

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Teoria Espectral

por

Raoní Cabral Ponciano

Dezembro/2017
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Bacharelado em Matemática

Teoria Espectral

por

Raoní Cabral Ponciano

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Dezembro/2017

João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P795t Ponciano, Raoní Cabral.

Teoria espectral / Raoní Cabral Ponciano. - João
Pessoa, 2017.

104 f. : il.

Orientação: João Marcos Bezerra do Ó.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Espaço de Hilbert. 2. Operador adjunto. 3. Espectro.
I. Bezerra do Ó, João Marcos. II. Título.

UFPB/BC

Teoria Espectral

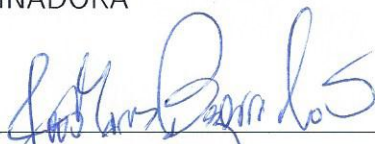
por

Raoní Cabral Ponciano

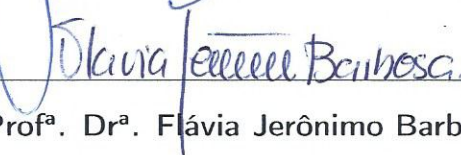
Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Análise

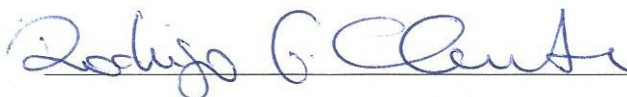
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)



Prof^a. Dr^a. Flávia Jerônimo Barbosa - UFPB



Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente -UFRPE

Dezembro/2017

Agradecimentos

- Acima de tudo, agradeço a Deus por sempre me mostrar o caminho certo a seguir e colocar ao meu lado pessoas que me ajudaram na conclusão desse trabalho.
- À minha família por me dar suporte para eu chegar até aqui, tanto no financeiro quanto no motivacional.
- Ao professor José Arilson por ter dado o ponta pé inicial da minha carreira na matemática. Deixo aqui meu agradecimento especial a professora Flávia por ser uma das pessoas mais importantes no meu processo de formação, bem como ao professor João Marcos por me orientar nos estudos e na iniciação científica.
- Á todos os meus amigos do laboratório Milênio, em especial a Marcelo por tirar algumas dúvidas. Agradeço a Renato e Ramon por também tirarem outras dúvidas e a João Henrique por me ajudar no LaTeX e em algumas correções deste trabalho. Além destes deixo meu agradecimento especial a Angélica por me ajudar na escrita deste trabalho e por sempre me apoiar a seguir em frente e com fé.
- Finalmente, gostaria de agradecer aos professores: Flávia Jerônimo Barbosa e Rodrigo Genuino Clemente que aceitaram participar da banca, e assim, colaborar com este trabalho.

“Soli Deo Gloria”.

“Somente a Deus a glória”.

Desconhecido

RESUMO

Neste trabalho, faremos um estudo da Teoria Espectral em espaços de Hilbert para operadores compactos e operadores compactos autoadjuntos. Este estudo garante solução de equações lineares num espaço (de Hilbert) de dimensão infinita cujo operador associado seja compacto e autoadjunto. Além disso, mostraremos vários exemplos motivacionais para a realização deste estudo com um, dos mais importantes, sendo a propriedade de que o Laplaciano no “mundo da transformada de Fourier” é uma função multiplicação, e desta forma, tornando possível a encontrar solução para a equação de Poisson ($\Delta u = f$).

Palavras-Chave: Espaço de Hilbert, Operador Adjunto, Espectro.

ABSTRACT

In this work, we will study Spectral Theory in Hilbert spaces for compact and compact self-adjoint operators. This study ensures solution for a linear equation in (Hilbert) space with infinite dimension which the associate operator is compact and self-adjoint. Furthermore, we will show some motivational examples to promote this study with one, of the most important, being the feature that the Laplace operator in “Fourier transform’s world” is a multiplication operator, and in this way, is possible find a solution for Poisson’s equation ($\Delta u = f$).

Keywords: Hilbert space, Adjoint Operator, Spectrum.

SUMÁRIO

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	x
1 Análise Funcional	1
1.1 Espaços Normados e Banach	1
1.2 Operadores lineares contínuos	5
1.3 Espaços de Hilbert	9
1.4 Operador Adjunto	14
1.5 Operadores Compactos	19
2 Teoria da Medida e Transformada de Fourier	23
2.1 Resultados sobre a Integração de Lebesgue	23
2.2 Espaços de Lebesgue	27
2.3 Transformada de Fourier	40

3	Motivação ao estudo da teoria espectral	49
3.1	O que é Teoria Espectral?	49
3.2	Alguns Exemplos	53
4	Teoria Espectral	63
4.1	Álgebras de Banach e resultados iniciais	63
4.2	Operadores Compactos em espaços de Hilbert	74
4.3	Aplicação no princípio minimax de Courant-Rayleigh	87

NOTAÇÕES

Aqui estão algumas notações adotadas ao longo do texto:

- \mathbb{K} é usado para denotar \mathbb{R} ou \mathbb{C} quando o resultado for válido em ambos os casos;
- e_n denota a sequência $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ com 1 na n -ésima entrada e 0 no resto, caso não seja definido no texto;
- (v_n) denota uma sequência da forma (v_1, \dots, v_n, \dots) ;
- $[v_1, \dots, v_n]$, $[v_1, \dots, v_n, \dots]$ e $[S]$ denotam o conjunto gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$, (v_n) e S respectivamente;
- $\chi_A(x)$ denota a função característica de A , ou seja, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$;
- $B(a, r)$ denota a bola aberta de centro a e raio r . Além disso, $B[a, r] = \overline{B(a, r)}$ e $S[a, r] = B[a, r] - B(a, r)$.

INTRODUÇÃO

A Teoria Espectral resume-se no estudo das propriedades de operadores lineares entre espaços de Banach e de seus respectivos espectros. Em muitas situações, dado um operador, faz-se necessário buscar alguma representação que tenha mais hipóteses do que o operador original. Este fato já é um grande motivo para o nosso interesse em tal teoria.

Ao estudarmos ferramentas básicas da matemática como a Álgebra de Linear e Análise Funcional é fácil depararmos com algum Teorema Espectral. Questões como propriedades do Laplaciano e a busca de soluções para equações desse tipo $T(v) = w$ envolve conhecimento da Teoria Espectral. Consequentemente a aplicabilidade deste estudo envolve EDP's lineares que modelam uma gama de problemas oriundos de várias ciências como Mecânica Quântica, Biologia e entre outras.

O nosso objetivo é investigar sobre quais condições certos operadores lineares possuem uma boa representação. Para tanto é preciso estudar alguns resultados que são devidos a Riesz, Fredholm, Hilbert e Schmidt. É intuito nosso também, oferecer uma apresentação tal que o leitor com noções básicas de Álgebra Linear e Análise Funcional possa compreender o tema.

Inicialmente apresentamos noções básicas de Análise Funcional. Destacamos

apenas algumas demonstrações de tais resultados por entendermos que o esquema de prova é relevante no desenvolvimento do trabalho. Neste primeiro capítulo estabelecemos propriedades relevantes dos espaços de Banach, dos espaços de Hilbert e dos operadores lineares contínuos, adjuntos e compactos. A compreensão estrutural destes é de fundamental importância para o tema. Portanto tomamos como base as seguintes referências [2], [3] e [7].

O segundo capítulo é dedicado a um pequeno estudo sobre Teoria da Medida, espaços de Lebesgue e transformadas de Fourier. De mesma sorte como no primeiro capítulo selecionamos alguns resultados para expor suas demonstrações, porém no que se refere aos resultados sobre transformada de Fourier todos os argumentos foram demonstrados com base na referência [5].

Só no terceiro capítulo é que nos enveredamos de fato na Teoria Espectral. É nesta ocasião que apresentamos várias ideias motivadoras para tal estudo. Dentre tais ressaltamos a resolução de equações tipo Poisson, as características de operadores Hilbert-Schmidt, aplicações da Transformada de Fourier em equações que envolvem o Laplaciano. Tudo isso consiste em encontrar soluções para equações da forma $T(v) = w$ e comparações entre os casos de dimensão finita e infinita. Destarte fica bem justificado tal estudo. A referência escolhida para o capítulo foram as notas de aula de Kowalski [4].

No quarto capítulo apresentamos um estudo da Teoria Espectral com alguns resultados gerais em Álgebras de Banach, algumas propriedades dos operadores compactos com foco no Teorema Espectral para operadores compactos e fato dos operadores compactos e autoadjunto com foco no Teorema Espectral para operadores compactos e autoadjuntos. Por fim, mostraremos uma aplicação desta Teoria no Princípio Minimax de Courant-Rayleigh. Fundamentamos nas notas de aula do Kowalski [4].

CAPÍTULO 1

ANÁLISE FUNCIONAL

Neste capítulo veremos conceitos e resultados necessários de Análise Funcional com base nos livros [2], [3] e [7].

1.1 Espaços Normados e Banach

Definição 1.1.1. Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $(V, \|\cdot\|)$, ou simplesmente V , é um *espaço normado* e $\|\cdot\|$ é uma *norma* em V se

- (i) $\|v\| > 0$ para todo $v \in V$ com $v \neq 0$;
- (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ para todos $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todos $v, w \in V$.

Além disso, se V é um espaço métrico completo com a métrica dada por $d(v, w) = \|v - w\|$, então V é chamado de *espaço de Banach*.

Veja que todo espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por $d(v, w) = \|v - w\|$. Relembremos algumas classes importantes de funções no contexto de espaços métricos. Dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ entre espaços métricos é

- *contínua em* $x_0 \in M$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ se $x \in M$ e $d(x, x_0) < \delta$;
- *contínua* se é contínua em $x_0 \in M$ para todo $x_0 \in M$;
- *uniformemente contínua* se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ se $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$;
- *lipschitziana* se existe uma constante $L > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

Denotamos os conjuntos $L(V, W)$ como o conjunto dos operadores lineares de V em W e $\mathcal{L}(V, W)$ como o conjunto dos operadores lineares contínuos. É claro que $L(V, W)$ e $\mathcal{L}(V, W)$ são espaços vetoriais sobre \mathbb{K} com as operações usuais. Também denotamos $L(V) = L(V, V)$, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$, $V^* = L(V, \mathbb{K})$ (dual algébrico) e $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ (dual topológico).

Proposição 1.1.1. Sejam V um espaço de Banach e W um subespaço de V . Então W é Banach, com a norma induzida por V , se, e somente se, W é fechado em V .

Prova. Suponha W Banach. Dada (v_n) uma sequência em W com $v_n \rightarrow v_0 \in V$, então (v_n) é Cauchy em W . Por hipótese, concluímos que existe $\widehat{v}_0 \in W$ tal que $v_n \rightarrow \widehat{v}_0$. Portanto, $v_0 = \widehat{v}_0 \in W$.

Reciprocamente, suponha W fechado em V . Dada (v_n) sequência de Cauchy em W , então (v_n) é sequência de Cauchy em V . Como V é Banach, existe $v_0 \in V$ tal que $v_n \rightarrow v_0$. Portanto, por hipótese, $v_0 \in W$. ■

Lema 1.1.1. (Lema de Riesz). Sejam V um espaço normado e W subespaço fechado de V com $W \neq V$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $u \in V$ tal que $\|u\| = 1$ e $d(u, W) \geq 1 - \varepsilon$.

Prova. Vide Lema 6.1 em [3]. ■

Teorema 1.1.1. Seja V um espaço vetorial normado. Então todo conjunto fechado e limitado é compacto se, e somente se, V tem dimensão finita.

Prova. Consequência imediata do Teorema 1.5.4. em [2]. ■

Teorema 1.1.2. Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.

Prova. Vide Teorema 1.1.6. em [2]. ■

Corolário 1.1.2.1. Todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.

Teorema 1.1.3. (Teorema de Hahn-Banach). Sejam W um subespaço de um espaço normado V e um funcional linear contínuo $\varphi : W \rightarrow \mathbb{K}$. Então existe uma extensão de φ em V linear contínua $\tilde{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{K}$ com $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Prova. Vide Corolário 3.1.3. em [2]. ■

Corolário 1.1.3.1. Seja V um espaço normado. Dado $v_0 \in V - \{0\}$ existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(v_0) = \|v_0\|$.

Prova. Considere $W = [v_0]$ e $f : W \rightarrow \mathbb{K}$ com $f(\lambda v_0) = \lambda \|v_0\|$, a qual é linear e contínua com $\|f\| = 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{K}$ com $\|\tilde{\varphi}\| = \|f\| = 1$ e $\tilde{\varphi}(\lambda v_0) = \lambda \|v_0\|$. Portanto $\tilde{\varphi}(v_0) = \|v_0\|$. ■

Definição 1.1.2. Sejam V um espaço normado e (v_n) sequência em V . Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é

- *convergente* se existe $v_0 \in V$ tal que

$$S_k := \sum_{n=1}^k v_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v_0.$$

Denotamos $v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$;

- *absolutamente convergente* se a série, em \mathbb{R} , $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$ converge.

Teorema 1.1.4. Seja V um espaço normado. Então V é Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em V converge em E .

Prova. Suponhamos V um espaço de Banach. Seja $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ uma série absolutamente convergente em V , logo definindo $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$, temos que se $n \geq m$

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=1}^m v_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n v_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|v_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|v_k\|.$$

Como a série converge absolutamente obtemos que (S_m) é uma sequência de Cauchy. Portanto (S_m) converge, ou seja, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge.

Reciprocamente, suponha que toda série absolutamente convergente em V converge em V . Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em V , ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Em particular,

$$\|v_n - v_{n_0}\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Tome $\varepsilon = 1/2$, logo existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_n - v_{n_1}\| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_1.$$

Tome $\varepsilon = 1/2^2$, logo existe $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 > n_1$ tal que

$$\|v_n - v_{n_2}\| < \frac{1}{2^2} \quad \forall n \geq n_2.$$

Prosseguindo, obtemos uma subsequência (v_{n_k}) de (v_n) tal que

$$\|v_n - v_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall n \geq n_k \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Considere $S_m = \sum_{k=1}^m v_{n_{k+1}} - v_{n_k}$, logo

$$\sum_{k=1}^m \|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| < \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

Assim, esta série converge absolutamente. Por hipótese obtemos que existe $\lim S_m$. Com isto e o fato que $S_m = v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \forall m \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v_{n_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{m-1} + v_{n_1}) = v_{n_1} + \lim_{m \rightarrow \infty} S_m.$$

Portanto a sequência (v_n) possui uma subsequência convergente em V , e como (v_n) é Cauchy, obtemos que (v_n) converge em V . ■

1.2 Operadores lineares contínuos

Teorema 1.2.1. Sejam V e W espaços normados sobre \mathbb{K} e $T : V \rightarrow W$ linear. Então as seguintes condições são equivalentes:

- (a) T é lipschitziano;
- (b) T é uniformemente contínuo;
- (c) T é contínuo;
- (d) T é contínuo em algum ponto de V ;
- (e) T é contínuo na origem;
- (f) $\sup\{\|T(v)\| : v \in V \text{ e } \|v\| \leq 1\} < \infty$;
- (g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(v)\| \leq C\|v\|$ para todo $x \in V$.

