

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Generalizações não-lineares do conceito de operador absolutamente somante

Francisco Elano Diniz Lima

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

**Generalizações não-lineares do
conceito
de operador absolutamente somante**

por

Francisco Elano Diniz Lima

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Agosto de 2010
João Pessoa-PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732g Lima, Francisco Elano Diniz.

Generalizações não-lineares do conceito de operador
absolutamente somante / Francisco Elano Diniz Lima. -
João Pessoa, 2010.

71 f.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Operador absolutamente somante. 3.
Aplicações multilineares. I. Pellegrino, Daniel
Marinho. II. Título.

UFPB/BC

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Generalizações não-lineares do conceito de operador
absolutamente somante

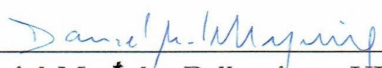
por


Francisco Elano Diniz Lima

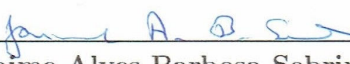
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:


Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)


Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - UFU


Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Suplente)

Agosto de 2010
João Pessoa-PB

Aos meus pais,
Antônio e Maria José.

Agradecimentos

A Deus por tudo em minha vida.

Aos meus pais Antonio Alves e Maria José, que são os maiores exemplos que tenho, que me ensinaram a ter fé e prosseguir na caminhada da vida.

Aos meus irmãos Cicera, Herlânia, Diniz e gizzely, por suas palavras encorajadoras que ficaram gravadas em meu coração e que foram um forte alimento para o entusiasmo de chegar até aqui.

Aos irmãos da igreja assembeia de Deus, em especial ao Pastor Valter e ao pessoal do Coral Beth Raphá, na pessoa da maestrina Aynara. Valeu pessoal por tudo!

Ao meu orientador Prof. Daniel Pellegrino, que representa uma grande referência para minha vida profissional. agradeço-o por ter me aceito como seu orientando, pois mesmo sabendo das minhas fragilidades, acreditou que eu poderia superá-las e chegar ao final como um vitorioso.

Aos Professores Dr. Geraldo Botelho e Dr. Jaime Sobrinho, pelas contribuições feitas na minha dissertação e por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

Aos professores da pós-graduação, Uberlândio, Assis, Everaldo, Fagner, Hinojosa e João do Ó, como também a Graça e ao Júnior. Obrigado a todos de coração.

Ao meu estimado Prof. Dr. João Montenegro que durante meus estudos na graduação, sempre me incentivou a prosseguir nos estudos, me auxiliando em tudo, e posso até dizer, foi a porta aberta que tive para chegar no mestrado.

A todos os meus amigos e irmãos que estão em Carius e em Fortaleza, que sempre acreditaram que eu poderia chegar aqui.

A todos os meus colegas de pós-graduação. Para não ter que citá-los todos, coloco-os apenas no mural que criei em meu coração, para que sejam sempre lembrados e nunca esquecidos. Valeu pessoal por tolerarem todas as minhas brincadeiras.

A Tarciana Maria (Tatazinha) uma pessoa especial que Deus colocou na minha vida, valeu Tatazinha por tudo.

Aos meus amigos que moraram durante esses dois anos que passei aqui, em especial aos amigos Disson Soares, Elielson Pires, José Eduardo e o Anderson. foi muito bom ter convivido esse tempo todo com vocês pessoal. Agradeço a Deus por vocês fazerem parte da minha vida.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho dissertamos sobre os vários conceitos recentes que generalizam o conceito linear de operador absolutamente somante, com especial ênfase às aplicações p -semi-integrais.

Palavras chave:

Aplicações absolutamente somantes, aplicações semi-integrais.

Abstract

In this work we discuss several recent concepts that generalize the definition of absolutely summing linear operators. Special attention is devoted to the class of p -semi-integral mappings.

Key Words:

Absolutely summing mappings, semi-integral mappings.

Sumário

1	Operadores lineares absolutamente somantes	1
1.1	Séries em Espaços de Banach	1
1.2	Operadores absolutamente $(p; q)$ -somantes	4
1.3	O Teorema da Dominação de Pietsch	16
2	Aplicações multilineares absolutamente somantes	22
2.1	Aplicações p -semi-integrais	22
2.2	Outras extensões do conceito de operadores absolutamente somantes . .	35
2.2.1	Aplicações p -dominadas	35
2.2.2	Aplicações de tipo absolutamente p -somantes	35
2.2.3	Aplicações completamente p -somantes	36
2.2.4	Aplicações fortemente p -somantes	37
2.2.5	Aplicações absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes	38
3	Resultados de inclusão entre as classes	39
3.1	Conexões entre as diferentes classes	39
3.2	O efeito do cotipo dos espaços de Banach	46
3.3	Alguns comentários sobre as relações de inclusão	47
A	Produto tensorial	53
A.1	Produto tensorial algébrico	53
A.2	Norma Projetiva	55

Notação e Terminologia

A seguir fazemos uma lista de notações e terminologias utilizadas no decorrer do texto:

- O símbolo \mathbb{K} representará o corpo \mathbb{R} dos reais ou o corpo \mathbb{C} dos complexos.
- Denotamos o espaço vetorial formado pelos operadores lineares contínuos de E e F por $\mathcal{L}(E; F)$. O dual topológico de E é o conjunto $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ que, por sua vez, será denotado por E' .
- $J : E \rightarrow E''$ denota a aplicação canônica $J(x)(f) = f(x)$.
- E, E_1, \dots, E_m e F representam espaços de Banach, exceto quando houver algo mencionado em contrário.
- Se E e F são espaços vetoriais normados, o espaço vetorial formado pelos operadores lineares de E e F é denotado por $L(E; F)$. Vamos denotar $L(E; \mathbb{K})$ por E^* e chamá-lo de dual algébrico de E .
- Quando X for um espaço vetorial normado, o símbolo B_X denotará a bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ de X .
- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função".
- $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $\mathcal{L}_{as,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações n -lineares absolutamente p -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $\mathcal{L}_{d,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações p -dominadas de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $\mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações p -semi-integrais de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $\mathcal{L}_{sas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações fortemente p -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $\mathcal{L}_{fas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações completamente p -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $\mathcal{L}_{as,p}^{ev}(E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações absolutamente p -somantes em todo ponto, de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .
- $[\Pi_{as(p)}](E_1, \dots, E_n; F)$ representa o conjunto de todas as aplicações de tipo absolutamente p -somante de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F .

- Quando $E_1 = \dots = E_m$, escrevemos $\mathcal{L}({}^n E; F)$ ao invés de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.
- Se $1 < q < \infty$, q^* indica o conjugado de q , isto é, $\frac{1}{q^*} + \frac{1}{q} = 1$.

As demais notações e terminologias presentes no trabalho terão seu significado expresso no decorrer do texto.

Introdução

A teoria multilinear de operadores absolutamente somantes foi primeiro esboçada por A. Pietsch [27] e, na última década, tem sido explorada por diversos autores, em diferentes contextos. Há várias formas naturais de conceber a ideia de "aplicação multilinear absolutamente somante" e, por esse motivo, vários conceitos diferentes têm sido explorados (aplicações p -semi-integrais, aplicações dominadas, aplicações de tipo absolutamente somante, aplicações completamente somantes, aplicações fortemente somantes, etc).

Cada possível generalização do conceito de operador absolutamente somante para o contexto não-linear apresenta suas particularidades e abre novas linhas de pesquisa; é bastante natural, portanto, comparar estes vários conceitos e buscar suas semelhanças e diferenças.

Um dos temas centrais do nosso trabalho são as aplicações p -semi-integrais, que foram introduzidas por D. Pellegrino [22], motivadas pelo trabalho de R. Alencar e M.C. Matos [1]. Entretanto, existem também vários outros conceitos recentes que generalizam o conceito de operadores absolutamente somantes. Por exemplo:

- Aplicações dominadas, primeiro exploradas por A. Pietsch [28], depois por Schneider [31][31] e Matos [19] e, mais recentemente, em [4, 7, 20, 23].

- Aplicações de tipo absolutamente somante, motivadas por métodos abstratos de criar ideais, exploradas em [22].

- Aplicações completamente somantes, introduzidas por Matos [18] e, independentemente, por Bombal, Pérez-García e Villanueva [3]. Esta classe de aplicações multilineares tem sido bastante investigada nos últimos anos.

- Aplicações fortemente somantes, introduzidas por V. Dimant [13].

- Aplicações multilineares absolutamente somantes, que foram primeiro estudadas por Alencar-Matos [1], Matos [19] e têm sido bastante investigadas desde então (citamos [22, 23, 24, 26], por exemplo).

Neste trabalho, vamos investigar as conexões entre essas classes, introduzir a classe de aplicações p -semi-integrais e estabelecer a posição de aplicações p -semi-integrais com relação às outras classes.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 apresentamos os elementos básicos da teoria dos operadores absolutamente somantes e introduzimos alguns conceitos e resultados importantes, como Teorema da Dominação de Pietsch;

No Capítulo 2 apresentamos as várias extensões multilineares do conceito de operador absolutamente somante. Especial ênfase é dada ao conceito de aplicações p -semi-integrais. A principal referência é o artigo [8].

No Capítulo 3 dissertamos sobre as conexões entre as classes introduzidas no capítulo anterior e indicamos como o cotipo dos espaços de Banach envolvidos interfere em tais resultados.

Capítulo 1

Operadores lineares absolutamente somantes

Este primeiro capítulo será dedicado à teoria linear de operadores absolutamente somantes. Os operadores absolutamente somante remontam à década de 50, com contribuições de Alexander Grothendieck, embora apenas no final da década de 60, com os trabalhos de A. Pietsch [27] e J. Lindenstrauss e A. Pełczyński [15] a teoria tenha sido efetivamente difundida e compreendida. Para mais detalhes sobre os operadores absolutamente somantes, indicamos o livro de J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge [12].

1.1 Séries em Espaços de Banach

Definição 1.1.1 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço vetorial normado X é dita absolutamente somável se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

Neste caso dizemos que a série correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ for tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

converge, para qualquer que seja a bijeção $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável e que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente.

Proposição 1.1.2 *Um espaço vetorial normado T é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável em X é incondicionalmente somável.*

Demonstração: Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência absolutamente somável em X . Vamos mostrar que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência incondicionalmente somável. Dada uma permutação σ dos naturais, considere $y_n = \|x_n\|$. Como $(y_n)_{n=1}^\infty$ é absolutamente somável em \mathbb{R} , então é incondicionalmente somável; logo $\sum_{n=1}^\infty \|x_{\sigma(n)}\|$ converge e, portanto, é de Cauchy. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^m x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_{\sigma(k)}\| < \sum_{k=n_0}^\infty \|x_{\sigma(k)}\| < \varepsilon.$$

Isso mostra que a sequência das somas parciais de $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, logo é convergente. Portanto $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$ é somável.

Agora suponhamos que toda sequência absolutamente somável em X é incondicionalmente somável. Note que nesse caso a sequência $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$ é somável, pois basta considerar a permutação $\sigma = id$.

Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em X . Então, dados $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = 2^{-k}$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < 2^{-k}.$$

Assim, podemos encontrar $n_1 < n_2 < \dots$ tais que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}.$$

Em particular,

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = 1$$

e, portanto, a série $\sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ é absolutamente convergente e, por hipótese, é convergente. Note agora que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}).$$

Logo $(x_{n_{k+1}})_{k=1}^\infty$ é convergente. Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e admite subsequência convergente, então $(x_n)_{n=1}^\infty$ também converge, implicando que X é completo. ■

Existem várias caracterizações de séries incondicionalmente somáveis. O teorema a seguir mostrará algumas equivalências sobre séries incondicionalmente somáveis (a demonstração pode ser encontrada em [12]).

Teorema 1.1.3 Para uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ num espaço de Banach X , são equivalentes:

- (i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável;
- (ii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência ordenadamente somável, isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de \mathbb{N} com $\min M > n_\varepsilon$, temos $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$;
- (iii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ converge;
- (iv) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, ou seja, para quaisquer escolhas de $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge;
- (v) $(b_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é somável para toda $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$;
- (vi) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente subsérie somável, isto é, se para cada sequência crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ for fracamente convergente ;
- (vii) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente sinal somável, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge fracamente em X para cada escolha de sinais $\varepsilon_n = \pm 1$;
- (viii) $(b_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente somável em X para todo $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$;
- (ix) $v : X' \rightarrow \ell_1; x^* \mapsto (x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é um operador compacto;
- (x) $(b_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ define um operador compacto de ℓ_∞ em X ;
- (xi) $(b_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ define um operador compacto de c_0 em X ;
- (xii) $(b_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ define um operador limitado de ℓ_∞ em X .

Proposição 1.1.4 Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável em um espaço de Banach X , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Demonstração: Para seqüências de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, sabemos que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e

incondicionalmente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e, além disso,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ para toda permutação σ (veja [14, Teorema 22]). Logo, para toda $f \in X'$ temos que

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

■

1.2 Operadores absolutamente $(p; q)$ -somantes

Considere X e Y espaços de Banach. Um operador linear contínuo $u : X \rightarrow Y$ é absolutamente somante se u transforma seqüências incondicionalmente somáveis em seqüências absolutamente somáveis. O resultado central da teoria de operadores absolutamente somantes é o Teorema de Grothendieck:

A demonstração do Teorema a seguir pode ser encontrado em [12, Pag 15].

Teorema 1.2.1 (Teorema de Grothendieck) *Todo operador linear contínuo $u : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ é absolutamente somante.*

O conceito de operador absolutamente somante possui uma extensão natural, na qual aparecem parâmetros p e q , como veremos a seguir. Começaremos com algumas definições necessárias. A seguir, consideremos $1 \leq p < \infty$ e X, Y espaços de Banach.

