



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA



**Lindevânia de Almeida Leite**

Breve história da Trigonometria

João Pessoa, PB  
2016

**Lindevânia de Almeida Leite**

Breve história da Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso Apresentado à  
Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática a Distância da Universidade Federal da  
Paraíba como requisito parcial para obtenção do  
título de licenciada em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

João Pessoa- PB  
2016

Catálogo na publicação  
Universidade Federal da Paraíba  
Biblioteca Setorial do CCEN  
Bibliotecária Josélia M. O. Silva – CRB15/113

L533b Leite, Lindevânia de Almeida.  
Breve história da Trigonometria / Lindevânia de Almeida Leite. –  
João Pessoa, PB, 2016.  
42p. : il. color.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal  
da Paraíba.

Orientador: Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque.

1. Matemática – História. 2. Trigonometria – História. I. Título.

BS-CCEN

CDU 51(091)(043.2)

## Breve história da Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância de Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

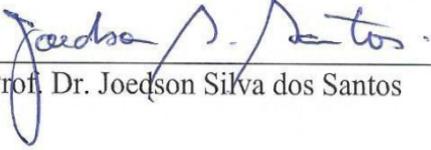
**Orientador:** Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque

Aprovada em: 16/06/2016

### COMISSÃO EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Nacib Gurgel Albuquerque (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

Dedico este trabalho a Deus por tudo, a todos que me deram força, e contribuíram para a sua realização, de modo especial a meus pais e aos meus irmãos e irmãs pelo apoio em todos os momentos da minha vida.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, por ter me dado toda a sabedoria, a Nossa Senhora das Graças pela intercessão em todos os momentos.

Aos meus familiares: Meu pai Luiz Pereira Leite e minha mãe Vanderlândia Silva de Almeida Leite, e aos meus irmãos e irmãs, pelo incentivo.

A todos os professores de modo especial ao meu orientador Dr.. NacibAndré Gurgel e Albuquerque por realizar este trabalho comigo, e pelo empenho, paciência e dedicação.

Aos tutores presenciais e a distância, a Coordenadora do Pólo Lourdes Pereira, e aos demais colegas por ter me ajudado sempre que precisei.

Ao diretor da escola Adalgisa Teodolo da Fonseca, Geraldo Pedro por autorizar a pesquisa, também a todos os alunos participantes que contribuíram com a pesquisa.

E a todos, que colaboram de forma direta ou indiretamente para que esse trabalho fosse realizado.

“A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo.”

Galileu Galilei

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer uma breve abordagem histórica sobre a Trigonometria, desde a antiguidade até os dias atuais, e investigar o conhecimento dos alunos do 3º ano Médio acerca da história da Trigonometria no município de Itaporanga-PB. Para o referencial teórico baseamos em autores como Boyer (1996), Mol(2013), e entre outros autores que retratam o tema. Esta pesquisa foi desenvolvida por meio de uma investigação bibliográfica, destacando a importância da história da Matemática, partindo das antigas civilizações, as contribuições de alguns matemáticos gregos, a Trigonometria na Idade Média com os Hindus e os árabes, até os dias atuais na forma analítica. A metodologia de pesquisa é uma abordagem da análise qualitativa, onde foi desenvolvida como parte principal a elaboração e a aplicação de um questionário com o intuito de investigar o conhecimento dos alunos sobre a história da Trigonometria. A análise dos dados coletados pelo questionário, de certa forma, mostrou que grande parte dos alunos ao longo de sua vida escolar nunca ouviu falar da história da Trigonometria, e a minoria que relataram ter ouvido falar não souberam comentar.

**Palavras-chave:** Matemática. História. Trigonometria.

## ABSTRACT

This study aims to establish a brief historical approach to trigonometry, approaching from antiquity to the present day, and investigate the knowledge of students in the 3rd year East about the history of trigonometry in the municipality of Itaporanga-PB. For the theoretical framework we rely on authors as Boyer (1996), Mol (2013), and among other authors that depict the theme. This research was developed through a bibliographic research, highlighting the importance of the history of mathematics, based on the ancient civilizations, the contributions of some Greek mathematicians, trigonometry in the middle Ages with the Hindus and Arabs, to the present day in analytically. The research methodology is an approach of qualitative analysis, which was developed as the main part of the development and application of a questionnaire in order to investigate the students' knowledge of the history of trigonometry. The analysis of data collected by the questionnaire, in a way, showed that most of the students throughout their school life never heard the story of Trigonometry, and the minority who reported having heard were unable to comment.

**Keywords:** Mathematics. History. Trigonometry.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2: Seqt Egípcio_____	09
Figura 2.1: Representação de números na escrita cuneiforme_____	10
Figura 2.2: Tabela Plimpton 322_____	11
Figura 2.3: Razão da distância da Lua para a distância do Sol_____	13
Figura 2.4: Esquema de Aristarco_____	13
Figura 2.5 Observações feitas por Eratóstenes_____	14
Figura 3: representação do “jiva” hindu_____	17
Figura 4: Lei das tangentes_____	21
Figura 5: Alunos com algum conhecimento da história da Trigonometria_____	26

## Sumário

Capítulo 1 .....	3
1.1 Memorial do acadêmico .....	3
1.1.1 Histórico da Formação Escolar.....	3
1.1.2 Histórico da Formação Universitária.....	4
1.2 Introdução.....	4
1.3 Justificativa.....	6
1.4 Objetivos.....	6
1.4.1 Geral .....	6
1.4.2 Específicos.....	6
1.5 Metodologia de Pesquisa .....	7
Capítulo 2 .....	9
A Trigonometria na Antiguidade.....	9
2.1 A Trigonometria no Egito .....	9
2.2 A Trigonometria na Babilônia.....	10
2.3 A Trigonometria na Grécia.....	12
2.3.1 A Trigonometria de Pitágoras de Samos .....	12
2.3.2 A Trigonometria de Aristarco de Samos .....	12
2.3.3 A Trigonometria de Eratóstenes de Cirene.....	14
2.3.4 A Trigonometria de Hiparco de Nicéia .....	15
2.3.5 A Trigonometria de Cláudio Ptolomeu .....	15
Capítulo 3 .....	17
A Trigonometria na Idade Média .....	17
3.1 A Trigonometria Hindu .....	17
3.2 A Trigonometria Árabe .....	18
3.3 A Trigonometria da Europa na Idade Média.....	19
Capítulo 4 .....	20
Trigonometria na idade moderna e contemporânea .....	20
4.1 A Trigonometria na Europa do século XIV ao século XVII.....	20
4.2 A Trigonometria dos séculos XVIII e XIX, forma analítica.....	22
4.2.1 A Série de Taylor.....	24
Capítulo 5 .....	25
Procedimentos Metodológicos .....	25
5.1 Ambiente e Participantes da Pesquisa .....	25
5.2 Instrumento de pesquisa .....	25
5.3 Análises do Questionário.....	25

Considerações Finais .....	27
REFERÊNCIAS .....	28
Apêndice A .....	29
Questionário .....	29
Apêndice B .....	30
Autorização do diretor da escola .....	30
Apêndice C .....	31
Autorização do Professor Regente .....	31
Apêndice D .....	32
Respostas dos alunos .....	32

# Capítulo 1

## 1.1 Memorial do acadêmico

### 1.1.1 Histórico da Formação Escolar

Iniciei a alfabetização muito cedo com apenas 2 anos na escola municipal Genoveva Maria das Dores, no sítio Pau D'arco, no município de Itaporanga – PB. A escola era perto da minha casa, foi esse o motivo de ter começado a estudar tão cedo. A professora era minha tia, a turma era de multisseriado, mas ela ensinava com muito esforço e dedicação. Fiquei nessa escola até concluir o Fundamental 1 (5º ano), com apenas 8 anos. Algumas pessoas criticavam e falavam que tinha passado de ano porque a professora era minha tia.