Prova. As implicações (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) são imediatas das definições em espaços métricos vide [6].

(d) \Rightarrow (e) Suponha T contínuo em $v_0 \in V$. Tome (v_n) em V tal que $v_n \rightarrow 0$ queremos mostrar que $T(v_n) \rightarrow 0$. De fato, como $v_n + v_0 \rightarrow v_0$, temos que

$$T(v_n) = T(v_n + v_0) - T(v_0) \rightarrow T(v_0) - T(v_0) = 0.$$

(e) \Rightarrow (f) Suponha que $\sup\{\|T(v)\| : v \in V \text{ e } \|v\| \leq 1\} = \infty$ logo existe (v_n) em V tal que $\|v_n\| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ e $\|T(v_n)\| \rightarrow +\infty$. Defina (w_n) em V com $w_n = v_n/\|T(v_n)\|$. Logo $w_n \rightarrow 0$ e $T(w_n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, contradizendo o fato que T é contínuo na origem.

(f) \Rightarrow (g) Denote $C = \sup\{\|T(v)\| : v \in V \text{ e } \|v\| \leq 1\}$. Dado $v \in V - \{0\}$, então $\|T(v/\|v\|)\| \leq C$. Assim $\|T(v)\| \leq C\|v\| \forall v \in V - \{0\}$ e como para $v = 0$ a desigualdade $\|T(v)\| \leq C\|v\|$ ocorre, temos o resultado.

(g) \Rightarrow (a) Dados $v, w \in V$, temos que $\|T(v) - T(w)\| = \|T(v - w)\| \leq C\|v - w\|$. ■

Devido ao item (f) dizemos que $T : V \rightarrow W$ linear é *limitado* se é contínuo, pois leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Proposição 1.2.1. Sejam V, W e X espaços normados. Então

(a) a expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(v)\| : v \in V \text{ e } \|v\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(V, W)$;

(b) $\|T(v)\| \leq \|T\|\|v\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $v \in V$;

(c) $\|R \circ T\| \leq \|R\|\|T\|$ para quaisquer $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $R \in \mathcal{L}(W, X)$;

(d) Se W é Banach, então $\mathcal{L}(V, W)$ é Banach.

Prova.

(a) Consequência das propriedades de supremo.

(b) Imediato da definição de $\|T\|$.

(c) Basta notar que dado $v \in V$ com $v \neq 0$, tem-se

$$\frac{\|(R \circ T)(v)\|}{\|v\|} \leq \frac{\|R\|\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \frac{\|R\|\|T\|\|v\|}{\|v\|} = \|R\|\|T\|.$$

Portanto, $\|R \circ T\| \leq \|R\|\|T\|$.

(d) Dado (T_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(V, W)$, para cada $v \in V$ tem-se

$$\|T_n(v) - T_m(v)\| = \|(T_n - T_m)(v)\| \leq \|T_n - T_m\| \|v\| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $v \in V$, $(T_n(v))_n$ é Cauchy em W . Por hipótese, existe $T : V \rightarrow W$ com $T(v) = \lim T_n(v) \quad \forall v \in V$, veja que T é linear e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(T_n - T)(v)\| \leq \|T_n - T\| \|v\| \leq \|v\| \quad \forall n \geq n_0, v \in V.$$

Em particular $T - T_{n_0} \in \mathcal{L}(V, W)$, logo $T = T - T_{n_0} + T_{n_0} \in \mathcal{L}(V, W)$. Resta mostrar que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(V, W)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ com

$$\|(T_n - T)(v)\| \leq \|T_n - T\| \|v\| \leq \varepsilon \|v\| \quad \forall n \geq n_1, v \in V.$$

Resultando que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, portanto $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(V, W)$. ■

Um resultado não muito difícil, porém trabalhoso, é que a norma de $T \in \mathcal{L}(V, W)$ pode ser definido como qualquer das seguintes expressões

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\|, \sup_{\|v\| < 1} \|T(v)\|, \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\|, \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|},$$

$$\inf\{C \in \mathbb{R} : \|T(v)\| \leq C\|v\| \text{ para todo } v \in V\}.$$

Teorema 1.2.2. (Teorema da Aplicação Aberta). Sejam V e W espaços de Banach e $T : V \rightarrow W$ linear contínuo e sobrejetor. Então T é uma *aplicação aberta*, ou seja, $T(A) \subset W$ é aberto para qualquer $A \subset V$ aberto.

Prova. Vide Teorema 2.4.2. em [2]. ■

Corolário 1.2.2.1. (Teorema do Isomorfismo de Banach). Todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um *isomorfismo*, ou seja, homeomorfismo linear.

Prova. Seja T operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach. Devemos mostrar que T^{-1} é contínuo. De fato, pelo Teorema da Aplicação Aberta [1.2.2](#), T é uma aplicação aberta. Logo dado $A \in V$ aberto tem-se que $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ que é aberto. ■

Definição 1.2.1. Sejam V, W espaços normados e $T : V \rightarrow W$ linear. O *gráfico* de T é o conjunto

$$G(T) = \{(v, T(v)) \in V \times W : v \in V\}.$$

Note que $G(T)$ é um subespaço normado de $V \times W$ munido de qualquer uma das normas em $V \times W$

- $\|(v, w)\|_1 = \|v\| + \|w\|$;
- $\|(v, w)\|_2 = (\|v\|^2 + \|w\|^2)^{\frac{1}{2}}$;
- $\|(v, w)\|_\infty = \max\{\|v\|, \|w\|\}$.

Não é difícil ver que

$$\|(v, w)\|_\infty \leq \|(v, w)\|_2 \leq \|(v, w)\|_1 \leq 2\|(v, w)\|_\infty. \quad (1.1)$$

Destas desigualdades segue que as topologias induzidas por essas normas são iguais.

Teorema 1.2.3. (Teorema do Gráfico Fechado). Sejam V e W espaços de Banach e $T : V \rightarrow W$ linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $V \times W$.

Prova. Vide Teorema 2.5.1. em [\[2\]](#). ■

Observação 1.2.1. A maior utilidade do Teorema do Gráfico Fechado é na demonstração da continuidade de algum operador $T : V \rightarrow W$. Pela definição, deveríamos mostrar que toda sequência com $v_n \rightarrow v$ em V satisfaz

- (a) $(T(v_n))$ é convergente, em W , para algum $w \in W$;

(b) $w = T(v)$.

Mostrar (a) é um problema de existência, o que o faz (em geral) ser difícil, principalmente em dimensão infinita. O Teorema do Gráfico Fechado (no contexto linear e entre espaços de Banach) garante o item (a) imediatamente, restando apenas a verificação do item (b) para concluir que T é contínuo.

1.3 Espaços de Hilbert

Definição 1.3.1. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é um *produto interno* sobre V se cumpre

(a) $\langle v_1 + \lambda v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \lambda \langle v_2, w \rangle \quad \forall v_1, v_2, w \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{K};$

(b) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V;$

(c) Se $v \neq 0$, então $\langle v, v \rangle > 0$.

Neste caso, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (ou simplesmente V) denomina-se *espaço com produto interno*. Dizemos que a função $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ é a *norma induzida pelo produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição 1.3.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Seja V um espaço com produto interno. Então

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V. \quad (1.2)$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, v e w são linearmente dependentes.

Prova. Caso $w = 0$ o resultado segue trivialmente. Assumindo que $\langle w, w \rangle \neq 0$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$0 \leq \|v - \lambda w\|^2 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 - \bar{\lambda} \langle v, w \rangle - \lambda \langle w, v \rangle + |\lambda|^2 \langle w, w \rangle. \quad (1.3)$$

Tomando $\lambda = \langle v, w \rangle \langle w, w \rangle^{-1}$ obtemos que

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^2.$$

Portanto, $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

Caso v e w são linearmente dependentes é fácil ver que vale $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$. Reciprocamente, se $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$, então considerando $\lambda = \langle v, w \rangle \langle w, w \rangle^{-1}$ obtemos que

$$0 \leq \|v - \lambda w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 = 0.$$

Portanto, $v = \lambda w$. ■

Corolário 1.3.1.1. A norma induzida pelo produto interno é uma norma.

Prova. Mostremos apenas a desigualdade triangular, o resto é simples a partir da definição de produto interno. Dados v, w em um espaço com produto interno, temos que

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$
■

Definição 1.3.2. Um *espaço de Hilbert* é um espaço com produto interno que com a norma induzida pelo produto interno é um espaço de Banach.

Proposição 1.3.2. Seja V um espaço com produto interno. Então

(a) (Lei do Paralelogramo).

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \forall v, w \in V. \quad (1.4)$$

(b) (Identidades de Polarização). Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, para quaisquer $v, w \in V$ tem-se

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2). \quad (1.5)$$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, para quaisquer $v, w \in V$ tem-se que

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) + \frac{i}{4} (\|v + iw\|^2 - \|v - iw\|^2). \quad (1.6)$$

Prova. Basta usar que $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ e as propriedades de produto interno. ■

Definição 1.3.3. Sejam V um espaço com produto interno e $X \subset V$. O *complemento ortogonal* de X é

$$X^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in X\}.$$

Não é difícil ver que X^\perp é subespaço vetorial fechado de V e que $(\overline{X})^\perp = X^\perp$.

Teorema 1.3.1. (Decomposição Ortogonal). Sejam H um espaço de Hilbert e F subespaço fechado de H . Então $H = F \oplus F^\perp$, ou seja, para cada $v \in H$ existe únicos $P(v) \in F$ e $Q(v) \in F^\perp$ tais que $v = P(v) + Q(v)$. Além disso, P e Q satisfazem que $P, Q \in \mathcal{L}(H)$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $P(H) = F$, $Q(H) = F^\perp$, $\|P\| = 1$ se $F \neq \{0\}$, $\|Q\| = 1$ se $F \neq H$ e P é chamado de *projeção ortogonal de H sobre F* .

Prova. Vide Teorema 5.2.5. na referência [2]. ■

Proposição 1.3.3. Sejam V um espaço com produto interno e W um subespaço de V . Então $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$.

Prova. Dado $v \in \overline{W}$, existe (v_n) sequência em W tal que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle v_n, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W^\perp,$$

fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W^\perp$. Portanto $v \in (W^\perp)^\perp$. Por outro lado, dado $v \in (W^\perp)^\perp$, suponhamos, por absurdo, que $v \notin \overline{W}$. Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal [1.3.1], temos que existem $v_1 \in \overline{W}$ e $v_2 \in W^\perp$ tais que $v = v_1 + v_2$. Como $v \notin \overline{W}$, temos que $v_2 \neq 0$. Note que devido a $v \in (W^\perp)^\perp$, temos que $\langle v, v_2 \rangle = 0$. Portanto,

$$0 = \langle v, v_2 \rangle = \langle v_1 + v_2, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle = \|v_2\|^2 \neq 0,$$

absurdo. Portanto $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$. ■

Teorema 1.3.2. (Teorema de Riesz-Fréchet). Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe único $w_0 \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle v, w_0 \rangle \quad \forall v \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|w_0\|$.

Prova. Existência: Caso φ seja o funcional nulo, então basta tomar $w_0 = 0$. Caso φ não seja identicamente nulo, então o conjunto

$$F := \{v \in H : \varphi(v) = 0\} = \varphi^{-1}(0)$$

é um subespaço fechado próprio de H . Do Teorema da Decomposição Ortogonal [1.3.1](#), temos que $F^\perp \neq \{0\}$, logo existe $v_0 \in F^\perp$ com $\|v_0\| = 1$. Mostremos que $w_0 = \overline{\varphi(v_0)}v_0$ é o vetor desejado. Dado $v \in H$, veja que

$$v = \left(v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \right) + \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0,$$

$\frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \in F^\perp$ e $v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \in F$. Devido a $w_0 \in F^\perp$ obtemos que $\langle v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0, w_0 \rangle = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle v, w_0 \rangle &= \left\langle v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0, w_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0, w_0 \right\rangle \\ &= \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)} \langle v_0, \overline{\varphi(v_0)}v_0 \rangle = \varphi(v) \langle v_0, v_0 \rangle = \varphi(v). \end{aligned}$$

Unicidade: Suponha $w_1, w_2 \in H$ tais que $\langle v, w_1 \rangle = \varphi(v) = \langle v, w_2 \rangle \quad \forall v \in H$, logo $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0 \quad \forall v \in H$. Tomando $v = w_1 - w_2$ obtemos que $w_1 = w_2$.

Por último verificaremos que $\|\varphi\| = \|w_0\|$. Note que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz ([1.2](#)), temos que $|\varphi(v)| \leq \|v\|\|w_0\|$ para qualquer $v \in H$, então $\|\varphi\| \leq \|w_0\|$. Por outro lado $|\varphi(\frac{w_0}{\|w_0\|})| = \|w_0\|$, portanto $\|\varphi\| = \|w_0\|$. ■

Definição 1.3.4. Seja (W_n) uma sequência de subespaços fechados de um espaço de Hilbert H . Dizemos que H é soma de Hilbert dos W_n , denotamos $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} W_n$, se

(a) os espaços W_n são *mutualmente ortogonais*, isto é,

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in W_n \text{ e } \forall v \in W_m \text{ com } m \neq n;$$

(b) o espaço gerado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ é denso em H .

Teorema 1.3.3. Seja H Hilbert com $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} W_n$ para alguma sequência (W_n) de subespaços fechados de H . Então, dado $v \in H$,

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} P_{W_n} v,$$

onde P_{W_n} é a projeção ortogonal de H sobre W_n definida em (1.3.1). Além disso

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_{W_n} v\|^2 \quad (\text{Identidade de Bessel}).$$

Prova. Vide Teorema 5.9 em [3]. ■

Definição 1.3.5. Seja H um espaço de Hilbert. Uma sequência (e_n) em H é chamada de *base de Hilbert* de H se satisfaz:

(a) $\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\langle e_m, e_n \rangle = 0$ se $m \neq n$;

(b) o espaço $[e_1, \dots, e_n, \dots]$ é denso em H .

Corolário 1.3.3.1. Seja (e_n) uma base de Hilbert de um espaço de Hilbert H . Então dado $v \in H$ temos que

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n \text{ e } \|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

Prova. É consequência imediata do Teorema (1.3.3) com o fato que $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} W_n$ com $W_n = [e_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e que $P_{W_n} v = \langle v, e_n \rangle e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Definição 1.3.6. Um espaço normado é dito *separável* se contém um conjunto enumerável e denso.

Teorema 1.3.4. Todo espaço de Hilbert separável possui uma base de Hilbert.