Definição 1.2.2 *Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fortemente p -somável se $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.*

Denotamos por $\ell_p(X)$ o espaço vetorial de todas as seqüências fortemente p -somáveis em X , ou seja,

$$\ell_p(X) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}.$$

Em $\ell_p(X)$ definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p}.$$

Se $p = \infty$ definimos

$$\ell_\infty(X) = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}; \sup_n \|x_n\| < \infty \right\}$$

e

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty := \sup_n \|x_n\|.$$

Proposição 1.2.3 $(\ell_p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em $\ell_p(X)$; tomemos $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots) \in \ell_p(X)$ e, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\|^p \right)^{1/p} = \|x^{(k)} - x^{(k')}\|_p < \varepsilon.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\| < \varepsilon$$

e, portanto, $(x_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ são todas seqüências de Cauchy em X , e conseqüentemente convergentes. Digamos que $(x_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ convirja para x_n , e seja $x = (x_n)_{k=1}^\infty$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p(X)$. Para cada m natural, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^m \|x_n^{(k)} - x_n^{(k')}\|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Fazendo $k' \rightarrow \infty$, obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^m \|x_n^{(k)} - x_n\|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Fazendo agora $m \rightarrow \infty$, temos

$$\|x^{(k)} - x\|_p < \varepsilon \tag{1.1}$$

para todo $k \geq N$. Logo

$$x^{(N)} - x = (x_n^{(N)} - x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(X).$$

Como $x^{(N)} \in \ell_p(X)$ (que é um espaço vetorial), segue que

$$x = x^{(N)} - (x^{(N)} - x) = (x_n^{(N)})_{k=1}^\infty - (x^{(N)} - x)_{n=1}^\infty \in \ell_p(X),$$

e de (1.1) temos $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$. Portanto $\ell_p(X)$ é de Banach. ■

Definição 1.2.4 Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X é fracamente p -somável se $(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty \in \ell_p$ para todo $\varphi \in X'$.

Denotamos por $\ell_{p,w}(X)$ o conjunto de todas as sequências fracamente p -somáveis em X , ou seja,

$$\ell_{p,w}(X) = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in X^\mathbb{N}; \sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p < \infty \text{ para todo } \varphi \in X' \right\}.$$

Se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^\infty \|\varphi(x_n)\|^p \right)^{1/p} < \infty. \quad (1.2)$$

Proposição 1.2.5 $(\ell_{p,w}(X), \|\cdot\|_{p,w})$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Antes de mais nada mostremos que o supremo em 1.2, e para isso, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado (TGF). Seja $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X)$ e associamos a x a função

$$\begin{aligned} u : X' &\longrightarrow \ell_p \\ u(\varphi) &= (\varphi(x_n))_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

É claro que u está bem definida e é linear. Suponha que

$$\begin{cases} \varphi_k \longrightarrow \varphi \in X' \\ u(\varphi_k) \longmapsto z_0 \in \ell_p. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $z_0 = u(\varphi)$. Como $u(\varphi_k) \longrightarrow z_0$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k(x_n))_{n=1}^\infty = z_0 = (z_n)_{n=1}^\infty$$

e, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x_n) = z_n$$

para todo n natural. Como $\varphi_k \longrightarrow \varphi$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x_n) = \varphi(x_n)$$

e conseqüentemente

$$z_n = \varphi(x_n)$$

para todo n . Logo $z_0 = u(\varphi)$ e pelo TGF temos que u é limitado, e portanto

$$\sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

1.2. OPERADORES ABSOLUTAMENTE (P; Q)-SOMANTES

As propriedades de norma são facilmente verificadas. Agora, só nos resta provar a completude. Seja $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_{p,w}(X)$. Note que, para cada k , temos $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots) \in \ell_{p,w}(X)$. Como $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\| x^{(k)} - x^{(k')} \right\|_{p,w} < \varepsilon.$$

Com isso, temos que:

$$k, k' \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi \left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right) \right|^p < \varepsilon^p, \text{ com } \varphi \in B_{X'} \quad (1.3)$$

e, para todo n ,

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\| x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi \left(x_n^{(k)} - x_n^{(k')} \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Portanto, para cada n , $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X , e conseqüentemente convergente. Denotaremos por x_n o limite de $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$, e seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in \ell_{p,w}(X)$. De fato, usando o mesmo artifício usado na demonstração da Proposição 1.2.3, fazendo $k' \rightarrow \infty$ em (1.3), obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi \left(x_n^{(k)} - x_n \right) \right|^p < \varepsilon^p,$$

para todo $\varphi \in B_{X'}$. Isso nos permite concluir que $x - x^{(N)} \in \ell_{p,w}(X)$. Logo,

$$x = (x - x^{(N)}) + x^{(N)} \in \ell_{p,w}(X).$$

Além disso,

$$k \geq N \Rightarrow \left\| x^{(k)} - x \right\|_{p,w} \leq \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$. Portanto, $\ell_{p,w}(X)$ é um espaço de Banach. ■

Observação 1.2.6 A inclusão $\ell_p(X) \subset \ell_{p,w}(X)$ sempre é verdadeira e contínua. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, então

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_j\|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{1/p} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p. \end{aligned}$$

A seguir, introduzimos o espaço de seqüências $\ell_{p,u}(X)$ que terá papel importante na teoria de operadores absolutamente (p, q) -somantes.

Proposição 1.2.7 *O conjunto $\ell_{p,u}(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(X); \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0 \right\}$ é um subespaço fechado de $\ell_{p,w}(X)$.*

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,u}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vejamos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty + \lambda(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0. \quad (1.4)$$

Com efeito,

$$0 \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty + \lambda(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} + |\lambda| \|(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w}$$

e, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos (1.4).

Logo

$$(x_j)_{j=n}^\infty + \lambda(y_j)_{j=n}^\infty \in \ell_{p,u}(X),$$

e portanto $\ell_{p,u}(X)$ é um subespaço de $\ell_{p,w}(X)$.

Seja $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$ uma seqüência em $\ell_{p,u}(X)$. Então, para cada k , temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_j^{(k)})_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \|(x_j^{(k)})_{j=n}^\infty\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.5)$$

Suponhamos que $x^{(k)} \rightarrow x = (x_j)_{j=1}^\infty$ em $\ell_{p,w}(X)$, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^{(k)} - x_j)|^p \right)^{1/p} = \|x^{(k)} - x\|_{p,w} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por maior razão, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^{(k)} - x_j)|^p \right)^{1/p} = \|(x_j^{(k)})_{j=n}^\infty - (x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.6)$$

Note que

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} &= \|(x_j)_{j=n}^\infty - (x_j^{(k_0)})_{j=n}^\infty + (x_j^{(k_0)})_{j=n}^\infty\|_{p,w} \\ &\leq \|(x_j)_{j=n}^\infty - (x_j^{(k_0)})_{j=n}^\infty\|_{p,w} + \|(x_j^{(k_0)})_{j=n}^\infty\|_{p,w} \end{aligned} \quad (1.7)$$

e, por (1.5) e (1.6), segue que

$$n \geq n_0^{(k_0)} \Rightarrow \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,u}(X)$. Portanto $\ell_{p,u}(X)$ é fechado. ■

Veremos adiante que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$. O próximo lema, cuja demonstração aparece em [10], será crucial a demonstração desse fato.

Lema 1.2.8 *Se $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares em \mathbb{C} tal que*

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \leq \varepsilon$$

para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4\varepsilon.$$

No caso da sequência $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 2\varepsilon.$$

Demonstração: Vejamos primeiro o caso complexo.:

Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |\lambda_n| &\leq \sum_{n=1}^k |\operatorname{Re}(\lambda_n)| + \sum_{n=1}^k |\operatorname{Im}(\lambda_n)| \\ &= \sum_{n \in M_{\operatorname{Re}}^+} \operatorname{Re}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\operatorname{Re}}^-} (-\operatorname{Re}(\lambda_n)) + \sum_{n \in M_{\operatorname{Im}}^+} \operatorname{Im}(\lambda_n) + \sum_{n \in M_{\operatorname{Im}}^-} (-\operatorname{Im}(\lambda_n)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} M_{\operatorname{Re}}^+ &= \{n \in \{1, \dots, k\}; \operatorname{Re}(\lambda_n) > 0\}, \\ M_{\operatorname{Re}}^- &= \{n \in \{1, \dots, k\}; \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0\}, \\ M_{\operatorname{Im}}^+ &= \{n \in \{1, \dots, k\}; \operatorname{Im}(\lambda_n) > 0\} \text{ e} \\ M_{\operatorname{Im}}^- &= \{n \in \{1, \dots, k\}; \operatorname{Im}(\lambda_n) < 0\}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese,

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \leq \varepsilon$$

1.2. OPERADORES ABSOLUTAMENTE (P; Q)-SOMANTES

para qualquer M finito, escolhendo $M = M_{\text{Re}}^+, M_{\text{Re}}^-, M_{\text{Im}}^+$ e M_{Im}^- , obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} \text{Re}(\lambda_n) \leq \left| \text{Re} \left(\sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} \lambda_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in M_{\text{Re}}^+} \lambda_n \right| \leq \varepsilon, \\ \sum_{n \in M_{\text{Re}}^-} (-\text{Re}(\lambda_n)) \leq \left| \text{Re} \left(\sum_{n \in M_{\text{Re}}^-} \lambda_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in M_{\text{Re}}^-} \lambda_n \right| \leq \varepsilon, \\ \left| \sum_{n \in M_{\text{Im}}^+} \text{Im}(\lambda_n) \right| \leq \left| \text{Im} \left(\sum_{n \in M_{\text{Im}}^+} \lambda_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in M_{\text{Im}}^+} \lambda_n \right| \leq \varepsilon, \\ \left| \sum_{n \in M_{\text{Im}}^-} (-\text{Im}(\lambda_n)) \right| \leq \left| \text{Im} \left(\sum_{n \in M_{\text{Im}}^-} \lambda_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in M_{\text{Im}}^-} \lambda_n \right| \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

Logo, segue que

$$\sum_{n=1}^k |\lambda_n| \leq 4\varepsilon$$

para todo k e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4\varepsilon.$$

Vejamos agora o caso real:

Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{n=1}^k |\lambda_n| = \sum_{n \in M^+} (\lambda_n) + \sum_{n \in M^-} (-\lambda_n),$$

com

$$\begin{aligned} M^+ &= \{n \in \{1, \dots, k\}; \lambda_n \geq 0\} \\ M^- &= \{n \in \{1, \dots, k\}; \lambda_n < 0\} \end{aligned}$$

Como, por hipótese,

$$\left| \sum_{n \in M} \lambda_n \right| \leq \varepsilon$$

para qualquer M finito, escolhamos $M = M^+, M^-$ e obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \in M^-} |-\lambda_n| = \left| \sum_{n \in M^-} \lambda_n \right| \leq \varepsilon, \\ \sum_{n \in M^+} |\lambda_n| = \left| \sum_{n \in M^+} \lambda_n \right| \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |\lambda_n| &\leq \sum_{n \in M^-} |\lambda_n| + \sum_{n \in M^+} |\lambda_n| \\ &= \left| \sum_{n \in M^-} \lambda_n \right| + \left| \sum_{n \in M^+} \lambda_n \right| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para todo k , segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 2\varepsilon.$$

■

Proposição 1.2.9 *Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$.*

Demonstração: Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ seja uma sequência incondicionalmente somável em X . Então, pelo Teorema 1.1.3, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| < \varepsilon \text{ para todo conjunto finito } M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \dots\}.$$

Portanto, para todo $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \dots\}$ e $\varphi \in B_{X'}$, temos, pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| = \left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| < \varepsilon.$$

Pelo Lema 1.2.8 segue que

$$\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 4\varepsilon,$$

e daí

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{1,w} \leq \left\| (x_j)_{j=n_\varepsilon}^{\infty} \right\|_{1,w} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq 4\varepsilon.$$

Portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$.

Suponha agora que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,u}(X)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{1,w} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq \varepsilon.$$

Então para todo conjunto finito $M \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \dots\}$ temos, pelo Teorema de Hahn-Banach, que

$$\left\| \sum_{j \in M} x_j \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{j \in M} \varphi(x_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j \in M} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_j)| \leq \varepsilon.$$

Pelo Teorema 1.1.3 segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em X . ■

Definição 1.2.10 *Seja $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Dados $1 \leq p, q < \infty$, dizemos que u é absolutamente (p, q) -somante (ou (p, q) -somante) se existe o operador*

$$\begin{aligned} \hat{u} : \ell_{q,w}(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{aligned}$$

e está bem definido.

Se $p = q$, dizemos simplesmente que u é absolutamente p -somante.

Proposição 1.2.11 *Seja $u \in \mathcal{L}(X; Y)$. São equivalentes:*

(i) u é (p, q) -somante;

(ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q}, \quad (1.8)$$

para quaisquer x_1, \dots, x_n em X e n natural;

(iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$;

(iv) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$.

(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$.

1.2. OPERADORES ABSOLUTAMENTE (P; Q)-SOMANTES

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ o ínfimo das constantes K tais que a desigualdade ?? continua válida.

Além disso, temos $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.

Demonstração: (i) \Rightarrow (ii) Suponha que u seja $(p; q)$ -somante. Vamos mostrar que \hat{u} tem gráfico fechado. De fato, suponha que $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ convirja para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ (com $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$) em $\ell_{q,w}(X)$ e que $\hat{u}(x^{(k)})$ convirja para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_p(Y)$. Como $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ converge para $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe N natural tal que

$$k \geq N_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n^{(k)} - x_n)|^q \right)^{1/q} = \|x^{(k)} - x\|_{q,w} < \varepsilon.$$

Com isso obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n^{(k)} - x_n)|^q < \varepsilon^q \text{ para todo } \varphi \in B_{X'}. \quad (1.9)$$

Como cada termo da série (1.9) é dominado por ε^q , segue que

$$k \geq N \Rightarrow \|x_n^{(k)} - x_n\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x_n^{(k)} - x_n)| < \varepsilon$$

para todo n . Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ converge para x_n em X . Como u é contínuo, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x_n^{(k)}) = u(x_n) \quad (1.10)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $(\hat{u}(x^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$ converge para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_p(Y)$, existe N' tal que

$$k \geq N' \Rightarrow \|\hat{u}(x^{(k)}) - y\|_p < \varepsilon,$$

e portanto

$$k \geq N' \Rightarrow \left\| (u(x_n^{(k)}))_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_p < \varepsilon,$$

ou ainda,

$$k \geq N' \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n^{(k)}) - y_n\|_p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Consequentemente

$$k \geq N' \Rightarrow \|u(x_n^{(k)}) - y_n\| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x_n^{(k)}) = y_n \quad (1.11)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, de (1.10) e (1.11) temos $u(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí

$$\hat{u}(x) = (u(x_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Como \hat{u} é linear, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que \hat{u} é contínuo. Logo, para qualquer sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ em X , temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} &= \|(u(x_k))_{k=1}^n\|_p = \|(\hat{u}(x_k))_{k=1}^n\|_p \\ &\leq \|\hat{u}\| \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} = \|\hat{u}\| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Note que de (1.12) temos que

$$\pi_{p,q}(u) \leq \|\hat{u}\|.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Suponha que para quaisquer x_1, \dots, x_n em X e $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_{q,w}(X)$. Então

$$\begin{aligned} \|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} = \sup_n \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_n \left[K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q} \right] = K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_n \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q} \\ &= K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q} = K \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

(iii) \Rightarrow (i) Segue claramente de (iii) que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q,w}(X)$.

