jogo de palitos que tem origem relacionada à China, embora não se tenha nenhuma comprovação. Ele é considerado muito antigo e, em 1901 num artigo na revista *Annals of Mathematics* C. L. Bouton mostrou que há sempre uma estratégia que um dos jogadores pode adotar de modo que ele saia vencedor do jogo. Existem várias versões deste jogo e cada uma delas tem a sua estratégia de vitória.

Uma versão simples deste jogo pode ser descrita como segue: Dispomos em uma mesa 27 palitos, um ao lado do outro; Dois jogadores jogam, alternadamente, retirando uma determinada quantidade de palitos, sendo que sempre deve ser retirado pelo menos um palito e, no máximo, 4 palitos. Perde o jogador que retirar o último palito.

Este é um jogo muito simples para construir e para jogar. Ele envolve diversos conteúdos matemáticos como a adição e a subtração, conceitos de divisibilidade e multiplicidade, equações do primeiro grau, cálculo mental e estimula a construção de uma estratégia de vitória.

Grando (2000) caracteriza o jogo e relaciona a conceitos matemáticos:

Trata-se de um jogo de lógica, que possibilita aos sujeitos construir um modelo de representação da solução da situação-problema de jogo: a estratégia máxima. Para desenvolverem tal estratégia, os sujeitos necessitam construir habilidades de resolução de problemas, explorar o raciocínio hipotético-dedutivo, generalizar soluções e procedimentos, observar regularidades e descrever os resultados através de um modelo matemático. Os conceitos e/ou noções envolvidos na estrutura do jogo do Nim dizem respeito ao conceito de divisão, com valorização do resto na divisão não exata; formulação do algoritmo de Euclides ($\text{Dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente} + \text{resto}$); conceitos de divisibilidade e multiplicidade, cálculo mental e pensamento algébrico. (GRANDO, 2000, p. 188)

Para vencer o jogo, o participante deve construir uma possível estratégia vencedora.

Grando (2000) afirma:

Um dos aspectos que caracterizam particularmente os jogos estratégicos, segundo a teoria dos jogos matemáticos, é a existência de uma “estratégia máxima” no jogo, ou seja, o interesse se volta para a investigação da estratégia que garante a um jogador sempre vencer. O conceito matemático está presente nesta estratégia máxima, a ser construída pelos sujeitos. (GRANDO, 2000, p. 187).

Podemos definir a seguinte estratégia para vitória neste jogo. Inicialmente, Somamos a retirada mínima e máxima de palitos, ou seja, $1 + 4 = 5$. Em seguida, dividimos a quantidade de palitos dispostos no jogo por 5. Assim, neste caso, temos que 27 dividido por 5 tem quociente 5 e resto 2.

O jogo terá o seguinte formato:

| ||||| ||||| ||||| ||||| ||||| |

O primeiro jogador deve retirar apenas um palito, digamos o primeiro. Na sequência, ele deve retirar a quantidade de palitos que falta para eliminar o segundo grupo de palitos, isto é, ele deve retirar $5 - n_i$, onde n_i é o número de palitos retirados pelo segundo jogador. Assim, segue até o último grupo, deixando apenas o último palito para a sua vitória. Observamos que o procedimento descrito aqui deve ser feito mentalmente.

Desta forma, descobrindo e usando uma estratégia de vitória de forma correta, se terá apenas o mesmo ganhador, a não ser que o outro jogador também descubra essa estratégia máxima e nesse momento o jogo deixa de ser um jogo competitivo, mas, os conceitos matemáticos relacionados ao jogo foram construídos.

Para este jogo existem muitas variações, podemos aumentar ou diminuir a quantidade de palitos, aumentar ou diminuir a retirada máxima de palitos, entre outros.

A versão do jogo de Nim apresentada por C. L. Bouton pode ser descrita da seguinte forma: Dispomos em uma mesa N palitos separados por três grupos de n_1, n_2 e n_3 palitos de modo que cada grupo tenha uma quantidade diferente de palitos. Cada jogador deve em sua vez retirar pelo menos um palito de apenas um dos grupos e quem retirar o(s) último(s) palito(s) vence o jogo.

