

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação
Mestrado em Matemática

O Teorema de Fibração de Milnor-Lê

Camila Sibelle Marques da Silva

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação
Mestrado em Matemática

O Teorema de Fibração de Milnor-Lê

por

Camila Sibelle Marques da Silva

sob a orientação da

Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Março de 2016

S586t Silva, Camila Sibelle Marques da.
O Teorema de Fibrção de Milnor-Lê / Camila Sibelle
Marques da Silva. – João Pessoa, 2016.
75 f. : il. -

Orientadora: Miriam Pereira da Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Fibrção de Milnor. 3. Extratificação de
Whitney. 4. Estrutura cônica. 5. Lemas de Isotopia. I.Título.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

O Teorema de Fibração de Milnor-Lê

por

Camila Sibelle Marques da Silva¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria / Topologia

Aprovada em 22 de Março de 2016.

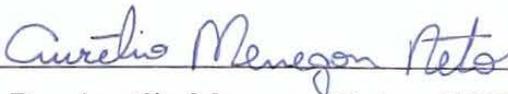
Banca Examinadora:



Prof.^a. Dr.^a. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Orientadora)



Prof. Dr. Marcelo José Saia – USP
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto – UFPB
(Examinador Interno)

¹A autora foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais e ao Rafinha.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela minha vida, por me dar sabedoria e forças para concluir mais uma etapa em minha vida.

Agradeço aos meus pais e familiares por todo apoio e incentivo, para a realização de mais um sonho.

A César, por sempre estar comigo em todos os momentos.

Aos meus queridos Elizabeth Lacerda, Desterro Silva e Gilcenio Neto, pelo abrigo e orientação (e pela carona) durante meus primeiros dias João Pessoa.

Agradeço a todos os meus colegas da IBB, em especial à minha líder Ângela Barros e as meninas da célula, por me lembrarem que eu não estou sozinha e por todas as orações.

Aos professores da graduação, por acreditarem no meu potencial, por todos ensinamentos matemáticos e por serem exemplos para a vida, especialmente José Marcos e Allyson Oliveira.

Agradeço a todos os professores da UFPB que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional.

Ao professor Aurélio Menegon, agradeço principalmente pela atenção e paciência durante os meses que estudamos juntos e por me mostrar a beleza da Topologia de Singularidades. Obrigada por acreditar em mim.

Meus sinceros agradecimentos à minha orientadora Miriam Pereira, pelos ensinamentos, paciência e dedicação, por todo apoio e ajuda. Obrigada por aceitar ser minha orientadora.

Aos meus amigos e colegas da UFPB, em especial a Jonathas Almeida, Isabelly Diniz, Sally Vieira, Lisiane Rezende, José Gonçalves e Tony Lopes, por me auxiliarem nos estudos e tornarem meus dias na Paraíba mais animados.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Uma das ferramentas clássicas para o estudo local da topologia de singularidades analíticas reais e complexas é o Teorema de Fibrção de Milnor. Neste trabalho, usamos alguns conceitos fundamentais em Teoria de Singularidades, apresentamos uma prova obtida por Lê Dũng Tráng de um resultado que estabelece condições para que um germe de uma aplicação definida em um subconjunto analítico complexo em \mathbb{C}^n seja a projeção de um fibrado topológico localmente trivial.

Palavras-chave: Fibrção de Milnor; Estratificação de Whitney; Estrutura Cônica; Lemas de Isotopia.

Abstract

One of the classic tools for the local study of the topology of real and complex analytic singularities is the Milnor Fibration Theorem. In this work, using some fundamental concepts in Singularity Theory, we present a proof obtained by Lê Dũng Tráng of a result that establishes conditions for the germ of a map defined in a complex analytic subset in \mathbb{C}^n to be the projection map of a (locally topologic trivial) fibre bundle.

Keywords: Milnor Fibration; Whitney Stratification; Conical Structure; Isotopy Lemmas.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| 1 Preliminares | 4 |
| 1.1 Variedades Diferenciáveis | 4 |
| 1.2 Conjuntos Algébricos | 11 |
| 1.3 Conjuntos Analíticos Complexos | 17 |
| 1.4 Noções básicas de Topologia Algébrica | 19 |
| 1.5 Fibrados Vetoriais | 23 |
| 1.6 Estratificação de Whitney | 28 |
| 2 Teoremas de Fibração de Ehresmann e Lemas de Isotopia de Thom | 32 |
| 2.1 Teoremas de Fibração de Ehresmann | 32 |
| 2.2 Vizinhanças Tubulares | 36 |
| 2.3 Grupos a um Parâmetro | 43 |
| 2.4 Os Lemas de Isotopia de Thom | 45 |
| 3 Estrutura Cônica Local | 52 |
| 3.1 O Link de uma Singularidade | 52 |
| 3.2 Teorema da Estrutura Cônica Local | 60 |
| 4 Fibração de Milnor | 63 |
| 4.1 O Teorema de Fibração de Milnor-Lê | 63 |
| 4.2 Um Teorema de Fibração para Singularidades Reais | 68 |
| Referências Bibliográficas | 72 |

Introdução

A Teoria de Singularidades é uma área que trata da topologia e da geometria de aplicações analíticas que não são regulares.

Afim de estudar a topologia de aplicações diferenciáveis, podemos analisar a topologia da imagem ou das fibras desta aplicação. De maneira geral, na literatura, o estudo topológico da pré-imagem é mais avançado que o de imagens, uma vez que sabemos que a imagem inversa de um valor regular por uma aplicação diferenciável é uma variedade diferenciável.

Um dos problemas principais em Teoria de Singularidades é estudar localmente o comportamento topológico de variedades (reais ou complexas). O Teorema de Fibração de Milnor, desenvolvido por J. Milnor em [27], é uma das principais ferramentas usadas para entender o comportamento de hipersuperfícies com singularidades.

Este resultado afirma que se 0 é um ponto crítico isolado de uma função analítica complexa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, com $f(0) = 0$, então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função $\phi : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\phi = f/|f|$ é a projeção de um fibrado diferenciável localmente trivial, onde $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ é a esfera de centro 0 e raio ϵ e o conjunto $K_\epsilon := f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ é chamado de *link* da singularidade na origem.

Usando este resultado, é possível descrever localmente a topologia da fibra singular, analisando a topologia das fibras não singulares que estão suficientemente próximas. Se $V = f^{-1}(0)$ é um espaço analítico (real ou complexo) e tem singularidade isolada na origem, J. Milnor provou que o *link* K_ϵ é uma variedade real, suave de dimensão $m - 1$, onde m é a dimensão real de V e a topologia de V e seu mergulho em \mathbb{C}^n (ou \mathbb{R}^n) são completamente determinadas pelo mergulho de K_ϵ em \mathbb{S}_ϵ .

Usando o Teorema de Fibração de Ehresmann, J. Milnor obteve uma versão do seu Teorema de Fibração para o caso de uma função analítica real $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Este resultado afirma que se f é uma submersão em cada ponto de uma vizinhança furada da origem, ou seja, para toda esfera suficientemente pequena \mathbb{S}_ϵ em \mathbb{R}^m centrada em zero, e para todo $\eta > 0$ suficientemente menor com respeito ao ϵ , a restrição de f ao complemento de uma vizinhança tubular de $f^{-1}(0) \cap B_\epsilon$ em B_ϵ é a projeção de um fibrado localmente trivial sobre a esfera \mathbb{S}_η em \mathbb{R}^k .

Posteriormente, H. Hamm generalizou o Teorema de Fibrção de Milnor no tubo para interseções completas com singularidades isoladas em [12].

O objetivo principal desta dissertação é estudar uma generalização do Teorema de Fibrção de Milnor obtida por D. T. Lê em [19] para o caso de um germe de uma função analítica. Sejam X um subconjunto analítico de um aberto U de \mathbb{C}^n e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica complexa tal que $f(x) = 0$, para um dado x em X . Nestas condições temos que a aplicação $\Psi_{\epsilon, \eta} : f^{-1}(D_\eta - \{0\}) \cap X \cap B_\epsilon \rightarrow D_\eta - \{0\}$, que é a restrição da f ao conjunto $f^{-1}(D_\eta - \{0\}) \cap X \cap B_\epsilon$, é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial, se B_ϵ é a bola de centro x e raio $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$ é suficientemente menor que ϵ .

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma:

No *Capítulo 1*, apresentamos algumas definições fundamentais que são usadas no decorrer do texto. Um dos principais conceitos apresentados é o de estratificação de Whitney que é fundamental em geometria algébrica e em teoria de singularidades. Este conceito foi introduzido por H. Whitney e R. Thom ([38], [41]) para estudar singularidades de variedades analíticas. Apresentamos as condições de regularidades de Whitney e um resultado que estabelece quando é possível encontrar uma estratificação que é Whitney regular.

Nos *Capítulos 2 e 3*, desenvolvemos ferramentas necessárias para a prova do Teorema de Fibrção de Milnor-Lê: o *Capítulo 2* é dedicado aos Teoremas de Fibrção de Ehresmann e o Primeiro Lema de Isotopia de Thom. Estes resultados nos dizem sob quais condições uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis é a projeção de um fibrado localmente trivial. O segundo resultado é usado como ferramenta para a prova do Teorema principal desta dissertação. No *Capítulo 3*, estudamos alguns resultados sobre a topologia do *link* de uma variedade analítica complexa em um ponto singular isolado ou não isolado. Apresentamos o Teorema da Estrutura Cônica Local que afirma que uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto x^0 em um conjunto analítico tem a mesma topologia do $Cone(K_\epsilon)$, onde o $Cone(K_\epsilon)$ é o conjunto formado por todos os pontos que ligam x^0 ao conjunto K_ϵ .

No *Capítulo 4*, apresentamos o resultado provado por Lê Dũng Tráng em [19], como citamos anteriormente, que generaliza a existência de fibrção de Milnor para subconjuntos analíticos complexos. Finalizamos nosso trabalho apresentando um Teorema de Fibrção para o caso real.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de topologia e teoria de singularidades tais como Variedades Diferenciáveis, Variedades Algébricas, Conjuntos Analíticos Complexos, Homotopia, CW Complexos, Grupos de Homotopia, Fibrados Vetoriais e Estratificação de Whitney, que são necessários no decorrer do texto. As principais referências para este capítulo são [3], [11], [20], [21] e [27].

1.1 Variedades Diferenciáveis

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de variedades diferenciáveis e apresentar alguns exemplos e resultados essenciais sobre estes espaços.

De maneira geral, podemos considerar uma variedade diferenciável um objeto semelhante à uma superfície mas que não precisa necessariamente estar contido em um espaço euclidiano. Na verdade, esses objetos geométricos são subespaços de um espaço topológico qualquer.

Definição 1.1. Uma variedade topológica M de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável tal que para cada ponto p em M existe uma vizinhança aberta U do ponto p em M homeomorfa a um subconjunto aberto U' do \mathbb{R}^n .

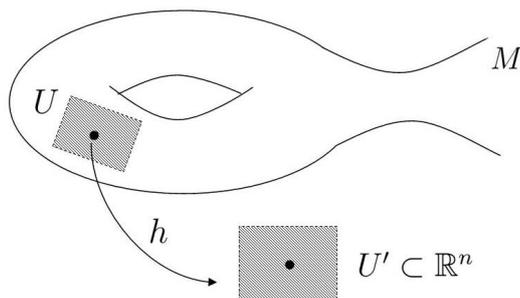


Figura 1.1: Variedade Topológica

Definição 1.2. Seja M uma variedade topológica. Um sistema de coordenadas locais ou carta local de M é um homeomorfismo $h : U \rightarrow U'$ de um aberto de M em um aberto U' de \mathbb{R}^n . Um atlas de M é um conjunto $\mathfrak{U} = \{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tal que a união dos domínios das cartas h_α é todo espaço M . Além disso, dizemos que um atlas de uma variedade é diferenciável se todas as suas cartas são diferenciáveis \square

Se h_α e h_β são cartas, podemos definir o homeomorfismo $h_{\alpha\beta} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ no conjunto $h_\alpha(U_{\alpha\beta})$, onde $U_{\alpha\beta}$ é o conjunto formado pela interseção dos domínios U_α , U_β de h_α e h_β , respectivamente. A aplicação $h_{\alpha\beta}$ pode ser vista como um homeomorfismo entre os abertos $h_\alpha(U_{\alpha\beta})$ e $h_\beta(U_{\alpha\beta})$ em \mathbb{R}^n . Chamamos este homeomorfismo de mudança de coordenadas.

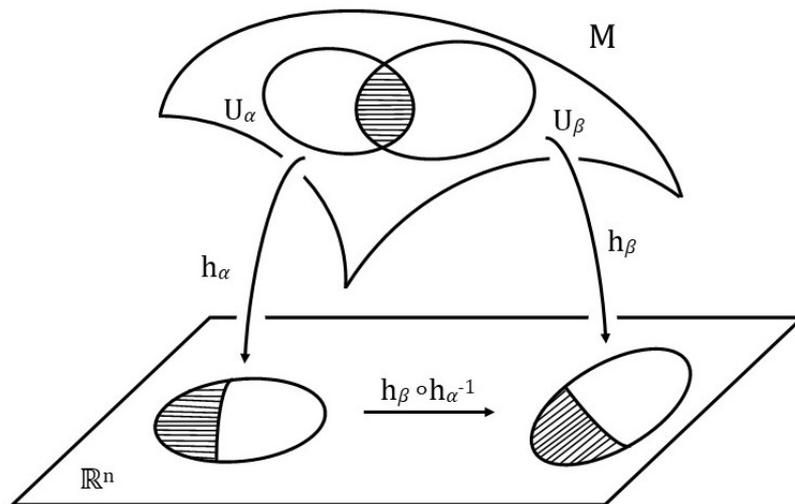


Figura 1.2: Mudança de Coordenadas

Sejam M um espaço topológico e \mathfrak{U} um atlas de dimensão m e classe C^k neste espaço topológico. Dizemos que um sistema de coordenadas $h_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ em M é admissível em relação ao atlas \mathfrak{U} se $\mathfrak{U} \cup \{h_\beta\}$ ainda é um atlas de classe C^k em M . Se todos os sistemas de coordenadas em M são admissíveis em relação ao atlas \mathfrak{U} , dizemos que este atlas é máximo de classe C^k .

Definição 1.3. Uma variedade diferenciável de dimensão n é um par (M, \mathfrak{U}) , tal que M é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e \mathfrak{U} é um atlas máximo de dimensão n .

Exemplo 1.1. Se M e N são variedades diferenciáveis de dimensão n , m , munidas com os atlas diferenciáveis \mathfrak{U} , \mathfrak{B} , respectivamente. Então o espaço topológico $M \times N$

¹de classe C^∞ .

também é uma variedade diferenciável. Podemos considerar em $M \times N$ o atlas $\mathcal{U} \times \mathcal{B}$ de classe C^k constituído pelos sistemas de coordenadas

$$\begin{aligned} h_1 \times h_2 : U \times V &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) &\longmapsto (h_1(p), h_2(q)) \end{aligned}$$

com $h_1 \in \mathcal{U}$ e $h_2 \in \mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{U} \times \mathcal{B}$ é um atlas de classe C^k contido em um único atlas maximal de classe C^k , e, portanto, $M \times N$ é uma variedade diferenciável chamada de variedade produto.

Exemplo 1.2. Todo subconjunto aberto U de \mathbb{R}^n é uma variedade diferenciável. Claramente, o atlas formado pela aplicação identidade $i : U \longrightarrow U$ define em U uma estrutura diferenciável.

Exemplo 1.3. O conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão r do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+r} forma uma variedade diferenciável chamada de variedade Grassmanniana, a qual denotamos por $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$. De fato, consideramos $\alpha = (E, F)$ o par formado por subespaços de \mathbb{R}^{n+r} tais que $E \oplus F = \mathbb{R}^{n+r}$ e $\dim E = r$; associado a este par, seja U_α o conjunto dos subespaços vetoriais H em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ tais que $H \cap F = \{0\}$. Note que a projeção $\pi_E : E \oplus F \longrightarrow E$ leva H isomorficamente sobre E .

Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} h_\alpha : U_\alpha &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ H &\longmapsto \pi_F \circ (\pi_E|_H) : E \longrightarrow F \end{aligned}$$

define um sistema de coordenadas locais em $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$.

Além disso, sejam $T = h_\alpha(H)$ e $T' = h_\beta(H)$, onde $\alpha = (E, F)$ e $\beta = (E', F')$. A mudança de coordenadas $h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E', F')$ é dada da seguinte forma: Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{T} : E &\longrightarrow E \oplus F \\ x &\longmapsto x + T(x). \end{aligned}$$

Então, como $\hat{T}(E) = H$, a composição $\pi_{E'} \circ \hat{T}$ nos dá um isomorfismo entre E e E' . Portanto,

$$(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})(T) = \pi_{F'} \circ \hat{T} \circ (\pi_E \circ \hat{T})^{-1} = T'$$

mostra que a composição $(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})$ é de classe C^∞ .

Com a noção de variedade diferenciável, podemos definir um conjunto importante

que está associado a cada ponto de uma variedade diferenciável que possui estrutura de espaço vetorial normado.

Definição 1.4. Sejam M uma variedade diferenciável e p um ponto em M . Definimos o espaço tangente à M em p como o conjunto formado pelos vetores w tais que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$ onde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma caminho diferenciável em M , isto é,

$$T_p M := \{w \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ tal que } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = w\}.$$

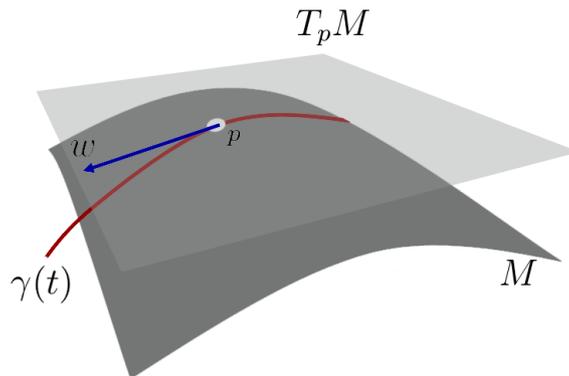


Figura 1.3: Plano Tangente

Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre estas variedades.

Definição 1.5. Dizemos que a aplicação f é diferenciável no ponto p de M se para um par de cartas $h_\alpha : U \rightarrow U', h_\beta : V \rightarrow V'$ de M e N respectivamente, com U vizinhança aberta de p e V vizinhança aberta de $f(p)$, temos $h_\beta \circ f \circ h_\alpha^{-1}$ diferenciável no ponto $h_\alpha(p)$ de U' . Se a aplicação $f : M \rightarrow N$ é diferenciável para todo ponto de M , dizemos que f é uma aplicação diferenciável entre variedades.

Munidos destas definições podemos entender o que é a derivada de uma aplicação entre variedades diferenciáveis.

Definição 1.6. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. A derivada de f no ponto p é a transformação linear $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ que leva cada elemento $w = \gamma'(0)$ de $T_p M$ no vetor $(Df_p)(w) = (f \circ \gamma)'(0)$ em $T_{f(p)} N$.

Podemos observar que a aplicação Df_p está bem definida, isto é, independe do caminho γ escolhido.

Proposição 1.1. Seja $f : M \rightarrow C$ uma aplicação analítica entre variedades diferenciáveis e N uma subvariedade de M . Então $x \in N$ é ponto crítico da restrição $f|_N$ se, e somente se

- i) x é ponto crítico de f ;
- ii) x é ponto regular de f tal que $T_x N \subset \text{Ker}(Df_x)$.

Demonstração. De fato, observamos que se $\iota : N \rightarrow M$ é a inclusão, então $f|_N = f \circ \iota$.

Logo, para $x \in N$, temos $D(f|_N)_x = Df_x \circ D\iota_x$, onde $D\iota_x : T_x N \rightarrow T_x M$.

□

Observação 1.1. Notamos que os pontos regulares da restrição de f à N são aqueles tais que $\text{Ker}(Df_x)$ é transversal à $T_x N$.

Consideramos o conjunto $I = [0, 1]$ em \mathbb{R} . Claramente I não é uma variedade diferenciável, pois nenhuma vizinhança do 0 é homeomorfa a um aberto de um espaço euclidiano. Entretanto, podemos ampliar a definição de variedade diferenciável de forma que podemos incluir além de I alguns outros conjuntos importantes.

Seja \mathbb{H}^k o semi-espaço superior de \mathbb{R}^k , isto é, o conjunto de todos os pontos em \mathbb{R}^k que possuem a última coordenada não negativa e seja $\partial\mathbb{H}^k$ sua fronteira, isto é, o conjunto formado pelos pontos que possuem a última coordenada nula.

Definição 1.7. Dizemos que M é uma variedade topológica com bordo de dimensão k se é um espaço de Hausdorff com base enumerável tal que para cada ponto p em M existe uma vizinhança aberta homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço \mathbb{H}^k .

Definição 1.8. Uma variedade diferenciável com bordo de dimensão n é o par (M, \mathfrak{D}) tal que M é uma variedade topológica de dimensão n e \mathfrak{D} é um atlas maximal para M .

O bordo (ou fronteira) de M , denotado por ∂M , é o conjunto formado pelos pontos que pertencem à imagem de $\partial\mathbb{H}^k$. Denominamos o complemento da fronteira, $M \setminus \partial M = \text{Int}(M)$, por interior de M . Assim, uma variedade diferenciável sem bordo M é tal que sua fronteira é vazia. Observamos que as noções de fronteira e interior de uma variedade diferenciável são diferentes das noções de fronteira e interior topológicos. De fato, consideramos I mergulhado em \mathbb{R}^2 e podemos notar que $\partial I = \{0, 1\}$ enquanto que fronteira topológica de I é todo I .

Exemplo 1.4. A bola unitária fechada B em \mathbb{R}^n é uma variedade diferenciável com bordo. De fato, como a bola aberta é uma variedade diferenciável, temos que analisar os pontos que estão na fronteira de B , isto é, os pontos em \mathbb{S}^{n-1} . Porém, dado um ponto $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ qualquer vizinhança aberta deste ponto é homeomorfa a um aberto de \mathbb{H}^n . Portanto, B é uma variedade topológica com bordo.

Proposição 1.2. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n com bordo. Então ∂M é uma variedade diferenciável sem bordo de dimensão $n - 1$.

Demonstração. Ver [III], Proposição p. 59. □

Observamos que se p é um ponto do interior ou fronteira da variedade M o plano tangente T_pM é definido de maneira análoga à Definição 1.4.