O Fundamental 2 cursei na escola estadual Professor Francelino de Alencar Neves no município de Itaporanga-PB, onde enfrentava bastante dificuldade para chegar à escola, até o meio do ano tinha que ir de bicicleta com os meus irmão e os outros colegas da localidade num percurso de 9 km, e quando tinha transporte andava a pé cerca de 3 km para chegar no ponto onde o carro passava. Para chegar à cidade tinha que passar por um riacho, que no tempo chuvoso não dava para atravessar e acabava perdendo aula, mas com toda dificuldade sempre me destacava como uma das melhores da sala. A cada dia gostava mais dos cálculos, minha disciplina preferida sempre foi matemática. Terminei o Fundamental 2 com 12 anos sem repetir nem um ano.

Cursei o Ensino Médio na escola estadual Aldagisa Teódolo da Fonseca, no 1º e 2º ano Médio enfrentei as mesmas dificuldades com o transporte escolar. No 2º ano fiquei na prova final de matemática por excesso de faltas, o que me deixou um pouco triste, pois era a disciplina que sempre me destacava, mas por dominar bem cálculo tirei dez na final e passei. No 3º ano Médio o transporte não era mais problema, pois não precisava mais andar os 3 km, foi bastante proveitoso e concluí o Ensino Médio com apenas 15 anos no ano de 2009.

Mesmo com todas as dificuldades considero que meu percurso estudantil foi de muitas barreiras vencidas, e ao terminar já sabia o que queria ser, professora de Matemática.

No ano de 2010 trabalhei um ano como professora do 2º ano fundamental na escola Joaquim Gomes de Melo e é onde trabalho atualmente como monitora do programa Mais Educação.

## **1.1.2 Histórico da Formação Universitária**

Iniciei o Curso de Licenciatura em Matemática a distância no primeiro semestre de 2011, no polo de Itaporanga – PB pela Universidade Federal da Paraíba – UFPB Virtual.

No início tive muita dificuldade por se tratar de uma modalidade a distância, pois não tinha conhecimento algum de informática, além de enfrentar o preconceito de muitos. No primeiro período minha maior dificuldade foi aprender de forma autônoma, porque até então estava acostumada com um professor presencial, mas pude contar com o auxílio dos tutores presenciais que deram suporte, principalmente no primeiro período. As dificuldades não pararam por aí. Por morar distante da cidade, no meu sítio não pega sinal de internet o que me fez muitas vezes pensar em desistir, porque tinha que ir ao polo quase todos os dias.

No quarto período, como tinha que ir ao polo no período chuvoso perdi muitas atividades o que me fez desistir de quase todas as disciplinas e consegui concluir apenas duas. No sexto período tive um problema de saúde e não conseguia estudar e perdi mais uma vez o período, mas com toda dificuldade consegui vencer e retomei o curso.

Portanto apesar de todas as dificuldades que enfrentei valeu a pena, pois a EAD (Educação a Distância) me proporcionou uma aprendizagem autônoma, significativa, é com grande satisfação que chego ao final desse curso agradecendo a Deus por estar sempre comigo.

## **1.2 Introdução**

A matemática é uma ciência criada pelo homem, que foi evoluindo ao longo do tempo, de acordo com a necessidade de cada povo. Ela é uma disciplina que está presente no nosso cotidiano, dessa forma contribui a cada dia para o desenvolvimento da sociedade.

No âmbito escolar muitas vezes nos deparamos com a matemática somente como uma atividade mecânica, com fórmulas prontas, sem qualquer tipo de referência a sua história e assim se torna uma disciplina, para muitos, difícil e complicada.

Ao ensinar matemática podemos observar vários questionamentos entre os alunos a respeito do conteúdo. A história da matemática é uma importante ferramenta metodológica que nos permite uma melhor compreensão de o porquê estudar matemática, e por meio dela relacionar a matemática com o cotidiano, com a realidade.

Segundo (D'AMBRÓSIO, 1999) a História é o registro da cultura, da tradição de aprendizagem que são encontrados nas práticas educativas. Partindo disso, devemos pensar a história da Trigonometria como prática educativa que possibilita ao aprendiz perceber que os conteúdos não vieram prontos, mas que foi sendo construído devido à necessidade de cada povo, desse modo devemos considerar os registros históricos como parte integrante do processo educativo.

Foi pensando nesses pressupostos que vamos apresentar neste trabalho, uma abordagem histórica para que tenhamos conhecimento histórico do assunto abordado, apresentar a evolução da Trigonometria, e desse modo permitir que o professor incorpore novas metodologias a serem utilizadas em sala de aula para que o ensino se torne mais motivador e prazeroso.

A Trigonometria é uma parte da matemática que tem como objeto de estudo os lados e os ângulos de um triângulo. A palavra Trigonometria significa medidas das partes de um triângulo.

Não se sabe com precisão a origem da Trigonometria. Ela não é obra de uma só pessoa ou nação, sabe-se que está diretamente vinculada aos povos egípcios e babilônicos que contribuíram de forma significativa tanto para a descoberta como para o aprimoramento desse ramo da matemática.

De tal maneira, vamos mostrar nesse trabalho, que organizamos em cinco capítulos, alguns momentos que foram importantes para a evolução da Trigonometria.

O **capítulo 1** traz o histórico da nossa formação escolar, a introdução, a justificativa, os objetivos e a metodologia de pesquisa. No **capítulo 2**, abordaremos a Trigonometria na antiguidade, com os egípcios, com os babilônicos e gregos, onde podemos perceber que nesse período ela está diretamente ligada à astronomia. Nesse período Hiparcos e Ptolomeu desenvolveram as tabelas de cordas. Ainda não era definido o seno de um ângulo, mas associava o comprimento da corda com o ângulo central. No **capítulo 3**, apresentaremos a Trigonometria na Idade Média, com os hindus, onde a função seno aparece pela primeira vez de forma explícita como função de um ângulo. A Trigonometria dos árabes, que através deles a Trigonometria chegou à Europa e um pouco da Trigonometria da Europa na Idade Média com Fibonacci. No **capítulo 4**, abordaremos a Trigonometria na Europa do século XIV ao século XVII, apresentando alguns matemáticos que contribuíram para a evolução da Trigonometria, onde surgem as funções em termos de séries infinitas. Trazemos um pouco da Trigonometria atual na sua forma analítica, com Euler, Fourier e Taylor em série de potência. No **capítulo 5**

é apresentado o Procedimento Metodológico constituído pelos participantes da pesquisa, o questionário aplicado e a análise dos dados.

## **1.3 Justificativa**

A escolha do nosso tema se deu por ter grande gosto pela Trigonometria e ao cursar o Ensino Superior e especificamente a disciplina de “História da Matemática”, percebemos que a Trigonometria ensinada no Ensino Fundamental e Médio é de pequena relevância, sem ter nenhuma relação entre o conteúdo e a sua história.

Uma abordagem histórica deste assunto será de grande importância, considerando a maneira como a Trigonometria é transmitido em sala de aula. Durante as observações realizadas nas disciplinas de Estágio Supervisionado II e IV, identificamos um ensino que ainda tem a História da Matemática como uma prática isolada da aprendizagem.

