

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Potências fracionárias do operador de ondas

Bosoerg Pereira da Silva

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Potências fracionárias do operador de ondas

por

Bosoerg Pereira da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S586p Silva, Bosoerg Pereira da.
Potências fracionárias do operador de ondas / Bosoerg
Pereira da Silva – João Pessoa, 2018.
110f.: il.-

Orientador: Flank David Morais Bezerra
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. semigrupos de operadores lineares e
limitados. 3. Operadores setoriais. 4. potência
fracionária de operadores lineares. 5. Operador de
ondas. I. Bezerra, Flank David Morais. II. Título

UFPB/BC

Potências fracionárias do operador de ondas

por

Bosoerg Pereira da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 23 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Orientador)

Gleiciane da Silva Aragão

Prof. Dra. Gleiciane da Silva Aragão – UNIFESP
(Examinador Externo)

Fágner Dias Araruna

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante o curso de mestrado acadêmico em Matemática da UFPB.

*Aos meus pais, minha
esposa e meu filho...*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada. Aos meus pais Lucia e Genézio, a minha esposa Aparecida, ao meu filho Davi Luis, ao meu sogro Geraldo e sogra Iracema que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À esta universidade, seu corpo docente em especial ao Prof. Dr. Flank Bezerra, pela excelente orientação, paciência e incentivo durante este período de minha vida, a Profa. Dra Miriam, a Profa. Dra Evelina, ao Prof. Dr. Adriano e ao Prof. Dr. Ricardo. A direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

À Profa. Dra. Gleiciane Aragão e ao Prof. Dr. Fágner Araruna por terem aceito o convite para participar desta banca. Bem como as sugestões que enriqueceram ainda mais este trabalho.

Aos meus colegas de curso em especial aos amigos: Adelson, Douglas, Fagner, Rafael e Sergio pelo incentivo e pelo apoio constante. Enfim agradeço a todos que, de forma direta ou indiretamente, fizeram parte desta conquista.

Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados, a teoria de operadores setoriais no sentido do Daniel Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1981, a teoria de potência fracionária de operadores lineares, fechados e densamente definidos, e por fim, calculamos o domínio das potências fracionárias do operador de ondas.

Palavras-chave: semigrupos de operadores lineares e limitados, operadores setoriais, potência fracionária de operadores lineares, operador de ondas.

Abstract

In this work we study the theory of semigroups of bounded linear operators, the theory of sectorial operators in the sense of Daniel Henry *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1981, the theory fractional power of linear, closed, densely-defined operators, and finally, we calculate the domain of the fractional powers of the wave operator.

Keywords: semigroups of bounded linear operators, sectorial operators, fractional power of linear, wave operator.

Sumário

Introdução	2
1 Resultados Preliminares	5
1.1 Operadores resolventes	7
1.2 Integral de Riemann-Stieltjes	22
2 Semigrupo de operadores lineares e limitado	33
3 Operadores setoriais e analíticos	53
4 Potências fracionárias	77
4.1 Operadores de tipo positivo	84
4.2 Potência fracionária do operador de ondas	92
Referências Bibliográficas	99

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- Seja X um espaço de Banach, denotaremos por X^* seu dual topológico;
- Denotaremos por I_X a aplicação identidade definida em X .
- Dados X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, cujo domínio $D(A)$ é um subespaço vetorial de X , denotamos:
 - * O gráfico do operador A por $G(A)$;
 - * A imagem do operador A por $R(A)$;
 - * O núcleo do operador A por $\ker(A)$;
 - * O conjunto resolvente de A por $\rho(A)$;
 - * O espectro do operador de A por $\sigma(A)$.
- Sejam X e Y espaços de Banach, denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares e limitados de X em Y , munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Em particular, quando $Y = X$ utilizaremos $\mathcal{L}(X)$ ao invés de $\mathcal{L}(X, X)$;

- Para $\lambda \in \rho(A)$ denotamos por $(\lambda - A)^{-1}$ o operador

$$(\lambda I_X - A)^{-1} : R(\lambda I_X - A) \subset X \longrightarrow X.$$

Lista de Figuras

1.1	Integral de linha de f sobre a curva γ .	29
2.1	Inclusão entre os conjuntos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.	34
2.2	Fronteira da região $\mathfrak{R}$	45
3.1	Setor complexo $\Sigma_{\varphi,a}$.	53
3.2	Resolvente do operador A em que $-A$ setorial.	54
3.3	Curva Γ_a .	58
3.4	Curva Γ_0 .	59
3.5	Análise da parte real dos pontos na curva Γ_0 .	59
3.6	Região $\mathfrak{R}$ delimitada pelas curvas Γ_0 , Γ'_0 , η_k e η'_k .	64
3.7	Curvas $\Upsilon = \Lambda_{\hat{r}} \cup \Gamma_0$.	66
3.8	Curva Γ_a .	68
3.9	Mudança de variável $\mu = \lambda - a$	68
3.10	Curvas Γ_1 , Γ_2 e Γ_3	70
4.1	Setor complexo Σ_ϕ .	82
4.2	Setor complexo $\Sigma_{R,\phi}$.	82
4.3	Setor complexo Σ_M .	86

Introdução

O objetivo deste trabalho é exibir as potências fracionárias do operador de ondas, bem como estudar a teoria de potências fracionarias de operadores lineares fechados e densamente definidos em espaço de Banach, e a teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados em espaços de Banach, tendo como base o artigo de Bezerra et al. [2].

Considere o problema de valor inicial e de fronteira associado a equação de ondas com amortecimento

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo, limitado com fronteira suficientemente suave com $n \geq 1$. Notemos que o problema (1) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Aw, & t > 0, \\ w(0) = w_0, \end{cases} \quad (2)$$

onde $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear definido da seguinte forma: Considerando a aplicação desconhecida w dada por

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

com $v = \partial_t u$, definimos

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_X \\ \Delta & -I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v \\ \Delta u - v \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathbf{A}),$$

onde $\Delta = -(-\Delta)$, $-\Delta : D(-\Delta) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ denota o operador negativo Laplaciano com condição homogênea na fronteira de Ω ; a saber

$$D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

e

$$-\Delta u = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad \forall u \in D(-\Delta)$$

Portanto, o domínio do operado $\mathbf{A}$ é dado por

$$D(\mathbf{A}) := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Motivado por (2) consideramos o problema abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear (não necessariamente limitado), fechado, densamente definido e seu domínio é um subespaço vetorial de um espaço de Banach X sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ sendo um corpo igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $u_0 \in Y$ com Y sendo um subespaço denso de X .

Na busca de uma função vetorial de uma variável real u que seja solução, em algum sentido, de (3) estudamos a teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados em espaços de Banach. Verificamos que se o operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, então o problema (3) tem única solução para qualquer $u_0 \in X$ e quando A for o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo devemos exigir que $u_0 \in D(A)$ para o (3) ter, única, solução.

Em particular, as observações sobre o operador A , feitas anteriormente, nem sempre se verificam, sendo assim necessitamos estudar aproximações para o problema (3), isto é, consideramos o problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A^\alpha u, & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e procuramos solução, em algum sentido, deste novo problema, para isto necessitamos inicialmente estudar a teoria de potência fracionária de operadores fechados e densamente definidos.

Em geral, quando calculamos as potências fracionária do operador A verificamos que A^α é um operador setorial e consequentemente é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, ou seja, o problema (4) tem única solução para qualquer $u_0 \in X$.

A estrutura física deste trabalho é a seguinte:

No *Capítulo 1*, afim de tornarmos a leitura auto suficiente, estudamos resultados

preliminares necessários para a introdução da teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados em espaços de Banach, mais precisamente, apresentaremos resultados relacionados a teoria de operadores resolventes em espaços de Banach X sobre o corpo $\mathbb{C}$ e a integral de Riemann-Stieltjes em espaços de Banach X sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);

No *Capítulo 2* apresentamos resultados relacionados a teoria de semigrupo de operadores lineares e limitado em espaços de Banach X sobre o corpo $\mathbb{C}$ que nos dará estrutura para analisarmos o problema (3), bem como exibimos uma função vetorial de uma variável real que é candidata a solução forte do problema (3), caso A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares e limitados em espaços de Banach e $u_0 \in D(A)$, e uma versão da transformada de Laplace para semigrupo de operadores lineares e limitados em X .

No *Capítulo 3*, a fim de melhorarmos a versão da transformada de Laplace (Teorema 2.7) estudamos a teoria de operadores setoriais em espaços de Banach X , em seguida definimos os semigrupos analíticos e uma análise sobre o problema (3).

No *Capítulo 4* apresentamos resultados relacionados a teoria de potências fracionárias de operadores lineares fechados e densamente definidos em espaços de Banach X sobre o corpo $\mathbb{C}$ e finalmente, exibimos o domínio das potências fracionárias do operador de ondas $A_{(0)} : D(A_{(0)}) \subset Y^0 \longrightarrow Y^0$ definido por

$$A_{(0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -v \\ Au \end{bmatrix},$$

onde $Y^0 = H^{\frac{1}{2}} \times H$, $H = L^2(\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$, e

$$D(A_{(0)}) := H^1 \times H^{\frac{1}{2}},$$

onde $H^1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e A denota o operador negativo Laplaciano com condição homogênea de Dirichlet em H .

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo iremos abordar os resultados preliminares que serão de grande utilidade no desenvolver da teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados em espaços de Banach, antes daremos uma motivação para o estudo de tal teoria. Alguns problemas de valor inicial e de fronteira, associados à equações diferenciais parciais autônomas de evolução lineares, podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear (não necessariamente limitado) fechado, densamente definido e seu domínio é um subespaço vetorial de um espaço de Banach X sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ sendo um corpo igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $u_0 \in Y$ com Y sendo um subespaço denso de X .

Por exemplo, dado o problema de valor inicial e de fronteira associado a equação de ondas amortecidas linear abaixo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = 0, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo com fronteira suficientemente suave e $n \geq 1$. A versão abstrata (1.1) do problema (1.2) é dada por

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = Aw, & t > 0 \\ w(0) = w_0, \end{cases}$$

onde $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a aplicação desconhecida w é dada por

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

com $v = \partial_t u$ e o operador linear e ilimitado $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset X \longrightarrow X$ é dado por

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_X \\ \Delta & -I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v \\ \Delta u - v \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathbf{A}),$$

onde $\Delta = -(-\Delta)$, $-\Delta : D(-\Delta) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ denota o operador Laplaciano com condição homogênea na fronteira de Ω ; a saber

$$D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

e

$$-\Delta u = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad \forall u \in D(-\Delta)$$

Portanto, o domínio do operador $\mathbf{A}$ é dado por

$$D(\mathbf{A}) := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Para resolver em algum sentido o problema (1.1), iremos tratá-lo como uma generalização dos problemas de valores iniciais associados à equações diferenciais ordinárias (EDO's) de primeira ordem e lineares em $\mathbb{K}$, deste modo, baseando-se no método do fator integrante, iremos caracterizar o objeto e^{-At} , de tal forma que, este seja o fator integrante do problema (1.1).

Esperamos que para cada $t \geq 0$ o objeto $e^{-At} : D(e^{-At}) \subset X \longrightarrow X$ seja um operador linear que satisfaça as seguintes propriedades:

- Para todo $t \geq 0$, existe um único operador linear em X , denotado por e^{At} , tal que

$$e^{-At}e^{At} = e^{At}e^{-At} = I_X;$$

- Para $t = 0$, temos $e^{-A0} = I_X$;
- Dados $t, s > 0$, vale $e^{-At}e^{As} = e^{-A(t-s)}$;
- Qualquer que seja $t > 0$ e $x \in D(A)$, vale $e^{-At}x \in D(A)$ e $Ae^{-At}x = e^{-At}Ax$;

- Para cada $x \in X$, a função vetorial de uma variável real

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \mathcal{F}(t) := e^{-At}x\end{aligned}$$

é contínua. Em particular, quando $x \in D(A)$ $\mathcal{F}$ é derivável à direita em $t = 0$ com

$$\left. \frac{d\mathcal{F}}{dt} \right|_{t=0^+}(t) = -Ax$$

e derivável para todo $t > 0$, com

$$\mathcal{F}'(t) = -Ae^{-At}x = -e^{-At}Ax.$$

Neste contexto, uma candidata à solução do problema (1.1) será a função vetorial de uma variável real

$$\begin{aligned}u : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto u(t) := e^{-At}u_0\end{aligned}$$

com a seguinte regularidade $u \in \mathcal{C}([0, +\infty); D(A)) \cap \mathcal{C}^1((0, +\infty); X)$.

Nas seções seguintes daremos um tratamento rigoroso à teoria de operadores do tipo e^{-At} sobre espaços de Banach; a saber, estudaremos a teoria dos semigrupos de operadores lineares e limitados. Para isto, estudaremos a teoria espectral de operadores lineares e fechados e a teoria de integrais de Riemann-Stieltjes.

1.1 Operadores resolventes

Nesta seção estudaremos a teoria espectral de operadores lineares e fechados em espaços de Banach X sobre $\mathbb{C}$. As nossas referências bibliográficas para esta seção são o livro de Haïm Brézis [3] e as notas de aula de Alexandre Carvalho [4].

Definição 1.1. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear em X . Diremos que:*

- (i) *O operador A é fechado quando $G(A)$ é fechado em $X \times X$;*
- (ii) *O operador A é fechável caso $\overline{G(A)}$ seja o gráfico de um operador linear.*

Em particular, quando $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador fechável, notamos que o operador $\bar{A}$ definido por $\overline{G(A)}$ é a extensão fechada de A . De fato, considere

$$D(\bar{A}) = \{x \in X; \text{ existe } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \text{ com } x_n \longrightarrow x \text{ e } (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é convergente}\}$$

e definamos o operador linear

$$\begin{aligned}\bar{A} : \overline{D(A)} \subset X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \bar{A}(x) := y,\end{aligned}$$

onde $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n$. O operador linear $\bar{A}$ é chamado fecho de A .

Percebemos que $D(\bar{A}) \neq \emptyset$, pois $D(A) \subset D(\bar{A})$ e mais o operador linear $\bar{A}$ está bem definido, porque dadas as sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ com as propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \\ Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \\ Ax'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_2 \end{array} \right. ,$$

obtemos $(x_n - x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, $x_n - x'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e

$$A(x_n - x'_n) = Ax_n - Ax'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_1 - y_2.$$

Como A é um operador fechável, segue que $y_1 - y_2 = 0$. Assim

$$\bar{A}x_1 = y_1 = y_2 = \bar{A}x_2.$$

Fica claro da definição do operador $\bar{A}$ que $\bar{A}x = Ax$ para cada $x \in D(A)$. Portanto $\bar{A}$ é uma extensão fechada de A .

Lema 1.1. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é fechável (respectivamente fechado) se, e somente se, toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (respectivamente $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$) e $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$, obtemos $y = 0$ (respectivamente $x \in D(A)$ e $Ax = y$).*

Demonstração. Sejam $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechável e $\bar{A} : D(\bar{A}) \subset X \longrightarrow X$ seu fecho. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Queremos mostrar que $y = 0$. Como $Ax_n = \bar{A}x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\bar{A}$ é um operador fechado, então $y = \bar{A}0 = 0$.

Reciprocamente, queremos mostrar que $\overline{D(A)}$ define um operador linear, para isto considere

$$D(\bar{A}) = \{x \in X; \text{ existe } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \text{ com } x_n \longrightarrow x \text{ e } (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é convergente}\}.$$

Percebemos que $D(\bar{A}) \neq \emptyset$, pois a sequência constante de vetores nulos em X está

contida em $D(\bar{A})$, sendo assim definamos o operador linear

$$\begin{aligned}\bar{A} : D(\bar{A}) \subset X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \bar{A}x = y,\end{aligned}$$

onde $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n$.

Em particular, o operador $\bar{A}$ está bem definido. De fato, sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências em $D(A)$ tais que

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \\ Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \\ Ax'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_2 \end{cases}.$$

Como $(x_n - x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, $x_n - x'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e

$$A(x_n - x'_n) = Ax_n - Ax'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_1 - y_2$$

segue que $y_1 - y_2 = 0$, isto é, $y_1 = y_2$. Daí

$$\bar{A}x_1 = y_1 = y_2 = \bar{A}x_2.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(x, y) \in G(\bar{A}) &\iff \text{Existe } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \text{ tal que } x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \text{ e } Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y = \bar{A}x \\ &\iff \text{Existe } ((x_n, Ax_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \text{ tal que } (x_n, Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y) \\ &\iff (x, y) \in \overline{G(A)}.\end{aligned}$$

Portanto A é fechável.

Tratemos o caso em que $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador fechado em X , isto é, $\overline{G(A)} = X$. Em particular, para cada seqüência $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset G(A)$ tal que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$, obtemos $(x, y) \in G(A)$, em outras palavras, para cada seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ e $y_n = Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$, temos $x \in D(A)$ e $y = Ax$.

Reciprocamente, seja $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset G(A)$ com $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$, percebemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ e $y_n = Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Assim $x \in D(A)$ e $y = Ax$, ou seja, $(x, y) \in G(A)$. $\square$

Lema 1.2. *Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear injetor, então A é fechado em X se, e somente se, A^{-1} é fechado.*

Demonstração. Notemos que $A^{-1} : R(A) \subset X \longrightarrow X$ está bem definido porque A é injetor. Suponhamos A um o operador fechado e seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R(A)$ uma seqüência

tal que

$$\begin{cases} y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \\ A^{-1}y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x. \end{cases}$$

Como $y_n = Ax_n$ para algum $x_n \in D(A)$, segue que

$$\begin{cases} Ax_n = y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \\ x_n = A^{-1}y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x. \end{cases}$$

Sendo A um operador fechado, obtemos que $x \in D(A)$ e $y = Ax$, ou seja, $y \in R(A)$ com $x = A^{-1}y$, mostrando que A^{-1} é um operador fechado.

Reciprocamente, consideremos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ e $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Denotemos $y_n = Ax_n \in R(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ obtendo

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \text{ e } A^{-1}y_n = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Assim $y \in R(A)$ e $x = A^{-1}y$, ou seja, $y = Az$ para algum $z \in D(A)$. Daí

$$x = A^{-1}y = A^{-1}Az = z,$$

ou seja, $x \in D(A)$ e $y = Ax$ mostrando que o operador A é fechado. $\square$

Lema 1.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear injetor tal que $A^{-1} : R(A) \subset X \longrightarrow X$ é fechável e seu fecho é injetor, então A é fechável.*

Demonstração. Consideremos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Denotando $y_n = Ax_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\overline{A^{-1}}y_n = A^{-1}y_n = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

Como $\overline{A^{-1}}$ é um operador fechado, segue que $y \in D(\overline{A^{-1}})$ e $\overline{A^{-1}}y = 0$, ou seja, $y = 0$. $\square$

Lema 1.4. *Sejam $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, fechado e injetor tal que $A^{-1} : R(A) \subset X \longrightarrow X$ é limitado, então $R(A)$ é fechado.*

Demonstração. Consideremos a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R(A)$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$, mas $y \notin R(A)$. Vejamos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = Ax_n,$$

onde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ e sendo A um operador fechado, obtemos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente, ou

seja, para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com a propriedade

$$\|x_{n_k} - x\|_X > \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $x = 0$ e $\varepsilon = \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_X$, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|x_{n_k} - 0\|_X = \|x_{n_k}\|_X > \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|x_n\|_X &= \|A^{-1}y_n\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|y_n\|_X \\ &\leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|x_n\|_X \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|_X = \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

contrariando (1.3), sendo assim $y \in R(A)$ e $R(A)$ é fechado em X . $\square$

Definição 1.2. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $I_X : X \rightarrow X$ o operador identidade de X e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Definimos o conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, como sendo o conjunto de todos os números complexos λ , tais que:*

- (i) *O operador linear $I_X\lambda - A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é injetor;*
- (ii) *A imagem do operador $I_X\lambda - A$ é densa em X , isto é, $\overline{R(I_X\lambda - A)} = X$;*
- (iii) *O operador linear $(I_X\lambda - A)^{-1} : R(I_X\lambda - A) \subset X \rightarrow X$ é limitado.*

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado espectro do operador A .

O operador $(I_X\lambda - A)^{-1}$ é chamado operador resolvente de A . No que segue, denotaremos os operadores $(I_X\lambda - A)^{-1}$ e $I_X\lambda - A$ por $(\lambda - A)^{-1}$ e $\lambda - A$, respectivamente.

Lema 1.5. *Sejam $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechável e $\bar{A} : D(\bar{A}) \subset X \rightarrow X$ o seu fecho, então $\rho(A) = \rho(\bar{A})$.*

Demonstração. Suponha $\lambda \in \rho(A)$, por definição

- (i) O operador linear $\lambda - A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é injetor;

(ii) A imagem do operador $\lambda - A$ é densa em X , ou seja, $\overline{R(\lambda - A)} = X$;

(iii) O operador linear $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$ é limitado.

Queremos mostrar que $\lambda \in \rho(\bar{A})$, isto é,

(1) O operador $\lambda - \bar{A} : D(\bar{A}) \subset X \longrightarrow X$ é injetor;

(2) $\overline{R(\lambda - \bar{A})} = X$;

(3) O operador linear $(\lambda - \bar{A})^{-1} : R(\lambda - \bar{A}) \subset X \longrightarrow X$ é limitado.