Atualmente existe um ramo de pesquisa relacionado à teoria dos jogos que consiste em determinar em muitas situações as melhores decisões que uma pessoa deve tomar para conquistar determinado objetivo. Esta Teoria é amplamente estudada em Economia, Finanças, Negócios, Ciências Políticas, Psicologia e Biologia.

Sua confecção pode ser feita com papel, caneta e régua ou simplesmente uma folha de caderno que já vem com as linhas. Os dados podem ser comprados ou feitos com papelão e cola.

Geralmente, um jogo como este pode ser confeccionado pelo próprio aluno e por ser um material simples e de fácil acesso, evita um custo que represente um fator de impedimento de seu uso em sala de aula.

Para este jogo são formados grupos de quatro alunos ou a critério do professor. Cada aluno do grupo joga os dados, quem fizer mais pontos inicia o jogo. Iniciando o jogo, cada aluno joga os dados e se os dois dados apresentarem pontos diferentes coloca-se o sinal de mais (+) no centro da planilha e se os pontos forem iguais, coloca-se o sinal de menos (-), depois se coloca a soma dos pontos na indicação “pontos adquiridos”. Em seguida preenche o campo “pontos acumulados”. O aluno que completar primeiro os 50 pontos ou mais, será o vencedor.

Obs.: será apenas uma jogada por vez e cada jogador deve fiscalizar as anotações do resto do grupo.

Agora, segue a planilha modelo preenchida após a realização do jogo:

Pontos acumulados	Sinal de + ou -	Pontos adquiridos
0	+	3+4
7	+	5+4
16	+	5+6
27	+	5+6
38	-	2+2
34	+	1+4
39	+	1+2
42	-	1+1
40	+	4+6
50		

Este jogo é indicado para o sexto ano do ensino fundamental, mas também pode ser usado para os anos seguintes de acordo com as dificuldades em fazer as operações indicadas.

A realização deste jogo permite que o professor perceba as dificuldades dos alunos em relação às operações básicas da subtração, adição de números inteiros e multiplicação. Além disso, este processo estimula habilidades como a atenção, a observação, o cálculo mental, a integração social e o prazer em aprender.

2.4 – Torre de Hanói

Este jogo foi introduzido pelo matemático francês Édouard Lucas, em 1883, o nome Torre de Hanói foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã. A lenda fala que no momento da criação do universo, Deus colocou 64 discos de ouro em uma das três hastes de diamante sobre uma placa de bronze, onde os diâmetros destes discos decresciam até chegar ao topo. Logo depois foi criada uma comunidade de monges, a qual foi dada a tarefa de mover todos os discos para outra haste, de forma a mover apenas um disco por vez, não podendo um disco maior ficar abaixo de um disco menor e a terceira haste funcionava como auxiliar para o movimento dos discos. Incessantemente, os monges trocavam os discos de uma haste para outra até terminar de mover todos os discos de ouro, então com um estrondo de um trovão, o templo desmoronaria e o mundo deixaria de existir. Em seguida surgiria o mundo de Hanói.