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 42) enfatizam que o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Através desse estudo buscamos destacar a importância da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, possibilitando aos alunos uma compreensão da matemática ao longo da história.

Dessa forma, a problemática norteadora deste trabalho é: *qual o conhecimento dos alunos ao chegar no 3º ano do Ensino Médio sobre a história da Trigonometria?*

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Geral**

- Analisar e contextualizar a construção da Trigonometria ao longo da história e, da compreensão do crescimento e desenvolvimento desse conhecimento, promover melhoria na abordagem metodológica em sala de aula.

### **1.4.2 Específicos**

- Em conformidade com os objetivos gerais, levantar e analisar a história e evolução da Trigonometria na antiguidade, na idade média e contemporânea.

- Determinar os elementos que levaram os estudiosos de cada época ao desenvolvimento da teoria à época.
- Compreender a colaboração desses recursos na inteligência do cotidiano;
- Utilizar a história da trigonometria e suas aplicações para introdução dos conhecimentos trigonométricos aos alunos, melhorando a metodologia do ensino e aprendizagem;
- Identificar conhecimentos dos alunos sobre a história da Trigonometria, por meio da aplicação de um questionário.

## 1.5 Metodologia de Pesquisa

Este trabalho caracterizou-se por uma abordagem qualitativa, com pesquisa bibliográfica, que segundo Gil (2008, p. 50) é o estudo sistematizado desenvolvido a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros, revistas e artigos científicos. Para a revisão bibliográfica foram utilizados vários documentos, principalmente trabalhos monográficos. Foi feita a leitura minuciosa de todo material, depois foi realizada uma análise de caráter descritivo que, de acordo com Gil,

As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados. (GIL, 2008, p. 27).

Após a leitura do material, realizamos como instrumento o questionário para coleta de dados, que “é a forma mais usada para coletar dados, pois possibilita medir com mais exatidão o que se deseja.” (CERVO & BERVIAN & SILVA, 2007, p. 53). Esse instrumento tem o intuito de realizar um levantamento do conhecimento da turma sobre o conteúdo, que é história da trigonometria.

Nesse sentido, a pesquisa bibliográfica é o ponto de partida para uma melhor compreensão e o desenvolvimento da questão estudada, melhorando a metodologia de ensino e aprendizagem.

Desenvolvemos nosso trabalho de acordo com as seguintes etapas:

- Levantamento bibliográfico acerca de pesquisas que tratam do conhecimento relacionado à história da Trigonometria;
- Levantamento junto à turma do 3º ano “B” do Ensino Médio Na E.E.E.M. Adalgisa Teódolo da Fonseca acerca do conhecimento do conteúdo, história da trigonometria;
- Elaboração do instrumento da pesquisa (questionário);
- Aplicação do questionário junto aos alunos;
- Análise dos resultados alcançados durante a aplicação.

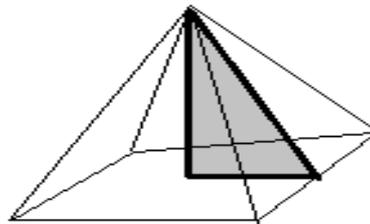
## Capítulo 2

### A Trigonometria na Antiguidade

A Trigonometria remonta à astronomia de posição, agrimensura e navegação. Grande parte da evolução da Trigonometria é devida aos astrônomos babilônios, que durante muitos anos mediram os movimentos dos astros. Apenas por volta do século XV, a Trigonometria foi "separada" da astronomia, em decorrência do surgimento de aplicações em diversas áreas do conhecimento.

#### 2.1 A Trigonometria no Egito

Indícios da trigonometria são encontrados em um dos documentos históricos mais importantes da matemática: o Papiro de Rhind, um documento egípcio de aproximadamente 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalhou 85 problemas de matemática. Em partes desse Papiro os egípcios fazem referência ao seqt de um ângulo, que na linguagem atual significa a cotangente de um ângulo.



**Figura 2Seqt Egípcio**  
**Fonte: elaborada pelo autor**

Os Egípcios conceberam o significado de seqt como a razão entre afastamento horizontal em relação à elevação vertical e a medida da altura que determinava como deveria ser a inclinação de uma pirâmide. Aproximadamente em 1500 a.C., os egípcios começaram a associar sombras projetadas por Gnômon, uma vara vertical, a números, resultando no que seria o primeiro relógio de Sol.

## 2.2 A Trigonometria na Babilônia

Os babilônios se interessavam de modo significativo pela astronomia, portanto eram ótimos astrônomos. Por meio dos triângulos eles determinavam os eclipses, fases da lua, estabeleciam calendários, determinavam distâncias, rotas de navegação, épocas de plantio etc.

Na babilônia utilizava-se a forma de comunicação escrita mais antiga da humanidade, a escrita cuneiforme, assim chamada porque eram gravados em forma de cunha. Os babilônicos registravam seus escritos em tabuletas de argila cozida de variados tamanhos. Eles escreviam em placas de argila, usando uma espécie de estilete, e eram cozidas ou secas ao sol para aumentar a resistência. Essa forma de escrita resistiu mais a ação do tempo do que outras formas de escrita utilizadas ao longo da história, como por exemplo, os papiros egípcios.

Essa civilização desenvolveu um amplo conhecimento de cálculos e medidas. Eles desenvolveram o sistema de numeração que era alicerçado na base sexagesimal, ou seja, na base 60. O símbolo  $\nabla$  era usado para indicar a unidade 1, enquanto o símbolo  $\triangleleft$  representava o número 10. Combinações desses símbolos geravam os números até 59. O sistema numérico apresentado nas tábuas mais antigas não usava o zero, no entanto, o conceito de zero era conhecido: deixava-se vazia a coluna que deveria ser preenchida com zero.

1 $\nabla$	11 $\triangleleft \nabla$	21 $\triangleleft \triangleleft \nabla$	31 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla$	41 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla$	51 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla$
2 $\nabla \nabla$	12 $\triangleleft \nabla \nabla$	22 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$	32 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$	42 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$	52 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla$
3 $\nabla \nabla \nabla$	13 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla$	23 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$	33 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$	43 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$	53 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla$
4 $\nabla \nabla \nabla \nabla$	14 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	24 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	34 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	44 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$	54 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla$
5 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	15 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	25 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	35 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	45 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	55 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
6 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	16 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	26 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	36 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	46 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	56 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
7 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	17 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	27 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	37 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	47 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	57 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
8 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	18 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	28 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	38 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	48 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	58 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
9 $\nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	19 $\triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	29 $\triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	39 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	49 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$	59 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla$
10 $\triangleleft$	20 $\triangleleft \triangleleft$	30 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft$	40 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft$	50 $\triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft \triangleleft$	

**Figura 2.1** Representação de números na escrita cuneiforme

**Fonte:** (OLIVEIRA,2010,p.7,<http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/sistema-numeracaobabilonico.htm>).

Diferentemente, dos povos egípcios, gregos e romanos que utilizavam sistema de numeração aditivo, os babilônios utilizavam sistema posicional sexagesimal (na base 60).

Nos exemplos abaixo mostra essa notação posicional, quando o significado do símbolo é marcado pela posição que ocupa, onde o número é lido da esquerda para a direita:

$\triangleleft \triangleleft \nabla$

20; 1, que lemos em nosso sistema,  $20 + 1 = 21$

$\nabla$

𐎠 𐎠 𐎠 𐎠

1; 24, que lemos em nosso sistema,  $1 \times 60 + 20 + 4 = 84$

𐎠𐎠𐎠𐎠 𐎠𐎠𐎠

16;43, que lemos ,  $16 \times 60 + 43 = 1003$

Eles expressavam os números em termos de potência de 60, que é comparável com a representação do nosso sistema de numeração com frações e decimais, só que em vez de potências de 10 as potências de 60.