Prova de (1): Considere $x \in \ker(\lambda - \bar{A})$, isto é, $x \in D(\bar{A})$ e $(\lambda - \bar{A})x = 0$, por definição existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ e

$$\bar{A}x_n = Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y.$$

Como $\bar{A}$ fechado, obtemos $x \in D(\bar{A})$ e $y = \bar{A}x$ e consequentemente

$$(\lambda - A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x - \bar{A}x = (\lambda - \bar{A})x = 0 \in R(\lambda - A).$$

Já que $(\lambda - A)^{-1}$ é um operador limitado, temos

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\lambda - A)^{-1}0 = 0.$$

Assim, pela unicidade do limite, $x = 0$, implicando $\ker(\lambda - \bar{A}) = \{0\}$, ou seja, o operador $\lambda - \bar{A}$ é injetor.

Prova de (3): Para algum $x \in D(\bar{A})$, considere $y = (\lambda - \bar{A})x$. Note que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e $\bar{A}x_n = Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y'$. Sendo $\bar{A}$ um operador fechado, obtemos $y' = \bar{A}x$ e denotando $y_n = (\lambda - A)x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\lambda - \bar{A})x = y. \tag{1.5}$$

Em particular, a convergência em (1.5), implica que

$$(\lambda - A)^{-1}y_n = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = (\lambda - \bar{A})^{-1}y,$$

isto significa que para provar (3) devemos mostrar que

$$\| (\lambda - \bar{A})^{-1}y \|_X \leq C \| y \|_X$$

para cada $y \in R(\lambda - A)$, onde C é uma constante. Sendo $(\lambda - A)^{-1}$ um operador limitado, temos

$$\|(\lambda - A)^{-1}y\|_X \leq C \|y\|_X$$

para cada $y \in R(\lambda - A)$ e algum $C > 0$.

Fixado $y \in R(\lambda - A)$, existe $x \in D(A) \subset D(\bar{A})$ com

$$y = (\lambda - A)x = (\lambda - \bar{A})x \implies (\lambda - \bar{A})^{-1}y = (\lambda - A)^{-1}y = x.$$

Assim

$$\begin{aligned} C \|y\|_X &\geq \|(\lambda - A)^{-1}y\|_X \\ &= \|(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x\|_X \\ &= \|x\|_X \\ &= \|(\lambda - \bar{A})^{-1}y\|_X \end{aligned}$$

para cada $y \in R(\lambda - A)$ o que conclui a prova de (3).

A prova de (2): O Lema (1.4) garante que $R(\lambda - A)$ é fechado uma vez que o operador $\lambda - A$ é injetor e o operador $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado. Assim

$$X = \overline{R(\lambda - A)} \subset \overline{R(\lambda - \bar{A})} \subset X.$$

Portanto $\rho(A) \subset \rho(\bar{A})$.

Agora, seja $\lambda \in \rho(\bar{A})$, isto é,

(i) O operador $\lambda - \bar{A} : D(\bar{A}) \subset X \longrightarrow X$ é injetor;

(ii) $\overline{R(\lambda - \bar{A})} = X$;

(iii) O operador linear $(\lambda - \bar{A})^{-1} : R(\lambda - \bar{A}) \subset X \longrightarrow X$ é limitado.

Queremos mostrar que $\lambda \in \rho(A)$, ou seja,

(a) O operador $\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é injetor;

(b) $\overline{R(\lambda - A)} = X$;

(c) O operador linear $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$ é limitado.

Primeiramente, note que pelo Lema 1.4 $R(\lambda - \bar{A})$ é fechado em X , assim $R(\lambda - \bar{A}) = \overline{R(\lambda - \bar{A})} = X$.

Prova de (a): Consideremos $x \in \ker(\lambda - A)$, como $0 = (\lambda - A)x = (\lambda - \bar{A})x$ e $(\lambda - \bar{A})$ é bijetor, temos $x = 0$, implicando $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ e consequentemente o

operador $\lambda - A$ é injetor.

Prova de (b): Seja $y = (\lambda - \bar{A})x$ para algum $x \in D(\bar{A})$, temos que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e

$$(\lambda - \bar{A})x_n = (\lambda - A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y',$$

já que $\lambda - \bar{A}$ é fechado, devemos ter $y' = (\lambda - \bar{A})x \in R(\lambda - \bar{A})$ e sendo $(\lambda - \bar{A})^{-1}$ limitado, temos

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\lambda - \bar{A})^{-1}y'.$$

Assim

$$x = (\lambda - \bar{A})^{-1}y' \implies y' = (\lambda - \bar{A})x = y,$$

portanto $\overline{R(\lambda - A)} = X$.

Prova de (c): Existe $C > 0$ tal que

$$\| (\lambda - \bar{A})^{-1}y \|_X \leq C \| y \|_X$$

para todo $y \in R(\lambda - \bar{A})$. Se $y \in R(\lambda - A)$, então $y = (\lambda - A)x = (\lambda - \bar{A})x$ para algum $x \in D(A)$. Daí, $x = (\lambda - A)^{-1}y$ e

$$\begin{aligned} C \| y \|_X &\geq \| (\lambda - \bar{A})^{-1}y \|_X \\ &= \| (\lambda - \bar{A})^{-1}(\lambda - \bar{A})x \|_X \\ &= \| x \|_X \\ &= \| (\lambda - A)^{-1}y \|_X. \end{aligned}$$

Com isto $\lambda \in \rho(A)$, concluindo a prova do lema. □

Lema 1.6. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear tal que $\rho(A) \neq \emptyset$. Suponha que:*

- (i) *Para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ o operador linear $\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}} : D(\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}}) \subset X \longrightarrow X$ é injetor, então $\lambda - A$ é fechável;*
- (ii) *O operador A é fechável, então para cada $\lambda \in \rho(A)$ o operador $\overline{(\lambda - A)^{-1}} : D(\overline{(\lambda - A)^{-1}}) \subset X \longrightarrow X$ é injetor.*

Demonstração. Primeiramente note que $y \in D(\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}})$ se, e somente se, existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R(\lambda_0 - A)$ tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ e $((\lambda_0 - A)^{-1}y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se,

e somente se, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$(\lambda_0 - A)x_n = y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$$

e

$$((\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda_0 - A)x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$$

converge se, e somente se, $y \in R(\lambda - \bar{A})$ e consequentemente $D(\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}}) = R(\lambda - \bar{A})$.

Prova de (i): Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $y_n = (\lambda_0 - A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Note que $y \in D(\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}})$ e

$$\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}}y_n = (\lambda_0 - A)^{-1}y_n = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

e sendo $\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}}$ fechado, obtemos $y = \overline{(\lambda_0 - A)^{-1}}0$, já que $\overline{(\lambda_0 - A)^{-1}}$ é injetor, obtemos $y = 0$. Portanto $\lambda_0 - A$ é fechável.

Prova de (ii): Basta mostrarmos que $\overline{(\lambda - A)^{-1}}y = (\lambda - \bar{A})^{-1}y$ para cada $\lambda \in \rho(A)$, pois pelo Lema 1.5 $\rho(A) = \rho(\bar{A})$. Seja

$$y \in D(\overline{(\lambda - A)^{-1}}) = R(\lambda - \bar{A}) = D((\lambda - A)^{-1}),$$

temos que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e

$$y_n = (\lambda - A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\lambda - \bar{A})x = y,$$

ou equivalentemente,

$$(\lambda - A)^{-1}y_n = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = (\lambda - \bar{A})^{-1}y.$$

Já que o operador $\overline{(\lambda - A)^{-1}}$ é fechado e $\overline{(\lambda - A)^{-1}}y_n = (\lambda - A)^{-1}y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\overline{(\lambda - A)^{-1}}y = x = (\lambda - \bar{A})^{-1}y$$

para todo $y \in D(\overline{(\lambda - A)^{-1}}) = D((\lambda - A)^{-1})$. Completando a prova do lema. $\square$

Agora, nos deteremos ao estudo de operadores fechados, porque os geradores infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares e limitados fortemente contínuos são fechado. Mas a título de curiosidade, o item (ii) do Lema 1.6 tem sentido na classe dos operadores densamente definidos e dissipativos, para mais detalhes veja [4].

Teorema 1.7. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado, então*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{ o operador linear } \lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X \text{ é bijetor}\}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$, temos $\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é injetor, $\overline{R(\lambda - A)} = X$ e

$$(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset X \longrightarrow X$$

é limitado. Pelo Lema 1.4 segue que $R(\lambda - A)$ é fechado e consequentemente o operador $\lambda - A$ é bijetor.

Reciprocamente, seja $\lambda \in \{\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X \text{ é bijetor}\}$. Já que o operador

$$\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

é sobrejetor, segue que $R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)} = X$ e pelo teorema do gráfico fechado $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Portanto $\lambda \in \rho(A)$. $\square$

O Teorema 1.7 garante que o espectro de um operador fechado A é formado por vetores complexos λ tais que o operador

$$\lambda - A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

não é bijetor, isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador fechado. O espectro $\sigma(A)$ pode ser decomposto nas seguintes partes disjuntas:*

(i) *O espectro pontual*

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \sigma(A); \text{ o operador } \lambda - A \text{ não é injetor}\};$$

(ii) *O espectro residual*

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{ o operador } \lambda - A \text{ é injetor e } \overline{R(\lambda - A)} \subsetneq X\};$$

(iii) *O espectro contínuo*

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{ o operador } \lambda - A \text{ é injetor, } R(\lambda - A) \subsetneq X \text{ e } \overline{R(\lambda - A)} = X\}.$$

Lema 1.8. *Sejam $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, fechado e limitado com $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, então $1 \in \rho(A)$ e o operador $I_X - A$ tem inversa contínua com*

$$(I_X - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \in \mathcal{L}(X).$$

Demonstração. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|A^i\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^i.$$

Daí

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|A^i\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^i < +\infty,$$

pois $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Assim a série $\sum_{i=0}^{+\infty} A^i_{\mathcal{L}(X)}$ é convergente. Em particular, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^m A^i - \sum_{i=0}^n A^i \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \sum_{i=n+1}^m A^i \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^m \|A^i\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $\left(\sum_{i=0}^n A^i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e sendo $\mathcal{L}(X)$ um espaço de Banach, concluímos que a sequência $\left(\sum_{i=0}^n \|A^i\|_{\mathcal{L}(X)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $S \in \mathcal{L}(X)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} (I_X - A)(I_X + A + \cdots + A^n) &= I_X - A + A + \cdots - A^n + A^n - A^{n+1} \\ &= I_X - A^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I_X \quad \left(\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1 \right), \end{aligned}$$

isto é, $(I_X - A)S = I_X$. De forma análoga mostramos $S(I_X - A) = I_X$, implicando que S é a inversa de $I_X - A$ mostrando que

$$(I_X - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

□

Teorema 1.9. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear e fechado. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \mu| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, obtemos $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1},$$

sempre que $\mu \in \rho(A)$.

Demonstração. Seja $\mu \in \rho(A)$, mostraremos que existe $\varepsilon > 0$, tal que a bola aberta $B(\mu; \varepsilon) \subset \rho(A)$, como X é um espaço de Banach não trivial e $\mu - A$ é bijetor, considere

$$\varepsilon = \frac{1}{\|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} > 0.$$

Dado $\lambda \in B(\mu; \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} \lambda - A &= \lambda + \mu - \mu - A \\ &= (\mu - A)[I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}]. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} I_X &= \left[I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1} \right]^{-1} (\mu - A)^{-1} (\mu - A) [I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}] \\ &= \left((\mu - A) [I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}] \right)^{-1} (\mu - A) [I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}] \\ &= \left((\mu - A) [I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}] \right)^{-1} (\lambda - A), \end{aligned}$$

ou seja, $\lambda - A$ é injetor, porque tem inversa a direita e $R(\lambda - A) = R(\mu - A) = X$, pois $(\mu - A)^{-1} : X \rightarrow X$. Portanto $\lambda \in \rho(A)$ e consequentemente $\rho(A)$ é aberto.

Agora, se $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $1 \geq |\mu - \lambda| \|(\mu - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, temos pelo Lema 1.8 o operador linear $I_X - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)$ tem inversa contínua com

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1}(\mu - A) &= \left[(\mu - A)^{-1}(\lambda - A) \right]^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1} \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n}, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1}.$$

□

Teorema 1.10. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então*

$$(\mu - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \quad (1.6)$$

e

$$(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \quad (1.7)$$

Demonstração. Vejamos que

$$\begin{aligned} (\mu - A)^{-1} &= (\mu - A)^{-1}[\mu(\lambda - A)^{-1} - \mu(\lambda - A)^{-1} + (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}] \\ &= (\mu - A)^{-1}[\mu(\lambda - A)^{-1} - \mu(\lambda - A)^{-1} + \lambda(\lambda - A)^{-1} - A(\lambda - A)^{-1}] \\ &= (\mu - A)^{-1}[(\mu - A)(\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\lambda - A)^{-1}] \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\lambda - \mu)(\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \end{aligned}$$

□

A equação (1.6) é conhecida como identidade do resolvente.

Definição 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : \Omega \longrightarrow X$ uma função vetorial. Diremos que f é analítica em Ω , quando para cada $\lambda_0 \in \Omega$ existir o limite*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)].$$

Em caso afirmativo, este limite será denotado por $f'(\lambda_0)$.

Corolário 1.11. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. A aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \rho(A) \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\longrightarrow \mathcal{G}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} \end{aligned}$$

é analítica.

Demonstração. Vejamos que $\mathcal{G}$ é contínua em $\lambda_0 \in \rho(A)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ considere

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}; \varepsilon \right\}.$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, então pelo Teorema 1.9, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1}$$

Note que a série do lado direito da igualdade acima converge para

$1/(2 \| (\lambda_0 - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)})$. Assim

$$\begin{aligned} \| \mathcal{G}(\lambda) - \mathcal{G}(\lambda_0) \|_{\mathcal{L}(X)} &= \| (\lambda - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \| (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \\ &< |\lambda_0 - \lambda| \| (\lambda_0 - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \| (\lambda - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \\ &< \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

mostrando que $\mathcal{G}$ é contínua para todo $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [(\lambda - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1}] &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \\ &= -(\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} -(\lambda_0 - A)^{-2} &= -\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda_0 - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [\mathcal{G}(\lambda) - \mathcal{G}(\lambda)] \\ &= \mathcal{G}'(\lambda_0) \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{G}$ é analítica para qualquer $\lambda_0 \in \rho(A)$. $\square$

Teorema 1.12. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear e limitado em X . Se $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n. \quad (1.8)$$

Consequentemente, $\sigma(A)$ é compacto e a série em (1.8) converge uniformemente para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \geq R > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Demonstração. Basta ver que $(\lambda - A) = \lambda[I_X - \lambda^{-1}A]$ e aplicar o Lema 1.8. $\square$

Antes de estudarmos a integral de Remann-Stieltjes damos a definição de operadores auto-adjuntos, dissipativos e compactos.

Definição 1.5. *Sejam H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, H^* seu dual topológico e $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear densamente definido. Considere*

$$D(A^*) := \{x^* \in H^*; \text{ Existe } y^* \in H^* \text{ com } \langle x^*, Ax \rangle_H = \langle y^*, x \rangle_H\}. \quad (1.9)$$

Definimos o adjunto de A pelo operador

$$\begin{aligned} A^* : D(A^*) \subset H^* &\longrightarrow H^* \\ x^* &\longmapsto A^*x^* = y^*, \end{aligned}$$

onde y^* é o elemento que satisfaz (1.9). Em particular, quando $A \subset A^*$, isto é,

$$\langle v, Au \rangle_H = \langle Av, u \rangle_H$$

Para todo $u, v \in D(A)$, diremos que A é simétrico e se $D(A) = D(A^*)$ diremos que A é auto-adjunto. Finalmente, Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e para cada $x \in D(A)$, existir $x^* \in D(A^*)$ tal que $\operatorname{Re}(\langle x^*, Ax \rangle_H) \leq 0$, diremos que A é um operador dissipativo.

Proposição 1.13. *Sejam H um espaço de Banach, H^* seu dual topológico e $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear. O operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset H^* \longrightarrow H^*$ é fechado.*

Demonstração. Considere a sequência $\left((x_n^*, A^*x_n^*) \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset G(A^*)$ tal que

$$(x_n^*, A^*x_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x^*, y^*).$$

Já que $x_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^*$ e $A^*x_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y^*$, segue que

$$\langle x^*, A^*x^* \rangle_H = \left\langle \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^*, A^*x^* \right\rangle_H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n^*, A^*x^* \rangle_H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A^*x_n^*, x^* \rangle_H = \langle y^*, x^* \rangle_H.$$

Assim $x^* \in D(A^*)$ e $y^* = A^*x^*$. □

Proposição 1.14. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear auto-adjunto. Se*

$$\langle Ax, x \rangle_H \geq C \|x\|_H,$$

para todo $x \in D(A)$ e alguma constante $C > 0$, então $\sigma(A) \subset [C, +\infty)$.

Demonstração. Sejam

$$C = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H \quad \text{e} \quad M = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H.$$

Como $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$, basta provarmos que $\sigma(A) \subset [C, M]$, para isto, dado $\varepsilon > 0$ e

$x \in D(A)$ não nulo, consideremos $v = \|x\|_H^{-1}x$ e obtemos

$$\langle Ax, x \rangle_H = \|x\|_H^2 \langle Av, v \rangle_H \leq \|x\|_H^2 \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H = 1}} \langle Ax, x \rangle_H = \langle x, x \rangle_H M,$$

ou seja, $-\langle Ax, x \rangle_H \geq -\langle x, x \rangle_H M$. Daí

$$\|[(M + \varepsilon) - A]x\|_H \geq |\langle [(M + \varepsilon) - A]x, x \rangle_H| = (M + \varepsilon)\|x\|_H^2 - \langle Ax, x \rangle_H \geq \varepsilon\|x\|_H^2$$

e pelo Teorema de Lax-Milgram, segue que

$$\langle [(M + \varepsilon) - A]x, v \rangle_H = \langle h, v \rangle_H$$

tem única solução x_h para todo $h \in H$, isto é,

$$[(M + \varepsilon) - A]x_h = h$$

com isto segue que o operador $(M + \varepsilon) - A$ é bijetor para todo $\varepsilon > 0$ mostrando que $(M, +\infty) \subset \rho(A)$. Analogamente, mostramos que $(-\infty, C) \subset \rho(A)$ completando a prova da proposição. $\square$

Definição 1.6. *Sejam Y um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $D \subset Y$. Diremos que D é relativamente compacto quando $\overline{D}$ é um compacto em Y .*

Sabemos que a bola unitária de centro na origem nem sempre é compacta, pensando nisto damos a seguinte definição.

Definição 1.7. *Sejam Y, Z espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $K : Y \rightarrow Z$ um operador linear, se $B(0, 1)$ é um conjunto relativamente compacto em Z , então K é dito um operador linear compacto. Denotamos $\mathcal{K}(Y, Z)$ o espaço dos operadores lineares compactos.*

1.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Nesta seção trataremos das integrais de operadores lineares em espaços de Banach X sobre um corpo $\mathbb{K}$. Veremos que a integral é um vetor em X . As principais referências para a seção são as notas de aulas de Alexandre Carvalho [4] e o livro de Jonh Conway [6].

Para simplificarmos a notação iremos denotar uma partição do intervalo $[a, b]$ por $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, mais precisamente, o conjunto de pontos

$P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ tal que $t_i > t_{i-1}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ será denotado por $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ou simplesmente P .

Definição 1.8. Uma função $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita uma curva quando for contínua.

Definição 1.9. Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ uma curva.

(i) Quando γ for diferenciável e $\gamma' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ contínua diremos que γ é uma curva suave;

(ii) Caso para toda partição $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$, tivermos

$$v(\gamma; P) := \sum_{j=1}^n \left| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \right| \leq M,$$

onde M é uma constante positiva, diremos que γ é uma curva retificável. Neste caso definimos a variação de γ por

$$V(\gamma) := \sup\{v(\gamma, P); P \text{ é uma partição de } [a, b]\};$$

(iii) No caso que $\gamma(a) = \gamma(b)$ diremos que curva γ é fechada;

(iv) A curva γ é dita simples quando $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ é injetiva.

Definição 1.10. Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ uma curva retificável, $f : [a, b] \longrightarrow X$ uma função vetorial e $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Definimos a soma de Riemann-Stieltjes associada à partição P pelo vetor

$$S(P) := \sum_{i=0}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i),$$

onde $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposição 1.15. Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ uma curva retificável e $f : [a, b] \longrightarrow X$ uma função vetorial de uma variável real. Se

$$P : a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$$

e

$$Q : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

são partições do intervalo $[a, b]$ tais que Q refina P , então

$$\| S(P) - S(Q) \|_X \leq MV(\gamma),$$

onde M é uma constante positiva.