Sej $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. Um ponto y em N é um valor regular de f se a aplicação diferencial Df_p é sobrejetiva para todo ponto p na imagem inversa $f^{-1}(y)$.

Teorema 1.3. *Seja y um valor regular da aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$. Então $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de M e*

$$\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N.$$

Demonstração. Ver [III], p. 21. □

Dada uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ entre variedades e y um valor regular de f , segue do Teorema 1.3 que a imagem inversa de y via f , isto é, $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de M . Entretanto, existem condições que generalizam a noção de regularidade, de forma que dada uma subvariedade Y de N , temos que $f^{-1}(Y)$ é uma subvariedade de M . Estas condições estão relacionadas ao conceito de transversalidade.

Definição 1.9. Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^k é transversal à subvariedade Z de N se para cada elemento p em $f^{-1}(Z)$ temos

$$\text{Im}(Df_p) + T_pZ = T_{f(p)}N .$$

No caso especial em que f é a aplicação inclusão entre duas subvariedades W e Z de M , temos que f é transversal à subvariedade Z se, e somente se para todo ponto p em $W \cap Z$,

$$T_pW + T_pZ = T_pM$$

Neste caso, dizemos que W e Z são transversais.

Exemplo 1.5. Sejam α uma curva e S uma superfície em \mathbb{R}^3 e seja ι a aplicação inclusão. Note que $\alpha \cap S = \{p\}$. Além disso, como a reta $T_p\alpha$ é ortogonal ao plano T_pS , temos que $T_p\alpha + T_pS = T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$. Portanto, α e S são transversais.

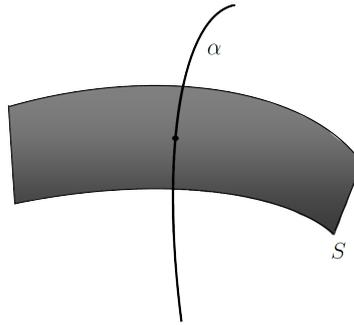


Figura 1.4: Transversalidade

Consideramos agora as curvas β e γ em \mathbb{R}^2 de forma que $\beta \cap \gamma = \{p\}$ e $T_p\beta = T_p\gamma$. Assim, $T_p\beta + T_p\gamma \neq T_p\mathbb{R}^2$. Portanto, as curvas β e γ não são transversais.

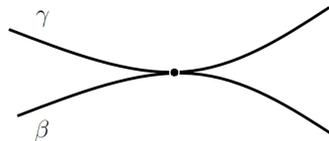


Figura 1.5: Curvas não Transversais

Teorema 1.4. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável transversal à subvariedade $Z \subset Y$. Então $f^{-1}(Z) \subset X$ é uma subvariedade. Além disso,*

$$\text{codim} f^{-1}(Z) = \text{codim} Z .$$

Demonstração. Ver [III], p. 28. □

Este resultado pode ser generalizado para o caso em que X é uma variedade diferenciável com bordo:

Teorema 1.5. *Seja f uma aplicação diferenciável de uma variedade com fronteira M em uma variedade sem bordo N . Suponha que as aplicações $f: M \rightarrow N$ e $df: \partial M \rightarrow N$ são transversais com respeito à subvariedade sem bordo Z de N . Então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade com bordo $\partial(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z) \cap \partial M$. Além disso,*

$$\text{codim} f^{-1}(Z) = \text{codim} Z .$$

Demonstração. Ver [III], p. 60. □

A partir do Teorema 1.4 obtemos o seguinte resultado, que é utilizado diversas vezes no decorrer do texto.

Teorema 1.6. *Sejam Y uma variedade diferenciável e Z, W subvariedades diferenciáveis de Y de dimensão n, m e k , respectivamente. Se Z e W se intersectam transversalmente, então:*

i) A interseção $W \cap Z$ é uma variedade diferenciável;

ii) $\text{codim}(W \cap Z) = \text{codim} W + \text{codim} Z$

Demonstração. Ver [11], p. 30. □

1.2 Conjuntos Algébricos

Dada uma família de funções polinomiais em um anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, podemos estudar o conjunto de zeros desta família de funções, que é chamado de conjunto algébrico. Nesta seção temos como objetivo estudar alguns resultados sobre o conjunto dos pontos singulares e dos pontos não singulares de um conjunto algébrico dado. Para uma referência, ver [27].

Definição 1.10. Seja \mathbb{K} um corpo infinito (em nosso contexto consideramos \mathbb{C} ou \mathbb{R}) e \mathbb{K}^n o espaço coordenado consistindo de todas as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de \mathbb{K} . Um subconjunto V de \mathbb{K}^n é chamado de *conjunto algébrico* se V é o conjunto solução de uma família de equações polinomiais em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Entretanto, como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano o conjunto algébrico V pode ser definido por um número finito de equações polinomiais

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

com $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Exemplo 1.6. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = 0\}$ é um conjunto algébrico.

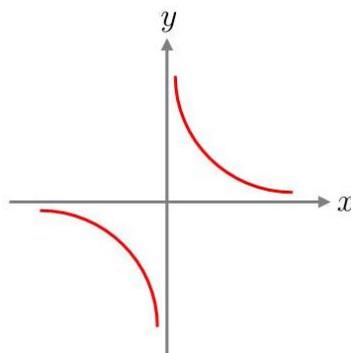


Figura 1.6: Hipérbole

Em outras palavras, um conjunto algébrico V pode ser visto como o conjunto

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}$$

onde I é o ideal gerado pelos polinômios f_1, \dots, f_m .

No caso em que o ideal I é primo, temos uma importante família de conjuntos algébricos denominados variedades, ou seja,

Definição 1.11. Dizemos que um conjunto algébrico V é uma *variedade algébrica* quando não pode ser escrito como a união de dois subconjuntos algébricos próprios, ou seja, quando V é irredutível.

Exemplo 1.7. Os conjuntos \emptyset e \mathbb{K}^n são conjuntos algébricos. De fato, o \emptyset é o conjunto solução do sistema formado por todos os polinômios em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e \mathbb{K}^n é o conjunto solução do polinômio nulo. Além disso, todo ponto a em \mathbb{K}^n é tal que $\{a\}$ é conjunto algébrico porque é o conjunto formado pela solução da função polinomial $f(x) = x - a$.

Exemplo 1.8. Se $\{V_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de conjuntos algébricos com $V_\gamma \subset \mathbb{K}^n$ então $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ é conjunto algébrico.

De fato, para cada conjunto algébrico V_γ , seja $I_\gamma = \langle f_1^\gamma, \dots, f_k^\gamma \rangle$ tal que $\mathcal{V}(I_\gamma) = V_\gamma$. Então,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}(I_\gamma) = \mathcal{V}(\sum(I_\gamma)).$$

Como $\sum(I_\gamma)$ é um ideal formado por todas as funções que geram cada V_γ , segue que $\mathcal{V}(\sum(I_\gamma))$ é o conjunto de zeros de todas estas funções. Logo, $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ é um conjunto algébrico.

Exemplo 1.9. Se $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{K}^n$ são conjuntos algébricos então $\bigcup_{i=1}^r V_i$ é conjunto algébrico.

Como temos uma quantidade finita de conjuntos algébricos, é suficiente mostrar que dados dois conjuntos algébricos $V_1 = \mathcal{V}(I)$ e $V_2 = \mathcal{V}(J)$, com $I = \langle f_1^I, \dots, f_m^I \rangle$ $J = \langle f_1^J, \dots, f_k^J \rangle$ e cada f_i^I, f_j^J funções polinomiais em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, a união $V_1 \cup V_2$ é um conjunto algébrico. Assim, vamos mostrar que $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ)$.

De fato, pelas propriedades de ideal é fácil ver que $IJ \subset I$ e $IJ \subset J$, e então, $IJ \subset I \cap J$. Assim, $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \subset \mathcal{V}(IJ)$. Por outro lado, vamos supor que existe um elemento $x \in \mathcal{V}(IJ)$ tal que $x \notin \mathcal{I}$, então existe uma função polinomial $f \in I$ tal que $f(x) \neq 0$. Além disso, para todo $g \in J$ temos que $fg \in IJ$, e então $fg(x) = 0$, implicando que $g(x) = 0$, isto é, $x \in \mathcal{V}(J)$.

Portanto, $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$ é um conjunto algébrico.

A partir dos conjuntos algébricos, podemos definir uma importante topologia no espaço coordenado \mathbb{K}^n , chamada de topologia de Zariski.

Definição 1.12. Definimos a topologia de Zariski em \mathbb{K}^n como a topologia cujo os fechados são os conjuntos algébricos.

Exemplo 1.10. A maneira mais natural de definir o espaço projetivo \mathbb{P}^n é dizer que ele consiste de todas as retas l que passam pela origem em \mathbb{C}^{n+1} . Cada reta é determinada pela multiplicação de um vetor não nulo $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ por um número complexo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Consideramos x_0, \dots, x_n as coordenadas em \mathbb{C}^{n+1} e x'_0, \dots, x'_n as coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^n .

Vamos construir o espaço projetivo da seguinte forma:

Observamos que tanto os x_i 's quanto os polinômios não constantes na variável x_i não são funções em \mathbb{P}^n . Entretanto, expressões dadas por $\frac{x_j}{x_i}$ podem ser vistas localmente como funções em \mathbb{P}^n , basta olhar para estas expressões nos subconjuntos $U_i = \mathbb{P}^n \setminus H_i$, onde $H_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_i = 0\}$. Em outras palavras, U_i consiste das linhas $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$ que se projetam isomorficamente no i -ésimo eixo coordenado.

Agora, para i fixo, consideramos a função

$$\begin{aligned} \xi^{(i)} : U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_i}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Notamos que $\xi^{(i)}$ é uma bijeção entre U_i e o subespaço afim $x_i = 1$ em \mathbb{C}^{n+1} . Usando esta correspondência, o subespaço H_i corresponde às linhas que estão no hiperplano $x_i = 0$ e também pode ser identificado como o espaço projetivo \mathbb{P}^{n-1} pela aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : H_i &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) &\longmapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Os conjuntos U_i 's formam uma cobertura para \mathbb{P}^n e podemos considerar cada um deles uma carta afim em \mathbb{P}^n .

De modo geral, podemos definir um ponto singular da seguinte forma:

Definição 1.13. Seja V uma variedade algébrica complexa. Dizemos que $x \in V$ é um ponto singular de V se não existe vizinhança aberta U de x em V tal que U é uma variedade diferenciável.

Denotamos por $\Sigma(V)$ o conjunto de todos os pontos singulares da variedade algébrica V .

Definição 1.14. Sejam $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ anel de polinômios e V um conjunto algébrico. Definimos $\mathcal{I}(V)$ como o ideal consistindo de todos os polinômios que se anulam em V .

Como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano, segue que $\mathcal{I}(V)$ é finitamente gerado, isto é, $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$.

É importante observar que esta definição não depende da escolha dos f_i 's, uma vez que se acrescentarmos um polinômio f_{k+1} ao conjunto $\{f_1, \dots, f_k\}$ temos que ele será a combinação linear de f_1, \dots, f_k . Seja V um conjunto algébrico. Consideramos polinômios f_1, \dots, f_k que geram $\mathcal{I}(V)$. Para cada ponto x em V seja $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{k \times n}$ a matriz formada pela diferencial das f_i 's aplicada no ponto x . Vamos considerar p o maior posto que a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{k \times n}$ atinge para qualquer ponto de V com $p \leq \min\{k, n\}$.

Como consequência da definição [1.13](#) temos o seguinte resultado:

Proposição 1.7. *Seja V uma variedade algébrica. Então um ponto x de V é singular se a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{k \times n}$ tem posto $< p$ em x .*

Note que um ponto x pertence à $\Sigma(V)$ se, e somente se, o determinante de todas as matrizes $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{p \times p}$ aplicada em x é nulo. Além disso, $\Sigma(V)$ forma um subconjunto algébrico próprio de V .

Consideramos $V \subset \mathbb{K}^n$ uma conjunto algébrica e p como definido anteriormente. Vamos apresentar alguns resultados sobre o conjunto $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ dos pontos não singulares de V , que são utilizados no decorrer do texto.

Teorema 1.8 (Whitney). *Se \mathbb{K} é o corpo dos reais ou complexos, então o conjunto $V \setminus \Sigma(V)$ é uma variedade diferenciável não vazia. Mai ainda, V é uma variedade diferenciável analítica real ou complexa e tem dimensão $n - p$ sobre \mathbb{K} .*

Whitney também mostra em [\[41\]](#) que se V é irredutível, isto é, V é uma variedade algébrica, então a dimensão da variedade diferenciável M_1 sobre \mathbb{K} é igual a dimensão algébrica de V sobre \mathbb{K} .

Teorema 1.9 (Whitney). *Para arbitrários V, W variedades algébricas reais ou complexas em um espaço coordenado \mathbb{K}^n tais que $V \supset W$, o conjunto $V \setminus W$ tem no máximo um número finito de componentes topológicas.*

Os Teoremas [1.8](#) e [1.9](#) são resultados básicos sobre variedades algébricas que foram provados por H. Whitney em [\[41\]](#), entretanto J. Milnor prova o Teorema [1.9](#) de forma diferente no Apêndice A de [\[27\]](#).

Proposição 1.10. *Seja V uma variedade algébrica real ou complexa definida por um polinômio $f(x) = 0$, com f irredutível (caso V seja uma variedade algébrica real adicionamos a hipótese que V contém um ponto regular de f). Então todo polinômio em $\mathcal{I}(V)$ é um múltiplo de f . Além disso, V é irredutível e o conjunto $\Sigma(V) = V \cap C$, onde C é o conjunto dos pontos críticos de f .*

Demonstração. Ver [27], Lema 2.5, p. 14. □

Corolário 1.11. Toda variedade algébrica pode ser escrita como uma união finita disjunta

$$V = M_1 \cup \cdots \cup M_p$$

onde cada M_j é uma variedade diferenciável com apenas uma quantidade finita de componentes conexas. Analogamente, o conjunto $V \setminus W$ também pode ser expresso como uma união finita de variedades diferenciáveis.

Demonstração. Ver [27], Corolário 2.6, p. 15. □

Seja $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ a variedade diferenciável formada pelos pontos não singulares de $V \subset \mathbb{K}^n$ e consideramos g uma função polinomial em \mathbb{K}^n .

Seja W o conjunto de todos os pontos x em V tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

tem posto menor ou igual à p ; onde f_1, \dots, f_k são polinômios que geram $\mathcal{I}(V)$.

Os próximo resultado é usado como ferramenta para a prova do Teorema 3.3 no Capítulo 3.

Teorema 1.12. *O conjunto dos pontos críticos da função $g|_{M_1} : M_1 \rightarrow \mathbb{K}$ é igual à interseção $M_1 \cap W$.*

Demonstração. Como $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ temos que para cada $a \in M_1$, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

tem posto máximo p , onde $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ são polinômios que geram $\mathcal{I}(V)$. Consideramos $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ a aplicação dada por

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)).$$

Pela Forma Local das Submersões, existe um sistema de coordenadas $h : Z \rightarrow W$ com $h(a) = 0$, onde Z é vizinhanças de a em \mathbb{K}^n tal que localmente $(F \circ h^{-1})$ se comporta

como projeção nas p primeiras coordenadas, isto é, $(F \circ h^{-1})(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = (u_1, \dots, u_p)$.

Como os f_i 's se anulam em V , observamos que para todo ponto x em $M_1 \subset V$ temos que $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = (0, \dots, 0)$. Por outro lado, localmente temos $F(x) = (u_1, \dots, u_p)$. E, assim,

$$(u_1, \dots, u_p) = (0, \dots, 0).$$

Logo, M_1 é o conjunto dos pontos $\{(u_1, \dots, u_n) \in V \mid u_1 = \dots = u_p = 0\}$ e então podemos tomar u_{p+1}, \dots, u_n como coordenadas locais em M_1 . Ainda, como os f_i 's se anulam em M_1 , note também que $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)(x) = 0$ para todo x em M_1 e $j \geq p+1$.

Além disso, a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ tem posto p por ser coluna equivalente à matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right)$. Deste modo, as p primeiras colunas de $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ são linearmente independentes.

Assim, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

tem posto p se, e somente se, $\frac{\partial g}{\partial u_{p+1}}(x) = \dots = \frac{\partial g}{\partial u_n}(x) = 0$. Mas isto acontece somente se o ponto x for um ponto crítico de $g|_{M_1}$.

Portanto, como a matriz acima é coluna equivalente à matriz dada no enunciado do lema, o teorema está provado. \square

Definição 1.15. Seja $g : M_1 \rightarrow \mathbb{K}$ uma função polinomial. Dizemos que x é um valor crítico de g se é a imagem por g de um ponto crítico.

Corolário 1.13. A função polinomial g em M_1 tem no máximo um número finito de valores críticos.

Demonstração. Vimos no Teorema [1.12](#) que o conjunto dos pontos críticos de $g|_{M_1}$ é exatamente dado por $(V \setminus \Sigma(V)) \cap W$, onde W é uma vizinhança de um ponto $a \in M_1$; além disso temos também que W é um subconjunto de V . Assim o conjunto dos pontos críticos de $g|_{M_1}$ pode ser expresso como diferença das variedades algébricas W e $\Sigma(V)$. Pelo Corolário [1.11](#), esta diferença pode ser escrita como uma união finita de variedades diferenciáveis, isto é,

$$W \setminus \Sigma(V) = M'_1 \cup \dots \cup M'_p.$$

onde cada M'_i tem um número finito de componentes conexas.

Cada ponto x de M'_i é um ponto crítico de $g|_{M_1}$, em particular, cada ponto x também é um ponto crítico de $g|_{M'_i}$. Como todos os pontos de M'_i são pontos críticos, significa que a derivada da função g se anula em todos eles, ou seja, g é constante em cada componente conexa de M'_i . Além disso, como a quantidade de componentes conexas é finita, temos que a imagem $g(M'_i)$ é um conjunto finito.

Portanto, o conjunto dos valores críticos de $g|_{M_1}$ dado por

$$g(W \setminus \Sigma(V)) = g(M'_1) \cup \dots \cup g(M'_p)$$

é finito. □

1.3 Conjuntos Analíticos Complexos

De forma geral, conjuntos analíticos complexos são conjuntos definidos de forma semelhante à conjuntos algébricos, sendo o conjunto de zeros de uma quantidade finita de funções holomorfas.

A principal referência desta seção é [6].

Definição 1.16. Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{C} e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável no ponto z_0 de U se o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existir. Neste caso, denotamos este limite por $f'(z_0)$. Quando a aplicação f é diferenciável em cada ponto z de U dizemos que f é uma função holomorfa ou uma função analítica complexa.

Em [22], é possível ver que uma aplicação analítica complexa é infinitamente diferenciável e pode ser descrita por meio de sua série de Taylor (ver [22] p. 5).

Observação 1.2. Na Definição [1.1], poderíamos tomar homeomorfismos com imagem em \mathbb{C}^n e, assim, poderíamos falar de atlas homeomorfo, ou seja, considerar que as mudanças de coordenadas são funções holomorfas. Seja $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a aplicação dada por

$$\varphi(a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Note que esta aplicação é um isomorfismo, e por isso, as variedades holomorfas em \mathbb{C}^n podem ser vistas como variedades diferenciáveis em \mathbb{R}^{2n} .

Definição 1.17. Seja M uma variedade diferenciável complexa em \mathbb{C}^n . Dizemos que um conjunto $A \subset M$ é um subconjunto analítico complexo de M se para cada ponto $a \in M$ existem uma vizinhança U de a e funções analíticas complexas f_1, \dots, f_m nesta vizinhança tais que

$$A \cap U = \{z \in U \mid f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\},$$

isto é, localmente A é o conjunto comum de zeros das funções analíticas f_1, \dots, f_m .

Definição 1.18. Dizemos que um conjunto A em uma variedade diferenciável M é um conjunto analítico complexo (local) se ele é em uma vizinhança de cada um de seus pontos um conjunto comum de zeros de uma família finita de funções analíticas complexas.

Observamos que todo conjunto analítico complexo é um subconjunto analítico complexo.

Além disso, como feito nos exemplos [1.8](#) e [1.9](#), é possível mostrar que a interseção de um número finito de conjuntos analíticos complexos é um conjunto analítico complexo e que a união finita de conjuntos analíticos complexos também é um conjunto analítico complexo.

Estas propriedades mostram que conjuntos analíticos complexos são fechados para interseção e união finita. Em [\[6\]](#), E. M. Chirka enfatiza a importância destas propriedades uma vez que se considerarmos variedades diferenciáveis a interseção ou união finita podem gerar conjuntos que não são necessariamente subvariedades diferenciáveis.

Proposição 1.14. Se $\phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação holomorfa entre variedades diferenciáveis complexas, então a imagem inversa de qualquer conjunto analítico complexo $A \subset N$ é um conjunto analítico complexo em M .

Demonstração. De fato, seja $\phi(b) = a \in A$ e sejam f_1, \dots, f_m funções analíticas em uma vizinhança U de a que define $U \cap A$. Assim, $V = \phi^{-1}(U)$ é uma vizinhança de b e o conjunto $\phi^{-1}(A)$ coincide com o conjunto de zeros comuns das funções holomorfas $f_1 \circ \phi, \dots, f_m \circ \phi$.

□

Observação 1.3. É importante destacar que nem sempre a imagem de um conjunto analítico complexo por uma aplicação holomorfa é um conjunto analítico complexo.

De fato, considere a aplicação $\phi : D_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, onde D_1 é o disco aberto de centro 0 e raio 1 tal que $\phi(z) = (z^2 - z, z^3 - z)$. Qualquer vizinhança U de 0 é um conjunto analítico entretanto $\phi(U)$ não é um conjunto analítico em nenhuma vizinhança do ponto $(0, 0)$, pois se $(z^2 - z, z^3 - z) = (0, 0)$ então $z = 0$.

Proposição 1.15. O produto direto $A_1 \times A_2$ de subconjuntos analíticos $A_1 \subset M_1$, $A_2 \subset M_2$ é um subconjunto analítico em $M_1 \times M_2$.

Demonstração. Com efeito, se π_j é a projeção de $M_1 \times M_2$ em M_j , $j = 1, 2$, então $A_1 \times M_2 = \pi_1^{-1}(A_1)$ e $M_1 \times A_2 = \pi_2^{-1}(A_2)$ são subconjuntos analíticos complexos. Além disso, a interseção $(A_1 \times M_2) \cap (M_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$ é um subconjunto analítico complexo. \square

A seguir, vemos um resultado que nos dá informações sobre a topologia do conjunto dos pontos singulares de quaisquer conjuntos analíticos complexos.

