UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

André Rodrigues da Silveira

Matriz de Leslie e aplicações

João Pessoa – PB
2015

André Rodrigues da Silveira

Matriz de Leslie e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Dr. José Gomes de Assis

João Pessoa – PB
2015

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN
Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB15/113

S587m Silveira, André Rodrigues da..
Matriz de Leslie e aplicações / André Rodrigues da Silveira. – João 2015.
41p. : il.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba/EaD.
Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis.

1. Álgebra linear. 2. Matriz de Leslie. 3. Álgebra - Sustentabilidade. 3. Título.

UFPB/BS-CCEN CDU 512.64(043.2)

André Rodrigues da Silveira

Matriz de Leslie e aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática à distância da Universidade Federal da Paraíba como requisitos parcial para obtenção do título de licenciatura em Matemática.

Orientador: Professor Dr. José Gomes de Assis

Aprovado em 23 / 12 / 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

José Gomes de Assis
Presidente

Inaldo B. de Albuquerque
Examinador

José Fabrício L. de Souza
Examinador

Dedico este trabalho a toda a minha
Família, pelo incentivo, carinho e
apoio nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

É com muita alegria que estou deixando os meus agradecimentos.

Quero agradecer primeiramente a Deus por me dar força e saúde para conseguir concluir um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade à distância;

A todos os professores e tutores que me ajudaram nessa caminhada;

Aos meus colegas, pela interatividade, estímulo e colaboração nessa trajetória;

A minha esposa, minha mãe, minhas irmãs, minha filha que sempre estiveram ao meu lado e me estimularam o curso inteiro;

Principalmente ao Professor Dr. José Gomes de Assis coordenador do curso e meu orientador.

RESUMO

Neste trabalho usaremos o conhecimento de Álgebra Linear para mostrar o processo de construção da matriz de Leslie a qual será utilizada para estudar o crescimento populacional da parte fêmea animal ou humana, vamos investigar o crescimento populacional por faixa etária em um determinado tempo, onde o processo de nascimento e morte entre dois tempos de observação sucessiva pode ser descrito por meio de parâmetros demográficos, onde esses parâmetros são dados pela a taxa de nascimento e a taxa de sobrevivência. Estudaremos a distribuição etária em um determinado instante representada por um vetor, que nos possibilitará prever o número de fêmeas na i-ésima faixa etária em um determinado instante. Estudaremos os autovalores e autovetores para identificar o comportamento dessa distribuição em longo prazo, em seguida estudaremos uma política de colheita de população animal utilizando o crescimento populacional para modelar colheita sustentável dessas fêmeas, uma política de colheita pela qual uma população animal é periodicamente colhida.

Palavra chave: Álgebra Linear. Matriz de Leslie. Sustentabilidade.

ABSTRACT

In this paper we use the knowledge of linear algebra to show the process of building the Leslie matrix which will be used to study the population growth of female part animal or human, we will investigate population growth by age group in a given time, where the process Birth and death between two successive observation times can be described by demographic parameters, where these parameters are given by the birth rate and survival rate. We study the age distribution at a given moment represented by a vector, which will enable us to predict the number of females in the ith age group at a given time. Study the eigenvalues and eigenvectors to identify the behavior of this distribution in the long term, then we will study an animal population harvest policy using the population growth to model sustainable harvesting of females, a harvest policy in which an animal population is periodically harvested.

Keyword: Linear Algebra. Leslie matrix. Sustainability.

Lista de Figuras:

Lista de Tabelas

Sumário:

1 Introdução

Várias disciplinas acadêmicas se unem ou dependem da matemática, a biologia se juntou com a matemática para investigar a dinâmica de um crescimento populacional, onde podemos usar uma matriz de Leslie para Calcular os possíveis números de Fêmeas quando projetada para o futuro, e uma política de colheita sustentável. Suponha que você queira abrir um negócio que envolva animais, ou melhor, suponha que esse negócio seja uma criação de ovelha, logo vão surgi perguntas tipo, se ao iniciar esse negócio com x quantidade de ovelha, quantas ovelhas estarei após y anos? Para o negócio dar certo após y anos à quantidade de ovelha tem que ser maior que a do início, se conseguir z quantidade de ovelhas a um determinado tempo, teria que fazer uma colheita periódica de no máximo z-x ovelhas para o negócio ser sustentável, ou seja, teremos que fazer uma política de colheita sustentável. Com objetivo de ampliarmos a sua compreensão faremos um estudo de uma matriz de Leslie, que usando o método da álgebra linear responderá a todas estas questões.

1.1 Memorial

Meu nome é André Rodrigues da Silveira, natural de Cuité de Mamanguape PB, casado e tenho duas filhas. Iniciei o meu percurso acadêmico em 1985 no Rio de Janeiro aos seis anos, época que meus pais se mudaram para o Rio de janeiro em busca de trabalho, na época fui matriculado em uma das creches de lá cujo nome não relembro, em 1986 voltamos para a minha cidade natal, e meus pais me matricularam em uma escola da cidade a qual hoje funciona a câmara municipal da cidade, ao término da fase pré-escolar fui matriculado Na Escola Municipal de Ensino Fundamental Luiz Joaquim dos Santos, onde permaneci da 1^a a 4^a Série. Em 1992 fui estudar na cidade de Marí na Escola Estadual de Ensino Fundamental Luiz Maria de França, onde conclui a 5^a Série. Em 1993 fui estudar na escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Senador Rui Carneiro localizado na cidade de Mamanguape, onde permanecei da 6^a série ao 2^o ano do segundo grau. Em 1998 viajei para o Rio de Janeiro em busca de trabalho, e me matriculei na Escola Municipal de Ensino Fundamental e Médio Albert Schweitzer, localizado na Rua General Glicério, bairro das Laranjeiras, Rio de Janeiro, onde concluí o meu segundo grau atualmente ensino médio.

Em 2001 voltei á minha cidade natal, logo veio o comodismo, fiquei sem estudar um bom tempo, e em 2008 resolvi me escrever para o concurso da CAGEPA (Companhia de Água e Esgotos da Paraíba), no qual fui aprovado, como estava demorando a ser chamado para assumir o cargo resolvi me escrever para o concurso da Prefeitura Municipal de Capim PB, onde também fui aprovado, fui chamado de uma vez só para os dois e optei por ficar com o da CAGEPA por ter uma remuneração melhor.

Devido ter que ir trabalhar em João Pessoa, resolvi me mudar para a capital, depois de ter feito dois concursos e ter sido aprovado nos dois, percebi que tinha potencial e fui pegando gosto pelos estudos. Em 2011 resolvi prestar vestibular ao Curso de Licenciatura em Matemática à Distância, onde Graças a Deus estou concluindo.

1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral deste projeto é investigar a matriz de Leslie e suas propriedades algébricas para utilização em modelagem matemática que descreve o crescimento populacional, por faixa etária de fêmeas (humanas ou de animais) em uma determinada população em um tempo determinado.

1.3 Objetivos Específicos

. Definir o processo de construção de uma matriz de Leslie.

. Definir um vetor de distribuição etária inicial e sua projeção para futuro.

. Usar os estudos dos autovalores e autovetores para observar o comportamento desse vetor em longo prazo.

. Investigar uma colheita de população animal, de modo que o seu rendimento seja sustentável.

1.4 Metodologia de Pesquisa

Este trabalho tem característica exploratória, onde são colhidos dados bibliográficos e links da internet para construção de uma pesquisa de caráter qualitativo, onde é feita uma pesquisa bibliográfica desenvolvendo ideias e conceitos com o objetivo de estimular o leitor explorar livremente ao tema abordado. Tema este que será dividido em três capítulos.

- Introdução aos modelos matriciais

- Aplicações de Matriz de Leslie

- Colheita de populações animais

2 Introdução aos Modelos Matriciais

2.1 Matriz de Leslie

Vamos apresentar, de forma geral, o modelo matricial de Leslie utilizado em várias áreas do conhecimento quando se trata de modelagem matemática de crescimento populacional. O modelo matricial populacional que tem início em meados da década de 1940 e devem-se aos esforços de Leslie (1945), mais tarde refinados por Lefkovitch (1965). Com o objetivo de estudar o crescimento populacional. Vamos apresentar a construção e as propriedades da matriz de Leslie para o caso particular do crescimento populacional da parte fêmea de uma população animal ou humana. Neste modelo, as fêmeas são divididas em faixas etárias de igual duração. Supomos que a idade máxima que uma população fêmea possa atingir seja **L**. Se dividimos a população em **n** faixa etária cada faixa etária terá **L/n** anos de duração. Vamos construir uma tabela para melhor visualização:

Tabela 2.1

Faixa Etária	Intervalo de Idade
1	$[0, L/n)$
2	$[L/n, 2L/n)$
3	$[2L/n, 3L/n)$
.	.
.	.
.	.
$n-1$	$[(n-2)L/n, (n-1)L/n)$
n	$[(n-1)L/n, L]$

Suponha agora que seja conhecido o número de fêmeas em cada uma das **n** faixas etárias no instante t = 0. Em particular, suponha que há $\boldsymbol{x_1^0}$ fêmeas na primeira faixa etária, $\boldsymbol{x_2^0}$ fêmeas na segunda faixa etária, e assim sucessivamente. O leitor deve ter percebido que podemos formar com estes n números, um vetor-coluna:

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^0 \\ \boldsymbol{x}_2^0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^0 \end{bmatrix}$$

Este vetor é chamado de vetor de distribuição etária.