Demonstração. Primeiramente considere o caso em que a partição Q é obtida por meio da adição de um único ponto na partição P mais precisamente $Q = P \cup \{t^*\}$, onde $t^* \in (t_{j-1}, t_j)$. Note que

$$S(P) = \sum_{i=0}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i)$$

e

$$S(Q) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\alpha_i) + [\gamma(t^*) - \gamma(t_{j-1})] f(\alpha_j) + [\gamma(t_j) - \gamma(t^*)] f(\alpha'_j),$$

onde $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\alpha_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $\alpha_j \in [t_{j-1}, t^*]$ e $\alpha'_j \in [t^*, t_j]$. Daí

$$\begin{aligned} \|S(P) - S(Q)\|_X &= \left\| \sum_{i=0}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\alpha_i) \right. \\ &\quad \left. - [\gamma(t^*) - \gamma(t_{j-1})] f(\alpha_j) - [\gamma(t_j) - \gamma(t^*)] f(\alpha'_j) \right\|_X \\ &\leq \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \|f(\tau_i) - f(\alpha_i)\|_X \\ &\quad + |\gamma(t^*) - \gamma(t_{j-1})| \|f(\tau_j) - f(\alpha_j)\|_X \\ &\quad + |\gamma(t_j) - \gamma(t^*)| \|f(\tau_j) - f(\alpha'_j)\|_X \\ &\leq MV(\gamma), \end{aligned}$$

para algum $M > 0$.

Para o caso mais geral em que Q refina P adicionado k elementos distintos, $Q_1 = P \cup \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, iremos usar indução sobre k . Suponha que o resultado seja valido para $k = r - 1$, ou seja, se p_j denota os elementos da partição Q_1 temos

$$\|S(P) - S(Q_1)\|_X \leq MV(\gamma, Q_1).$$

Mostremos que o resultado é valido para $Q = P \cup \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. Para facilitar a notação considere $Q : a = p_1 < p_2 < \dots < p_{n+r} = b$, em que p_i representa t_i ou s_j . Como $Q = Q_1 \cup \{s_k\}$, temos

$$S(Q) = S(Q_1) + [\gamma(s_k) - \gamma(p_{k-1})] f(\alpha_k) + [\gamma(p_k) - \gamma(s_k)] f(\alpha'_k),$$

onde $\alpha_k \in [p_{i-1}, s_k]$ e $\alpha'_k \in [s_k, p_k]$.

Assim

$$\begin{aligned} \|S(P) - S(Q)\|_X &= \|S(P) - S(Q_1) - [\gamma(s_k) - \gamma(p_{k-1})]f(\alpha_k) \\ &\quad + [\gamma(p_j) - \gamma(s_k)]f(\alpha'_k)\|_X \\ &\leq \|S(P) - S(Q_1)\|_X + \|\gamma(s_k) - \gamma(p_{k-1})\|_X \|f(\alpha_k)\|_X \\ &\quad + \|\gamma(p_j) - \gamma(s_k)\|_X \|f(\alpha'_k)\|_X \\ &\leq MV(\gamma) \end{aligned}$$

Portanto pelo principio de indução finita o resultado é valido para qualquer partição Q do intervalo $[a, b]$ que refina a partição P . $\square$

A proposição acima motiva-nos a tomarmos partições “finas”, isto é, considerar partições cujos comprimentos dos intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ sejam menores que $\delta > 0$, isto é possível, porque $[a, b]$ é um compacto da reta. Pensando nisto, definimos a malha da partição $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, isto é,

$$\|P\| := \max\{t_i - t_{i-1}; 0 \leq i \leq n\}.$$

Teorema 1.16. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva retificável e $f : [a, b] \rightarrow X$ uma função contínua. Existe $I \in X$ tal que Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com a propriedade:*

$$\|I - S(P)\|_X < \varepsilon,$$

sempre que $\|P\| < \delta$.

Demonstração. Considere a sequência $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ estritamente decrescente com a propriedade: se $t, s \in [a, b]$ com $|t - s| < \delta_n$ e n não nulo, então

$$\|f(t) - f(s)\|_X < \frac{1}{n}.$$

Definamos

$$P_n := \{\text{Partições do intervalo } [a, b] \text{ com malha } \|P\| < \delta_n\}$$

e

$$\mathcal{F}_n := \{S(P); P \in P_n\}.$$

Notemos que,

$$P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_n \supset \cdots$$

e

$$\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_n \supset \cdots .$$

Com isso existe um único vetor $I \in \cap_{n \geq 1} \overline{\mathcal{F}_n}$.

Pela demonstração da Proposição 1.15, vemos que

$$\text{diam}(\mathcal{F}_n) = \sup\{\|S(P) - S(Q)\|_X; S(P), S(Q) \in \mathcal{F}\} < \frac{1}{n}V(\gamma).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $n > \frac{1}{\varepsilon}V(\gamma)$ e $\delta = \delta_n$, obtendo que, se P é uma partição do intervalo $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$, então

$$\|I - S(P)\|_X \leq \text{diam}(\mathcal{F}_n) < \frac{1}{n}V(\gamma) < \varepsilon.$$

□

Definição 1.11. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ uma curva retificável e $f : [a, b] \rightarrow X$ uma função contínua. Definimos a integral de Riemann-Stieltjes pelo vetor I tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com a propriedade*

$$\|I - S(P)\|_X < \varepsilon$$

sempre que $\|P\| < \delta$. Denotamos o vetor I por

$$\int_a^b f d\gamma.$$

Proposição 1.17. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow X$ funções contínuas, $\gamma, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ curvas retificáveis e α e β constantes, temos:*

$$(i) \int_a^b (\alpha f + \beta g) d\gamma = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b g d\gamma;$$

$$(ii) \int_a^b f d(\alpha \gamma + \beta \sigma) = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b f d\sigma;$$

(iii) se $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, então

$$\int_a^b f d\gamma = \sum_{i=0}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f d\gamma;$$

$$(iv) \left\| \int_a^b f d\gamma \right\|_X \leq \int_a^b \|f\|_X d|\gamma|.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 1.16, existem vetores I_1, I_2, J, K e $L \in X$ tal que para cada $\delta_\varepsilon > 0$ e qualquer partição $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$ com malha $\|P\| < \delta_\varepsilon$, vale:

$$\left\| I_1 - \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon,$$

$$\left\| I_2 - \sum_{i=1}^n [\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})] f(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon,$$

$$\left\| J - \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] g(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon,$$

$$\left\| K - \sum_{i=1}^n [(\alpha\gamma + \beta\sigma)(t_i) - (\alpha\gamma + \beta\sigma)(t_{i-1})] f(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon,$$

e

$$\left\| L - \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] (\alpha f + \beta g)(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon,$$

para qualquer $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i], i \in \{0, \dots, n\}$.

Prova de (i): Notemos que

$$\begin{aligned} \left\| L - (\alpha I_1 + \beta J) \right\|_X &= \left\| L - \alpha \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i) - \beta \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] g(\tau_i) \right\|_X \\ &= \left\| L - \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] (\alpha f + \beta g)(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, $L = \alpha I_1 + \beta J$ e quando $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) d\gamma = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b g d\gamma.$$

Prova de (ii): Temos

$$\begin{aligned} \left\| K - \alpha I_1 - \beta J \right\|_X &= \left\| K - \alpha \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i) - \beta \sum_{i=1}^n [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] f(\tau_i) \right\|_X \\ &= \left\| K - \sum_{i=1}^n [(\alpha\gamma + \beta\sigma)(t_i) - (\alpha\gamma + \beta\sigma)(t_{i-1})] f(\tau_i) \right\|_X < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $K = \alpha I_1 + \beta J$. Daí, fazendo $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_a^b f d(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b f d\sigma.$$

Prova de (iii): Em primeiro lugar a restrição da curva γ a cada intervalos $[c_{i-1}, c_i]$ é retificável. Assim, assumiremos sem perda de generalidade que δ tem a propriedade para qualquer partição $P_i : c_{i-1} = t_{i_0} < t_{i_1} < \dots < t_{i_k} = c_i$ do intervalo $[c_{i-1}, c_i]$, vale

$$\|P_i\| = \max\{|t_{i_1} - t_{i_0}|, \dots, |t_{i_k} - t_{i_{k-1}}|\} < \delta_\varepsilon.$$

Pelo Teorema 1.16 existem vetores $J_{i,j} \in X$ ($0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq k$) tais que

$$\left\| J_{i,j} - \sum_{j=0}^k f(\tau_{i_j}) \left[\gamma|_{[c_{i-1}, c_i]}(t_{i_j}) - \gamma|_{[c_{i-1}, c_i]}(t_{i_{j-1}}) \right] \right\|_X < \varepsilon(n),$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, k\}$. Claramente $P = \bigcup_{i=0}^k P_i$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ com $\|P\| < \delta_\varepsilon$. Daí

$$\left\| I_1 - \sum_{i=0}^n J_{i,j} \right\|_X = \left\| I_1 - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k f(\tau_{i_j}) \left[\gamma|_{[c_{i-1}, c_i]}(t_{i_j}) - \gamma|_{[c_{i-1}, c_i]}(t_{i_{j-1}}) \right] \right\|_X < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Assim $I_1 = \sum_{i=0}^n J_{i,j}$, isto é,

$$\int_a^b f d\gamma = \sum_{i=0}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f d\gamma, \quad \delta_\varepsilon \rightarrow 0.$$

Prova de (iv): Como $\|f\|_X$ é uma função contínua e $|\gamma|$ é uma curva retificável, pelo Teorema 1.16, existe $V \in X$ tal que

$$\left\| V - \sum_{i=0}^n \|f\|_X(\tau_i) \left[|\gamma|(t_i) - |\gamma|(t_{i-1}) \right] \right\|_X < \varepsilon.$$

Note que

$$\|I_2\|_X = \left\| \sum_{i=0}^n f(\tau_i) \left[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right] \right\|_X \leq \left\| \sum_{i=0}^n \|f\|_X(\tau_i) \left[|\gamma|(t_i) - |\gamma|(t_{i-1}) \right] \right\|_X = \|V\|_X$$

isto é,

$$\left\| \int_a^b f d\gamma \right\|_X \leq \int_a^b \|f\|_X d|\gamma|, \quad \delta_\varepsilon \rightarrow 0$$

Completando assim a prova da proposição. $\square$

Definição 1.12. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva retificável, $\{\gamma\} := \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$ o traço de γ e $f : \{\gamma\} \rightarrow X$ uma função contínua. Definimos a integral de linha de f sobre a curva γ por*

$$\int_a^b f(\gamma) d\gamma,$$

que, por simplicidade, será denotada por $\int_\gamma f(z) dz$.

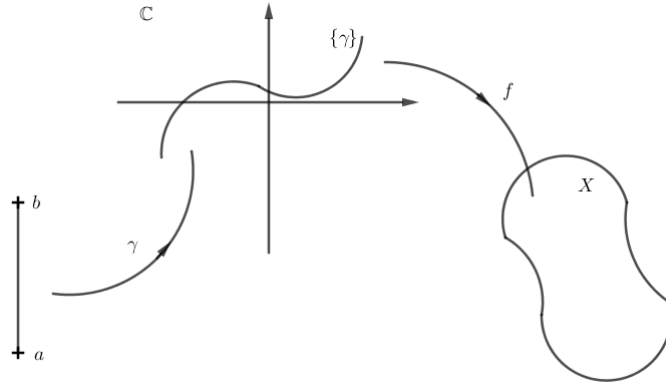


Figura 1.1: Integral de linha de f sobre a curva γ .

Teorema 1.18. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva retificável e $f : \{\gamma\} \rightarrow X$ uma função contínua ($\{\gamma\}$ denota o traço de γ), temos*

$$T\left(\int_\gamma f(z) dz\right) = \int_\gamma T(f(z)) dz.$$

Demonstração. Basta perceber que as integrais são limites de soma de Remann-stieltis e T é um operador linear contínuo. $\square$

Teorema 1.19. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva suave por parte e $f : \{\gamma\} \rightarrow X$ uma função contínua, então*

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Demonstração. Dado qualquer $x^* \in X^*$, pelo Teorema 1.18, temos

$$\begin{aligned} x^*\left(\int_{\gamma} f(z)dz\right) &= \int_{\gamma} x^*(f(z))dz \\ &= \int_{\gamma} x^*(f(\gamma(t))\gamma'(t))dt \\ &= x^*\left(\int_{\gamma} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

□

Lema 1.20. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função vetorial de uma variável complexa. Se para cada $x^* \in X^*$ a função de uma variável complexa $x^*f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for analítica, então f é analítica e neste caso, denotando $h(\lambda) := x^*(f(\lambda))$, temos $h'(\lambda_0) = x^*(f'(\lambda_0))$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que para $\lambda_0 \in \Omega$ fixo a seguinte norma

$$\left\| \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)] - \frac{1}{\mu - \lambda_0} [f(\mu) - f(\lambda_0)] \right\|_X$$

tende a zero, quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ e $\mu \rightarrow \lambda_0$.

Considere $r > 0$ tal que $\overline{B(\lambda_0; r)} \subset \Omega$ e definamos a curva γ como sendo a fronteira de $\overline{B(\lambda_0; r)}$ orientada no sentido anti-horário. Como, para cada $x^* \in X^*$, a função de uma variável complexa $x^*f : \overline{B(\lambda_0; r)} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, consequentemente limitada e pelo princípio da limitação uniforme, existe $M > 0$ tal que

$$\|f(\xi)\|_X \leq M, \quad \forall \xi \in \overline{B(\lambda_0; r)}. \quad (1.10)$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ de forma que $\lambda, \mu \notin \overline{B(\lambda_0; \frac{r}{\varepsilon})}$. Pela fórmula da integral de Cauchy, temos

$$x^*(f(\eta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \eta} d\xi$$

para $\eta \in \overline{B(\lambda_0; \frac{r}{\varepsilon})}$. Vejamos que a fórmula de Cauchy vale para qualquer ponto de $\overline{B(\lambda_0; r)}$, pois x^*f é analítica. Assim

$$x^*(f(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \lambda} d\xi, \quad (1.11)$$

$$x^*(f(\mu)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \mu} d\xi, \quad (1.12)$$

e

$$x^*(f(\lambda_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \lambda_0} d\xi. \quad (1.13)$$

Em particular

$$x^*\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0}[f(\lambda) - f(\lambda_0)] - \frac{1}{\mu - \lambda_0}[f(\mu) - f(\lambda_0)]\right) \quad (1.14)$$

pode ser rescrita da seguinte forma

$$\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0}[x^*(f(\lambda)) - x^*(f(\lambda_0))] - \frac{1}{\mu - \lambda_0}[x^*(f(\mu)) - x^*(f(\lambda_0))]\right).$$

Com isto, usando as igualdades (1.11), (1.12) e (1.13), obtemos

$$\begin{aligned} x^*(f(\lambda)) - x^*(f(\lambda_0)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \lambda} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \lambda_0} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))(\lambda - \lambda_0)}{(\xi - \lambda)(\xi - \lambda_0)} d\xi \end{aligned} \quad (1.15)$$

e

$$\begin{aligned} x^*(f(\mu)) - x^*(f(\lambda_0)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \mu} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \lambda_0} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(f(\xi))(\mu - \lambda_0)}{(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} d\xi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Substituindo as expressões (1.15) e (1.16) em (1.14), vemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{x^*(f(\xi))}{(\xi - \lambda)(\xi - \lambda_0)} - \frac{x^*(f(\xi))}{(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} \right] d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\lambda - \mu)x^*(f(\xi))}{(\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} d\xi.$$

Como $|\lambda - \xi| \geq \frac{r}{\varepsilon}$ e $|\mu - \xi| \geq \frac{r}{\varepsilon}$, segue que

$$\begin{aligned} x^*\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0}[f(\lambda) - f(\lambda_0)] - \frac{1}{\mu - \lambda_0}[f(\mu) - f(\lambda_0)]\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\lambda - \mu)x^*(f(\xi))}{(\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} d\xi \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{r^2} M \|X^*\|_{X^*} |\lambda - \mu|. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)] \right\|_X &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} = 1}} \left| x^* \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\mu - \lambda_0} [f(\mu) - f(\lambda_0)] \right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{r^2} M \|X^*\|_{X^*} |\lambda - \mu|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)] - \frac{1}{\mu - \lambda_0} [f(\mu) - f(\lambda_0)] \right\|_X$$

tende a zero quando λ, μ tende a λ_0 . □

Definição 1.13. Um subconjunto aberto, $\Omega \subset \mathbb{C}$, é chamado domínio de Cauchy quando possuir um número finito de componentes conexas e sua fronteira é composta por um número finito de curvas fechadas, retificáveis e simples. A fronteira de Ω orientada positivamente é denotada por $+\partial\Omega$.

Teorema 1.21 (Teorema de Cauchy). Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um domínio de Cauchy limitado e $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ uma função contínua no $\overline{\Omega}$ e analítica em Ω . Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

onde γ é a fronteira de Ω orientada no sentido anti-horário.

Demonstração. Para cada $x^* \in X^*$ a função de uma variável complexa

$$\begin{aligned} f^* : \Omega &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f^*(z) := x^*(f(z)). \end{aligned}$$

é analítica. Daí

$$x^* \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} x^*(f(z)) dz = 0$$

e pelo teorema de Hahn-Banach concluímos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

□

Capítulo 2

Semigrupo de operadores lineares e limitado

Neste capítulo abordaremos a teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados em espaços de Banach que servirá para caracterizar os objetos “ e^{-At} ”. As nossas referências bibliográficas para este capítulo são o livro de Robert Bartle [1], as notas de aulas de Alexandre Carvalho [4] e [5] e os livros de Valéria Iório [8] e Amann Pazy [10].

Sejam X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Considere $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaços dos operadores lineares e limitados de X em Y , munido da norma usual, isto é, se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, então

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

No que segue, denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ o espaços $\mathcal{L}(X, X)$ munido da norma definida acima.

Definição 2.1. *Uma família de operadores lineares e limitados em X , $\{T(t); t \geq 0\}$, é dita um semigrupo de operadores lineares e limitados em X quando:*

- (i) $T(0) = I_X$, (no qual I_X denota o operador identidade em X);
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 2.2. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares e limitados em X . Diremos que o semigrupo de operadores lineares e limitados em X é*

uniformemente contínuo quando

$$\| T(t) - I_X \|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Caso

$$\| T(t)x - x \|_X \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

para cada $x \in X$, diremos que o semigrupo de operadores lineares e limitados é fortemente contínuo ou, simplesmente, um C_0 -semigrupo.

Observação 2.1. Se $\mathcal{U}$ denota a classe de todos os semigrupos de operadores lineares e limitados em X uniformemente contínuos e $\mathcal{F}$ denota a classe de todos os semigrupos de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuos, então $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. De fato, considere $\{T(t); t \geq 0\} \in \mathcal{U}$, por definição

$$\| T(t) - I_X \|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Como

$$\| T(t)x - x \|_X \leq \| T(t) - I_X \|_{\mathcal{L}(X)} \| x \|_X,$$

para cada $x \in X$ e $t > 0$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \| T(t)x - x \|_X \leq \| x \|_X \lim_{t \rightarrow 0^+} \| T(t) - I_X \|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Assim, por maior razão, $\| T(t)x - x \|_X \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, para cada $x \in X$, isto é, $\{T(t); t \geq 0\} \in \mathcal{F}$.

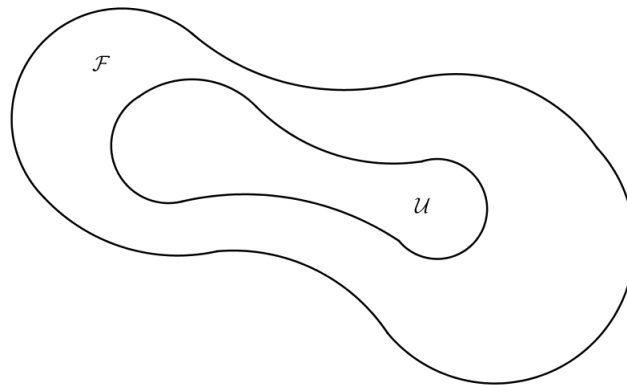


Figura 2.1: Inclusão entre os conjuntos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$.

Definição 2.3. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares e limitados em

X. Definimos o gerador infinitesimal como o operador

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)x - x),$$

$$\text{onde } D(A) := \left\{ x \in X; \text{ existe o limite } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)x - x) \right\}.$$

Veamos que, $D(A)$ é subespaços vetorial de X . De fato, $D(A)$ é não vazio porque o vetor nulo de X é um vetor em $D(A)$ e por

$$\frac{1}{t} [T(t)(x + ky) - (x + ky)] = \frac{1}{t} [T(t)x - x] + k \left[\frac{1}{t} (T(t)y - y) \right]$$

para cada $x, y \in D(A)$, $k \in \mathbb{K}$ e $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [T(t)(x + ky) - (x + ky)] &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [T(t)x - x] + k \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [T(t)y - y] \\ &= Ax + kAy, \end{aligned}$$

ou seja, $x + ky \in D(A)$ e $A(x + ky) = Ax + kAy$.

Teorema 2.1. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares e limitados em X , então existem $M \geq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Vejamos que

$$\sup_{t \in [0, l]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

para qualquer $l > 0$. De fato, Suponha por contradição que exista uma sequência de números reais positivos $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$ tal que

$$\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty. \quad (2.1)$$

PorÃ©m, para cada $x \in X$ a sequência $(T(t_n)x)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, consequentemente pelo Princípio da Limitação Uniforme a sequência $(\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada o que contraria (2.1), mostrando que

$$\sup_{t \in [0, \eta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty,$$

para algum $\eta > 0$.