Definição 1.19. Dizemos que um ponto a de um conjunto analítico complexo A em uma variedade diferenciável complexa M é um ponto regular se existe uma vizinhança U de a em M tal que $A \cap U$ é uma subvariedade diferenciável complexa de M . Caso contrário, dizemos que o ponto a é um ponto singular de A .

Quando A é um conjunto algébrico, temos que esta definição equivale à Definição 1.7. Isto se verifica na Proposição 1.13.

Teorema 1.16. Se A é um conjunto analítico complexo de uma variedade M então o conjunto dos pontos singulares é fechado e não denso em A .

Demonstração. Ver [6], Teorema, p. 18. \square

1.4 Noções básicas de Topologia Algébrica

Nesta seção apresentamos algumas definições básicas sobre Topologia Algébrica, relacionados a teoria de homotopia que usamos no decorrer do texto. Para uma referência mais completa sobre este assunto, ver [14] e [20].

Consideramos I o intervalo fechado da reta $[0, 1]$.

Definição 1.20. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que duas aplicações contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ são homotópicas, e denotamos por $f \simeq g$, se existe uma aplicação contínua

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

tal que, para todo $x \in X$, temos $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$.

Para cada $t \in I$, a homotopia $f \simeq g$ define a aplicação contínua $H_t: X \rightarrow Y$, com $H_t(x) = H(x, t)$.

De modo geral, temos uma família $\{H_t\}$ de aplicações contínuas que leva a aplicação f na aplicação g continuamente ao longo do parâmetro t . Observamos também que $H_0 = f$ e $H_1 = g$.

Em [20], E. L. Lima mostra que homotopia é uma relação de equivalência entre aplicações contínuas de $f : X \rightarrow Y$. As classes de equivalência são denominadas classes de homotopia e denotadas por $[f]$. Além disso, é possível provar que composição de aplicações também preserva homotopia, e daí, podemos definir a composição entre classes de homotopia.

Definição 1.21. Uma isotopia é uma homotopia na qual cada aplicação contínua H_t é um difeomorfismo. Além disso, dizemos que dois difeomorfismos são isotópicos se eles podem ser ligados por uma isotopia.

A próxima definição se refere a noção de igualdade no contexto de homotopia.

Definição 1.22. Chamamos uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ de equivalência homotópica quando existe uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$.

Quando estamos nestas condições, dizemos que os espaços topológicos X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia e g é o inverso homotópico de f . De modo geral, se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica então o espaço X pode ser deformado continuamente no espaço Y e vice versa. Claramente, um homeomorfismo é um exemplo trivial de equivalência homotópica.

Definição 1.23. Um espaço topológico X é chamado de contrátil quando possui a mesma homotopia de um ponto.

Em outras palavras, o espaço topológico X é contrátil se, e somente se, existe uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow \{x_0\}$, para algum ponto $\{x_0\}$.

Proposição 1.17. Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

Demonstração. Ver [20], Corolário 1.1, p. 11. □

Considerando as classes de homotopia de um tipo especial de aplicações, podemos construir um importante invariante topológico usado para o estudo de problemas de homeomorfismos, chamado de grupo de homotopia.

Sejam $f, g : I \rightarrow X$ caminhos no espaço topológico X com $f(1) = g(0)$. Podemos definir uma operação produto $f \cdot g$ entre estes caminhos da seguinte forma:

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Afirmamos que esta operação está bem definida, isto é, respeita as classes de homotopia. De fato, sejam f_t e g_t homotopias tais que $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$. Se $f_0(1) = g_0(0)$ podemos garantir a boa definição da operação $f_0 \cdot g_0$, além disso, $f_0 \cdot g_0 = f_1 \cdot g_1$.

Definição 1.24. Seja $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto de todas as classes de homotopia $[f]$ de caminhos $f : I \rightarrow X$ tais que $f(0) = f(1) = x_0 \in X$. O conjunto $\pi_1(X, x_0)$ munido com produto $[f][g] = [f \cdot g]$ tem estrutura de grupo e é denominado grupo fundamental de X de ponto base x_0 .

A fim de definir o espaço $\pi_n(X, x_0)$, chamado de grupo de homotopia do espaço X com ponto base x_0 , consideramos I_n o produto de n cópias do intervalo $I = [0, 1]$, isto é, $I_n = I \times \cdots \times I$, n vezes, tal que a fronteira ∂I_n de I_n é o subespaço consistindo dos pontos com pelo menos uma coordenada igual a 0 ou 1.

Definição 1.25. Para um espaço X com ponto base $x_0 \in X$, definimos $\pi_n(X, x_0)$ o conjunto das classes de homotopia de aplicações $f : (I_n, \partial I_n) \rightarrow (X, x_0)$, onde cada homotopia f_t satisfaz $f_t(\partial I_n) = x_0$ para todo t .

Observamos que a definição inclui o caso $n = 0$, onde o conjunto I_0 é um ponto e ∂I_0 é o conjunto vazio. Logo, $\pi_0(X, x_0)$ é o conjunto de componentes conexas por caminhos de X . Quando $n \geq 2$, podemos definir uma operação de soma em $\pi_n(X, x_0)$, generalizando a operação de composição em π_1 , da seguinte forma

$$(f + g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & \text{se } s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & \text{se } s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Esta operação está bem definida nas classes de homotopia. Além disso, é possível mostrar que $\pi_n(X, x_0)$ é um grupo abeliano quando $n \geq 2$, com elemento identidade a aplicação constante que leva I_n para x_0 e com inversa dada por $-f(s_1, s_2, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Definição 1.26. Um espaço X com ponto base x_0 é chamado de n -conexo se

$$\pi_i(X, x_0) = 0 \text{ para } i \leq n.$$

Então, 0-conexo significa conexo por caminhos e 1-conexo significa simplesmente conexo.

Uma aplicação $\Phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induz uma aplicação $\Phi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ definida por $\Phi_*([f]) = [\Phi f]$ (ver [14], p. 340.). É imediato das definições que Φ_* está bem definida e é um homomorfismo se $n \geq 1$. Além disso, $(\Phi \circ \Psi)_* = \Phi_* \circ \Psi_*$, $(I_d)_* = I_d$ e se $\Phi_t : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é uma homotopia, então $(\Phi_0)_* = (\Phi_1)_*$.

Proposição 1.18. Se \mathbb{S}^k é a esfera unitária, então a seguinte igualdade é válida:

$$\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0 \text{ para } n < k.$$

Demonstração. Ver [14], p. 349. □

Definiremos um tipo especial de espaço topológico, o complexo CW , formado pela "colagem" de estruturas chamadas de n -células. Um dos principais interesses no estudo de CW -Complexos é encontrar equivalências homotópicas entre espaços topológicos desse tipo, ou seja, dado dois espaços CW -complexos, é interessante saber quando são deformáveis entre si. Para compreender este espaço topológico, vamos a seguinte definição.

Definição 1.27. Uma n -célula é um espaço homeomorfo ao n -disco aberto $D^n - \mathbb{S}^{n-1}$. Uma n -célula fechada é uma cópia homeomorfa ao n -disco fechado D^n .

Definição 1.28. Sejam X um espaço topológico e E uma família de n -células $\{e^{(n)}\}$, com n podendo variar. Se $X = \bigcup_{e \in E} \{e\}$, então, para cada $k \geq 0$, o k -esqueleto $X^{(k)}$ de X é definido como

$$X^{(k)} = \{e^{(n)} \in E \mid n \leq k\}.$$

Observamos que $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots = \bigcup_{k \geq 0} X^{(k)}$.

Munidos com as ideias acima, podemos definir formalmente um complexo CW .

Definição 1.29. Um complexo CW é uma terna (X, E, Φ) , onde X é um espaço de Hausdorff, E é uma família de n -células em X e $\Phi = \{\Phi_e \mid e \in E\}$ é uma família de aplicações tais que:

- (i) $X = \cup\{e \mid e \in E\}$ (união disjunta);
- (ii) Para cada n -célula $e \in E$, a aplicação $\Phi_e : (D^n; \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (e \cup X^{(n-1)}; X^{(n-1)})$ é um homeomorfismo relativo;
- (iii) Se e é uma n -célula em E , então seu fecho está contido em uma união finita de células em E ;
- (iv) X tem a topologia determinada por $\{\bar{e} \mid e \in E\}$.

De modo geral, um CW complexo é uma união finita de células abertas. Esta união é chamada de decomposição celular de X .

Teorema 1.19. *Toda variedade compacta de dimensão n tem o tipo de homotopia de um CW complexo finito de dimensão n .*

Demonstração. Ver [14], Corolário A.12, p. 529. □

1.5 Fibrados Vetoriais

Nesta seção, apresentamos conceitos iniciais sobre a teoria de fibrados.

Dada uma variedade diferenciável M , a cada ponto p de M é possível associar um espaço vetorial, o espaço tangente T_pM . Porém, para fins do nosso estudo, é interessante saber quando podemos associar um espaço vetorial a cada ponto de um espaço topológico de modo que o conjunto de todos estes espaços estejam conectados de forma diferenciável.

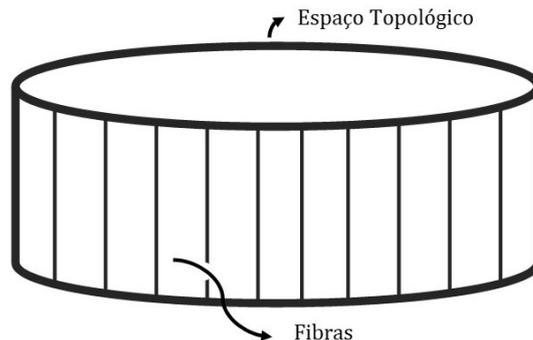


Figura 1.7: Fibras em um Espaço Topológico

De maneira geral um fibrado vetorial é uma família de espaços vetoriais que estão conectados à uma variedade de uma forma diferenciável. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 1.30. Sejam E e B espaços topológicos. Dizemos que a terna (E, π, B) é um fibrado vetorial localmente trivial de dimensão n sobre B se satisfaz as seguintes propriedades:

- i) A aplicação $\pi : E \longrightarrow B$ é contínua, sobrejetiva e $E_b := \pi^{-1}(b)$ tem estrutura de espaço vetorial n -dimensional sobre \mathbb{R} .
- ii) O Axioma da Trivialidade Local é satisfeito, isto é, para cada elemento em B existe uma vizinhança U e um homeomorfismo

$$f : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

tal que para cada b em U

$$f_b = f|_{E_b} : E_b \longrightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Denominamos o par (f, U) de carta vetorial, E o espaço total, E_b a fibra, B a base e π a projeção do fibrado.

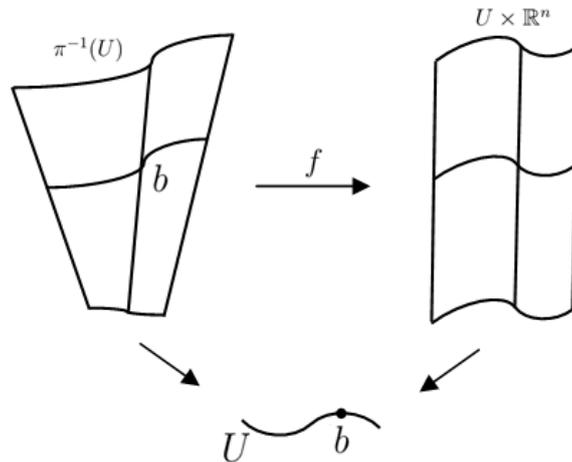


Figura 1.8: Trivialidade Local

Além disso, dizemos que o fibrado vetorial (E, π, B) é diferenciável se os espaços E e B são diferenciáveis, a aplicação π é diferenciável e f é um difeomorfismo.

Observação 1.4. Seja (E, π, B) um fibrado vetorial n -dimensional. Então as fibras E_b e $E_{b'}$ são isomorfas para todo b, b' em B . De fato, pelo Axioma de Trivialidade Local, temos que $f_b = f|_{E_b} : E_b \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo para todo elemento em B . Porém, os conjuntos $\{b\} \times \mathbb{R}^n$ e $\{b'\} \times \mathbb{R}^n$ são isomorfos para qualquer b, b' em B . Portanto, $f_{b'}^{-1} \circ f_b : E_b \rightarrow E_{b'}$ define um isomorfismo entre as fibras E_b e $E_{b'}$.

Exemplo 1.11. Sejam E o cilindro em \mathbb{R}^3 e $\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^1$. Então (E, π, \mathbb{S}^1) é um fibrado vetorial sobre \mathbb{S}^1 . De fato, como E é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, a aplicação

$$\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^1$$

é a projeção canônica, que é contínua e sobrejetiva. Basta mostrar que π cumpre o Axioma de Trivialidade Local.

Note que, para cada $x \in \mathbb{S}^1$ qualquer vizinhança U de x é tal que $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} f : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é um homeomorfismo, a saber aplicação identidade. Além disso, para cada $x \in U$, a fibra $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}$. Daí,

$$f_x: \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{S}^1$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

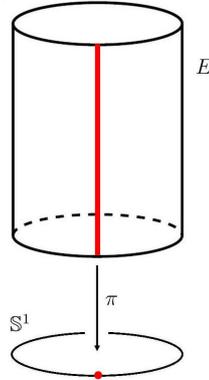


Figura 1.9: Projeção do cilindro em \mathbb{S}^1

Logo, a aplicação π é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Se um fibrado vetorial localmente trivial sobre B tem uma carta vetorial, o denominamos de fibrado trivial.

Um exemplo simples de um fibrado trivial é dado da seguinte forma:

Exemplo 1.12. Seja M uma variedade diferenciável. O fibrado $(M \times \mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{R}^n)$, onde π é a projeção na segunda coordenada, é um fibrado trivial.

É importante ressaltar que um fibrado vetorial localmente trivial não é necessariamente um fibrado trivial como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 1.13. Seja $E \subset \mathbb{R}^3$ a faixa de Möbius. A terna (E, π', \mathbb{S}^1) é um fibrado vetorial localmente trivial que não é trivial.

De fato, dado um ponto x em \mathbb{S}^1 e uma vizinhança U deste ponto, que é um arco de \mathbb{S}^1 , temos na figura 1.10 que o $\pi'^{-1}(U)$ é uma fatia de quatro quadrados de comprimento e um quadrado de largura. Note também que existe um homeomorfismo ϕ entre uma fatia de E e uma fatia do cilindro C (exemplo 1.11). Portanto, (E, π', \mathbb{S}^1) é um fibrado localmente trivial. Entretanto, a faixa de Möbius não é o espaço total de um fibrado trivial, pois não podemos escrever E como o produto cartesiano de \mathbb{S}^1 com um intervalo J , caso contrário, a Faixa de Möbius seria homeomorfa ao cilindro, o que é absurdo.

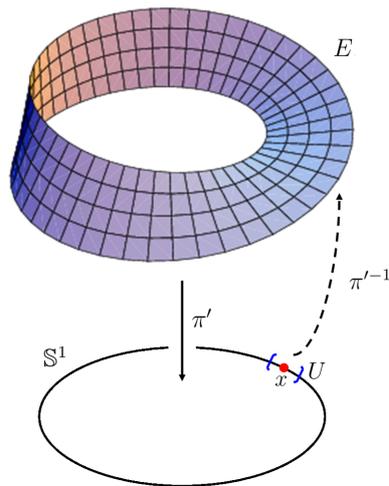


Figura 1.10: Projeção da faixa de Möbius em \mathbb{S}^1

Proposição 1.20. Se (E, π, B) é um fibrado vetorial tal que o espaço base B é contrátil, então a trivialização é global.

Este fato segue diretamente das definições. De fato, como o espaço base tem a homotopia de um ponto, então só existirá uma carta vetorial.

Definição 1.31. Sejam (E, π, B) um fibrado vetorial e E' um subconjunto de E . Se em torno de cada $b \in B$ existir uma carta (f, U) com

$$f(\pi^{-1}(U) \cap E') = U \times \mathbb{R}^k \subset U \times \mathbb{R}^n$$

então $(E', \pi|_{E'}, B)$ é um fibrado vetorial sobre B denominado subfibrado de E de dimensão k .

Definição 1.32. Sejam (E, π, B) e (E', π', B) fibrados vetoriais sobre B . Um homomorfismo de fibrados é uma aplicação contínua $f: E \rightarrow E'$ tal que cada aplicação $f_b: E_b \rightarrow E'_b$ é linear e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \swarrow \pi' \\ & & B \end{array}$$

comuta.

Definição 1.33. Uma seção de um fibrado vetorial (E, π, B) é uma aplicação contínua $\sigma: B \rightarrow E$, tal que $\sigma(b)$ está em E_b para todo elemento b de B .

Exemplo 1.14. A aplicação definida por

$$\begin{aligned} \zeta: B &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto 0_x \end{aligned}$$

onde $0_x \in E_x$, é um exemplo trivial de uma seção de um fibrado vetorial, chamado de seção nula e denotamos por ζ .

Observação 1.5. Se $\sigma: B \rightarrow E$ é uma seção, então $\sigma: B \rightarrow \sigma(B)$ é um homeomorfismo. Assim, como a base do fibrado é homeomorfo a imagem de qualquer seção de um fibrado, podemos sempre tomar a imagem de qualquer seção como base.

Exemplo 1.15. Seja M uma variedade diferenciável. Definimos fibrado tangente como o terna (TM, π, M) tal que

$$i) \quad TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$$

ii) A projeção canônica π é dada por

$$\begin{aligned} \pi: TM &\rightarrow M \\ T_x M &\mapsto x \end{aligned}$$

Se (f, U) é uma carta em M , então a aplicação

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\bar{f}} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f \times Id} f(U) \times \mathbb{R}^n$$

é um homeomorfismo, onde \bar{f} leva um curva $\gamma \in T_x M$ no par $(\gamma(0), (f\gamma)'(0))$. Além disso, a aplicação que leva $T_x M \mapsto \{b\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Portanto, π é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Em outras palavras, o fibrado tangente TM é a união dos planos tangentes à uma variedade dispostos de uma forma diferenciável.

Exemplo 1.16. Consideramos a variedade \mathbb{S}^1 . O fibrado tangente $T\mathbb{S}^1$ sobre o círculo \mathbb{S}^1 é formado pela união disjunta de todas as retas tangentes à \mathbb{S}^1 dispostas de forma diferenciável (figura 1.11).

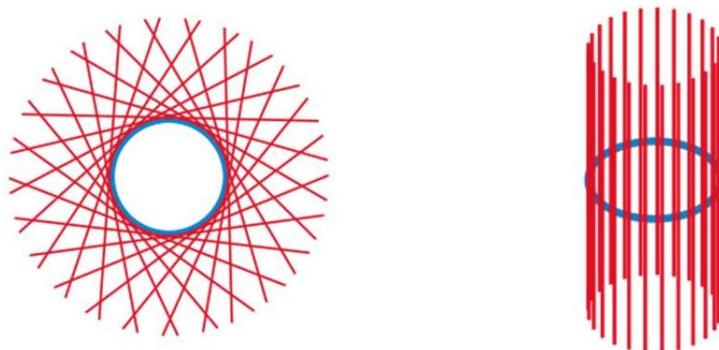


Figura 1.11: Fibrado Tangente $T\mathbb{S}^1$

Definição 1.34. Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial é uma seção diferenciável do fibrado tangente, isto é, uma aplicação $\sigma : M \rightarrow TM$.

Definição 1.35. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades com diferencial $Df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, podemos definir a aplicação diferenciável entre fibrados tangentes $T_f : TM \rightarrow TN$ como $T_f(p, v) = (f(p), Df_p(v))$, onde v é um vetor de T_pM .

1.6 Estratificação de Whitney

Seja $V = f^{-1}(0)$ uma variedade algébrica onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação com coordenadas polinomiais. Em [41] Whitney mostrou que V pode ser particionada em finitas subvariedades diferenciáveis e conexas em \mathbb{R}^n . Posteriormente, em [42] Whitney refinou sua definição estabelecendo o conceito de estratificação de variedades analíticas reais e complexas.

De modo geral, o objetivo de uma estratificação é dividir uma variedade analítica em subvariedades disjuntas, diferenciáveis tais que estas subvariedades satisfazem certas propriedades chamadas de condições de Whitney.

Definição 1.36. Sejam M uma variedade diferenciável e $S \subset M$ um subconjunto qualquer de M . Uma estratificação localmente finita de S é uma partição $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de S em subvariedades de M , tais que para todo $p \in S$ existe uma vizinhança aberta U de p em M que intersecta apenas uma quantidade finita de elementos de $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Cada componente S_α é chamada de estrato.

Exemplo 1.17. Sejam $M = \mathbb{R}^3$ e C o cone dado por $x^2 + y^2 = z^2$ e $z \geq 0$. Então $\{S_1, S_2\}$ é uma estratificação localmente finita de C , onde $S_1 = \{0\}$ e $S_2 = C \setminus S_1$.

Definição 1.37. Seja $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma estratificação de S . Dizemos que $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$ satisfaz a condição de fronteira se para quaisquer dois estratos S_α, S_β de uma estratificação $\{S_\alpha\}$ com $S_\alpha \cap \bar{S}_\beta \neq \emptyset$ temos $S_\alpha \subset \bar{S}_\beta$, onde \bar{S}_β é o fecho topológico de S_β . Note que como os estratos são disjuntos, então se $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$ satisfaz a condição de fronteira temos que $S_\alpha = S_\beta$ ou $S_\alpha \subset \bar{S}_\beta \setminus S_\beta$.

Exemplo 1.18. Considere a estratificação do cone dada no exemplo [1.17]. Então a condição de fronteira é satisfeita. De fato, como $\bar{S}_2 = C$ temos:

$$S_1 \cap \bar{S}_2 = \{0\} \text{ e } \{0\} = S_1 \subset \bar{S}_2 = C.$$

Definição 1.38. Seja $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma estratificação de um conjunto S . Dizemos que $\{S_\alpha\}_{\alpha \in J}$ satisfaz as condições de Whitney se para todo par (S_α, S_β) tal que $S_\beta \subset \bar{S}_\alpha$ e todo ponto $y \in S_\beta$, temos:

- a) Dada qualquer seqüência de pontos $\{x_n\}$ em S_α que converge para y tal que o $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} S_\alpha = T$ existe na Grassmanniana correspondente, então $T_y S_\beta \subset T$.
- b) Dada qualquer seqüência de pontos $\{y_n\}$ em S_β que converge para y tal que o $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_n y_n} = \lambda$ existe no espaço projetivo, então $\lambda \subset T$.