Com o passar do tempo, o número de fêmeas em cada uma das n-faixas etárias sofre alterações em virtude de três processos: nascimento, morte e envelhecimento. Descrevendo estes três processos quantitativamente, nós podemos projetar esse vetor inicial para o futuro. O Modelo de Leslie exige que a duração entre dois períodos de observação seja igual à duração de cada faixa etária.

Portanto:

t_0 = 0, t_1 = L/n, t_2 = 2L/n ... t_k = KL/n...

Desta forma podemos observar que, todas as fêmeas na (**i+1**)-ésima faixa etária no instante $\boldsymbol{t_{k+1}}$ estavam na i-ésima faixa etária no instante t_k.

O processo de nascimento e morte entre dois tempos de observação sucessiva pode ser descrito por meio dos seguintes parâmetros demográficos:

a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$	Número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na $i - ésima$ faixa etária. Esse número será chamado a partir de agora de taxa de nascimento.
b_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$	Fração de fêmeas na $i - ésima$ faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a $(i + 1) - ésima$ faixa etária. Essa fração será chamada a partir de agora de taxa de sobrevivência.

Pelas definições, temos que:

(i) $a_i \geq 0$ para i =1,2,3...n

(ii) $0 < b_i \leq 1$ para i = 1,2,3...n-1

Podemos notar que os b_i são maiores que zero, caso algum fosse zero, nenhuma fêmea sobreviveria além da faixa etária.

O vetor X^kde distribuição etária no instante t_k será definido por:

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^K \\ x_2^K \\ \vdots \\ x_n^K \end{bmatrix}$$

Onde x_i^K corresponde ao número de fêmeas na i-ésima faixa etária no instante $t_k$onde as fêmeas na primeira faixa etária corresponde as filhas nascida no instante $t_{k-1}\ \ e\ t_k$ Logo podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} número\ de \\ fêmeas\ na \\ na\ faixa \\ etária\ 1 \\ no\ tempo\ t_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} numero\ de \\ filhas\ nascidas \\ das\ fêmias\ na \\ faixa\ etária\ 1 \\ entre\ os\ tempos \\ t_{K-1}\ e\ \ t_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} numero\ de \\ filhas\ nascidas \\ das\ fêmias\ na \\ faixa\ etária\ 2 \\ entre\ os\ tempos \\ t_{K-1}\ e\ \ t_K \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} numero\ de \\ filhas\ nascidas \\ das\ fêmias\ na \\ faixa\ etária\ n \\ entre\ os\ tempos \\ t_{K-1}\ e\ \ t_K \end{pmatrix}$$

Matematicamente podemos escrever:

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + a_3 x_3^{(k-1)} + \ldots.. \ a_n x_n^{(k-1)} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Já as fêmeas na (i+1)-ésima faixa etária (i=1,2,3....n-1)no instante t_k são as fêmeas que estavam na i-ésima faixa:

$$\begin{pmatrix} número\ de \\ fêmea\ na\ faixa \\ etária\ i+1 \\ no\ instante\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fração\ de \\ fêmeas\ da\ faixa \\ etária\ i\ que \\ sobrevive\ e\ passa \\ para\ a\ faixa \\ etária \\ i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} número\ de \\ fêmeas\ na \\ faixa\ etária \\ i\ no\ instante \\ t_{k-1} \end{pmatrix}$$

Matematicamente podemos escrever:

$$x_{i+1}^k = b_i\ x_i^{k-1},\ i= 1,2,3,.., n-1 \qquad \textbf{(2.2)}$$

As equações **(2.1)** e **(2.2)** podem ser resumidas na equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Que de uma forma mais compacta podemos escrever:

$$X^{(k)} = LX^{(k-1)} \quad k = 1,2,3...n \qquad \textbf{(2.3)}$$

Onde a matriz de Leslie é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Vejamos que a partir a equação **(2.3)** obtemos

$$X^{(1)} = LX^{(0)}$$

$$X^{(2)} = LX^{(1)} = L^2X^{(0)}$$

$$X^{(3)} = Lx^{(2)} = L^3X^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$X^{(k)} = LX^{(K-1)} = L^KX^{(0)} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Assim, se conhecermos a distribuição iniciais $\mathbf{X^{(0)}}$ e a matriz de Leslie $\mathbf{L}$ podemos determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos posteriores.

2.2 Distribuição etária de fêmeas em animais

Suponha-se que a idade máxima de uma fêmea de uma espécie é de 30 anos e que nós dividimos em três faixa etária de idade [0 ; 10) ; [10 ; 20) ; [20; 30] . Se os parâmetros demográficos acima definidos são: $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$ $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{4}$

Podemos construir uma matriz de Leslie do tipo 3x3:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Suponha também que já temos $X^{(0)}$, onde a população inicial em cada faixa etária é 1000 fêmeas, ou seja:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Como $X^{(K)} = Lx^{(K-1)} = L^K x^{(0)}$ temos que:

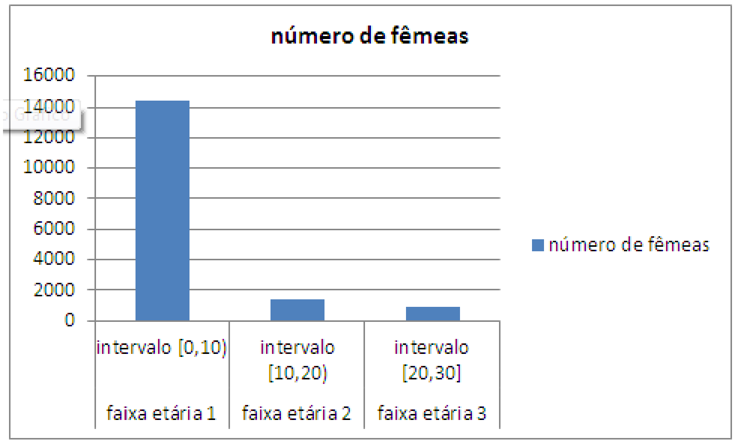
$$X^{(1)} = LX^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = LX^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.000 \\ 500 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.750 \\ 3.500 \\ 125 \end{bmatrix}$$

$$X^{(3)} = LX^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.750 \\ 3.500 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.375 \\ 1.375 \\ 875 \end{bmatrix}$$

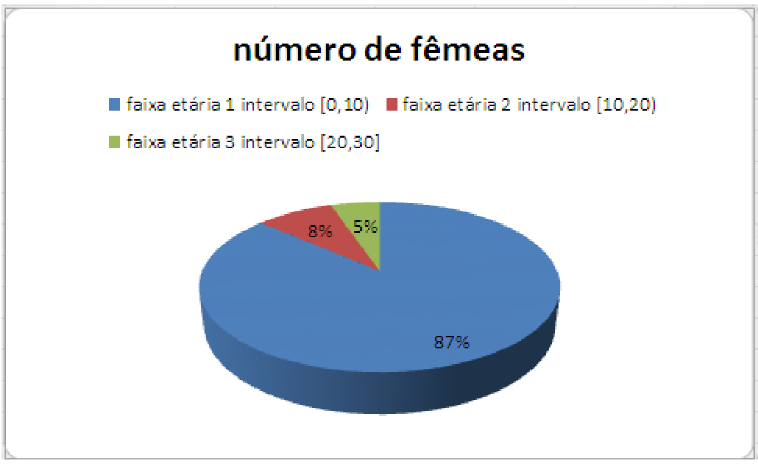
Veja que após 30 anos as faixas etárias há 14.375 fêmeas no intervalo [0 a 10) anos de idade, 1.375 fêmeas no intervalo de [10 a 20) anos de idade, 875 fêmeas no intervalo de [20 a 30] anos de idade. Observe as figuras **2.1** e **2.2** abaixo para uma melhor visualização da distribuição etária em cada intervalo de idade

Figura 2.1



Fonte: pesquisador

Figura 2.2



Fonte: pesquisador

Obviamente que pode repetir esse processo para encontrar a população em cada faixa etária de idade após períodos de tempo r (isto é, 10r anos). |

É natural que se pergunte o que a distribuição da população em longo prazo será, e para encontrar isso, precisamos dos valores próprios e vetores próprios que estudaremos em seguida.

2.3 Comportamento limite

Segundo Frederico 2008 pg.168 Licenciatura em Matemática à distância.V.2. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2008. Seja f(x) em um intervalo aberto em torno de x_0 se f(x) fica arbitrariamente próximo de de L, para todos os valores de x suficientemente próximo de x_0 dizemos que f tem limite L quando x tende **a** x_0 e escrevemos: $\mathbf{lim}_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$

A equação $X^{(k)}$ = L$X^{(k-1)}$ = $L^K X^{(0)}$ escrita desta forma , não nos dá uma ideai geral da dinâmica de crescimento . Para fazer isso, devemos nos voltar para o estudo dos autovalores e autovetores de uma matriz de Leslie. Lembre-se que os autovalores próprios são as raizez do polinômio característico que é. p(λ) = det $|L - \lambda I|$

$$p(\lambda) = \det \left[\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} - \left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \right]$$

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} - \ldots a_n b_1 b_{2\ldots} b_{n-1} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Podemos verificar que realmente funciona. Usando uma matriz de ordem 3x3.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{1-\lambda} & a_2 & a_3 \\ b_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

p(λ) = $-\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2 b_1 \lambda + a_3 b_1 b_2$ multiplicando por (-1)

p(λ) = $\lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2 b_1 \lambda - a_3 b_1 b_2$, e assim por diante.