Por exemplo, no sistema decimal quando escrevemos o número 2345, representa:

$$(2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0),$$

ou seja,

$$2.000+ 300+ 40+ 5.$$

Já no sistema sexagesimal o número 2345 é expresso da seguinte forma:

$$(2 \times 60^3) + (3 \times 60^2) + (4 \times 60^1) + (5 \times 60^0),$$

ou seja,

$$432000+ 10800+ 240+ 5= 443045.$$

A maneira que eles realizavam as operações de adição e multiplicação com números inteiros e fracionários, era bem parecida com a que realizamos hoje nas operações com números inteiros e decimais.

Em meio a essas tabuletas, a mais conhecida talvez seja a Tabela Plimpton 322, que recebe esse nome por fazer parte na coleção Plimpton 322 na Universidade de Columbia. Notou-se que essa tabela é, de fato, uma lista de "secantes".



**Figura 2.2** Tabela Plimpton 322

Os babilônios foram excelentes astrônomos, e foi no século XXVIII a. C. que, ao realizar diversas observações do tempo, construíram um calendário astrológico. Foram eles que, por volta de 300 a.C, introduziram a divisão da circunferência como temos hoje em 360 partes. Especula-se que essa divisão foi motivada por 360 ser um número próximo aos dias do ano.

Os babilônios influenciaram os povos posteriores e, alguns séculos depois, os gregos adotaram tanto a divisão da circunferência em 360 partes, como a divisão sexagesimal em graus, minutos e segundos para demonstrar o tamanho de arcos e cordas da circunferência.

## **2.3 A Trigonometria na Grécia**

### **2.3.1 A Trigonometria de Pitágoras de Samos**

O que se sabe sobre Pitágoras (580-500 a.C) não é digno de confiança, possivelmente ele nasceu em 572 a. C. em Samos. Embora o Teorema que leva o seu nome “Teorema de Pitágoras” já fosse conhecido pelos babilônios, ele foi o primeiro a demonstrar seu célebre resultado:

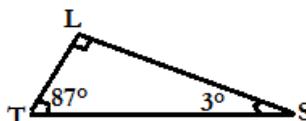
*“Em todo triângulo retângulo a área do quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre seus catetos”.*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

### **2.3.2 A Trigonometria de Aristarco de Samos**

Aristarco (310 -230 a.C.) nasceu em Samos, na Grécia, e foi considerado por muitos um Copérnico da época. De acordo com Arquimedes, Aristarco de Samos um milênio e meio antes de Copérnico, propôs um sistema heliocêntrico, segundo o qual a Terra e os demais planetas giram em torno do Sol, mas as anotações feitas sobre o tema se perderam. O que se tem dele é um tratado, escrito em torno de 260 a. C. *“Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua”* que admitia o sistema geocêntrico. Nesse tratado, segundo Boyer, (1996, p.109), Aristarco considerou que, quando a meia lua estava iluminada, o ângulo entre as linhas de vista ao Sol e à Lua “diferia para menos de um ângulo reto para um trinta avos de um quadrante”.

Aristarco determinou que o ângulo formado pelo segmento TL com o segmento TS, era  $87^\circ$ , que é o ângulo complementar de  $3^\circ$ . Ele calcula essa razão o que corresponde hoje como  $\text{sen } 3^\circ$ , como mostra a figura abaixo:



**Figura 2.3** Fonte: Boyer (1996, p. 109)

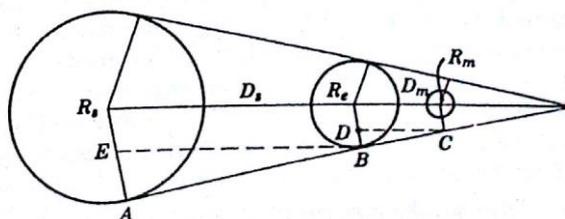
Para calcular essa razão, segundo Boyer (1996, p.109), Aristarco recorreu a um teorema que hoje pode ser expresso na desigualdade:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta},$$

onde  $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$ , a partir disso ele chegou ao resultado,  $\frac{1}{20} < \text{sen } 3^\circ < \frac{1}{18}$ . Com isso ele concluiu que a distância do Sol a Terra está entre 18 e 20 vezes a distância da Terra a Lua. Embora o resultado estivesse bem distante do que conhecemos hoje, que é de aproximadamente pouco menos de 400, o seu raciocínio estava correto.

Quando Aristarco definiu as distâncias relativas do Sol à Lua, o fato de aparentemente ambos ter aproximadamente o mesmo tamanho angular, isto é, subtendem o mesmo ângulo ao olho de observador na Terra, ele deduziu que seus respectivos tamanhos tinham a mesma razão. Aristarco estimou esse ângulo como sendo  $2^\circ$ , mas Arquimedes impôs a ele um valor igual a  $0,5^\circ$  (BOYER 1996, p.109).

Observando eclipses lunares, Aristarco deduziu a partir da largura da sombra da Terra projetada sobre a Lua, que a Terra estava a uma grande distância da Lua, com isso ele pode concluir que essa distância era duas vezes a largura da Lua.



**Figura 2.4** Esquema de Aristarco.

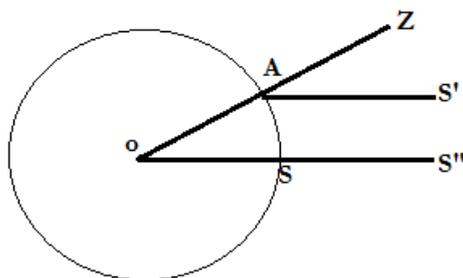
Fonte: Boyer (1996, p.109)

As ideias de Aristarco se relacionavam com conceitos de semelhança de triângulo, (como podemos ver na figura o triângulo ABE e o triângulo BCD que são semelhantes), um pouco de álgebra e também noções básicas de geometria.

### 2.3.3 A Trigonometria de Eratóstenes de Cirene

Eratóstenes (276 -196 a.C.) foi um matemático e geógrafo. Deve-se a ele a mais precisa medida da Antiguidade do perímetro Terrestre. Eratóstenes é o autor do conhecido “crivo de Eratóstenes” que determina de modo sistemático os números primos.

Eratóstenes observou que ao meio dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano, no hemisfério Norte) os raios do sol brilhavam e refletiam no fundo de um poço em Siene, para que a luz do Sol refletisse nas águas de um poço fundo o Sol, o poço e o raio da Terra deveriam estar bem alinhados, isto é, o Sol deveria estar no zênite (zênite é o ponto onde a vertical de um lugar fura a esfera celeste. Fonte:www.dicio.com.br>zênite-2). Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando na mesma meridiana, verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era de  $7,2^\circ$ , ou seja,  $1/50$  de um círculo. A distância de Alexandria a Siene é de 800 km, Eratóstenes chegou à conclusão que a distância entre as duas cidades deveria ser  $1/50$  do comprimento do meridiano da Terra que é de  $360^\circ$ (2p).



**Figura 2.5** Observações feitas por Eratóstenes  
**Fonte:** Boyer (1996, p.111)

Para calcular o comprimento da circunferência Terrestre, podemos usar uma regra de três simples, vejamos:

$$\frac{1}{50} \times 2p \text{ ----- } 800 \text{ km (distância entre as duas cidades)}$$

$$2p \text{ (360°) ----- } X \text{ (circunferência Terrestre)}$$

$$X = 40.000 \text{ km}$$

que é o equivalente a 50 vezes a distância de Siene a Alexandria.