Se uma estratificação localmente finita $\{S_\alpha\}$ satisfaz a condição de fronteira e as condições de Whitney, dizemos que $\{S_\alpha\}$ é uma *estratificação de Whitney*.

Apresentamos agora um resultado importante sobre as condições de Whitney.

Proposição 1.21. Sejam S_α e S_β estratos de uma estratificação um subconjunto S de uma variedade diferenciável M . Se o par (S_α, S_β) satisfaz a condição b em y então também satisfaz a condição a em y .

Demonstração. Como as condições a e b são locais, podemos supor que S_α e S_β são subvariedades do \mathbb{R}^n . Consideramos $\{x_n\}$ uma seqüência de pontos em S_α que converge para y e os planos tangentes $T_{x_n} S_\alpha$ convergem para algum $T \subset T_y \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Devemos mostrar que $T_y S_\beta \subset T$. Suponhamos, por absurdo, que $T_y S_\beta \not\subset T$. Então existe uma linha $l \subset \mathbb{R}^n$ passando pela origem tal que $l \subset T_y S_\beta$ mas $l \not\subset T$. Como $l \subset T_y S_\beta$, podemos escolher uma seqüência de pontos $\{y_n\}$ em S_β que converge para y tal que $y_i \neq x_n$ e $\overline{x_n y_n} \rightarrow l$. Entretanto, como $l \not\subset T$ segue que a condição b não vale, chegando a uma contradição. \square

Exemplo 1.19. Seja C o cone com vértice na origem. Consideramos a estratificação $\{S_1, S_2\}$ com S_1 uma geratriz do cone e $S_2 = C \setminus \{S_1\}$. Então, esta estratificação não satisfaz as condições de Whitney.

De fato, se considerarmos uma seqüência $\{x_n\} \subset C$ sobre uma geratriz do cone diferente de S_1 e outra seqüência $\{y_n\}$ na geratriz S_1 , ambas convergindo para a origem tal que o seguimento $\overline{x_n y_n}$ tenha sempre a mesma direção λ . A condição a não é satisfeita pois $\lim T_0 S_1 \not\subset \lim T_{x_i} S_2$. Além disso, pela Proposição 1.21, segue que a condição b de Whitney também não é satisfeita. Geometricamente, é fácil observar que a condição b não é satisfeita porque $\lambda \not\subset \lim T_{x_i} S_2$.

Entretanto, se consideramos a estratificação formada por $\{S_1, S_2, S_3\}$ tal que S_1 é a origem, S_2 é uma geratriz menos a origem e $S_3 = C \setminus (S_1 \cup S_2)$, temos que esta estratificação satisfaz as condições de Whitney.

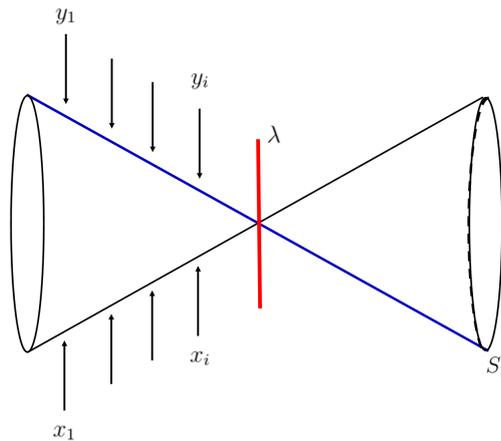
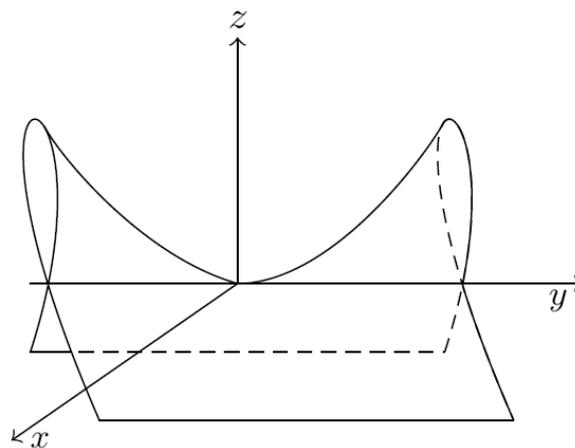


Figura 1.12: Estratificação do cone C

Exemplo 1.20. Seja $S = f^{-1}(0)$ o conjunto de zeros da função polinomial $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y^3 + x^3 - z^2x^2$.



Seja $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ uma estratificação de S , onde S_1 é a parte regular de S e S_2 o eixo da coordenada z . Se tomarmos uma sequência $\{x_n\}$ em S_1 que converge para a origem, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} S_1 = P$, onde P é o plano zy . Além disso, $T_0 S_2 = S_2$. Logo, $T_0 S_2 \subset P$. Note que a condição b de Whitney não vale, pois se tomarmos uma sequência $\{y_n\}$ em S_2 convergindo para a origem tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n y_n} = \lambda$, temos que $\lambda \notin P$.

Proposição 1.22. Seja Z um subespaço analítico não singular, X, Y subespaços de Z com estratificações de Whitney $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$. Suponha que para todo i, j , os estratos X_i, X_j são transversais. Então, $\{X_i \cap Y_i\}$ é uma estratificação de Whitney de $X \cap Y$.

Demonstração. Ver [37], Lema 4.2.2, p. 404. □

O próximo teorema ilustra porque estratificações de Whitney constituem uma boa ferramenta para o estudo de variedades analíticas.

Dada uma variedade analítica V , um questionamento natural é sob quais condições V admite uma estratificação de Whitney. Em [40], Whitney mostrou o seguinte resultado:

Teorema 1.23. *Toda variedade analítica complexa X admite uma estratificação de Whitney.*

Demonstração. Ver [40], Teorema 19.2, p. 540. □

Capítulo 2

Teoremas de Fibração de Ehresmann e Lemas de Isotopia de Thom

Provaremos neste capítulo os Teoremas de Fibração de Ehresmann, o Primeiro Lema de Isotopia de Thom e enunciaremos o segundo Lema de Isotopia de Thom. Estes resultados nos dizem sob quais condições uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis é a projeção de um fibrado localmente trivial. As principais referências são [10], [25] e [35].

2.1 Teoremas de Fibração de Ehresmann

Nesta seção, vamos tratar de aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis.

Da Definição 1.30, sabemos que uma projeção de um fibrado localmente trivial é sempre sobrejetora. Uma pergunta natural é sob que condições uma aplicação sobrejetora entre variedades diferenciáveis é a projeção de um fibrado localmente trivial. Uma condição é dada pelo Teorema de Fibração de Ehresmann que estudamos a seguir.

Teorema 2.1 (Teorema de Fibração de Ehresmann para variedades sem bordo). *Sejam M, N variedades diferenciáveis sem bordo de dimensões $n + k$ e n , respectivamente e $f: M \rightarrow N$ uma submersão própria. Então, f é a projeção de um fibrado localmente trivial.*

A ideia da demonstração será a seguinte: Pelo Teorema do Posto, uma submersão é localmente uma projeção $\mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assim, localmente, toda submersão é uma projeção de um fibrado localmente trivial. Então, usando que a aplicação f é própria, construímos um campo vetorial em cada vizinhança de cada ponto, e usamos partição da unidade para construir um campo vetorial em todo espaço.

Demonstração. A prova a seguir é dada por B. I. Dundas em [10].

Como N é uma variedade diferenciável, para cada ponto de N existe uma vizinhança aberta desse ponto difeomorfa a um aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Assim, como no Teorema de Fibração de Ehresmann a questão é local, podemos assumir que $N = \mathbb{R}^n$, e então, demonstrar o Teorema 2.1 é equivalente à provar que existe um difeomorfismo $h: M \rightarrow \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) \\ f \downarrow & \swarrow \pi & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array} \quad (2.1)$$

comuta.

Se $M = \emptyset$, então, como $f^{-1}(0) = \emptyset$ e $\emptyset = \mathbb{R}^n \times \emptyset$, o diagrama 2.1 comuta por vacuidade. Suponhamos que $M \neq \emptyset$. Seja $p_0 \in M$ e $r = f(p_0) \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema do Posto (ver [10] p. 78), temos que para todo $p \in f^{-1}(r)$ existem vizinhanças coordenadas $x_p: U_p \rightarrow U'_p$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{f|_{U_p}} & \mathbb{R}^n \\ x_p \downarrow & & \downarrow id_{\mathbb{R}^n} \\ U'_p \subset \mathbb{R}^{n+k} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Escolhemos uma partição da unidade $\{\lambda_j\}$, formada por aplicações contínuas $\lambda_j: M \rightarrow [0, 1]$, subordinada à cobertura $\{U_p\}$ (ver [10], Teorema 9.2.2, p. 156). Para cada j , escolhemos p tal que o suporte $supp(\lambda_j) \subset U_p$ e seja $x_j = x_p$ de modo que se tenha uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas. Definimos o campo de vetores $X_{ij}: U_j \rightarrow TU_j$ como a aplicação que associa cada $q \in U_j$ à transformação linear $w_{ij}(q)(t) = x_j^{-1}(x_j(q) + e_it)$, onde $e_i \in \mathbb{R}^n$ é o i -ésimo vetor unitário e $i = 1, \dots, n$.

Sejam $X_i: M \rightarrow TM$ dada por $X_i = \sum_j \lambda_j X_{ij}$ e $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas n primeiras coordenadas. Temos que $f(u) = \pi(x_j(u))$ para todo $u \in U_j$. Assim,

$$\begin{aligned} (f \circ w_{ij}(q))(t) &= f \circ x_j^{-1}(x_j(q) + e_it) \\ &= \pi \circ x_j \circ x_j^{-1}(x_j(q) + e_it) \\ &= \pi(x_j(q) + e_it) \\ &= f(q) + e_i, \text{ pois } i \leq n. \end{aligned}$$

Além disso, como $\sum_j \lambda_j(q) = 1$ para todo $q \in M$, temos que

$$\begin{aligned}
 (T_f \circ X_i)(q) &= \sum_j \lambda_j(q) [f \circ w_{ij}(q)] \\
 &= \sum_j \lambda_j(q) [t \mapsto f(q) + e_i t] \\
 &= 1 [t \mapsto f(q) + e_i t] \\
 &= [f(q) + e_i t].
 \end{aligned}$$

Assim, pela definição da aplicação T_f , temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{T_f} & T\mathbb{R}^n \\
 X_i \uparrow & & \uparrow D_i \\
 M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

comuta para todo $i = 1, \dots, n$.

Observamos que para cada i fixado, a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = u + te_i$ é a única solução para o problema de valor inicial $\alpha'(t) = e_i$ e $\alpha(0) = u$. Assim, seja $\Phi_i : A_i \rightarrow M$ o fluxo local correspondente à X_i e consideramos J_p uma seção de A_i no ponto q em M , isto é, $A_i \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = J_p \times \{p\}$. Para cada p fixado consideramos a linha de fluxo $\alpha(t) = \Phi(t, q)$. Como as linhas de fluxo são as curvas solução, o triângulo no diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TM & \xrightarrow{T_f} & T\mathbb{R}^n \\
 & \nearrow \alpha & \uparrow x_i & & \uparrow D_i \\
 J_q & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

onde T_f está definida em [1.35](#). Além disso, notamos que:

- $T_f \circ D_\alpha = D_i \circ f \circ \alpha = (D_i \circ f) \circ \alpha = D_f \circ \alpha$
- $(f \circ \alpha) = f(\alpha(0)) = f(q)$

e, por unicidade:

$$(f \circ \Phi)(t, q) = f(\Phi(t, q)) = (f \circ \alpha)(t) = f(q) + te_i. \quad (2.2)$$

Vamos mostrar que $A_i = \mathbb{R} \times M$. Pela equação [2.2](#), temos que a imagem de um intervalo aberto finito por $\Phi_i(-, q)$ está contido em um compacto K . Logo, a imagem de um intervalo aberto finito sob $f \circ \Phi_i(-, q)$ está contido em $f^{-1}(K)$, que é compacto pois f

é própria. Mas se $J_q \neq \mathbb{R}$ a aplicação $\Phi_i(-, q)$ leva qualquer compacto em um tempo finito (ver Corolário 8.8.3 em [10]), o que é absurdo, donde, $J_q = \mathbb{R}$ e $A_i = \mathbb{R} \times M$. Portanto, todos os fluxos Φ_i são globais e podemos definir o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \times f^{-1}(r_0) &\longrightarrow M \\ (t, q) &\longmapsto \Phi_1(t_1, \Phi_2(t_2, \dots, \Phi_n(t_n, q) \dots)) \end{aligned}$$

com inversa

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times f^{-1}(r_0) \\ q &\longmapsto (f(q) - r_0, \Phi_n((r_0)_n - f_n(q), \dots, \Phi_1((r_0)_1 - f_1(q), q) \dots)) \end{aligned}$$

Por fim, observamos que ϕ ser sobrejetiva implica que f é sobrejetiva, e então, podemos escolher qualquer ponto r_0 de \mathbb{R}^n . Em particular, podemos escolher $r_0 = 0$. Então, $h : M \longrightarrow \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0)$ é o difeomorfismo tal que o diagrama [2.1] comuta. \square

Observação 2.1. É possível obter uma versão do teorema anterior substituindo a hipótese de f ser própria pela condição que para cada $y \in N$ as fibras $f^{-1}(y)$ sejam compactas. De fato, basta observar que no início da demonstração tomamos um elemento p na fibra $f^{-1}(r_0)$. Assim, podemos diminuir a vizinhança U_p de p de forma que $U_p \subset f^{-1}(r_0)$.

Teorema 2.2 (Teorema de Fibração de Ehresmann para variedades com bordo). *Sejam M, N variedades diferenciáveis com bordo de dimensão $n + k$ e n , respectivamente. Consideramos $f : M \longrightarrow N$ uma submersão própria. Então, f é a projeção de um fibrado localmente trivial.*

Demonstração. Pela Proposição [1.2] temos que ∂X é uma variedade diferenciável sem bordo. Como $X = \text{Int}X \cup \partial X$, basta repetir a demonstração do Teorema [2.1] para o interior e fronteira de X . \square

Se temos agora \mathcal{S} uma estratificação de Whitney de uma variedade diferenciável M e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação própria que é uma submersão em cada estrato, o Primeiro Lema de Isotopia de Thom nos garante f é a projeção de um fibrado localmente trivial. Para provar este Teorema, precisamos de algumas definições e resultados que são dados nas seguintes seções.

2.2 Vizinhanças Tubulares

Nesta seção, cujas principais referências são [25], [30] e [4], definimos o conceito de vizinhança tubular e enunciamos um resultado que estabelece a existência e unicidades de tais vizinhanças.

Geometricamente, podemos exemplificar a construção da vizinhança tubular da seguinte forma: no plano, consideramos uma curva diferenciável M sem auto-interseções. Em cada ponto p da curva, trace uma linha l_p perpendicular à curva. A menos que esta curva seja uma reta, estas linhas podem se cruzar de forma complicada. No entanto, se olharmos uma vizinhança pequena U em torno da curva, as linhas l_p e l_q não se cruzam, se $p \neq q$ (ver Figura 2.1). Podemos então definir uma vizinhança aberta $U = \bigcup_{p \in M} l'_p$ de M , onde l'_p é uma vizinhança suficientemente pequena da linha l_p .

A variedade U munida com a projeção $\pi : U \rightarrow M$ que envia cada ponto $p \in U$ para o único ponto $x \in M$ com $x \in l_p$ define um fibrado vetorial em M .

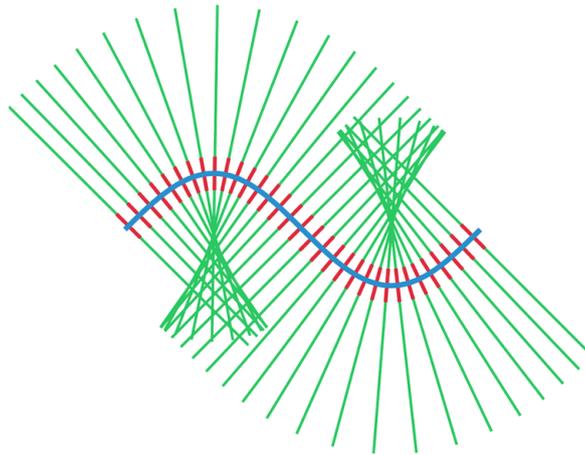


Figura 2.1: Vizinhança Tubular

Para estender esta construção para uma variedade suave M precisamos introduzir algumas definições.

Definição 2.1. Um produto interno em um fibrado vetorial (E, π, M) é uma aplicação que associa a cada fibra $E_b = \pi^{-1}(b)$, um produto interno $\langle \cdot \rangle$ com a seguinte propriedade: se U é um aberto M e σ_1 e σ_2 são duas seções diferenciáveis de E sob U , e $u \in U$, temos que a aplicação

$$u \mapsto \langle \sigma_1(u), \sigma_2(u) \rangle,$$

é diferenciável. Em outras palavras, um produto interno em um fibrado vetorial é uma família de produtos que variam suavemente em cada fibra de E .

Seja (E, π, M) um fibrado munido com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $\pi : E \rightarrow M$ é a projeção do fibrado sobre a variedade M e ϵ é uma função positiva em M , definimos a ϵ -bola aberta como o conjunto

$$B_\epsilon = \{ e \in E \mid \|e\| < \epsilon(\pi(e)) \}$$

onde, $\|e\| = \sqrt{\langle e, e \rangle}$.

Agora, consideramos M uma variedade diferenciável e X uma subvariedade de M .

Definição 2.2. Definimos uma vizinhança tubular T de X como a tripla (E, ϵ, φ) , onde $E = (E, \pi, X)$ é um fibrado munido com um produto interno, ϵ é uma função diferenciável positiva em X e φ é um difeomorfismo de $B_\epsilon \subset E$ em um subconjunto aberto de M que comuta com a seção nula ζ de E , isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B_\epsilon & \\ \zeta \uparrow & \searrow \varphi & \\ X & \hookrightarrow & M \end{array}$$

é comutativo.

Note que X pode ser visto canonicamente mergulhado em E como imagem da seção ζ . Em outras palavras, uma vizinhança tubular de X em M é uma vizinhança aberta de X em M difeomorfo a uma vizinhança da seção nula ζ no fibrado (E, π, X) (ver [4] p. 231). Chamamos o conjunto $|T| = \varphi(B_\epsilon)$ de tubo.

Definimos a projeção associada a T como a aplicação

$$\pi_T := \pi \circ \varphi^{-1} : |T| \rightarrow X.$$

Também podemos definir a função tubular associada a T como a aplicação

$$\rho_T := \rho \circ \varphi^{-1} : |T| \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo ponto e de $|T|$, $\rho(e) = \|e\|^2$.

Dado U subconjunto de X , definimos a restrição de T para U como a tripla $(E|U, \epsilon|U, \varphi|U)$.

Definição 2.3. Consideramos as vizinhanças tubulares $T = (E, \epsilon, \varphi)$ e $T' = (E', \epsilon', \varphi')$ de X em M . Dizemos que $\phi : E \rightarrow E'$ é um isomorfismo entre T e T' se existe uma função positiva ϵ'' em X tal que $\epsilon'' \leq \min\{\epsilon', \epsilon\}$ e $\varphi' = \phi|_{B_{\epsilon''}} = \varphi|_{B_{\epsilon''}}$.

Exemplo 2.1. Consideramos o mergulho natural de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m , $m = n + k$, e seja $(\mathbb{R}^m, \pi, \mathbb{R}^n)$ o fibrado vetorial trivial com a fibra típica \mathbb{R}^k . Sejam ϵ a função constante igual a 1 e $\varphi : T_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a restrição da função identidade em \mathbb{R}^n , com

$$T_{\mathbb{R}^n} = \{x = (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \mid \|v\| < 1\}.$$

Assim, a tripla $(\mathbb{R}^m, \epsilon, \varphi)$ constitui uma vizinhança tubular de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m , chamada de vizinhança tubular padrão.

Neste caso, a projeção $\pi_{\mathbb{R}^n} : |T_{\mathbb{R}^n}| \longrightarrow \mathbb{R}^m$ associada à vizinhança tubular $T_{\mathbb{R}^n}$ é a própria projeção ortogonal $(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n . Já a função tubular $\rho_{\mathbb{R}^n} : |T_{\mathbb{R}^n}| \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_{n+1}^2 + \dots + x_m^2,$$

calcula o quadrado da distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ ao espaço \mathbb{R}^n .

Observação 2.2. Se T e T' são vizinhanças tubulares isomorfas então temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \pi_T|_{\varphi(B_{\epsilon''})} &= \pi_{T'}|_{\varphi(B_{\epsilon''})} \\ \rho_T|_{\varphi(B_{\epsilon''})} &= \rho_{T'}|_{\varphi(B_{\epsilon''})} \end{aligned}$$

Proposição 2.3. [Unicidade da Vizinhança Tubular] Sejam M uma subvariedade fechada da variedade N e T, T' vizinhanças tubulares fechadas de M em N . Então existe uma isotopia H_t de uma aplicação identidade de $\iota : N \longrightarrow N$ tal que $\iota(M) \subset M$ e tal que $H_1|_T$ é uma isometria $T \longrightarrow T'$.

Demonstração. Ver [16], Teorema 3.5, p. 51. □

Consideramos M uma variedade diferenciável e \mathcal{S} uma estratificação de Whitney de um subconjunto S de M . Para cada estrato X de \mathcal{S} , consideramos T_X a vizinhança tubular de X em M , então π_X é a projeção associada a T_X e ρ_X a função tubular associada a T_X .

Definição 2.4. Definimos dados de controle para \mathcal{S} como uma família $\{T_X\}$ de vizinhanças tubulares tais que se X e Y são estratos e $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$, então

$$\pi_X \circ \pi_Y(m) = \pi_X(m) \tag{2.3}$$

$$\rho_X \circ \pi_Y(m) = \rho_X(m) \tag{2.4}$$

para todo $m \in |T_X| \cap |T_Y|$ com $\pi_Y(m) \in |T_X|$.

Definição 2.5. Consideramos uma aplicação $f : M \longrightarrow P$ entre variedades diferenciáveis. Se para todo estrato X de \mathcal{S} e todo $m \in |T_X|$ temos $f \circ \pi_X(m) = f(m)$, dizemos que a família $\{T_X\}$ é compatível com f .