Note que

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\| &= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \|(\hat{u}(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_p = \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} \leq 1} K \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{q,w} = K. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Logo

$$\|\hat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u). \quad (1.15)$$

De (1.12) e (1.15) segue que $\|\hat{u}\| = \pi_{p,q}(u)$.

(iii) \Rightarrow (iv) é óbvio, pois $\ell_{q,u}(X) \subset \ell_{q,w}(X)$.

(iv) \Rightarrow (v) é óbvio.

(v) \Rightarrow (ii) Se $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q,u}(X)$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \ell_{q,u}(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_k)_{k=1}^{\infty} &\longmapsto \tilde{u}((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (u(x_k))_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

está bem definida. Procedendo de maneira análoga à demonstração de (i) \Rightarrow (ii) chegaremos que \tilde{u} é contínuo.

Agora notemos que se $x_1, \dots, x_n \in X$, então

$$(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \ell_{q,u}(X)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} &= \|(u(x_k))_{k=1}^n\|_p = \|\tilde{u}(x_k)_{k=1}^n\|_p \\ &\leq \|\tilde{u}\| \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q,w} = \|\tilde{u}\| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Observação 1.2.12 Note que, como $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$ e

$$\|\hat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p \leq \|\hat{u}\| \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{q,w}$$

temos:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} = \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{1/q}$$

e, portanto, o ínfimo $\pi_{p,q}(u)$ é assumido.

Observação 1.2.13 Note que usando a Proposição 1.2.9 e a Proposição 1.2.11, temos que u é absolutamente (1, 1)-somante se, e somente se, u é absolutamente somante.

1.3 O Teorema da Dominação de Pietsch

A seguir, apresentaremos o Teorema da Dominação de Pietsch, que desempenha um papel importante na teoria de operadores absolutamente somantes.

Sejam K um espaço topológico de Hausdorff compacto e $C(K)$ o espaço de Banach (sobre o corpo dos reais) formado por todas as funções contínuas $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Em $C(K)$ consideramos a norma

$$\|f\| = \sup_{\varphi \in K} |f(\varphi)|.$$

Lema 1.3.1 *O conjunto*

$$\mathcal{P} = \{f \in C(K); f(\varphi) > 0, \forall \varphi \in K\}$$

é convexo e aberto em $C(K)$.

Demonstração: Vamos mostrar que \mathcal{P} é aberto em $C(K)$. Para tanto, considere $f \in \mathcal{P}$. Como K é compacto, existe $\varphi_0 \in K$ tal que

$$\inf_{\varphi \in K} f(\varphi) = f(\varphi_0) > 0.$$

Seja $\varepsilon = \frac{f(\varphi_0)}{2}$. Logo, se $\|g - f\| < \varepsilon$ temos

$$|g(\varphi) - f(\varphi)| \leq \sup_{\varphi \in K} |(g - f)(\varphi)| = \|g - f\| < \varepsilon$$

para todo $\varphi \in K$. Como $f(\varphi) \geq f(\varphi_0)$, segue que

$$g(\varphi) > f(\varphi) - \varepsilon \geq f(\varphi_0) - \varepsilon = \varepsilon > 0$$

para todo $\varphi \in K$.

Assim, $g \in \mathcal{P}$ e concluímos que a bola aberta com centro em f e raio ε está contida em \mathcal{P} . Assim, \mathcal{P} é um conjunto aberto em $C(K)$.

Vamos mostrar que \mathcal{P} é convexo. Para tanto, considere $f, g \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in [0, 1]$. Temos claramente que

$$\lambda f + (1 - \lambda)g = h \in C(K)$$

e

$$h(\varphi) = \lambda f(\varphi) + (1 - \lambda)g(\varphi) > 0,$$

para todo $\varphi \in K$ e portanto, \mathcal{P} é convexo. ■

Teorema 1.3.2 (Teorema da Dominação de Pietsch) *Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador linear e contínuo $u : X \rightarrow Y$ é absolutamente p -somante se, e somente*

1.3. O TEOREMA DA DOMINAÇÃO DE PIETSCH

se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ nos borelianos de $B_{X'}$, com a topologia fraca estrela, tais que

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{1/p} \quad (1.16)$$

para cada x em X . Neste caso, $\pi_p(u)$ é a menor de todas as constantes C tais que (1.16) ocorre.

Demonstração: Suponhamos que a desigualdade (1.16) ocorra. Basta mostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^p \right)^{1/p},$$

e assim, pela Proposição 1.2.11 temos que u é p -somante.

Vejam os que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p &\leq C^p \sum_{k=1}^n \int_{B_{X'}} |\varphi(x_k)|^p d\mu(\varphi) \\ &= C^p \int_{B_{X'}} \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^p d\mu(\varphi) \\ &\leq C^p \int_{B_{X'}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^p d\mu(\varphi) \\ &= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^p \int_{B_{X'}} d\mu(\varphi) \\ &= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^p \end{aligned}$$

para toda coleção finita de vetores $x_1, \dots, x_n \in X$. Logo recaímos na Proposição 1.2.11, mostrando que u é p -somante e

$$\pi_p(u) \leq C \quad (1.17)$$

Agora vamos provar a outra implicação. Defina, para cada conjunto finito $M \subset X$, a função

$$\begin{aligned} g_M &: B_{X'} \rightarrow \mathbb{R} \\ g_M(\varphi) &:= \sum_{x \in M} (\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p). \end{aligned}$$

1.3. O TEOREMA DA DOMINAÇÃO DE PIETSCH

Tomemos \mathcal{Q} como sendo o conjunto formado por todas as g_M . Vejamos que $\mathcal{Q} \subset C(B_{X'})$, ou seja, cada g_M é contínua. Deve-se lembrar que $B_{X'}$ está munido da topologia fraca estrela, gerada pelos funcionais da forma $J(x) \in E''$, com

$$J(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

para todo φ em X' , isto é, a topologia em X' mais econômica que torna os $J(x)$ contínuos.

Para provar que g_M é contínua, basta mostrar que sempre que uma rede (φ_λ) converge para φ em $B_{X'}$ então $g_M(\varphi_\lambda) \rightarrow g_M(\varphi)$.

Seja (φ_λ) uma rede convergindo para φ em $B_{X'}$, então

$$|\varphi_\lambda(x)|^p = |J(x)(\varphi_\lambda)|^p \rightarrow |J(x)(\varphi)|^p = |\varphi(x)|^p.$$

Logo

$$\left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi_\lambda(x)|^p \right) \rightarrow \left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p \right),$$

isto é,

$$g_M(\varphi_\lambda) \rightarrow g_M(\varphi)$$

e portanto g_M é contínua.

Note ainda que \mathcal{Q} é convexo.

Com efeito, se M e M_1 são subconjuntos finitos de X e $0 < \lambda < 1$, então

$$\begin{aligned} & \lambda g_M(\varphi) + (1 - \lambda)g_{M_1}(\varphi) \\ &= \lambda \sum_{x \in M} (\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p) + \\ &+ (1 - \lambda) \sum_{x \in M_1} (\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p) \\ &= \sum_{x \in M} \left(\left\| \lambda^{\frac{1}{p}} u(x) \right\|^p - \pi_p(u)^p \left| \varphi \left(\lambda^{\frac{1}{p}} x \right) \right|^p \right) + \\ &+ \sum_{x \in M_1} \left(\left\| u \left((1 - \lambda)^{\frac{1}{p}} x \right) \right\|^p - \pi_p(u)^p \left| \varphi \left((1 - \lambda)^{\frac{1}{p}} x \right) \right|^p \right) \\ &= \sum_{a \in \{\lambda^{1/p} x; x \in M\}} (\|ua\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p) + \\ &+ \sum_{a \in \{(1-\lambda)^{1/p} x; x \in M_1\}} (\|ua\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p) \\ &= g_{M_2}(\varphi), \end{aligned}$$

com

$$M_2 = \left\{ \lambda^{\frac{1}{p}} x; x \in M \right\} \cup \left\{ (1 - \lambda)^{\frac{1}{p}} x; x \in M_1 \right\}.$$

Considere

$$\mathcal{P} = \{w \in C(B_{X'}); w(\varphi) > 0 \text{ para todo } \varphi \text{ em } B_{X'}\}.$$

Note que, pelo Lema 1.3.1 com $K = B_{X'}$, \mathcal{P} é convexo e aberto.

Temos também que

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \emptyset.$$

De fato, dado $g_M \in \mathcal{Q}$ existe $\varphi_1 \in B_{X'}$ tal que $g_M(\varphi_1) \leq 0$. Com efeito, pela compacidade da $B_{X'}$ (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) e pela continuidade de g_M , existe $\varphi_1 \in B_{X'}$ tal que

$$g_M(\varphi_1) = \sup_{\varphi \in B_{X'}} g_M(\varphi) = \left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p \right) - \pi_p(u)^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{x \in M} |\varphi(x)|^p \right).$$

Como u é p -somante, segue que

$$\left(\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p \right) - \pi_p(u)^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{x \in M} |\varphi(x)|^p \leq 0$$

e portanto

$$g_M(\varphi_1) \leq 0.$$

Como \mathcal{P} é aberto e convexo e como \mathcal{Q} é convexo, segue pelo Teorema Hanh-Banach (com $A = \mathcal{P}$, $B = \mathcal{Q}$ e $E = C(B_{X'})$) que existem $h \in C(B_{X'})'$ e $c \geq 0$ tais que

$$h(g) \leq c < h(w) \tag{1.18}$$

para todo $w \in \mathcal{P}$ e todo $g \in \mathcal{Q}$. Como $u(0) = 0$, temos que $0 = g_{\{0\}} \in \mathcal{Q}$. Logo

$$h(w) > c \geq h(0) = 0 \tag{1.19}$$

para todo $w \in \mathcal{P}$, ou seja, $h(w) > 0$ para todo $w \in \mathcal{P}$.

Como h é contínua, segue que $h(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. De fato, se $w \in C(B_{X'})$ e $w \geq 0$, considere então (para cada k natural),

$$g_k(\varphi) = w(\varphi) + \frac{1}{k}.$$

Então $g_k > 0$ e

$$\begin{cases} h(g_k) > 0 \\ \|g_k - w\|_{C(B_{X'})} = \frac{1}{k} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$g_k \rightarrow w \text{ em } C(B_{X'})$$

1.3. O TEOREMA DA DOMINAÇÃO DE PIETSCH

e, como h é contínua, segue que

$$h(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(g_k) \geq 0$$

sempre que $w \geq 0$.

Vamos agora mostrar que $c = 0$. Para cada k natural, seja w_k a função constante $\frac{1}{k}$. Note que $w_k \in \mathcal{P}$, pois $\frac{1}{k} > 0$. Note também que $w_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ no espaço $C(B_{X'})$. Portanto

$$h(w_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h(0) = 0.$$

Como $h(w_k) > c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$c \leq 0. \tag{1.20}$$

De (1.19) e (1.20) segue que $c = 0$.

Seja $h_1 \in C(B_{X'})'$ dado por

$$h_1(w) = \frac{h(w)}{h(1)}.$$

Perceba que h_1 está bem definido, pois $h(1) > 0$. Note que $h_1(1) = 1$ e $h_1(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. De [2, Teorema 4.3.10] podemos encontrar uma medida de probabilidade (positiva) na sigma-álgebra de Borel de $B_{X'}$ tal que

$$h_1(w) = \int_{B_{X'}} w(\varphi) d\mu(\varphi)$$

para todo $w \in C(B_{X'})$. Daí

$$\int_{B_{X'}} g(\varphi) d\mu(\varphi) = h_1(g) \leq 0,$$

para cada $g \in \mathcal{Q}$, pois

$$h_1(g) = \frac{h(g)}{h(1)} \leq \frac{c}{h(1)} = 0$$

para cada $g \in \mathcal{Q}$. Agora, para cada $x \in X$, temos $g_{\{x\}} \in \mathcal{Q}$ e obtemos

$$\int_{B_{X'}} g_{\{x\}}(\varphi) d\mu(\varphi) \leq 0,$$

isto é,

$$\int_{B_{X'}} (\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p) d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Portanto

$$\left(\int_{B_{X'}} \|u(x)\|^p d\mu(\varphi) \right) - \pi_p(u)^p \int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \leq 0$$

e

$$\|u(x)\|^p \int_{B_{X'}} d\mu(\varphi) \leq \pi_p(u)^p \int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi).$$

Elevando ambos os membros a $1/p$, temos

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.21)$$

De (1.17) e (1.21) segue que $\pi_p(u)$ é a menor das constantes que satisfaz (1.16). ■

Corolário 1.3.3 *Se $1 \leq p \leq q < \infty$, todo operador absolutamente p -somante é absolutamente q -somante.*

Demonstração: Seja $u : X \rightarrow Y$ uma aplicação p -somante. Então, pelo Teorema da Dominação de Pietsch, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo x em X . Como a medida μ é de probabilidade temos que $L_q(X, \Sigma, \mu) \subset \ell_p(X, \Sigma, \mu)$ e $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$. Daí

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

e, pelo Teorema da Dominação de Pietsch, segue que u é absolutamente q -somante. ■

Capítulo 2

Aplicações multilineares absolutamente somantes

A generalização da teoria linear de operadores absolutamente somantes para o ambiente não-linear tem, como primeiro passo, o caso de aplicações multilineares e polinômios. Entretanto, não existe apenas uma forma natural de estender o conceito linear para aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach. Listaremos algumas possíveis generalizações encontradas na literatura.

A seguir, destacaremos a classe das aplicações p -semi-integrais e suas principais propriedades. Em seguida, apresentaremos outras classes de aplicações multilineares relacionadas à noção de operadores absolutamente somantes:

2.1 Aplicações p -semi-integrais

Definição 2.1.1 *Se $p \geq 1$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita de p -semi-integral ($T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$) se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E_l'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right)^{1/p} \quad (2.1)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_j^l \in E_l$ com $l = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. O ínfimo das constantes C define uma norma $\|\cdot\|_{si,p}$ para o espaço das aplicações p -semi-integrais.

O próximo resultado apresenta um Teorema de Dominação de Pietsch para as aplicações p -semi-integrais. A demonstração, como veremos, segue as mesmas linhas do caso linear.