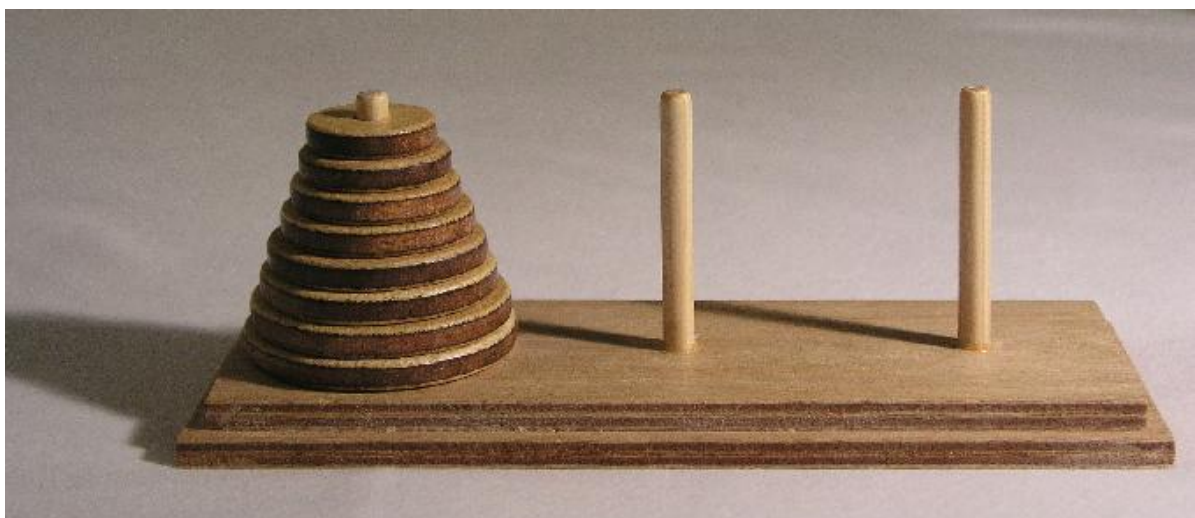


Figura 4 – Torre de Hanói com oito discos.

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Han%C3%B3i>. Acesso em: março de 2016

Podemos montar um modelo dispondo n discos com diâmetros diferentes na base com três. Relembramos que o objetivo do jogo é transferir todos os discos de um pino para outro, usando o terceiro pino como auxiliar. Porém, durante o processo, um disco maior não pode nunca ficar por baixo de um disco menor e a cada passo só podemos transferir apenas um disco por vez.

Ao pensar sobre o jogo, surgem algumas perguntas naturais:

1. O jogo tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$? Isto é, independente da quantidade de pinos é possível vencer o jogo?
2. Caso seja possível vencer o jogo, qual é o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

Podemos usar o Princípio da Indução Matemática para mostrar que a resposta da primeira questão é afirmativa para qualquer que seja o número de discos n . Inicialmente, consideramos a sentença aberta

$p(n) : \text{É possível vencer o jogo com } n \text{ discos.}$

Logo, se $n = 1$, é trivialmente possível vencer o jogo, basta mover o único disco para a segunda haste. Assim, $p(1)$ é verdadeira. Agora, suponhamos que se estamos com n discos e que é possível vencer o jogo, isto é, $p(n)$ é verdadeira. Vamos mostrar que isto implica que se temos uma torre com $n + 1$ discos, então também é possível vencer o jogo.

De fato, inicialmente usamos a hipótese de indução para mover os n discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livres. Posteriormente, transfira o maior disco que restou na pilha original para a única haste vazia. Finalmente, use novamente a hipótese de indução para transferir os n discos que estão juntos para a haste que contém o maior dos discos.

Portanto $p(n + 1)$ é verdadeira, isto é, é possível vencer o jogo com um número qualquer de discos.

Para determinar o número mínimo de movimentos para vencer o jogo, pensamos de maneira indutiva: Para vencer um jogo com um disco precisamos de um movimento. Com dois discos, precisamos de no mínimo três movimentos. Num jogo com três discos, precisamos de no mínimo 7 movimentos e assim sucessivamente. Assim, obtemos uma sequência da forma $(1, 3, 7, 15, \dots)$ que tem a seguinte propriedade:

- a) Para um disco, o número mínimo de movimentos é: $2^1 - 1 = 1$;
- b) Para dois discos, o número mínimo de movimentos é: $2^2 - 1 = 3$;
- c) Para três discos, o número mínimo de movimentos é: $2^3 - 1 = 7$;
- d) Para quatro discos, o número mínimo de movimentos é: $2^4 - 1 = 15$;

Quant. Discos (n)	Expressão ($2^n - 1$)	Movimentos mínimos
1	$2^1 - 1$	1
2	$2^2 - 1$	3
3	$2^3 - 1$	7
4	$2^4 - 1$	15
5	$2^5 - 1$	31
6	$2^6 - 1$	63
7	$2^7 - 1$	127
8	$2^8 - 1$	255

Tabela 1- Tabela com números mínimos de movimentos para mover uma torre com até oito discos.

Observamos que o número mínimo de movimentos está relacionado ao expoente do número dois. Parece natural considerar que uma expressão matemática para descrever o número mínimo de movimentos para vencer o jogo é $(2^n - 1)$, onde n denota a quantidade de discos no jogo.