Prova. Vide Teorema 5.11 em [3]. ■

1.4 Operador Adjunto

Dado $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ um operador entre espaços de Hilbert, veja que fixado $w \in H_2$ a função $\varphi_w : H_1 \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\varphi_w(v) = \langle T(v), w \rangle$ é linear e contínua. Pelo Teorema de Riesz-Fréchet para cada $w \in H_2$, existe $S(w) \in H_1$ tal que $\varphi_w(v) = \langle v, S(w) \rangle$, ou seja,

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, S(w) \rangle \quad \forall v \in H_1, w \in H_2.$$

Definição 1.4.1. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Definimos o *operador adjunto* de um operador $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ como o único operador linear contínuo T^* de modo que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \quad \forall v \in H_1, w \in H_2. \quad (1.7)$$

Veremos que esta definição faz sentido na próxima proposição.

Proposição 1.4.1. Sejam $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ com H_1, H_2, H_3 espaços de Hilbert e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

- (a) existe única função T^* de H_2 em H_1 que satisfaz [\(1.7\)](#);
- (b) $(T^*)^* = T$;
- (c) $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ e $\|T^*\| = \|T\|$;
- (d) $\|T\| = \|T^*\| = \sqrt{\|T^*T\|} = \sqrt{\|TT^*\|}$;
- (e) $(ST)^* = T^*S^*$;
- (f) $(T_1 + \lambda T_2)^* = T_1^* + \bar{\lambda}T_2^*$;
- (g) $\ker(T) = \text{Im}(T^*)^\perp$ e, equivalentemente, $\ker(T^*) = \text{Im}(T)^\perp$;
- (h) T é invertível se, e somente se, T^* é invertível.

Prova.

(a) Suponha $T_1^*, T_2^* : H_2 \rightarrow H_1$ tais que

$$\langle v, T_1^*(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle \quad \forall v \in H_1, w \in H_2.$$

Logo $\langle v, (T_1^* - T_2^*)(w) \rangle = 0 \quad \forall v \in H_1$ e $w \in H_2$, fazendo $v = (T_1^* - T_2^*)(w)$ obtemos que $T_1^* = T_2^*$.

(b) Basta notar que

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle = \overline{\langle T^*(w), v \rangle} = \overline{\langle w, (T^*)^*(v) \rangle} = \langle (T^*)^*(v), w \rangle$$

para quaisquer $v \in H_1$ e $w \in H_2$. Logo $\langle (T - (T^*)^*)(v), w \rangle = 0$ para quaisquer $v \in H_1$ e $w \in H_2$. Fazendo $w = (T - (T^*)^*)(v)$ obtemos o resultado.

(c) Vejamos primeiro que $T^* \in L(H_2, H_1)$. Dados $w_1, w_2 \in H_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(w_1 + \lambda w_2) \rangle &= \langle T(v), w_1 + \lambda w_2 \rangle = \langle T(v), w_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle T(v), w_2 \rangle \\ &= \langle v, T^*(w_1) \rangle + \bar{\lambda} \langle v, T^*(w_2) \rangle = \langle v, T^*(w_1) + \lambda T^*(w_2) \rangle \end{aligned}$$

para qualquer $v \in H_1$. Logo $T^*(w_1 + \lambda w_2) = T^*(w_1) + \lambda T^*(w_2)$.

Agora vejamos que $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ com $\|T^*\| = \|T\|$. Dado $w \in H_2$, note que pelo item (b) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz [\(1.2\)](#)

$$\begin{aligned} \|T^*(w)\|^2 &= |\langle T^*(w), T^*(w) \rangle| = |\langle w, TT^*(w) \rangle| \leq \|w\| \|TT^*(w)\| \\ &\leq \|w\| \|T\| \|T^*(w)\|. \end{aligned}$$

Assim, $\|T^*(w)\| \leq \|T\| \|w\|$, o que resulta que $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ com $\|T^*\| \leq \|T\|$. Para mostrar a desigualdade oposta use a desigualdade já obtida e o item (b) da seguinte forma $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$.

(d) Já vimos que $\|T\| = \|T^*\|$. Pelo item (c) da Proposição [1.2.1](#), tem-se $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. Por outro lado, dado $v \in H_1$ temos que

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^*T(v) \rangle \leq \|v\| \|T^*T\| \|v\|.$$

Portanto, $\|T\|^2 = \|T^*T\|$, substituindo T por T^* , obtemos que

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|TT^*\|.$$

(e) Basta notar que

$$\langle (ST)(v), w \rangle = \langle S(T(v)), w \rangle = \langle T(v), S^*(w) \rangle = \langle v, T^*(S^*(w)) \rangle$$

para quaisquer $v \in H_1$ e $w \in H_3$. Pelo item (a) o resultado segue.

(f) Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle (T_1 + \lambda T_2)(v), w \rangle &= \langle T_1(v), w \rangle + \lambda \langle T_2(v), w \rangle = \langle v, T_1^*(w) \rangle + \lambda \langle v, T_2^*(w) \rangle \\ &= \langle v, (T_1^* + \bar{\lambda} T_2^*)(w) \rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $v \in H_1$ e $w \in H_2$. Pelo item (a) segue o resultado.

(g) Dado $v \in \ker(T)$ então $0 = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$ para qualquer $w \in H$. Portanto $v \in \text{Im}(T^*)^\perp$. Reciprocamente, dado $v \in \text{Im}(T^*)^\perp$ então $0 = \langle v, T^*(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle$ para qualquer $w \in H$. Portanto $T(v) = 0$, ou seja, $v \in \ker(T)$.

(h) É imediato de (g). ■

Caso $H_1 = H_2 = H$ temos classes especiais de operadores $T \in \mathcal{L}(H)$, vejamos algumas das mais importantes:

Definição 1.4.2. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(H)$ é

- *positivo* se $\langle T(v), v \rangle \geq 0$ para qualquer $v \in H$;
- *normal* se $T^*T = TT^*$;
- *auto-adjunto* se $T = T^*$;

- *unitário* se T é invertível e $T^{-1} = T^*$ (em particular é normal).

Observação 1.4.1. Para qualquer $T \in \mathcal{L}(H)$ os operadores TT^* e T^*T são auto-adjuntos e positivos, pois $(TT^*)^* = TT^*$ e $\langle TT^*(v), v \rangle = \langle T^*(v), T^*(v) \rangle = \|T^*(v)\|^2 \geq 0$ para qualquer $v \in H$. Analogamente para T^*T .

Proposição 1.4.2. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$. Então,

- T é normal se, e somente se, $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ para todo $v \in H$;
- Considerando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. T é auto-adjunto se, e somente se, $\langle T(v), v \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $v \in H$.

Prova. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$.

- Suponha T normal, logo

$$\begin{aligned} \|T(v)\|^2 &= \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^*T(v) \rangle = \langle v, TT^*(v) \rangle = \langle T^*(v), T^*(v) \rangle \\ &= \|T^*(v)\|^2 \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Reciprocamente, pela Identidade de Polarização (caso real [\(1.5\)](#) ou caso complexo [\(1.6\)](#)) temos que

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle T^*(v), T^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in H.$$

Logo,

$$\langle T^*T(v), w \rangle = \langle TT^*(v), w \rangle \quad \forall v, w \in H.$$

Portanto $T^*T = TT^*$.

- Suponha T auto-adjunto, logo

$$\langle T(v), v \rangle = \langle v, T^*(v) \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \overline{\langle T(v), v \rangle} \quad \forall v \in H.$$

Portanto $\langle T(v), v \rangle \in \mathbb{R}$ para qualquer $v \in H$.

Reciprocamente, dados $v, w \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$\langle T(v + \lambda w), v + \lambda w \rangle = \langle T(v), v \rangle + \bar{\lambda} \langle T(v), w \rangle + \lambda \langle T(w), v \rangle + |\lambda|^2 \langle T(w), w \rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{\langle T(v, \lambda w), v + \lambda w \rangle} &= \langle v + \lambda w, T(v + \lambda w) \rangle \\ &= \langle v, T(v) \rangle + \bar{\lambda} \langle v, T(w) \rangle + \lambda \langle w, T(v) \rangle + |\lambda|^2 \langle w, T(w) \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\bar{\lambda} \langle T(v), w \rangle + \lambda \langle T(w), v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, T(w) \rangle + \lambda \langle w, T(v) \rangle$. Fazendo $\lambda = 1$ e $\lambda = i$, obtemos duas expressões

$$\begin{aligned} \langle T(v), w \rangle + \langle T(w), v \rangle &= \langle v, T(w) \rangle + \langle w, T(v) \rangle, \\ -\langle T(v), w \rangle + \langle T(w), v \rangle &= -\langle v, T(w) \rangle + \langle w, T(v) \rangle. \end{aligned}$$

Somando membro a membro temos que $\langle T(w), v \rangle = \langle w, T(v) \rangle$.

■

Observação 1.4.2. Uma consequência imediata desta proposição é que todo operador positivo é auto-adjunto. Além disso, note que dado $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de $T \in \mathcal{L}(H)$ e $u \in H$ autovetor de λ com $\|u\| = 1$, tem-se que

$$\lambda = \lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle T(u), u \rangle.$$

Decorre disto que todos os autovalores de um operador auto-adjunto são reais e de um operador positivo são não negativos.

Corolário 1.4.2.1. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador normal. Então $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Prova. Pelo item (a) da Proposição [1.4.2](#) e o item (d) da Proposição [1.4.1](#) temos que

$$\|T^2\| = \sup_{\|v\|=1} \|T(T(v))\| = \sup_{\|v\|=1} \|T^*(T(v))\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

■

1.5 Operadores Compactos

Sejam V e W espaços normados de dimensão infinita. Sabemos que $B[0, 1]$ não é compacto em V (devido ao Teorema [1.1.1](#)), mas se existir $T : V \rightarrow W$ linear com $T(B[0, 1])$ um compacto em W teremos que T “conserta” a não compacidade de $B[0, 1]$. Como sabe-se, pode ocorrer que $T(B[0, 1])$ não seja fechado, dessa forma é aceitável a seguinte definição:

Definição 1.5.1. Um operador linear $T : V \rightarrow W$ entre espaços normados é dito *compacto* se $\overline{T(B[0, 1])}$ é compacto em W . Denotaremos o conjunto dos operadores compactos de V em W por $\mathcal{K}(V, W)$.

Definição 1.5.2. Um operador linear contínuo $T : V \rightarrow W$ entre espaços normados é de *posto finito* se $\dim \text{Im}(T) < \infty$. Denotamos o conjunto dos operadores lineares contínuos de posto finito de V em W por $\mathcal{L}_f(V, W)$.

Proposição 1.5.1. Sejam V e W espaços normados. Então,

- (a) todo operador compacto é contínuo;
- (b) todo operador linear contínuo de posto finito é compacto;
- (c) V tem dimensão finita se, e somente se, a identidade em V é um operador compacto.

Prova.

- (a) Considere $T : V \rightarrow W$ operador compacto. Então $\overline{T(B[0, 1])}$ é compacto, portanto $T(B[0, 1])$ é limitado.
- (b) decorre do Teorema [1.1.1](#).
- (c) decorre do Teorema [1.1.1](#).

■

Proposição 1.5.2. Sejam V e W espaços normados e $T : V \rightarrow W$ linear. As seguintes condições são equivalentes

- (a) T é compacto;
- (b) $\overline{T(A)}$ é compacto em W para qualquer A limitado em V ;
- (c) dado (v_n) sequência limitada em V , então a sequência $(T(v_n))$ possui subsequência convergente em W .

Prova. (a) \Rightarrow (b) Dado $A \subset V$ limitado, existe $C > 0$ tal que $\|v\| \leq C$ para todo $v \in A$. Logo $\frac{1}{C}A \subset B[0, 1]$. Como $\frac{1}{C}\overline{T(A)}$ é fechado e $\frac{1}{C}\overline{T(A)} = \overline{\frac{1}{C}T(A)} \subset \overline{T(B[0, 1])}$, temos que $\frac{1}{C}\overline{T(A)}$ é compacto. Portanto $\overline{T(A)}$ é compacto.

(b) \Rightarrow (c) É consequência do fato da teoria de espaços métricos que toda sequência num compacto possui subsequência convergente. Vide Proposição 7 do capítulo 8 da referência [6].

(c) \Rightarrow (a) Seja (w_n) sequência em $\overline{T(B[0, 1])}$. Queremos mostrar que (w_n) possui subsequência convergente para algum elemento de $\overline{T(B[0, 1])}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $v_n \in B[0, 1]$ tal que $\|T(v_n) - w_n\| < \frac{1}{n}$. Por hipótese $(T(v_n))$ possui subsequência com $T(v_{n_k}) \rightarrow w_0 \in \overline{T(B[0, 1])}$. Como

$$\|w_{n_k} - w_0\| \leq \|w_{n_k} - T(v_{n_k})\| + \|T(v_{n_k}) - w_0\| < \frac{1}{n_k} + \|T(v_{n_k}) - w_0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

temos que $w_{n_k} \rightarrow w_0$. ■

Proposição 1.5.3. (Propriedade de ideal). Sejam $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $S \in \mathcal{L}(W, X)$ com V, W e X espaços normados. Se T ou S é um operador compacto, então $S \circ T$ é compacto.

Prova. Suponhamos S compacto. Seja (v_n) é uma sequência limitada em V . Então $(T(v_n))$ é limitado. Como S é compacto, obtemos que $(S(T(v_n)))$ possui subsequência convergente. ■

Proposição 1.5.4. Sejam V e W espaços normados. Então $\mathcal{K}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{L}(V, W)$. Se W é Banach, então $\mathcal{K}(V, W)$ é fechado em $\mathcal{L}(V, W)$, e portanto $\mathcal{K}(V, W)$ é Banach.

Prova. Não é difícil ver que $\mathcal{K}(V, W)$ é subespaço de $\mathcal{L}(V, W)$. Suponhamos W Banach e (T_n) uma sequência em $\mathcal{K}(V, W)$ com $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(V, W)$. Vamos mostrar que T satisfaz a condição (c) da proposição (1.5.2). Seja (v_m) sequência em V com $\|v_m\| \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e algum $C > 0$. Como T_1 é compacto, existe (v_m^1) uma subsequência de (v_m) tal que $(T_1(v_m^1))$ é Cauchy. Como T_2 é compacto, existe (v_m^2) uma subsequência de (v_m^1) tal que $(T_2(v_m^2))$ é Cauchy. Prosseguindo com esse argumento, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe (v_m^{n+1}) uma subsequência de (v_m^n) tal que $(T_{n+1}(v_m^{n+1}))$ é Cauchy. Considere a sequência (w_m) com $w_m = v_m^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, logo $\|w_m\| \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que $(T(w_m))$ é Cauchy e portanto convergente em W , pois W é Banach. De fato, como $T_n \rightarrow T$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_{n_0}\| < \varepsilon/3C$. Por $(T_{n_0}(w_m))$ ser Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_0}(w_j) - T_{n_0}(w_k)\| < \varepsilon/3$ para quaisquer $j, k \geq n_1$. Portanto

$$\begin{aligned} \|T(w_j) - T(w_k)\| &\leq \|T(w_j) - T_{n_0}(w_j)\| + \|T_{n_0}(w_j) - T_{n_0}(w_k)\| \\ &\quad + \|T_{n_0}(w_k) - T(w_k)\| \\ &< \|T - T_{n_0}\| \|w_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_{n_0}\| \|w_k\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3C} C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C} C = \varepsilon \end{aligned}$$

para quaisquer $j, k \geq n_1$. ■

Corolário 1.5.4.1. Sejam V espaço normado, W espaço de Banach, (T_n) sequência em $\mathcal{L}_p(V, W)$ e $T \in \mathcal{L}(V, W)$ com $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(V, W)$. Então $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Proposição 1.5.5. Sejam V espaço normado, H espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{K}(V, H)$. Então existe (T_n) sequência em $\mathcal{L}_p(V, H)$ com $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(V, H)$.