### 2.3.4 A Trigonometria de Hiparco de Nicéia

Hiparco (180-125 a. C.) foi considerado um marco para a história da trigonometria, pois seus estudos possibilitaram grandes avanços para astronomia, e, portanto, é considerado um dos fundadores da trigonometria. Foi por volta de 150 a. C. que o astrônomo criou a primeira tabela de cordas, a qual associou a corda de um arco, ao ângulo central correspondente em um círculo de raio arbitrário. Ele foi um grande representante da passagem da astronomia babilônica para a obra de Cláudio Ptolomeu.

Provavelmente o uso do círculo de  $360^\circ$  na matemática, deve-se a Hiparco, tendo sido originado da sua tabela de cordas. É possível que ele tenha tomado essa ideia de Hipsícles. Influenciado pela astronomia babilônica, dividiu o dia em 360 partes.

Segundo Boyer (1996, p. 111), não se sabe como Hiparco fez sua tabela de cordas, pois suas obras se perderam.

Os métodos de Hiparco contribuíram de forma significativa para a realização da mais importante obra da Trigonometria da antiguidade, o “Almagesto” de Claudio Ptolomeu.

### 2.3.5 A Trigonometria de Cláudio Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu era astrônomo, geógrafo e matemático. Como foi mencionado anteriormente, ele foi o autor da mais importante e significativa obra da trigonometria da Antiguidade, conhecida como a “*Syntaxis Mathematica*” ou “*Almagesto*”, composta de treze volumes. O termo Almagesto surgiu com os árabes e significa “o maior”, pois foi considerada por eles a maior obra que havia na época.

O primeiro livro da coleção do Almagesto apresenta informações matemáticas fundamentais, indispensáveis na época para a compreensão dos fenômenos celestiais, como as proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. Os demais foram dedicados à Astronomia.

Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e os diâmetros em 120 partes, cada uma dessas partes ele subdividiu em minutos e cada minuto dividiu em sessenta segundos e usou  $377/120 \sim 3,14666\dots$  como uma aproximação para  $\pi$ . Construiu a tabela de cordas contendo ângulos variando de  $1/2^\circ$  a  $180^\circ$ . Desse modo a tábua de cordas de Ptolomeu equivalia a construir uma tabela de senos de ângulos  $1/4^\circ$  de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

No Almagesto encontramos o “Teorema de Ptolomeu”, que era de grande importância para o cálculo das cordas que diz:

*“Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais”.*

$$\mathbf{AB.CD + BC.DA = AC.BD}$$

Segundo Boyer (1996, p.113), desse teorema, Ptolomeu obteve às atuais expressões para o seno e cosseno da soma diferença de dois arcos:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha . \text{cos} \beta - \text{sen } \beta . \text{cos } \alpha$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha . \text{cos} \beta + \text{sen } \beta . \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha . \text{cos} \beta - \text{sen } \alpha . \text{sen} \beta$$

$$\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha . \text{cos} \beta + \text{sen } \alpha . \text{sen} \beta$$

A fórmula da diferença foi a mais importante que Ptolomeu utilizou para construir a sua tabela trigonométrica. Além dessa fórmula, a fórmula que hoje equivale para metade do ângulo também foi de suma importância para ele na construção de sua tabela de cordas:

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 - \text{cos} \alpha}}{2}.$$

## Capítulo 3

### A Trigonometria na Idade Média

#### 3.1 A Trigonometria Hindu

Por volta do ano 400 d.C., após o período helenista, o centro da criação da matemática começou a se deslocar para a Índia. Nesse período os astrônomos e matemáticos indianos produziram um conjunto de textos denominados *Siddhantas*, que significa sistemas de astronomia. Escritos em versos e em sânscrito, essa obra se destaca por possuir uma das mais antigas tabelas de senos. Um dos textos que foi preservado é o *SuryaSiddhanta* cujo autor, segundo os hindus, foi Surya, o deus sol.

No Surya os hindus aperfeiçoaram a ideia da trigonometria de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo e os arcos centrais que subtendiam. Eles estabeleceram uma relação entre a metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo central, com isso, forneceu uma contribuição fundamental à trigonometria: a introdução da noção de seno de um ângulo, que antecede a função trigonométrica moderna.

Em aproximadamente 500 d. C. o matemático e astrônomo Aryabhata publicou o *Aryabhatiya*, primeiro trabalho a mencionar de forma explícita ao seno como função de um ângulo. Segundo Boyer (1996, p.155), a palavra seno é decorrência de uma série de erros de tradução do sânscrito "jyâ-ardha", que significa meia-corda. Aryabhata abreviava esse termo para jya ou jiva. Posteriormente os árabes traduziram a palavra jya para jiba, e os escritores interpretaram como jaib que significa baía, seio ou algo sinuoso. Do árabe foi traduzido para o latim *sinus* que também significava seio, baía.

Segundo Costa (1997, p.9.), ao associar a metade da corda à metade do ângulo central, permitiu-se visualizar um triângulo retângulo na circunferência, como mostra a figura 2.

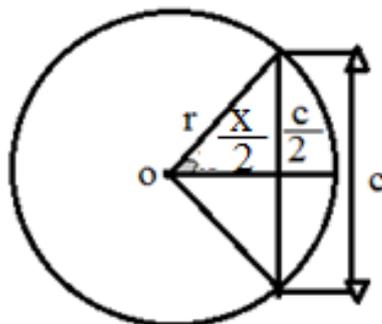


Figura 3: representação do "jiva" hindu

Sendo assim, o *jiva* é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa:

$$\text{jiva } \frac{x}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{sen } \frac{x}{2} = \frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r} cr dx$$

A metade da corda dividida pelo raio da circunferência é o seno da metade do arco .

E foi da necessidade de calcular o seno do ângulo complementar que surgiu o cosseno, denominado por Aryabhata de "kotiya".

Com os cálculos dos hindus as funções trigonométricas avançaram: foram aperfeiçoados os métodos de tabulação e as técnicas de aproximação.

Aryabhata elaborou tabelas envolvendo metade de cordas, hoje conhecida como tabelas de seno, e, aproximadamente em 1150 d.C., Bhaskara forneceu técnicas mais sofisticadas e detalhadas para construção de tais tabelas.

### 3.2 A Trigonometria Árabe

Por volta do século IX, o Império árabe viveu grandes avanços. A civilização foi construída com cultura própria, e de modo que a ciência ocupava lugar de destaque. Por serem grandes observadores, possuíam métodos de medição rigorosa e, com isso, desenvolveram diversos ramos da ciência, dentre esses a matemática. Além disso, foram responsáveis por preservar e traduzir obras antigas, portanto tiveram uma participação deveras importante na transmissão da história da matemática.

Os árabes utilizaram dois tipos de trigonometria: a grega, das cordas localizadas no *Almagesto*<sup>1</sup>; e a hindu dos textos dos Siddhantas, usando o *jiva* que se baseava no cálculo do seno de um ângulo. Por influência do matemático e astrônomo Al-Battani (850-929 d.C.), usavam com mais frequência a trigonometria hindu.

Al-Battani, também conhecido como Ptolomeu de Bagdad, foi considerado um dos árabes com maior contribuição na trigonometria. Baseou-se na função seno e teve a brilhante ideia de introduzir a circunferência de raio unitário, demonstrando que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independente do valor da medida da hipotenusa.