Para analisar as raízes de p(λ) é conveniente a introdução de uma nova função em λ.

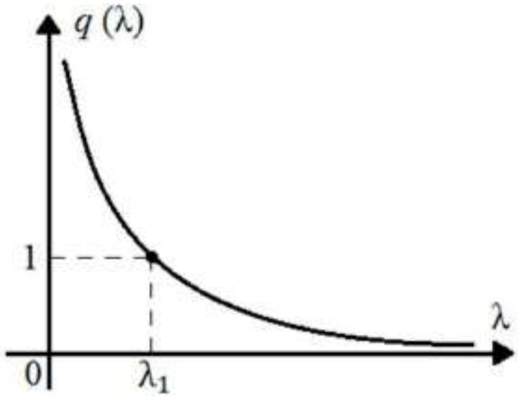
Note que $\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left[\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_2 b_1 b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda^n}\right]$

A parte em colchete denominaremos de q(λ)

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_2 b_1 b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda^n} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Observe que q(λ) = $-\frac{p(\lambda)}{\lambda^n} + 1$, logo p(λ) = 0 → q(λ) = 1 para λ ≠ 0.

Figura 2.3



Fonte: http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/485/1/CM_ESPMAT_II_2012_05.pdf

Como todos os a_i e b_i são não-negativos, vemos que q(λ) é monotonamente decrescente para λ > 0. Além disto, q(λ) tem uma assíntota vertical em λ = 0 e tende a zero quando λ → ∞ então existe apenas um único autovetor de $\lambda_1 = \lambda$, tal que q(λ) = 1. Ou seja, a matriz L tem um único autovalor positivo, podemos verificar que por definição o vetor de distribuição etária que representa a proporção do número de fêmeas ao longo prazo $\boldsymbol{X_i}$ é dado por $\mathbf{L}\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{\lambda_1 X_1}$ onde L é a matriz de Leslie, $\boldsymbol{\lambda_1}$ é o autovalor positivo

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & & & & 0 & 0 \\ . & . & . & & \ddots & & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema temos

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = \lambda_1 x_1 \\ b_1x_1 = \lambda_1 x_2 \to \boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{b_1x_1}}{\boldsymbol{\lambda_1}} \\ b_2x_2 = \lambda_1 x_3 \to \boldsymbol{x_3} = \frac{\boldsymbol{b_2x_2}}{\boldsymbol{\lambda_1}} = \frac{\boldsymbol{b_2}(\frac{\boldsymbol{b_1x_1}}{\boldsymbol{\lambda_1}})}{\boldsymbol{\lambda_1}} = \frac{\boldsymbol{b_1b_2x_1}}{\boldsymbol{\lambda_1^2}} \\ b_3x_3 = \lambda_1 x_4 \to \boldsymbol{x_4} = \frac{\boldsymbol{b_3x_3}}{\boldsymbol{\lambda_1}} = \frac{\boldsymbol{b_2}(\frac{\boldsymbol{b_1b_2x}}{\boldsymbol{\lambda_1^2}})}{\boldsymbol{\lambda_1}} = \frac{\boldsymbol{b_1b_2b_3x_1}}{\boldsymbol{\lambda_1^3}} \\ \vdots \\ b_{n-1}x_{n-1} = \lambda_1 x_n \to \boldsymbol{x_n} = \frac{\boldsymbol{b_1b_2b_3 \ldots b_{n-1}x_1}}{\boldsymbol{\lambda_1^{n-1}}} \end{cases}$$

Vamos considerar cada x_n em função de x_1 e substituindo x_2, x_3, x_4... x_n na primeira equação do sistema, obtemos

$$\frac{a_1x_1}{\lambda_1} + \frac{a_2b_1x_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_3b_1b_2x_1}{\lambda_1^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2b_3 \ldots b_{n-1}x_1}{\lambda_1^n} = x_1$$

dividindo a equação por x_1, obtemos

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2b_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda_1^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2b_3 \ldots b_{n-1}}{\lambda_1^n} = 1$$

que é exatamente q(λ_1) = 1

Logo concluímos que o autovetor de distribuição etária que representa a proporção do número de fêmeas em longo prazo $\boldsymbol{X_1}$ é dado por:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{b_1 x_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2 x_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 x_1}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_{n-1} x_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Concluímos que x_1 = 1 = q(λ_1)

Como λ_1 tem multiplicidade 1, o auto espaço correspondente tem dimensão 1

Teorema 1.1: Autovalor positivo

Uma matriz de Leslie **L** tem um único autovalor positivo $\boldsymbol{\lambda_1}$, este autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor associado $\boldsymbol{X_1}$ cujas as entradas são todas positivas.

Agora podemos mostrar que o comportamento ao longo prazo da distribuição etária da população é dada pelo autovalor positivo $\boldsymbol{\lambda_1}$ e seu autovetor $\boldsymbol{X_1}$.

Teorema 1.2 Autovalor de uma matriz de Leslie

Se λ_1 é um autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e λ_k é qualquer autovalor real ou complexo de L, então $|\lambda_K| \leq \lambda_1$.

Para uma melhor compreensão do teorema 3.2 vamos analisar $|\lambda_k| < \lambda_1$. Neste caso diremos que $\boldsymbol{\lambda_1}$ é um **autovalor dominante** de **L**, nem todas as matrizes de Leslie satisfazem esta condição.

Exemplo 2.1

Uma Matriz de Leslie sem Autovalor dominante

A matriz de Leslie

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Ela tem como polinômio característico

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 1$$

Seus autovalores são:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 =- \frac{1}{2} +\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = - \frac{1}{2} -\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Todos o três autovalores tem valor absoluto 1, de modo que o único autovalor positivo $\lambda_1 = 1$ não é dominante, observe que essa matriz de Leslie tem a propriedade $L^3 = I$ isso significa que para qualquer escolha da distribuição etária inicial $\boldsymbol{X^{(0)}}$ nós temos:

$$x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = ...= x^{(3K)} = ...$$

O que significa que o vetor de distribuição etária fica oscilando com o período de três unidades de tempo.

Teorema 2.1

Se duas entrada sucessivas a_i e a_{i+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie $\boldsymbol{L}$ são não nulas, então o autovalor de $\boldsymbol{L}$ é dominante.

Vamos supor agora que a Matriz de Leslie $\boldsymbol{L}$ tem autovalor dominante $\boldsymbol{\lambda_1}$ que a matriz L possa ser diagonalizável, isto é, existe uma matriz invertível tal que: $\boldsymbol{L = PDP^{-1}}$

$$L = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Daqui segue que

$$L^k = P\begin{bmatrix} \lambda_1^K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^K \end{bmatrix} P^{-1}$$

Para K =1,2,… para qualquer vetor de distribuição etária inicial $\boldsymbol{X^{(0)}}$ temos que:

$$L^k X^{(0)} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^K \end{bmatrix} P^{-1} X^{(0)}$$

Para K = 1,2.... Dividindo ambos os lados desta equação por λ_1^K e lembrando que $X^{(k)} = L^{(k)} X^{(0)}$ temos que:

$$\frac{1}{\lambda_1^K} X^{(K)} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^K \end{bmatrix} P^{-1} X^{(0)}$$

Passando o Limite quando k tende a infinito obtemos:

$$\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1^K} X^{(K)}\right) = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} X^{(0)} \qquad \textbf{(2.9)}$$

O que nos permite a escrever:

$$\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1^K} x^{(K)}\right) = cX_1 \qquad \textbf{(2.9.1)}$$

Onde c é uma constante que depende apenas do vetor de distribuição etária inicial.

Permitindo-nos escrever:

$$X^{(k)} \cong c\lambda_1^K X_1 \qquad \textbf{(2.9.2)}$$

$$X^{(K-1)} \cong c\lambda_1^{K-1} X_1 \qquad \textbf{(2.9.3)}$$

$$\boldsymbol{X^{(k)} \cong \lambda_1 X^{(K-1)}} \qquad \textbf{(2.9.4)}$$

Cada vetor de distribuição etária é um múltiplo escalar do vetor de distribuição etária anterior, este escalar sendo o autovalor próprio positivo dominante da matriz de Leslie. Conseguentemente a proporção de fêmeas em cada faixa etária torna-se constante.

Exemplo 2.2

Vamos usar a mesma Matriz do exemplo **2.1**

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Primeiro vamos encontrar o polinômio característico p(λ) = $|\lambda I - L|$, para isso podemos usar a fórmula:

$$p(\lambda) = |L - \lambda I| = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \dots a_nb_1b_{2\dots}b_{n-1}$$

Ou calcular o determinante de (L- λI):

$$\det(L-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 4 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{4} \end{matrix} = 2\lambda - \lambda^3 + \frac{3}{8} = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}$$

$$\text{Logo } p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}$$

Agora vamos encontrar os autovalores:

Para encontrar os autovalores temos que encontrar as raizes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}$$

Usando Bhaskara encontraremos os autovalores que são:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{3}{4}$$

já que só precisamos do autovalor positivo $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ para encontrar o autovertor x_1, vamos usar a equação **(2.8)** para encontra-lo.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1b_2}{\lambda_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}/\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}.\frac{3}{2}/\left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo: } X^{(K)} \cong \frac{3}{2}x^{(K-1)}$$

Concluimos que a população em cada faixa etária de idade cresce por um fator de 3/2, ou seja, aumenta em 50% a cada período de tempo, que no caso do exemplo 1, é a cada 10 anos. |

Talvez essa coisa de 50% a cada período de tempo em cada faixa etária não tenha ficado clara.