Vamos usar o Princípio de Indução finita para mostrar que para qualquer que seja o número de discos n a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo é $(2^n - 1)$, isto é, seja

$p(n)$: é possível vencer o jogo com n com no mínimo $(2^n - 1)$ de movimentos.

Vamos mostrar que $p(n)$ é verdadeira para todo n natural. Observe que já mostramos que $p(1)$ é verdadeira. Suponhamos que dado k um número natural, temos que $p(k)$ é verdadeira, isto é, é possível vencer o jogo com um número mínimo de $(2^k - 1)$ movimentos.

Analisando a indução apresentada para mostrar que podemos vencer o jogo com $k + 1$ discos, passamos k discos para o segundo pino, usando no mínimo $2^k - 1$ movimentos. Em seguida, com mais um movimento o disco maior vai para o

terceiro pino (vazio) e, finalmente usamos no mínimo $2^k - 1$ movimentos para mover os k discos do segundo pino para o terceiro pino, então, realizamos

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Movimentos, isto é, $p(k + 1)$ é verdadeira.

Segue do Princípio da Indução matemática que $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

No início do ensino fundamental, a aplicação deste jogo pode ajudar na introdução do conceito de ordem nos números naturais e identificação de formas, além de ajudar na coordenação motora. Nas demais séries do ensino fundamental e médio, este jogo pode ajudar a explorar os conceitos de função exponencial, os conceitos de progressão aritmética e motivar o ensino do princípio da indução. Além disso, estimulados a construir estratégias de vitória o jogo ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico, incentiva à contagem e ajuda na resolução de problemas.

3 – Uma experiência Prática

3.1 – A experiência de Intervenção

Esta experiência foi baseada na aplicação do jogo da ASMD (+), (-), (x), (\div) descrito no capítulo anterior em uma turma do sexto ano do ensino fundamental. O propósito foi de avaliar o conhecimento sobre as quatro operações básicas além de promover o interesse dos alunos pela matemática.

Inicialmente questionei os alunos perguntando sobre quantos gostavam da disciplina de matemática. Apenas um aluno levantou a mão respondendo que gostava.

Na primeira aula, apresentei o jogo aos alunos, explicando as regras e logo após foi solicitado que formassem grupos de no máximo cinco alunos. Depois de muita movimentação a sala foi organizada em seis grupos denominados A, B, C, D, E e F. Os três primeiros grupos compostos por 5 alunos e os três últimos compostos 4, totalizando 27 alunos.

A partir de agora, segunda aula, começou a aplicação do jogo e se estendeu até a terceira aula. Cada grupo tinha um jogo confeccionado por mim e na parte de traz do jogo tinha a regra escrita. Pedi para cada grupo ler a regra antes de começar a jogar, mas, surgiram dúvidas, então fui de grupo em grupo para tentar diminuí-las.

Fiquei observando a turma jogar e resolvi deixar ela a vontade para depois analisar como estavam jogando.

Fui até o grupo A e percebi que este grupo não estava jogando corretamente, não porque não sabiam, mas porque queriam chamar a atenção e mostrar que eram o grupo que não querem nada com os estudos, conversei com eles tentando fazer com que eles jogassem pela regra, mas não tive êxito, demonstraram apenas atitudes de desinteresse.

Em seguida fui ver o jogo do grupo B, eles estavam jogando corretamente, usando as quatro operações com frequência e sem dificuldades, cada aluno falava o resultado das operações para os outros alunos do grupo ouvir, demonstrando muita satisfação e prazer pela forma como estava sendo aplicada esta aula.

No grupo C, verifiquei que a turma estava jogando certo, portando, quase não usavam a divisão, passando a vez para o próximo jogador por sentir dificuldades nesta operação. Dei algumas dicas sobre esta operação, porém, fazendo o cálculo

mental eles demoraram muito para conseguir a resposta e às vezes erravam o resultado.

Partindo para o grupo D, também percebi as dificuldades na operação de divisão, usavam com frequência a adição e subtração e às vezes a multiplicação. Estavam todos interagindo entre si e mostrando interesse pelo jogo, dizendo que nunca tiveram jogos nas aulas de matemática e nem de outra disciplina, mas gostaram da atividade e gostaria que se repetisse com outros jogos diferentes, pois além de aprender mais, estavam se divertindo.