---

<sup>1</sup> O *Almagesto* ou *Syntaxis matemática*, era uma obra de treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria, O termo *Almagesto* surgiu com os árabes que significa "o maior", pois foi considerada por eles a maior obra que havia na época. (Boyer 1996, p.112).

No livro “*Sobre o movimento das estrelas*” de Al-Battani, podemos encontrar uma fórmula para determinar a elevação do Sol no horizonte, partindo do comprimento da sombra de um Gnômon<sup>2</sup> de altura  $a$ . Tal expressão foi descrita da seguinte maneira:

$$b = \frac{a \operatorname{sen}(90^\circ - A)}{\operatorname{sen} A}$$

onde  $a$  e  $b$  são os catetos oposto e adjacente ao ângulo  $A$  em um triângulo retângulo.

Al-Battani usou a função seno e seno versor - o seno do ângulo complementar, posteriormente denominado cosseno - para descrever a expressão anterior.

Após Al-Battani, veio Abu'lWefa (940-988) estudioso da álgebra e da trigonometria, que escreveu a expressão anterior simplesmente como  $a = btgA$ .

Com ele eram conhecidas e provadas, de forma sistemática, expressões para ângulo duplo e ângulo metade.

Wefa construiu uma tabela para senos de ângulos variando 1/4 de grau um do outro e usou o que seria equivalente a 8 casas decimais. Ele forneceu uma tabela de tangentes, na qual usou todas as seis funções trigonométricas comuns e estabeleceu relações entre elas.

Ainda que não formalmente definidas, os árabes contribuíram para o desenvolvimento das funções tangente, co-tangente, secante e cossecante. Desse modo eles também tiveram uma grande contribuição na trigonometria, foi através deles que a trigonometria chegou a Europa.

### 3.3 A Trigonometria da Europa na Idade Média

Com a decadência da Escola de Bagdad, as principais atividades intelectuais que lá eram realizadas deslocou-se para o sul da Europa, e também o estudo da trigonometria.

No século XI a cidade espanhola Toledo, que por alguns séculos era dominada pelos árabes, passou a ser dominada pelos cristãos. Nessa época era tida como importante centro de traduções. Após traduções de obras do hebreu, do grego e, especialmente do árabe para o latim, o século XII ficou conhecido como o “século das traduções”, desse modo permitindo aos europeus o acesso à matemática árabe e à herança grega.

No século XIII foi retomado o estudo da matemática na Europa com o matemático Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), também conhecido como Fibonacci, que desempenhou um importante papel na Europa Medieval. Em 1202, ele publicou sua obra “*Practica Geometriae*”, que trata de aplicações da trigonometria árabe em Agrimensura.

---

<sup>2</sup> Instrumento que projetando sombra em um plano horizontal, marca a altura do sol.  
Fonte: [www.dicio.com.br/gnomon](http://www.dicio.com.br/gnomon)

## Capítulo 4

### Trigonometria na idade moderna e contemporânea

#### 4.1 A Trigonometria na Europa do século XIV ao século XVII

Durante a idade moderna, a trigonometria na Europa obteve grande desenvolvimento. No século XIV, Georg von Purbach, na Inglaterra, computou uma nova tabela de senos baseada na obra de Ptolomeu. Posteriormente, o alemão Johannes Muller (1436 - 1476), discípulo de Purbach e também conhecido como Regiomontanus, em 1464, escreveu uma obra de grande importância para a trigonometria da época, “*De Triangulis Omnimodis*” (os triângulos de toda espécie), contendo cinco livros, descrevendo detalhadamente a trigonometria da época. Nesse trabalho ele calculou novas tábuas trigonométricas e aperfeiçoou a tabela de seno de Purbach, implantou na trigonometria da Europa a utilização das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. A obra também traz soluções para a geometria plana e esférica.

Foi a partir dessa obra de Regiomontanus que a trigonometria passou a ser definida como uma ciência que não dependia mais da Astronomia. Por volta de 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus foram completados por Nicolau Copérnico (1473-1543)

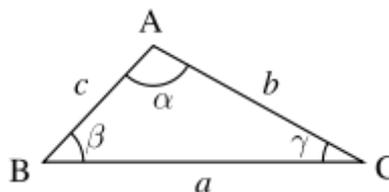
Com Rheticus (1514 - 1576) que era discípulo de Regiomontanus, todas as seis funções trigonométricas surgem pela primeira vez, definidas como função do ângulo, em vez de função do arco, implícita como razões, em seu trabalho *Canon Doctrinae Triangulorum*, embora não tenha denominado o seno, cosseno, cossecante e as demais funções. Rheticus um século depois recalculou as tábuas de Regiomontanus, com mais perfeição.

No século XVI, François Viète (1540-1603), foi o próximo a dar sua contribuição. Ele deu uma abordagem analítica para a trigonometria. Foi o primeiro a designar por letras qualquer coeficiente, o que contribuiu para o progresso da álgebra.

Viète ainda obteve um desenvolvimento no cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos esféricos (Não é figura de três vértices desenhada sobre a esfera; para ser triângulo esférico esta figura tem que ter lados que sejam arcos de grandes círculos, ou seja, arcos esféricos. Fonte: [www.if.ufgs.br](http://www.if.ufgs.br)), usando as seis funções trigonométrica.

Em sua obra, *Variorun de Rebus Mathematicis*, surge uma fórmula para tangente, equivalente a que conhecemos hoje:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = \frac{a+b}{a-b}$$



**Figura 4.** Lei das tangentes

**Fonte:** [www.pt.wikipedia.org/wiki/Lei\\_das\\_tangentes](http://www.pt.wikipedia.org/wiki/Lei_das_tangentes)

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos e  $a$  e  $b$  os respectivos lados. Todavia, esta relação da tangente só foi publicada em 1583, pelo matemático Thomas Fincke em seu trabalho *Geometria Rotundi*.

Em 1525 foi publicado um tratado, onde foram corrigidas as tábuas de Rheticus dando um caráter mais atualizado.

Foi Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) que concebeu o nome Trigonometria, quando publicou um livro em 1595, dando o nome de Trigonometria.

Em seguida, o britânico John Napier (1550-1617), instituiu regras para triângulos esféricos, e em 1614 criou a lei dos logaritmos.

William Oughtred foi outro nome que contribuiu com a evolução da trigonometria pois tentou desenvolvê-la de maneira simbólica, aperfeiçoando a notação da álgebra, contudo a ideia foi aceita somente no século XVIII com Euler, pois até então as notações algébricas eram pouco avançadas.

Em seguida, John Newton (1622-1678) em 1658 publicou o tratado sobre Trigonometria mais completo da época, *Trigonometria Britannica*, antecipando os conceitos sobre a introdução de divisões centesimais nas tabelas trigonométricas.

John Wallis (1616 -1703), também contribuiu de forma significativa na trigonometria. Ele publicou em 1655, sua obra *Arithmetica Infinitorum*, que usou um método abrangendo séries infinitas, introduzindo pela primeira vez o símbolo  $\infty$  para denotar o infinito.

O matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677), desenvolveu um método para calcular as tangentes e as curvas. Método parecido com o que é usado atualmente no cálculo.

Outro importante nome é Sir. Isaac Newton (1642-1727) que, segundo Boyer (1996,p.292) nasceu em 1642 no sul da Inglaterra. Influenciado pelo trabalho de Wallis e Barrow, trabalhou com funções em termos de séries infinitas, ampliou o  $\operatorname{arcsen} x$  em séries e induziu a série para  $\operatorname{sen} x$  por reversão.