Então suponha que temos 1000 fêmeas incialmente na faixa etárea 1. Vamos observar apenas uma faixa etária para facilitar os cálculos, se $X^{(0)}$= (1000) usando a equação **(2.9.4)** podemos encotrar $x^{(1)}, x^{(2)}$**$x^{(3)}$,.....,$x^{(n)}$**

$$x^{(1)} \cong \frac{3}{2}(1000) = 3000/2 = 1500$$

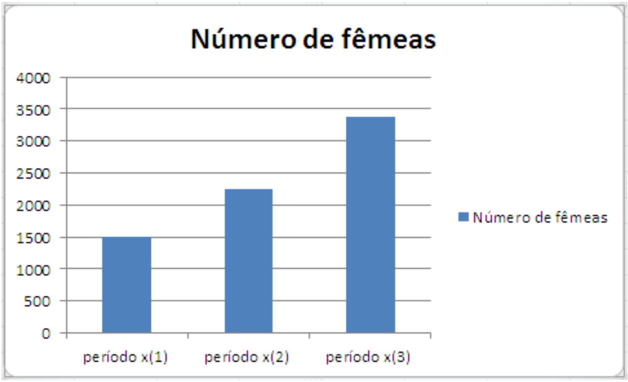
$$x^{(2)} \cong \frac{3}{2}(1500) = 4500/2 = 2250$$

$$x^{(3)} \cong \frac{3}{2}(2250) = 6750/2 = 3375$$

E assim por diante, em qualquer período e em qualquer faixa etária.

Podemos observar que a cada período de tempo o número de fêmeas aumenta em 50%.em relação ao período anterior. Observe a figura **2.4** abaixo para uma melhor compreensão:

Figura 2.4



Fonte: pesquisador

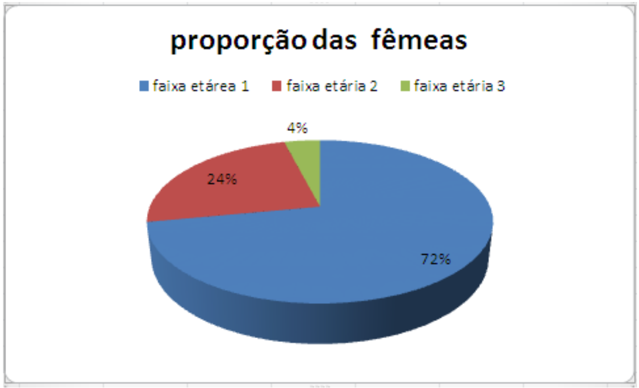
Usando a equação **(2.94)** $X^{(k)} \cong c\lambda_1^K x_1$ temos que:

$$X^{(k)} \cong c\left(\frac{3}{2}\right)^K \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

Como a soma das proporções compreende ao total de fêmeas nas três faxas etária, então $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{25}{18}$, logo $\frac{25}{18} \equiv 100\%$ das fêmeas $1 \equiv \frac{100\%}{\frac{25}{18}}, \equiv \frac{1800\%}{25} \equiv 72\%$, ou seja, 1 é equivalente a 72% das fêmeas , $\frac{1}{3} \equiv \frac{\frac{100}{3}\%}{\frac{25}{18}}, \equiv \frac{1800\%}{75} \equiv 24\%$, ou seja, $\frac{1}{3}$ é equivalente a 24% das fêmeas , e $\frac{1}{18} \equiv \frac{\frac{100}{18}\%}{\frac{25}{18}}, \equiv \frac{1800\%}{450} \equiv 4\%$, $\frac{1}{18}$ é equivalente a 4%, das fêmeas, logo podemos concluir que na primeira faixa etária temos 72% das fêmeas, na segunda faixa etárea 24% das fêmeas e na terceira faixa etárea 4% das fêmeas.

Observe a figura 2.5 para uma melhor compreensão

Figura 2.5



Fonte: pesquisador

2.4 Distribuição etária de fêmeas humanas:

Exemplo 2.2

Um exemplo interessante de aplicação desta teoria está ligado ao estudo da população de mulheres do Canadá. Os parâmetros utilizados de nascimento e morte são do ano de 1965. Foi considerado um vetor distribuição etária inicial consistindo de 10 faixas etárias cada uma com cinco anos. Tal hipótese foi considerada admitindo que mulheres com mais de 50 anos não geram mais filhos. Seguem na tabela abaixo apenas os coeficientes da matriz de Leslie

Tabela 2.2

Intervalo de idade	a_i	b_i
[0,5)	0	0,99651
[5,10)	0,00024	0,9982
[10 , 15)	0,05861	0,99802
[15 , 20)	0,28608	0,99729
[20, 25)	0,44791	0,99694
[25 , 30)	0,36399	0,99621
[30, 35)	0,22259	0,9946
[35 , 40)	0,10457	0,99184
[40 , 45)	0,02826	0,987
[45 , 50)	0,0024	

$$
L = \begin{bmatrix}
0,0000 & 0,00024 & 0,05861 & 0,28608 & 0,44791 & 0,36399 & 0,22259 & 0,10457 & 0,02826 & 0,00240 \\
0,99651 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,99820 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,99802 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,99729 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,99694 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,99621 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,9946 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,99184 & 0,00000 & 0,00000 \\
0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,98700 & 0,00000
\end{bmatrix}
$$

O valor numérico aproximado do autovalor positivo e o autovetor associado são

$$
\lambda_1 = 1{,}07622 \text{ e } X_1 = \begin{bmatrix} 1,00000 \\ 0,92594 \\ 0,85881 \\ 0,79641 \\ 0,73800 \\ 0,68364 \\ 0,63281 \\ 0,58482 \\ 0,53897 \\ 0,49429 \end{bmatrix}
$$

Assim, se as mulheres Canadenses continuarem a se reproduzir e morrer como fizeram em 1965, depois de um período de tempo bem longo seu número tenderá a aumentar a uma taxa de 7,622% a cada cinco anos. Observando o vetor X_1 concluímos que, ao longo do tempo, para cada 10.000 mulheres no intervalo de [0,5) anos haverá 92.594 mulheres, no intervalo de [5,10) anos, haverá 85.881 mulheres, no intervalo de [10,15) anos e assim por diante.

Temos três casos para $\boldsymbol{\lambda_1}$:

(I) Para $\lambda_1 > 1$ a população cresce.

(II) Para $\lambda_1 < 1$ a população diminui.

(III) Para $\lambda_1 = 1$ a população estabiliza.

Definimos a taxa líquida de reprodução pela equação

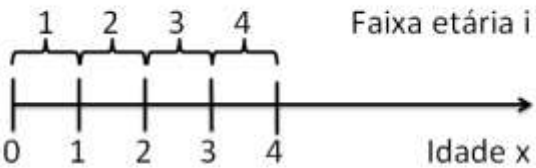
$$R = a_1+a_2b_1+a_3b_1b_2+...a_{n\text{-}}b_1b_{2.} \ldots b_{n-1}$$

3 Aplicações de matriz de Leslie

3.1 Tempos biológico e tempo de projeção.

Suponha que temos uma variável **x** que representa o ciclo de vida de uma população fêmea, e precisa ser dividido em intervalos de tempo ao longo do ciclo de vida, em intervalos de tempo biológico, que se designam faixas etárias biológicas. Intervalos de mesma duração, que devem coincidir com as idades, **x**. As idades iniciam-se em **x** = 0, mas as faixas etárias **i** iniciam-se em **i** = 1. Para uma melhor compreensão observe a seguinte figura.

Figura 3.1:



Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod8/Teoria.pdf

A faixa etária **i** ocupa, portanto o intervalo de idades i-1 ≤ x < i. Esses intervalos, quando projetados para o futuro, são considerados os instantes de tempo, t, t+1, t+2,… denominados intervalos de projeção, nos quais o número de indivíduos presentes na população é contabilizado.

3.2 Parâmetros de projeção: $\boldsymbol{b_i}$ e $\boldsymbol{a_i}$

Para que a população possa ser projetada, é necessário identificar os parâmetros de projeção: $\boldsymbol{b_i}$ e $\boldsymbol{a_i}$.

$\boldsymbol{b_i}$ é a probabilidade de que um indivíduo da faixa etária i, no instante de census t, sobreviva e esteja na faixa etária i+1 no próximo census t+1. Ou simplesmente a taxa de sobrevivência $\boldsymbol{S_x}$.