Agora, se $l > 0$, então $l = n\eta + \delta$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$ com $0 \leq \delta < \eta$ e por

$$\| T(n\eta + \delta) \|_{\mathcal{L}(X)} = \| T(n\eta)T(\delta) \|_{\mathcal{L}(X)} = \| T(\eta)^n T(\delta) \|_{\mathcal{L}(X)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \| T(l) \|_{\mathcal{L}(X)} &= \| T(n\eta + \delta) \|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \| T(\eta)^n T(\delta) \|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \| T(\eta) \|_{\mathcal{L}(X)}^n \| T(\delta) \|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, podemos escolher $\beta \geq \frac{1}{l} \log \| T(l) \|_{\mathcal{L}(X)}$, isto é, $\| T(l) \|_{\mathcal{L}(X)} < e^{\beta l}$ tal que

$$\| T(nl + t) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \| T(l)^n \|_{\mathcal{L}(X)} \| T(t) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M' e^{\beta nl},$$

onde $M' = \sup\{\| T(t) \|_{\mathcal{L}(X)}; 0 \leq t \leq l\}$. Como $\beta nl \leq \beta nl + |\beta|l + \beta t$, temos

$$\begin{aligned} \| T(nl + t) \|_{\mathcal{L}(X)} &\leq M' e^{\beta nl} \\ &\leq M' e^{\beta nl + |\beta|l + \beta t} \\ &= M e^{\beta(nl+t)}, \end{aligned}$$

no qual $M = M' e^{|\beta|l}$ concluindo a prova do teorema. □

Este teorema nos mostra que os semigrupos de operadores lineares e limitados em X possui uma limitação exponencial.

Teorema 2.2. *Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuos e A o seu gerador infinitesimal, então:*

(i) *Para cada $x \in D(A)$ a função vetorial de uma variável real*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \mathcal{T}(t) = T(t)x \end{aligned}$$

é contínua. Em particular, quando $x \in D(A) \subset X$ e para todo $t > 0$, obtemos que $\mathcal{T}$ é diferenciável e

$$\mathcal{T}'(t) = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall x \in D(A);$$

(ii) O operador A é densamente definido. Para cada $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, temos

$$T(t)x \in D(A);$$

(iii) Se β e M são constantes, como no Teorema 2.1, então o setor complexo $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > \beta\}$ está contido no conjunto resolvente de A e

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt. \quad (2.2)$$

Consequentemente, o operador A é fechado.

Demonstração. Prova de (i): Para cada $x \in X$ e todos $t, h > 0$, temos

$$\begin{aligned} T(t+h)x - T(t)x &= T(t)T(h)x - T(t)x \\ &= (T(h) - I_X)T(t)x. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\|_X &\leq \| (T(h) - I_X) \|_{\mathcal{L}(X)} \|T(t)x\|_X \\ &\leq \| (T(h) - I_X) \|_{\mathcal{L}(X)} M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ são como no Teorema 2.1. Daí, passando ao limite quando h tende a zero em (2.3), obtemos

$$\|T(t+h)x - T(t)x\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (T(t+h)x - T(t)x) = 0.$$

De forma análoga mostramos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} (T(t+h)x - T(t)x) = 0,$$

consequentemente $\mathcal{T}$ é continua.

Agora, para cada $x \in D(A)$, temos

$$\frac{1}{h} [T(h) - I_X] T(t)x = \frac{1}{h} T(t) [T(h) - I_X] x \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} T(t)Ax.$$

Assim $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$ para cada $x \in D(A)$. Em particular,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [T(t+h)x - T(t)x] &= \frac{1}{h} [T(t)T(h)x - T(t)x] \\ &= T(t) \left(\frac{1}{h} (T(h)x - x) \right), \end{aligned}$$

consequentemente

$$D^+ \mathcal{T}(t) = T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) = T(t)Ax.$$

De forma análoga provamos que

$$D^- \mathcal{T}(t) = T(t)Ax$$

completando a prova do item (i).

Prova de (ii): Para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ definamos

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T(t)x dt.$$

Percebamos que x_ε converge para $x \in X$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e considerando $h > 0$, temos

$$\frac{1}{h} (T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon) = \frac{1}{h} \left(T(h) \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T(t)x dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T(t)x dt \right),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon) &= \frac{1}{h\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon T(h)T(t)x dt - \int_0^\varepsilon T(t)x dt \right) \\ &= \frac{1}{h\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon T(h+t)x dt - \int_0^\varepsilon T(t)x dt \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tomando $s = h + t$, temos

$$\begin{cases} t \rightarrow 0 \implies s \rightarrow h; \\ t \rightarrow \varepsilon \implies s \rightarrow h + \varepsilon; \\ ds = dt. \end{cases}$$

Assim

$$\int_0^\varepsilon T(h+t)x dt = \int_h^{\varepsilon+h} T(s)x ds. \tag{2.5}$$

Suponhamos $0 < h < \varepsilon$ e substituamos (2.5) em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h}(T(h)x_\varepsilon - x_\varepsilon) &= \frac{1}{h\varepsilon} \left(\int_h^{\varepsilon+h} T(t)x dt - \int_0^\varepsilon T(t)x dt \right) \\
 &= \frac{1}{h\varepsilon} \left(\int_h^\varepsilon T(t)x dt + \int_\varepsilon^{\varepsilon+h} T(t)x dt - \int_0^h T(t)x dt - \int_h^\varepsilon T(t)x dt \right) \\
 &= \frac{1}{h\varepsilon} \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon+h} T(t)x dt - \int_0^h T(t)x dt \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-1} (T(\varepsilon)x - x),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ou seja, $x_\varepsilon \in D(A)$ para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, consequentemente $D(A)$ é denso em X , isto é, A é densamente definido.

Prova de (iii) Queremos mostrar que o operador $\lambda - A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é bijetor, para cada $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > \beta\}$, para isso definamos o operador

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) : X &\rightarrow X \\
 x &\mapsto R(\lambda)x := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt,
 \end{aligned}$$

onde $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > \beta\}$. Observe que

- O operador $R(\lambda)$ está bem definida. De fato, sejam $x_1 = x_2 \in X$, temos

$$e^{-\lambda t} T(t)x_1 = e^{-\lambda t} T(t)x_2,$$

ou seja,

$$R(\lambda)x_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x_1 dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x_2 dt = R(\lambda)x_2;$$

- O operador $R(\lambda)$ é linear. Com efeito, dados $x, y \in X$ e $k \in \mathbb{K}$, vale

$$\begin{aligned}
 R(\lambda)(x + ky) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)(x + ky) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt + k \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)y dt \\
 &= R(\lambda)(x) + kR(\lambda)(y);
 \end{aligned}$$

- O operador $R(\lambda)$ é limitado. De fato, para cada $x \in X$ e todo $t \geq 0$, obtemos

$$\left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\|_X \leq \int_0^{+\infty} |e^{-\lambda t}| \|T(t)x\|_X dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|T(t)x\|_X dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|R(\lambda)x\|_X}{\|x\|_X} &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(t)x\|_X}{\|x\|_X} \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\lambda t} dt \\ &= \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\lambda t} dt \\ &\leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \beta} e^{-u} \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \beta} < +\infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|R(\lambda)x\|_X}{\|x\|_X} < +\infty.$$

Mostrando que $R(\lambda)$ é limitado.

Feitas estas considerações sobre o operador $R(\lambda)$, retornemos ao problema, isto é, provar que $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > \beta\} \subset \rho(A)$. Notemos que se $x \in X$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I_X)R(\lambda)x &= R(\lambda)x \frac{1}{h}(T(h) - I_X) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \frac{1}{h}(T(h) - I_X), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I_X)R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)T(h)x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Em particular, quando $l = t + h$, temos

$$\begin{cases} t \longrightarrow 0 \implies l \longrightarrow h; \\ t \longrightarrow +\infty \implies l \longrightarrow +\infty; \\ dt = dl. \end{cases}$$

Dai

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt = \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(h-l)} T(l)x dl = \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(h-t)} T(t)x dt. \tag{2.8}$$

Substituindo (2.8) em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h}(T(h) - I_X)R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{+\infty} e^{\lambda(h-t)} T(t)x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(- \int_0^h e^{\lambda(h-t)} T(t)x dt + \int_0^{+\infty} (e^{\lambda h} - 1) e^{-\lambda t} T(t)x dt \right).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Já que as integrais em (2.9) convergem para $-x + \lambda R(\lambda)x$ quando $h \rightarrow 0^+$, segue que $R(\lambda)x \in D(A)$ e $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$, isto é, provamos que dado $x \in X$ existe $R(\lambda)x \in X$ tal que $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$ e consequentemente $\lambda - A$ é sobrejetor. Em particular, quando $x \in D(A)$, temos

$$R(\lambda)Ax = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax dt$$

Integrando por partes, isto é, tomando

$$\begin{cases} -u = e^{-\lambda t} \Rightarrow -du = -\lambda e^{-\lambda t} dt \\ v = T(t)x \Rightarrow dv = T(t)Ax dt, \end{cases}$$

obtemos

$$R(\lambda)Ax = -e^{-\lambda t} T(t)x \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Assim $(\lambda - A)$ é injetiva, porque tem inversa a direita, ou seja,

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > \beta\} \subset \rho(A).$$

Finalmente A é um operador fechado, porque se $(x_n)_n \subset D(A)$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in X$ e $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$, então

$$(\lambda - A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x - y,$$

e sendo $R(\lambda)$ limitado, vale que

$$x_n = R(\lambda)(\lambda - A)x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R(\lambda)(\lambda x - y),$$

ou seja, $x = R(\lambda)(\lambda x - y) \in D(A)$ e

$$(\lambda - A)x = (\lambda - A)R(\lambda)(\lambda x - y) = \lambda x - y \implies Ax = y.$$

□

Teorema 2.3. *Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ e $\{S(t); t \geq 0\}$ semigrupos de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuos e A e B seus respectivos geradores infinitesimais. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Para $x \in D(A) = D(B)$, considere a função auxiliar

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto f(s) = \begin{cases} T(t-s)S(s)x, & \text{se } t \geq s; \\ T(t)S(s-t), & \text{se } s > t. \end{cases} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2 temos que f é diferenciável e para todos $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} f'(s) &= (T(t-s)S(s)x)' = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -BT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga mostramos, para todo $s > t$, $f'(s) = 0$, sendo assim f é constante. Em particular, $f(0) = T(t)x$ e $f(t) = S(t)x$, para cada $x \in D(A)$ e sendo $D(A)$ é denso em X e $T(t)$ e $S(t)$ são operadores limitados para cada $t \geq 0$, concluimos que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. □

De posse dos resultados anteriores podemos, agora retornar ao problema (1.1), isto é,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & \text{se } t > 0; \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Notemos que há dois casos a considerarmos $u_0 \in D(A)$ ou $u_0 \notin D(A)$, neste sentido damos duas definições de soluções forte e fraca para o problema 2.10.

Definição 2.4. *Seja u uma função vetorial de uma variável real que toma valores em X , um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$:*

- (i) *Diremos que u é uma solução forte do problema (2.10) quando $u \in \mathcal{C}([0, +\infty); X) \cap \mathcal{C}^1((0, +\infty); X)$, $u(0) = u_0$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e u satisfaz (2.10);*

(ii) Diremos que u é uma solução fraca de (2.10) quando $u \in \mathcal{C}([0, +\infty); X)$, $u(0) = u_0$ e para cada $x^* \in D(A^*)$ a função de uma variável real

$$\begin{aligned} f^* : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto f^*(t) = \langle x^*, x(t) \rangle \end{aligned}$$

é diferenciável a direita em $t = 0$ e diferenciável para todo $t > 0$ com

$$\begin{aligned} \left. \frac{df^*}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \langle x^*, x(t) \rangle \right|_{t=0} = \langle A^* x^*, u_0 \rangle \\ \frac{df^*}{dt} &= \frac{d}{dt} \langle x^*, x(t) \rangle = \langle A^* x^*, x(t) \rangle, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Suponhamos que $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal do semigrupo de operadores lineares e limitados $\{T(t); t \geq 0\}$ fortemente contínuo e $u_0 \in D(A)$, Pelo Teorema 2.2, temos que a função vetorial de uma variável real

$$\begin{aligned} u : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto u(t) := T(t)u_0 = e^{-At}u_0 \end{aligned}$$

é uma solução forte do problema (2.10) e o Teorema 2.3 garante a unicidade da solução. Mas se $u_0 \in X \setminus D(A)$ então o item (ii) do Teorema 2.2 não se aplica, neste caso iremos estudar os semigrupos de operadores lineares analíticos.

O Teorema 2.2 nos diz, de certo modo, que os operadores resolventes de um C_0 -semigrupos “são dados” pela transformada de Laplace do semigrupo de operadores lineares e limitados em X , isto sugere, de certa maneira, que poderemos recupera o semigrupo através da transformada inversa de Laplace dos operadores resolventes do operador A . Prosseguiremos com este intuito.

Lema 2.4 (Riemann-Lebesgue). *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua por partes, então*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}(Nt) = 0.$$

Demonstração. Ver [8, Corolário 3.7, p. 112]. □

Lema 2.5 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Sejam (E, Σ, μ) um espaços de medida, A um conjunto Σ mensurável e $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge, almost always (quase sempre), para a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Além disso, suponha que:*

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n|$ é integrável;

(ii) Existe uma função $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todos $x \in A$ e $n \in \mathbb{N}$.

Então f é integrável e

$$\int_A f_n(x) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_A f(x) d\mu.$$

Demonstração. Ver [1, Teorema 5.6, p. 44]. □

Lema 2.6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\frac{f(t)}{1+|t|}$ é integrável em $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| dt < \infty,$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\text{sen}(Nt)}{\pi t} dt \rightarrow f(0) \quad \text{quando } N \rightarrow +\infty$$

Demonstração. Primeiramente iremos mostra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\text{sen}(t)}{t} dt = \pi, \quad (2.11)$$

para isto, consideremos a função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto g(z) = z^{-1} e^{iz} \end{aligned}$$

e a região $\Re = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z \geq 0, |z| \geq r \text{ e } |z| \leq R\}$. Integraremos g ao longo do fronteira de $\Re$ que se divide nas seguintes curvas:

(1) Na curva

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto \gamma_1(\theta) := R e^{i\theta}, \end{aligned}$$

orientada no sentido anti-horário;

(2) Na curva

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [-R, -r] &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \gamma_2(z) := \text{Re} z, \end{aligned}$$

orientada da esquerda para a direita;

(3) Na curva

$$\begin{aligned}\gamma_3 : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \gamma_3(\theta) := re^{i\theta},\end{aligned}$$

orientada no sentido horário;

(4) Na curva

$$\begin{aligned}\gamma_4 : [r, R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow \gamma_4(z) := \text{Re}z,\end{aligned}$$

orientada da esquerda para a direita. Veja Figura 2.2

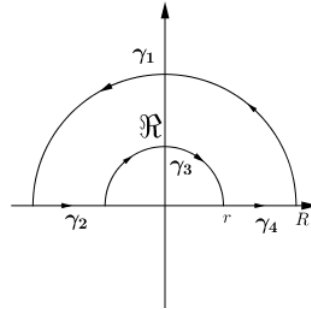


Figura 2.2: Fronteira da região $\mathfrak{R}$

Como g é analítica em todo seu domínio e $0 \notin \mathfrak{R}$, então pelo Teorema de Cauchy, temos $\int_{\mathfrak{R}} g(z)dz = 0$, ou seja,

$$\int_{\mathfrak{R}} g(z)dz = \int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz + \int_{\gamma_3} g(z)dz + \int_{\gamma_4} g(z)dz, \quad (2.12)$$

onde

$$\int_{\gamma_1} g(z)dz = \int_{\gamma_1} z^{-1}e^{iz}dz = \int_{\pi}^0 \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi}^0 e^{iRe^{i\theta}} d\theta,$$

$$\int_{\gamma_3} g(z)dz = \int_{\gamma_3} z^{-1}e^{iz}dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{ire^{i\theta}} d\theta,$$

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_{\gamma_2} z^{-1}e^{iz}dz = \int_{-R}^{-r} t^{-1}e^{it} dt$$

e

$$\int_{\gamma_4} g(z) dz = \int_{\gamma_4} z^{-1} e^{iz} dz = \int_R^r t^{-1} e^{it} dt.$$

Daí

$$\int_{\mathfrak{R}} g(z) dz = \int_{-R}^{-r} t^{-1} e^{it} dt + \int_R^r t^{-1} e^{it} dt + i \left(\int_{\pi}^0 e^{iRe^{i\theta}} d\theta + \int_0^{\pi} e^{ire^{i\theta}} d\theta \right) = 0. \quad (2.13)$$

Agora, passaremos ao limite quando $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$.

Primeiro trataremos da integral $\int_{\pi}^0 e^{iRe^{i\theta}} d\theta$, como

$$\left| \int_{\pi}^0 e^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} |e^{iR(\cos(\theta)+i\sin(\theta))}| d\theta \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi} e^{-2R\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

obtemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^0 e^{iRe^{i\theta}} d\theta = 0. \quad (2.14)$$

Vejamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} (e^{ire^{i\theta}} - 1) d\theta = 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} (e^{ire^{i\theta}} - 1) d\theta \right| &\leq \int_0^{\pi} |e^{ire^{i\theta}} - 1| d\theta \\ &= \int_0^{\pi} |\cos(re^{i\theta}) + i\sin(re^{i\theta}) - 1| d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi} 2|re^{i\theta}| d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} (e^{ire^{i\theta}} - 1) d\theta = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{ire^{i\theta}} d\theta = \pi. \quad (2.15)$$

Agora, percebamos que

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{-R}^{-r} t^{-1} e^{it} dt + \int_r^R t^{-1} e^{it} dt \right) = 2i \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \quad (2.16)$$

De fato, fazendo a mudança de variável $s = -t$ em $\int_{-R}^{-r} t^{-1} e^{it} dt$, obtemos

$$\int_{-R}^{-r} t^{-1} e^{it} dt = - \int_R^r (-s)^{-1} e^{-is} ds = - \int_r^R s^{-1} e^{-is} ds = - \int_r^R t^{-1} e^{-it} dt.$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} t^{-1} e^{it} dt + \int_r^R t^{-1} e^{it} dt &= - \int_r^R t^{-1} e^{-it} dt + \int_r^R t^{-1} e^{it} dt \\ &= - \int_r^R \frac{\cos(-t)}{t} dt - i \int_r^R \frac{\text{sen}(-t)}{t} dt + \int_r^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_r^R \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \\ &= - \int_r^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_r^R \frac{\text{sen}(t)}{t} dt + \int_r^R \frac{\cos(t)}{t} dt + i \int_r^R \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \\ &= 2i \int_r^R \frac{\text{sen}(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{-R}^{-r} t^{-1} e^{it} dt + \int_r^R t^{-1} e^{it} dt &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} 2i \int_r^R \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \\ &= 2i \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Agora, passando ao limite quando $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ em (2.13) e usando (2.14), (2.15) e (2.16), obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\text{sen}(t)}{t} dt = \pi,$$

ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(Nt)}{\pi t} dt = \lim_{N \rightarrow 0} \int_{-N}^N \frac{\text{sen}(t)}{\pi t} dt = 1.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\text{sen}(Nt)}{\pi t} dt - f(0) \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}(Nt)}{\pi t} dt &= \int_{-1}^1 (f(t) - f(0)) \frac{\text{sen}(Nt)}{\pi t} dt \\ &+ \int_{|t| \leq 0} f(t) \frac{\text{sen}(Nt)}{\pi t} dt. \end{aligned}$$

O Lema de Riemann-Lebesgue garante que as integrais do lado direito tendem a zero quando $N \rightarrow \infty$, completando a prova do lema. $\square$

Teorema 2.7. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores e lineares e limitados em X fortemente contínuo com $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$. Se $\gamma > \max\{0, \beta\}$ então, para cada $x \in D(A^2)$ e $t > 0$ temos*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = T(t)x. \quad (2.17)$$

Em particula, para $0 < \varepsilon < 1$ a convergência é uniformemente para qualquer $t \in \left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}\lambda = \gamma > \beta$, segue do Teorema 2.2 que $\lambda \in \rho(A)$. Assim

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1} &= \left(1 - \lambda^{-1}A + \lambda^{-1}A - \lambda^{-2}A^2 + \lambda^{-2}A^2\right)(\lambda - A)^{-1} \\ &= \left(\lambda^{-1}(\lambda - A) + \lambda^{-2}A(\lambda - A) + \lambda^{-2}A^2\right)(\lambda - A)^{-1} \\ &= \lambda^{-1} + \lambda^{-2}A + \lambda^{-2}(\lambda - A)^{-1}A^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} [Ax + (\lambda - A)^{-1}A^2x] d\lambda. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Queremos mostra que podemos passar ao limite quando $N \rightarrow +\infty$ em (2.19) e obtermos que este limite é finito, para isto trataremos de cada integral do lado direito separadamente, isto é,

- Dado $t \in (0, +\infty)$, temos

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda < +\infty.$$

De fato, considere a curva suave

$$\begin{aligned}\xi : [-N, N] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \xi(s) := \gamma - is.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Como

$$\begin{cases} \lambda \longrightarrow \gamma + in \implies \xi(s) \longrightarrow -N; \\ \lambda \longrightarrow \gamma - in \implies \xi(s) \longrightarrow N; \\ \xi'(s) = -i, \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda &= \frac{1}{2i\pi} \int_N^{-N} \frac{e^{t(\gamma-is)}}{\gamma-is} (-i) ds \\ &= \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-N}^N \frac{e^{-ist}}{\gamma-is} ds,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\left| \int_{-N}^N \frac{e^{-ist}}{\gamma-is} ds \right| &\leq \int_{-N}^N \frac{ds}{|\gamma-is|} \\ &= \int_{-N}^N \frac{ds}{\sqrt{\gamma^2 - s^2}} \\ &= \arcsen\left(\frac{\gamma}{s}\right) \Big|_{-N}^N + C \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} K < +\infty.\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} x d\lambda$$

é uniformemente limitada para $t \in (0, +\infty)$ e N suficientemente grande;

- Quanto a segunda integral, vejamos que pela demonstração do Teorema 2.2, obtemos que $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado e como

$$(\lambda - A)^{-1} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} A + \frac{1}{\lambda^2} (\lambda - A)^{-1} A^2,$$

resulta que para cada $x \in X$

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{\lambda^2} [A + (\lambda - A)^{-1} A^2] x \right\|_X &= \left\| \left[(\lambda - A)^{-1} - \frac{1}{\lambda} \right] x \right\|_X \\ &\leq \left\| (\lambda - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X + \frac{1}{|\lambda|} \|x\|_X \\ &\leq \left(C + \frac{1}{|\lambda|} \right) \|x\|_X,\end{aligned}$$

e sendo $\operatorname{Re}\lambda = \gamma$ com $\operatorname{Im}\lambda \in [-N, N]$, temos para cada $x \in X$ e N suficientemente grande que

$$\left\| \left[A + (\lambda - A)^{-1} A^2 \right] x \right\|_X \leq \left(C + \frac{1}{|\lambda|} \right) \|x\|_X < K < +\infty, \quad (2.21)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} [Ax + (\lambda - A)^{-1} A^2 x] d\lambda \right\|_X &\leq \left| \frac{1}{2i\pi} \right| \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \left| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} \right| \left\| Ax + (\lambda - A)^{-1} A^2 x \right\|_X d|\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda t}}{\lambda^2} K d|\lambda| \\ &= \frac{K e^{\gamma t}}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \Big|_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{M e^{\gamma t}}{2\pi}. \end{aligned}$$

Assim a integral

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} [Ax + (\lambda - A)^{-1} A^2 x] d\lambda$$

é uniformemente limitada para $t \in \left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \right]$ tal que $0 < \varepsilon < 1$ e N suficientemente grande.