Nosso próximo objetivo é mostrar que se restrição de f a cada estrato de \mathcal{S} é uma submersão, então é sempre possível encontrar uma família de dados de controle compatível com ela. Para provar este resultado, precisamos dos seguintes lemas preliminares:

Lema 2.4. Sejam X uma subvariedade de M tal que $\text{codim } X = k$, T_X vizinhança tubular de X em M e x um ponto em X . Então, existe uma carta coordenada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que U é um aberto de M e x está em U de forma que $\varphi(X \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{m-k}$, e existe um isomorfismo que leva $\varphi_*(T_X|_{X \cap U})$ em $T_{\mathbb{R}^m}|_{\varphi(X \cap U)}$.

Demonstração. De fato, como M é uma variedade diferenciável e X é uma subvariedade de M , dado um ponto x em X existe uma vizinhança aberta U de x em M que é difeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^m . Assim, podemos considerar a carta

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Como φ é um difeomorfismo sobre a imagem e $\dim X = m - k$, temos que

$$\varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{m-k}$$

como queríamos. □

Consideramos $T = (E, \epsilon, \varphi)$ uma vizinhança tubular de X em M e ϵ' uma função diferenciável positiva definida em X , com $\epsilon' < \epsilon$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} |T|_{\epsilon'} &= \varphi(B_\epsilon \cap \overline{B_{\epsilon'}}) \\ |T|_{\epsilon'}^0 &= \varphi(B_\epsilon \cap B_{\epsilon'}) \\ \partial|T|_{\epsilon'} &= \varphi(B_\epsilon \cap \mathbb{S}_{\epsilon'}), \end{aligned}$$

onde \mathbb{S}_ϵ é a esfera no fibrado (E, π, M) definida pelo conjunto $\{v \in E \mid \|v\| = \epsilon'(\pi(v))\}$ e π é a projeção de E em X .

Lema 2.5. Sejam X e Y subvariedades de M disjuntas tais que o par (X, Y) , com $Y \subset \overline{X}$ satisfaz a condição b de Whitney. Seja T a vizinhança tubular de X em M . Então existe uma função positiva ϵ' em X tal que a aplicação

$$(\rho_T, \pi_T) : Y \cap |T|_{\epsilon'}^0 \rightarrow \mathbb{R} \times X \tag{2.5}$$

é uma submersão.

Demonstração. Consideramos o conjunto

$$\Sigma = \{y \in |T| \mid p_y < \dim(\mathbb{R} \times X)\}$$

onde p_y é o posto da aplicação (ρ_T, π_T) em y .

Queremos mostrar que para qualquer $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que para qualquer $y \in U$ temos que $y \notin \Sigma$, ou seja, $p_y = \dim(\mathbb{R} \times X)$ e assim, (ρ_T, π_T) será uma submersão para todo $y \in U$.

Como esta afirmação é local, temos pelo Lema anterior que existe um isomorfismo entre

$$\varphi_*(T_X|_{X \cap U}) \text{ e } T_{\mathbb{R}^m}|_{\varphi(X \cap U)}.$$

Assim, se $m = \dim M$ e $k = \text{codim } X$, é suficiente provar este resultado quando $M = \mathbb{R}^m$, $X = \mathbb{R}^{m-k} \times \{0\}_k$, com $\{0\}_k = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$, e T é a vizinhança tubular padrão $T_{\mathbb{R}^{m-k}}$.

Nestas condições, $\pi_{\mathbb{R}^{m-k}}$ é a projeção ortogonal de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^{m-k} e a função $\rho_{\mathbb{R}^{m-k}}$ determina o quadrado da distância de cada ponto de $|T_{\mathbb{R}^{m-k}}|$ à \mathbb{R}^{m-k} .

Seja y um ponto em $|T_{\mathbb{R}^{m-k}}|$ que não pertence à \mathbb{R}^{m-k} . O núcleo da diferencial $D(\rho_{\mathbb{R}^{m-k}}, \pi_{\mathbb{R}^{m-k}})_y$ é o complemento ortogonal da imagem

$$\overline{y\pi_T(y)} \oplus (\mathbb{R}^{m-k} \times 0_k)$$

em \mathbb{R}^m , onde $\overline{y\pi_T(y)}$ denota o seguimento de reta que passa por y e $\pi_T(y)$.

Como as subvariedades X e Y satisfazem a condição b de Whitney, temos que dadas as seqüências de pontos $\{x_n\}$ em X convergindo para y e $\{y_n\}$ em Y convergindo para y , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n \pi_{\mathbb{R}^{m-k}}(x_n)} = \overline{y \pi_{\mathbb{R}^{m-k}}(y)}$ existe no espaço projetivo, então $\overline{y \pi_{\mathbb{R}^{m-k}}(y)}$ está contido em $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} X \subset T_y Y$. De fato, o par $(T_{x_n} X, \overline{x_n \pi_{\mathbb{R}^{m-k}}(x_n)})$ gera um hiperplano de dimensão $(m-k)+1$, porque $T_{x_n} X$ tem dimensão $m-k$ e $\overline{x_n \pi_{\mathbb{R}^{m-k}}(x_n)}$ é uma reta. Assim, $T_y Y$ contém uma direção que corta transversalmente o núcleo da diferencial da aplicação $(\rho_{\mathbb{R}^{m-k}}, \pi_T \mathbb{R}^{m-k})$ no ponto y . Portanto, $y \notin \Sigma$ e, então, $(\rho_{\mathbb{R}^{m-k}}, \pi_T \mathbb{R}^{m-k})$ é uma submersão. \square

Agora, munidos dos Lemas podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 2.6. Sejam \mathcal{S} uma estratificação de Whitney de um subconjunto S de M e $f : M \rightarrow P$ uma submersão em cada estrato de \mathcal{S} . Então existe uma família $\{T_X\}$ de dados de controle para \mathcal{S} que é compatível com f .

Demonstração. Consideramos a família S_k de estratos de \mathcal{S} de dimensão menor ou igual a k . Seja \mathcal{S}_k a união de todos os estratos de S_k . Usamos indução sobre k para mostrar que a proposição é válida para \mathcal{S}_k e S_k .

Suponhamos que para cada estrato X de dimensão menor que k existe uma vizinhança tubular T_X de X tal que a família formada pelas vizinhanças tubulares satisfaz as condições de dados de controle, isto é, se X e Y são estratos tais que $X \subset \overline{Y}$, então

$$\pi_X \circ \pi_Y(m) = \pi_X(m) \quad (2.6)$$

$$\rho_X \circ \pi_Y(m) = \rho_X(m) \quad (2.7)$$

para todo $m \in |T_X| \cap |T_Y|$ com $\pi_Y(m) \in |T_X|$.

Diminuindo a vizinhança tubular T_X , se necessário, podemos supor que X e Y são estratos de dimensão menor que k de forma que a interseção de $|T_X|$ e $|T_Y|$ é vazia. Para podermos construir as vizinhanças tubulares sobre os estratos de dimensão k , podemos fazer um estrato de cada vez, já que estratos de mesma dimensão não satisfazem as condições de dados de controle.

Seja X um estrato de dimensão k . Vamos construir a vizinhança tubular T_X em dois passos. Para esta construção, consideramos U_l a união de todos $|T_Y|$ com $Y \subset \overline{X}$ tal que $\dim Y$ é maior ou igual a l , com $l \leq k$. Seja $X_l = U_l \cap X$. No primeiro passo, construímos uma vizinhança tubular T_l de X_l usando indução decrescente em l . No passo indutivo, vamos diminuir vizinhanças tubulares $|T_Y|$ uma quantidade finita de vezes. Por fim, no segundo passo, estendemos T_0 a uma vizinhança tubular T_X de X .

Primeiro passo:

Se $l = k$, temos que o conjunto X_l é vazio. Logo, não existe nada a ser construído. Agora, vamos usar indução decrescente sobre l . Suponhamos que T_{l+1} foi construída e que as seguintes relações de comutatividade são satisfeitas: se $Y \subset \overline{X}$, $\dim Y \geq l + 1$, $m \in |T_{l+1}| \cap |T_Y|$ e $\pi_{l+1}(m) \in |T_Y|$ com $\pi_{l+1} = \pi_{T_{l+1}}$, então

$$\rho_Y \circ \pi_{l+1}(m) = \rho_Y(m)$$

$$\pi_Y \circ \pi_{l+1}(m) = \pi_Y(m)$$

Se necessário, substituindo T_{l+1} por uma vizinhança menor, podemos supor que para um ponto m em $|T_{l+1}|$ existe um estrato $Z \subset \overline{X}$ com dimensão maior ou igual a l tal que $m \in |T_Z|$ e $\pi_{l+1}(m) \in |T_Z|$.

Basta construir T_l em $|T_Y| \cap X$ para cada estrato $Y \subset \overline{X}$ de dimensão l separadamente, pois dado dois estratos de dimensão l , temos que estes não são comparáveis, logo suas vizinhanças tubulares não se intersectam.

Agora, construímos uma vizinhança tubular $T_{X,Y}$ de $|T_Y| \cap X$ de forma que a seguinte relação de comutatividade é satisfeita: se m é um ponto de $|T_{X,Y}| \cap |T_Y|$ e

$\pi_{X,Y}(m)$ é um ponto de $|T_Y|$, onde $\pi_{X,Y} = \pi_{T_{X,Y}}$, temos que

$$\begin{aligned}\rho_Y \circ \pi_{X,Y}(m) &= \rho_Y(m) \\ \pi_Y \circ \pi_{X,Y}(m) &= \pi_Y(m)\end{aligned}$$

Note que, como $m \in |T_{l+1}|$, existe um subconjunto Z de X com $\dim Z > l$, $m \in |T_Z|$ e $\pi_{l+1}(m) \in |T_Z|$. Por esse fato, diminuindo $|T_Y|$ se necessário, podemos supor que se $m \in |T_{l+1}| \cap |T_Y|$ e $\pi_{l+1}(m) \in |T_Y|$, então a relação de comutatividade é satisfeita. Além disso, m pertence à $|T_Y|$ e $|T_Z|$, logo Y e Z são comparáveis e como $\dim Z > l$ e $\dim Y = l$, temos que $Y \subset \bar{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned}\rho_Y \circ \pi_{l+1}(m) &= \rho_Y \circ \pi_Z \circ \pi_{l+1}(m) = \rho \circ \pi_Z(m) = \rho_Y(m) \\ \pi_Y \circ \pi_{l+1}(m) &= \pi_Y \circ \pi_Z \circ \pi_{l+1}(m) = \pi_Y \circ \pi_Z(m) = \pi_Y(m)\end{aligned}$$

Mais uma vez, se necessário, podemos diminuir $|T_Y|$ para garantir que as relações acima estejam definidas para todo m em $|T_Y| \cap |T_{l+1}|$. Assim, pelo Lema [2.5](#) podemos supor que a aplicação $(\rho_Y, \pi_Y) : X \cap |T_Y| \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ é uma submersão. Agora, temos que verificar que $T_{X,Y}$ é compatível com a aplicação $(\rho_Y, \pi_Y) : X_{l+1} \cap |T_Y| \rightarrow \mathbb{R} \times Y$.

Pelo Lema [2.4](#) temos que se X_{l+1}^0 é um subconjunto aberto de X , de modo que $\overline{X_{l+1}^0} \subset X_{l+1}$ temos que existe uma vizinhança tubular $T_{X,Y}$ satisfazendo a relação de comutatividade cuja restrição a $|T_Y| \cap X_{l+1}^0$ é isomorfo à restrição de T_{l+1} . Vamos definir o estrato X'_{l+1} analogamente à X_{l+1} mas com uma vizinhança tubular T'_Z no lugar de T_Z . Substituindo a vizinhança tubular T_Z , com $Z \subset \bar{Y}$, por uma vizinhança tubular menor T'_Z de modo que $X'_{l+1} \subset X_{l+1}^0$, conseguimos construir a vizinhança $T_{X,Y}$ como as propriedades que queríamos.

Portanto, existe uma vizinhança tubular T_0 de X_0 satisfazendo as seguintes relações de comutatividade para quaisquer $X \subset \bar{Y}$:

$$\begin{aligned}\rho_Y \circ \pi_0(m) &= \rho_Y(m) \\ \pi_Y \circ \pi_0(m) &= \pi_Y(m)\end{aligned}$$

Segundo Passo:

Das equações anteriores, podemos assumir que T_0 é compatível com f . De fato, substituindo T_0 por uma vizinhança menor se necessários, podemos assumir que se $m \in |T_0|$, então para algum $Y \subset \bar{X}$ temos $m \in |T_Y|$ e $\pi_0(m) \in |T_Y|$. Então:

$$f \circ \pi_0(m) = f \circ \pi_Y \circ \pi_0(m) = f \circ \pi_Y(m) = f(m)$$

Como assumimos que T_0 é compatível com f , pelo Teorema [2.3](#) podemos estender

uma restrição adequada de T_0 à uma vizinhança T de X que ainda é compatível com f . Logo, pelo passo 1, substituindo T_Y por uma vizinhança menor temos que as condições de compatibilidade são satisfeitas. Portanto, construímos T_X como queríamos. \square

2.3 Grupos a um Parâmetro

Nesta seção, consideramos V um espaço topológico, que admite uma estratificação de Whitney \mathcal{S} formada por subconjuntos fechados de V . Além disso, seja \mathcal{J} a tripla $\{T_X, \pi_X, \rho_X\}$, tal que o estrato X é o conjunto $\{v \in |T_X| \mid \rho_X(v) = 0\}$, para quaisquer dois estratos X, Y de V temos que a aplicação $(\pi_{X,Y}, \rho_{X,Y}) : T_{X,Y} \rightarrow X \times (0, \infty)$ é uma submersão diferenciável, com $T_{X,Y}$ vizinhança tubular de $|T_Y| \cap X$ dada na prova de [2.6](#), e dados quaisquer estratos X, Y, Z de V , temos:

$$\begin{aligned}\pi_{X,Y} \circ \pi_{Y,Z}(v) &= \pi_{X,Z}(v) \\ \rho_{X,Y} \circ \pi_{Y,Z}(v) &= \rho_{X,Z}(v)\end{aligned}$$

para todo $v \in |T_{Y,Z}|$ e $\pi_{Y,Z} \in |T_{X,Y}|$.

Definição 2.6. Um campo vetorial estratificado η em V é uma seção contínua e diferenciável do fibrado tangente $TM|_V$ tal que para cada $v \in V$ o vetor $\eta(v)$ está contido no espaço tangente do estrato V_α que contém v .

Definição 2.7. Um grupo a um parâmetro de homeomorfismos de V é uma aplicação contínua $\alpha : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ tal que α_t é um homeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{t+s}(v) = (\alpha_s \circ \alpha_t)(v)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

Suponhamos que V seja um conjunto estratificado, α preserva cada estrato de \mathcal{S} e seja η um campo vetorial estratificado em V . Dizemos que η gera α se a seguinte condição é satisfeita: para qualquer v em V , a aplicação que associa a cada t o vetor $\alpha_t(v)$ é de classe C^1 e

$$\begin{aligned}\frac{d(\alpha_t(v))}{dt}\Big|_{t=0} &= \eta(v), \text{ isto é,} \\ \frac{d(\alpha_t(v))}{dt}\Big|_{t=0} &= \eta(\alpha_t(v)),\end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Como podemos ver em [\[17\]](#), o Teorema de Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias garante que qualquer campo vetorial de classe C^1 em uma variedade compacta sem fronteira gera um único grupo a um parâmetro. Entretanto,

para estender esse resultado para variedades não compactas, devemos generalizar a noção de grupos a um parâmetro.

Definição 2.8. Sejam V um espaço localmente compacto, J um aberto de $\mathbb{R} \times V$ e $\alpha : J \rightarrow V$ uma aplicação contínua. Dizemos que o par (J, α) é um grupo local a um parâmetro em V se

- (1) $0 \times V \subseteq J$;
- (2) Se $v \in V$, então o conjunto $J_v = J \cap (\mathbb{R} \times \{v\}) \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto (a_v, b_v) ;
- (3) Se $v \in V$ e $t, s, t + s \in (a_v, b_v)$, então $\alpha(t + s, v) = \alpha(t, \alpha(s, v))$;
- (4) Dado $v \in V$ e qualquer subconjunto compacto $K \subset V$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(t, v) \notin K$ para todo $t \in (a_v, a_v + \epsilon) \cup (b_v - \epsilon, b_v)$.

A partir de agora, consideramos η um campo vetorial estratificado em V .

Definição 2.9. Seja (J, α) um grupo local a um parâmetro em V . Dizemos que η gera α se as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) Cada estrato X de V é invariante por α , ou seja, $\alpha(J \cap (\mathbb{R} \times X)) \subseteq X$;
- (2) Para cada v em V a aplicação $\alpha : (a_v, b_v) \rightarrow Y$ que leva t em $\alpha(t, v)$, com Y um estrato que contém v é de classe C^1 ;
- (3) Para todo ponto v em V , temos

$$\left. \frac{d(\alpha(t, v))}{dt} \right|_{t=0} = \eta(v)$$

Mas como α é um grupo a um parâmetro, para qualquer $(t, v) \in J$ temos que:

$$\left. \frac{d(\alpha(t, v))}{dt} \right|_{t=0} = \eta(\alpha(t, v))$$

Definição 2.10. Dizemos que um campo vetorial estratificado η em V é controlado (por \mathcal{J}) se as seguintes condições de controle são satisfeitas: dado qualquer estrato Y existe uma vizinhança T'_Y de Y em T_Y tal que para qualquer outro estrato $\bar{X} \supseteq Y$ e qualquer ponto v em $T'_Y \cap X$, temos:

$$\begin{aligned} \eta_X \circ \rho_{Y,X} &= 0 \\ (\pi_{Y,X})_* \eta_X(v) &= \eta_Y(\pi_{Y,X})(v) \end{aligned}$$

Proposição 2.7. Seja η um campo vetorial controlado em V . Então, η gera um único grupo local a um parâmetro (J, α) .

Demonstração. Ver [25], Proposição 10.1, p. 53. □

Definição 2.11. Seja P uma variedade diferenciável e $f : V \rightarrow P$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma submersão controlada se satisfaz as seguintes condições:

- (1) para cada estrato X de V , $f|_X : X \rightarrow P$ é uma submersão diferenciável;
- (2) para qualquer estrato X de V , existe uma vizinhança T'_X de X em T_X tal que para todo ponto v em T'_X temos $f(v) = f \circ \pi_X(v)$.

Proposição 2.8. Se $f : V \rightarrow P$ é uma submersão controlada, então para qualquer campo de vetor diferenciável ζ em P , existe um campo de vetor controlado η em V tal que $f_*\eta(v) = \zeta(f(v))$ para todo v em V .

Demonstração. Ver [25], Proposição 9.1, p. 47. □

A prova do próximo resultado é semelhante à prova do Teorema 2.1. O seguinte resultado é usado como ferramenta na prova do Lema de Isotopia de Thom:

Corolário 2.9. Seja P uma variedade diferenciável e $f : V \rightarrow P$ uma submersão controlada própria. Então f é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Demonstração. Ver [25], Corolário 10.2, p. 56. □

Corolário 2.10. Seja M uma variedade diferenciável e \mathcal{S} uma estratificação localmente finita de um conjunto fechado V de M tal que qualquer par de estratos satisfaz a condição b de Whitney e os estratos são conexos. Então, \mathcal{S} é uma estratificação de Whitney de V , isto é, satisfaz a condição de fronteira.

Demonstração. Ver [25], Corolário 10.5, p. 60. □

2.4 Os Lemas de Isotopia de Thom

Nesta seção, consideramos M, M', P variedades diferenciáveis, S' um subconjunto fechado de M' e S um subconjunto fechado de M que admite uma estratificação de Whitney.

No Teorema 2.1, se $f : M \rightarrow P$ é uma aplicação diferenciável sobrejetiva entre variedades diferenciáveis que é uma submersão própria, temos que f é a projeção de um fibrado localmente trivial sobre sua imagem. Entretanto, se f não é uma submersão, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.11. [Primeiro Lema de Isotopia de Thom] Seja $f : M \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável. Suponhamos que a aplicação $f|_S : S \rightarrow P$ seja própria, sobrejetiva e que $f|_X : X \rightarrow P$ seja uma submersão para cada estrato X de S . Então, f é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Demonstração. Pela Proposição [2.6](#), existe um sistema de dados de controle $\{T_X\}$ de S que é compatível com f . Assim, S tem estrutura de um conjunto estratificado de modo que f é uma submersão controlada. Logo, pelo Corolário [2.9](#), f é a projeção de um fibrado localmente trivial. \square

Quando $P = \mathbb{R}$, o Primeiro Lema de Isotopia de Thom implica que se $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e $f|_S : S \rightarrow I$ está nas condições do teorema, então $f^{-1}(u)$ e $f^{-1}(v)$ são homeomorfos para todo $u, v \in I$.

Exemplo 2.2. Seja E uma variedade algébrica real de \mathbb{R}^3 dada pelo conjunto solução da função polinomial

$$f(x, y, t) = xy(x - y)(x - ty).$$

Consideramos $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção no eixo t e o tubo T dado por conjunto $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. O conjunto

$$V = E \cap T \cap \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 1\}$$

é semi algébrico.

Note que a aplicação π de V em um intervalo aberto $(0, 1)$ da reta é própria. De fato, dado um subconjunto compacto K no eixo t , temos que K é fechado e limitado, pois K é um subconjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Assim, $\pi^{-1}(K)$ é limitado por estar contido no tubo $|T|$ e é fechado pelo fato de π ser uma aplicação contínua.

Vamos estratificar o conjunto V da seguinte forma: $S_1 = \{(0, 0)\} \times \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 1\}$, $S_2 = V \cap \partial T$ e $S_3 = V \setminus (S_1 \cup S_2)$. Assim, restringindo π às componentes conexas $\overline{S_i}$ de cada estrato S_i , para $i = 1, \dots, 3$, temos que esta restrição é uma submersão. De fato, pela Proposição [1.1](#), os pontos críticos da restrição da aplicação π a cada estrato são:

- i) Os pontos críticos da $D\pi_x$, isto é, são os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que $z = 0$;
- ii) Os pontos x tais que $T_x \overline{S_i} \subset \text{Ker}(D\pi_x)$.

Porém, *i*) não acontece, pois $V = E \cap T \cap \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 1\}$. E para cada ponto $x \in \overline{S_i}$, a aplicação

$$D(\pi|_{\overline{S_i}})x = \pi : T_x \overline{S_i} \rightarrow \mathbb{R}$$

não é a aplicação nula.