Newton informou a Leibniz a fórmula geral para  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$ , desse modo, dando probabilidades para que o  $\sin x$  e o  $\cos x$ , se tornassem números, deixando de ser grandeza, mas isso só foi possível com Kastner, em 1758.

Leibniz nasceu em 1646 na Alemanha. Sua grande contribuição a matemática foi o cálculo, a primeira exposição do Cálculo de Leibniz em 1684, foi "*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec irrationales quantitates moratur*" (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais).

Por último temos Thomas Fanten de Lagny, que em 1710, foi o primeiro a demonstrar a periodicidade das funções trigonométricas.

## 4.2 A Trigonometria dos séculos XVIII e XIX, forma analítica

O século XVIII foi marcado pela presença de um dos maiores matemáticos da história: o suíço Leonhard Euler (1707-1783). Sua obra é constituída de aproximadamente 800 manuscritos (livros e artigos), dos quais 300 foram publicados após seu falecimento.

Euler adotou o raio de um círculo como unidade e passou a definir as funções trigonométricas aplicadas a um número e não a um ângulo, usado até então. Com essas medidas, Euler influenciou o desenvolvimento da trigonometria da época para a forma atual. As funções trigonométricas passaram a ser vistas como funções periódicas no início do século XVI, motivado pelos trabalhos do matemático francês François Viète (1540-1603), e impulsionada pelo surgimento do cálculo infinitesimal, atingindo ápice no século XVIII, quando Euler introduziu a função exponencial "e", onde o símbolo "e", representa o atualmente conhecido "*número de Euler*", aproximadamente 2,718. Através desta, foi possível modernizar as noções de seno e cosseno, ao definir  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  como funções de uma variável real  $x$ .

Euler introduziu as notações  $\sin, \cos, \tan, \csc, \sec$  e  $\cot$ , para as funções trigonométricas. Apesar de não ter sido criação sua, o uso definitivo da letra grega  $\pi$  para representar razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, e em grande parte devido a ele.

Em 1748, Euler escreveu um livro chamado "*Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à análise do infinito)", que é considerada uma obra fundamental na análise matemática. A partir de então deu um tratamento puramente analítico as funções trigonométricas. Nesse livro o seno e o cosseno não era mais apenas uma grandeza, era uma

razão ou o número obtido pela coordenada de um ponto de um círculo unitário ou definido por uma série do tipo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \operatorname{cos} x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

para um cada número real  $x$ .

Em 1748 Euler mostrou as funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos por meio da fórmula:

$$e^{i\theta} = \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots \right) + i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots \right)$$

isto é,

$$e^{i\theta} = \operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

onde  $i$  é a unidade imaginária,  $i^2 = -1$ .

Considerando a fórmula anterior, fazendo a substituição de  $\theta$  por  $-\theta$ , obtemos  $e^{-i\theta} = \operatorname{cos} \theta - i \operatorname{sen} \theta$ , e a partir disso,  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\operatorname{cos} \theta$  e  $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen} \theta$ , que resulta nas fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

que são conhecidas como “identidades de Euler”, mas essas fórmulas já eram conhecidas pelo matemático inglês Roger Cotes (1682-1716) e Moivre (1667-1754).

O matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) publicou em 1822 a sua importante obra *Théorie analytique de la chaleur*, que descreve quando uma função  $y=f(x)$  pode ser representada por uma série trigonométrica conhecida como *série de Fourier* expressa por:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \operatorname{cos}(x) + a_2 \operatorname{cos}(2x) + a_3 \operatorname{cos}(3x) + \dots + a_n \operatorname{cos}(nx) \\ &\quad + b_1 \operatorname{sen}(x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + b_3 \operatorname{sen}(3x) + \dots + b_n \operatorname{sen}(nx), \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  dessa série podem ser definidos através das integrais:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}(kx) dx$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$

## 4.2.1 A Série de Taylor

A série de Taylor de uma função  $f$  infinitamente derivável em torno do ponto  $x = a$  é dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} c_n (x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots, \end{aligned}$$

onde  $f^{(n)}(a)$  representa a derivada de ordem  $n$  da função  $f$  no ponto  $a$ .

Quando a *série de Taylor* de uma função em torno de  $a = 0$ , ela é denominada como *série de Maclaurin*<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \end{aligned}$$

Portanto, as funções  $\text{sen } x$  e  $\text{cos } x$  possuem série de Taylor em torno do ponto  $x = 0$  da forma:

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \text{cos } x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \dots \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Quando  $a=0$ , a série de Taylor recebe o nome de *Série de Maclaurin* de  $f$ , como forma de homenagem ao matemático Colin Maclaurin (1698-1746) que tornou essa série popular, em suas publicações.

## Capítulo 5

### Procedimentos Metodológicos

#### 5.1 Ambiente e Participantes da Pesquisa

Nossa pesquisa foi realizada na escola pública estadual Escola Adalgisa Teódolo da Fonseca, localizada no município de Itaporanga-Pb. O público alvo desta pesquisa de maneira voluntária foram 21 alunos do 3º ano B do Ensino Médio que estavam presentes no dia da aplicação do instrumento de pesquisa, dos que estavam presentes apenas um não aceitou responder o questionário.

#### 5.2 Instrumento de pesquisa

O Instrumento de pesquisa utilizado foi um questionário (Apêndice A) composto de uma pergunta aberta, e teve como objetivo identificar o conhecimento dos alunos sobre a história da Trigonometria. O questionário foi aplicado por meio de uma visita na escola citada acima, no dia 11/05/2016.

O questionário foi aplicado individualmente contando com a autorização do diretor da escola (Apêndice B) e do professor de matemática regente (Apêndice C), para preservar a identidade dos alunos colocamos as respostas em ordem aleatória (Apêndice D).

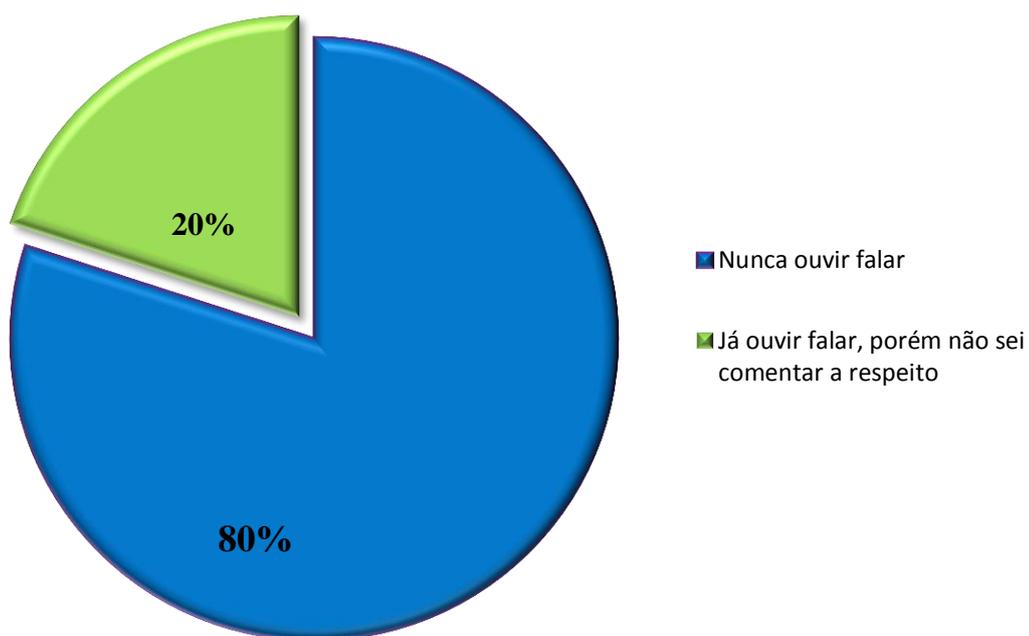
#### 5.3 Análises do Questionário

A questão investigada foi “você conhece algo sobre a história da Trigonometria? Em caso afirmativo, faça um breve comentário sobre o mesmo”, encontramos os seguintes dados:

Respostas	Quantidades
Nunca ouvi falar	<b>16</b>
Já ouvi falar, porém não sei comentar a respeito.	<b>4</b>

**Tabela 1- Conhecimento da história da Trigonometria**

De acordo com os dados, obtemos o seguinte gráfico:



**Figura 5:** Alunos com algum conhecimento da história da Trigonometria

Podemos observar que grande maioria da turma não possuía conhecimento algum sobre a história da Trigonometria, e que os quatro alunos que afirmaram conhecer sobre o tema não souberam comentar.