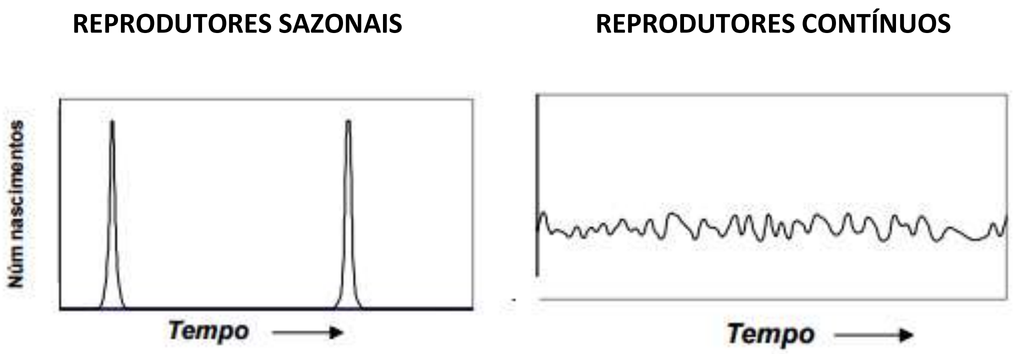
Podemos observar que 0 ≤ $\boldsymbol{b_i}$ ≤ 1, onde $\boldsymbol{b_i}$ = 0 ninguém sobreviveu e $\boldsymbol{b_i}$ = 1 todos sobreviveram.

$\boldsymbol{a_i}$ é o número de descendentes femininas viáveis de uma fêmea na faixa etária i, produzidas durante o intervalo de projeção (t, t+1). "Viáveis" significa que estas descendentes ainda estão vivas no inicio do intervalo de projeção seguinte i, e no instante t+1. Os parâmetros $\boldsymbol{b_i}$ e $\boldsymbol{a_i}$ estão obviamente relacionados com $\boldsymbol{L_x}$ e $\boldsymbol{m_x}$ da LT(Tabela vida), mas, na prática, são em geral estimados diretamente, sem passar pela construção de uma LT(Tabela de vida). Por exemplo, os animais da faixa etária **i** são contabilizados em **t** e a sua sobrevivência, $\boldsymbol{b_i}$, é avaliada após contabilização de quantos sobreviveram em **t+1**. Isto pode ser feito independentemente da localização de **t** e **t+1** relativamente à época de reprodução. O período de tempo a que e $\boldsymbol{b_i}$ se aplicam é definido pelo intervalo de tempo (t, t+1) entre os dois census consecutivos.

3.3 Cálculo da probabilidade de sobrevivência b_i e o parâmetro de projeção

Para calcular a probabilidade de sobrevivência $\boldsymbol{b_i}$ é aconselhável estudar a dinâmica dos reprodutores sazonais e contínuos. A dinâmica dos reprodutores sazonais se assemelha com a reprodução não humana, já a dinâmica dos reprodutores contínuos se assemelha a reprodução humana. Observe a figura abaixo:

Figura 3.2



Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/biopop/Mod2/2%20Cresc%20continuo.pdf

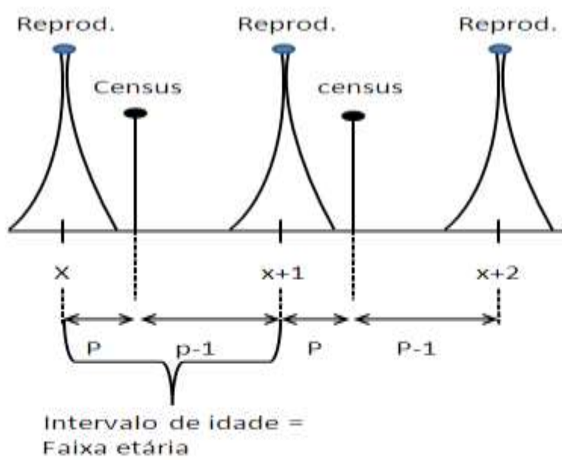
3.3.1 Reprodutores sazonais.

Nos reprodutores sazonais, em que os nascimentos ocorrem por impulsos, à forma mais natural de estudar a dinâmica da população consiste em considerar a variação do número total de indivíduos imediatamente depois, ou imediatamente antes (o que for mais conveniente), da época de reprodução. No momento da reprodução, a população é formada por indivíduos que têm exatamente **x** anos de idade (sendo **x** = 0, 1, 2,...).

O census da população, contudo, em geral não coincide com o pico da reprodução. Designe-se por **p** a fração (0 < p < 1) que representa o tempo decorrido entre a reprodução e o census, relativamente ao intervalo de tempo biológico que estamos a considerar, por exemplo, 1 ano. Assim sendo, na altura em que é estimada a abundância da população, esta é formada por um conjunto de idades que não são 0, 1, 2, 3, ... anos, mas sim p, 1+p, 2+p, 3+p, ... anos. Por exemplo, suponha-se que a reprodução é em Janeiro e a contabilização da população é feita 3 meses depois, em Abril. O intervalo de 3 meses relativamente ao ano, significa que p = 3/12 = 0.25. Quando a população é recenseada em Abril, têm-se $X^{0,25}$ indivíduos com 3 meses, $X^{1,25}$ indivíduos com 1 ano e 3 meses, ..., X^{x+p} indivíduos com x+*p* anos de idade. No caso particular em que os census são feitos imediatamente antes ou depois da reprodução, o valor de **p** tende para 1 e 0, respectivamente. Vejamos agora o cálculo da probabilidade de sobrevivência $\boldsymbol{b_i}$. Em reprodutores sazonais, os indivíduos de cada faixa etária têm todos aproximadamente à mesma idade. Recordando a equivalência entre faixa etária e idades (x = i-1), qualquer indivíduo na faixa etária **i**, tem exatamente x = i-1+p anos. Assim sendo, a relação entre $\boldsymbol{b_i}$ e a função $\boldsymbol{L_x}$ da LT(Tabela de vida) é, $\boldsymbol{b_i}$ = probabilidade de sobreviver desde a idade i-1+p até à idade i+p, isto é, entre dois census.

$$\boldsymbol{b_i} = \frac{\mathbf{L}_{i+p}}{\mathbf{L}_{i-1+p}} \tag{2.1}$$

Figura 3.3



Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod8/Teoria.pdf

A alternância entre os picos de reprodução e o momento do census (recenseamento) numa população de reprodutores sazonais. A fração de tempo **p** é igual ao tempo que decorre entre um pico reprodutor e o census, a dividir pelo tempo total entre dois picos reprodutores.

A equação **(2.2)** é uma mera aplicação da fórmula $S_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}$, mas tem em atenção a deslocação "para a frente" da fração de tempo **p**. No caso particular em que o census é feito imediatamente a seguir à reprodução, p≈0, está-se na situação em que b_i = S_x Já o parâmetro de projeção $\boldsymbol{a_i}$ é dado por:

$$\boldsymbol{a_i} = \mathrm{L}_{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{b_i^{1-p} m_i} \qquad \textbf{(2.2)}$$

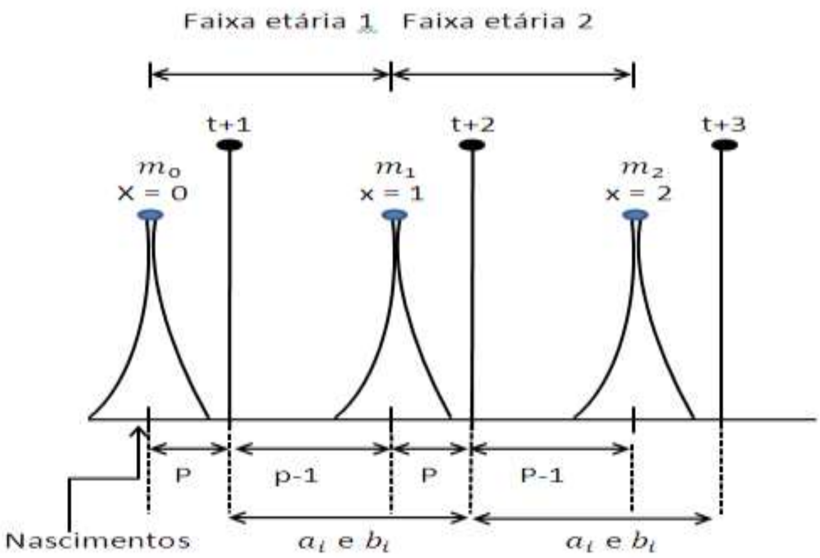
Onde $\boldsymbol{m_i}$ é a produção de um indivíduo na faixa etária **i** na altura do ano em que celebra o seu i-ésimo aniversário. b_i^{1-p} é a probabilidade de que um indivíduo sobreviva durante a fração 1-p, desde o census em t, até a idade de reprodução x = i. Esta probabilidade assume o pressuposto simplificativo de que há uma força de mortalidade constante ao longo do tempo. (Se houver informação detalhada sobre a taxa de sobrevivência sazonal ao longo da fração 1-p do ano, pode evidentemente ser usada em vez de b_i^{1-p}). Logo após o impulso de recém-nascidos, estes ainda vão ter de sobreviver durante a fração p do ano, até poderem ser contados no census seguinte em t+1. Esta probabilidade de sobrevivência é $\boldsymbol{L_p}$ Se $\boldsymbol{L_p}$ não for conhecida a partir da LT, terá de ser estimada aproximativamente por interpolação. No caso particular em que o census é feito imediatamente a seguir à reprodução, p ≈ 0 e L_0 = 1. A equação **(2.2)** simplifica-se:

$$\boldsymbol{a_i = b_i m_i} \qquad \textbf{(2.3)}$$

No caso particular de census imediatamente antes da reprodução, p ≈ 1, obtém-se:

$$\boldsymbol{a_i = L_i m_i} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Figura 3.4

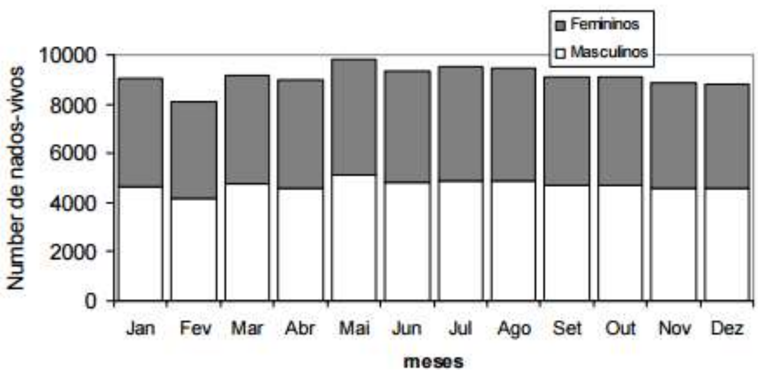


Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod8/Teoria.pdf+

3.3.2 Reprodutores contínuos.

Nas populações de reprodutores contínuos, como é o caso da população humana, não há épocas de reprodução delimitadas: os nascimentos podem ocorrer em qualquer altura do ano (**Fig. 3.5**). Se a população for bastante grande, o mais provável é que ocorram nascimentos e mortes em qualquer instante de tempo, quer dizer, a população está continuamente a variar.