Além disso, $\pi|_{S_i}$ é sobrejetiva no intervalo aberto $(0, 1)$ por ser a restrição da projeção.

Portanto, pelo primeiro Lema de Isotopia de Thom, temos que π é a projeção de um fibrado localmente trivial.

A partir de agora, suponhamos que M' seja uma variedade diferenciável e que S' é um subconjunto fechado de M' que admite uma estratificação de Whitney. Consideramos uma aplicação diferenciável $g : M' \rightarrow M$ tal que $g(S')$ está inteiramente contido em S . O Segundo Lema de Isotopia de Thom é um resultado análogo ao primeiro Lema considerando aplicações no lugar de espaços. Buscamos saber sob quais condições o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{g} & S \\ f \circ g \downarrow & & \swarrow f \\ & & P \end{array} \quad (2.8)$$

é localmente trivial, isto é, dado $p \in P$, existe uma vizinhança U de p , espaços U_0 e U'_0 , uma aplicação $\varphi : U_0 \rightarrow U'_0$, homeomorfismos φ e ψ tais que $(f \circ g)^{-1}(U)$ é homeomorfo à $U_0 \times U$ pela φ e $f^{-1}(U)$ é homeomorfo à $U'_0 \times U$ pela ψ , e que deixam o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} (f \circ g)^{-1}(U) & \xrightarrow{g} & & \xrightarrow{g} & f^{-1}(U) \\ & \searrow f \circ g & & \swarrow f & \\ & & U & & \\ \varphi \downarrow & & \swarrow \pi_2 & & \searrow \pi_2 \\ U_0 \times U & \xrightarrow{\varphi \times I_d} & & \xrightarrow{\varphi \times I_d} & U'_0 \times U \\ & & \psi \downarrow & & \end{array}$$

Assim, temos que localmente, f é a projeção na segunda coordenada, isto é, f é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Para enunciá-lo, precisamos da condição a_g de Thom, que de modo geral, equivale à condição a de Whitney só que considerando aplicações em vez de olhar os espaços.

Consideramos S'_α e S'_β subvariedades de M' tais que $S'_\beta \subset \overline{S'_\alpha}$ e as restrições $g|_{S'_\alpha}$ e $g|_{S'_\beta}$ são submersões.

Definição 2.12. Dizemos que as subvariedades S'_α e S'_β satisfazem a condição a_g de Thom se dado p em S'_β e qualquer sequencia de pontos $\{q_n\}$ em S'_α que converge para p de modo que a sequência de planos $Ker(D(g|_{S'_\alpha})_{q_n})$ existe no fibrado Grassmanniano adequado, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ker(D(g|_{S'_\alpha})_{q_n}) = \tau$$

temos que $Ker(D(g|_{S'_\beta})_p) \subset \tau$.

Dizemos que uma estratificação \mathcal{S} de uma variedade M satisfaz a condição a_g de Thom se para qualquer par de estratos S'_α e S'_β em \mathcal{S} , com $S'_\beta \subset \overline{S'_\alpha}$, a condição a_g de Thom é satisfeita.

Observamos que esta definição pode ser feita tomando a sequência de planos tangentes à fibra, pois $Ker(D(g|_{S'_\alpha})_{q_n}) = T_{q_n}(g^{-1}(q_n)) \cap S'_\alpha$.

A condição a_g de Thom é importante por diversas razões. Por exemplo, ela é um hipótese essencial do segundo Lema de Isotopia de Thom que permite concluir quando uma aplicação pode ser trivializada. Além disso, a condição a_g de Thom e a existência de fibração tais que todos os pares de estratos satisfazem a condição a_g de Thom é um argumento essencial usado na prova da existência de fibração de Milnor mesmo no caso em que o domínio é um espaço singular arbitrário.

Exemplo 2.3. Seja $g : M' \longrightarrow M$ uma aplicação entre o cilindro M' e o cone M . Consideramos uma estratificação \mathcal{S} de M' tal que Y é um círculo em M' e $X = M' \setminus Y$. Mostramos que nestas condições a condição a_g de Thom não é satisfeita.

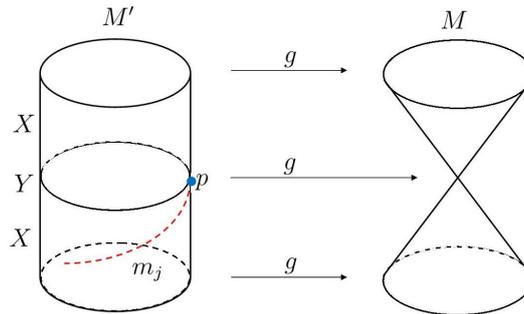


Figura 2.2:

De fato, seja $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em X que converge para um ponto p em Y . Assim, a aplicação

$$D(g|_X)_{m_j} : T_{m_j}X \longrightarrow T_{g(m_j)}g(X)$$

é um isomorfismo, donde, $Ker(D(g|_X)_{m_j}) = 0$. Além disso, a diferencial $D(g|_Y)_p$ leva todos os vetores de T_pY no plano tangente T_00 , isto é, a aplicação $D(g|_Y)_p$ é identicamente nula. Logo, $Ker(D(g|_Y)_p) = T_pY$, que tem dimensão 1.

Portanto,

$$Ker(D(g|_Y)_p) \not\subseteq \lim Ker(D(g|_X)_{m_j}),$$

ou seja, a condição a_g de Thom não é satisfeita.

Exemplo 2.4. Vamos definir inicialmente o blowing up do ponto 0 em \mathbb{C}^{n+1} e, em seguida, mostramos que para uma determinada estratificação de \mathbb{C}^{n+1} esta aplicação não satisfaz a condição a_g de Thom.

Sejam $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ o espaço projetivo e $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. Consideramos o gráfico da aplicação projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto \lambda(x'_0, \dots, x'_n), \end{aligned}$$

isto é, o gráfico da aplicação que leva um ponto não nulo de \mathbb{C}^{n+1} em uma linha l em \mathbb{C}^{n+1} . O gráfico de π consiste dos pares (p, l) onde p é um ponto não nulo de \mathbb{C}^{n+1} e l é uma linha em \mathbb{C}^{n+1} que passa por p . Seu fecho em $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$ é formado pelos pares (p, l) com o diferencial que agora p pode ser o 0.

Assim, se x_i são as coordenadas em \mathbb{C}^{n+1} e x'_i são as coordenadas homogêneas correspondentes em \mathbb{P}^n , o fecho do gráfico de π é dado pelas equações

$$x_i x'_j = x'_i x_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Denotamos este conjunto por $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} = \overline{\text{graf}(\pi)}$.

Seja $g : \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ a aplicação projeção. Vamos analisar esta aplicação cobrindo \mathbb{C}^{n+1} por meio de cartas $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$, onde $U_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$ com $i = 0, \dots, n$. Pela equação [\[2.9\]](#), podemos escrever

$$x_j = x_i \xi_j^{(i)}, \quad \text{com } \xi_j^{(i)} = \frac{x'_j}{x'_i}.$$

Como coordenadas para \tilde{U}_i podemos escolher x_i e $\xi_j^{(i)}$, $i \neq j$ e notamos que exibem um isomorfismo entre \tilde{U}_i e \mathbb{C}^{n+1} . Nestas coordenadas, a aplicação g tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} g^*(x_i) &= x_i \\ g^*(x_j) &= x_j \xi_j^{(i)} \end{aligned}$$

Logo, g induz um isomorfismo entre $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $g^{-1}(-)$ é dada na carta \tilde{U}_i pela equação $x_i = 0$. Além disso, a fibra $g^{-1}(0)$ é formado pelos pares $(0, l)$, onde l é qualquer linha em \mathbb{C}^{n+1} . Consequentemente, $g^{-1}(0)$ é isomorfo a \mathbb{P}^n e, este conjunto é chamado de subvariedade excepcional de \mathbb{C}^{n+1} . E a aplicação π é o blowing up de \mathbb{C}^{n+1} no ponto 0.

Seja $g : \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ o blowing up do ponto 0 em \mathbb{C}^{n+1} . Vamos estratificar o domínio da aplicação g por $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)$ e $g^{-1}(0)$. Vamos mostrar que a aplicação g não satisfaz a condição a_g de Thom.

De fato, seja $\{m_i\}$ uma sequência de pontos em $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)$ que converge para um ponto p em $g^{-1}(0)$. Como os conjuntos $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ são isomorfos, temos que a aplicação

$$D(g|_{\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)})_{m_i} : T_{m_i}(\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)) \longrightarrow T_{g(m_i)}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$$

é um isomorfismo, logo, $\text{Ker}(D(g|_{\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)})_{m_i}) = 0$. Além disso,

$$d(g|_{g^{-1}(0)})_p : T_p g^{-1}(0) \longrightarrow T_{g(p)} g(g^{-1}(0))$$

é a aplicação identicamente nula, então $\text{Ker}(D(g|_{g^{-1}(0)})_p) = T_p g^{-1}(0)$, que por sua vez tem dimensão não nula. Assim, $\text{Ker}(D(g|_{g^{-1}(0)})_p) \not\subseteq \lim \text{Ker}(D(g|_{\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus g^{-1}(0)})_{m_i}) = 0$.

Portanto, a condição a_g de Thom não é satisfeita.

Dada uma aplicação $f : M \longrightarrow P$, uma pergunta natural é sob quais condições M admite uma estratificação que satisfaz a condição de Thom para f . H. Hironaka mostrou em [15] mais do que questionamos, ele mostrou sob quais condições uma estratificação satisfaz as condições de Whitney e a condição de Thom para uma aplicação f .

Teorema 2.12 (Teorema de Hironaka). *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação analítica de uma variedade analítica complexa em \mathbb{C} . Então a aplicação f admite uma estratificação de Whitney tal que a estratificação de E satisfaz a condição de Thom para f .*

Usamos fortemente o Teorema 2.12 para provar o Teorema de Fibração de Milnor-Lê 4.3.

Finalizamos esta seção apresentando o Segundo Lema de Isotopia de Thom que apesar de não ser diretamente usado neste trabalho, é uma ferramenta importante para o estudo da trivialidade topológica de famílias de aplicações (ver [2], por exemplo). Antes de enunciá-lo, considere a seguinte definição:

Definição 2.13. Consideramos P, S, S', f e g assim como no diagrama 2.8. Dizemos que g é uma aplicação de Thom sobre P se as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) $g|_{S'}$ e $f|_S$ são aplicações próprias;
- (2) para cada estrato S_i de \mathcal{S} a restrição $f|_{S_i}$ é uma submersão;
- (3) Para cada estrato S'_i de \mathcal{S}' , $g(S'_i)$ está em um estrato S_j de \mathcal{S} e $g : S'_i \longrightarrow S_j$ é uma submersão;
- (4) A estratificação \mathcal{S}' satisfaz a condição a_g de Thom.

Proposição 2.13 (Segundo Lema de Isotopia de Thom). Seja g uma aplicação de Thom sobre P . Então, g é a projeção de um fibrado localmente trivial sobre P .

Demonstração. Ver [25], Proposição 11.2, p. 29. □

Capítulo 3

Estrutura Cônica Local

Nesta capítulo, apresentamos resultados fundamentais para a prova do Teorema de Fibrção de Milnor-Lê, que é o Teoremas de Estrutura Cônica Local para conjuntos analíticos complexos. Este resultado descrevem o tipo topológico de uma vizinhança de um ponto singular. É importante destacar que estamos considerando o caso de um espaço analítico complexo, mas os resultados ainda são verdadeiros para o caso real. Usamos [8] e [27] como principais referências deste capítulo.

3.1 O Link de uma Singularidade

Vamos começar considerando os polinômios de Pham-Brieskorn

$$f(z) = z_0^{a_0} + \dots + z_n^{a_n}$$

com $a_i > 1$ para todo $i = 0, \dots, n$ e $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Calculando o vetor gradiente do polinômio f , obtemos que a origem é o único ponto crítico de f . Assim, as fibras $V_t = f^{-1}(t)$ são todas variedades diferenciáveis complexas se $t \neq 0$ e $V = f^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície complexa com singularidade isolada na origem.

Nosso objetivo é estudar o tipo topológico de V e das variedades V_t 's.

Consideramos d o mínimo múltiplo comum dos a_i , $i = 0, \dots, n$, e a ação de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ em \mathbb{C}^{n+1} dada por

$$t.(z_0, \dots, z_n) = (t^{q_0} z_0, \dots, t^{q_n} z_n),$$

onde $q_i = \frac{d}{a_i}$, com $i = 0, \dots, n$.

Observamos que se restringimos esta ação ao conjunto dos números reais positivos obtemos um fluxo local analítico que satisfaz as seguintes condições:

- (1) Quando t se aproxima de zero, $t \cdot z$ aproximam da origem.
 (2) V é a união de todas as órbitas porque V é invariante por esta ação. De fato,

$$\begin{aligned} f(t \cdot (z_0, \dots, z_n)) &= f(t^{q_0} z_0, \dots, t^{q_n} z_n) \\ &= (t^{q_0} z_0)^{a_0} + \dots + (t^{q_n} z_n)^{a_n} \\ &= t^d z_0^{a_0} + \dots + t^d z_n^{a_n} \\ &= t^d f(z_0, \dots, z_n), \end{aligned}$$

isto é,

$$f(t \cdot (z_0, \dots, z_n)) = t^d f(z_0, \dots, z_n) \quad (3.1)$$

Dai, dado $z \in V$, temos que $f(t \cdot z) = t f(z) = t \cdot 0 = 0$.

- (3) As órbitas $t \cdot z$ são transversais a todas as esferas centradas na origem em \mathbb{C}^{n+1} (Ver [36] p. 50).

Assim, o fluxo define um grupo $\{\Phi_t\}$ de difeomorfismos a um parâmetro de \mathbb{C}^{n+1} que tem 0 como um ponto fixo e tem V como conjunto invariante pela igualdade [3.1].

Sejam \mathbb{S}_1^{2n+1} a esfera unitária e \mathbb{S}_r^{2n+1} outra esfera centrada na origem de raio r , com $0 < r < 1$, definimos a aplicação

$$\phi_r : \mathbb{S}_1^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}_r^{2n+1}$$

tal que para cada $x \in \mathbb{S}_1^{2n+1}$ o ponto $\phi_r(x)$ é definido pela órbita dada por Φ_t no ponto onde esta órbita corta a esfera \mathbb{S}_r transversalmente.

Observamos que isto define um difeomorfismo e a interseção $K_1 = V \cap \mathbb{S}_1^{2n+1}$ é enviada difeomorficamente em $K_r = V \cap \mathbb{S}_r$.

Portanto, obtemos um difeomorfismo dos pares $(\mathbb{S}_1^{2n+1}, K_1) \cong (\mathbb{S}_r, K_r)$. Fazendo este processo para cada $r \in (0, 1)$, obtemos uma família de difeomorfismos a 1-parâmetro que "encolhem" a esfera mais e mais, convergindo para a origem e estes difeomorfismos preservam a interseção de V com as várias esferas.

Estas variedades são conhecidas como variedades de Brieskorn, pois para $n > 3$ E. Brieskorn obteve resultados importantes sobre a topologia de K_r . Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *A variedade V intersecta toda esfera \mathbb{S}_r^{2n+1} centrada na origem; conseqüentemente a interseção $K_r = V \cap \mathbb{S}_r^{2n+1}$ é uma variedade suave real de dimensão $2n - 1$ mergulhada como uma subvariedade de \mathbb{S}_r de codimensão 2. Além disso, para cada $r \in (0, 1)$ temos um difeomorfismo dos pares $(\mathbb{S}_1^{2n+1}, K_1) \cong (\mathbb{S}_r, K_r)$. Isso implica*

que se B_1 é a bola unitária em \mathbb{C}^{n+1} , então o par $(B_1 - \{0\}, V - 0 \cap B_1)$ é difeomorfo ao cilindro sobre $(\mathbb{S}_1^{2n+1}, K_1)$ e o par $(B_1, V \cap B_1)$ é homeomorfo ao cone sobre $(\mathbb{S}_1^{2n+1}, K_1)$ com vértice em 0.

Em particular, o tipo de difeomorfismo da variedade K_r não depende da escolha da esfera. Esta variedade é chamado de link da singularidade V e determina a topologia de V . Além disso, a forma que K_r está mergulhada na esfera \mathbb{S}_r determina o mergulho de V em \mathbb{C}^{n+1} .

Agora, nosso objetivo é mostrar que se estamos suficientemente próximos da origem, muito dos resultados que valem para os polinômios de Pham-Brieskorn ainda continuam válidas em um contexto mais geral.

Definição 3.1. Sejam x^0 um ponto de \mathbb{C}^n e A um subconjunto de \mathbb{C}^n . Definimos o cone sobre A com base em x^0 , como a união de todos segmentos de reta

$$ta + (1 - t)x^0, 0 \leq t \leq 1$$

ligando os pontos a em A ao ponto base x^0 . Denotamos o cone sobre A com base x^0 por $Cone(A)$.

Seja V um conjunto analítico complexo e x^0 um ponto singular isolado de V . Sejam também $\Sigma(V)$ o conjunto dos pontos singulares de V e D_ϵ o disco fechado centrado em x^0 com raio ϵ e \mathbb{S}_ϵ sua fronteira.

Na proposição abaixo mostramos que a variedade V intersecta transversalmente toda esfera suficientemente pequena centrada em x^0 .

Proposição 3.2. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, toda esfera \mathbb{S}_ϵ centrada em x^0 intersecta V em uma variedade diferenciável (possivelmente vazia).

Demonstração. Pela observação [1.2](#) para provar este resultado, podemos considerar apenas o caso real.

Sejam $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $r(x) = \|x - x^0\|^2$ e $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$, onde $\Sigma(V)$ denota o conjunto dos pontos singulares de V . Pelo Corolário [1.13](#), como o conjunto dos valores críticos de $r|_{M_1}$ é finito, podemos considerar que existe $\epsilon^2 > 0$ menor que qualquer valor crítico de $r|_{M_1}$, isto é, ϵ^2 é um valor regular de $r|_{M_1}$. Assim, sua imagem inversa

$$r^{-1}(\epsilon^2) \cap M_1 = \mathbb{S}_\epsilon \cap M_1$$

é uma variedade diferenciável.

Por outro lado, como x^0 é um ponto singular isolado, se ϵ é suficientemente pequeno então \mathbb{S}_ϵ não intersecta o conjunto $\Sigma(V)$.

Portanto,

$$\mathbb{S}_\epsilon \cap M_1 = \mathbb{S}_\epsilon \cap (V \setminus \Sigma(V)) = \mathbb{S}_\epsilon \cap V.$$

□

Definição 3.2. Seja V um conjunto analítico complexo e x^0 um ponto singular isolado de V . A variedade $K := \mathbb{S}_\epsilon \cap V$ é chamada o *link* de x^0 em V .

O próximo resultado nos diz que dado uma vizinhança suficientemente pequena de x^0 em V , podemos determinar completamente a topologia de V a partir do *link* da singularidade K . Formalmente, vamos mostrar que existe um homeomorfismo entre o par $(D_\epsilon, V \cap D_\epsilon)$ e o par $(\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon), \text{Cone}(K))$.

Teorema 3.3. *Seja K o link de x^0 em V . Para ϵ suficientemente pequeno a interseção $V \cap D_\epsilon$ é homeomorfa ao $\text{Cone}(K)$. Além disso, o par $(D_\epsilon, V \cap D_\epsilon)$ é homeomorfo ao par $(\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon), \text{Cone}(K))$.*

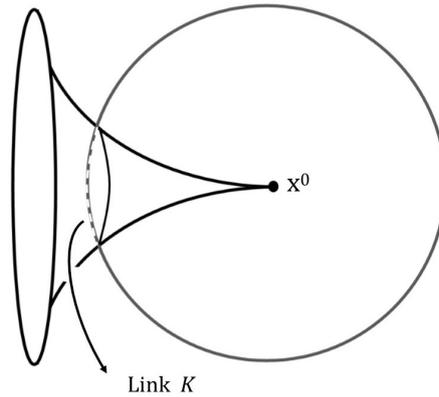


Figura 3.1: Estrutura cônica

A ideia é construir um campo de vetores $v(x)$ em uma vizinhança D_ϵ , suficientemente pequena, de $\{x^0\}$ de forma que a integral deste campo nos dê o homeomorfismo que queremos. Neste caso, para cada ponto em $D_\epsilon \setminus V$, o campo de vetores é dado pelo gradiente da função r , onde r é a função distância ao quadrado.

Inicialmente, construímos o campos de vetores $v_\alpha(x)$ em vizinhanças suficientemente pequenas U_α de cada ponto de $D_\epsilon - \{x^0\}$, e assim, usando partição da unidade, construímos o campo $v(x)$ de modo que seja transversal à D_ϵ .

Demonstração. Novamente, pela observação [1.2](#), basta considerar o caso real.

Como x^0 é um ponto singular isolado de V e a função $r|_{M_1}$ tem uma quantidade finita de valores críticos, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que x^0 é o único

ponto singular de V que pertence à vizinhança D_ϵ e a interseção $V \cap D_\epsilon$ não contém nenhum ponto crítico de $r|_{M_1}$.

Para provar este resultado, devemos construir um campo de vetores diferenciável $v(x)$ no disco furado $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ de modo que as seguintes condições são satisfeitas:

- i) Para todo $x \in D_\epsilon \setminus \{x^0\}$, o vetor $v(x)$ apontará para fora de x^0 para todo x , ou seja, o produto interno euclidiano $\langle v(x), x - x^0 \rangle$ será estritamente positivo. Assim nosso campo será transversal à todas as esferas \mathbb{S}_η centradas em x^0 com $0 < \eta \leq \epsilon$.

- ii) O vetor $v(x)$ será tangente à variedade $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ para todo $x \in M_1$.

Construímos o campo de vetores em vizinhanças suficientemente pequenas de cada ponto de $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ satisfazendo as condições (i), (ii) dadas acima.