Prova. Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $T_\varepsilon \in \mathcal{L}_p(V, H)$ tal que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, como

$$\overline{T(B[0, 1])} \subset \bigcup_{w \in T(B[0, 1])} B\left(w, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

temos que existem $w_1, \dots, w_n \in T(B[0, 1])$ tais que $T(B[0, 1]) \subset \bigcup_{j=1}^n B(w_j, \varepsilon/2)$.

Considere $F = [w_1, \dots, w_n]$, P a projeção ortogonal de H sobre F como no Teorema (1.3.1), logo F é fechado em H pelo Corolário 1.1.2.1. Defina $T_\varepsilon = P \circ T$, então $T_\varepsilon \in \mathcal{L}_p(V, H)$. Resta provar que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. De fato, dado $v \in B[0, 1]$, existe $j = 1, \dots, n$ tal que $\|T(v) - w_j\| < \varepsilon/2$. Logo

$$\begin{aligned} \|T(v) - T_\varepsilon(v)\| &\leq \|T(v) - w_j\| + \|P(w_j) - P(T(v))\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|P\| \|w_j - T(v)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.5.1. (Teorema de Schauder). Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Então $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ se, e somente se, $T^* \in \mathcal{K}(H_2, H_1)$.

Prova. Vide Teorema 7.2.7. em [2].

■

CAPÍTULO 2

TEORIA DA MEDIDA E TRANSFORMADA DE FOURIER

Para esta seção veremos alguns conceitos necessários para o entendimento do nosso tema. Para tanto, utilizaremos os livros [1] e [5] como referências. Enfatizamos nas demonstrações das propriedades da transformada de Fourier devido ao importante exemplo de como ele age com o Laplaciano o qual veremos mais adiante (3.2.4), além de suas importâncias na resolução de problemas em EDP, Mecânica Quântica e etc.

2.1 Resultados sobre a Integração de Lebesgue

Teorema 2.1.1. Seja $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \lambda)$ o espaço de medida de Lebesgue. Dados $\varepsilon > 0$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ integrável, existe uma função φ_ε , combinação linear de funções características de blocos fechados (ou abertos), tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi_\varepsilon| \, d\lambda < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Prova. Vide Teorema 1.18 em [5]. ■

Teorema 2.1.2. (Convergência Monótona). Se (f_n) é uma sequência monótona não decrescente de funções não negativas mensuráveis que converge quase sempre para f , então

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Prova. Vide Teorema 4.6 em [1]. ■

Teorema 2.1.3. (Convergência Dominada de Lebesgue). Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções integráveis convergindo quase sempre para uma função mensurável real ou complexa f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu.$$

Prova. Vide Teorema 5.6 em [1]. ■

Corolário 2.1.3.1. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $x \mapsto f(x, t)$ mensurável para qualquer $t \in [a, b]$. Se para algum $t_0 \in [a, b]$ $f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f(x, t_0)$ para cada $x \in X$ e existe g integrável de modo que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todos $x \in X$ e $t \in [a, b]$, então

$$\int_X f(x, t_0) \, d\mu = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(x, t) \, d\mu.$$

Prova. Vide Corolário 5.7 em [1]. ■

Corolário 2.1.3.2. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $x \mapsto f(x, t)$ mensurável para qualquer $t \in [a, b]$. Se para algum $t_0 \in [a, b]$ $x \mapsto f(x, t_0)$ é integrável em X , existe $\partial f / \partial t$ e existe g integrável tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \text{ e } t \in [a, b],$$

então $\int f(x, t) \, d\mu$ é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \int_X f(x, t) \, d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, d\mu.$$

Prova. Vide Corolário 5.9 em [1]. ■

Teorema 2.1.4. (Tonelli). Sejam (X, \mathcal{X}, μ) e (Y, \mathcal{Y}, ν) espaços de medida σ -finitas e uma medida produto π de μ e ν sobre $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Se $F : Z := X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é não negativa e mensurável, então as funções definidas quase sempre

$$f(x) = \int_Y F(x, y) \, d\nu \text{ e } g(y) = \int_X F(x, y) \, d\mu$$

possuem integrais finitas e

$$\int_X f \, d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu.$$

Em outras palavras,

$$\int_X \left[\int_Y F \, d\nu \right] \, d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y \left[\int_X F \, d\mu \right] \, d\nu.$$

Prova. Vide Teorema 10.9 em [1]. ■

Teorema 2.1.5. (Fubini). Sejam (X, \mathcal{X}, μ) e (Y, \mathcal{Y}, ν) espaços de medida σ -finitas e uma medida produto π de μ e ν sobre $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Se $F : Z := X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável com relação a π , então as funções definidas quase sempre

$$f(x) = \int_Y F(x, y) \, d\nu \text{ e } g(y) = \int_X F(x, y) \, d\mu$$

possuem integrais finitas e

$$\int_X f \, d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu.$$

Em outra notação,

$$\int_X \left[\int_Y F \, d\nu \right] \, d\mu = \int_Z F \, d\pi = \int_Y \left[\int_X F \, d\mu \right] \, d\nu.$$

Prova. Vide Teorema 10.10 em [1]. ■

Por consequência de Fubini e Tonelli, se (X, \mathcal{X}, μ) e (Y, \mathcal{Y}, ν) são espaços de medida σ -finitas e f mensurável definida em $X \times Y$ é tal que alguma das integrais

$$\int_X \left[\int_Y |f| \, d\nu \right] \, d\mu, \int_{X \times Y} |f| \, d\pi, \int_Y \left[\int_X |f| \, d\mu \right] \, d\nu$$

existe e é finita, então todas existem, são iguais e

$$\int_X \left[\int_Y f \, d\nu \right] d\mu = \int_{X \times Y} f \, d\pi = \int_Y \left[\int_X f \, d\mu \right] d\nu.$$

Teorema 2.1.6. (Mudança de Variável). Considere o espaço de medida de Lebesgue. Sejam $\phi : X \rightarrow Y$ um difeomorfismo C^1 entre abertos de \mathbb{R}^n e f definida em Y mensurável. Então $f \circ \phi$ é X mensurável e

$$\int_Y f(y) \, dy = \int_X f(\phi(x)) |\det \phi'(x)| \, dx. \quad (2.2)$$

Teorema 2.1.7. Sejam (X, μ) e (Y, λ) espaços de medida, $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e $\phi : X \rightarrow Y$ que *preserva as medidas* μ e λ , ou seja, $\phi^{-1}(A) \subset X$ é mensurável se $A \subset Y$ é mensurável e

$$\mu(\phi^{-1}(A)) = \lambda(A) \text{ para todo conjunto mensurável } A \subset Y.$$

Então,

$$\int_X f(\phi(x)) \, d\mu(x) = \int_Y f(y) \, d\lambda(y)$$

Prova. Primeiramente mostremos para $f = \sum c_i \chi_{A_i}$ função simples.

De fato, como $\chi_A(\phi(x)) = \chi_{\phi^{-1}(A)}(x)$, sabe-se que

$$\begin{aligned} \int_X f(\phi(x)) \, d\mu(x) &= \int_X \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(\phi(x)) \, d\mu(x) = \sum_{i=1}^n c_i \int_X \chi_{\phi^{-1}(A_i)}(x) \, d\mu(x) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(\phi^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda(A_i) = \int_Y \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(y) \, d\lambda(y) \\ &= \int_Y f(y) \, d\lambda(y) \end{aligned}$$

Para o caso geral, considere φ_n^+ sequência de funções simples convergindo monotonicamente para $f^+(y) = \max\{f(y), 0\}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona

[2.1.2](#), temos que:

$$\begin{aligned} \int_X f^+(\phi(x)) \, d\mu(x) &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^+(\phi(x)) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n^+(\phi(x)) \, d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \varphi_n^+(y) \, d\lambda(y) = \int_Y f^+(y) \, d\lambda(y) \end{aligned}$$

Analogamente para $f^-(y) = \max\{-f(y), 0\}$ obtemos que

$$\int_X f^-(\phi(x)) \, d\mu(x) = \int_Y f^-(y) \, d\lambda(y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X f(\phi(x)) \, d\mu(x) &= \int_X [f^+(\phi(x)) - f^-(\phi(x))] \, d\mu(x) \\ &= \int_X f^+(\phi(x)) \, d\mu(x) - \int_X f^-(\phi(x)) \, d\mu(x) \\ &= \int_Y f^+(y) \, d\lambda(y) - \int_Y f^-(y) \, d\lambda(y) = \int_Y f(y) \, d\lambda(y). \end{aligned}$$

■

2.2 Espaços de Lebesgue

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, defina a relação no conjunto das funções mensuráveis

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists E \in \Sigma \text{ com } \mu(E) = 0 \text{ tal que } f(x) = g(x) \text{ para qualquer } x \notin E.$$

Não é difícil ver que \sim é uma relação de equivalência. Assim, a classe de equivalência de uma função mensurável f é $[f] := \{g : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} : g \sim f\}$. Para $1 \leq p < \infty$, definiremos o *espaço de Lebesgue* como

$$L^p(X) := \left\{ [f] : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Sabe-se que $L^p(X)$ é munido de uma função $\|\cdot\|_{L^p(X)} : L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma função mensurável f é dita *limitada quase sempre* se existem $E \in \Sigma$ e $C > 0$ tais que $\mu(E) = 0$ e $|f(x)| \leq C$ para qualquer $x \notin E$. Para $p = \infty$, definiremos o *espaço de Lebesgue* $L^\infty(X)$ como o conjunto das classes de funções limitadas quase

sempre. Sabe-se que $L^\infty(X)$ é munido de uma função $\|\cdot\|_{L^\infty(X)} : L^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|[f]\|_{L^\infty(X)} = \inf\{S(E) : E \in \Sigma \text{ com } \mu(E) = 0\},$$

onde $S(E) = \sup\{|f(x)| : x \notin E\}$. Para simplificar a notação, denotaremos apenas $f \in L^p(X)$ ao invés de $[f] \in L^p(X)$. E, quando não houver dúvida sobre o espaço de medida, denotaremos $\|\cdot\|_{L^p(X)}$ e $L^p(X)$ apenas por $\|\cdot\|_p$ e L^p , respectivamente.

Para os próximos resultados estamos convencionando que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Teorema 2.2.1. (Desigualdade de Hölder). Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Prova. Vide Teorema 5.9 em [1]. ■

Corolário 2.2.1.1. Sejam $f_1 \in L^{p_1}, f_2 \in L^{p_2}, \dots, f_n \in L^{p_n}$ com $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}$. Então $\prod_{i=1}^n f_i \in L^r$ e $\|\prod_{i=1}^n f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}$.

Prova. No caso $r = \infty$, concluímos que $p_1 = \dots = p_n = \infty$. Daí, segue o resultado. No caso $1 \leq r < \infty$, mostremos por indução em n . Para $n = 2$, temos que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}$, o que nos dá $\frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2} = 1$. Note que $|f_1|^r \in L^{\frac{p_1}{r}}$ e $|f_2|^r \in L^{\frac{p_2}{r}}$, logo

$$\|f_1 \cdot f_2\|_r = \| |f_1 \cdot f_2|^r \|_1^{\frac{1}{r}} \leq \| |f_1|^r \|_{\frac{p_1}{r}}^{\frac{1}{r}} \cdot \| |f_2|^r \|_{\frac{p_2}{r}}^{\frac{1}{r}} = \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2}.$$

Agora, supondo que o resultado seja válido para $n - 1$, mostremos para n . Segue da hipótese de indução e do caso $n = 2$ que

$$\left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_r = \left\| \prod_{i=1}^{n-1} f_i \cdot f_n \right\|_r \leq \left\| \prod_{i=1}^{n-1} f_i \right\|_{\frac{1}{r} - \frac{1}{p_n}} \cdot \|f_n\|_{p_n} \leq \prod_{i=1}^{n-1} \|f_i\|_{p_i} \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$
■

Teorema 2.2.2. (Desigualdade de Minkowski). Sejam $f, g \in L^p(X)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prova. Vide Teorema 6.11 em [1]. ■

Teorema 2.2.3. $L^p(X)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_p$ para qualquer $1 \leq p \leq \infty$.

Prova. Vide Teorema 6.14 em [1]. ■

Observação 2.2.1. Quando $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ e μ for a medida da contagem denotamos $\ell^p = L^p(\mathbb{N})$ para cada $1 \leq p \leq \infty$. Veja que se $1 \leq p \leq \infty$ então

$$\ell^p = \left\{ (x_n) : \sum_{n=1}^p |x_n|^p \leq \infty \right\}$$

é Banach com norma dada por

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, no caso $p = 2$ tem-se que ℓ^2 é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Caso $p = \infty$ tem-se que

$$\ell^\infty = \{(x_n) : |x_n| \leq C \text{ para algum } C > 0 \text{ e todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 2.2.1. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis. Definimos a *convolução*, $f * g$, de f e g por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy.$$

Proposição 2.2.1. Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

- (a) $f * g = g * f$;
- (b) $(f + g) * h = f * h + g * h$;
- (c) $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$;

(d) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$;

(e) Se $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Prova. (a) Fazendo a mudança de variável $z = \phi(y) = x - y$, pelo Teorema [2.1.6](#), obtemos que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z) \, dz = (g * f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) e (c) são imediatos da definição.

(d) Pelo Teorema de Fubini [2.1.5](#),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy \right| \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \, dx |g(y)| \, dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

(e) Como $(f * g) * h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue do Teorema de Fubini [2.1.5](#) e do Teorema de Mudança de Variável [2.1.6](#), fazendo $\tau = \phi(z) = y + z$, que

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - y)h(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y - z)g(z) \, dz h(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tau)g(\tau - y)h(y) \, d\tau \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tau) \int_{\mathbb{R}^n} g(\tau - y)h(y) \, dy \, d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tau)(g * h)(\tau) \, d\tau \\ &= [f * (g * h)](x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.4. (Desigualdade de Young). Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (2.3)$$

Prova. Caso $r = \infty$, tem-se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A desigualdade de Hölder [2.2.1](#) garante que

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Logo, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Caso $r < \infty$, tem-se que $p, q < \infty$. De fato, supondo $p = \infty$ ($q = \infty$ é análogo), obtemos que $\frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Assim, $q = \frac{r}{r+1} < 1$, absurdo. Como

$$\frac{1}{r} + \frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{qr} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1,$$

pelo Corolário [2.2.1.1](#), obtemos que

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{1+\frac{p}{r}-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1+\frac{q}{r}-\frac{q}{r}} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \cdot |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \cdot |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} \, dy \\ &\leq \underbrace{\| |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \|_r}_{I_1} \cdot \underbrace{\| |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \|_{\frac{pr}{r-p}}}_{I_2} \cdot \underbrace{\| |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} \|_{\frac{qr}{r-q}}}_{I_3}. \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}} \right)^r \, dy \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{r}}, \\ I_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r} \frac{pr}{r-p}} \, dy \right)^{\frac{r-p}{pr}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{r-p}{pr}} = \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}}, \\ I_3 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^{\frac{r-q}{r} \frac{qr}{r-q}} \, dy \right)^{\frac{r-q}{qr}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{r-q}{qr}} = \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Fubini [2.1.5](#),

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^r dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} I_1^r I_2^r I_3^r dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \right) dx \\
 &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy dx \\
 &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx |g(y)|^q dy \\
 &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.5. (Aproximação por funções C^∞). Seja $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$. Logo, $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x) dx = 1$ e $\|j_\varepsilon\|_1 = \|j\|_1$. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para algum $1 \leq p < \infty$, e a função definida por $f_\varepsilon := j_\varepsilon * f$. Então,

- (i) $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|j\|_1 \|f\|_p$;
- (ii) $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (iii) se $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha j_\varepsilon) * f$.