Teorema 2.1.2 *$T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é p -semi-integral se, e somente se, existem $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade na σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(B_{E_1'} \times \dots \times B_{E_n'})$ de $B_{E_1'} \times \dots \times B_{E_n'}$*

munido com o produto das topologias $\sigma(E'_l; E_l), l = 1, \dots, n$, tais que

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \right)^{1/p} \quad (2.2)$$

para todo $x_j \in E_j$ e $j = 1, \dots, n$. Além disso, o ínfimo de C em (2.2) é $\|T\|_{si,p}$.

Demonstração: Suponhamos que existam uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ sobre $K = B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$ tais que (2.2) ocorra. Vamos mostrar que T é p -semi-integral. Dados $m \in \mathbb{N}$, $x_1^k, \dots, x_m^k \in E_k, k = 1, \dots, n$ obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p &\leq C^p \left(\sum_{j=1}^m \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \right) \\ &= C^p \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &\leq C^p \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \left(\sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= C^p \sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= C^p \sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \mu(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}) \\ &= C^p \sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p. \end{aligned}$$

Portanto, T é p -semi-integral e

$$\|T\|_{si,p} \leq C. \quad (2.3)$$

Reciprocamente, suponha que $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Considere $C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$ o espaço de Banach constituído por todas as funções reais contínuas definidas em $B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$. Para cada conjunto finito $M \subset E_1 \times \dots \times E_n$, definimos

$$\Psi_M : B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n} \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\Psi_M(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M} \left(\|T(x_1, \dots, x_n)\|^p - \|T\|_{si,p}^p |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p \right).$$

É necessário considerar M como uma sequência finita de elementos de $E_1 \times \dots \times E_n$ ao invés de um subconjunto finito (isto é, repetições são permitidas).

Distribuindo adequadamente o somatório na definição de Ψ_M , podemos notar que esta função é uma soma de uma função constante

$$C(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M} \|T(x_1, \dots, x_n)\|^p$$

com uma função contínua

$$h(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = -\|T\|_{si,p} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p,$$

o que garante que $\Psi_M \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$.

Sejam agora \mathcal{G} o conjunto formado por todas as Ψ_M e \mathcal{F} a sua envoltória convexa, isto é

$$\mathcal{F} = \left\{ \Psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}; \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \text{ com } \lambda_j \in [0, 1], \Psi_{M_j} \in \mathcal{G}, j = 1, \dots, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

É claro que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$.

Vamos mostrar que para cada $\Psi \in \mathcal{F}$ existe $\varphi_\Psi \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$ tal que $\Psi(\varphi_\Psi) \leq 0$.

De fato, dado $\Psi \in \mathcal{F}$ existem $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ com $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ e $\Psi_{M_1}, \dots, \Psi_{M_k} \in \mathcal{G}$ tais que

$$\Psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}.$$

Defina

$$M_\Psi = \bigcup_{j=1}^k \left\{ \left(\lambda_j^{\frac{1}{p}} x_1, x_2, \dots, x_n \right); (x_1, \dots, x_n) \in M_j \right\}.$$

Note que

$$|\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p = |J(x_1)(\varphi_1) \dots J(x_n)(\varphi_n)|^p$$

e, como cada $J(x_j)$ é contínua em $B_{E'_j}$, segue que a função

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n} \mapsto \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_\Psi} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p$$

é contínua e assim podemos escolher $(\varphi_{1,\Psi}, \dots, \varphi_{n,\Psi}) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$ tal que

$$\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_\Psi} |\varphi_{1,\Psi}(x_1) \dots \varphi_{n,\Psi}(x_n)|^p = \sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_\Psi} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p. \quad (2.4)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\varphi_\Psi) &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}(\varphi_{1,\Psi}, \dots, \varphi_{n,\Psi}) \\
 &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_j} \left(\|T(x_1, \dots, x_n)\|^p - \|T\|_{si,p} |\varphi_{1,\Psi}(x_1) \dots \varphi_{n,\Psi}(x_n)|^p \right) \\
 &\leq \sum_{j=1}^k \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in M_j} \left(\|T(\lambda_j^{1/p} x_1, \dots, x_n)\|^p - \|T\|_{si,p} |\varphi_{1,\Psi}(\lambda_j^{1/p} x_1) \dots \varphi_{n,\Psi}(x_n)|^p \right) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sum_{(\lambda_j^{1/p} x_1, \dots, x_n) \in M_\Psi} \left(\|T(\lambda_j^{1/p} x_1, \dots, x_n)\|^p - \|T\|_{si,p} |\varphi_{1,\Psi}(\lambda_j^{1/p} x_1) \dots \varphi_{n,\Psi}(x_n)|^p \right) \\
 &= \Psi_{M_\Psi}(\varphi_{1,\Psi}, \dots, \varphi_{n,\Psi}).
 \end{aligned}$$

Para que a igualdade (1) seja verdadeira, é necessário considerar cada M_j como uma sequência finita de elementos de $E_1 \times \dots \times E_n$ ao invés de um subconjunto finito do mesmo. Assim, a união definida em M_Ψ tem o sentido de "colar" a sequência finita correspondente (em M_Ψ) a M_j na sua correspondente à subsequente M_{j+1} , ao invés de considerarmos a união no seu sentido usual.

Pela desigualdade (2.1) e (2.4), obtemos que $\Psi_{M_\Psi}(\varphi_{1,\Psi}, \dots, \varphi_{n,\Psi}) \leq 0$ e, portanto

$$\Psi(\varphi_{1,\Psi}, \dots, \varphi_{n,\Psi}) \leq 0. \quad (2.5)$$

Seja

$$\mathcal{P} = \left\{ T \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}); T(\varphi_1, \dots, \varphi_n) > 0 \text{ para todo } (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n} \right\}$$

É claro que \mathcal{P} é não-vazio, pois cada função constante positiva definida em $B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$ pertence a \mathcal{P} . Pela definição de \mathcal{P} e de (2.5) temos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Além disso, o Lema 1.3.1 garante que \mathcal{P} é convexo e aberto em $C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$. Então, por uma versão da forma geométrica do Teorema de Hanh-Banach, existem $L \in \mathbb{R}$ e $h \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$ tais que

$$h(\Psi) \leq L < h(T) \quad (2.6)$$

para toda $\Psi \in \mathcal{F}$ e toda $T \in \mathcal{P}$.

Note que $0 \equiv \Psi_{\{(0, \dots, 0)\}} \in \mathcal{F}$. Portanto, $0 = h(0) \leq L$. Como a função constante $\frac{1}{k}$, definida em $B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$, pertence a \mathcal{P} para cada $k \in \mathbb{N}$, segue de (2.6) que $0 \leq L < h(\frac{1}{k})$. Fazendo $k \rightarrow +\infty$, como h é contínua, $h(\frac{1}{k}) \rightarrow h(0) = 0$ e obtemos que $L = 0$. Daí, reescrevemos (2.6) como

$$h(\Psi) \leq 0 < h(T) \quad (2.7)$$

para toda $\Psi \in \mathcal{F}$ e toda $T \in \mathcal{P}$.

Usando o mesmo argumento usado na demonstração do Teorema da Dominação de Pietsch, segue que se $T \geq 0$ então $h(T) \geq 0$, para toda $T \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$. De

fato, seja $T \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$ tal que $T \geq 0$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $g_k : B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_k(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = T(\varphi_1, \dots, \varphi_n) + \frac{1}{k}.$$

Então $g_k \in \mathcal{P}$ e, de (2.7), segue que

$$\begin{cases} h(g_k) > 0 \\ \|g_k - T\|_{C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})} = \frac{1}{k} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$g_k \rightarrow T$$

e, como h é contínua, segue que

$$h(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(g_k) \geq 0$$

sempre que $T \geq 0$.

Seja $h_1 \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})'$ dado por

$$h_1(w) = \frac{h(w)}{h(1)}.$$

De (2.7), $h(1) > 0$, de modo que h_1 está bem definido. Sua linearidade e continuidade decorrem da linearidade e continuidade de h . Note ainda que $h_1(1) = 1$ e que $h_1(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. De [2, Teorema 4.3.10], existe uma única medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}$, $\mathcal{B}(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$, tal que

$$h_1(w) = \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} w(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

para todo $w \in C(B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n})$. Então, de (2.7) obtemos que

$$\int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} g(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = h_1(g) \leq 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$, pois

$$h_1(g) = \frac{h(g)}{h(1)} \leq \frac{L}{h(1)} = 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$. Em particular, para cada $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ temos que $\Psi_{\{(x_1, \dots, x_n)\}} \in \mathcal{F}$, e

$$\int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \Psi_{\{(x_1, \dots, x_n)\}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \leq 0.$$

Então

$$\int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \left(\|T(x_1, \dots, x_n)\|^p - \|T\|_{si,p} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p \right) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \leq 0$$

e conseqüentemente

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\|^p - \|T\|_{si,p} \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p d\mu \leq 0$$

e o resultado segue facilmente. ■

Proposição 2.1.3 Se $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, $A_k \in \mathcal{L}(D_k; E_k)$, $k = 1, \dots, n$ e $S \in \mathcal{L}(F; G)$, então $S \circ T \circ (A_1, \dots, A_n)$ é p -semi-integral e

$$\|S \circ T \circ (A_1, \dots, A_n)\|_{si,p} \leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{k=1}^n \|A_k\|.$$

(ii) Se $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $f : F \rightarrow F_0$ é uma imersão isométrica, então $\|f \circ T\|_{si,p} = \|T\|_{si,p}$.

(iii) Se $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, então $\mathcal{L}(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}; F) = \mathcal{L}_{si,p}(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}; F)$, para todos j_1, \dots, j_n em $\{1, \dots, n\}$ com $j_r \neq j_s$ para $r \neq s$ e $n \leq n$.

Demonstração: (i) Suponhamos $A_1 \neq 0, \dots, A_n \neq 0$ (No caso em que $A_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, n$, teríamos a igualdade).

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m \|(S \circ T \circ (A_1, \dots, A_n))(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \|S(T(A_1(x_j^1), \dots, A_n(x_j^n)))\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|S\| \left(\sum_{j=1}^m \|T(A_1(x_j^1), \dots, A_n(x_j^n))\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|S\| \|T\|_{si,p} \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m (|\varphi_1(A_1(x_j^1))| \dots |\varphi_n(A_n(x_j^n))|)^p \right)^{1/p} \\ &= \|S\| \|T\|_{si,p} \|A_1\| \dots \|A_n\| \left(\sup_{l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m \left(\left| \varphi_l \left(\frac{A_l}{\|A_l\|}(x_j^l) \right) \right| \dots \left| \varphi_n \left(\frac{A_n}{\|A_n\|}(x_j^n) \right) \right| \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|S\| \|T\|_{si,p} \prod_{k=1}^n \|A_k\| \left(\sup_{\|\psi_l\| \leq 1, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m (|\psi_1(x_j^1)| \dots |\psi_n(x_j^n)|)^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

(ii) Como f é uma imersão isométrica, então $\|f(x)\| = \|f\| \|x\| = \|x\|$ e $\|f\| = 1$.

Vamos mostrar o caso $\|T\|_{si,p} \geq \|f \circ T\|_{si,p}$.
 Por (i), com $A_1 = \dots = A_n = id$, temos

$$\|f \circ T \circ (A_1, \dots, A_n)\|_{si,p} \leq \|f\| \|T\|_{si,p} \prod_{k=1}^n \|A_k\|$$

e portanto

$$\|f \circ T\|_{si,p} \leq \|f\| \|T\|_{si,p} = \|T\|_{si,p}.$$

Agora, vejamos que $\|T\|_{si,p} \leq \|f \circ T\|_{si,p}$. De fato,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^m \|f(T(x_j^1, \dots, x_j^n))\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|f \circ T\|_{si,p} \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E_l'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|f \circ T\|_{si,p} \end{aligned}$$

e o resultado segue.

(iii) Vamos mostrar que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n-1}; F) = \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_{n-1}; F)$. Os outros resultados são análogos.

Sejam $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n-1}; F)$, $\varphi_n \in E_n'$, $\varphi_n \neq 0$ e $a \in E_n$ com $\varphi_n(a) = 1$.

Defina $R_T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ por

$$R_T(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = T(x_1, \dots, x_{n-1}) \varphi_n(x_n).$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^{n-1})\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^{n-1}) \cdot 1\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m \|R_T(x_1, \dots, x_{n-1}, a)\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \|R_T\|_{si,p} \left(\sup_{\psi_l \in B_{E_l'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\psi_1(x_j^1) \dots \psi_{n-1}(x_j^{n-1}) \psi_n(a)|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \|R_T\|_{si,p} \left(\sup_{\psi_l \in B_{E_l'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\psi_1(x_j^1) \dots \psi_{n-1}(x_j^{n-1})|^p \right)^{1/p} \|\psi_n\| \|a\| \\
 &= \|R_T\|_{si,p} \|a\| \left(\sup_{\psi_l \in B_{E_l'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\psi_1(x_j^1) \dots \psi_{n-1}(x_j^{n-1})|^p \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Logo T é p -semi-integral. ■

Para $r \geq 1$ temos a seguinte caracterização de aplicações r -semi integral definida em $C(K_1) \times \dots \times C(K_n)$ cuja demonstração se baseia em [1].

Lema 2.1.4 Para $m \in \mathbb{N}$ e $f_j^l \in C(K_l)$, $l = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, vale a igualdade

$$\sup_{\varphi_l \in B_{C(K_l)'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(f_j^1) \dots \varphi_n(f_j^n)|^r = \sup_{x_i \in K_l, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r.$$

Demonstração: Vamos mostrar o caso $l = 2$. O caso geral é similar. A demonstração foi gentilmente ensinada pelo Professor Geraldo Botelho. Note que

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}, \varphi_2 \in B_{C(K_2)'}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(f_j^1) \cdot \varphi_2(f_j^2)|^r \\
 &= \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}, \varphi_2 \in B_{C(K_2)'}} \sum_{j=1}^m |\varphi_2(\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2)|^r \\
 &= \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \sum_{j=1}^m \|(\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2)\|_{w,r}^r.
 \end{aligned}$$

Mas de [12, Pag 41], temos

$$\sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \sum_{j=1}^m \left\| (\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2) \right\|_{w,r}^r = \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \left\| \sum_{j=1}^m (\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2) \right\|_{\infty}.$$

Logo

$$\begin{aligned} & \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}, \varphi_2 \in B_{C(K_2)'}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(f_j^1) \cdot \varphi_2(f_j^2)|^r \\ &= \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \left\| \sum_{j=1}^m (\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2) \right\|_{\infty}^r \\ &= \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \sup_{x_2 \in K_2} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2(x_2)|^r \\ &= \sup_{x_2 \in K_2} \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(f_j^1) \cdot f_j^2(x_2)|^r \\ &= \sup_{x_2 \in K_2} \sup_{\varphi_1 \in B_{C(K_1)'}} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(f_j^2(x_2) \cdot f_j^1)|^r \\ &= \sup_{x_2 \in K_2} \left\| (f_j^2(x_2) \cdot f_j^1)_{j=1}^m \right\|_{w,r}^r \\ &\stackrel{(*)}{=} \sup_{x_2 \in K_2} \left\| \sum_{j=1}^m |(f_j^2(x_2) \cdot f_j^1)|^r \right\|_{\infty} \\ &= \sup_{x_2 \in K_2} \sup_{x_1 \in K_1} \sum_{j=1}^m |f_j^2(x_2) \cdot f_j^1(x_1)|^r, \end{aligned}$$

onde em (*) foi novamente usado [12, Pag 41]. ■

A seguir, mostraremos que para aplicações n -lineares definidas em $C(K_1) \times \dots \times C(K_n)$ há um outro teorema de dominação semelhante ao Teorema da Dominação de Pietsch. A demonstração é bastante semelhante à demonstração do Teorema da Dominação de Pietsch mas preferimos fazer todos os detalhes.