Estas observações, implicam que o limite em (2.17) existe e é finito. Restando mostrar que o limite é $T(t)x$. Desde que $\operatorname{Re}\lambda = \gamma$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds \right) x d\lambda \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda(t-s)} d\lambda \right\} T(s) ds \\ &= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{iN(t-s)} - e^{-iN(t-s)}}{2i\pi(t-s)} e^{\gamma(t-s)} \right\} T(s) ds, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda &= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{iN(t-s)} - e^{-iN(t-s)}}{2i\pi(t-s)} e^{\gamma(t-s)} \right\} T(s) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(N(t-s))}{\pi(t-s)} e^{\gamma(t-s)} T(s) ds \\ &= \int_{-t}^\infty \frac{\operatorname{sen}(N\tau)}{\pi\tau} e^{\gamma\tau} T(t+\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dado $x^* \in X^*$ e $t > 0$. Considere a função auxiliar

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tau &\longmapsto f(\tau) = \begin{cases} \langle x^*, T(t + \tau)e^{-\gamma\tau}x \rangle, & \text{se } \tau \geq -t; \\ 0, & \text{se } \tau < -t. \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que:

(i) Se $\tau \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{|f(\tau)|}{1 + |\tau|} = \frac{|\langle x^*, T(t + \tau)e^{-\gamma\tau}x \rangle|}{1 + |\tau|} \leq C \frac{e^{-\gamma|\tau|}e^{\beta|\tau|}}{1 + |\tau|} = Ce^{(\beta - \gamma)|\tau|},$$

onde C é uma constante, conseqüentemente $\frac{f(\tau)}{1 + |\tau|}$ é integrável.

(ii) Por $T(t + \tau)e^{-\gamma\tau}$ ser analítica em $\tau = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} T(t + \tau)e^{-\gamma\tau} &= AT(t + \tau)e^{-\gamma\tau} \Big|_{\tau=0} - \gamma T(t + \tau)e^{-\gamma\tau} \Big|_{\tau=0} \\ &= AT(t) - T(t)\gamma = T(t)(A - \gamma), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{df}{d\tau} \Big|_{\tau=0}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\tau) - f(0)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle x^*, T(t + \tau)e^{-\gamma\tau}x \rangle - \langle x^*, T(t)x \rangle}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\langle x^*, \frac{T(t + \tau)e^{-\gamma\tau} - T(t)}{\tau} x \right\rangle \\ &= \left\langle x^*, \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{T(t + \tau)e^{-\gamma\tau} - T(t)}{\tau} x \right\rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \left\langle x^*, \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{T(t + \tau)e^{-\gamma\tau} - T(t)}{\tau} x \right\rangle \\ &= \left\langle x^*, \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} T(t + \tau)e^{-\gamma\tau} x \right\rangle \\ &= \langle x^*, T(t)(A - \gamma)x \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, f é analítica em $\tau = 0$ com $f'(0) = \langle x^*, T(t)(A - \gamma)x \rangle$.

Dos itens (i) e (ii) segue que f satisfaz o Lema 2.6, assim para cada $x^* \in X^*$,

obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle x^*, \int_{-t}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(N\tau)}{\pi\tau} e^{\gamma\tau} T(t+\tau) d\tau \right\rangle &= \left\langle x^*, \int_{-t}^{+\infty} f(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{N\tau}{\pi\tau}\right) d\tau \right\rangle \\ &= \left\langle x^*, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \operatorname{sen}\left(\frac{N\tau}{\pi\tau}\right) d\tau \right\rangle \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(0) = \langle x^*, T(t)x \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle x^*, \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(0) = \langle x^*, T(t)x \rangle,$$

para cada $x^* \in X^*$. Portanto, pelo Teorema de Hahn-Banach

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = T(t)x.$$

□

Capítulo 3

Operadores setoriais e analíticos

Nesta capítulo abordaremos a teoria de operadores setoriais e analíticos em espaços de Banach X sobre o corpo $\mathbb{C}$, as nossas referências bibliográficas deste capítulo são as notas de aula de Alexandre Carvalho [4] e [5], o livro do Daniel Henry [7] e a dissertação de Fernanda Silva [11]. Por simplicidade, consideraremos X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$.

Sejam $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e o setor complexo

$$\Sigma_{\varphi,a} := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda - a)| < \varphi \text{ e } \lambda \neq a\},$$

vejamos a Figura 3.1.

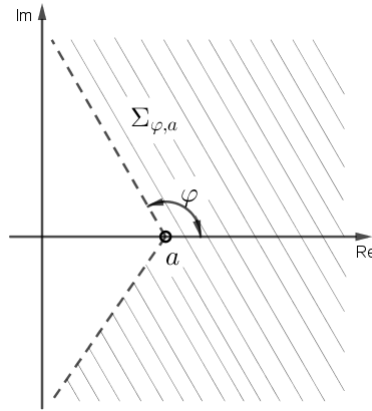


Figura 3.1: Setor complexo $\Sigma_{\varphi,a}$.

Definição 3.1. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, densamente definido e fechado. Diremos que o operador $-A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é setorial quando para algum $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e $M \geq 1$, obtemos $\Sigma_{\varphi,a} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para qualquer $\lambda \in \Sigma_{\varphi,a}$.

Para uma melhor interpretação da definição acima vejamos a Figura 3.2.

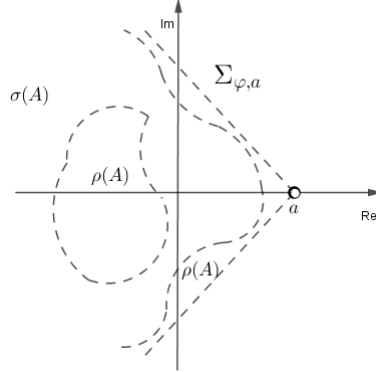


Figura 3.2: Resolvente do operador A em que $-A$ setorial.

Observação 3.1. O livro do Daniel Henry [7, p. 18] trás a seguinte definição para operadores setoriais “Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, fechado e densamente definido. O operador A é dito setorial quando para algum $a \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$, $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, o setor complexo

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq |\arg \lambda| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está contido no resolvente do operador A e além disso, para cada $\lambda \in S_{a,\phi}$,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}.$$

As duas maneiras de definir operadores setoriais são idênticas, apesar de parecerem diferentes, elas surgem de acordo com o modo que escrevemos a equação (1.1), por exemplo se considerarmos a equação

$$\frac{du}{dt} + Au = 0.$$

Desejaremos que A seja um operador setorial e que $-A$ seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Assim, a definição apresentada no livro do Daniel Henry é mais oportuna.

Agora, considerando a equação

$$\frac{du}{dt} = Au,$$

desejaremos que $-A$ seja um operador setorial e que A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo e neste caso é mais oportuno definirmos operadores setoriais de

acordo com a Definição 3.1. Em particular, quando desejarmos provar que A é um operador setorial iremos usar a definição tal como no livro do Daniel Henry.

Exemplo 3.1. Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Se A é um operador limitado, então A é um operador setorial. De fato, pelo Teorema 1.12, temos

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\} \subset \rho(A)$$

e

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n$$

para todo $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\}$. Em particular, para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \lambda < -2 \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, temos

$$|\lambda| \geq -\operatorname{Re} \lambda \geq 2 \|A\|_{\mathcal{L}(X)} > \|A\|_{\mathcal{L}(X)},$$

ou seja, o conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda < -2 \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\} \subset \rho(A).$$

Considerando $a = -2 \|A\|_X$ e $\phi > \frac{\pi}{6}$, obtemos que o setor complexo

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq |\arg \lambda| \leq \pi \text{ e } \lambda \neq a\}$$

está contido no conjunto resolvente de A , como para qualquer $\lambda \in S_{a,\phi}$, temos

$$\frac{\|A\|_X}{|\lambda|} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

segue que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n \right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\|A\|_X}{|\lambda|} \right)^n \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \\ &\leq \frac{M}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n \right\| \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

Mostrando que A é um operador setorial.

Exemplo 3.2. *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ e norma $\| \cdot \|_H : H \rightarrow \mathbb{R}$. Se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador linear auto-adjunto tal que para todo $x \in D(A)$*

$$\langle Ax, x \rangle \geq C \|x\|_H$$

onde $C > 0$ é uma constante, então A é um operador setorial. De fato, temos que A é fechado, pois A é auto-adjunto e $\sigma(A) \subset [C, +\infty)$ e consequentemente o setor complexo

$$S_{\frac{\pi}{4}, m} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} \leq |\arg(\lambda - m)| \leq \pi \text{ e } \lambda \neq m \right\}$$

está contido no conjunto resolvente de A .

Em particular, para cada $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned} \langle (A - m)x, y \rangle_H &= \langle Ax, y \rangle_H - \langle mx, y \rangle_H \\ &= \langle x, Ay \rangle_H - \langle x, my \rangle_H \\ &= \langle x, (A - m)y \rangle_H, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \langle (A - m)x, x \rangle_H &= \langle Ax, x \rangle_H - m \langle x, x \rangle_H \\ &\geq m \|x\|_H^2 - m \|x\|_H^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

e fixando $\lambda \in S_{\frac{\pi}{4}, m}$, considere $\lambda' = \lambda - m$. Temos dois casos a tratar:

- *O primeiro caso $\operatorname{Re} \lambda' < 0$, segue de (3.1) e (3.2) que*

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)x\|_H^2 &= \|\lambda' - (A - m)x\|_H^2 \\ &= |\lambda'|^2 \|x\|_H^2 - 2\operatorname{Re} \lambda' \langle (A - m)x, x \rangle + \|(A - m)x\|_H^2 \\ &\geq |\lambda'|^2 \|x\|_H^2, \end{aligned}$$

para todo $x \in D(A)$.

- *O segundo caso $0 \leq \operatorname{Re} \lambda' \leq |\operatorname{Im} \lambda'|$. Como*

$$\begin{aligned} 0 &= i\operatorname{Im} \lambda' \operatorname{Re} \lambda' \|x\|_H^2 - i\operatorname{Im} \lambda' \operatorname{Re} \lambda' \|x\|_H^2 \\ &\quad + i\operatorname{Im} \lambda' \langle (A - m)x, x \rangle - i\operatorname{Im} \lambda' \langle (A - m)x, x \rangle \\ &= \langle \lambda \operatorname{Im} \lambda' x, [\operatorname{Re} \lambda' - (A - m)]x \rangle + \langle \lambda [\operatorname{Re} \lambda' - (A - m)]x, \operatorname{Im} \lambda' x \rangle, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda - A)x\|_H^2 &= \|[\lambda' - (A - m)]x\|_H^2 \\
 &= |\operatorname{Im}\lambda'|^2 \|x\|_H^2 + \|[Re\lambda' - (A - m)]x\|_H^2 \\
 &\geq |\operatorname{Im}\lambda'|^2 \|x\|_H^2 \\
 &\geq \frac{|\lambda'|}{2} \|x\|_H^2.
 \end{aligned}$$

Assim, para cada $\lambda \in S_{\frac{\pi}{4}, m}$ e $x \in D(A)$

$$\|(\lambda - A)x\|_H \geq \frac{|\lambda - m|}{\sqrt{2}} \|x\|_H,$$

ou seja, para cada $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{4}, m}$ e $y \in H$, temos $x = (\lambda - A)^{-1}y \in D(A)$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}y\|_H \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - m|} \|y\|_H.$$

Daí

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - m|}$$

para todo $\lambda \in S_{\frac{\pi}{4}, m}$. Portanto A é um operador setorial.

No que segue, iremos explorar a definição de operadores setoriais dada na Definição 3.1. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear e gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuo $\{T(t); t \geq 0\}$ com $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$ para algum $M > 0$. Pelo Teorema 2.7, temos que para todo $t > 0$ e $x \in D(A^2)$

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda,$$

onde $\gamma > \max\{0, a, \beta\}$.

Isto significa que, pelo menos, ao longo de retas verticais que passam depois do ponto $M = \max\{0, a, \beta\}$, podemos “recuperar” o semigrupo. Em particular, quando $-A$ for um operador setorial, podemos melhorar este resultado.

Considere Γ_a a fronteira da região $\Sigma_{a, \phi} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - a| < r\}$, onde $\frac{\pi}{2} < \phi < \varphi$, r suficientemente pequeno e orientada no sentido crescente do eixo imaginário, vejamos a Figura 3.3. Em particular, Γ_a é uma curva porque é a união das curvas

$$\Gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) = \phi \text{ e } |\lambda - a| \geq r\},$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - a| = r \text{ e } |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\}$$

e

$$\Gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) = -\phi \text{ e } |\lambda - a| \leq r\}.$$

Nosso objetivo é deformar o contorno de integração no Teorema 2.7, no caso em que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuo tal que $-A$ é um operador setorial, para a curva Γ_0 , ou seja, obteremos mais informações do semigrupo de operadores lineares e limitados em X gerado pelo operador A .

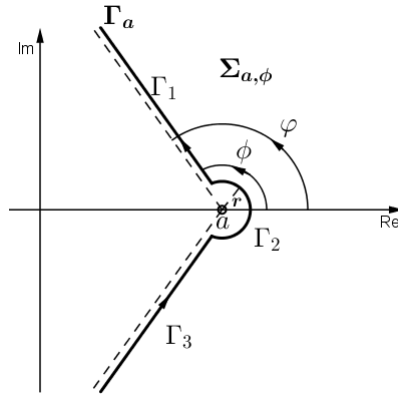


Figura 3.3: Curva Γ_a .

Lema 3.1. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear tal que $-A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador setorial com $a = 0$, isto é, $\Sigma_{\varphi,0} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\varphi,0}$$

para algum $M \geq 1$. Se A é o gerador de um semigrupo de operadores lineares limitados em X fortemente contínuo, então para todo $x \in D(A^2)$ e $t > 0$

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda, \quad (3.3)$$

onde

$$\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg \lambda = \pm \phi, |\lambda| > r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = r, |\arg \lambda| \leq \phi\},$$

$\phi \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$, $r > 0$ suficientemente pequeno e Γ_0 orientada no sentido crescente do eixo imaginário.

Demonstração. Primeiramente investigaremos a convergência da integral. Pelo Teorema 2.7, temos

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda,$$

para cada $x \in D(A^2)$, $t > 0$ e algum $\gamma > 0$. Já que o integrando é analítico para todo $\lambda \in \Sigma_{\varphi,0}$ por causa do Corolário 1.11. Basta provarmos que o contorno de integração pode ser deformado para a curva Γ_0 , vejamos a Figura 3.4.

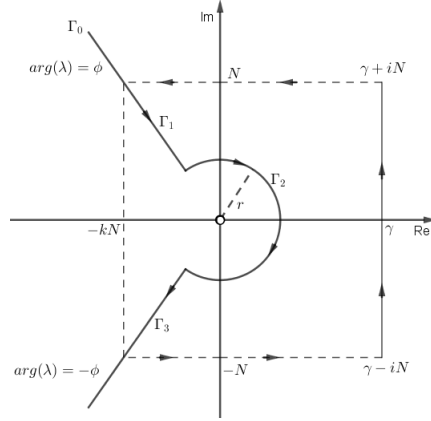


Figura 3.4: Curva Γ_0 .

Suponha $\lambda \in \Gamma_0$ com $|\text{Im}\lambda| = N$. Vejamos que valem as seguintes estimativas:

- Quando $\lambda \in \Gamma_1$ ou $\lambda \in \Gamma_3$, temos $-kN \leq \text{Re}\lambda \leq \gamma$ com $k = |\cotg\phi| > 0$;
- Se $\lambda \in \Gamma_2$, então $\text{Re}\lambda = r \cos(\theta)$, onde θ representa o ângulo do vetor λ .

Veja Figura 3.5.

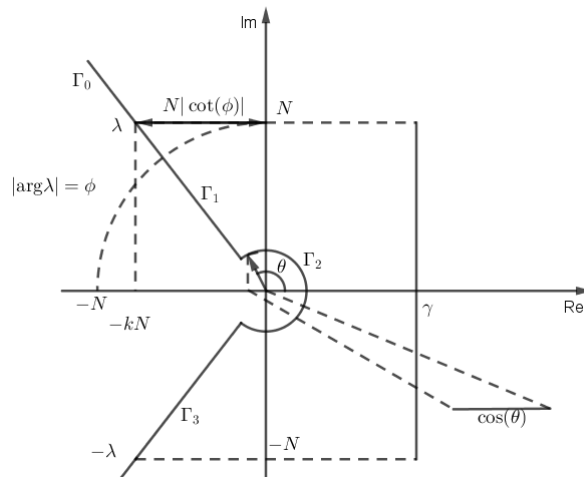


Figura 3.5: Análise da parte real dos pontos na curva Γ_0 .

Estas estimativas mostram que $\operatorname{Re}\lambda \leq \tau$, onde $\tau = \max\{r\cos(\theta), \gamma\}$, para todo $\lambda \in \Gamma_0$. Assim, fixado $\lambda \in \Gamma_0$ e $x \in D(A^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\|_X &\leq |e^{\lambda t}| \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X \\ &\leq \frac{|e^{t\operatorname{Re}\lambda}| |e^{it\operatorname{Im}\lambda}| M \|x\|_X}{|\lambda|} \\ &\leq \frac{Ce^{t\tau}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} \\ &\leq \frac{Ce^{t\tau}}{|\operatorname{Re}\lambda|} \\ &\leq \frac{Ce^{t\tau}}{\tau} \end{aligned}$$

onde $C = 2M \|x\|_X$, ou seja, para cada $x \in D(A^2)$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \right\|_X &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\|_X d|\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{Ce^{t\tau}}{\tau} d|\lambda| < \infty \end{aligned}$$

Isto mostra que a função vetorial de uma variável complexa

$$\begin{aligned} f : \rho(A) &\longrightarrow X \\ \lambda &\longmapsto f(\lambda) := e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x \end{aligned}$$

é integrável sobre a curva Γ_0 , consequentemente, a integral definida em (3.3) converge.

Agora, mostraremos que

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda. \quad (3.4)$$

Para isto considere a região $\Re$ delimitada por:

(a) A curva

$$\begin{aligned} \eta_1 : [-kN, \gamma] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \eta_1(s) := s - iN; \end{aligned}$$

(b) A curva

$$\begin{aligned} \eta_2 : [-kN, \gamma] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \eta_2(s) := -s + iN; \end{aligned}$$

(c) A curva

$$\begin{aligned}\eta_3 : [-kN, \gamma] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \eta_3(s) := \gamma + iN.\end{aligned}$$

(d) O caminho $\eta_4 = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i$ orientada no sentido decrescente do eixo imaginário.