Observação 2.2.2. Para as condições (i) e (ii) pode-se substituir \mathbb{R}^n por $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável. De fato, dada $f \in L^p(\Omega)$, considere \tilde{f} expressa por $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in \Omega$ e $\tilde{f}(x) = 0$ se $x \notin \Omega$. Então, $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e definindo $f_\varepsilon(x) = (j_\varepsilon * \tilde{f})(x)$, obtemos que

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|j\|_1 \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|j\|_1 \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Como $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para a condição (iii) ser satisfeita é necessário supor Ω aberto. Desta forma, podemos definir $C^\infty(\Omega)$. Logo, a condição (iii) é válida se $f \in L^p(\Omega)$ (considerando $f_\varepsilon = j_\varepsilon * \tilde{f}$).

Prova. (i) Por Young [2.2.4](#), temos que

$$\|f_\varepsilon\|_p = \|j_\varepsilon * f\|_p \leq \|j_\varepsilon\|_1 \|f\|_p = \|j\|_1 \|f\|_p.$$

(ii) Dado $\delta > 0$, queremos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|f_\varepsilon - f\|_p$ é menor que δ . Vejamos que é suficiente demonstrar os seguintes casos:

Caso 1: j possui suporte compacto.

De fato, para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$j_m(x) = c_m \chi_{B(0,m)}(x) j(x), \text{ onde } c_m = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(0,m)}(y) j(y) dy \right)^{-1}.$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}^n} j_m(x) dx = 1$ e $\text{supp}(j_m) \subset B[0, m]$. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $j_m(x) \rightarrow j(x)$, pois $c_m \rightarrow 1$. Como $c_m \rightarrow 1$, temos que $|j_m(x)| \leq |c_m| |j(x)| \leq 2|j(x)|$ para m suficientemente grande. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [2.1.3](#), existe $R_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|j^{R_1} - j\|_1 < \delta/\|f\|_p$. Note que $j_\varepsilon^{R_1}(x) := \varepsilon^{-n} j^{R_1}(x/\varepsilon)$ satisfaz $\text{supp}(j_\varepsilon^{R_1}) \subset B[0, R_1\varepsilon]$. Supondo demonstrado para as funções de suporte compacto, então existe $\varepsilon > 0$ com $\|j_\varepsilon^{R_1} * f - f\|_p < \delta$. Por Young [2.2.4](#), temos que

$$\begin{aligned} \|j_\varepsilon * f - f\|_p &\leq \|j_\varepsilon * f - j_\varepsilon^{R_1} * f\|_p + \|j_\varepsilon^{R_1} * f - f\|_p \\ &< \|j_\varepsilon - j_\varepsilon^{R_1}\|_1 \|f\|_p + \delta \\ &= \|j - j^{R_1}\|_1 \|f\|_p + \delta \\ &< 2\delta. \end{aligned}$$

Concluimos que é suficiente mostrar para j com suporte compacto.

Caso 2: f possui suporte compacto.

De fato, para cada $m \in \mathbb{N}$, defina $f_m(x) = \chi_{B(0,m)}(x) f(x)$. Logo, $\text{supp}(f_m) \subset B[0, m]$ e $g_m := |f_m - f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $g_m(x) \rightarrow 0$ e

$$|g_m(x)| = |f_m(x) - f(x)|^p = |(1 - \chi_{B(0,m)}(x))f(x)|^p \leq |f(x)|^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada [2.1.3](#), $g_m \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Daí, existe $R_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_{R_2}\|_1 < (\delta/\|j\|_1)^p$ e $\|g_{R_2}\|_1 < \delta^p$. Assim, $\|f^{R_2} - f\|_p < \delta/\|j\|_1$ e $\|f^{R_2} - f\|_p < \delta$, onde $f^{R_2} := f_{R_2}$. Supondo demonstrado o resultado para funções de suporte compacto, tem-se que existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\|j_\varepsilon * f^{R_2} - f^{R_2}\|_p < \delta$. Por Young [2.2.4](#), obtemos que

$$\begin{aligned} \|j_\varepsilon * f - f\|_p &\leq \|j_\varepsilon * f - j_\varepsilon * f^{R_2}\|_p + \|j_\varepsilon * f^{R_2} - f^{R_2}\|_p + \|f^{R_2} - f\|_p \\ &\leq \|j_\varepsilon\|_1 \|f - f^{R_2}\|_p + \|j_\varepsilon * f^{R_2} - f^{R_2}\|_p + \|f^{R_2} - f\|_p \\ &< \delta + \delta + \delta = 3\delta. \end{aligned}$$

Portanto podemos supor f com suporte compacto.

Caso 3: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

De fato, por Hölder [2.2.1](#),

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = \int_{\text{supp}(f)} |f(x)| \cdot 1 \, dx \leq \|f\|_{L^p(\text{supp}(f))} (\mu(\text{supp}(f)))^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

daí $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então podemos supor $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Caso 4: $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De fato, definindo, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_m(x) = \chi_{f^{-1}(B(0,m))}(x)f(x)$, obtemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $|\tilde{f}_m(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ e $|\tilde{f}_m - f|^p \leq |2f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada [2.1.3](#), existe $R_3 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\|f^{R_3} - f\|_p < \delta/\|j\|_1$ e $\|f^{R_3} - f\|_p < \delta$, onde $f^{R_3} := f_{R_3}$. Supondo mostrado para funções limitadas, existe $\varepsilon > 0$ com $\|j_\varepsilon * f_{R_3} - f_{R_3}\|_p < \delta$. Por Young [2.2.4](#),

$$\begin{aligned} \|j_\varepsilon * f - f\|_p &\leq \|j_\varepsilon * f - j_\varepsilon * f^{R_3}\|_p + \|j_\varepsilon * f^{R_3} - f^{R_3}\|_p + \|f^{R_3} - f\|_p \\ &\leq \|j_\varepsilon\|_1 \|f - f^{R_3}\|_p + \|j_\varepsilon * f^{R_3} - f^{R_3}\|_p + \|f^{R_3} - f\|_p \\ &< \delta + \delta + \delta = 3\delta. \end{aligned}$$

Concluimos que basta mostrar para $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Caso 5: $p = 1$.

De fato, veja que o Teorema da desigualdade de Young [2.2.4](#) e $j_\varepsilon, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ garantem que $j_\varepsilon * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Como $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, por Young [2.2.4](#), temos que $\|j_\varepsilon * f\|_\infty \leq \|j\|_1 \|f\|_\infty$. Pela desigualdade de Hölder [2.2.1](#), obtemos que

$$\begin{aligned} \|j_\varepsilon * f - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(j_\varepsilon * f)(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(j_\varepsilon * f)(x) - f(x)|^{p-1} |(j_\varepsilon * f)(x) - f(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\|j\|_1 \|f\|_\infty + \|f\|_\infty)^{p-1} |(j_\varepsilon * f)(x) - f(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\|j\|_1 \|f\|_\infty + \|f\|_\infty)^{\frac{p-1}{p}} \|j_\varepsilon * f - f\|_1^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Se $\|j_\varepsilon * f - f\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, então $\|j_\varepsilon * f - f\|_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Como queríamos verificar.

Caso 6: $f = \chi_H$ com H um bloco fechado de \mathbb{R}^n .

De fato, pelo Teorema [2.1.1](#) existe uma função simples F , que é combinação linear de funções características de retângulos fechados, tal que $\|F - f\| < \delta$. É suficiente mostrar que $\|j_\varepsilon * F - F\|_1 < \delta$, pois a desigualdade de Young [2.2.4](#) implica que

$$\|j_\varepsilon * f - f\|_1 \leq \|j_\varepsilon * f - j_\varepsilon * F\|_1 + \|j_\varepsilon * F - F\|_1 + \|F - f\|_1 < 3\delta.$$

Usando a propriedade de F , temos que

$$\|j_\varepsilon * F - F\|_1 = \left\| j_\varepsilon * \left(\sum_{i=1}^m c_i \chi_{H_i} \right) - \sum_{i=1}^m c_i \chi_{H_i} \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^m |c_i| \|j_\varepsilon * \chi_{H_i} - \chi_{H_i}\|_1,$$

Basta demonstrarmos que para todo retângulo fechado $H = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ temos que $\|j_\varepsilon * \chi_H - \chi_H\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Considere $H = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ um retângulo fechado e j com suporte numa bola $B(0, R)$. Assim j_ε possui suporte em $B(0, r)$, onde $r = R\varepsilon$, o qual podemos torná-lo suficientemente pequeno. Defina os conjuntos

$$A_- := \{x \in H : d(x, H^c) < r\} = H - \prod_{i=1}^n [a_i + r, b_i - r]$$

$$e A_+ := \{x \notin H : d(x, H) < r\} = \prod_{i=1}^n [a_i - r, b_i + r] - H$$

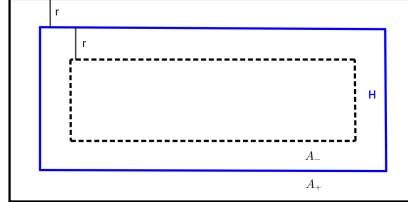


Figura 2.1: Conjuntos H , A_- e A_+ .

Escolhamos r pequeno de modo que

$$\lambda(A_- \dot{\cup} A_+) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 2r) - \prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 2r) < \frac{\delta}{\|j\|_1}.$$

Afirmação: $(j_\varepsilon * \chi_H)(x) - \chi_H(x) = 0$ para qualquer $x \in (A_- \cup A_+)^c = A_-^c \cap A_+^c$.

De fato, seja $x \in A_-^c \cap A_+^c$. Caso $x \in H$, a mudança de variável $z = \phi(y) = x - y$ satisfaz $B(0, r) \subset \phi(H)$. Pois, dado $a \in B(0, r)$, tem-se $\phi(x - a) = a$. Vejamos que $x - a \in H$. Caso contrário, o fato que $d(x, x - a) = \|a\| < r$ contradiria $x \notin A_-$. Como $\text{supp}(j_\varepsilon) \subset B(0, r) \subset \phi(H)$, o Teorema de Mudança de Variável [2.1.6](#) garante que

$$(j_\varepsilon * \chi_H)(x) - \chi_H(x) = \int_H j_\varepsilon(x - y) \, dy - 1 = \int_{\phi(H)} j_\varepsilon(z) \, dz - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Caso $x \notin H$, a mudança de variável $z = \phi(y) = x - y$ satisfaz $B(0, r) \cap \phi(H) = \emptyset$. Pois, se $a \in B(0, r)$ e $a = \phi(b) = x - b$ com $b \in H$, então $d(x, H) \leq d(x, b) = \|a\| < r$ contradiz o fato que $x \notin A_+$. Como $\text{supp}(j_\varepsilon) \cap \phi(H) \subset B(0, r) \cap \phi(H) = \emptyset$, o Teorema de Mudança de Variável [2.1.6](#), garante que

$$(j_\varepsilon * \chi_H)(x) - \chi_H(x) = \int_H j_\varepsilon(x - y) \, dy = \int_{\phi(H)} j_\varepsilon(z) \, dz = 0.$$

Ficando assim demonstrada a afirmação.

Portanto, usando a afirmação e que $\lambda(A_- \dot{\cup} A_+) < \delta / \|j\|_1$, temos que

$$\begin{aligned} \|j_\varepsilon * \chi_H - \chi_H\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(j_\varepsilon * \chi_H)(x) - \chi_H(x)| \, dx \\ &= \int_{A_- \cup A_+} |(j_\varepsilon * \chi_H)(x) - \chi_H(x)| \, dx \\ &= \int_{A_- \cup A_+} \left| \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) (\chi_H(y) - \chi_H(x)) \, dy \right| \, dx \\ &\leq \int_{A_- \cup A_+} \int_{\mathbb{R}^n} |j_\varepsilon(x-y)| \, 1 \, dy \, dx = \int_{A_- \cup A_+} \|j\|_1 \, dx \\ &< \|j\|_1 \frac{\delta}{\|j\|_1} = \delta. \end{aligned}$$

(iii) Verifiquemos primeiro a seguinte afirmação:

Afirmação: $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ implica $g := h * f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\partial g / \partial x_i = \partial h / \partial x_i * f$.

De fato, dados $i = 1, \dots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, mostraremos por meio do Corolário [2.1.3.2](#) que existe $\partial g / \partial x_i$ e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(x + te_i) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} * f \right)(x).$$

Sabe-se que $\partial h / \partial x_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, existe $M > 0$ satisfazendo

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \right| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Veja que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t}(x + te_i - y) f(y) \right| = \left| \chi_S(y) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x + te_i - y) f(y) \right| \leq M \chi_S(y) |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

onde S é o suporte de $\partial h / \partial x_i(x + te_i - y)$, o qual é compacto. $\chi_S |f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ devido a desigualdade de Hölder [2.2.1](#). Usando Teorema da Convergência Dominada [2.1.3.2](#), obtemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(x + te_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} [h(x + te_i - y) f(y)] \, dy = \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} * f \right)(x).$$

Agora, mostremos que $\partial g / \partial x_i$ é contínua. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, veja que

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x - y) f(y) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0 - y) f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x_i}(x-y)f(y) \right| \leq M\chi_{S_1}(y)f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde S_1 é o suporte de $\partial h/\partial x_i(x-y)$, o qual é compacto. Pelo Teorema da Convergência Dominada [2.1.3.1](#), obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x-y)f(y) \, dy = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0).$$

Isto conclui a demonstração da afirmação.

Mostremos que $f_\varepsilon \in C^m(\mathbb{R}^n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para $m = 1$ é imediato da afirmação que $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Supondo que $f_\varepsilon \in C^m(\mathbb{R}^n)$ (mostremos que $f_\varepsilon \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$), obtemos que para qualquer multi-índice α com $|\alpha| = m$ tem-se que $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha j_\varepsilon) * f$. Logo, pela afirmação, $f_\varepsilon \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ e $D^\beta f_\varepsilon = (D^\beta j_\varepsilon) * f$ para qualquer multi-índice β com $|\beta| = m + 1$. ■

Lema 2.2.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $K \subset \Omega$ compacto. Então existe $J_K \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq J_K(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$ e $J_K(x) = 1$ para todo $x \in K$.