Teorema 2.1.5 *Sejam K_1, \dots, K_n espaços topológicos compactos de Hausdorff. Se $T \in \mathcal{L}(C(K_1), \dots, C(K_n); F)$ e $r \geq 1$, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) T é r -semi integral;
- (ii) Existem $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ das σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(K_1 \times \dots \times K_n)$ de $K_1 \times \dots \times K_n$ tal que

$$\|T(f_1, \dots, f_n)\| \leq C \left(\int_{K_1 \times \dots \times K_n} |f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^r d\mu(x_1, \dots, x_n) \right)^{1/r}$$

para todo $f_l \in C(K_l)$ com $l = 1, \dots, n$;

(iii) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(f_{1,j}, \dots, f_{n,j})\|^r \right)^{1/r} \leq C \left(\sup_{x_i \in K_i, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |f_{1,j}(x_1) \dots f_{n,j}(x_n)|^r \right)^{1/r}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $f_{l,j} \in C(K_l)$ com $l = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Demonstração: (i) \Rightarrow (iii) Suponha que T seja r -semi-integral. Logo $C \geq 0$, tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^r \right)^{1/r} \leq C \left(\sup_{\varphi_l \in B_{C(K_l)'}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^r \right)^{1/r}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, $x_j^l \in E_l$ com $l = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. O Lema 2.1.4 fornece o resultado.

(iii) \Rightarrow (i) Basta usar o Lema 2.1.4 novamente.

(ii) \Rightarrow (iii) Basta observar a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \|T(f_j^1, \dots, f_j^n)\|^r &\leq C^r \left(\sum_{j=1}^m \int_{K_1 \times \dots \times K_n} |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r d\mu(x_1, \dots, x_n) \right) \\ &= C^r \int_{K_1 \times \dots \times K_n} \left(\sum_{j=1}^m |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r \right) d\mu(x_1, \dots, x_n) \\ &\leq C^r \int_{K_1 \times \dots \times K_n} \left(\sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E_1'} \times \dots \times B_{E_n'}} \sum_{j=1}^m |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r \right) d\mu(x_1, \dots, x_n) \\ &= C^r \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in K_1 \times \dots \times K_n} \sum_{j=1}^m |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r \int_{K_1 \times \dots \times K_n} d\mu(x_1, \dots, x_n) \\ &= C^r \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in K_1 \times \dots \times K_n} \sum_{j=1}^m |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r \mu(K_1 \times \dots \times K_n) \\ &= C^r \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in K_1 \times \dots \times K_n} \sum_{j=1}^m |f_j^1(x_1) \dots f_j^n(x_n)|^r. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (ii) Suponha que $T \in \mathcal{L}(C(K_1), \dots, C(K_n); F)$ satisfaça (iii). Considere $C(K_1 \times \dots \times K_n)$ o espaço de Banach constituído por todas as funções reais contínuas definidas em $K_1 \times \dots \times K_n$. Para cada conjunto finito $M \subset C(K_1) \times \dots \times C(K_n)$, definimos

$$\Psi_M : K_1 \times \dots \times K_n \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\Psi_M(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M} \|T(f_1, \dots, f_n)\|^p - C |f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^p.$$

É necessário considerar M como uma sequência finita de elementos de $C(K_1) \times \dots \times C(K_n)$ ao invés de um subconjunto finito (isto é, repetições são permitidas).

Distribuindo adequadamente o somatório na definição de Ψ_M , podemos notar que esta função é uma soma de uma função constante

$$C(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M} \|T(f_1, \dots, f_n)\|^p$$

com uma função contínua

$$h(x_1, \dots, x_n) = -D \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M} |f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^p,$$

justificando que $\Psi_M \in C(K_1 \times \dots \times K_n)$.

Sejam agora \mathcal{G} o conjunto formado por todas as Ψ_M e \mathcal{F} a sua envoltória convexa, isto é

$$\mathcal{F} = \left\{ \Psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}; \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \text{ com } \lambda_j \in [0, 1], \Psi_{M_j} \in \mathcal{G}, j = 1, \dots, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

É claro que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset C(K_1 \times \dots \times K_n)$.

Vamos mostrar que para cada $\Psi \in \mathcal{F}$ existe $x_\Psi \in K_1 \times \dots \times K_n$ tal que $\Psi(x_\Psi) \leq 0$.

De fato, dado $\Psi \in \mathcal{F}$ existem $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ com $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ e $\Psi_{M_1}, \dots, \Psi_{M_k} \in \mathcal{G}$

tais que $\Psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}$.

Defina

$$M_\Psi = \bigcup_{j=1}^k \left\{ \left(\lambda_j^{\frac{1}{p}} f_1, f_2, \dots, f_n \right); (f_1, \dots, f_n) \in M_j \right\}.$$

Note que a função

$$(x_1, \dots, x_n) \in K_1 \times \dots \times K_n \mapsto \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M_\Psi} |f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^p$$

é contínua e assim podemos escolher $x_\Psi(x_{1,\Psi}, \dots, x_{n,\Psi}) \in K_1 \times \dots \times K_n$ tal que

$$\sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M_\Psi} |f_1(x_{1,\Psi}) \dots f_n(x_{n,\Psi})|^p = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in K_1 \times \dots \times K_n} \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M_\Psi} |f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^p. \quad (2.8)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \Psi(x_\Psi) &= \Psi(x_{1,\Psi}, \dots, x_{n,\Psi}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \Psi_{M_j}(x_{1,\Psi}, \dots, x_{n,\Psi}) \\
 &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M_j} (\|T(f_1, \dots, f_n)\|^p - D |f_1(x_{1,\Psi}) \dots f_n(x_{n,\Psi})|^p) \\
 &\leq \sum_{j=1}^k \sum_{(f_1, \dots, f_n) \in M_j} \left(\left\| T(\lambda_j^{1/p} f_1, \dots, f_n) \right\|^p - D \left| \lambda_j^{1/p} f_1(x_{1,\Psi}) \dots f_n(x_{n,\Psi}) \right|^p \right) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sum_{(\lambda_j^{1/p} f_1, \dots, f_n) \in M_\Psi} \left(\left\| T(\lambda_j^{1/p} f_1, \dots, f_n) \right\|^p - D \left| \lambda_j^{1/p} f_1(x_{1,\Psi}) \dots f_n(x_{n,\Psi}) \right|^p \right) \\
 &= \Psi_{M_\Psi}(x_{1,\Psi}, \dots, x_{n,\Psi}).
 \end{aligned}$$

Para que a igualdade (1) seja verdadeira, é necessário considerar cada M_j como uma sequência finita de elementos de $C(K_1) \times \dots \times C(K_n)$ ao invés de um subconjunto finito do mesmo. Assim, a união definida em M_Ψ tem o sentido de "colar" a sequência finita correspondente (em M_Ψ) a M_j na sua correspondente à subsequente M_{j+1} , ao invés de considerarmos a união no seu sentido usual.

Pela desigualdade (2.1) e (2.8), obtemos que $\Psi_{M_\Psi}(x_\Psi) \leq 0$ e, portanto

$$\Psi(x_\Psi) \leq 0. \quad (2.9)$$

Seja

$$\mathcal{P} = \{T \in C(K_1 \times \dots \times K_n); T(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in K_1 \times \dots \times K_n$.

É claro que \mathcal{P} é não-vazio, pois cada função constante positiva definida em $K_1 \times \dots \times K_n$ pertence a \mathcal{P} . Pela definição de \mathcal{P} e de (2.9) temos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Além disso, o Lema 1.3.1 garante que \mathcal{P} é convexo e aberto em $C(K_1 \times \dots \times K_n)$. Então, pelo Teorema de Hanh-Banach (forma geométrica), existem $L \in \mathbb{R}$ e $h \in C(K_1 \times \dots \times K_n)'$ tais que

$$h(\Psi) \leq L < h(T) \quad (2.10)$$

para toda $\Psi \in \mathcal{F}$ e toda $T \in \mathcal{P}$.

Note que $0 \equiv \Psi_{\{(0, \dots, 0)\}} \in \mathcal{F}$. Portanto, $0 = h(0) \leq L$. Como a função constante $\frac{1}{k}$, definida em $K_1 \times \dots \times K_n$, pertence a \mathcal{P} para cada $k \in \mathbb{N}$, segue de (2.10) que $0 \leq L < h(\frac{1}{k})$. Fazendo $k \rightarrow +\infty$, como h é contínua, $h(\frac{1}{k}) \rightarrow h(0) = 0$ e obtemos que $L = 0$. Daí, reescrevemos (2.10) como

$$h(\Psi) \leq 0 < h(T) \quad (2.11)$$

para toda $\Psi \in \mathcal{F}$ e toda $T \in \mathcal{P}$.

Vamos mostrar que se $T \geq 0$ então $h(T) \geq 0$, para toda $T \in C(K_1 \times \dots \times K_n)$. De fato, seja $T \in C(K_1 \times \dots \times K_n)$ tal que $T \geq 0$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $g_k : K_1 \times \dots \times K_n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{k}.$$

Então $g_k \in \mathcal{P}$ e, de (2.11), segue que

$$\begin{cases} h(g_k) > 0 \\ \|g_k - T\|_{C(K_1 \times \dots \times K_n)} = \frac{1}{k} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$g_k \rightarrow T$$

e, como h é contínua, segue que

$$h(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(g_k) \geq 0$$

sempre que $T \geq 0$.

Seja $h_1 \in C(K_1 \times \dots \times K_n)'$ dado por

$$h_1(w) = \frac{h(w)}{h(1)}.$$

De (2.11), $h(1) > 0$, de modo que h_1 está bem definido. Sua linearidade e continuidade decorrem da linearidade e continuidade de h . Note ainda que $h_1(1) = 1$ e que $h_1(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. De [2, Teorema 4.3.10], existe uma única medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $K_1 \times \dots \times K_n$, $\mathcal{B}(K_1 \times \dots \times K_n)$, tal que

$$h_1(w) = \int_{K_1 \times \dots \times K_n} w(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n)$$

para todo $w \in C(K_1 \times \dots \times K_n)$. Então, de (2.11) obtemos que

$$\int_{K_1 \times \dots \times K_n} g(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) = h_1(g) \leq 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$. Pois,

$$h_1(g) = \frac{h(g)}{h(1)} \leq \frac{L}{h(1)} = 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$. Em particular, para cada $(f_1, \dots, f_n) \in C(K_1) \times \dots \times C(K_n)$ temos que $\Psi_{\{(f_1, \dots, f_n)\}} \in \mathcal{F}$, e

$$\int_{K_1 \times \dots \times K_n} \Psi_{\{(f_1, \dots, f_n)\}}(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_1, \dots, x_n) \leq 0.$$

Então

$$\int_{K_1 \times \dots \times K_n} (\|T(f_1, \dots, f_n)\|^p - D|f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^p) d\mu(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

e portanto

$$\Rightarrow \|T(f_1, \dots, f_n)\|^p \leq D \int_{K_1 \times \dots \times K_n} |f_1(x_1) \dots f_n(x_n)|^p d\mu(x_1, \dots, x_n).$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$, segue o resultado. ■

2.2 Outras extensões do conceito de operadores absolutamente somantes

2.2.1 Aplicações p -dominadas

Definição 2.2.1 Se $p \geq 1, T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dito p -dominado ($T \in \mathcal{L}_{d,p}(E_1, \dots, E_n; F)$) se existem $C \geq 0$ e medidas regulares de probabilidade μ_j nas sigma-álgebras de Borel $\mathcal{B}(B_{E'_j})$ de $B_{E'_j}$ munidas com as topologias $\sigma(E'_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$, tais que

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \prod_{k=1}^n \left[\int_{B_{E'_j}} |\varphi(x_j)|^p d\mu_j(\varphi) \right]^{1/p}$$

para todo $x_j \in E_j$ e $j = 1, \dots, n$.

As aplicações dominadas são caracterizadas pelo seguinte teorema de fatoração (veja em [6, Proposição 46 (a)]):

Teorema 2.2.2 $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é p -dominado se, e somente se, existem espaços de Banach G_1, \dots, G_n , operadores lineares absolutamente p -somantes $u_j \in \mathcal{L}(E_j; G_j)$ e uma aplicação n -linear contínua $R \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$, tais que $T = R \circ (u_1, \dots, u_n)$.

Assim como os operadores lineares absolutamente somantes, as aplicações dominadas também são caracterizadas por desigualdades:

Teorema 2.2.3 Se $p \geq 1, T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ as seguintes condições são equivalentes:

- (i) T é p -dominado;
- (ii) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^{p/m} \right)^{m/p} \leq C \prod_{k=1}^m \left\| (x_j^k)_{j=1}^n \right\|_{p,w}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_j^k \in E_k$, tais que $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$.

Mais detalhes sobre esta classe de operadores podem ser encontrados em [17] e [20].

2.2.2 Aplicações de tipo absolutamente p -somantes

Para $i = 1, \dots, n$, denotamos por

$$\Psi_i^{(n)} : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}\left(E_i; \mathcal{L}\left(E_1, \overset{[i]}{\dots}, E_n; F\right)\right)$$

2.2. OUTRAS EXTENSÕES DO CONCEITO DE OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

o isomorfismo isométrico canônico

$$\Psi_i^{(n)}(T)(x_i) \left(x_1, \overset{[i]}{\dots}, x_n \right) = T(x_1, \dots, x_n),$$

onde $\overset{[i]}$ significa que a i -ésima coordenada é omitida.