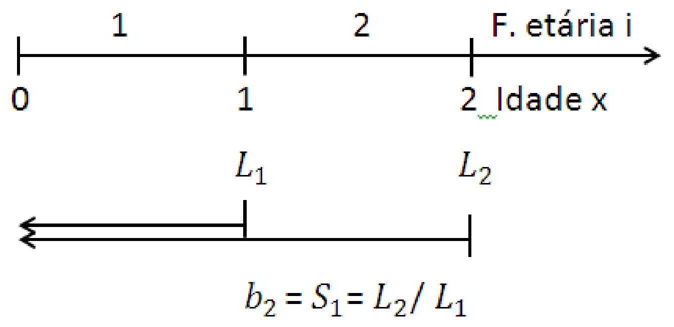
Figura 3.5



Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/biopop/Mod2/2%20Cresc%20continuo.pdf

$\boldsymbol{b_i}$ é a probabilidade de um indivíduo da faixa etária i (idade x = i-1) sobreviver ao longo de todo o intervalo de projeção (t, t+1). Esta probabilidade depende da idade exata do indivíduo dentro da faixa etária i**.** Se o indivíduo tivesse exatamente x = i-1 anos, a probabilidade de sobreviver era. Por exemplo, para a faixa etária i = 2

Figura 3.6



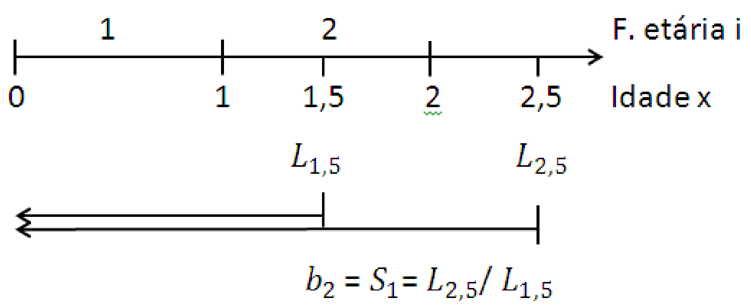
Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod8/Teoria.pdf+

Contudo, em reprodutores contínuos, os indivíduos que dizemos terem **x** anos, na realidade têm qualquer idade compreendida entre x e x+1 anos, isto é entre i-1 e i anos. Para resolver este problema, vamos substituir S_{i-1} pela sobrevivência do ponto médio do intervalo i-1 ≤ x ≤ i. Esse ponto é i-1+0.5 e a sobrevivência deste ponto é,

$$\boldsymbol{b_i = S_{i-1+0,5} = \frac{L_{i+0,5}}{L_{i-1+0,5}}} \quad \textbf{(3.5)}$$

Por exemplo, para a faixa etária i = 2 agora

Figura 3.7



Como a LT em geral não tem valores de L_x para idades fracionárias, vamos aproximar $L_{i+0,5}$ pela média aritmética entre L_i e L_{i+1} e vamos aproximar $L_{i-1+0,5}$ pela média entre L_{i-1} e L_i. Partindo de **(3.5)**, tem-se então,

$$b_i = S_{i-1+0,5} = \frac{L_{i+0,5}}{L_{i-1+0,5}} \approx \frac{L_i + L_{i+1}}{2} \Big/ \frac{L_{i-1} + L_i}{2}$$

Logo

$$b_i \approx \frac{L_i + L_{i+1}}{L_{i-1} + L_i} \tag{3.6}$$

Vejamos agora $\boldsymbol{a_i}$. Recorde-se que $\boldsymbol{m_x}$ se aplica a uma fêmea que acaba de entrar na idade x = i-1, porém, em reprodutores contínuos, há fêmeas com idade x = i-1 que estão quase a sair de x = i-1 e a entrar em x+1= i. Assim sendo, durante o intervalo de projeção (t, t+1), um indivíduo médio da faixa etária i produz um número de descendentes que é a média entre m_{i-1} e m_i. Antes de calcular a média, porém, é preciso ponderar a fertilidade m_i pela probabilidade do indivíduo na idade x = i-1 sobreviver até x+1 = i, isto é, $\boldsymbol{b_i}$. Assim,

$$a_i = \frac{m_{i-1} + b_i m_i}{2}$$

Mas $\boldsymbol{a_i}$ só deve incluir os recém-nascidos que chegam vivos ao fim do intervalo (t, t+1). Em reprodutores contínuos, alguns indivíduos nascem logo a seguir a **t**, outros nascem perto de t+1. Se os nascimentos são uniformes ao longo do ano, um recém-nascido tem, em média, de sobreviver durante meio intervalo de projeção. A probabilidade de isso acontecer é $L_{0,5}$. Assim, tem-se,

$$a_i = L_{0,5} \frac{m_{i-1} + b_i m_i}{2}$$

$L_{0,5}$ é a taxa de sobrevivência até à idade 0.5. Se não estiver explicita na LT, pode ser interpolada a partir de L_0 e L_1 pela média geométrica:

$$L_{0,5} = \sqrt{l_0 l_1} = \sqrt{l_1}$$

Exemplo 3.1

Dados os parâmetros de projeção, utilizando para isso a seguinte LT(Life Tablet= Tabela de Vida)

Tabela 3.1

Idade (x)	L_x	S_x	m_x
0	1,000	0,240	0,000
1	0,240	0,242	20,00
2	0,058	0,000	24,00
3	0,000		

Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod8/Teoria.pdf

Para calcular a probabilidade de sobrevivência P_i temos que

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{L_1}{L_0} = \frac{0,24}{1} = 0,24, \quad \boldsymbol{b_2} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{0,058}{0,24} = 0,242, \quad \boldsymbol{b_3} = \frac{L_3}{L_2} = \frac{0}{0,058} = 0$$

Podemos observar que todos os b_i = S_x, o que já havíamos comentado.

Para calcular o parâmetro de projeção $\boldsymbol{a_i}$ temos que

$\boldsymbol{a_1}$ = L_0 $b_1 m_1$. = 1 x 0,24 x 20 = 4.8 $\boldsymbol{a_2}$= L_0 $b_2 m_2$. = 1 x 0,242 x 24 = 5.808 $\boldsymbol{a_3}$ = L_0 $P_3 m_3$. = 1 x 0 x = 0

Já definidas as probabilidade de sobrevivência $\boldsymbol{b_i}$ e o parâmetro de projeção $\boldsymbol{a_i}$, agora é só construir a Matriz de Leslie, dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 4,8 & 5,8 & 0 \\ 0,242 & 0 & 0 \\ 0 & 0,242 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2

Supondo que se trata de um reprodutor sazonal, considerando os dados do exemplo **2.1**, vamos construir uma matriz 2x2, observe que mesmo a população ter três estágios só é viável construir uma matriz 2x2 porque se construirmos uma matriz 3x3 a terceira faixa etária será nula, ou seja, a terceira faixa etária terá zero indivíduo, o que só dificultaria os cálculos, vamos verificar que realmente isto ocorre.

Dados as matrizes construídas a partir dos dados do

$$A = \begin{bmatrix} 4,8 & 5,8 \\ 0,242 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} 4,8 & 5,8 & 0 \\ 0,242 & 0 & 0 \\ 0 & 0,242 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que no instante $X^{(0)}$ estavam 0 e 240 indivíduos, respectivamente, nas faixas etárias 1 e 2. A projeção da população para o instante $X^{(1)}$ faz-se a matriz de Leslie com o vetor-coluna inicial, matematicamente $X^{(1)}$ = L$X^{(0)}$, podemos usar a equação $X^{(K)}$ = L$X^{(k-1)}$ para encontrar a população posterior.

$$X^{(1)} = AX^{(0)} = A = \begin{bmatrix} 4,8 & 5,8 \\ 0,242 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 240 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1152 \\ 58,08 \end{bmatrix}$$

Usando a matriz L e qualquer número de indivíduo da terceira faixa etária, vamos supor 3 indivíduo, onde o vetor $X^{(0)}$ seria = (240,0,3)

$X^{(1)} = LX^{(0)} = \begin{bmatrix} 4,8 & 5,8 & 0 \\ 0,242 & 0 & 0 \\ 0 & 0,242 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 240 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1152 \\ 58,08 \\ 0 \end{bmatrix}$ o que a terceira faixa seria nula e só dificultaria nos cálculos.