Prova. Como K é compacto e Ω^c é fechado, então $d(K, \Omega^c) > 0$. Tomando $d = d(K, \Omega^c)/2$ tem-se

$$K_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq d \text{ para algum } y \in K\}$$

é compacto e $K \subset K_+ \subset \Omega$. Fixe $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp}(j) \subset B[0, 1]$, $0 \leq j(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) \, dx = 1$. Por exemplo,

$$j(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & , \text{ se } |x| < 1 \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

onde $C \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) \, dx = 1$. Com $\varepsilon = d$, defina $J_K(x) = (j_\varepsilon * \chi_{K_+})(x)$ com $x \in \mathbb{R}^n$. Logo

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\chi_{K_+}(y) \, dy = J_K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\chi_{K_+}(y) \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) \, dy = 1$$

e $J_K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois j_ε e χ_{K_+} tem suporte compacto e J_K é suave pela condição (iii) do Teorema 2.2.5. Fazendo $z = \phi(y) = x - y$, pelo Teorema de Mudança de Variável 2.1.6, tem-se que $\phi(K_+) = B[0, \varepsilon]$ e

$$J_K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x - y) \chi_{K_+}(y) \, dy = \int_{K_+} j_\varepsilon(x - y) \, dy = \int_{B[0, \varepsilon]} j_\varepsilon(z) \, dz = 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.6. (Aproximação por funções C_c^∞). Seja $f \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então existe uma sequência (f_n) em $C_c^\infty(\Omega)$ que converge para f em $L^p(\Omega)$.

Prova. Mostremos que existem $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ compactos tais que $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. De fato, dado $x \in \Omega$, existe $\delta_x > 0$ com $B[x, \delta_x] \subset \Omega$. Logo $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} B(x, \delta_x)$. Como Ω satisfaz a propriedade de Lindelöf, existe uma quantidade enumerável de bolas $B(x_n, \delta_{x_n})$ de modo que $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty B(x_n, \delta_{x_n})$. Assim, $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty B[x_n, \delta_{x_n}]$. Defina $K_m := \bigcup_{n=1}^m B[x_n, \delta_{x_n}]$, desde modo K_m é compacto para qualquer $m \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{m=1}^\infty K_m$ e (K_m) forma uma sequência crescente.

Definindo $g_m = J_{K_m}$, pelo lema anterior, obtemos que $g_m \in C_c^\infty(\Omega)$ e $g_m(x) \in [0, 1]$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \Omega$. Além disso, para cada $x \in \Omega$, $g_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$. Pelo Teorema de aproximações por funções C^∞ 2.2.5, existe uma sequência (\tilde{f}_m) de funções suaves tal que $\tilde{f}_m \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Definindo $f_m(x) = g_m(x)\tilde{f}_m(x)$, obtemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $f_m \in C_c^\infty(\Omega)$ e

$$\|f_m - f\|_p = \|g_m \tilde{f}_m - f\|_p \leq \|g_m \tilde{f}_m - g_m f\|_p + \|g_m f - f\|_p = \|\tilde{f}_m - f\|_p + \|g_m f - f\|_p.$$

Como $\|\tilde{f}_m - f\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, basta mostrar que $\|g_m f - f\|_p \rightarrow 0$. Note que, para cada $x \in \Omega$, $|g_m(x)f(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$ e

$$|g_m(x)f(x) - f(x)|^p = |g_m(x) - 1|^p |f(x)|^p \leq |f(x)|^p, \quad \forall x \in \Omega.$$

Como $|f|^p \in L^1(\Omega)$, pelo Teorema da Convergência Dominada 2.1.3, temos que $\|g_m f - f\|_p \rightarrow 0$. Portanto, $f_m \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. ■

2.3 Transformada de Fourier

Definição 2.3.1. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A *transformada de Fourier de f* , denotada por \widehat{f} ou $\mathcal{F}(f)$, é a função dada por

$$\mathcal{F}(f)(k) = \widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} f(x) \, dx, \quad (2.4)$$

onde $kx = \sum_{i=1}^n k_i x_i$.

Proposição 2.3.1. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $k, h \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$. Então

- (a) a função $f \mapsto \widehat{f}$ é linear;
- (b) $\widehat{\tau_h f}(k) = e^{-2\pi i k h} \widehat{f}(k)$;
- (c) $\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda k)$;
- (d) $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$;
- (e) \widehat{f} é uma função contínua;
- (f) $\widehat{(f * g)}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k)$.

Onde τ_h é o *operador translação*, $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$, e δ_λ é o *operador dilatação* $(\delta_\lambda f)(x) = f(x/\lambda)$.

Prova.

- (a) Imediato da definição.
- (b) Dado $k \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\widehat{\tau_h f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} \tau_h f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k x} f(x - h) \cdot 1 \, dx.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variável [2.1.6](#), com $y = \phi(x) = x - h$, obtemos que

$$\widehat{\tau_h f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k(y+h)} f(y) \, dy = e^{-2\pi i k h} \widehat{f}(k).$$

(c) Dado $k \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} \delta_\lambda f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \lambda^n \frac{1}{\lambda^n} \, dx.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variável [2.1.6](#), com $y = \phi(x) = x/\lambda$, obtemos que $|\det \phi'(x)| = 1/\lambda^n$ e

$$\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n e^{-2\pi i k \lambda y} f(y) \, dy = \lambda^n \widehat{f}(\lambda k).$$

(d) Dado $k \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} f(x) \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i k x} f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = \|f\|_1.$$

Logo, $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(e) Considere uma sequência (k_n) em \mathbb{R}^n convergente para $k \in \mathbb{R}^n$. Note que $|e^{-2\pi i k_n x} f(x)| \leq |f(x)|$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [2.1.3](#), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(k_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k_n x} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} f(x) \, dx = \widehat{f}(k).$$

(f) Dado $k \in \mathbb{R}^n$, pelo Teorema de Fubini [2.1.5](#), tem-se

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} (f * g)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} f(x - y) g(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} \tau_y f(x) \, dx g(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_y f}(k) g(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k y} \widehat{f}(k) g(y) \, dy = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k). \end{aligned}$$

■

Vejamos agora uma importante função para os estudos de transformada de Fourier.

Teorema 2.3.1. Para $\lambda > 0$, denote g_λ a função Gaussiana, em \mathbb{R}^n , dada por

$$g_\lambda(x) = \exp[-\pi\lambda|x|^2] \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Então $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\|g_\lambda\|_1 = \lambda^{-\frac{n}{2}}$ e

$$\widehat{g}_\lambda(k) = \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp[-\pi|k|^2/\lambda]. \quad (2.5)$$

Prova. Primeiramente mostremos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.6)$$

De fato, fazendo $y = \sqrt{\pi\lambda}x$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy. \quad (2.7)$$

Usando coordenadas polares $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, obtemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2-z^2} dydz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \frac{1}{-2} \left(e^{-r^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Substituindo isso em (2.7) obtemos (2.6). Portanto,

$$\begin{aligned} \|g_\lambda\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g_\lambda(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\pi\lambda \sum_{j=1}^n x_j^2\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \exp(-\pi\lambda x_j^2) dx \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi\lambda x_j^2) dx_j = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \lambda^{-\frac{n}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos (2.5). Sem perda de generalidade, podemos supor $\lambda = 1$, pois

$$\widehat{g}_\lambda(k) = \widehat{\delta_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}} g_1(k) = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} \widehat{g}_1\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}k\right) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|k|^2}{\lambda}}.$$

Também podemos supor $n = 1$, pois

$$\begin{aligned} \widehat{g}_1(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k x} g_1(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n (e^{-2\pi i k_j x_j}) \prod_{j=1}^n (e^{-\pi x_j^2}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n (e^{-2\pi i k_j x_j} e^{-\pi x_j^2}) dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k_j x_j} e^{-\pi x_j^2} dx_j = \prod_{j=1}^n e^{-\pi k_j^2} = e^{-\pi|k|^2}. \end{aligned}$$

Note que

$$\widehat{g}_1(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k x} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(2ikx+x^2)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi((x+ik)^2+k^2)} dx = g_1(k)f(k),$$

onde

$$f(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+ik)^2} dx.$$

Vamos utilizar o Corolário [2.1.3.2](#), para isto mostremos primeiro que dado $k \in \mathbb{R}$, fixando $[-M, M] \ni k$, existe g integrável tal que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial k}(x, k) \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \in [-M, M],$$

onde $h(x, k) = \exp[-\pi(x + ik)^2]$. Note que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial k}(x, k) \right| &= \left| e^{-\pi(x+ik)^2} \cdot (-2\pi(x+ik)i) \right| \\ &\leq 2\pi|x| \left| e^{-\pi(x^2-k^2+2xki)} \right| + 2\pi|k| \left| e^{-\pi(x^2-k^2+2xki)} \right| \\ &= 2\pi \left| x e^{-\pi(x^2-k^2)} \right| + 2\pi|k| \left| x e^{-\pi(x^2-k^2)} \right| \\ &= 2\pi e^{\pi k^2} \left| x e^{-\pi x^2} \right| + 2\pi|k| e^{\pi k^2} e^{-\pi x^2} \\ &\leq 2\pi e^{\pi M^2} \left| x e^{-\pi x^2} \right| + 2\pi M e^{\pi M^2} e^{-\pi x^2} \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Esta função está em $L^1(\mathbb{R})$ devido à primeira parte da prova que garante que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ e ao fato que, fazendo $u = -\pi x^2$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| x e^{-\pi x^2} \right| dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\pi x^2} dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{\pi} e^u \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{\pi}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([2.1.3.2](#)), tem-se, para qualquer $k \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned} \frac{df}{dk}(k) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dk} \left(e^{-\pi(x+ik)^2} \right) dx = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+ik)^2} (x+ik) dx \\ &= i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\pi(x+ik)^2} \right) dx = i e^{-\pi(x+ik)^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, f é constante. Como provado na primeira parte,

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

logo $f \equiv 1$. Portanto, $\widehat{g}_1(k) = g_1(k)$. ■

Teorema 2.3.2. (Plancherel). Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, vale a fórmula de Plancherel

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (2.8)$$

e a fórmula de Parseval

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \, dk = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle. \quad (2.9)$$

Prova. Considere $g_\varepsilon(k)$ uma função gaussiana. Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)|g_\varepsilon(k) \, dk \leq \|\widehat{f}\|_\infty^2 \|g_\varepsilon\|_1 < \infty,$$

então

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_2^2 &\stackrel{(1)}{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)|^2 g_\varepsilon(k) \, dk = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{f}(k)} \widehat{f}(k) g_\varepsilon(k) \, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k x} \overline{f(x)} \, dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k y} f(y) \, dy g_\varepsilon(k) \, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{-2\pi i k(y-x)} g_\varepsilon(k) \overline{f(y)} f(x) \, dx dy dk \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k(y-x)} g_\varepsilon(k) \, dk \overline{f(y)} f(x) \, dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{g}_\varepsilon(y-x) \overline{f(y)} f(x) \, dy dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}\right] \overline{f(y)} f(x) \, dy dx \\ &\stackrel{(4)}{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} f(x) \, dx = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

(1) é devido ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [2.1.3.1](#) usando que

$$\left| |\widehat{f}(k)|^2 g_\varepsilon(k) \right| \leq \|\widehat{f}\|_\infty^2 g_1(k) \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ para qualquer } |\varepsilon| \leq 1.$$

(2) é devido ao Teorema de Fubini [2.1.5](#) e que

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} \left| e^{-2\pi i k(y-x)} g_\varepsilon(k) \overline{f(y)} f(x) \right| \, dk dy dx = \|g_\varepsilon\|_1 \|f\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

(3) é devido ao Teorema [2.3.1](#).

(4) primeiramente, mostremos que

$$\varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon} \right] f(y) \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

De fato, como $\int_{\mathbb{R}^n} g_1(x) \, dx = 1$, pelo Teorema [2.2.5](#), fazendo $j = g_1$ obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} g_1 \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) f(y) \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Substituindo ε por $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos que

$$f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon} \right] f(y) \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Resta justificar que $\langle f_\varepsilon, f \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, f \rangle$. Pela desigualdade de Hölder [2.2.1](#), temos que

$$|\langle f_\varepsilon, f \rangle - \langle f, f \rangle| = |\langle f_\varepsilon - f, f \rangle| \leq \|f_\varepsilon - f\|_2 \|f\|_2.$$

Com isto e o fato que $\|f_\varepsilon - f\|_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, concluímos a fórmula de Plancherel. Para concluir a fórmula de Parseval basta usar a fórmula de Plancherel e a identidade de polarização para \mathbb{C} [\(1.6\)](#) ou para \mathbb{R} [\(1.5\)](#). ■

Observação 2.3.1. Podemos definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, da seguinte maneira:

Pelo Teorema de Plancherel [\(2.3.2\)](#) $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, já que $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ de modo que dado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema [\(2.2.6\)](#), existe (f_m) sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_m \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, pela fórmula de Plancherel [\(2.3.2\)](#),

$$\|\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(f_p)\|_2 = \|f_m - f_p\|_2 \quad \forall m, p \in \mathbb{N},$$

então $(\mathcal{F}(f_m))$ é Cauchy. Pela completude de $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(f_m) \rightarrow h$ para algum $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\mathcal{F}_2(f) := h$.

\mathcal{F}_2 em $L^2(\mathbb{R}^n)$ está bem definida, pois sejam (f_m) e (g_m) seqüências em $L^1(\mathbb{R}^n)$ com $f_m, g_m \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, por Plancherel,

$$\|\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(g_m)\|_2 = \|f_m - g_m\|_2 \leq \|f_m - f\|_2 + \|f - g_m\|_2.$$

Portanto, $\mathcal{F}(f_m) - \mathcal{F}(g_m) \rightarrow 0$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, daí $\mathcal{F}(f_m)$ e $\mathcal{F}(g_m)$ convergem para a mesma função.

Para $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é válido as fórmulas de Plancherel (2.8) e Parseval (2.9), pois, dado $f_m \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\mathcal{F}_2(f)\|_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}(f_m)\|_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_2 = \|f\|_2.$$

Com isto e a identidade de polarização ((1.5) no caso real e (1.6) no caso complexo), temos a identidade de Parseval para \mathcal{F}_2 .

Para o próximo resultado denotaremos $\widehat{f} = \mathcal{F}_2(f)$.

Teorema 2.3.3. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, usando a definição da transformada de fourier no $L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$f^\vee(k) := \widehat{f}(-k).$$

Então $(\widehat{f})^\vee = f$.

Prova. Para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\lambda(y-x) f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \, dk \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $g_\lambda(k) = \exp[-\lambda\pi|k|^2]$ e, pelo Teorema 2.3.1, $\widehat{g}_\lambda(y-x) = \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\pi \frac{|x-y|^2}{\lambda}\right]$.