Uma maneira natural de estender uma classe de operadores lineares para o caso n -linear é impor que $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ pertence à extensão n -linear precisamente quando $\Psi_j^{(n)}(T)$ pertencer à classe linear para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Essa é a essência da próxima definição:

Definição 2.2.4 *Se $p \geq 1, T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dito de tipo absolutamente p -somante ($T \in [\Pi_{as(p)}](E_1, \dots, E_n; F)$) se $\Psi_j^{(n)}(T)$ for absolutamente p -somante para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.*

2.2.3 Aplicações completamente p -somantes

A classe das aplicações multilineares completamente p -somantes (que definiremos a seguir) é uma das extensões multilineares mais bem sucedidas do conceito de operador absolutamente somante. Essa classe foi introduzida por Matos [18] e, independentemente, por F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva [3] (a terminologia usada por Matos foi “fully summing” e a terminologia escolhida por Bombal, Pérez-García and Villanueva foi “multiple summing”).

Definição 2.2.5 *Se $p \geq 1, T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é completamente p -somante se existir $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^{\infty} \left\| T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \prod_{k=1}^n \left\| (x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w}$$

para toda $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(E_k)$, $k = 1, \dots, n$.

O espaço de todas as aplicações n -lineares completamente p -somantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F é denotado por $\mathcal{L}_{fas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, e o ínfimo das constantes C , que satisfazem a desigualdade acima, define uma norma $\|\cdot\|_{fas,p}$ no espaço $\mathcal{L}_{fas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Teorema 2.2.6 *Para $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $p > 0$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) T é completamente p -somante;
- (2) Se $(x_i^{(k)})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(E_k)$, $k = 1, \dots, n$, então $\left(T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) \right)_{j \in \mathbb{N}^n} \in \ell_p(F, \mathbb{N}^n)$;

(3) A aplicação

$$T_w : \ell_{p,w}(E_1) \times \dots \times \ell_{p,w}(E_n) \rightarrow \ell_p(F, \mathbb{N}^n)$$

$$T_w \left((x_i^1)_{i=1}^\infty, \dots, (x_i^n)_{i=1}^\infty \right) = \left(T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) \right)_{j \in \mathbb{N}^n}$$

é bem definida, n -linear e contínua. Neste caso $\|T\|_{fas,p} = \|T_w\|$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrado em [18].

2.2.4 Aplicações fortemente p -somantes

O conceito de aplicação fortemente p -somante é devido a V. Dimant [13]:

Definição 2.2.7 *Se $p \geq 1, T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é fortemente p -somante ($T \in \mathcal{L}_{sas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$) se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer $x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)} \in E_i, i = 1, \dots, n$ e $m \in \mathbb{N}$, temos:*

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)}} \left(\sum_{j=1}^m |\phi(x_j^1, \dots, x_j^n)|^p \right)^{1/p}.$$

O teorema abaixo aparece em [13].

Teorema 2.2.8 *Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é fortemente p -somante;
- (ii) Existem $C \geq 0$ e uma medida regular de probabilidade na σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})})$ de $B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})}$ com a topologia fraca estrela, tais que

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})}} |\phi(x_1, \dots, x_n)|^p d\mu(\phi) \right)^{1/p}$$

para quaisquer $x_j \in E_j$ e $j = 1, \dots, n$.

Note que quando $F = \mathbb{K}$ toda $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é fortemente p -somante, para todo $p \geq 1$.

De fato, se $T = 0$ é claro; se $T \neq 0$,

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\| \frac{T}{\|T\|} (x_j^1, \dots, x_j^n) \right\|^p \right)^{1/p} \leq \sup_{\substack{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |\phi(x_j^1, \dots, x_j^n)|^p \right)^{1/p}$$

e assim

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \right)^{1/p} \leq \|T\| \sup_{\substack{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |\phi(x_j^1, \dots, x_j^n)|^p \right)^{1/p},$$

demonstrando que T é fortemente p -somante e $\|T\|_{fas,p} = \|T\|$.

2.2.5 Aplicações absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes

A classe de aplicações absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somantes foi introduzida por R. Alencar e M. Matos em [1]:

Definição 2.2.9 Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante se

$$(T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$$

para todas $(x_j^{(s)})_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E_s)$, $s = 1, \dots, n$.

Teorema 2.2.10 Seja $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) T é absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante;
- (ii) Existe $C > 0$, tal que, para cada k natural e quaisquer $x_j^{(l)} \in E_l$

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\| T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \left\| (x_j^{(1)})_{j=1}^m \right\|_{q_1, w} \dots \left\| (x_j^{(n)})_{j=1}^m \right\|_{q_n, w}.$$

Definição 2.2.11 Se $p, q_1, \dots, q_n > 0$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é absolutamente $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante (ou $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante) no ponto (a_1, \dots, a_n) em $E_1 \times \dots \times E_n$ quando

$$(T(a_1 + x_j^{(1)}, \dots, a_n + x_j^{(n)}) - T(a_1, \dots, a_n))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$$

para todas $(x_j^{(s)})_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E_s)$, $s = 1, \dots, n$. No caso em que T é $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante em todo ponto $(a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, dizemos que T é $(p; q_1, \dots, q_n)$ -somante em todo ponto (everywhere summing). Notação: $\mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n)}^{ev}(E_1, \dots, E_n; F)$ ou $\mathcal{L}_{as, p}^{ev}(E_1, \dots, E_n; F)$, se $p = q_1 = \dots = q_n$.

O caso em que $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ é precisamente a Definição 2.2.9. Nesse caso, escrevemos $T \in \mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n)}(E_1, \dots, E_n; F)$. Quando $p = q_1 = \dots = q_n$, nós escrevemos $\mathcal{L}_{as, p}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Capítulo 3

Resultados de inclusão entre as classes

O objetivo deste capítulo é investigar as conexões entre as classes de aplicações multilineares apresentadas no Capítulo 2.

3.1 Conexões entre as diferentes classes

Como mostramos no capítulo anterior, existem várias classes de aplicações multilineares que generalizam o conceito de operadores absolutamente somantes. É interessante ver também que existem conexões entre essas classes.

Nesta seção vamos obter certas inclusões entre as diferentes classes investigadas neste trabalho.

O Teorema a seguir é um dos resultados centrais de nosso trabalho e pode ser encontrado em [8].

Teorema 3.1.1 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Temos:*

- (i) $[\Pi_{as,(p)}]({}^n E; F) = \mathcal{L}_{as(p;p,\infty,\dots,\infty)}({}^n E; F) \cap \dots \cap \mathcal{L}_{as(p;\infty,\dots,\infty,p)}({}^n E; F);$
- (ii) *Se $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, então $\Psi_i^{(n)}(T) \in \mathcal{L}_{as,p}\left(E_i; \mathcal{L}\left(E_i, \overset{[i]}{\dots}, E_n; F\right)\right)$ e $\Psi_i^{(n)}(T)(x)$ é p -semi-integral para todo x em E_i ;*
- (iii) $\mathcal{L}_{d,p}({}^n E; F) \subset \mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F) \subset [\Pi_{as,(p)}]({}^n E; F);$
- (iv) $\mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F) \subset \mathcal{L}_{d,np}({}^n E; F);$
- (v) $\mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F) \subset \mathcal{L}_{fas,p}({}^n E; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}^{ev}({}^n E; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}({}^n E; F);$
- (vi) $\mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F) \subset \mathcal{L}_{sas,p}({}^n E; F).$

3.1. CONEXÕES ENTRE AS DIFERENTES CLASSES

Demonstração: (i) Vamos demonstrar o caso $n = 3$. Os outros casos são similares.

Se $T \in [\Pi_{as,(p)}]({}^3E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E), (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E), (z_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$, temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j, y_j, z_j)\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| T \left(x_j, \frac{y_j}{\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty}, \frac{z_j}{\|(z_j)_{j=1}^\infty\|_\infty} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j) \left(\frac{y_j}{\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty}, \frac{z_j}{\|(z_j)_{j=1}^\infty\|_\infty} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \sup_{\substack{\|y_j\| \leq 1 \\ \|z_j\| \leq 1}} \left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j)(y_j, z_j) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left\| \Psi_1^{(3)}(T) \right\|_{as,p} \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty,
 \end{aligned}$$

e assim

$$T \in \mathcal{L}_{as(p;p,\infty,\infty)}({}^3E; F). \quad (3.1)$$

Se $T \in [\Pi_{as,(p)}]({}^3E; F)$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E), (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E), (z_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$, temos também que:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j, y_j, z_j)\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| T \left(\frac{x_j}{\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty}, y_j, \frac{z_j}{\|(z_j)_{j=1}^\infty\|_\infty} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j) \left(\frac{x_j}{\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty}, \frac{z_j}{\|(z_j)_{j=1}^\infty\|_\infty} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \sup_{\substack{\|x_j\| \leq 1 \\ \|z_j\| \leq 1}} \left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j)(x_j, z_j) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j) \right\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left\| \Psi_2^{(3)}(T) \right\|_{as,p} \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty,
 \end{aligned}$$

3.1. CONEXÕES ENTRE AS DIFERENTES CLASSES

e assim

$$T \in \mathcal{L}_{as(p;\infty,p,\infty)}({}^3E; F). \quad (3.2)$$

Se $T \in [\Pi_{as,(p)}]({}^3E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E), (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E), (z_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E)$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j, y_j, z_j)\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| T \left(\frac{x_j}{\left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty}, \frac{y_j}{\left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty}, z_j \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \Psi_3^{(3)}(T)(z_j) \left(\frac{x_j}{\left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty}, \frac{y_j}{\left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \sup_{\substack{\|x_j\| \leq 1 \\ \|y_j\| \leq 1}} \left\| \Psi_3^{(3)}(T)(z_j)(x_j, y_j) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| \Psi_3^{(3)}(T)(z_j) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left\| \Psi_3^{(3)}(T) \right\|_{as,p} \left\| (z_j)_{j=1}^\infty \right\|_{w,p} \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty \left\| (y_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty, \end{aligned}$$

e assim

$$T \in \mathcal{L}_{as(p;\infty,\infty,p)}({}^3E; F). \quad (3.3)$$

Usando (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos

$$[\Pi_{as,(p)}]({}^3E; F) \subset \mathcal{L}_{as(p;p,\infty,\infty)}({}^3E; F) \cap \mathcal{L}_{as(p;\infty,p,\infty)}({}^3E; F) \cap \mathcal{L}_{as(p;\infty,\infty,p)}({}^3E; F).$$

Vamos mostrar a inclusão inversa:

Sejam $T \in \mathcal{L}_{as(p;p,\infty,\infty)}({}^3E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E)$.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada j existem $y_j, z_j \in B_E$, tais que

$$\left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j) \right\|^p \leq \left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j)(y_j, z_j) \right\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j) \right\|^p \right)^{1/p} &\leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j)(y_j, z_j) \right\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\|T(x_j, y_j, z_j)\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j, y_j, z_j)\|^p + \varepsilon \right]^{1/p} \\
&\leq \left[\|T\|_{as(p;p,\infty,\infty)}^p \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w}^p \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \left\| (z_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} + \varepsilon \right]^{1/p} \\
&\leq \left[\|T\|_{as(p;p,\infty,\infty)}^p \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w}^p + \varepsilon \right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi_1^{(3)}(T)(x_j) \right\|^p \right)^{1/p} \leq \|T\|_{as(p;p,\infty,\infty)}^p \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w}^p. \quad (3.4)$$

De forma análoga, sejam $T \in \mathcal{L}_{as(p;\infty,p,\infty)}({}^3E; F)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(E)$.
Dado $\varepsilon > 0$, para cada j existem $x_j, z_j \in B_E$, tais que

$$\left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j) \right\|^p \leq \left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j)(x_j, z_j) \right\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j) \right\|^p \right)^{1/p} &\leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j)(x_j, z_j) \right\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\|T(x_j, y_j, z_j)\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \right]^{1/p} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j, y_j, z_j)\|^p + \varepsilon \right]^{1/p} \\
&\leq \left[\|T\|_{as(p;\infty,p,\infty)}^p \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}^p \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \left\| (z_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} + \varepsilon \right]^{1/p} \\
&\leq \left[\|T\|_{as(p;\infty,p,\infty)}^p \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}^p + \varepsilon \right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi_2^{(3)}(T)(y_j) \right\|^p \right)^{1/p} \leq \|T\|_{as(p;\infty,p,\infty)}^p \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w}^p. \quad (3.5)$$

Por fim, se $T \in \mathcal{L}_{as(p;\infty,\infty,p)}({}^3E; F)$ e $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(E)$, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_j, y_j \in B_E$, tais que

$$\left\| \Psi_3^{(3)}(T)(z_j) \right\|^p \leq \left\| \Psi_3^{(3)}(T)(z_j)(x_j, y_j) \right\|^p + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Logo, como nos outros casos, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \Psi_3^{(3)}(T)(z_j) \right\|^p \right)^{1/p} \leq \|T\|_{as(p;\infty,\infty,p)}^p \left\| (z_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w}^p. \quad (3.6)$$

Portanto de (3.4),(3.5) e (3.6) temos

$$[\Pi_{as,(p)}]({}^3E; F) \geq \mathcal{L}_{as(p;p,\infty,\infty)}({}^3E; F) \cap \mathcal{L}_{as(p;\infty,p,\infty)}({}^3E; F) \cap \mathcal{L}_{as(p;\infty,\infty,p)}({}^3E; F).$$

(ii) Seja $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$. Fixando um número natural $i \in \{1, \dots, n\}$ e seja $x_j \in E_i, j = 1, \dots, m$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $x_{k,j} \in B_{E_k}, K = 1, \dots, n$ tais que

$$\left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x_j) \right\|^p \leq \left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x_j)(x_j^1, \dots, x_j^n) \right\|^p + \frac{\varepsilon}{m}.$$

Por isso,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x_j) \right\|^p \\ & \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^m \left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x_j)(x_j^1, \dots, x_j^n) \right\|^p \\ & = \varepsilon + \sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \\ & \leq \varepsilon + \|T\|_{si,p}^p \sup_{\varphi_l \in B_{E_l'}} \sum_{j=1}^m \left| \varphi_i(x_j) \varphi_1(x_j^1), \dots, \varphi_n(x_j^n) \right|^p \\ & \leq \varepsilon + \|T\|_{si,p}^p \sup_{\varphi_l \in B_{E_l'}} \sum_{j=1}^m |\varphi_i(x_j)|^p. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário temos

$$\sum_{j=1}^m \left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x_j) \right\|^p \leq \|T\|_{si,p}^p \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{p,w}^p.$$

Daí segue que

$$\Psi_i^{(n)}(T) \in \mathcal{L}_{as,p} \left(E_i; \mathcal{L} \left(E_1, \dots, E_n; F \right) \right) \quad (3.7)$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Agora vamos mostrar que $\Psi_i^{(n)}(T)(x)$ é p -semi-integral para todo $x \in E_i, i = 1, \dots, n$.
Como

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m \left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x_j) \left(x_{1,j}, \dots, x_{n,j} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \|T(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{si,p} \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_i(x) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{si,p} \|x\| \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

obtemos $\left\| \Psi_i^{(n)}(T)(x) \right\|_{si,p} \leq \|T\|_{si,p} \|x\|$, para todo $x \in E_i, i = 1, \dots, n$.