O grupo E estava iniciando o jogo novamente, observei e vi que estavam jogando bem, usando as operações de forma correta, perguntei se estavam com alguma dificuldade e disseram que não. Então disse para continuarem jogando e parti para o próximo grupo.

Ao chegar ao grupo F, percebi que uma aluna não andava no jogo e atrapalhava a turma, fiquei observando mais um pouco e notei que esta aluna não sabia fazer quase nada das quatro operações, sabia só um pouco de adição e subtração, disse que não sabia dividir nem multiplicar, era muito difícil, então, pedi para ela deixar a turma jogando e chamei-a para uma conversa, disse para ela praticar a tabuada algumas vezes por dia até fixar alguns conceitos, falei também sobre alguns materiais concretos de fácil acesso e como usá-los para suprir suas necessidades básicas no aprendizado da matemática.

Como a terceira aula estava terminando, pedi a cada grupo que ao terminarem o jogo fossem devolvendo o material e na próxima aula eu faria um exercício para eles responderem e entregar, como forma de verificar como eles estavam em relação ao conteúdo abordado.

Começando as aulas 4 e 5, fiz o exercício citado acima, essa foi a hora mais tranquila da intervenção, pois os alunos estavam querendo impressionar com os resultados. Logo após a entrega do exercício, comecei uma revisão das quatro operações, principalmente, foquei a divisão, pois, esta depende de saber das outras para poder resolvê-las.

Na hora da explicação tive a colaboração de alunos do grupo A, que vieram ao quadro responder algumas questões, inclusive as divisões, mostrando facilidade na resolução das mesmas.

Apesar de parte de a turma apresentar dificuldades de aprendizado nos anos anteriores, e de ser um tempo curto para aplicação deste projeto, percebi que a

turma aumentou o senso crítico, praticou o cálculo mental e de forma mais rápida, houve relacionamento no grupo e foram motivados para estudar e gostar de matemática.

Ao término da intervenção entreguei para toda a turma uma mensagem motivadora para os estudos, para a matemática e para a vida, que dizia assim:

“Ame os estudos. Neles está parte do seu sucesso na vida. Boas notas dependem de aplicação e amor aos estudos. Crie o bom hábito da leitura. Isso enriquece sua personalidade. Desistir, nunca. As dificuldades não devem enfraquecer suas esperanças. Evite críticas e promova a amizade e a união. Faça seus talentos frutificarem. O Brasil precisa de você. Guerra aos erros e maus hábitos: a vida é batalha onde a inteligência e a boa vontade podem triunfar. Habitue-se a prestar atenção às aulas. Insista no que vale a pena. Julgue, analise, antes de falar e concluir. Lembre-se: é você que deve aprender a resolver seus problemas. Método nos seus trabalhos. A bagunça é inimiga da perfeição. Não estude só para a escola, mas para a vida. Ouça antes a opinião dos outros, sem interromper, e depois dê a sua. Procure entender e assimilar mais do que decorar. Querer é poder. Quem se esforça consegue. Renove seu entusiasmo, suas energias, pensando no seu ideal. Sabedoria é um dom de Deus, e ele concede a quem procura. Tenha paciência e perseverança. Muitas coisas se resolvem com o tempo. Uma andorinha só não faz verão: você precisa dos outros, os outros de você. Vale mais conhecer nossas fraquezas e pedir auxílio aos mestres e colegas do que persistir no erro. X.Y. A vida é uma incógnita que você deve ir descobrindo e resolvendo dia-a-dia. Zele pela realização do seu ideal: isso é a sua felicidade.”
(Autor desconhecido)

3.2 – Considerações Finais

O principal motivo em aplicar jogos e quebra-cabeças em sala de aula foi o de motivar os alunos para gostarem da disciplina de matemática, pois, esta é vista pela maioria das pessoas como uma disciplina de difícil entendimento e aprendizado.

Apesar de ser difícil implantar algo novo na sala de aula, vejo que é fundamental fazer as mudanças necessárias para a construção do conhecimento, mas, como boa parte das escolas não dispõe de material lúdico, vale lembrar que os professores de matemática principalmente, devem aos poucos e de alguma forma, confeccionar jogos ou solicitar na direção da escola e colocar à disposição de todos.