Primeiramente mostremos para $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \, dk &= \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k y} f(y) \, dy e^{2\pi i k x} \, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k(y-x)} g_\lambda(k) f(y) \, dy \, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i k(y-x)} \, dk f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\lambda(y-x) f(y) \, dy, \end{aligned}$$

podemos comutar as integrais devido ao Teorema de Tonelli-Fubini e o Teorema (2.3.1), pois, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i k(y-x)} g_\lambda(k) f(y)| \, dy dk = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \, dk \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy < \infty.$$

Mostremos para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 2.2.6 existe uma seqüência (f_m) em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_m \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como demonstrado anteriormente, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\lambda(y-x) f_m(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \widehat{f}_m(k) e^{2\pi i k x} \, dk \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Pela fórmula de Plancherel, tem-se $\|\widehat{f}_m - \widehat{f}\|_2 = \|f_m - f\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Note que, pela desigualdade de Hölder 2.2.1,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\lambda(y-x) (f_m(y) - f(y)) \, dy \right| \leq \|g_\lambda\|_2 \|f_m - f\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

e

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) e^{2\pi i k x} (\widehat{f}_m(k) - \widehat{f}(k)) \, dk \right| \leq \|g_\lambda(k) e^{2\pi i k x}\|_2 \|\widehat{f}_m - \widehat{f}\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

usando isto em (2.10) temos que

$$I_\lambda(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_\lambda(y-x) f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \, dk =: J_\lambda(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

Pelo Teorema 2.3.1 $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_1(y-x) \, dy = 1$, logo pelo Teorema 2.2.5

$$\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Substituindo ε por $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, obtemos que

$$I_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{\pi|y-x|^2}{\varepsilon}\right] f(y) \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n),$$

logo $I_\lambda \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Por outro lado, $g_\lambda \widehat{f} \rightarrow \widehat{f}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ quando $\lambda \rightarrow 0$, pois, como $|g_\lambda(y) \widehat{f}(y) - \widehat{f}(y)|^2 \leq |\widehat{f}(y)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 2.1.3.1 garante que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_\lambda(y) \widehat{f}(y) - \widehat{f}(y)|^2 \, dy \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Pela fórmula de Plancherel (2.3.2), temos que

$$\|(g_\lambda \widehat{f})^\vee - (\widehat{f})^\vee\|_2 = \|(g_\lambda \widehat{f} - \widehat{f})^\vee\|_2 = \|(g_\lambda \widehat{f} - \widehat{f})^\wedge\|_2 = \|g_\lambda \widehat{f} - \widehat{f}\|_2.$$

O fato que $\|h^\vee\|_2 = \|\widehat{h}\|_2$ é imediato da definição de h^\vee . Logo $(g_\lambda \widehat{f})^\vee \rightarrow (\widehat{f})^\vee$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ quando $\lambda \rightarrow 0$, daí $J_\lambda \rightarrow (\widehat{f})^\vee$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Portanto, fazendo $\lambda \rightarrow 0$ em (2.11), obtemos que $f = (\widehat{f})^\vee$. ■

CAPÍTULO 3

MOTIVAÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA ESPECTRAL

Neste capítulo utilizamos essencialmente as notas de aulas de Kowalski [\[4\]](#) para incentivar o estudo da Teoria Espectral.

3.1 O que é Teoria Espectral?

O grande objetivo da Teoria Espectral é classificar todos os operadores lineares definidos em espaços de Banach. Porém no contexto geral, em espaços de Banach, a Teoria Espectral não está bem entendida nos dias de hoje. Por causa disto, desenvolveremos a teoria em espaços de Hilbert devido à simplicidade destes espaços quando comparados aos espaços de Banach.

Uma boa maneira de dizer que dois operadores lineares $T_1, T_2 : H_1 \rightarrow H_2$ entre espaços de Hilbert tem a mesma “classificação” é se existem operadores invertíveis

$U_1 : H_1 \rightarrow H_1$ e $U_2 : H_2 \rightarrow H_2$ tais que

$$T_2 \circ U_1 = U_2 \circ T_1. \quad (3.1)$$

Neste caso T_1 e T_2 possuirão propriedades semelhantes. Em dimensão finita os operadores U_1 e U_2 correspondem a mudança de base, porém esta interpretação não vale dimensões infinitas pois as bases em dimensões infinitas não possuem as mesmas propriedades que as bases em dimensões finitas.

Pelos estudos da álgebra linear, se considerarmos em dimensão finita então este problema de classificar operadores $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineares (para $n \in \mathbb{N}$) está resolvido devido a teoria de autovalor, autoespaço e polinômio característico. Relembramos algumas ideias sobre isto. Em dimensão finita encontramos os autovalores devido a seguinte ideia:

$$\begin{aligned} T(v) = \lambda v \text{ para algum } v \in H &\Leftrightarrow (\lambda I - T)(v) = 0 \text{ para algum } v \in H \\ &\Leftrightarrow (\lambda I - T) \text{ não é injetor} \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\lambda I - T) \text{ não é invertível} \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \det[\lambda I - T] = 0 \end{aligned}$$

e por fim encontramos raízes de um polinômio de grau n e estas raízes são os autovalores de T . Em dimensão infinita este argumento não pode ser utilizado devido à equivalência (1) não ser verdade em dimensão infinita e a equivalência (2) não faz sentido, pois não existe representação matricial de $[\lambda I - T]$ e a função determinante no caso de dimensão infinita. Portanto, no caso de dimensão infinita, não podemos encontrar o espectro de T (o conjunto dos λ tais que $(\lambda I - T)$ não é invertível) desta forma.

Para dimensão finita, se o operador T tiver certas propriedades no seu adjunto (por exemplo: se T for normal, auto-adjunto, positivo ou unitário), então obtemos uma base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de autovetores de T com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

(contando com multiplicidade) tais que

$$T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}. \quad (3.2)$$

Isto corresponde a uma representação matricial diagonal. Retirando a hipótese sobre o adjunto não é válido, por exemplo $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, y)$ é linear e não possui base de autovetores. Portanto é aceitável pedirmos propriedades sobre T^* para estudar teoria espectral.

Obtemos uma representação de (H, T) da seguinte maneira: defina $U : H \rightarrow \mathbb{C}^n$ linear tal que, para cada $i = 1, \dots, n$, $U(e_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima coordenada. Segue que $\|U(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in H$ e que U é bijetora. Defina $\tilde{T} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ linear com $\tilde{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \lambda_1, \dots, \alpha_n \lambda_n)$, por (3.2) temos que

$$\tilde{T} \circ U = U \circ T.$$

Que é um caso de (3.1). Portanto, para cada H espaço de Hilbert de dimensão finita e $T : H \rightarrow H$ um operador normal encontramos $\tilde{T} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ linear tal que T é equivalente a \tilde{T} no sentido de (3.1).

Respondamos agora um dos principais questionamentos para o estudo de algum tema: por que estudar este tema? No nosso caso a pergunta seria equivalente à: por que classificar operadores definidos em espaços de Hilbert? A motivação básica é encontrar a solução de alguma equação linear em espaços de Hilbert do tipo

$$T(v) = w \text{ com } T : H_1 \rightarrow H_2.$$

Para isto se obtivermos um “operador simples” $\tilde{T} : H_1 \rightarrow H_2$ tal que

$$T \circ U_1 = U_2 \circ \tilde{T}$$

para alguns $U_1 : H_1 \rightarrow H_1$ e $U_2 : H_2 \rightarrow H_2$ invertíveis, então

$$T(v) = w \text{ se, e somente se, } \tilde{T}(\tilde{v}) = \tilde{w},$$

onde $v = U_1(\tilde{v})$ e $w = U_2(\tilde{w})$. Vejamos alguns casos que serão discutidos nesse trabalho que utilizaram essa ideia:

1. No Exemplo [3.2.5](#) veremos um resultado usado para resolver uma equação do tipo $\Delta f = g$. Esta ideia resume-se a aplicar a transformada de Fourier obtendo, por [\(3.4\)](#),

$$(M \circ \mathcal{F}_2)(f) = (\mathcal{F}_2 \circ \Delta)(f) = \mathcal{F}_2(g).$$

Logo

$$\mathcal{F}_2(f) = M^{-1}\mathcal{F}_2(g).$$

Portanto,

$$f = \mathcal{F}_2^{-1}M^{-1}\mathcal{F}_2(g).$$

Devemos ter cuidado devido aos fatos: para inverter M a função que é multiplicada não pode assumir valores nulos, $M^{-1}\mathcal{F}_2(g)$ pode não estar em L^2 e a expressão a qual encontramos para f garante, a princípio, que f está em L^2 e não necessariamente em C^2 .

2. Na equação [\(4.4\)](#) veremos um resultado usado para resolver uma equação do tipo $T(v) = w$ com $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjunto. De fato, como veremos na equação [\(4.4\)](#), existem $g \in \ell^\infty$ e $U : H \rightarrow H$ unitário tais que

$$U \circ T = M_g \circ U.$$

Aplicando U em $T(v) = w$ obtem-se que

$$(M_g \circ U)(v) = (U \circ T)(v) = U(w).$$

Logo

$$U(v) = M_g^{-1}U(w).$$

Portanto,

$$v = U^{-1}M_g^{-1}U(w).$$

De forma análoga ao anterior devemos ter cuidado aos fatos: para inverter M_g a função g não pode assumir valores nulos e $M_g^{-1}U(w)$ pode não pertencer a L^2 .

3.2 Alguns Exemplos

Nesta seção veremos importantes exemplos para compreender e motivar o estudo da Teoria Espectral.

Exemplo 3.2.1. (Operador Multiplicação). Sejam (X, μ) um espaço de medida finita (isto é, $\mu(X) < +\infty$) e $g \in L^\infty(X, \mu)$. Definindo o operador

$$M_g : \begin{cases} L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu) \\ f \mapsto gf \end{cases}$$

obtemos que

$$\int_X |M_g(f)(x)|^2 d\mu(x) = \int_X |g(x)f(x)|^2 d\mu(x) \leq \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

Segue que M_g está bem definida e é contínua com $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$. Além disso temos que

$$\langle M_g(f_1), f_2 \rangle = \int_X g(x)f_1(x)\overline{f_2(x)} d\mu = \int_X f_1(x)\overline{g(x)f_2(x)} d\mu = \langle f_1, M_{\bar{g}}(f_2) \rangle,$$

para quaisquer $f_1, f_2 \in L^2(X, \mu)$, e disto segue que o operador adjunto de M_g é dado por

$$M_g^* = M_{\bar{g}}.$$

Segue facilmente que M_g é normal e é auto-adjunto se, e somente se, g é uma função real para quase toda parte (q.t.p.).

O seguinte resultado diz que não podemos definir operadores Multiplicação de L^2 em L^2 para $g \notin L^\infty$.

Lema 3.2.1. Sejam (X, μ) um espaço de medida finita e $g : X \rightarrow \mathbb{C}$. Se $\varphi \mapsto g\varphi$ é uma função de $L^2(X, \mu)$ para $L^2(X, \mu)$, então $g \in L^\infty(X)$.

Prova. Considere $T : \varphi \mapsto g\varphi$, tomando $\varphi \equiv 1$ temos que $g = T\varphi \in L^2(X, \mu)$.

Afirmação: T é contínuo.

De fato, utilizaremos o Teorema do Gráfico Fechado [1.2.3](#). Suponha $(\varphi_n, g\varphi_n)$ uma sequência convergente no gráfico de T , então $\varphi_n \rightarrow \varphi$ e $g\varphi_n \rightarrow \psi$ em $L^2(X, \mu)$. Como $\mu(X) < \infty$, obtemos que $g\varphi_n \rightarrow \psi$ em $L^1(X, \mu)$. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \int_X |g\varphi_n - g\varphi| \, d\mu &\leq \left(\int_X |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X |\varphi_n - \varphi|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|g\|_2 \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_2 \end{aligned}$$

logo $g\varphi_n \rightarrow g\varphi$ em $L^1(X, \mu)$, assim $g\varphi = \psi$ e pelo Teorema do Gráfico Fechado concluímos a afirmação.

Pela afirmação, existe $C > 0$ tal que

$$\|g\varphi\|^2 \leq C\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in L^2(X, \mu).$$

Tomando φ a função característica do conjunto

$$X_A = \{x \in X; |g(x)| \geq A\},$$

com $A > 0$ arbitrário, e usando a continuidade de T obtemos que

$$A^2\mu(X_A) \leq \int_X |g(x)|^2 |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) \leq C \int_X |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) = C\mu(X_A).$$

Fixando $A_0 > 0$ tal que $A_0^2 > C$ obtemos que $\mu(X_{A_0}) = 0$. Portanto $g \in L^\infty(X, \mu)$. ■

Exemplo 3.2.2. (Operadores Hilbert-Schmidt). Considere (X, μ) um espaço de medida e uma função

$$k : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que $k \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, a qual é conhecida por *função núcleo*. Defina o operador

$$\begin{cases} L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu) \\ f \mapsto T_k(f) \end{cases}$$

onde

$$T_k(f) = \int_X k(x, y) f(y) \, d\mu(y).$$

É conhecido que T_k é um operador compacto. Mostremos que o seu adjunto é dado por $T_k^* = T_{\tilde{k}}$, onde $\tilde{k}(x, y) = \overline{k(y, x)}$. De fato, dados $f, g \in L^2(X, \mu)$ temos que

$$\begin{aligned} \langle T_k(f), g \rangle &= \int_X T_k(f)(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x) = \int_X \left(\int_X k(x, y) f(y) \, d\mu(y) \right) \overline{g(x)} \, d\mu(x) \\ &= \int_X \int_X f(y) k(x, y) \overline{g(x)} \, d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \int_X f(y) k(x, y) \overline{g(x)} \, d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_X f(y) \left(\int_X \overline{k(x, y) g(x)} \, d\mu(x) \right) \, d\mu(y) \\ &= \int_X f(y) \overline{\int_X \tilde{k}(y, x) g(x) \, d\mu(x)} \, d\mu(y) = \int_X f(y) \overline{T_{\tilde{k}}(g)(y)} \, d\mu(y) \\ &= \langle f, T_{\tilde{k}}(g) \rangle \end{aligned}$$

em particular, T_k é auto-adjunto se k é simétrico e $k(X \times X) \subseteq \mathbb{R}$ q.t.p.