(iii) Se $T \in \mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F)$, vimos que vale (3.7) e portanto $T \in [\Pi_{as(p)}]({}^n E; F)$.

Se $T \in \mathcal{L}_{d,p}({}^n E; F)$, então existem $C \geq 0$ e medidas de probabilidade μ_j nas sigma-álgebras de Borel $\mathcal{B}(B_{E'_j})$ de $B_{E'_j}$ munidos com as topologias $\sigma(E'_j; E_j), j = 1, \dots, n$, tais que

$$\|T(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{E'_1}} |\varphi_1(x_1)|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{1/p} \dots \left(\int_{B_{E'_n}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{1/p}$$

para todo $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$.

Seja $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ a medida produto de μ_1, \dots, μ_n . Logo

$$\begin{aligned} & C \left[\left(\int_{B_{E'_1}} |\varphi_1(x_1)|^p d\mu_1(\varphi_1) \right)^{1/p} \dots \left(\int_{B_{E'_n}} |\varphi_n(x_n)|^p d\mu_n(\varphi_n) \right)^{1/p} \right] \\ &= C \left(\int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} |\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)|^p d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

e portanto $T \in \mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F)$.

(iv) Suponha que T seja p -semi-integral. Então, como $\frac{1}{p} = \frac{1}{np} + \dots + \frac{1}{np}$, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left[\sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1)|^{np} \right)^{1/np} \dots \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_n(x_j^n)|^{np} \right)^{1/np} \right] \\
 &= C \left[\sup_{\varphi_1 \in B_{E'_1}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1)|^{np} \right)^{1/np} \dots \sup_{\varphi_n \in B_{E'_n}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_n(x_j^n)|^{np} \right)^{1/np} \right] \\
 &= C \left\| (x_j^1)_{j=1}^m \right\|_{np, w} \dots \left\| (x_j^n)_{j=1}^m \right\|_{np, w}.
 \end{aligned}$$

(v) Se $T \in \mathcal{L}_{si,p}({}^n E; F)$ então, pelo Teorema 2.1.2, temos que

$$\left\| T(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_n}^n) \right\| \leq C \left(\int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} |\varphi_1(x_{j_1}^1) \dots \varphi_n(x_{j_n}^n)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \right)^{1/p}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \left\| T(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_n}^n) \right\|^p \\
 &\leq C \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} |\varphi_1(x_{j_1}^1) \dots \varphi_n(x_{j_n}^n)|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\
 &= C \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \left(\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m |\varphi_1(x_{j_1}^1) \dots \varphi_n(x_{j_n}^n)|^p \right) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\
 &\leq C \int_{B_{E'_1} \times \dots \times B_{E'_n}} \left(\sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n, j_1, \dots, j_n=1} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m |\varphi_1(x_{j_1}^1) \dots \varphi_n(x_{j_n}^n)|^p \right) d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\
 &= C \sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}, l=1, \dots, n, j_1, \dots, j_n=1} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m |\varphi_1(x_{j_1}^1) \dots \varphi_n(x_{j_n}^n)|^p \\
 &= C \prod_{l=1}^n \sup_{\varphi_l \in B_{E'_l}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_l(x_j^l)|^p \right),
 \end{aligned}$$

e assim $T \in \mathcal{L}_{fas,p}({}^n E; F)$.

Agora vamos considerar $T \in \mathcal{L}_{fas,p}({}^n E; F)$. Faremos o caso $n = 2$; o caso geral segue a mesma ideia. Se $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p,w}(E)$, temos

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{j=1}^\infty \|T(a + x_j, b + y_j) - T(a, b)\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(a, y_j)\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j, b)\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j, y_j)\|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq \left(\sum_{j,k=1}^\infty \|T(z_k, y_j)\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j,k=1}^\infty \|T(x_j, w_k)\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j,k=1}^\infty \|T(x_j, y_k)\|^p \right)^{1/p} < \infty,
 \end{aligned}$$

onde $(z_k)_{k=1}^\infty = (a, 0, 0, \dots)$ e $(w_k)_{k=1}^\infty = (b, 0, 0, \dots)$.

(vi) É imediato pois claramente

$$\left(\sup_{\varphi_l \in B_{E_l^1}, l=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |\varphi_1(x_j^1) \dots \varphi_n(x_j^n)|^p \right)^{1/p} \leq \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)}} \left(\sum_{j=1}^m |\phi(x_j^1, \dots, x_j^n)|^p \right)^{1/p}.$$

■

3.2 O efeito do cotipo dos espaços de Banach

A definição de cotipo necessita do conceito das funções de Rademacher.

As funções de Rademacher r_n são definidas por

$$r_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$r_n(t) := \text{sign}(\text{sen}2^n \pi t).$$

Note que a união dos 2^n intervalos $I_k = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, com $k = 1, \dots, 2^n$, incluindo seus extremos, resulta no intervalo $[0, 1]$. As funções de Rademacher assumem, alternadamente, os valores 1 e -1 à medida que t percorre o intervalo $[0, 1]$ e na fronteira dos intervalos I_k assumem o valor zero.

Um fato importante das funções de Rademacher é que elas possuem a propriedade de ortogonalidade, ou seja,

$$\int_0^1 r_j(t) r_k(t) dt = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases}.$$

Definição 3.2.1 *Seja $(r_j)_{j=1}^\infty$ funções de Rademacher. Um espaço de Banach X possui cotipo finito $q \geq 2$ se existir uma constante $K \geq 0$, tal que, para qualquer escolha finita x_1, \dots, x_n de elementos de X , vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leq K \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Quando $q = \infty$ substituímos $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}$ por $\max_{i \leq n} \|x_i\|$. Denotamos por $C_q(X)$ o ínfimo das constantes K que satisfazem (3.8) e denotaremos $\text{cot } X$ o ínfimo dos cotipos assumidos por X , isto é,

$$\text{cot } X = \inf \{ 2 \leq q \leq \infty; X \text{ tem cotipo } q \}.$$

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [12, Corolário 11.16], terá papel central nessa seção:

Teorema 3.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach.*

Se E tem cotipo 2, então $\mathcal{L}_{as,1}(E; F) = \mathcal{L}_{as,2}(E; F)$;

Se E tem cotipo $2 < q < \infty$, então $\mathcal{L}_{as,r}(E; F) = \mathcal{L}_{as,1}(E; F)$ para todo $1 < r < q^$;*

Se E e F têm cotipo 2, então $\mathcal{L}_{as,r}(E; F) = \mathcal{L}_{as,2}(E; F)$ para todo $1 < r < \infty$.

A seguir veremos que aplicações semi-integrais e dominadas coincidem quando certas condições são impostas aos cotipos dos espaços envolvidos.

Proposição 3.2.3 *Se E tem cotipo 2, então $\mathcal{L}_{si,1}({}^2E; F) = \mathcal{L}_{d,1}({}^2E; F)$ para todo F .*

Demonstração: Se E tem cotipo 2, sabemos, pelo teorema anterior, que $\mathcal{L}_{as,1}(E; F) = \mathcal{L}_{as,2}(E; F)$ para todo espaço de Banach F . Assim, pelo Teorema 2.2.2, se $T \in \mathcal{L}_{d,2}({}^2E; F)$, então $T = R \circ (u_1, u_2)$, com $R \in \mathcal{L}({}^2G; F)$ e $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_{as,2}(E; G) = \mathcal{L}_{as,1}(E; G)$. Logo, pelo Teorema 2.2.2, $T \in \mathcal{L}_{d,1}({}^2E; F)$. A recíproca é similar.

Portanto,

$$\mathcal{L}_{d,1}({}^2E; F) = \mathcal{L}_{d,2}({}^2E; F) \quad (3.9)$$

para todo F .

Pelo Teorema 3.1.1(iii) e (iv), temos

$$\mathcal{L}_{d,1}({}^2E; F) \subset \mathcal{L}_{si,1}({}^2E; F) \subset \mathcal{L}_{d,2}({}^2E; F). \quad (3.10)$$

Logo, de (3.9) e (3.10), segue que

$$\mathcal{L}_{si,1}({}^2E; F) = \mathcal{L}_{d,1}({}^2E; F).$$

■

3.3 Alguns comentários sobre as relações de inclusão

Nesta seção veremos que, em geral, as relações de inclusão da seção anterior são estritas.

Proposição 3.3.1 *A inclusão*

$$\mathcal{L}_{si,1}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{sas,1}(E_1, \dots, E_n; F)$$

em geral é estrita.

Demonstração: Considere $T : \ell_1 \times \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ é dada por

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Em [1, Exemplo 4.5(b)] se prova que T então não é 1-semi-integral, mas obviamente T é fortemente 1-somante. ■

Proposição 3.3.2 *A inclusão*

$$\mathcal{L}_{si,1}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{fas,1}(E_1, \dots, E_n; F)$$

em geral é estrita.

Demonstração: Com efeito, em [25, Teorema 3.2] se prova que se cada $E_1 = \dots = E_{n-1} = \ell_1$ e H é um espaço de Hilbert, então

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n-1}, H; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,1}(E_1, \dots, E_{n-1}, H; \mathbb{K}).$$

Daí segue claramente que

$$\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{fas,1}(\ell_1, \ell_2; \mathbb{K}),$$

mas, como veremos,

$$\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}_{si,1}(\ell_1, \ell_2; \mathbb{K}).$$

De fato, suponhamos por um momento que

$$\mathcal{L}(\ell_1, \ell_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{si,1}(\ell_1, \ell_2; \mathbb{K}). \quad (3.11)$$

Seja $R : \ell_2 \longrightarrow \mathcal{L}(\ell_1; \mathbb{K})$ linear e contínua. Então

$$R = \Psi_2^{(2)}(T) \text{ para alguma } T : \ell_1 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}.$$

De (3.11) segue que T é 1-semi integral e do Teorema 3.1.1 (ii) segue que $\Psi_2^{(2)}(T)$ é absolutamente 1-somante. Logo R é absolutamente 1-somante, isto é,

$$\mathcal{L}(\ell_2, \ell_\infty) = \mathcal{L}_{as,1}(\ell_2, \ell_\infty),$$

e isso é uma contradição, pois em [15] se prova que se X tem base de Schauder incondicional e X e Y têm dimensão infinita e

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}_{as,1}(X, Y)$$

então $X = \ell_2$ e Y é Hilbert. ■

Proposição 3.3.3 *A inclusão*

$$\mathcal{L}_{fas,1}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,1}(E_1, \dots, E_n; F)$$

é estrita, em alguns casos.

3.3. ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE AS RELAÇÕES DE INCLUSÃO

Demonstração: De fato, em [1, Teorema 3.10] se mostra que para todos os espaços de Banach E_1, \dots, E_n , tem-se que

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as,1}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$$

(esse resultado é o Teorema de Defant-Voigt). Logo, temos que

$$\mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as,1}(c_0, c_0; \mathbb{K}).$$

Mas um famoso resultado devido a Littlewood (veja [16]) garante que existe $T \in \mathcal{L}(c_0, c_0; \mathbb{K})$ tal que

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |T(e_j, e_k)| = \infty,$$

isto é, $T \notin \mathcal{L}_{fas,1}(c_0, c_0; \mathbb{K})$. ■

Proposição 3.3.4 *Em geral $\mathcal{L}_{as,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ não está contido em $\mathcal{L}_{sas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$.*

Demonstração: De fato, sejam $T \in \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \ell_1)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{1,w}(\ell_1)$. Temos claramente

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j, y_j)\| &\leq \|T\| \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \|y_j\| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|T\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|T\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|id(x_j)\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|id(y_j)\|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

mas ℓ_1 tem cotipo 2, logo $id\ell_1$ é $(2, 1)$ -somante. Logo

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|id(x_j)\|^2 \right)^{1/2} \leq C_1 \|(x_j)\|_{1,w}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|id(y_j)\|^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \|(y_j)\|_{1,w}.$$

Portanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j, y_j)\| \leq K \|(x_j)\|_{1,w} \|(y_j)\|_{1,w}$$

segue que $T \in \mathcal{L}_{as,1}(\ell_1, \ell_1; \ell_1)$. Daí

$$\mathcal{L}_{as,1}(\ell_1, \ell_1; \ell_1) = \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \ell_1).$$

3.3. ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE AS RELAÇÕES DE INCLUSÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(\ell_1; \ell_1) - \mathcal{L}_{as,1}(\ell_1; \ell_1)$. Defina $R : \ell_1 \times \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ por $R(x, y) = T(x) \varphi(y)$ com $\varphi \neq 0$. Seja $a \neq 0$ tal que $\varphi(a) = 1$, $\|a\| = 1$. Se fosse $\mathcal{L}_{sas,1}(\ell_1, \ell_1; \ell_1) = \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \ell_1)$ então

$$\sum_{j=1}^m \|R(x_j, y_j)\| \leq C \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \ell_1)}} \sum_{j=1}^m |\phi(x_j, y_j)|$$

e

$$\sum_{j=1}^m \|T(x_j) \varphi(a)\| \leq C \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \ell_1)}} \sum_{j=1}^m |\phi(x_j, a)|.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^m \|T(x_j)\| \leq C \sup_{\|\psi\| \leq 1} \sum_{j=1}^m |\psi(x_j)|.$$

Assim T é 1-somante, mas isso é uma contradição. Logo

$$\mathcal{L}_{sas,1}(\ell_1, \ell_1; \ell_1) \neq \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1; \ell_1).$$

■

Proposição 3.3.5 *Em geral, $\mathcal{L}_{sas,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ não está contido em $\mathcal{L}_{as,p}(E_1, \dots, E_n; F)$*

Demonstração: De fato, note que quando $F = \mathbb{K}$ toda $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é fortemente p -somante, para todo $p \geq 1$, logo

$$\mathcal{L}_{sas,2}(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K})$$

Seja $T : \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$T\left(\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}, \left(y_j\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.$$

É claro que T é linear contínua e

$$\|T(x_j, y_j)\| = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m y_j^2\right)^{1/2} = \|x\| \|y\|.$$

Temos que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{2,w}(\ell_2)$, mas $(T(e_j, e_j))_{j=1}^{\infty} = (1)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_2(\mathbb{K})$. Logo $T \notin \mathcal{L}_{as,2}(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K})$ e segue que

$$\mathcal{L}_{as,2}(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K}) \neq \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2; \mathbb{K}).$$

■

Definição 3.3.6 *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Um operador linear $T : H_1 \rightarrow H_2$ é chamado de Hilbert-Schmidt se*

$$\sum_{i \in I} \|T(e_i)\|^2 < +\infty \quad (3.12)$$

para cada base ortonormal $(e_i)_{i \in I} \in H_1$.