De fato, seja x^α um ponto de $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ e U^α uma vizinhança de x^α em $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$. Assim, temos os seguintes casos: $x^\alpha \notin V$ ou $x^\alpha \in V$. Se $x^\alpha \notin V$ então o campo v_α dado por

$$v^\alpha(x) = x - x^0, \forall x \in U^\alpha \subset \mathbb{R}^m \setminus V$$

só precisa satisfazer a condição i), pois $M_1 \subset V$. De fato, a condição i) é satisfeita:

$$\langle v^\alpha(x), x - x^0 \rangle = \langle x - x^0, x - x^0 \rangle = \|x - x^0\|^2 > 0,$$

pois $x \neq x^0$. Se $x^\alpha \in V$, como $x^\alpha \in D_\epsilon \setminus \{x^0\}$, temos então que $x^\alpha \in M_1$. Assim, como fizemos na demonstração do teorema [1.12](#), escolhemos um sistema de coordenadas locais u_1, \dots, u_m numa vizinhança de x^α de forma que M_1 corresponde ao lugar geométrico $u_1 = \dots = u_p = 0$. Como x^α não é um ponto crítico da função $r|_{M_1}$ temos que pelo menos uma das derivadas

$$\frac{\partial r}{\partial u_{p+1}}, \dots, \frac{\partial r}{\partial u_m}$$

não se anula em x^α . Suponhamos que $\frac{\partial r}{\partial u_h}$ não se anula em x^α e sejam U^α a menor vizinhança conexa de x^α tal que $\frac{\partial r}{\partial u_h} \neq 0$ e $v^\alpha(x)$ é o vetor $\pm \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_h}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial u_h} \right)$

(determinamos o sinal conforme o sinal de $\frac{\partial r}{\partial u_h} \neq 0$).

Afirmamos que a condição (i) é satisfeita. De fato, para todo $x \in U^\alpha$, temos:

$$\begin{aligned} 2\langle v^\alpha(x), x - x^0 \rangle &= \sum 2(x_i - x_i^0)v_i^\alpha(x) \\ &= \sum \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \left(\pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \right) \\ &= \pm \frac{\partial r}{\partial u_h}(x) > 0 \end{aligned}$$

Além disso, como $x \in M_1$, observamos que o vetor $v^\alpha(x)$ é tangente ao conjunto M_1 porque $v^\alpha(x)$ é tangente à u_h -ésima curva coordenada em x , que está inteiramente contida em M_1 . Logo, a condição (ii) é satisfeita.

A fim de construir o campo de vetores globalmente, consideramos $\{\lambda^\alpha\}$ uma partição da unidade diferenciável em $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ com $\text{supp}(\lambda^\alpha) \subset U^\alpha$. Afirmamos que o campo vetorial

$$v(x) = \sum \lambda^\alpha(x)v^\alpha(x)$$

em $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ satisfaz (i) e (ii). De fato,

$$\begin{aligned} \langle v(x), x - x^0 \rangle &= \left\langle \sum \lambda^\alpha(x)v^\alpha(x), x - x^0 \right\rangle \\ &= \sum \lambda^\alpha(x) \langle v^\alpha(x), x - x^0 \rangle > 0 \end{aligned}$$

pois $\lambda^\alpha(x) \geq 0$, $\langle v^\alpha(x), x - x^0 \rangle > 0$ e esta soma é finita já que uma quantidade finita de λ^α é não nula. Além disso, como cada $v^\alpha(x)$ é tangente à M_1 segue que $v(x)$ é tangente à M_1 . Portanto, as condições (i) e (ii) são satisfeitas. Definimos o campo vetorial $w(x)$ como

$$w(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} = \frac{v(x)}{\langle 2(x - x^0), v(x) \rangle}$$

Agora que encontramos um campo vetorial $w(x)$ em $D_\epsilon \setminus x^0$, usamos as curvas soluções para conseguir o homeomorfismo entre o $\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon)$ e o disco D_ϵ . Consideramos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = w(x)$$

e sejam $p(t) = x$ as curvas soluções definidas para todo t no intervalo (α, β) . Lembrando que r é a função que calcula o quadrado da distância de um ponto $x \in V$ ao ponto x^0 , para qualquer solução $x = p(t)$ temos que a derivada da composição $r(p(t))$ é dada por:

$$\begin{aligned} (r(p(t)))' &= r'(p(t))p'(t) \\ &= r'(x)w(x), \text{ pois } p(t) \text{ é solução de } w(x) \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial r}{\partial x_m} \right) \begin{pmatrix} w_1(x) \\ \vdots \\ w_m(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial r}{\partial x_1} w_1(x) + \cdots + \frac{\partial r}{\partial x_m} w_m(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(x_1 - x_1^0)w_1(x) + \cdots + 2(x_m - x_m^0)w_m(x) \\
 &= \langle 2(x - x^0), w(x) \rangle \\
 &= \left\langle 2(x - x^0), \frac{v(x)}{\langle 2(x - x^0), v(x) \rangle} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\langle 2(x - x^0), v(x) \rangle} \langle 2(x - x^0), v(x) \rangle = 1
 \end{aligned}$$

Assim, $r(p(t)) = t + c$, para algum c constante. Subtraindo esta constante do parâmetro t se necessário, temos a seguinte igualdade:

$$r(p(t)) = \|p(t) - x^0\|^2 = t.$$

No Lema [3.4](#) abaixo, mostramos que a solução $p(t)$ pode ser estendida ao intervalo $0 < t \leq \epsilon^2$.

Agora, notamos também que a solução $p(t)$, com $0 < t \leq \epsilon^2$ está unicamente determinada pelo valor inicial $p(\epsilon^2) \in \mathbb{S}_\epsilon$.

Para cada $a \in \mathbb{S}_\epsilon$ seja

$$p(t) = P(a, t), \quad 0 < t \leq \epsilon^2$$

a única solução que satisfaz a condição inicial $p(\epsilon^2) = P(a, \epsilon^2) = a$. Afirmamos que P leva $K \times (0, \epsilon^2]$ difeomorficamente em $V \cap (D_\epsilon \setminus \{x^0\})$. Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned}
 P : \mathbb{S}_\epsilon \times (0, \epsilon^2] &\longrightarrow D_\epsilon \setminus \{x^0\} \\
 (a, t) &\longmapsto p(t).
 \end{aligned}$$

Como p é uma aplicação diferenciável, temos que P também é diferenciável. Note que P é bijetora.

De fato, dado $x \in D_\epsilon \setminus \{x^0\}$, existe $w(x)$ tal que $p'(t) = w(x)$. Além disso, p tem inversa à esquerda pois $r(p(t)) = t$ e portanto, p é sobrejetora. Assim, existe $t_0 \in (0, \epsilon^2]$ de forma que $x = p(t_0) = P(a, t_0)$. Logo, a aplicação P é sobrejetora.

Para concluir que P é bijeção, vamos mostrar a injetividade. Considere $P(a, t_1) = p(t_1) =: p_a(t_1)$ e $P(b, t_2) = p(t_2) =: p_b(t_2)$. Se $P(a, t_1) = P(b, t_2)$, então, $p_a(t_1) = p_b(t_2)$. Assim, $\|p_a(t_1) - x^0\|^2 = \|p_b(t_2) - x^0\|^2$, implicando que $r(p_a(t_1)) = r(p_b(t_2))$, ou seja, $t_1 = t_2$. Além disso, se $t_1 = t_2 = \epsilon^2$, então $p_a(\epsilon^2) = p_b(\epsilon^2)$ implicando que $a = b$. Então P é injetora. Como P é uma bijeção diferenciável não nula, temos que P é um difeomorfismo local pelo Teorema da Função Inversa.

Além disso, para todo $x \in M_1$ o campo vetorial $w(x)$ é tangente à M_1 , pois satisfaz

(ii), então toda curva solução $p(t)$ que tem um ponto em M_1 está contida em M_1 . Portanto P leva $(V \cap \mathbb{S}_\epsilon) \times (0, \epsilon^2]$ difeomorficamente em $V \cap (D_\epsilon \setminus \{x^0\})$, isto é, P é um difeomorfismo de $K \times (0, \epsilon^2]$ em $V \cap (D_\epsilon \setminus \{x^0\})$. Por fim, para mostrar o difeomorfismo entre $Cone(K)$ e $V \cap D_\epsilon$, observamos que $P(a, t)$ converge para x^0 quando t se aproxima de 0. Assim, a correspondência

$$ta + (1 - t)x^0 \longmapsto (a, t) \longmapsto P(a, t\epsilon^2)$$

definida para todo $t \in (0, 1]$, é um homeomorfismo do $Cone(\mathbb{S}_\epsilon)$ em D_ϵ . Se restringirmos o domínio dessa aplicação ao $Cone(K)$, temos ainda um homeomorfismo do $Cone(K)$ em $V \cap D_\epsilon$. \square

Lema 3.4. A solução $p(t)$ pode ser estendida ao intervalo $0 < t \leq \epsilon^2$.

Demonstração. De fato, consideramos que o campo vetorial $w(x)$ foi construído sobre um conjunto aberto um pouco maior que $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$, de forma que os pontos da fronteira de D_ϵ não interfiram na nossa prova. Pelo Lema de Zorn, a solução $p(t)$ pode ser estendida sobre algum intervalo maximal $\alpha' < t < \beta'$. Para chegar em uma contradição, vamos supor que $\beta' \leq \epsilon^2$ e então estenderemos a solução sobre um intervalo um pouco maior contradizendo a maximalidade de β' .

Observamos que como os pontos $p(t)$ com $\alpha' < t < \beta'$ pertencem ao conjunto compacto D_ϵ , quando $t \rightarrow \beta'$ os pontos $\{p(t)\}$ convergem para um x' em $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ de forma que $r(x') = \beta' \neq 0$. Pelo Teorema de Existência e Unicidade das Equações Diferenciáveis Ordinárias, ver [17], aplicado à equação a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = w(x)$$

temos que para cada x'' em uma vizinhança U de x' e cada t'' em algum intervalo aberto I contendo β' existe uma única solução $x = q(t)$ com $t \in I$ satisfazendo a condição inicial $q(t'') = x''$, além disso, $q(t)$ é uma função diferenciável de x'', t'' e t .

Para aplicar este Teorema, escolhemos t'' na interseção $(\alpha', \beta') \cap I$ e seja $x'' = p(t'')$. Pelo Teorema da Existência e Unicidade Local, para todo $t \in (\alpha', \beta') \cap I$ no domínio comum de $p(t)$ e $q(t)$ temos a igualdade destas funções. Logo, as soluções $p(t)$ e $q(t)$ podem ser unidas para formar uma nova solução que está definida em todo intervalo $(\alpha', \beta') \cup I$, contradizendo a unicidade da solução. Logo, $\epsilon^2 < \beta'$. Analogamente, mostramos que $a = 0$. Portanto a solução $p(t)$ pode ser estendida no intervalo $0 < t \leq \epsilon^2$. \square

3.2 Teorema da Estrutura Cônica Local

Seja V um conjunto analítico complexo com singularidade não isoladas. Neste caso, o Teorema 3.3 não pode ser aplicado porque o *link* da singularidade pode não ser uma variedade diferenciável, isto é, pode ser um conjunto com singularidades. Entretanto, usando a estratificação de Whitney, podemos obter uma versão do Teorema 3.3 para singularidades possivelmente não isoladas.

Teorema 3.5. *Sejam M uma variedade analítica em \mathbb{C}^n , A um subconjunto fechado de M e \mathcal{S} uma estratificação de Whitney de A . Assumimos que os estratos de \mathcal{S} são conexos. Então, para qualquer ponto x^0 em A existe $\epsilon^0(x^0) > 0$ suficientemente pequeno tal que para qualquer $0 < \epsilon \leq \epsilon^0(x^0)$ temos que: se D_ϵ denota a bola fechada centrada em x^0 de raio ϵ e \mathbb{S}_ϵ é sua fronteira, então o par $(D_\epsilon, A \cap D_\epsilon)$ é homeomorfo ao par $\text{Cone}((\mathbb{S}_\epsilon), A \cap (\mathbb{S}_\epsilon))$.*

Como no Teorema 3.3 vamos construir um campo de vetor em uma vizinhança furada de x^0 . Porém, como nosso conjunto contém possíveis singularidades, dada uma estratificação de Whitney desta vizinhança, construímos campo de vetor controlado que por sua vez gera um único grupo local a um parâmetro de homeomorfismos, e assim, provamos este resultado.

Seja $V^0 \in \mathcal{S}$ o estrato que contém x^0 e consideramos a cobertura \mathcal{S}^0 de M que consiste das seguintes subvariedades diferenciáveis: $M \setminus A$, $\{x^0\}$, $\{V\}_{V \in \mathcal{S}}$ com $V \neq V^0$, e as componentes conexas de $V^0 - \{x^0\}$.

Lema 3.6. O cobertura \mathcal{S}^0 é uma estratificação de Whitney de M .

Demonstração. Note que \mathcal{S}^0 é localmente finita e além disso, \mathcal{S}^0 satisfaz a condição *b* de Whitney. Com efeito, como A é fechado, devemos verificar que as condições de Whitney são válidas para os estratos $\{x^0\}$, $\{V\}_{V \in \mathcal{S}}$ com $V \neq V^0$, e as componentes conexas de $V^0 \setminus \{x^0\}$. Por outro lado, a estratificação \mathcal{S} satisfaz as condições de Whitney então basta verificar que as estas condições são satisfeitas considerando os estratos $\{x^0\}$ e as componentes conexas de $V^0 - \{x^0\}$. Assim, tomando uma sequência de pontos $\{x_n\}$ em uma componente conexa de $V^0 \setminus \{x^0\}$, digamos \tilde{V}^0 convergindo para o ponto x^0 temos que $\lim T_{x_n} \tilde{V}^0 \supseteq T_{x^0} x^0 = x^0$; além disso $\lim \overline{x_n x^0} \subseteq \lim T_{x_n} \tilde{V}^0 = x^0$. Portanto, as condições *a* e *b* de Whitney são satisfeitas. Logo, pelo Corolário 2.10 nós temos que \mathcal{S}^0 é uma estratificação de Whitney de M como queríamos. □

Demonstração do Teorema 3.2. Seja $\epsilon'_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para qual-

quer $0 < \epsilon \leq \epsilon'_0$, D_ϵ seja uma vizinhança de x^0 em M . Então, a função

$$\begin{aligned} f : D_\epsilon \setminus \{x^0\} &\longrightarrow (0, \epsilon) \\ x &\longmapsto d(x, x^0) \end{aligned}$$

é de classe C^1 e quando $x \neq x^0$ temos que $\text{Ker}(Df_x) = T_x(\mathbb{S}_{d(x, x^0)})$.

Observamos que como \mathcal{S}^0 é localmente finita, existe $\epsilon''_0 > 0$ tal que para todo estrato $V \in \mathcal{S}$, $V \cap D_{\epsilon''_0} \neq \emptyset$ se e somente se $x^0 \in \bar{V}$. De fato, se $x^0 \in \bar{V}$, pela definição de fecho de um conjunto é fácil ver que existe $\epsilon''_0 > 0$ tal que $V \cap D_{\epsilon''_0} \neq \emptyset$. Reciprocamente se existe $\epsilon''_0 > 0$ tal que $V \cap D_{\epsilon''_0} \neq \emptyset$ para todo estrato V de \mathcal{S} então $\bar{V} \cap D_{\epsilon''_0} \neq \emptyset$, implicando que $D_{\epsilon''_0} \subset \bar{V}$, ou seja, $x^0 \in \bar{V}$.

Além disso, pelo Lema [3.6](#), como \mathcal{S}^0 é uma estratificação de Whitney de M , qualquer par de estratos em \mathcal{S}^0 satisfaz a condição b de Whitney; em particular, qualquer par de estratos da forma $(V, \{x^0\})$ também satisfaz esta condição. Então, podemos encontrar um $\epsilon_0 < \min(\epsilon'_0, \epsilon''_0)$ tal que para qualquer $x \in V \cap D_\epsilon$, $T_x V \not\subset T_x \mathbb{S}_{d(x, x^0)}$. Isto acontece porque $T_x V$ contém uma direção que corta transversalmente a esfera $\mathbb{S}_{d(x, x^0)}$.

Sejam $\epsilon_0(x^0) = \epsilon_0$ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Em $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ considere a estratificação de Whitney \mathcal{S}_ϵ induzida por \mathcal{S}^0 , ou seja,

$$\mathcal{S}_\epsilon = \{V \cap (D_\epsilon \setminus \{x^0\}) \mid V \in \mathcal{S}^0\}.$$

As observações feitas acima implicam que $f|_{V'}$ é uma submersão para qualquer estrato $V' \in \mathcal{S}_\epsilon$. Portanto, pela Proposição [2.6](#) temos que f é uma submersão controlada, e então, pela Proposição [2.8](#) existe um campo de vetores controlado η em $D_\epsilon \setminus \{x^0\}$ tal que $f_* \eta_x = \frac{d}{dt} f(x)$, com $x \in D_\epsilon \setminus \{x^0\}$, isto é, $\eta(f) = 1$.

Pela Proposição [2.7](#) o campo de vetores η pode ser integrado, pois gera um único grupo local a um parâmetro de homeomorfismo.

Logo, considerando um valor inicial adequado, a aplicação

$$\varphi : \mathbb{S}_\epsilon \times (0, \epsilon] \longrightarrow D_\epsilon \setminus \{x^0\}$$

nos dá o homeomorfismo entre $(D_\epsilon, D_\epsilon \cap A)$ e $\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon, \mathbb{S}_\epsilon \cap A)$. □

Observação 3.1. Pelo Teorema [1.23](#), se considerarmos que M é um conjunto analítico, o Teorema [3.2](#) continua válido. De fato, nestas condições, M admite uma estratificação de Whitney. Assim, para qualquer ponto singular x^0 em um subconjunto fechado de M existe um homeomorfismo entre o par $(D_\epsilon, A \cap D_\epsilon)$ e o par $(\text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon), A \cap \text{Cone}(\mathbb{S}_\epsilon))$. Portanto, a topologia em uma vizinhança suficientemente pequena de x^0 pode ser completamente determinada.

3. Estrutura Cônica Local

O Teorema [3.5](#) é fundamental para encontrarmos uma fibração quando temos V um conjunto analítico complexo em um aberto U de \mathbb{C}^n com singularidade isolada.

Capítulo 4

Fibração de Milnor

O objetivo deste capítulo é estudar o Teorema de Fibração de Milnor apresentando um prova obtida por Lê em [19]. Este teorema é um resultado sobre a geometria e topologia das fibras de uma função holomorfa na vizinhança de um ponto crítico. As principais referências deste capítulo são [18] e [27].

4.1 O Teorema de Fibração de Milnor-Lê

Como na seção 3.1, começamos com o exemplo das singularidades de Pham-Brieskorn

$$f(z) = z_0^{a_0} + \dots + z_n^{a_n}$$

com $a_i > 1$ para todo $i = 0, \dots, n$ e $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. As fibras $V_t = f^{-1}(t)$ são todas variedades complexas suaves de dimensão n , se $t \neq 0$ e $V = f^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície complexa com singularidade isolada na origem.

A ação de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ em \mathbb{C}^{n+1} dada por

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) \longmapsto (\lambda^{q_0} z_0, \dots, \lambda^{q_n} z_n)$$

onde d é o mínimo múltiplo comum dos a_i , e $q_i = \frac{d}{a_i}$ para todo $i = 0, \dots, n$, satisfaz:

$$f(\lambda(z_0, \dots, z_n)) = \lambda^d f(z_0, \dots, z_n).$$

Consequentemente, V é invariante sob esta aplicação. Além disso, se restringirmos esta ação ao conjunto dos números reais positivos, podemos usar o fluxo correspondente em V para deduzir que V tem estrutura cônica.

Ainda considerando o fluxo real analítico definido restringindo a ação de \mathbb{C}^* para o conjunto dos números reais positivos, obtemos as seguintes propriedades:

- i) Para pontos z em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus V$, o argumento do número complexo $f(z)$ é constante em cada órbita. De fato, como

$$\|f(t \cdot z)\| = \|t^d f(z)\| = t^d \|f(z)\|,$$

temos

$$\frac{f(t \cdot z)}{\|f(t \cdot z)\|} = \frac{t^d f(z)}{t^d \|f(z)\|} = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

- ii) A norma de $f(z)$ é uma função estritamente crescente de t (ver [39], Lema 2.2, p.30).

Para cada ponto $x \in N(\epsilon, \delta) = B_\epsilon \cap f^{-1}(\partial D_\delta)$, consideramos sua órbita sob o fluxo definido pela restrição da ação de \mathbb{C}^* à \mathbb{R}_+ .

Este ponto se move de modo que sua órbita é transversal à todas as esferas em B_ϵ centradas em 0 e é também transversal a todos os tubos $f^{-1}(\partial D_\delta)$. Além disso, em cada ponto desta trajetória, o argumento de $f(z)$ é constante. Agora, deixando o ponto x percorrer esta trajetória até encontrar a esfera \mathbb{S}_ϵ , obtemos um difeomorfismo Ψ entre $N(\epsilon, \delta)$ e a esfera \mathbb{S}_ϵ menos uma vizinhança tubular $N(K)$ do link K .

Assim, temos um fibrado

$$\xi : \mathbb{S}_\epsilon \setminus N(K) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

dado por Ψ^{-1} seguido de f . Normalizando, obtemos um fibrado

$$\phi = \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon \setminus N(K) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \tag{4.1}$$

é possível mostrar que esta fibrção se estende para $\mathbb{S}_\epsilon \setminus K$.

Agora, restringimos a ação ao conjunto dos números complexos unitários, mais precisamente, vamos restringir a ação ao conjunto dos números complexos da forma $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$. Notemos que sob esta ação cada esfera centrada na origem é invariante pois

$$f(e^{i\theta}(z_0, \dots, z_n)) = e^{i\theta d} f(z_0, \dots, z_n).$$

Desta forma, se $\zeta = f(z_0, \dots, z_n)$, a multiplicação por $e^{i\theta}$ envia a fibra $f^{-1}(\zeta)$ na fibra $e^{i\theta d} \zeta$.

Assim, esta ação é dada por isometrias de \mathbb{C}^{n+1} , suas órbitas são transversais as fibras $f^{-1}(t)$ para $t \neq 0$ e para pontos de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus V$ envia fibras difeomorficamente para as fibras.

Portanto, todo disco D_δ em \mathbb{C}^* centrado na origem, temos

$$f|_{f^{-1}(D_\delta)} : f^{-1}(D_\delta - \{0\}) \longrightarrow D_\delta - \{0\}$$

é um fibrado localmente trivial. Observamos que se considerarmos a fronteira do disco, esta afirmação continua verdadeira. Mais precisamente, se considerarmos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, B_ϵ a bola de centro 0 e raio ϵ , $\delta > 0$ com $\epsilon \gg \delta$ tal que as fibras $f^{-1}(t)$ com $\delta \geq |t| > 0$ encontram a esfera $\mathbb{S}_\epsilon = \partial B_\epsilon$ transversalmente, definimos

$$N(\epsilon, \delta) = B_\epsilon \cap f^{-1}(\partial D_\delta).$$

Então,

$$f : N(\epsilon, \delta) \longrightarrow \partial D_\delta \tag{4.2}$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial. A variedade $N(\epsilon, \delta)$ consiste da parte das fibras que estão contidas dentro da bola B_ϵ .