Notemos que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\eta_i} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} x d\lambda = 0, \quad i = 1, 2.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$ escolhamos $M > 0$ tal que $-M \in [-kN, \gamma]$ e

$$e^{t\operatorname{Re}\lambda} < \frac{\varepsilon}{C},$$

para todo $\operatorname{Re}\lambda \in [-kN, -M]$, com isto obtemos

$$\begin{aligned}\left\| \int_{-kN}^{-M} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} x d\lambda \right\|_X &< \varepsilon \|x\|_X \int_{-kN}^{-M} \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda)^2} d\lambda \\ &= \varepsilon \|x\|_X \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{kN} \right),\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Assim

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-kN}^{-M} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} x d\lambda = 0. \quad (3.5)$$

Agora

$$\begin{aligned}\left\| \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{\gamma} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} x d\lambda \right\|_X &\leq \|x\|_X \overline{\lim_{N \rightarrow +\infty}} \int_{-M}^{\gamma} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} d\lambda \\ &\leq \|x\|_X Ce^{t\gamma} \overline{\lim_{N \rightarrow +\infty}} \int_{-M}^{\gamma} \frac{1}{N^2} d\lambda \\ &= \|x\|_X Ce^{t\gamma} \overline{\lim_{N \rightarrow +\infty}} \frac{1}{N^2} (\gamma + m) = 0.\end{aligned} \quad (3.6)$$

Utilizando as igualdades (3.5) e (3.6), obtemos

$$\int_{\eta_1} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} x d\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-kN}^{\gamma} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|} x d\lambda = 0. \quad (3.7)$$

De forma análoga, provamos que

$$\int_{\eta_2} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{\sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 + N^2}} d\lambda = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-kN}^{\gamma} \frac{Ce^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|} d\lambda = 0. \quad (3.8)$$

Feitas estas observações, retornemos a prova de (3.4). Pelo Teorema de Cauchy, a integral sobre a fronteira da região $\Re$ orientada no sentido anti-horário é identicamente nula, isto é,

$$\int_{\partial\Re} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = 0.$$

Já que $\partial\Re$ é a união das curvas η_1 , η_2 , η_3 e η_4 , segue que

$$\int_{\eta_1} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda + \int_{\eta_2} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda + \int_{\eta_3} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda + \int_{\eta_4} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda + \int_{\eta_2} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda &= 0, \\ \int_{\eta_3} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = T(t)x \end{aligned}$$

e

$$\int_{\eta_4} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda,$$

ou seja,

$$T(t)x = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iN}^{\gamma+iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda, \quad (3.9)$$

para todos $x \in D(A^2)$ e $t > 0$.

Em particular, esta última igualdade converge na norma do $\mathcal{L}(X)$ para todo $t > 0$, pois vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x\|_X}{\|x\|_X} &\leq \frac{2Me^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda| \|x\|_X} \|x\|_X \\ &\leq 2M \frac{e^{-t|\lambda| |\cos(\phi)|}}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\arg(\lambda)| = \phi$, ou equivalentemente,

$$\|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x\|_X}{\|x\|_X} \leq 2M \frac{e^{-t|\lambda|\cos(\phi)}}{|\lambda|}. \quad (3.10)$$

para todo $t > 0$ $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\arg(\lambda)| = \phi$.

Com esta estimativa e uma argumentação similar a feita em (3.9), obtemos

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda. \quad (3.11)$$

□

A demonstração do Lema 3.1 sugere que a integral independe do ângulo ϕ e do raio r e isto é o que assegura o próximo resultado.

Lema 3.2. *A integral definida em (3.3) independe de ϕ e do r , isto é,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} x d\lambda = T(t)x,$$

onde

$$\Gamma'_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| = \phi', |\lambda| > r'\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r', |\arg \lambda| \leq \phi'\},$$

$\phi > \phi' \in (\frac{\pi}{2}, \varphi)$, $r < r' > 0$ suficientemente pequeno e Γ'_0 orientada no sentido crescente do eixo imaginário.

Demonstração. Notemos que Γ'_0 é união das curvas

$$\Gamma'_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) = \phi'\},$$

$$\Gamma'_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - a| = r', |\arg(\lambda - a)| \leq \phi'\}$$

e

$$\Gamma'_3 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) = -\phi'\}.$$

Simplificando a notação considere $\theta = \arg(\lambda - a)$ e as curvas

$$\eta_k = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda = ke^{i\alpha} \text{ com } \phi \leq \alpha \leq \phi'\}$$

e

$$\eta'_k = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda = ke^{i\alpha} \text{ com } -\phi' \leq \alpha \leq -\phi\}.$$

Seja $\Re$ a região delimitada pelas curvas Γ_0 , Γ'_0 , η_k e η'_k cuja fronteira está orientada no

sentido anti-horário, ver a Figura 3.6.

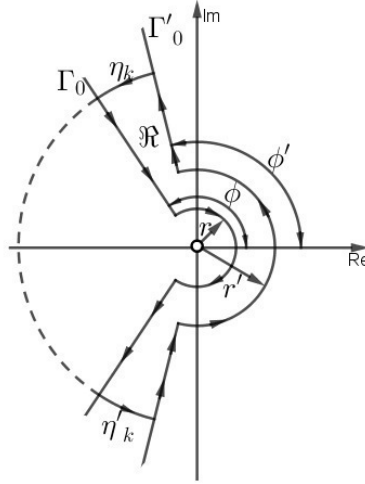


Figura 3.6: Região $\mathfrak{R}$ delimitada pelas curvas Γ_0 , Γ'_0 , η_k e η'_k .

Como o integrando $(e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x)$ é analítico em $\mathfrak{R}$ para todo $t > 0$, temos pelo teorema de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\mathfrak{R}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda = 0,$$

onde $+\partial\mathfrak{R}$ denota a fronteira da região $\mathfrak{R}$ orientada no sentido anti-horário. Em particular,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\mathfrak{R}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta'_k} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_k} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \end{aligned} \quad (3.12)$$

Queremos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta'_k} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_k} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}x d\lambda$$

tendem a zero quando $k \rightarrow +\infty$. Para isto consideremos $f(\lambda) = e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}$ e a mudança de variável

$$\begin{cases} x = k \cos(\theta) = \xi(k) \Rightarrow \xi'(k) = \cos(\theta); \\ y = k \sin(\theta) = \psi(k) \Rightarrow \psi'(k) = \sin(\theta). \end{cases}$$

Daí

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta'_k} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \int_{\phi'}^{\phi} \|e^{tke^{i\theta}} (ke^{i\theta} - A)^{-1} e^{i\theta} x\| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\phi'}^{\phi} |e^{tke^{i\theta}}| \frac{M}{|ke^{i\theta}|} |e^{i\theta}| \|x\| d\theta \\ &\leq \frac{M}{2|k|\pi} \int_{\phi'}^{\phi} e^{tk\cos\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Perceba que $\cos(\theta) < -C$, porque $\phi \leq \theta \leq \phi'$ e consequentemente

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta'_k} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\| &\leq \frac{M}{2|k|\pi} \int_{\phi'}^{\phi} e^{-tkC} d\theta \\ &\quad \frac{M(\phi - \phi')}{2|k|\pi} e^{-tkC} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostramos que

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_k} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Assim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda$$

e o resultado segue revertendo a orientação da curva Γ'_0 . $\square$

O exemplo a seguir será de utilidade para nossos estudos. Em particular, calculamos a integral de linha sobre a curva Γ_0 de uma função complexa.

Exemplo 3.3. *Considere a função de uma variável complexa*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto f(\lambda) := \lambda^{-1} e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \lambda^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = 1.$$

De fato, considere o círculo fechado $C_{r'}$ de raio r' com $0 < r' < r$ e a curva fechada simples $\Upsilon = \Lambda_{\hat{r}} \cup \Gamma_0$, onde $\Lambda_{\hat{r}} := \{\xi \in \mathbb{C}; \xi = \hat{r}e^{i\theta} \text{ e } -\phi \leq \arg \xi \leq \phi\}$, veja a Figura 3.7. Como o vetor identicamente nulo não pertence ao círculo fechado e nem a curva Υ , então a função f é integrável sobre $C_{r'}$ e Υ .

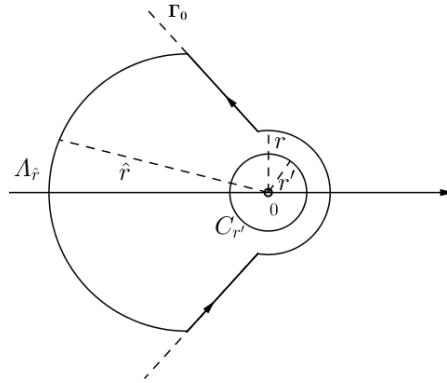


Figura 3.7: Curvas $\Upsilon = \Lambda_{\hat{r}} \cup \Gamma_0$.

O Teorema de Cauchy garante que

$$\int_{\Upsilon} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = \int_{C_{r'}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0} d\lambda,$$

e utilizando a fórmula da integral de Cauchy, obtemos

$$\int_{C_{r'}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0} d\lambda = 2\pi i e^{0t} = 2\pi i.$$

Assim

$$\int_{\Upsilon} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i,$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda_{\hat{r}}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda \right\|_X &= \left\| \int_{-\phi}^{\phi} \frac{e^{t\hat{r}e^{i\theta}}}{\hat{r}e^{i\theta}} i\hat{r}e^{i\theta} d\theta \right\|_X \\ &\leq \int_{-\phi}^{\phi} |e^{t\hat{r}e^{i\theta}}| d\theta \\ &\leq \int_{-\phi}^{\phi} e^{t\hat{r}\cos\theta} d\theta \\ &= 2\phi e^{-\hat{r}tk} \xrightarrow{\hat{r} \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{\hat{r} \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_{\hat{r}}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 0.$$

Daí

$$\int_{\Gamma_0} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i,$$

isto é,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \lambda^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = 1.$$

Teorema 3.3. *Suponha que $-A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ seja um operador setorial, isto é, o operador A é fechado densamente definido e existem $a \in \mathbb{R}$, M e $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tal que o setor complexo $\Sigma_{\varphi, a} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{\varphi, a}$. Então A é o gerador de um semigrupo de operadores lineares e limitados fortemente contínuo em X . Além disso:

(i)

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (3.13)$$

onde Γ_a é a fronteira da região $\Sigma_{a, \phi} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| < r\}$, com $\frac{\pi}{2} < \phi < \varphi$ e r suficientemente pequeno, orientada no sentido crescente do eixo imaginário, ver Figura 3.8;

(ii) A função de uma variável real

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\longmapsto f(t) := T(t) \end{aligned}$$

tem um prolongamento analítico no setor complexo $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \phi - \frac{\pi}{2}\}$ ou a complexificação correspondente de X , caso seja um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$;

(iii) Existe $K > 0$ tal que:

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{e^{at} K}{t},$$

para todo $t > 0$;

(iv) Para cada $t > 0$ o operador linear

$$\frac{d}{dt} T(t) = AT(t)$$

é limitado.

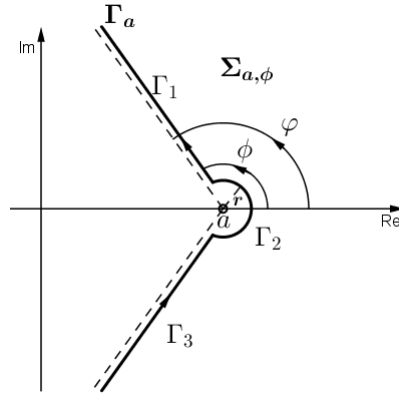


Figura 3.8: Curva Γ_a .

Demonstração. Definamos

$$T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, & t > 0; \\ I_X, & t = 0. \end{cases}$$

Considere $t > 0$ e a mudança de variável $\mu = \lambda - a$, isto é, $d\lambda = d\mu$ e $\Gamma_a = \Gamma_0$. Daí

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{(\mu+a)t} (\mu - (A - a))^{-1} d\mu,$$

ou seja,

$$e^{-at} T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu t} (\mu - (A - a))^{-1} d\mu.$$

Como o operador $\mu - (A - a)$ é setorial porque o setor complexo $\Sigma_{\varphi,0} \subset \rho(A - a)$, ver Figura 3.9, e para todo $\mu \in \Sigma_{\varphi,0}$, temos

$$\|(\mu - (A - a))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|} = \frac{M}{|(\mu + a) - a|} = \frac{M}{|\mu|}.$$

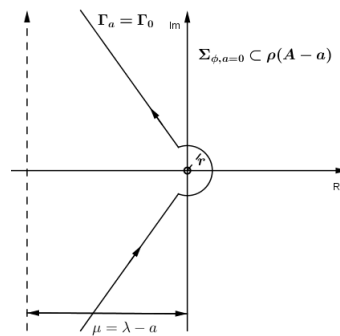


Figura 3.9: Mudança de variável $\mu = \lambda - a$

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, $a = 0$, isto é,

$$T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, & t > 0; \\ I_X, & t = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Por conveniência mostraremos, primeiramente, os itens (iii) e (iv).

Prova (iii): Considere as funções de uma variável real

$$\begin{aligned} g : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} & e & & h : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} & & & t &\longmapsto t \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}. \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $\mu = \lambda t$ e $t > 0$ em 3.14, obtemos

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\mu}} e^{\frac{\mu}{t} t} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t}, \end{aligned}$$

onde a mudança do contorno de integração para Γ_0 é justificada pelo fato do integrando ser analítico.

Notemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left\| e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{M}{\left|\frac{\mu}{t}\right|} \frac{|d\mu|}{t} \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{t}{|\mu|} \frac{|d\mu|}{t} \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$g(t) = \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|}.$$

Estimaremos esta última integral, para isto dividiremos o contorno de integração nas curvas $\Gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) = \phi\}$, $\Gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - a| = r, |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\}$ e $\Gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) = -\phi\}$ conforme a Figura 3.10.

Assim

$$\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|} = \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|} + \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_2} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|} + \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_3} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|}.$$

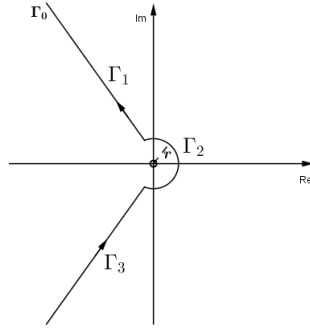


Figura 3.10: Curvas Γ_1 , Γ_2 e Γ_3

Note que cada integral do lado direito da igualdade acima é finita. De fato, definamos

$$f(\mu) = \frac{e^{\operatorname{Re}\mu}}{|\mu|},$$

e trataremos de cada integral separadamente:

- Primeiro veremos a integral $\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re}\mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|}$. Para isto consideremos $\mu = x + yi \in \Gamma_1$ com $\arg\mu = \phi$ e

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\phi) = \varphi(\rho) \Rightarrow \varphi'(\rho) = \cos(\phi); \\ y = \rho \sin(\phi) = \psi(\rho) \Rightarrow \psi'(\rho) = \sin(\phi), \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\operatorname{Re}\mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|} &= \frac{M}{2\pi} \int_r^{+\infty} f(\varphi(\rho) + i\psi(\rho)) [\varphi'(\rho) + i\psi'(\rho)] d\rho \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_r^{+\infty} e^{\rho \cos(\eta)} \frac{d\rho}{\rho} < \infty; \end{aligned}$$

De modo análogo mostramos que

$$\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_3} e^{\operatorname{Re}\mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|} < \infty;$$

- Para a integral $\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_2} e^{\operatorname{Re}\mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|}$. Consideremos $\mu = x + iy \in \Gamma_2$ e

$$\begin{cases} x = r \cos(\delta) = \varphi(\delta) \Rightarrow \varphi'(\delta) = -r \sin(\delta); \\ y = r \sin(\delta) = \psi(\delta) \Rightarrow \psi'(\delta) = r \cos(\delta). \end{cases}$$

Assim

$$\frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_2} e^{\operatorname{Re} \mu} \frac{|d\mu|}{|\mu|} = \frac{M}{2\pi} \int_{-r}^r e^{r \cos(\delta)} r \frac{d\delta}{r} < \infty.$$

Portanto g é uniformemente limitada para qualquer $t \in (0, +\infty)$.

Como

$$\begin{aligned} A(\lambda - A)^{-1} &= (A - I_X \lambda + I_X \lambda)(\lambda - A)^{-1} \\ &= -(\lambda - A) + \lambda)(\lambda - A)^{-1} \\ &= -I_X + \lambda(\lambda - A)^{-1}, \end{aligned}$$

A é um operador fechado e $T(t)$ é definido como o limite de soma de Riemann, para todo $t > 0$, então

$$AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall x \in D(A),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} AT(t) &= A \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} A (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} [-I + \lambda(\lambda - A)^{-1}] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Vejamos que o primeiro termo, do lado direito, da ultima igualdade é zero e o segundo termo é limitado, porque considerando $t\mu = \lambda$ e trocando o contorno de integração por Γ_0 ,¹ encontramos

$$\begin{aligned} t \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A \right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{t}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \left\| e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \frac{|d\mu|}{t} \\ &\leq \frac{t}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |e^{\mu}| \left| \frac{\mu}{t} \right| \left\| \left(\frac{\mu}{t} - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \frac{|d\mu|}{t} \\ &\leq \frac{t}{2\pi t} \int_{\Gamma_0} |e^{\mu}| \frac{|\mu|}{t} \frac{M}{|\mu|/t} |d\mu| \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma_0} e^{\operatorname{Re} \mu} |d\mu| = K e^{at} < \infty, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$h(t) = t \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} = t \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu} \frac{\mu}{t} \left(\frac{\mu}{t} - A \right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$$

¹Usamos o fato de que o integrando é analítico

completando a prova de (iii).

prova (iv): Como integral em (3.13) converge uniformemente e o integrando é analítico, temos

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda (\lambda - A)^{-1} d\lambda = AT(t).$$

Agora, mostraremos que a família de operadores $T(t)$ definidas em (3.14) é um semigrupo de operadores lineares e limitados em espaços de Banach fortemente contínuo e que A é o seu gerador infinitesimal, para isto consideremos a função auxiliar

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto h(s) := T(t-s)T(s)x, \end{aligned}$$

onde $x \in X$. Notemos que

$$\frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds} T(t-s)T(s)x = -AT(t-s)T(s)x + T(t-s)AT(s)x = 0,$$

ou seja, h é constante, consequentemente $T(t-s)T(s)x = T(t)x$, pois $h(0) = T(t)x$.

Sendo assim, a família $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares e limitados em X . Em particular, dado $x \in X$ e $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} T(t)x &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right) x \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} [\lambda^{-1} + \lambda^{-1} A (\lambda - A)^{-1}] x d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \lambda^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right) x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda^{-1} A (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Daí, pelo Exemplo 3.3, obtemos

$$T(t)x = x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda^{-1} A (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

e como

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda^{-1} A (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_X &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |e^{\lambda t} \lambda^{-1}| \|Ax\|_X \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} d|\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |e^{\lambda t} \lambda^{-1}| \|Ax\|_X \frac{M}{|\lambda|} d|\lambda| \\ &\leq \frac{M \|Ax\|_X}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |e^{\operatorname{Re} \lambda t}| d|\lambda|, \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned}\|T(t)x - x\|_X &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t} \lambda^{-1} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_X \\ &\leq \frac{M \|Ax\|_X}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |e^{\operatorname{Re} \lambda t}| |d\lambda| \\ &= \frac{Mt \|Ax\|_X}{2\pi} \int_{\Gamma_0} |e^\mu| |d\mu| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0,\end{aligned}$$

ou seja, $T(t)$ é um semigrupo de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuo.

Sendo

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x,$$

para cada $x \in X$, segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_0^t AT(s)ds = T(t)x - x.$$

Assim

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t AT(s)ds}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

para cada $x \in X$, implicando que A é o gerador infinitesimal do semigrupo de operadores lineares e limitados em X , $\{T(t); t \geq 0\}$. o Lema 3.1 completa a prova do item (i).

Prova de (ii): Notemos que

$$T^{(n)}(t) = A^n T\left(\frac{nt}{n}\right) = \left[AT\left(\frac{1}{t}\right)\right]^n = \left[T'\left(\frac{1}{t}\right)\right]^n.$$

Com isto, pelos itens (iii), (iv) e a desigualdade $\frac{K^n}{n!} \leq e^n$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \|T^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \frac{1}{n!} \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \\ &\leq \frac{1}{n!} \left(\frac{e^{at}K}{t}\right)^n \\ &\leq \frac{K^n e^{nat}}{n! t^n} \leq \frac{e^{n+nat}}{t^n} = e^c t^{-n},\end{aligned}\tag{3.15}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$.