Sabe-se que se 3.12 vale para alguma base ortonormal, então 3.12 vale para toda base ortonormal.

A classe dos operadores Hilbert-Schmidt de H_1 em H_2 é denotado por $\mathcal{L}_{hs}(H_1; H_2)$. O teorema a seguir é um resultado de A. Pełczyński (veja [21]).

Teorema 3.3.7 *Sejam $1 \leq p < +\infty$ e H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Então*

$$\mathcal{L}_{hs}(H_1; H_2) = \mathcal{L}_{as,p}(H_1; H_2).$$

Proposição 3.3.8 $\mathcal{L}_{d,1}({}^2\ell_2; \mathbb{K}) \neq [\Pi_{as(1)}]({}^2\ell_2; \mathbb{K})$.

Demonstração: Considere $T : \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j^\alpha}\right) x_j y_j \text{ com } \alpha = \frac{1}{2} + \varepsilon \text{ e } \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Vamos mostrar que

$$T \in [\Pi_{as(1)}]({}^2\ell_2; \mathbb{K}) \setminus \mathcal{L}_{d,1}({}^2\ell_2; \mathbb{K}).$$

Note que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \|T(e_j, e_j)\|^{1/2}\right)^2 &= \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{j^\alpha}\right)^{1/2}\right]^2 \\ &\geq \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{m^{\alpha/2}}\right)\right]^2 \\ &= \left[m \left(\frac{1}{m^{\alpha/2}}\right)\right]^2 = m^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, se fosse $T \in \mathcal{L}_{d,1}({}^2\ell_2; \mathbb{K})$, existiria $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \|T(e_j, e_j)\|^{1/2}\right)^2 \leq C \left\| (e_j)_{j=1}^m \right\|_{w,1}^2,$$

para cada m , e obteríamos

$$m^{2-\alpha} \leq C (m^{1/2})^2 = Cm,$$

3.3. ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE AS RELAÇÕES DE INCLUSÃO

o que é uma contradição, pois $2 - \alpha > 1$.

Para provar que $\Psi_1^{(2)}(T) \in \mathcal{L}_{as,1}(\ell_2; \ell_2)$, observe que

$$\Psi_1^{(2)}(T) \left((x_j)_{j=1}^\infty \right) = \left(\frac{1}{j^\alpha} x_j \right)_{j=1}^\infty.$$

Agora pelo Teorema 3.3.7, basta mostrar que $\Psi_1^{(2)}(T)$ é um operador de Hilbert-Schmidt, o que é claro pois como $2\alpha > 1$, temos

$$\sum_{k=1}^\infty \left\| \Psi_1^{(2)}(T)(e_k) \right\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{1}{k^\alpha} \right]^2 < \infty.$$

Daí a inclusão é estrita. Como ℓ_2 tem cotipo 2, pela Proposição 3.2.3 vemos que

$$\mathcal{L}_{si,1}({}^2\ell_2; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{d,1}({}^2\ell_2; \mathbb{K}) \neq [\Pi_{as(1)}]({}^2\ell_2; \mathbb{K}).$$

■

Apêndice A

Produto tensorial

A.1 Produto tensorial algébrico

Dado um número $n \in \mathbb{N}$ e espaços vetoriais X_1, \dots, X_n , podemos considerar o dual algébrico $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ do espaço $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, isto é,

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^* = \{\varphi : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}; \varphi \text{ é linear}\}.$$

Sabemos que $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} com as operações usuais de funções, isto é:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A) \text{ e } (\lambda\varphi_1)(A) = \lambda\varphi_1(A)$$

para todos funcionais lineares $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ e todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

O produto tensorial de X_1, \dots, X_n será construído a partir de elementos específicos de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$. Dados $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$, defina

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \dots \otimes x_n : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ B &\mapsto (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(B) = B(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Vejamos que $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ é linear. De fato

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(\lambda A + B) &= (\lambda A + B)(x_1, \dots, x_n) \\ &= (\lambda A)(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(A) + (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(B) \end{aligned}$$

para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e todas aplicações n -lineares $A, B \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$. Chamamos de V o conjunto formado por todos esses funcionais,

$$V := \{x_1 \otimes \dots \otimes x_n : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\} \subseteq \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*.$$

Definição A.1.1 *O subespaço vetorial de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ gerado por V será chamado de produto tensorial de X_1, \dots, X_n e será denotado por $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$. Em símbolos,*

$$X_1 \otimes \dots \otimes X_n = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j (x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) : k \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{K}, x_i^j \in X_i \right\}$$

com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$.

Os elementos de $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ são chamados de tensores, e os tensores da forma $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ são chamados de tensores elementares. Um tensor, então, é uma combinação linear de tensores elementares.

O produto tensorial $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ é, por definição, um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Veremos logo adiante uma propriedade algébrica elementar dos tensores elementares.

Proposição A.1.2 *Sejam X_1, \dots, X_n espaços vetoriais, $x_1, x'_1 \in X_1, \dots, x_n, x'_n \in X_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:*

- (i) $x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n + x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n$ para todo $i = 1, \dots, n$;
- (ii) $\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes \lambda(x_i) \otimes \dots \otimes x_n$ para todo $i = 1, \dots, n$;
- (iii) Se $x_i = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, então $x_1 \otimes \dots \otimes x_n = 0$.

Demonstração: (i) Dado $i \in \{1, \dots, n\}$ e uma aplicação n -linear $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, temos:

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n)(A) &= A(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \\ &= (x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n)(A) + (x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n)(A). \end{aligned}$$

(ii) Para toda aplicação n -linear $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, temos que:

$$\begin{aligned} (\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n))(A) &= \lambda((x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n)(A)) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) \\ &= (x_1 \otimes \dots \otimes \lambda(x_i) \otimes \dots \otimes x_n)(A). \end{aligned}$$

(iii) Por (i) temos que, se $x_i = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$x_1 \otimes \dots \otimes (0 + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes \dots \otimes 0 \otimes \dots \otimes x_n + x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n.$$

Logo

$$x_1 \otimes \dots \otimes 0 \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n - x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n = 0.$$

■

Definição A.1.3 Dados os espaços vetoriais X_1, \dots, X_n , considere a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : X_1 \times \dots \times X_n &\rightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sigma(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n. \end{aligned}$$

Proposição A.1.4 A aplicação σ é n -linear, isto é, $\sigma \in L(X_1, \dots, X_n; X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$.

Demonstração: Dados $x_1, x'_1 \in X_1, \dots, x_n, x'_n \in X_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. Da Proposição A.1.2 segue que

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) &= x_1 \otimes \dots \otimes (\lambda x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n \\ &= \lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n) + x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n \\ &= \lambda \sigma(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \sigma(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

provando que a aplicação σ é p -linear. ■

Teorema A.1.5 Sejam X_1, \dots, X_n espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{K} . Para cada aplicação n -linear $B : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ existe um único operador linear $B_L : X_1 \otimes \dots \otimes X_n \rightarrow Y$, dado por $B_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right) = \sum_{j=1}^k B(x_1^j, \dots, x_n^j)$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{\quad B \quad} & Y \\ \sigma \downarrow & \nearrow B_L & \\ X_1 \otimes \dots \otimes X_n & & \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $B = B_L \circ \sigma$. Mais ainda, a correspondência $B \leftrightarrow B_L$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ e $L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Y)$. O operador B_L é chamado de linearização da aplicação n -linear B .

A demonstração do teorema acima pode ser visto em [29].

A.2 Norma Projetiva

Sejam E_1, \dots, E_n e F espaços de Banach. O nosso objetivo é introduzir uma norma em $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ que realize a linearização multilinear contínuas definidas em $E_1 \times \dots \times E_n$. Mais precisamente, queremos uma norma em $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ tal que para todo F , uma aplicação n -linear $A : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ é contínua se, e somente se, $A_L : E_1 \otimes \dots \otimes E_n \rightarrow F$ é um operador linear contínuo em relação a essa norma.

Definição A.2.1 *Sejam E_1, \dots, E_n espaços de Banach. Para cada tensor $x \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n$, define-se*

$$\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \dots \|x_n^j\| : x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right\}.$$

Temos que π é uma norma no produto tensorial (veja [29]).

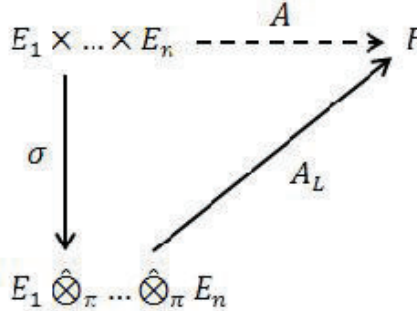
Proposição A.2.2 *Sejam E_1, \dots, E_n espaços de Banach. Então π como definida acima, é uma norma em $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$. Além disso,*

$$\pi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

para todo $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.

Denota-se por $E_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} E_n$ o produto tensorial de E_1, \dots, E_n dotado com a norma π . Esta norma é conhecida como norma projetiva (veja [11, Proposição 1.1.7]). O complemento do espaço normado $E_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} E_n$ é denotado por $E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n$

Teorema A.2.3 *Sejam E_1, \dots, E_n e F espaços de Banach. Se $A : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ é uma aplicação n -linear contínua, então existe um único operador linear contínuo $A_L : E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n \rightarrow F$, satisfazendo $A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = A(x_1, \dots, x_n)$ para quaisquer $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:*



Além disso, a correspondência $A \leftrightarrow A_L$ é um isomorfismo isométrico, i.é., $\|A_L\| = \|A\|$ entre os espaços de Banach $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n; F)$. O operador A_L é chamado de linearização de A .

Observação A.2.4 *No caso em que $F = \mathbb{K}$, temos a identificação*

$$(E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n)' = \mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_{\pi} \dots \widehat{\otimes}_{\pi} E_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$$

e é nesse sentido que é coerente se mencionar a topologia fraca estrela em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$, como é feito no Teorema 2.2.8.

Para maiores detalhes sobre a teoria de produtos tensoriais em espaços de Banach, indicamos [10], [29] e [32].

Referências Bibliográficas

- [1] R. Alencar e M.C. Matos, Some classes of multilinear mappings between Banach spaces, Publ. Dep. Anál. Mat. Univ. Complutense Madrid, Sect. 1, no. 12, 1989.
- [2] R. Ash, Measure, Integration, and Functional Analysis, Academic Press, New York-London, 1972.xiii+284pp.
- [3] F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva, Multilinear extensions of a Grothendieck's theorem, Q. J. Math. 55 (2004), 441-450.
- [4] G. Botelho. Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials, Proc. Roy. Irish Acad. 97 (1997), 145-153.
- [5] G. Botelho, Weakly compact and absolutely summing polynomials, J. Math. Anal. Appl. 265 (2004), 364-370.
- [6] G. Botelho, Ideals of polynomials generated by weakly compact operators, Note di Matematica 25, n. 1, (2005/2006), 69-102.
- [7] G. Botelho e D. Pellegrino, Dominated polynomials on \mathcal{L}_p -spaces, Arch. Math. (Basel) 83 (2004), 364-370
- [8] E. Çalişkan and D.M. Pellegrino, On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators, Rocky Mount. J. Math. 37 (2007), 1137-1154.
- [9] D. Carando and V. Dimant, On summability of bilinear operators, Math. Nachr. 259 (2003), 3-11.
- [10] A. Defant e K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.
- [11] J. Diestel, J. H. Fourie, J. Swart, The Metric Theory of Tensor Products: Grothendieck's Resumé Revisited, American Mathematical Society, 2008.
- [12] J. Diestel, H. Jarchow e A. Torge. Absolutely summing operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43,. 1995.
- [13] V. Dimant, Strongly p -summing multilinear mappings, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 182-193.

- [14] E.L. Lima, Curso de Análise, Vol. 1, Projeto Euclides.
- [15] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in \mathcal{L}_p -spaces and their applications, *Studia Math* 29 (1993), 61-81.
- [16] J.E. Littlewood, On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. *Quart. J. of Math (Oxford)*,2, 164-174 (1968).
- [17] M. C. Matos, On multilinear mappings of nuclear type, *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid*. Vol.6, No.1, 61-81, 1993.
- [18] M.C. Matos, Fully absolutely summing and Hilbert schmidt operators, *Collect. Math.* 54,2 (2003), 111-136.
- [19] M.C. Matos, Absolutely summing holomorphic mappings, *An. Acad. Brasil. Cienc.* 68 (1996), 1-13.
- [20] Y. Meléndez e A. Tonge, polynomials and the Pietsch domination theorem, *Math. proc. Roy. Irish Acad.* 99a, 195-212 (1999).
- [21] A. Pełczyński, A characterization of Hilbert-Schmidt operators, *Studia Math.* 28 (1967), 355-360.
- [22] D.M. Pellegrino, Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries, Tese de Doutorado, UNICAMP, 2002.
- [23] D.M. Pellegrino. Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in L_p spaces, *Studia Math.* 157 (2003), 121-131.
- [24] D.M. Pellegrino, Almost summing mappings, *Arch. Math. (Basel)*, 82 (2004), 68-80.
- [25] D.M. Pellegrino and M.L.V. Souza, Fully summing multilinear and holomorphic mapping into Hilbert spaces, *Math. Nachr.* 7-8 (2005), 877-887.
- [26] D. Pérez-García, Operadores multilineales absolutamente sumantes, Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid 2003.
- [27] A. Pietsch, Absolute p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.* 28 (1967), 333-353.
- [28] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics*, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.
- [29] R. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach Spaces*, Springer Verlag, 2002.
- [30] J. Santos, Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes, Dissertação de Mestrado, UFPB. 2008.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [31] B. Schneider, On absolutely p -summing and related multilinear mappings, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Brandenburger Landeshochschule* 35 (1991), 105-117.
- [32] A.R. Silva, Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição, *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia*, 2010.
- [33] M. L. V. Souza, Aplicações Multilineares Completamente Absolutamente Somantes, *Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP*, 2003.