## Considerações Finais

Percebemos que o ensino da matemática nas escolas, mesmo com os avanços, na sua grande maioria é realizado de forma mecânica, não fazem o uso da história da matemática como metodologia de ensino, baseando somente no método tradicional.

Por meio deste trabalho damos ênfase à necessidade de estudarmos a história da matemática, através da sua evolução, desde a antiguidade, poder compreender os conceitos matemáticos atuais.

A história da Trigonometria nos permitiu conhecermos sua evolução ao longo dos séculos, percebendo o quão importante foi a astronomia no desenvolvimento da trigonometria, conhecendo os métodos de resolução das funções trigonométricas de diferentes matemáticos e a contribuição de cada povo em diferentes épocas.

Este trabalho objetivou-se também em investigar o conhecimento dos alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Itaporanga-Pb.

A pesquisa demonstrou que a maioria dos alunos nunca ouviu falar sobre a história da trigonometria, e os que já ouviram falar não soube comentar sobre o tema. Isso nos mostra que a história da matemática como prática didática é de pouca relevância.

Portanto, através da metodologia da história da Matemática, por meio do estudo histórico da trigonometria, podemos motivar os nossos educandos a ter um maior interesse em aprender a trigonometria, uma vez que os fatos históricos nos levam a entender o “porquê” estudar a matemática.

## Referências

ASSIS, José Gomes de [et al]. **Licenciatura em Matemática a Distância**. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2011, 290 p.

BARRETO, Marina Menna, **Como Erastótenes calculou o raio da terra?**. Disponível em: [http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo\\_mat/malice3/erast.htm](http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/malice3/erast.htm). Acesso em: 16/05/2016.

BOYER, Carl C., **História da Matemática**, Editora, 470 p., Edgard Bucler, São Paulo, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília: MEC /SEF, 1998.148 p.

CANTÃO, Luiza AmaliaPinto, **Séries-7. Séries de Taylor e de Maclaurin**, Depto. de Engenharia Ambiental, Universidade Estadual Paulista – UNESP. Disponível em: <http://www.sorocaba.unesp.br/professor/uiza/CDI-III/series7.pdf>

CERVO, A. L; BERVIAN, P. A; SILVA, R. **Metodologia Científica**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

COSTA, N. M. L. **A história da Trigonometria**. Disponível em <[www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/.../historia\\_trigono.pdf](http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/.../historia_trigono.pdf)>. Acesso em 04/03/2016.

D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática**– Questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p.97-115.

GIL, Antonio Carlos, **Métodos e técnicas de pesquisa social** / Antonio Carlos Gil. - 6. ed. - São Paulo : Atlas, 2008, 200 p.

MOL, Rogério Santos, **Introdução à história da matemática** / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013. Disponível em: <[http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao\\_a\\_historia\\_da\\_matematica.pdf](http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf)>Acesso em 04/03/2016.

NASCIMENTO, Alessandra Zeman do. **Uma sequencia de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica** .Disponível em: <[http://www.sapientia.pucsp.br/tde\\_arquivos/14/TDE-2007-08-03T07:18:46Z-3983/Publico/Alessandra%20Nascimento.pdf](http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/14/TDE-2007-08-03T07:18:46Z-3983/Publico/Alessandra%20Nascimento.pdf)>. Acesso em 09/03/2016.

OLIVEIRA, Jaqueline de. **Tópicos selecionados de Trigonometria e sua História** .Disponível em:<<http://www.dm.ufscar.br/profs/tcc/trabalhos/2010-2/313530.pdf>>. Acesso em 04/03/2016 .

SANTOS, Fabiano S. **Introdução às Séries de Fourier**. Disponível em: [http://www.matematica.pucminas.br/profs/web\\_fabiano/calculo4/sf.pdf](http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf). Acesso em 10/05/2016.

# Apêndice A

## Questionário



Universidade federal da Paraíba  
Universidade aberta do Brasil  
Centro de ciências exatas e da natureza  
Departamento de matemática  
Licenciatura em matemática à distância



### Questionário

Você conhece algo sobre a história da trigonometria? Em caso afirmativo, faça um breve comentário sobre o mesmo.

---

---

---

---

# Apêndice B

## Autorização do diretor da escola

### TERMO DE CIÊNCIA

Eu Severino Pedro de Sousa com cargo de diretor da escola Adalgisa Teódolo da Fonseca, estou de acordo que a Profa. Lindevânia de Almeida Leite aplique o questionário em anexo na turma do 3º ano médio para ser usado em seu trabalho de conclusão no curso Licenciatura em Matemática UFPB virtual.



Universidade federal da Paraíba  
Universidade aberta do Brasil  
Centro de ciências exatas e da natureza  
Departamento de matemática  
Licenciatura em matemática à distância



### Questionário

Você conhece algo sobre a história da trigonometria? Em caso afirmativo, faça um breve comentário sobre o mesmo.

---

---

---

---

## Apêndice C

### Autorização do Professor Regente

#### TERMO DE CIÊNCIA

Eu Sandra de Freitas Araújo, com cargo de professor da escola Adalgisa Teódolo da Fonseca, estou de acordo que a Profa. Lindevânia de Almeida Leite aplique o questionário em anexo na turma do 3º ano médio para ser usado em seu trabalho de conclusão no curso Licenciatura em Matemática UFPB virtual.



Universidade federal da Paraíba  
Universidade aberta do Brasil  
Centro de ciências exatas e da natureza  
Departamento de matemática  
Licenciatura em matemática à distância



#### Questionário

Você conhece algo sobre a história da trigonometria? Em caso afirmativo, faça um breve comentário sobre o mesmo.

---

---

---

---

## Apêndice D

### Respostas dos alunos

Nunca souei falar sobre a história dela, só conheço a parte de cálculos

Sim, mas não sei citar de forma correta, quais são suas bases originais no contexto de sua história.

Não

Eu já souei falar, já estudei, mais não sei ~~o que~~ e.

Eu sei algumas coisas, porém nunca souei falar a história toda!

Não.

Nunca souei falar

Não conheço a história.  
Nunca souei falar

Não sei explicar exatamente, mas tenho conhecimentos a respeito.

Não sei a história.

Não sei.

NÃO! NUNCA OUVI ISSO NA VIDA

NÃO! A HISTÓRIA EU NUNCA VI SER APRESENTADO EM CLASSE

Nunca ouvi falar.

Nunca ouvi falar.

Não conheço.

Nunca ouvi falar sobre essa história

Eu não sei quem é não sou de lá não  
Na não

NÃO.