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 5563,24 \\ 278,78 \end{bmatrix},\ X^{(2)} = \begin{bmatrix} 28320,47 \\ 1346,30 \end{bmatrix},\ X^{(3)} \begin{bmatrix} 143746,79 \\ 6853,55 \end{bmatrix},\ X^{(3)} = \begin{bmatrix} 729735,182 \\ 34786,72 \end{bmatrix}$$

Observe que a proporções de indivíduos em cada faixa etária foi estabilizada em $X^{(1)}$.

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0475, \end{bmatrix},\ X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0476 \end{bmatrix},\ X^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,476 \end{bmatrix},\ X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,0476 \end{bmatrix}$$

Esse vetor que indica a proporção em cada faixa etária pode ser calculado encontrando o autovetor da matriz A.

O quociente entre o número sucessivo de indivíduos da faixa etária 1, tende a estabilizar num valor constante, a medida que as projeções avançam. Observe

1152/240 = 4.8, 5864.14/1152 = 5.090,..., 28320,47/5563,24 = 5.090,

729735,182/143746,79 = 5.076

Esse valor é dado por λ_1 = 5,076, que é exatamente o autovalor da matriz.

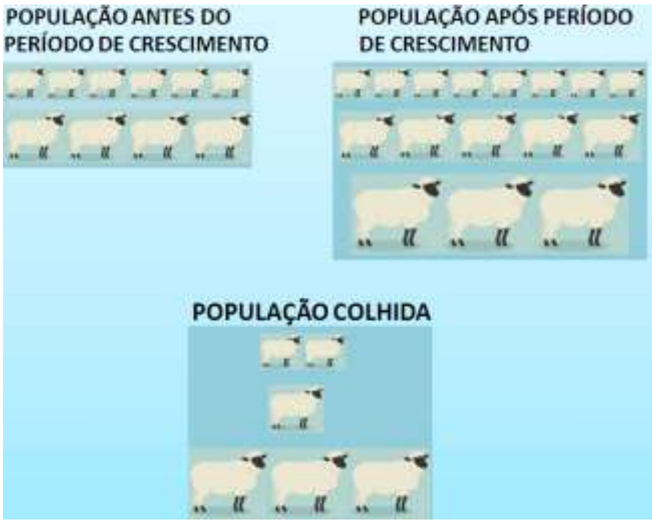
4. Colheita de populações animais

Teorema 4:

Uma política de colheita, pela qual uma população animal é periodicamente colhida, é dita **sustentável** se o rendimento de cada colheita é o mesmo e a distribuição etária da população remanescente é a mesma.

A figura **4.1** abaixo mostra a ideia do modelo de colheita sustentável.

Figura 4.1



Fonte: http://www.sbmac.org.br/cnmacs/2003/cd_cnmac/files_pdf/1482a.pdf

Esta população está por um período de crescimento descrito por uma matriz de Leslie. Ao final do período de crescimento, certa fração da população de cada faixa etária é colhida de tal modo que a população não colhida tenha a mesma distribuição etária que a população original. Este ciclo repete depois de cada colheita, de modo que o rendimento seja sustentável. Supomos que a duração da colheita é curta em comparação com o período de crescimento, de modo que qualquer crescimento ou mudança na população durante o período de colheita pode ser ignorado.

Vamos descrever esse modelo matematicamente.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O vetor de distribuição etária da população antes de começar o período de crescimento. Assim x_i é o número das fêmeas da i-ésima faixa etária que foram colhidas. Se L é uma matriz de Leslie que descreve o crescimento da população, então o vetor Lx é o vetor de distribuição etária da população ao final do período de crescimento, imediatamente antes da colheita periódica. Seja $h_{i,}$ para i = 1,2,3...n, a fração das fêmeas da i-ésima faixa que é colhida. Estes números formam uma matriz diagonal n x n.

$$\text{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_n \end{bmatrix}$$

Que chamamos a **matriz de colheita**. O que por definição

$0 \leq h_i \leq 1$ (i = 1,2,3...n), ou seja podemos colher nada (h = 0), toda (h = 1),ou alguma fração (0 < h < 1), de cada uma das n faixas etária. Como o número de fêmeas na i-ésima faixa etária imediatamente antes de cada colheita é a i-ésima entrada (Lx) do vetor Lx pode ser visto a i-ésima entrada do vetor-coluna.

$$\mathbf{HL_x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h_1(Lx)_1} \\ \boldsymbol{h_2(Lx)_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{h_n(Lx)_n} \end{bmatrix}$$

Que é o número de fêmeas da i-ésima faixa.

Pela definição de política de colheita sustentável, nós temos:

$$\begin{bmatrix} \textit{distribuição} \\ \textit{etária no} \\ \textit{final do período} \end{bmatrix} - [\textit{colheita}] = \begin{bmatrix} \textit{distribuição etária} \\ \textit{no início do} \\ \textit{períoddo de crescimento} \end{bmatrix}$$

Matematicamente:

$$\text{Lx} - \text{HL}_x = \text{x} \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$\text{x} = \text{Lx(I-H)} \qquad \textbf{(4.2)}$$

x deve ser um autovetor da matriz (I – H)L associado ao vetor 1.

Suponha que a matriz de Leslie da população é

$$\text{L} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Então a matriz (I – H) é dada por

$$(I - H)L =$$

$$\begin{bmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_1)b_1 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_1)b_2 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & (1-h_1)b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que matriz (I – H)L tem o mesmo formato de uma matriz de Leslie.

Calculando a taxa líquida da reprodução de (I – H)L e igualando-a a 1. Observe.

$(1-h_1)[a_1+a_2b_2(1-h_2)+a_3b_1b_2(1-h_2)(1-h_3)...b_{n-1}b_1b_{2.}\ ...\ b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)...(1-h_n)] = 1$ **(4.4)**

Apenas os valores $h_{1,}$ h_2, $h_{3,}$...,h_n que satisfazem a equação **(4.4)** e que pertence ao intervalo [0,1] podem produzir um rendimento sustentável.

Se $h_{1,}$ h_2, $h_{3,}$...,h_n satisfazem a equação 17, então a matriz (I – H)L tem o auto vetor desejado $\lambda_1 = 1$ e, este autovalor tem multiplicidade 1, pois um autovalor de uma matriz de Leslie sempre tem multiplicidade 1.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1(1-h_2) \\ b_1b_2(1-h_2) \\ b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_4) \\ \vdots \\ b_1b_2 \ldots b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\ldots(1-h_n) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.5)}$$

4.1 Colheita Uniforme

. Se os animais são colhidos aleatoriamente, podemos supor que a fração de cada faixa etária é a mesma. Por isso colocamos.

h = $h_1 = h_2 = ... = h_n$

Portanto a equação **(4.5)** reduz a

$$\text{Lx} = \left(\frac{1}{1-h}\right)x$$

Então 1/(1- h) deve ser o único auto valor positivo λ_1 da matriz de Leslie de crescimento L. ou seja

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h}$$

logo a fração de colheita h é

$$h = 1-(1/\lambda_1) \qquad \textbf{(4.6)}$$

Então o vetor X_1 é um autovetor de L associado ao autovalor λ_1 . Este vetor é

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ b_1 b_2 \ldots \frac{b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Quanto maior for λ_1 , maior será a fração de animais que podemos colher sem dizimar a população.

Exemplo 4.1

Para certa espécie de ovelha na nova Zelândia, com um período de crescimento de um ano, foi obtida a seguinte matriz de Leslie.

$$\begin{bmatrix}
0,000 & 0,045 & 0,391 & 0,472 & 0,484 & 0,546 & 0,543 & 0,502 & 0,468 & 0,459 & 0,433 & 0,421 \\
0,845 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,975 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,965 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,950 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,926 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,895 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,850 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,786 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,691 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,561 & 0,000 & 0,000 \\
0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,370 & 0,000
\end{bmatrix}$$

Fonte: ANTON. RORRES, 8ª edição, Porto Alegre 2001 editora BOOKMAN(Página 488)

As ovelhas tem uma expectativa de vida de 12 anos, por isso são divididas em 12 faixas etárias a cada ano.

O autovalor λ_1 é de aproximadamente λ_1 = 1,176

A fração da colheita uniforme h é

h = 1-(1/λ_1) = 1-(1/1,176) = 0,14965... arredondando h = 0,15

Assim a colheita uniforme neste caso significa colher 15% das ovelhas de cada uma das 12 faixas etária a cada ano.

O vetor de ditribuição etária após cada colheta é proporcional a

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ b_1 b_2 \dots \frac{b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{0{,}845}{1{,}176} \\ \frac{(0{,}845)(0{,}975)}{(1{,}176)^2} \\ \frac{(0{,}845)(0{,}975)(0{,}965)}{(1{,}176)^3} \\ \vdots \\ \frac{(0{,}845)(0{,}975)(0{,}965)\dots(0{,}370)}{(1{,}176)^{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}719 \\ 0{,}596 \\ 0{,}489 \\ 0{,}395 \\ 0{,}311 \\ 0{,}237 \\ 0{,}171 \\ 0{,}114 \\ 0{,}067 \\ 0{,}032 \\ 0{,}010 \end{bmatrix}$$

Seguindo a proporção do vetor x_1 podemos concluir que, para cada 1.000 ovelhas que não são colhidas no intervalo [0,1) ano, temos 719 ovelhas, no intervalo de [1,2) anos, temos 596 ovelhas, e assim por diante.