As fibrações [4.2](#) e [4.1](#) são duas versões diferentes do conhecido Teorema de Fibrção de Milnor associado à função f .

Teorema 4.1. *Sejam $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de aplicação holomorfa, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $K = \mathbb{S}_\epsilon \cap V$. Então, a aplicação*

$$\phi = \frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\epsilon \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Demonstração. Ver [\[27\]](#), p. 43. □

O Teorema [4.1](#) além de ser a formulação original dada por Milnor em [\[27\]](#), fornece várias ideias geométricas da topologia de singularidades (ver [\[27\]](#) p. 45). Porém, existe uma outra formulação do Teorema de Fibrção de Milnor que possibilita generalizações e pode ser mais apropriado do ponto de vista da Geometria Algébrica. Esta formulação é conhecida como Teorema de Fibrção de Milnor-Lê.

Teorema 4.2. *Existem \mathbb{S}_ϵ uma esfera suficientemente pequena centrada em 0 em \mathbb{C}^{n+1} e δ suficientemente pequeno com relação à ϵ tal que as fibras $f^{-1}(t)$ com $|t| \leq \delta$ encontrem \mathbb{S}_ϵ transversalmente. Além disso, $N(\epsilon, \delta) = f^{-1}(\partial D_\delta) \cap B_\epsilon$, então*

$$f|_{N(\epsilon, \delta)} : N(\epsilon, \delta) \longrightarrow \partial D_\delta \tag{4.3}$$

é um fibrado diferenciável localmente trivial.

Este resultado foi obtido por Milnor em [26] e [27] quando $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ é um ponto crítico isolado de f . Milnor também mostrou em [27] que para f qualquer a fibra $f^{-1}(t) \cap B_\epsilon$ no Teorema 4.2 é difeomorfa à fibra no Teorema 4.1.

Contudo, se X é um conjunto analítico complexo e f é uma função holomorfa de X em \mathbb{C} , usando o Teorema de Hironaka 2.12, D. T. Lê [18] mostrou que em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto crítico, a restrição da f a esta vizinhança é a projeção de um fibrado localmente trivial, como vemos a seguir:

Teorema 4.3 (Teorema de Fibrção de Milnor-Lê). *Sejam $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto analítico de um aberto U de \mathbb{C}^n , seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e x um ponto em X tal que $f(x) = 0$. Então, se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $\eta > 0$ com $\epsilon \gg \eta$, a aplicação induzida por f :*

$$\Psi_{\epsilon, \eta} : f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap B_\epsilon \longrightarrow \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

onde B_ϵ é a bola real fechada em \mathbb{C}^n de centro x e raio $\epsilon > 0$, \mathring{D}_η é o disco aberto de \mathbb{C} centrado em 0 e de raio $\eta > 0$, é a projeção de um fibrado topológico localmente trivial.

Demonstração. Seja X um conjunto analítico complexo. Pelos Teoremas 1.23 e 2.12, existe uma estratificação de Whitney \mathcal{S} de X que satisfaz a condição de Thom para f .

Como \mathcal{S} é uma estratificação de Whitney, em particular, \mathcal{S} é localmente finita. Assim, qualquer vizinhança suficientemente pequena de x intersesta apenas uma quantidade finita de estratos. Sejam B_ϵ a bola fechada real em \mathbb{C}^n de raio $\epsilon > 0$ e centro x e \mathbb{S}_ϵ seu bordo. Como os estratos de X são variedades diferenciáveis, pela Proposição 3.5 a esfera \mathbb{S}_ϵ corta transversalmente os estratos de \mathcal{S} .

Sejam S_1, \dots, S_k os estratos de X tais que $x \in S_1$ e $S_i \cap X \cap B_\epsilon \neq \emptyset$. Como para cada ϵ suficientemente pequeno a \mathbb{S}_ϵ corta transversalmente os estratos de X , segue da Proposição 3.6 que se $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma estratificação de Whitney para X então $\{S_i \cap B_\epsilon\}_{i \in \Lambda}$ é uma estratificação de Whitney para $X \cap B_\epsilon$. Assim, os estratos $S_1 \cap X \cap \mathring{B}_\epsilon$ e $S_i \cap X \cap \mathbb{S}_\epsilon$ satisfazem as condições de Whitney.

Agora, seja \mathring{D}_η o disco aberto de centro 0 e raio $\eta > 0$. Se $\epsilon \gg \eta > 0$ então restrição de f ao conjunto $f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap \mathring{B}_\epsilon$ induz uma aplicação

$$\varphi : f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap \mathring{B}_\epsilon \longrightarrow \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

que é uma submersão em cada estrato.

De fato, como f é uma função analítica complexa, os seus valores críticos são isolados. Por isso, podemos supor que para ϵ suficientemente pequeno os pontos críticos da f estão contidos em $f^{-1}(0)$. Logo, φ é uma submersão em cada estrato.

Entretanto, a aplicao φ noo e prpria. De fato, dado $\{t\} \subset \mathring{D}_\eta - \{0\}$ temos que $\varphi^{-1}(t)$ e uma fibra em $f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap \mathring{B}_\epsilon$ que noo contem o fecho, logo $\varphi^{-1}(t)$ noo e um conjunto compacto. Assim, o Primeiro Lema de Isotopia de Thom (Proposioo [2.11](#)) noo pode ser aplicado.

Agora, mostramos que a aplicao

$$\bar{\varphi} : f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap \mathbb{S}_\epsilon \longrightarrow \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

e uma submersao em cada estrato. Para isso, precisamos que as fibras da aplicao

$$\bar{f} : f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \longrightarrow \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

em t cortem transversalmente os estratos de $X \cap \mathbb{S}_\epsilon$.

De fato, seja S_i um estrato de \mathcal{S} e $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a esfera \mathbb{S}_ϵ intersepta transversalmente os estratos de \mathcal{S} . Note que S_i e \mathbb{S}_ϵ sso transversais em $a \in S_i \cap \mathbb{S}_\epsilon$ se, e somente se, $T_a S_i$ e $T_a \mathbb{S}_\epsilon$ se interceptam transversalmente. Isto e, $T_a S_i \not\subset T_a \mathbb{S}_\epsilon$.

Tomamos uma sequencia de pontos $\{z_n\}$ convergindo para a em S_i , com $a \neq 0$. Definimos $t_n = f(z_n)$, $\epsilon_n = \|z_n\|$, $\epsilon' = \|a\|$, com $0 < \epsilon' \leq \epsilon_0$.

Vamos supor para chegar em uma contradicoo que $f^{-1}(t_n)$ noo intersepta transversalmente \mathbb{S}_{ϵ_n} em z_n . Entao, isto implica que

$$T_{z_n} f^{-1}(t_n) \subset T_{z_n} \mathbb{S}_{\epsilon_n}.$$

Seja τ o limite da sequencia dos planos $T_{z_n} f^{-1}(t_n)$, entao $\tau \subset T_a \mathbb{S}_{\epsilon'}$.

Por outro lado, a condicoo a_f de Thom implica que $T_a S_i \subset \tau$. Porcm $T_a S_i \not\subset T_a \mathbb{S}_{\epsilon'}$, e isto e uma contradicoo. Portanto, a aplicao $\bar{\varphi}$ e uma submersao em cada estrato.

Alm disso, a aplicao

$$\Psi_{\epsilon, \eta} : f^{-1}(\mathring{D}_\eta - \{0\}) \cap X \cap B_\epsilon \longrightarrow \mathring{D}_\eta - \{0\}$$

e prpria, pois se tomarmos um conjunto compacto K em $\mathring{D}_\eta - \{0\}$ o conjunto fechado $\Psi_{\epsilon, \eta}^{-1}(K)$ est contido na bola fechada B_ϵ , que e compacta, implicando que $\Psi_{\epsilon, \eta}^{-1}(K)$ e compacto.

Portanto, pelo Primeiro Lema de Isotopia de Thom (Proposioo [2.11](#)) temos que a aplicao $\Psi_{\epsilon, \eta}$ e a projecao de um fibrado topologico localmente trivial. □

Observao 4.1. Se f tem ponto critico isolado, usando que as fibras cortam trans-

versalmente toda esfera suficientemente pequena e o Teorema de Ehresmann, podemos mostrar que [4.3] é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Observação 4.2. Se $X \setminus f^{-1}(0)$ é um conjunto analítico e não singular em \mathbb{C}^n , H. Hamm mostrou que esta fibrção topológica é diferenciável (Ver [19] p.1).

4.2 Um Teorema de Fibrção para Singularidades Reais

Como podemos ver em [27], uma questō natural é se é possível obter um teorema de fibrção análogo ao caso complexo quando consideramos o germe de uma aplicao analítica real $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nesta seao apresentamos um teorema obtido por J. Milnor em [27], que é o primeiro passo no sentido de responder esta questō.

Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicao polinomial tal que $f(0) = 0$.

Teorema 4.4. *Sejam U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^m tal que a aplicao f é uma submersō em cada ponto diferente do zero e $f^{-1}(0) = V$ um conjunto algébrico com singularidade isolada na origem ao longo do conjunto $U \cap V$. Entāo o complemento de uma vizinhança tubular aberta de $K = V \cap \mathbb{S}_\epsilon$ em \mathbb{S}_ϵ é o espao total de um fibrado localmente trivial sobre a esfera \mathbb{S}_η , com $0 < \eta \ll \epsilon$. Além disso, cada fibra F é uma variedade diferenciável compacta de dimensō $m - k$ tal que o bordo é uma cópia do link K .*

A prova do Teorema [4.4] foi dada por J. Milnor em [27], Teorema 11.2, p. 97.

Ideia da demonstrao. Pela Proposio [3.5], sabemos que o link $K = V \cap \mathbb{S}_\epsilon$ é uma variedade diferenciável, donde 0 é um valor regular da restrio f|_{S_ε}. Assim, existe uma vizinhança B_η suficientemente pequena de 0 em \mathbb{R}^k formadas por valores regulares de $f|_{\mathbb{S}_\epsilon}$.

Seja T a vizinhança tubular de K em \mathbb{S}_ϵ , isto é,

$$T = \{x \in \mathbb{S}_\epsilon \mid \|f(x)\| \leq \eta\}.$$

Entāo, pelo Teorema de Fibrção de Ehresmann [2.1], a aplicao $T \rightarrow B_\eta$ é a projeção de um fibrado localmente trivial, pois é uma submersō prpria e as variedade T e B_η sōo diferenciáveis.

Porém, como o espao base B_η é convexo, temos que B_η é contrátil. Assim, pela Proposio [1.20] temos que a fibrção é apenas trivial, implicando que a vizinhança

tubular T é homeomorfa a $(f^{-1}(x) \cap \mathbb{S}_\eta) \times B_\eta$, isto é,

$$T \cong K \times B_\eta. \quad (4.4)$$

Seja E a interseção $B_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta)$. Notamos que E é uma variedade diferenciável tal que seu bordo coincide com o bordo da vizinhança tubular T , isto é, $\mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\eta)$. Seja $f|_E : E \rightarrow \mathbb{S}_\eta$ a restrição da aplicação f à variedade diferenciável E . Pelo mesmo argumento usado na prova do Teorema 2.1, $f|_E$ é a projeção de um fibrado localmente trivial.

Para completar a prova da existência da fibrção, temos que mostrar que existe um difeomorfismo entre os espaços E e o complemento da vizinhança tubular aberta \mathring{T} . Para construir este difeomorfismo, J. Milnor usou o fluxo de um campo de vetores apropriado em $B_\epsilon \setminus V$. Além disso, é possível mostrar que podemos estender esta fibrção para a vizinhança tubular aberta \mathring{T} para obter a fibrção desejada (ver Lema 11.3 [27]). \square

Observação 4.3. Podemos ver também que a fibra $F_y = B_\epsilon \cap f^{-1}(y)$ é uma variedade compacta tal que o bordo é o conjunto $\partial F_y = f^{-1}(y) \cap \mathbb{S}_\epsilon$, que é uma cópia do *link* K .

Observação 4.4. Dada uma aplicação satisfazendo as condições do teorema, quando m é par e $k = 2$, temos a garantia da existência de fibrção pelo Teorema 4.3.

Observação 4.5. Notamos que o Teorema 4.3 apenas garante a existência de um fibrado localmente trivial para alguma aplicação de projeção desconhecida. Ao contrário do Teorema 4.1, nenhuma referência é feita à aplicação da projeção.

Em particular, se $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação polinomial com singularidade isolada na origem, então $f_1 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f_1(Re(f), Im(f))$ é uma aplicação real analítica tal que $\frac{f_1}{|f_1|}$ é a projeção de um fibrado localmente trivial.

De maneira geral, a aplicação $\frac{f}{|f|}$ não é a projeção de um fibrado localmente trivial (ver [27] p. 99, para exemplos). Uma questão natural então é: "sob quais aspectos a aplicação real analítica $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $n \geq 2$ é tal que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a aplicação $\frac{f_1}{|f_1|} : \mathbb{S}_\epsilon^{n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1$ é a projeção de um fibrado localmente trivial?". Este é um tema atual de pesquisa que é abordado de diferentes formas, por diversos autores (ver por exemplo [32] e [35]).

Vamos mostrar alguns resultados sobre a topologia da fibra F .

Corolário 4.5. Se $m < 2(k - 1)$, então a fibra F é necessariamente $(k - 2)$ -conexa.

Demonstração. Como o *link* K é uma variedade compacta, pelo Teorema [1.19](#), temos que K tem o mesmo tipo de homotopia de um CW complexo. Assim, podemos considerar uma decomposição celular do *link* K .

Além disso, $\mathbb{S}_\epsilon \cap f^{-1}(B_\eta)$ é difeomorfo ao produto $K \times B_\eta$, podemos obter a esfera \mathbb{S}_ϵ adicionando ao subespaço $E' = \mathbb{S}_\epsilon \setminus \mathring{T}$ uma quantidade de células de dimensão maior ou igual a k , uma $(k - i)$ -célula para cada i -célula de K .

Pela Proposição [1.18](#), temos

$$\pi_i(E') \cong \pi_i(\mathbb{S}_\epsilon) = 0,$$

e então, o espaço E' é $(k - 2)$ -conexo.

Como o espaço T é homeomorfo ao conjunto $K \times B_\eta$, então $\partial(T) \cong K \times \mathbb{S}_\eta$. Assim, podemos considerar os mergulhos $\mathbb{S}_\eta \hookrightarrow \partial(T) \hookrightarrow E'$; e estes mergulhos nos dão a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow \pi_i(F) \longrightarrow \pi_i(E') \longrightarrow \pi_i(\mathbb{S}_\eta) \longrightarrow 0,$$

implicando que

$$\pi_i(E') = \pi_i(F) \oplus \pi_i(\mathbb{S}_\eta).$$

Mas sabemos que $\pi_i(\mathbb{S}_\eta) = 0$ e provamos inicialmente que $\pi_i(E') = 0$ para $i \leq k - 2$, então $\pi_i(F) = 0$, e isto prova que a fibra F é $(k - 2)$ -conexa. □

Podemos ainda provar que a fibra F é contrátil usando a dualidade de Alexander e os grupos de homologia e co-homologia. Ainda usando estas ferramentas, é possível provar que se a codimensão k é ≥ 3 , e se K tem a homologia de uma esfera, então a fibra F deve ser $(k - 2)$ -conexa (ver [\[27\]](#), Lema 11.5, p. 101).

Observação 4.6. A hipótese do Teorema ?? pede que localmente a aplicação f tenha singularidade isolada na origem. Porém, segundo Milnor em [\[27\]](#), o fato desta hipótese ser forte, implica na dificuldade de encontrar exemplos não triviais que mostram a aplicabilidade do resultado.

Em [\[7\]](#), os autores comentam alguns casos em que é possível encontrar exemplos não triviais. Segundo J. L. Cisneros-Molina e R. N. Araújo Dos Santos, Looijenga mostrou em [\[24\]](#) que para $k = 2$ e m par é possível encontrar exemplos não triviais; o caso em que $k = 2$ e m ímpar foi mostrado em [\[5\]](#). Além disso, os autores afirmam que P. T. Church e K. Lamotke também determinaram em [\[5\]](#) os pares (m, k) que possuem

germes de aplicaões reais que satisfazem as condiões de Milnor. Porém o primeiro exemplo não trivial para o caso $k = 2$ foi exposto em [1].

Observação 4.7. Em [31], os autores obtiveram um Teorema de Fibrção para o caso onde $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicaão real analítica com valor crítico isolado em 0 e que satisfaz a condião a_f de Thom definida em uma variedade X de dimensão $n > 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] N. A' CAMPO. *Le Nombre de Lefschetz d'une Monodromie Moderl.* Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 76=Indag. Math, 35. 113-118, 1973.
- [2] V.I. ARNOLD, & V.V. GORYUNOV. *Singularity Theory I.* Springer, 1998.
- [3] T. BROCKER & K. JANICK. *Introduccion a la Topología Diferencial.* Springer Verlag, Madri, 1973.
- [4] K. BURNS & M. GIDEA. *Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems.* Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.
- [5] P. T. CHURCH & K. LAMOTKE. *Non-trivial Polynomial isolated singularities.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 78= Indag. Math. 37 (1975) 149-154.
- [6] E. M. CHIRKA. *Complex Analytic Sets.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.
- [7] J. L. CISNEROS-MOLINA & R. N. ARAÚJO DOS SANTOS *Real and Complex Singularities: About the Existence of Milnor Fibrations.* London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 380). Cambridge University Press, 2010, 82 - 103.
- [8] D. BURGHELEA & A. VERONA. *Local Homological Properties of Analytic Sets.* Springer Verlag, Manuscripta Math., Vol. 7, Vol. 66, 1972, p. 55-66.
- [9] V.I. DANILOV & V.V. SHOKUROV. *Algebraic Geometry I.* Algebraic Curves, Algebraic Manifolds and Schemes, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [10] B. I. DUNDAS. *Differential Topology.* 2013.
- [11] V. GUILLEMIN & A. POLLAEK. *Differential Topology.* Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [12] H. HAMM. *Lokale Topologische Eigenschaften Komplexer Räume.* Math. Ann. 191, 1971, 235-252.

- [13] H. HAMM. *Zur Analytischen und Algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz Monodromie*. Habilitationsschrift, Göttingen, 1974.
- [14] A. HATCHER. *Algebraic Topology*. Cambridge University, Press, 2002.
- [15] H. HIRONAKA. *Stratification and Flatness*. In P. Holm, editor, Real and Complex Singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, August 5-25, 1976), p. 199 - 265. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [16] A. A. KOSINSKI. *Differential Manifolds*. Dover Publications, Mineola, New York, 2007.
- [17] S. LANG. *Introduction to Differentiable Manifolds*. Springer-Verlag, 2 ed., New York, 2002.
- [18] D. T. LÊ. *Notes on Non-isolated Singularities*. CMI, Université de Aix-Marseille.
- [19] D. T. LÊ. *Some Remarks on Relative Monodromy*. In P. Holm, editor, Real and Complex Singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, August 5-25, 1976), p. 397-403. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [20] E. L. LIMA. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [21] E. L. LIMA. *Varietades Diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.
- [22] TECNICO LISBOA. Disponível em: <<https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/3779572089121/aced-apontamentos-sec5.pdf>>. Acesso em 18 de dezembro de 2015.
- [23] V. M. LIMA. *O Teorema de Fibração de Milnor*. Junho de 2011. 79 p.. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Maringá. Maringá, Paraná. 2011.
- [24] E. LOOIJENGA. *Isolated Singular Points on Complete Intersections*. London Math. Soc. Lect. Notes. Ser. 77, 1984.
- [25] J. N. MATHER. *Notes on Topological Stability*. Lectures Notes, Harvard University, 1970.
- [26] J. MILNOR. *On isolated singularities of hypersurfaces*. 1966. Unpublished.

- [27] J. MILNOR. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton, 1968.
- [28] L. S. OLIVEIRA. *Singularidades Analíticas Reais e Complexas*. Outubro de 2013. 83 p.. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos, São Paulo. 2013.
- [29] D. PERRIN. *Algebraic Geometry*. Spring Verlag, London, 2008.
- [30] M. J. PFLAUM. *Analytic and Geometric Study of Stratified Spaces*. Spring Verlag, New York, 2001.
- [31] A. PICHON & J. SEADE. *Fibered Multilinks and Real Singularities $f\bar{g}$* . Preprint math. AG/0505312.
- [32] M. A. S. RUAS, J. SEADE & A. VERJOVSKY. *On Real Singularities with a Milnor Fibration*. Trends in Singularities, Birkhauser, 2002.
- [33] C. M. RUIZ. *Do Número de Milnor ao Número de Lê*. Julho de 2011. 90 p.. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos, São Paulo. 2011.
- [34] J. SEADE. *Isolated singularities in analytic spaces*. Notes on the Lecture "On the Geometry and Topology of Singularities", in honor of the 60th Birthday of Lê Dũng Tráng.
- [35] J. SEADE. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin, 2006.
- [36] J. SEADE. *Vector Fields on Singular Varieties*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [37] B. TEISSIER. *Variétés Polaires. II. Multiplicités Polaires, Sections Planes, et Conditions de Whitney*. In Algebraic geometry (La Rábida, 1981), volume 961 of Lecture Notes in Math., pages 314-491. Springer, Berlin, 1982.
- [38] R. THOM. *Ensembles et morphismes stratifiés*. Bull. Amer. Math. Soc. Volume 75, Number 2 (1969), 240-284.
- [39] F. A. R. VELASQUEZ. *Singularidades Casi Homogéneas Polares*. Maio 2011. 108 p.. Tesis (Licenciatura en Matematicas) - Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Puebla, Puebla, 2011.

- [40] H. WHITNEY. *Tangents to an Analytic Variety*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 81, No. 3, May, 1965, p. 496-549.
- [41] H. WHITNEY. *Elementary structure of real Algebraic Singularities*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 66, 1957, p. 545-556.
- [42] H. WHITNEY. *Local Properties of Analytic Varieties, Differential and Combinatorial Topology*. Princeton Univ. Press, 1965, 205-244.