Agora, usando a fórmula de Taylor com resto integrável, obtemos

$$T(t+h)x = \sum_{j=0}^n (j!)^{-1} T^{(j)}(t)x + \left[\int_0^1 \frac{(1-s)^j}{j!} T^{j+1}(t+sh)x ds \right] h^{j+1},\tag{3.16}$$

para $0 < h < t$. Iremos estimar a integral do lado direito da igualdade acima, para simplificar a notação, considere

$$R_j(t+h) = h^{j+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^j}{j!} T^{j+1}(t+sh) x ds.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left\| h^{j+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^j}{j!} T^{j+1}(t+sh) x ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{|h|^{j+1}}{j!} \int_0^1 |1-s|^j \|T^{j+1}(t+sh)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X ds \\ &\leq \|x\|_X \frac{|h|^{j+1}}{j!} \int_0^1 |1-s|^j \|T^{j+1}(t+sh)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \end{aligned}$$

Suponhamos que

$$\frac{|h|^{j+1}}{j!} \leq \frac{(kt)^{j+1}}{j! e^{c(j+1)}},$$

para algum $k \in (0, 1)$. Daí

$$\|x\|_X \frac{|h|^{j+1}}{j!} \int_0^1 |1-s|^j \|T^{j+1}(t+sh)\|_{\mathcal{L}(X)} ds \leq \frac{\|x\|_X (kt)^{j+1}}{j! e^{c(j+1)}} \int_0^1 (1-s)^j \frac{e^{(j+1)c}}{t+sh} (j+1)! ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|R_j(t+h)\|_X &\leq \frac{\|x\|_X (kt)^{j+1} (j+1)!}{j! e^{c(j+1)}} \int_0^1 (1-s)^j \frac{e^{(j+1)c}}{t+sh} ds \\ &= \|x\|_X k^{j+1} (j+1) \int_0^1 \left(\frac{(1-s)}{1+\frac{sh}{t}} \right)^j \left(\frac{1}{1+\frac{sh}{t}} \right) ds. \end{aligned}$$

Em particular

$$\left| 1 + \frac{sh}{t} \right| \geq 1 - s \frac{|h|}{t} > 1 - s \frac{k}{e^c} > 1 - s,$$

com isto

$$\left| \frac{(1-s)}{1+\frac{sh}{t}} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{1+\frac{sh}{t}} \right| \leq \frac{1}{D},$$

e consequentemente

$$\|R_j(t+h)\|_X \leq \|x\|_X k^{j+1} (j+1) \int_0^1 \frac{1}{D} ds = \|x\|_X k^{j+1} (j+1) \frac{1}{D}.$$

Passando ao limite quando j tende à $+\infty$, obtemos

$$\|R_j(t+h)\|_X \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

Agora, vejamos que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\left\| \frac{T^{(n)}(t)}{n!} \right\| |z - t|^n \leq \frac{e^{nc}}{t^n} |z - t|^n.$$

Sendo assim, a série

$$T_t(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!} |z - t|^n$$

é uniformemente limitada para $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z - t| \leq \frac{kt}{e^c},$$

com algum $k \in (0, 1)$, ou seja, a família $T_t(z)$ está bem definida no setor complexo

$$\Upsilon := \left\{ z \in \mathbb{C}; |z - t| \leq \frac{kt}{e^c} \text{ para algum } k \in (0, 1) \right\}.$$

Como o setor complexo $\{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| \leq \phi - \frac{\pi}{2}\}$ está contido em Υ e para $z = t$, temos

$$T_t(t) = T(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!} |t - t|^n = T(t),$$

concluimos a prova do item (ii). □

Definição 3.2. *Um semigrupo de operadores lineares e limitados em X fortemente contínuo que satisfaz os item (ii), (iii) e (iv) do Teorema 3.3 é chamado de semigrupo analítico.*

Assim, fica claro que quando A é um operador linear densamente definido e $-A$ é setorial, obtemos que $-A$ gera um semigrupo analítico.

Retornando, novamente, ao problema (1.1) com $u_0 \in X \setminus D(A)$, temos que, quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(\{e^{-At}; t \geq 0\})$, então a função vetorial de uma variável real

$$\begin{aligned} u : [0, +\infty) &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto u(t) := e^{-At} u_0 \end{aligned}$$

é uma solução para o problema (1.1).

Conclusão, quando nos deparamos com problemas de valor inicial e de fronteira associados a equações diferenciais parciais autônomas de evolução lineares que podem, eventualmente, serem “traduzidos” em problemas de valor inicial associados a EDO’s

do tipo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \text{ se } t > 0; \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

nos quais $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear cujo domínio é um subespaço vetorial de um espaço de Banach X , sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ sendo um corpo igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $u_0 \in X$, devemos inicialmente verificar que A é um operador linear, fechado e densamente definido, caso contrário o Teorema 2.2 e o Teorema 3.3, vistos anteriormente, não se aplicam. Agora, caso A seja um operador linear, fechado e densamente definido o problema (3.17) tem solução quando A for o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e $u_0 \in X$, ou quando A for o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo com $u_0 \in D(A)$.

Capítulo 4

Potências fracionárias

Neste capítulo iremos abordar a teoria de potências fracionárias para operadores lineares fechados em espaços de Banach, em particular nos dedicaremos a potência fracionária de operadores lineares A tais que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. As nossas referências bibliográficas para este capítulo são o artigo de Bezerra e *et al.* [2], as notas de aula de Alexandre Carvalho [4], o livro de Jonh Conway [6] e a dissertação de Marcelo Nascimento [9].

Antes de prosseguirmos com o estudo da teoria de potências fracionárias apresentaremos o teorema de desenvolvimento em série de Laurent e o teorema dos resíduos. Denotaremos por $n(\gamma, a)$ o índice da curva fechada γ em a , isto é, $n(\gamma, a)$ representa o total de voltas que a curva descreve em torno do ponto a que não esta na curva fechada γ .

Teorema 4.1 (Desenvolvimento em Série de Laurent). *Seja $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica no anel $G := \{z \in \mathbb{C}; r < |z - z_0| < R \text{ com } R > r > 0\}$, onde $z_0 \in \mathbb{C}$. Para cada $z \in G$, temos*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde a convergência é uniforme e absoluta no interior do anel $\text{ann}(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2 \text{ com } R > r_1 > r_2 > r\}$ e também os coeficientes a_n são dados pela fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

com γ sendo o círculo $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \tilde{r} \text{ com } r < \tilde{r} < R\}$.

Demonstração. Ver [6, Teorema 1.11, p. 103]. □

Definição 4.1. *Sejam f uma função com singularidade isolada no ponto $z = a$ e*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

a série de Laurent de f no ponto a . Definimos o resíduo de f no ponto a como sendo o coeficiente a_{-1} que será denotado por $\text{Res}(f; a) = a_{-1}$.

Teorema 4.2 (Teorema dos Resíduos). *Sejam $G \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto conexo, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em G , exceto nos pontos isolados $a_1, \dots, a_n$. Se γ é uma curva fechada homotópica a 0 ($\gamma \sim 0$) com $\{\gamma\} \subset G$, $\{a_1, \dots, a_n\} \not\subset \{\gamma\}$ e para todo $z \in \mathbb{C} \setminus G$ $n(\gamma, z) = 0$, então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n n(\gamma, a_i) \text{Res}(f; a_i)$$

Demonstração. Ver [6, Teorema 2.2, p. 108]. □

Consideremos γ uma curva fechada simples e retificável em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, suponhamos que o índice de γ no ponto $a \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ seja 1, pelo Teorema dos Resíduos

$$a^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - a} d\lambda, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

em que $\lambda^\alpha = e^{\alpha \ln \lambda}$.

Sejam X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear e limitado. A definição de potência fracionária do operador A é construída em analogia a expressão (4.1).

Definição 4.2. *Sejam $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear e limitado tal que $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e γ uma curva fechada, retificável e simples em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que $n(\gamma, a) = 1$ para qualquer $a \in \sigma(A)$. Definimos as potências fracionárias do operador A por*

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \quad (4.2)$$

Proposição 4.3. *Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, temos $I_X^\alpha = I_X$.*

Demonstração. Como $\{1\} \subset \sigma(I_X)$, considere γ a fronteira da bola fechada $B[1, 1]$, orientada no sentido anti-horário, por 4.2, temos

$$I_X^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^\alpha (\lambda - I_X)^{-1} d\lambda$$

e pelo Teorema dos Resíduos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{\alpha} (\lambda - I_X)^{-1} d\lambda = \text{Res}(\lambda^{\alpha} (\lambda - I_X)^{-1}; 1).$$

Se $|\lambda| > 1$, então pelo Teorema 1.12, temos

$$(\lambda - I_X)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} I_X^n,$$

ou equivalentemente

$$\lambda^{\alpha} (\lambda - I_X)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)+\alpha} I_X^n. \quad (4.3)$$

Notemos que a série em (4.3) é a série de Desenvolvimento de Laurent da função $\lambda^{\alpha} (\lambda - I_X)^{-1}$. Assim

$$\text{Res}(\lambda^{\alpha} (\lambda - I_X)^{-1}; 1) = I_X^1 = I_X,$$

ou seja,

$$I_X^{\alpha} = I_X$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. □

Proposição 4.4. *O operador A^{α} é limitado para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Notemos que $\lambda \in \rho(A)$ para todo $\lambda \in \{\gamma\}$ e consequentemente $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Assim

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{\alpha} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\|_X &\leq \frac{\|x\|_X}{2\pi} \int_{\gamma} |\lambda|^{\alpha} \|(\lambda - A)^{-1}\|_X d|\lambda| \\ &\leq \frac{\|x\|_X}{2\pi} \int_{\gamma} |\lambda|^{\alpha} M d|\lambda|. \end{aligned}$$

Como $\int_{\gamma} |\lambda|^{\alpha} d|\lambda| < +\infty$ para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \{\gamma\}$, segue que

$$\begin{aligned} \|A^{\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{\alpha} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right\|_X}{\|x\|_X} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |\lambda|^{\alpha} M d|\lambda| < +\infty, \end{aligned}$$

ou seja, A^{α} é limitado para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. □

Proposição 4.5. *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vale que $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha} A^{\beta}$.*

Demonstração. Consideremos γ, γ' curvas fechadas, retificáveis e simples em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tal que γ' é externa a γ . Como

$$\begin{aligned} A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \mu^\beta (\mu - A)^{-1} d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'} \int_\gamma \lambda^\alpha \mu^\beta (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'} \int_\gamma \lambda^\alpha \mu^\beta \frac{(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\gamma'} \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} \frac{\mu^\beta}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu + \int_{\gamma'} \int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} \mu^\beta (\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu \right). \end{aligned}$$

e pelo Teorema dos Resíduos

$$\lambda^\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\mu^\beta}{\mu - \lambda} d\mu.$$

Assim

$$\begin{aligned} A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\gamma'} \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} \frac{\mu^\beta}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu + \int_{\gamma'} \int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} \mu^\beta (\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\lambda^\beta \int_\gamma \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda + \int_{\gamma'} \int_\gamma \mu^\beta (\mu - A)^{-1} \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \lambda^{\alpha+\beta} (\lambda - A)^{-1} d\lambda + \int_{\gamma'} \int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} \mu^\beta (\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu \right). \end{aligned}$$

Já que μ é um ponto da curva γ' que é externa a curva γ , segue que a função de uma variável complexa

$$\begin{aligned} f : \{\gamma\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto f(\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} \end{aligned}$$

está bem definida e é analítica para todo $\lambda \in \{\gamma\}$. Daí, pelo Teorema de Cauchy

$$\int_\gamma f(\lambda) d\lambda = \int_\gamma \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} d\lambda = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \lambda^{\alpha+\beta} (\lambda - A)^{-1} d\lambda + \int_{\gamma'} \int_\gamma \mu^\beta (\mu - A)^{-1} \frac{\lambda^\alpha}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^{\alpha+\beta} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= A^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.6. *Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, então potência A^α definida como em (4.2) coincide com a n -ésima iterada de A .*

Demonstração. Pelo Teorema dos Resíduos, temos

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda = \text{Res}(\lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1}; 0).$$

Suponhamos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$, neste caso o Teorema 1.12, garante que

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n.$$

Assim

$$\lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)+\alpha} A^n, \quad \forall |\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}. \quad (4.4)$$

Notemos que a série em (4.4) é a série de Desenvolvimento de Laurent da função $\lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1}$. Assim

$$\text{Res}(\lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1}; 0) = A^n.$$

Sendo assim

$$A^\alpha = \text{Res}(\lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1}; 0) = A^n,$$

ou seja, A^α coincide com a n -ésima iterada de A quando $\alpha \in \mathbb{Z}$. □

Agora, desejamos estender a Definição 4.2 para uma classe de operadores linear maior que a classe dos operadores lineares e limitados, para isto investigaremos a convergência da integral em (4.2). Considere o ângulo $0 < \phi < \pi$ e o setor complexo

$$\Sigma_\phi := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| < \phi\} \setminus B(0, r),$$

onde $r > 0$, veja Figura 4.1.

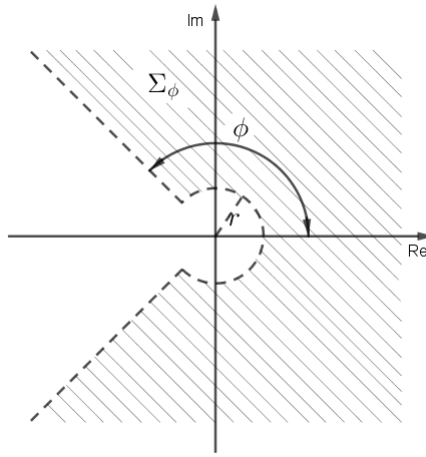


Figura 4.1: Setor complexo Σ_ϕ .

Como $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, escolhemos $0 < \phi < \pi$ e $R > r > 0$ tais que $\sigma(A) \subset (\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi) \cap B(0, R)$, para simplificar a notação denotaremos $\Sigma_\phi \cap B(0, R)$ por $\Sigma_{R,\phi}$. Em particular, a fronteira de $\Sigma_{R,\phi}$ pode ser decomposta nas curvas

$$\gamma_R := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = R \text{ e } |\arg(\lambda)| \leq \phi\},$$

orientada no sentido anti-horário, e

$$\Gamma_R := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(\lambda)| = \phi \text{ e } |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = r \text{ e } |\arg(\lambda)| \leq \phi\},$$

orientada no sentido decrescente do eixo imaginário, ver Figura 4.2. Basta investigarmos a convergência da integral sobre a fronteira de $\Sigma_{R,\phi}$, orientada no sentido anti-horário, pois pelo Teorema de Cauchy o contorno de integração em (4.2) pode ser “deformado” para $\partial\Sigma_{R,\phi}$.

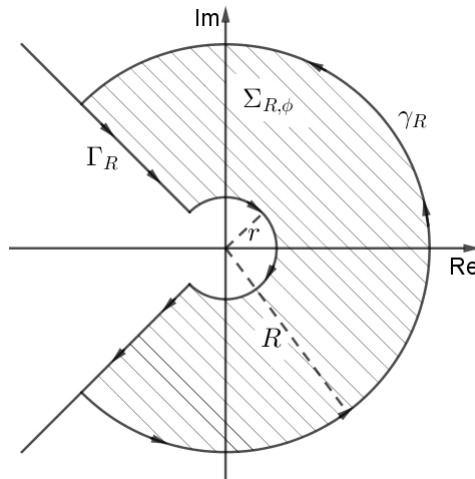


Figura 4.2: Setor complexo $\Sigma_{R,\phi}$.

Escolhamos $R > 2 \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ e vejamos que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = R$, vale

$$\begin{aligned}
 \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(I_X - \lambda^{-1}A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\
 &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} A^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^{-n} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \\
 &= \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}} < 2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Em particular, quando $\operatorname{Re}\alpha < 0$, temos

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \int_{-\phi}^{\phi} [(Re^{i\theta})^\alpha (Re^{i\theta} - A)^{-1} i Re^{i\theta}] d\theta \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
 &\leq \int_{-\phi}^{\phi} |R^\alpha| |e^{i\alpha\theta}| \|Re^{i\theta} (Re^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} d|\theta|.
 \end{aligned}$$

Já que $\operatorname{Re}\alpha < 0$, segue que $|R^\alpha| \leq R^{\operatorname{Re}\alpha}$ e $|e^{i\theta\operatorname{Re}\alpha}| \leq 1$. Daí, usando a estimativa espectral (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_{-\phi}^{\phi} |R^\alpha| |e^{i\alpha\theta}| \|Re^{i\theta} (Re^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} d|\theta| \\
 &\leq \int_{-\phi}^{\phi} R^{\operatorname{Re}\alpha} |e^{i\theta\operatorname{Re}\alpha}| |e^{-\theta\operatorname{Im}\alpha}| \|Re^{i\theta} (Re^{i\theta} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} d|\theta| \\
 &< \int_{-\phi}^{\phi} R^{\operatorname{Re}\alpha} e^{-\theta\operatorname{Im}\alpha} 2 d|\theta|.
 \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 \int_{-\phi}^{\phi} R^{\operatorname{Re}\alpha} e^{-\theta\operatorname{Im}\alpha} 2 d|\theta| &= -2R^{\operatorname{Re}\alpha} \frac{e^{-\theta\operatorname{Im}\alpha}}{\operatorname{Im}\alpha} \Big|_{-\phi}^{\phi} \\
 &= -2R^{\operatorname{Re}\alpha} \frac{e^{-\phi\operatorname{Im}\alpha} - e^{\phi\operatorname{Im}\alpha}}{\operatorname{Im}\alpha}.
 \end{aligned}$$

Assim

$$\left\| \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} < -2R^{\operatorname{Re}\alpha} \frac{e^{-\phi\operatorname{Im}\alpha} - e^{\phi\operatorname{Im}\alpha}}{\operatorname{Im}\alpha}, \tag{4.6}$$

e passando ao limite quando R tende a infinito, concluímos

$$\int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \longrightarrow 0,$$

para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \alpha < 0$ e $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$.

Notemos que a estimativa espectral em (4.5) e a desigualdade em (4.6), implicam na convergência da integral em (4.7), quando $\operatorname{Re} \alpha < 0$, e mais a convergência é uniforme para α em compactos. Com isto

$$\begin{aligned} A^\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Sigma_{R,\phi}} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\infty} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \end{aligned} \quad (4.7)$$

quando $\operatorname{Re} \alpha < 0$ e R tende ao infinito. Em particular $\Gamma_\infty := \Gamma$ é a união das curvas $\Gamma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda) = \phi \text{ e } |\lambda| \geq r\}$, $\Gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = r \text{ e } |\arg(\lambda)| \leq \phi\}$ e $\Gamma_3 := \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda) = -\phi \text{ e } |\lambda| \geq r\}$.

Estas observações mostram como definir a potência fracionária A^α para o caso em que $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear não necessariamente.

4.1 Operadores de tipo positivo

Nesta seção trataremos dos operadores lineares de tipo positivo em espaços de Banach X sobre um corpo $\mathbb{C}$. A principal referência desta seção é as notas de aulas de Alexandre Carvalho [4].

Notemos que o operador linear $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ é limitado no setor $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi$ se, e somente se, o operador linear $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ é limitado no setor $-\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi$ se, e somente se, $(1 + |\lambda|) \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado no setor $-\mathbb{C} \setminus \Sigma_\phi$.

Definição 4.3. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Diremos que o operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ densamente definido, fechado com $[0, +\infty) \subset \rho(-A)$ é dito de tipo positivo com constante M quando existir uma constante $M \geq 1$ tal que*

$$(1 + s) \| (s + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M,$$

para todo $s \geq 0$. Denotaremos esta classe de operadores por $\mathcal{P} := \mathcal{P}(X)$.

Teorema 4.7. *Sejam $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador de tipo positivo com constante M e o setor complexo*

$$\Sigma_M := \{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| \leq \theta_M\} + \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| \leq \frac{1}{2M} \right\}.$$

Se $\theta_M = \arcsen(\frac{1}{2M})$, então $\Sigma_M \subset \rho(-A)$ e

$$(1 + |\lambda|) \| (\lambda + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M + 1$$

para cada $\lambda \in \Sigma_M$.

Demonstração. Sejam $s \in [0, +\infty) \subset \rho(-A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\lambda - s| \leq \frac{1 + s}{2M}, \quad (4.8)$$

sendo

$$(1 + s) \| (s + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \leq 2M,$$

obtemos

$$\frac{1 + s}{2M} \leq \frac{1 + s}{(1 + s) \| (s + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)}},$$

ou seja,

$$|\lambda - s| \leq \frac{1}{\| (s + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Assim, pelo Teorema 1.9, $\lambda \in \rho(-A)$.

Já que

$$\lambda + A = (s + A)[I_X + (\lambda - s)(s + A)^{-1}],$$

segue que

$$\begin{aligned} \| (\lambda + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} &= \| (s + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \| [I_X + (\lambda - s)(s + A)^{-1}]^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \frac{M}{1 + s} [\| I_X \|_{\mathcal{L}(H)} + |\lambda - s| \| (s + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)}] \\ &\leq \frac{M}{1 + s} \left(1 + \frac{1 + s}{2M} \frac{M}{1 + s} \right) \\ &\leq \frac{2M}{1 + s}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{2M}{1 + s} &= \frac{2M}{1 + s} \frac{1 + s - s + |\lambda|}{1 + |\lambda|} \\ &\leq \frac{2M}{1 + |\lambda|} \frac{1 + s + |\lambda - s|}{1 + s} \\ &\leq \frac{2M}{1 + |\lambda|} \left(1 + \frac{1}{2M} \right) \\ &= \frac{2M + 1}{1 + |\lambda|}, \end{aligned}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo (4.8) e consequentemente

$$(1 + |\lambda|) \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M + 1.$$

Assim provamos que

$$\Sigma_M := \{z \in \mathbb{C}; |\arg(z)| \leq \theta_M\} + \left\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \frac{1}{2M}\right\} \subset \rho(-A)$$

e

$$(1 + |\lambda|) \|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M + 1,$$

para cada $\lambda \in \Sigma_M$, ver a Figura 4.3. □

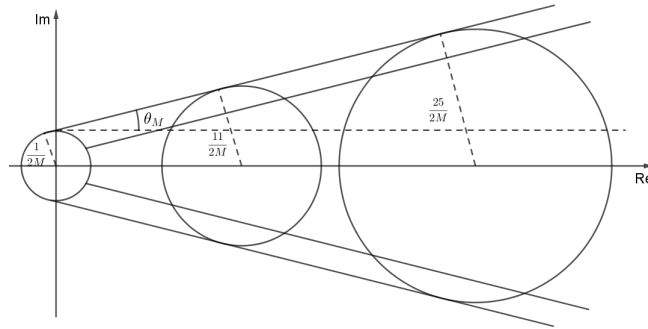


Figura 4.3: Setor complexo Σ_M .