Ao usar o jogo ou quebra-cabeças na sala de aula verifiquei diversos fatores que melhora o aprendizado, priorizando entre eles, a formação de conceitos matemáticos e habilidades para fazer o cálculo mental.

Ainda usado pouco, o jogo na sala de aula vem sendo uma alternativa com benefícios significativos para fazer mudanças na qualidade do compromisso da educação em transmitir o conhecimento matemático de forma simples e descomplicada para a sociedade, visando mudar o pensamento negativo do aluno para esta disciplina, motivando-o a aprender a gostar da matemática evitando a desistência e também a reprovação.

Existe também a preparação do professor na aplicação do jogo, antes de iniciá-lo deverá jogá-lo, a fim de sanar todas as dúvidas e verificar que conteúdos matemáticos estão sendo explorados e relacioná-los a turma certa, pois, o jogo na sala de aula só tem finalidade se for aplicado com características ativas de formar desafios e conseqüentemente, suas respostas.

A partir de dados coletados nesta pesquisa foi possível perceber que mesmo alunos que já deixaram as séries iniciais de ensino há algum tempo apresentam dificuldades em realizar as quatro operações básicas, principalmente a adição e a subtração. Como evidenciado, o ensino baseado apenas na Álgebra priorizando algoritmos e fórmulas não entendidas têm efeitos danosos na formação dos estudantes.

Além disso, percebemos que a falta do entendimento adequado dos conceitos matemáticos segrega alguns alunos das atividades didáticas. Alguns se escondem por meio de bagunça dissimulada falta de interesses e apresentando uma posição

desafiadora. Outros procuram se disfarçar no meio dos outros alunos tentando não chamar a atenção para suas dificuldades de aprendizagem.

Finalmente, percebemos que o jogo é uma importante ferramenta auxiliar para detectar falhas na assimilação de conteúdo. Durante a aplicação do jogo, ficou evidente quais as principais dificuldades da turma com os conceitos envolvidos e a necessidade de se realizar uma revisão.

Podemos concluir que é possível desenvolver uma mudança significativa no quadro atual da sala de aula, incluindo atividades que possibilitem ao alunado a superação do medo de expor suas dúvidas, que favoreçam o trabalho em grupo incentivar o desenvolvimento mental capaz de produzir conhecimentos, associando a necessidade de aprender com a necessidade de sentir prazer em aprender.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BUYS, K. **Mental arithmetic.** In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp.121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008.
- FARIAS, Ariana et al. **“Jogos matemáticos”.** 2016. Disponível em: <<http://jogosmatematicos8.blogspot.com.br/2015/10/jogo-da-asmd.html>>. Acesso em: 03/03/2016.
- GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas: FE/UNICAMP. Tese de Doutorado, 2000.
- HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** Rio de Janeiro: SBM, 2014. Coleção PROFMAT, 08.
- HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética.** Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação.** 13 ed. São Paulo: Cortez, 2010.
- MOUTTA, Welbert de Oliveira. **A introdução do Princípio da Indução Finita nos Ensinos Fundamental e Médio /** Welbert de Oliveira Moutta; orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira – Rio de Janeiro: IMPA, PROFMAT, 2013.
- NOÉ, Marcos. **Escola Brasil.** 2016. Disponível em: <<http://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/torre-hanoi.htm>>. Acesso em: 04/03/2016.
- NOVA ESCOLA. Disponível em: <<http://novaescola.org.br/matematica/pratica-pedagogica/calculo-mental-428277.shtml>>. Acesso em: 14/06/2016.
- SANT’ANNA, Ilsa Martins; MENEGOLLA, Maximiliano. **DIDÁTICA: Aprender a ensinar.** Técnicas e reflexões pedagógicas para formação de formadores. 8 ed. São Paulo: Loyola, 1989.
- SEQUERRA, Miriam Louise; MARINCEK, Vania. (Org.). **Aprendendo matemática resolvendo problemas.** Porto Alegre: Artmed, 2001.
- WIKIPEDIA. **A Enciclopédia Livre.** 2016. Disponível em: <https://pt.wikipwdia.org/wiki/Torre_de_Han%C3%B3i>. Acesso em: 04/03/2016.