4.2 Colhendo somente da faixa etária mais jovem

Em algumas populações somente as fêmeas mais jovens tem algum valor econômico, de modo que o colhedor procura colher somente as fêmes das faixas etárias mais jovens. Por isso colocamos

$$h_1 = h$$

$$h_1 = h_2 = h_n = 0$$

Logo reduz a equação

$$\text{Em } (1-h_1)\,(a_1+a_2b_2+a_3b_1b_2+\dots a_{n-}b_1b_{2.}\dots b_{n-1}) = 1$$

$$(1-h)R = 1$$

Onde R é a taxa líquida de reprodução da população. Resolvendo para h obtemos

$$h = 1-(1/R)$$

Esta equação afirma que uma política de colheita sustentável só é possível se R > 1. Isto é razoável, pois a população só aumenta se R > 1. O vetor de distribuição etária é proporcional a

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ b_1 b_2 b_3 \\ \vdots \\ b_1 b_2 \dots b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.8)}$$

Exemplo 4.2

4.3 Política de colheita sustentável.

Continuamos com os dados da matriz de Leslie exemplo 5. Para a taxa líquida de reprodução da população nós encontramos

$$R = a_1+a_2b_1+a_3b_1b_2+\dots+\dots a_{n\text{-}}b_1b_{2.} \dots b_{n\text{-}1}$$

Ou seja, R = (0,000)+(0,045)(0,845)+(0,391))(0,845)(0,975)+...+ (0,421)(0,845)(0,975) ... (0,370) = 2,514

Usando a equação h = 1-(1/R) temos

h = 1 - (1/R) = 1- (1/2, 514) = 0,6022...

A distribuição etária depois da colheita é proporcional a

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}845 \\ (0{,}845)(0{,}975) \\ (0{,}845)(0{,}975)(0{,}965) \\ \\ \vdots \\ \\ (0{,}845)(0{,}975)\dots(0{,}3700) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}845 \\ 0{,}824 \\ 0{,}795 \\ 0{,}755 \\ 0{,}699 \\ 0{,}626 \\ 0{,}532 \\ 0{,}418 \\ 0{,}289 \\ 0{,}162 \\ 0{,}060 \end{bmatrix}$$

4.4 Rendimento sustentável ótimo

Uma política de rendimento sustentável ótimo é aquela que produz o maior rendimento possível. Para determinar o rendimento sustentável ótimo é necessária a teoria de Programação linear, que não será discutido neste trabalho.

Teorema 5:

Uma política de colheita sustentável ótima é uma na qual são colhidas uma ou duas faixa etária. Se duas faixas etárias são colhidas, a faixa mais velha é totalmente colhida. O certo rendimento sustentável ótimo de cada população de ovelha é alcançado quando:

$$h_1 = 0{,}522$$

$$h_9 = 1{,}00$$

Logo 52,2% das ovelhas no intervalo de [0,1) ano de idade e 100% das ovelhas no intervalo [8,9) anos são colhidas. O rendimento sustentável ótimo é de 19,92% .

Exemplos:

1) **Uma população animal dividida em duas faixas etária é dada pela matriz de Leslie.**

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

a) **Calcule o autovalor positivo λ_1 e o autovetor correspondente de L.**

Primeiro vamos usar a equação

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots a_nb_1b_{2\ldots}b_{n-1} = 0$$

Para encontrar o polinômio característico $p(\lambda) = |\lambda I - L|$,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (1.\lambda) - (\tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}) = 0 \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - \tfrac{1}{3} = 0$$

Agora vamos encontrar as raízes do polinômio usando bhaskara ou qualquer outro método encontraremos $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$ já que precisamos apenas do autovalor positivo λ_1 e o autovetor correspondente vamos pegar $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{2}$ que é aproximadamente

λ_1 = 1,264

Agora vamos encontrar o autovetor correspondente que é

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\frac{1}{2}}{1{,}264} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}396 \end{bmatrix}$$

b) Suponha que o autovetor de distribuição etária inicial seja

$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$ Calcule $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ e $x^{(5)}$

$$x^{(1)} = Lx^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 0 \\ 50 \ + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Lx^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 33{,}34 \\ 50 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133{,}34 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Lx^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 133{,}34 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133{,}34 + 33{,}34 \\ 66{,}67 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 166{,}68 \\ 66{,}67 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = Lx^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 166{,}68 \\ 66{,}67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 166{,}68 + 44{,}45 \\ 83{,}34 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 211{,}13 \\ 83{,}34 \end{bmatrix}$$

$$x^{(5)} = Lx^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 211{,}13 \\ 83{,}34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 211{,}13 + 55{,}56 \\ 105{,}57 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 266{,}67 \\ 105{,}57 \end{bmatrix}$$

c) Calcule $x^{(6)}$ usando a fórmula exata $x^{(6)} = Lx^{(5)}$ e a fórmula aproximada

$$\mathbf{x^{(K)} \cong \lambda_1 x^{(K-1)}}$$

$$x^{(6)} = Lx^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 266{,}67 \\ 105{,}57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 266{,}67 + 70{,}38 \\ 133{,}34 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 337{,}05 \\ 133{,}34 \end{bmatrix}$$

$$x^{(6)} \cong \lambda_1 x^{(5)} \rightarrow x^{(6)} \cong 1{,}264. \begin{bmatrix} 266{,}67 \\ 105{,}57 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 337.07 \\ 133{,}44 \end{bmatrix}$$

2) Calcule a taxa liquida de reprodução da população animal cuja matriz de Leslie é dada por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots a_{n-} b_1 b_{2.} \ldots b_{n-1}$$

$$R = 0 + (4.\tfrac{1}{2}) + (3.(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4}) = 2,\ 375$$

3) Uma população animal dividida em três faixas etária de um ano de duração é dada pela matriz de Leslie.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

a) Determine o rendimento e o vetor de distribuição etária de cada colheita se anualmente é colhida a mesma fração de cada faixa etária.

Vimos anteriomente que o polinômio característico da matriz é dado por $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}$ e o seu autovetor positivo é $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, logo rendimento e o vetor de distribuição etária de cada colheita se anualmente é colhia a mesma fração de cada faixa etária são.

$h = 1 - (1/\lambda_1\ ) = 1 - (1/\frac{3}{2}) = 0{,}333\ldots$ arredondando h = 0,33 e

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} / \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} / \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

b) **Determine o rendimento e vetor de distribuição etária depois de cada colheita se cada ano é colhido apenas faixa etária mais jovem e obtenha a fração da faixa etária mais jovem que é colhida.**

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots a_{n} \cdot b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

$$R = 0 + (4.\tfrac{1}{2}) + (3.(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{4}) = 2,375$$

R é a taxa líquida de reprodução.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{2})(\frac{1}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,125 \end{bmatrix}$$

x_1 é o vetor de distribuição etária antes da colheita

$$\mathrm{L}X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 2 + 0,375 \\ 0,5 + 0 + 0 \\ 0 + 0,125 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,375 \\ 0,5 \\ 0,125 \end{bmatrix}$$

Lx_1 é o vetor de distribuição etária depois da colheita

h = 1 - (1/R) = 1- (1/2,375) = 0,5789... arredondando h = 0,579

Onde h é o percentual de jovens a ser colhidas, se temos um total de entrada de 3 e 2,375 representam as jovens na primeira entrada , então 79,17% representa as jovens do vetor Lx_1 , já que queremos encontrar a fração da faixa etária mais jovem que é colhida, basta multiplicar 79,17 por 0,579 = 45,84%

Considerações finais

Procuramos ao longo de todo o nosso trabalho definir a dinâmica de um crescimento populacional por faixa etária da parte fêmea animal ou humana, onde usamos o conhecimento de Álgebra linear para transformar em modelagem matemática as propriedades e definição de um modelo de crescimento populacional de Leslie, o que ao longo de nosso trabalho foi possível calcular periodicamente o número de fêmeas a um determinado tempo.

Com o estudo dos autovalores conseguimos Investigar o comportamento proporcional em cada faixa etária em longo prazo.

Conseguimos também realizar um sistema de colheita dessas fêmeas, onde é colhido periodicamente certo percentual de fêmeas e o seu rendimento seja sustentável.

Ao longo de nossa pesquisa podemos observar que existem outros tipos de crescimento populacionais, deixando em aberto a uma pesquisa populacional mais ampla, podendo melhorar, ou melhor, podendo aprimorar a pesquisa com outros crescimentos populacionais, por exemplo, a dinâmica de um crescimento populacional masculino.

Referências:

Anton. Rorres, Álgebra com Aplicação 2001 Porto Alegre, 8ª edição, Porto alegre: Editora BOOKMAN.

Ebert, T.A. 1999. Plant and Animal Populations. Methods in Demography. Academic Press, San Diego, Calif.

Frederico de Oliveira Matias. Licenciatura em Matemática a Distância. V.2. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2008.

Lefkovitch, LP. 1965. The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrics* **21**:1-18.

Leslie, PH. 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**:183-212.

Links da internet:

http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/Mod8/Teoria.pdf

http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/biopop/Mod2/2%20Cresc%20continuo.pdf

http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/485/1/CM_ESPMAT_II_2012_05.pdf

http://www.sbmac.org.br/cnmacs/2003/cd_cnmac/files_pdf/1482a.pdf