Em particular, provamos no Teorema 2.2 que se o operador linear A é o gerador infinitesimal de semigrupo de operadores lineares e limitado em X , $\{T(t); t \geq 0\}$, fortemente contínuos tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, então $[0, +\infty) \subset \rho(A)$ e o operador A é fechado e densamente definido. Já no Teorema 4.7 mostramos que quando o operador $(1 + \lambda)(\lambda + A)^{-1}$ é limitado para todo $s \geq 0$, obtemos que o operador $(1 + |\lambda|)(\lambda + A)^{-1}$ é limitado no setor Σ_M . Com estas duas informações deduzimos que $A \in \mathcal{P}(A)$ se $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares e limitados em X , $\{T(t); t \geq 0\}$, fortemente contínuos tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$.

Assim, o problema abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A^\alpha u, & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.9)$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador de tipo positivo e $u_0 \in Y$ com Y sendo um subespaço denso de X , tem solução forte, visto que A^α é um operador setorial e consequentemente o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Definição 4.4. Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \alpha < 0$, definiremos

$$A^\alpha := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad (4.10)$$

onde Γ é qualquer curva suave por partes indo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$ com $\theta \in \left(0, \arcsen\left(\frac{1}{2M}\right)\right)$ e evitando-se $[0, +\infty)$. Em particular, denotando $-\Gamma := \{\lambda \in \mathbb{C}; -\lambda \in \Gamma\}$, temos

$$A^\alpha := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} \lambda^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

A definição acima está bem posta, isto é, a integral em (4.10) converge e independe da curva Γ . De fato, consideremos $r < \frac{1}{2M}$ e $\theta \in \left(0, \arcsen\left(\frac{1}{2M}\right)\right)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_r^{+\infty} (-se^{i\theta})^\alpha (se^{i\theta} + A)^{-1} e^{i\theta} ds \right. \\ &\quad + \int_{-\infty}^r (-se^{-i\theta})^\alpha (se^{-i\theta} + A)^{-1} e^{-i\theta} ds \\ &\quad \left. + \int_{2\pi-\theta}^{\theta} (re^{i\beta})^\alpha (re^{i\beta} + A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta \right). \end{aligned}$$

Iremos estimar a norma de cada integral do lado direito da igualdade acima separadamente, para isto percebamos que $|\lambda|^\alpha \leq c|\lambda|^{\operatorname{Re} \alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

- A primeira integral é finita, isto é,

$$\left\| \int_r^{+\infty} (-se^{i\theta})^\alpha (se^{i\theta} + A)^{-1} e^{i\theta} ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \quad (4.11)$$

Com efeito, como

$$\begin{aligned} &\left\| \int_r^{+\infty} (-se^{i\theta})^\alpha (se^{i\theta} + A)^{-1} e^{i\theta} ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \int_r^{+\infty} c | -se^{i\theta} |^{\operatorname{Re} \alpha} \| e^{i\theta} (se^{i\theta} + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} d|s| \\ &\leq c \int_r^{+\infty} s^{\operatorname{Re} \alpha - 1} \| se^{i\theta} (se^{i\theta} + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} d|s| \end{aligned}$$

e $\| se^{i\theta} (se^{i\theta} + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq (2M + 1)(1 + s)^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_r^{+\infty} (-se^{i\theta})^\alpha (se^{i\theta} + A)^{-1} e^{i\theta} ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & \leq c(2M + 1) \int_r^{+\infty} s^{\operatorname{Re}\alpha-1} \frac{1}{1+s} d|s| \\ & \leq c(2M + 1) \int_r^{+\infty} s^{\operatorname{Re}\alpha-2} d|s| < +\infty. \end{aligned}$$

- De modo análogo mostramos que a segunda integral é finita, ou seja,

$$\left\| \int_{-\infty}^r (-se^{-i\theta})^\alpha (se^{-i\theta} + A)^{-1} e^{-i\theta} ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \quad (4.12)$$

- A terceira integral é finita, isto é,

$$\left\| \int_{2\pi-\theta}^\theta (re^{i\beta})^\alpha (re^{i\beta} + A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta \right\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \quad (4.13)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{2\pi-\theta}^\theta (re^{i\beta})^\alpha (re^{i\beta} + A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & \leq \int_\theta^{2\pi-\theta} c|re^{i\beta}|^{\operatorname{Re}\alpha} \| re^{i\beta} (re^{i\beta} + A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H)} d|\beta| \\ & \leq c(2M + 1) \int_\theta^{2\pi-\theta} s^{\operatorname{Re}\alpha-1} \frac{1}{1+s} d|\beta| \\ & \leq 2c(2M + 1)(\pi - \theta) s^{\operatorname{Re}\alpha-1} < +\infty. \end{aligned}$$

Assim a potência A^α está bem definida em $\mathcal{L}(X)$ e a independência da curva Γ segue de forma semelhante ao Lema 3.2.

Lema 4.8. *Sejam $A \in \mathcal{P}(A)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com parte real estritamente negativa, temos $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$.*

Demonstração. Sejam Γ_1 e Γ_2 curvas suave por partes indo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$ com $\theta \in \left(0, \arcsen\left(\frac{1}{2M}\right)\right)$ e evitando-se $[0, +\infty)$, escolhidas de forma que Γ_1 esteja a

esquerda de Γ_2 . Por definição,

$$\begin{aligned}
 A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (-\mu)^\beta (\mu + A)^{-1} d\mu \\
 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha (-\mu)^\beta (\lambda + A)^{-1} (\mu + A)^{-1} d\lambda d\mu \\
 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha (-\mu)^\beta \frac{(\lambda + A)^{-1} - (\mu + A)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \\
 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} \frac{(-\mu)^\beta}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{(-\lambda)^\alpha}{\lambda - \mu} (-\mu)^\beta (\mu + A)^{-1} d\lambda d\mu \right),
 \end{aligned}$$

e pelo Teorema dos Resíduos

$$(-\lambda)^\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{(-\mu)^\beta}{\mu - \lambda} d\mu.$$

Notemos que para cada $\mu \in \Gamma_2$ a função de uma variável complexa

$$\begin{aligned}
 f : \{\Gamma_1\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 \lambda &\longmapsto f(\lambda) = \frac{(-\lambda)^\alpha}{\lambda - \mu}
 \end{aligned}$$

está bem definida e é analítica. Como Γ_1 é uma curva fechada, segue pelo Teorema de Cauchy que

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1} \frac{(-\lambda)^\alpha}{\lambda - \mu} d\lambda = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 A^\alpha A^\beta &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} \frac{(-\mu)^\beta}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(-\lambda)^\alpha}{\mu + \lambda} (-\mu)^\beta (\mu + A)^{-1} d\lambda d\mu \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^\beta (-\lambda)^\alpha (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (-\lambda)^{\alpha+\beta} (\lambda + A)^{-1} d\lambda \\
 &= A^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.9. *Se $A \in \mathcal{P}(X)$ então*

$$A^{-z} = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-z} (s + A)^{-1} ds, \quad (4.14)$$

onde $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Demonstração. Sejam $\theta \in \left(0, \arcsen\left(\frac{1}{2M}\right)\right)$, $r > 0$ e Γ uma curva suave por partes indo de $\infty e^{-i\theta}$ para $\infty e^{i\theta}$ evitando-se $[0, +\infty)$. Por definição,

$$\begin{aligned} A^{-z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} \lambda^{-z} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_r^{+\infty} (se^{i(\pi-\theta)})^{-z} (se^{i(\pi-\theta)} - A)^{-1} e^{i(\pi-\theta)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-r} (se^{-i(\theta-\pi)})^{-z} (se^{-i(\theta-\pi)} - A)^{-1} e^{-i(\theta-\pi)} ds \right) \\ &\quad + \int_{\theta-\pi}^{\pi-\theta} (re^{i\beta})^{-z} (re^{i\beta} - A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{-z \ln |s| - i(\pi-\theta)} (se^{i(\pi-\theta)} - A)^{-1} e^{i(\pi-\theta)} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} s^{-z} e^{i\pi z} (s - A)^{-1}.$$

Como

$$\| e^{-z \ln |s| - i(\pi-\theta)} (se^{i(\pi-\theta)} - A)^{-1} e^{i(\pi-\theta)} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-z \ln(s)} \frac{2M+1}{1+s},$$

obtemos pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_r^{+\infty} e^{-z(\ln |s| - i(\pi-\theta))} (se^{i(\pi-\theta)} - A)^{-1} e^{i(\pi-\theta)} ds \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \int_r^{+\infty} s^{-z} e^{i\pi z} (s - A)^{-1} ds.$$

De forma análoga mostramos que

$$\int_{-\infty}^{-r} (se^{-i(\theta-\pi)})^{-z} (se^{-i(\theta-\pi)} - A)^{-1} e^{-i(\theta-\pi)} ds \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-r} s^{-z} e^{-i\pi z} (s - A)^{-1} ds.$$

Agora, como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{\theta-\pi}^{\pi-\theta} (re^{i\beta})^{-z} (re^{i\beta} - A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\beta})^{-z} (re^{i\beta} - A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta$$

e

$$\| (re^{i\beta})^{-z} (re^{i\beta} - A)^{-1} ire^{i\beta} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq r^{\operatorname{Re}(-z)} e^{\beta \operatorname{Im}(-z)} \frac{2M+1}{1+r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

encontramos

$$\int_{\theta-\pi}^{\pi-\theta} (re^{i\beta})^{-z} (re^{i\beta} - A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} A^{-z} &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_r^{+\infty} (se^{i(\pi-\theta)})^{-z} (se^{i(\pi-\theta)} - A)^{-1} e^{i(\pi-\theta)} ds \right. \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-r} (se^{-i(\theta-\pi)})^{-z} (se^{-i(\theta-\pi)} - A)^{-1} e^{-i(\theta-\pi)} ds \Big) \\ &\quad + \int_{\theta-\pi}^{\pi-\theta} (re^{i\beta})^{-z} (re^{i\beta} - A)^{-1} ire^{i\beta} d\beta \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_r^{+\infty} s^{-z} e^{i\pi z} (s - A)^{-1} ds + \int_{-\infty}^{-r} s^{-z} e^{-i\pi z} (s - A)^{-1} ds \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$A^{-z} = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-z} (s + A)^{-1} ds.$$

□

Teorema 4.10. *Se $A \in \mathcal{P}(X)$ e $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z < 0$, então o operador A^z é injetor.*

Demonstração. Considere $x \in \ker(A^z)$, isto é, $A^z x = 0$, perceba que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq -\operatorname{Re} z < n + 1$ e consequentemente

$$A^{-z-(n+1-z)} x = A^{-n-1} x = 0,$$

pois

$$A^{-z-(n+1-z)} x = A^{-(n+1-z)-z} x = A^{-(n+1-z)} A^{-z} x = A^{-(n+1-z)} 0 = 0.$$

Pelo Teorema 4.7, temos $0 \in \rho(A)$. Daí o operador A^{-n-1} é injetor, implicando que $x = 0$ e $\ker(A^z) = \{0\}$, isto é, A^z é injetor. □

Em virtude do teorema anterior podemos definir as potências fracionárias do operador A por

$$A^z := (A^{-z})^{-1} : R(A^z) \subset X \longrightarrow X$$

.

Definição 4.5. *Sejam $A \in \mathcal{P}(X)$ e $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} z \geq 0$. O espaço de Banach $X^z := (D(A^z), \|A^z \cdot\|)$ é chamado espaço de potência fracionária associado ao operador A .*

4.2 Potência fracionária do operador de ondas

Nesta seção, iremos exibir o domínio das potências fracionárias do operador de ondas. As principais referências bibliográficas para a seção são as notas de aula de Alexandre Carvalho [4] e o artigo de Bezerra e *et al.* [2].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suficientemente limitado e $N \geq 3$. Consideremos $H = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $A = -\Delta$ é o operador negativo Laplaciano com condição homogênea de Dirichlet na fronteira. Denotando H^α por $D(A^\alpha)$ com a norma $\|A^\alpha(\cdot)\|_H$, para $\alpha \geq 0$, temos $H^0 = H = L^2(\Omega)$,

$$H^1 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

e $H^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$. Considere $Y^0 = H^{\frac{1}{2}} \times H$ e o operador de ondas amortecidas $A_{(a)} : D(A_{(0,a)}) \subset Y^0 \longrightarrow Y^0$ definido por

$$A_{(a)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & aI_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -v \\ Au + av \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(A_{(a)}) := D(A) \times H^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad a > 0.$$

Lema 4.11. *O operador linear $A_{(a)}$ é fechado para todo $a > 0$.*

Demonstração. Seja

$$\left(\begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A_{(a)})$$

tal que

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}$$

e

$$A_{(0,a)} \begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_n \\ A\phi_n + a\psi_n \end{bmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Queremos mostra que $\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(A_{(a)})$ e $A_{(a)} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

Em particular

$$\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \psi \quad \text{e} \quad -\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_H} u,$$

implicando $\psi = -u$. Ainda

$$A\phi_n + a\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \implies A\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v - a\psi,$$

e sendo A um operador fechado, obtemos $\phi \in D(A)$ e $A\phi = v - a\psi$, isto é, $v = A\phi + a\psi$ e consequentemente $\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \in D(A_{(0)})$ e $A_{(0)} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi \\ A\phi + a\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Mostrando que o operador linear $A_{(0)}$ é fechado para todo $a > 0$. $\square$

Lema 4.12. *Temos que $0 \in \rho(A_{(0)})$ e o operador $A_{(0)} : D(A_{(0)}) \subset Y^0 \longrightarrow Y^0$ definido por*

$$A_{(0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -v \\ Au \end{bmatrix},$$

tem inversa dada por

$$A_{(0)}^{-1} := \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -I_H & 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Notemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \in \ker(A_{(0)}) &\iff \begin{bmatrix} -v \\ Au + av \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff -v = 0 \text{ e } Au + av = 0 \\ &\iff v = 0 \text{ e } Au = 0. \end{aligned}$$

Já que $0 \in \rho(A)$, segue que $u = 0$.

Assim

$$\ker(A_{(0)}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

ou seja, o operador $A_{(0,a)}$ é injetor e consequentemente bijetor.

Agora, como

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -I_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1}v \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -I_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -I_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ Au \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

obtemos

$$A_{(0)}^{-1} := \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -I_H & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Lema 4.13. *O operador adjunto de $A_{(0)}$ é*

$$A_{(0)}^* := \begin{bmatrix} 0 & I_H \\ -A & 0 \end{bmatrix} = -A_{(0)}$$

Demonstração. Já que a “matriz dos cofatores” é

$$\begin{bmatrix} 0 & -A \\ I_H & 0 \end{bmatrix}$$

segue que a “matriz transposta” é

$$\begin{bmatrix} 0 & I_H \\ -A & 0 \end{bmatrix} = -A_{(0)},$$

ou seja,

$$A_{(0)}^* = -A_{(0)}$$

□

Notemos que o Lema 4.13 garante, ainda, que o operador $iA_{(0)}$ é auto-adjunto e consequentemente o operador $A_{(0)}$ é fechado densamente definido e $A_{(0)} = -A_{(0)}^*$, ou seja, para todo $x \in D(A_{(0)})$

$$\langle A_{(0)}x, x \rangle_{Y^0} = \langle x, A_{(0)}^*x \rangle_{Y^0} = -\overline{\langle A_{(0)}x, x \rangle_{Y^0}}$$

e $\operatorname{Re}(\langle A_{(0)}x, x \rangle_H) = 0$, implicando que $A_{(0)}$ e $A_{(0)}^* = -A_{(0)}$ são dissipativos. Assim pelo Teorema de Lumer-Philips (Veja [4, p. 126]), obtemos que $A_{(0)}$ e $A_{(0)}^*$ são geradores infinitesimais de semigrupos de operadores lineares e limitados fortemente contínuos.

Nosso principal objetivo é calcular o domínio das potências fracionárias do operador $-A_{(0)}$. Para isto, iremos primeiro calcular o operador resolvente associado a $A_{(0,0)}$, isto é, se $\lambda \in \rho(-A_{(0,0)})$, temos

$$(\lambda + A_{(0,0)})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I_H \\ A & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \lambda & -I_H \\ A & \lambda \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

Como $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -I_H \\ A & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + A \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} \lambda & -I_H \\ A & \lambda \end{bmatrix} \right)^{-1} &= (\lambda^2 + A)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda & I_H \\ -A & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} & (\lambda^2 + A)^{-1} \\ -A(\lambda^2 + A)^{-1} & \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

isto é,

$$(\lambda + A_{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} & (\lambda^2 + A)^{-1} \\ -A(\lambda^2 + A)^{-1} & \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Agora, pelo Teorema 4.9, temos

$$A_{(0)}^{-\alpha} = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A_{(0,0)})^{-1} d\lambda$$

para $0 < \alpha < 1$. Assim

$$\begin{aligned} A_{(0,0)}^{-\alpha} &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} \begin{bmatrix} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} & (\lambda^2 + A)^{-1} \\ -A(\lambda^2 + A)^{-1} & \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} \end{bmatrix} d\lambda \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda & \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda \\ -\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} A(\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda & \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Tratando de cada elemento da matriz acima separadamente, temos três casos a se analisar:

- O primeiro caso: A integral

$$\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda.$$

Consideremos a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} s = \lambda^2 \\ ds = 2\lambda d\lambda; \\ \lambda \rightarrow 0 \implies s \rightarrow 0; \\ \lambda \rightarrow +\infty \implies s \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} \lambda(\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda &= \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{-\frac{\alpha}{2}} \lambda(s + A)^{-1} \frac{ds}{2\lambda} \\
 &= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{2\pi} \int_0^{+\infty} s^{-\frac{\alpha}{2}} (s + A)^{-1} ds \\
 &= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}};
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

- O segundo caso: A integral

$$\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha-1} \lambda (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda,$$

Faremos de forma similar a (4.16), isto é, consideramos $s = \lambda^2$ para obtermos

$$\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{2\pi} \int_0^{+\infty} s^{\frac{-\alpha-1}{2}} (s + A)^{-1} ds$$

Já que

$$\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{2} = \text{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sen}\left[\pi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right],$$

segue que

$$\begin{aligned}
 \text{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{1-\alpha}{2}} &= \text{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{\text{sen}\left[\pi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]}{\pi} \int_0^{+\infty} s^{\frac{-\alpha-1}{2}} (s + A)^{-1} ds \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{2\pi} \int_0^{+\infty} s^{\frac{\alpha-1}{2}} (s + A)^{-1} ds \\
 &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda;
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

- Terceiro caso: A integral

$$-\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} A (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 -\frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} A (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda &= -A \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda^2 + A)^{-1} d\lambda \\
 &= -A \text{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{1-\alpha}{2}},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$-\frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha} A(\lambda^2 - A)^{-1} d\lambda = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{1-\alpha}{2}}. \quad (4.18)$$

Tendo analisado os três casos, basta substituírmos as igualdades (4.16), (4.17) e (4.18) em (4.14) e encontrarmos a seguinte fórmula

$$A_{(0)}^{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}} & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{1-\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

para $0 < \alpha < 1$, isto prova o seguinte lema.

Lema 4.14. *Se $0 < \alpha < 1$, então*

$$A_{(0)}^{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}} & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{1-\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Visto que o operador $A_{(0)}^{-\alpha}$ é injetor. Enunciaremos o seguinte resultado que motiva este trabalho.

Teorema 4.15. *Para $0 < \alpha < 1$, temos*

$$A_{(0)}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{\alpha}{2}} & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{-1+\alpha}{2}} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{1+\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Demonstração. Pelo Lema 4.20, temos

$$A_{(0,0)}^{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}} & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{1-\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{-\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix},$$

e conseqüentemente

$$A_{(0)}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{\alpha}{2}} & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{-1+\alpha}{2}} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{1+\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A^{\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}.$$

4. Potências fracionárias

Com isto, o domínio das potencias fracionarias do operador $A_{(0)}$ é

$$D(A_{(0)}^\alpha) = H^{\frac{1+\alpha}{2}} \times H^{\frac{\alpha}{2}} = D(A^{\frac{1+\alpha}{2}}) \times D(A^{\frac{\alpha}{2}}).$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] R. G. BARTLE, *The elements of integration and lebesgue measure*, Jhon Wiley & Sons, Inc, 1966.
- [2] F. D. M. BEZERRA, A.N. CARVALHO, J.W. CHOLEWA AND M.J.D. NASCIMENTO *Parabolic approximation of damped wave equations via fractional powers: fast growing nonlinearities and continuity of the dynamics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 450 (1) 377-405, 2017.
- [3] H. BREZIS, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer-Verlag, New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.
- [4] A. N. CARVALHO, *Análise funcional II*. Notas de Aula: 10 novembro de 2012, São Carlos - SP, 2012.
- [5] A. N. CARVALHO, J. A LANGA E J. C., ROBINSON, *Semigroups and evolution processes under pertubations*, Notas de Aula.
- [6] J. B. CONWAY, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1978.
- [7] D. HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1981.
- [8] V. M. IÓRIO, *EDP: um curso de graduação*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, volume 1, 2010.
- [9] M. J. D. NASCIMENTO, *A interpolação complexa e a caracterização dos espaços de potências fracionárias associados a operadores acretivos*, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de São Paulo, 2003.
- [10] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

- [11] F. C. SILVA, *Existência de solução para algumas Equações de evolução via Teoria de semigrupo analítico*, Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, 2007.