Exemplo 3.2.3. (Operador unitário associado com uma transformação que preserva medida). Sejam (X, μ) um espaço de medida finita e $\phi : X \rightarrow X$ uma transformação bijetora que preserva a medida μ . Considere o operador linear U_ϕ associado a ϕ definido por

$$U_\phi \begin{cases} L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu) \\ f \mapsto f \circ \phi. \end{cases}$$

Vejamos que U_ϕ está bem definido e é isometria. Dado $f \in L^2(X, \mu)$, pelo Teorema [2.1.7](#), obtemos:

$$\int_X |(U_\phi f)(x)|^2 \, d\mu(x) = \int_X |f(\phi(x))|^2 \, d\mu(x) = \int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x).$$

Afirmamos que U_ϕ é unitário (isto é, $U_\phi^* = U_\phi^{-1}$). De fato, dados $f, g \in L^2(X, \mu)$, pelo Teorema [2.1.7](#), temos que

$$\begin{aligned} \langle U_\phi f, g \rangle &= \int_X (U_\phi f)(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x) = \int_X f(\phi(x)) \overline{g(x)} \, d\mu(x) \\ &= \int_X f(\phi(\phi^{-1}(x))) \overline{g(\phi^{-1}(x))} \, d\mu(x) = \int_X f(x) \overline{g(\phi^{-1}(x))} \, d\mu(x) \\ &= \int_X f(x) \overline{U_{\phi^{-1}} g(x)} \, d\mu(x) = \langle f, U_{\phi^{-1}} g \rangle. \end{aligned}$$

Veja também que $U_{\phi^{-1}} = U_\phi^{-1}$, pois

$$(U_\phi \circ U_{\phi^{-1}})(f) = U_\phi(U_{\phi^{-1}}(f)) = f \circ \phi^{-1} \circ \phi = f.$$

Destes fatos seguem que $U_\phi^* = U_{\phi^{-1}}$.

Vejam agora alguns exemplos de funções que preservam medida:

- (1) (Deslocamento de Bernoulli). Considere $X = \mathcal{F}(\mathbb{Z}; \{0, 1\})$ que é o conjunto de todas as funções de \mathbb{Z} em $\{0, 1\}$, ou seja, é o espaço das sequências duplamente infinitas $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ com $x_n \in \{0, 1\}$ munido com a medida μ que satisfaz a seguinte propriedade: fixados $k \geq 1$, $\{n_1, \dots, n_k\} \in \mathbb{Z}$ e $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, obtemos que

$$\mu(\{(x_n) \mid x_{n_j} = \varepsilon_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}\}) = \frac{1}{2^k}$$

Denotaremos $A_{n_1, \dots, n_k}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} = \{(x_n) \mid x_{n_j} = \varepsilon_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}\}$, por exemplo:

$$A_0^0 = \{(\dots, x_{-2}, x_{-1}, 0, x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

$$A_0^1 = \{(\dots, x_{-2}, x_{-1}, 1, x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

$$A_{-2, 1, 2}^{1, 0, 1} = \{(\dots, 1, x_{-1}, x_0, 0, 1, \dots) \mid x_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{Z} - \{-2, 1, 2\}\}.$$

Assim $\mu(A_0^0) = \mu(A_0^1) = \frac{1}{2}$ e como $X = A_0^0 \dot{\cup} A_0^1$, temos que $\mu(X) = 1$.

A função

$$B \begin{cases} X \rightarrow X \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

é bijetora e preserva a medida μ , pois a inversa de B é

$$B^{-1} \begin{cases} X \rightarrow X \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Já que, $B(B^{-1}((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})) = (x_{n-1+1})_{n \in \mathbb{Z}} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $B^{-1}(B((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})) = (x_{n+1-1})_{n \in \mathbb{Z}} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Por fim, vejamos que B preserva μ . De fato, dado $A_{n_1, \dots, n_k}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} \subset \mathcal{F}(\mathbb{Z}; \{0, 1\})$, temos que

$$\mu(\phi^{-1}(A_{n_1, \dots, n_k}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k})) = \mu(A_{n_1-1, \dots, n_k-1}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}) = \frac{1}{2^k} = \mu(A_{n_1, \dots, n_k}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}).$$

- (2) (As rotações num círculo). Considere $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ círculo unitário e a seguinte função para um $\theta \in \mathbb{R}$ fixado

$$R_\theta \begin{cases} S^1 \rightarrow S^1 \\ z \mapsto e^{i\theta} z. \end{cases}$$

Construiremos uma medida em S^1 a partir da medida de \mathbb{R} . Note que $g : [0, 1) \rightarrow S^1$ tal que $g(x) = e^{2i\pi x}$ é bijeção e definindo z tal que

$$z(E) = \mu(g^{-1}(E))$$

para todo $E \subset S^1$ com $g^{-1}(E)$ mensurável em $[0, 1)$ temos que (S^1, z) é um espaço de medida e g preserva as medidas z e μ . O Teorema [2.1.7](#) nos diz que dada uma função $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, então

$$\int_{S^1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{2i\pi t}) dt.$$

Note que R_θ é bijetora (pois $R_\theta \circ R_{-\theta} = I = R_{-\theta} \circ R_\theta$) e preserva a medida z .

De fato, dado $E \subset S^1$ mensurável, temos que

$$\begin{aligned} z(R_\theta(E)) &= \int_{S^1} \chi_{R_\theta(E)}(z) \, dz = \int_0^1 \chi_E(e^{i(2\pi t - \theta)}) \, dt = \int_{-\frac{\theta}{2\pi}}^{1 - \frac{\theta}{2\pi}} \chi_E(e^{2\pi i s}) \, ds \\ &= \int_{-\frac{\theta}{2\pi}}^0 \chi_E(e^{2\pi i s}) \, ds + \int_0^1 \chi_E(e^{2\pi i s}) \, ds + \int_1^{1 - \frac{\theta}{2\pi}} \chi_E(e^{2\pi i s}) \, ds \\ &= \int_0^1 \chi_E(g(s)) \, ds = \int_0^1 \chi_{g^{-1}(E)}(s) \, ds = \mu(g^{-1}(E)) = z(E). \end{aligned}$$

Pois

$$\int_1^{1 - \frac{\theta}{2\pi}} \chi_E(e^{2\pi i s}) \, ds = \int_0^{-\frac{\theta}{2\pi}} \chi_E(e^{2\pi i(r-1)}) \, dr = - \int_{-\frac{\theta}{2\pi}}^0 \chi_E(e^{2\pi i r}) \, dr.$$

Para as demonstrações das propriedades da transformada de Fourier, consulte a secção 3 do capítulo 2 deste trabalho.

Exemplo 3.2.4. (Transformada de Fourier). Seja n inteiro positivo. A *transformada de Fourier* é definida da seguinte forma

$$\mathcal{F} \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^n, dx) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n, dx) \\ f \mapsto (t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2i\pi x t} \, dx) \end{cases}$$

a qual está definida entre espaços de Banach e é linear. Para simplificar notação, estamos denotando o produto interno canônico do \mathbb{R}^n de x por t simplesmente por xt . Note que dado $t \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathcal{F}(f)(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2i\pi x t} \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-2i\pi x t}| \, dx = \|f\|_1.$$

Desta forma \mathcal{F} está bem definida, é contínua e $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. Infelizmente \mathcal{F} não está definida num espaço de Hilbert, porém podemos redefini-la no espaço L^2 da seguinte maneira: pela identidade de Parseval (2.9) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(t) \overline{\mathcal{F}(g)(t)} \, dt$$

para qualquer $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) =: L$. Donde, fazendo $g = f$, obtemos que

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(t)|^2 dt = \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$$

para qualquer $f \in L$. Logo $\mathcal{F}|_L : L \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria na métrica do L^2 , assim podemos estender de forma única para todo o espaço L^2 (para mais detalhes veja a Observação [2.3.1](#)), obtendo uma isometria linear

$$\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, dx),$$

além disso, pelo Teorema [2.3.3](#), essa extensão é bijeção com inversa dada por

$$\mathcal{F}_2^{-1} \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^n, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, dx) \\ f \mapsto \mathcal{F}_2(f)(-t). \end{cases}$$

Veja que [\(2.9\)](#) nos diz que \mathcal{F}_2 é unitária, ou seja, $\mathcal{F}_2^* = \mathcal{F}_2^{-1}$.

Exemplo 3.2.5. (Operador Laplaciano). Considere o operador linear

$$\Delta : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

com $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Sabemos que Δ não está definido em L^2 , mas considerando $\Delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e usando o produto interno de L^2 obtemos que dados $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta f_1, f_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) \right) \overline{f_2(x, y)} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) \overline{f_2(x, y)} dx dy + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) \overline{f_2(x, y)} dx dy. \end{aligned}$$

Denote

$$A = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) \overline{f_2(x, y)} dx dy \text{ e } B = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) \overline{f_2(x, y)} dx dy.$$

Afirmação: Dados $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ então

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) g_2(x, y) dx = - \int_{\mathbb{R}} g_1(x, y) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

De fato, note que para qualquer $y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) g_2(x, y) \, dx &= \lim_{r_1, r_2 \rightarrow +\infty} \int_{-r_1}^{r_2} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) g_2(x, y) \, dx \\ &= \lim_{r_1, r_2 \rightarrow +\infty} \left[g_1(r_2, y) g_2(r_2, y) - g_1(r_1, y) g_2(r_1, y) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-r_1}^{r_2} g_1(x, y) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) \, dx \right] = - \int_{\mathbb{R}} g_1(x, y) \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação. Logo, pela Afirmação,

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) \overline{f_2(x, y)} \, dx dy = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \overline{\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)} \, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x, y) \overline{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y)} \, dx dy \end{aligned}$$

e de forma análoga, com o Teorema de Fubini [2.1.5](#), temos que

$$B = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x, y) \overline{\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y)} \, dx dy$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \Delta f_1, f_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x, y) \overline{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y)} \, dx dy + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x, y) \overline{\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y)} \, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x, y) \overline{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y)} \, dx dy \\ &= \langle f_1, \Delta f_2 \rangle. \end{aligned}$$

Concluindo que

$$\langle \Delta f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \Delta f_2 \rangle, \quad \forall f_1, f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (3.3)$$

Porém, Δ não é auto-adjunto, pois $(C_c^\infty, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ não é um espaço de Hilbert devido ao fato que $(C_c^\infty, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ não é fechado em $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Utilizando [\(3.3\)](#) e a Transformada de Fourier $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^2, dx dy) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$ tem-se que dados $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ obtemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_2(\Delta f)(s, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Delta f(x, y) e^{-2i\pi(x, y)(s, t)} dx dy \\
 &= \langle \Delta f, e^{-2i\pi(\cdot, \cdot)(s, t)} \rangle = \langle f, \Delta e^{-2i\pi(\cdot, \cdot)(s, t)} \rangle \\
 &= \langle f, (-2i\pi s)(-2i\pi s) e^{-2i\pi(\cdot, \cdot)(s, t)} + (-2i\pi t)(-2i\pi t) e^{-2i\pi(\cdot, \cdot)(s, t)} \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) (-4\pi^2(s^2 + t^2)) e^{-2i\pi(x, y)(s, t)} dx dy \\
 &= -4\pi^2(s^2 + t^2) \mathcal{F}_2(f)(s, t) \\
 &= M(\mathcal{F}_2(f))(s, t),
 \end{aligned}$$

onde M é o operador multiplicação $M = M_{-4\pi^2(x^2+y^2)} : f \mapsto -4\pi^2(x^2 + y^2)f$.
Portanto,

$$\mathcal{F}_2(\Delta f) = M(\mathcal{F}_2 f), \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (3.4)$$

Observação 3.2.1. A equação (3.4) as vezes é escrita com um abuso de notação desta forma $\Delta = \mathcal{F}_2^{-1} M \mathcal{F}_2$. É um abuso de notação devido ao fato que $\Delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\mathcal{F}_2^{-1} M \mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^2, dx dy) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2, dx dy)$.

Exemplo 3.2.6. (Operador diagonal). Considere $I \subset \mathbb{N}$ e uma base de Hilbert $(e_i)_{i \in I}$ e defina $T : H \rightarrow H$ linear com

$$T(e_i) = \alpha_i e_i$$

para cada $i \in I$, onde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ fixados tais que existe $C > 0$ com $|\alpha_i| \leq C \forall i \in I$.

Analisando I com a medida da contagem podemos identificar de forma isométrica os espaços $L^2(I)$ e H da seguinte maneira:

$$\Phi \begin{cases} L^2(I) \rightarrow H \\ f \mapsto \sum_{i \in I} f(i) e_i \end{cases}$$

pois a inversa é

$$\begin{cases} H \rightarrow L^2(I) \\ \sum_{i \in I} x_i e_i \mapsto (i \mapsto x_i) \end{cases}$$

e é uma isometria devido ao fato que

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)\|_H &= \langle \Phi(f), \Phi(f) \rangle_H^{\frac{1}{2}} = \left\langle \sum_{i \in I} f(i)e_i, \sum_{j \in J} f(j)e_j \right\rangle_H^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f(i)\overline{f(j)} \langle e_i, e_j \rangle_H \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i \in I} |f(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

TEORIA ESPECTRAL

Neste capítulo introduziremos vocabulários básicos e resultados fundamentais da teoria espectral em álgebras de Banach sobre \mathbb{C} . Analisaremos resultados do espectro de operadores compactos e compactos autoadjuntos em espaços de Hilbert e as definições e propriedades gerais da Teoria Espectral finalizando com uma aplicação no princípio minimax de Courant-Rayleigh. Neste capítulo H será sempre um espaço de Hilbert diferente de $\{0\}$.

4.1 Álgebras de Banach e resultados iniciais

Definição 4.1.1. Dizemos que A é uma *Álgebra de Banach sobre \mathbb{C}* se A é um espaço de Banach com uma operação de multiplicação $(a, b) \mapsto ab$ tal que

- (i) $(ab)c = a(bc)$ para todos $a, b, c \in A$;
- (ii) existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$;
- (iii) $(a + \lambda b)c = ac + \lambda bc$ para todos $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;

(iv) $a(b + \lambda c) = ab + \lambda ac$ para todos $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;

(v) $\|1\| = 1$;

(vi) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todos $a, b \in A$.

Se A é uma Álgebra de Banach, por indução, segue que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$\|a_1 \dots a_k\| \leq \|a_1\| \dots \|a_k\| \quad \forall a_1, \dots, a_k \in A. \quad (4.1)$$

Alguns exemplos de Álgebras de Banach sobre \mathbb{C} são: \mathbb{C}, L^∞ (com a multiplicação $(fg)(x) = f(x)g(x)$) e o mais importante (para nós) é o espaço de Banach, $\mathcal{L}(V)$, das funções lineares contínuas definidas em $V \rightarrow V$, com V espaço de Banach, com a norma

$$\|T\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$$

e a composição como multiplicação.

Definição 4.1.2. Seja A uma Álgebra de Banach. Definimos o *espectro* de $a \in A$ como

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot 1 - a \notin A^\times\}$$

e o *resolvente* de $a \in A$ como $\mathbb{C} - \sigma(a)$, ou seja,

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot 1 - a \in A^\times\},$$

onde A^\times é o grupo (com a multiplicação) dos elementos invertíveis de A , isto é, são os $a \in A$ tal que existe $b \in A$ com $ab = ba = 1$.

Lema 4.1.1. Seja A uma álgebra de Banach. Então A^\times é aberto em A , e mais ainda, dado $a_0 \in A^\times$ para qualquer $a \in A$ com $\|a\| < \|a_0^{-1}\|^{-1}$ temos que $a_0 + a \in A^\times$ e

$$(a_0 + a)^{-1} = a_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (aa_0^{-1})^k,$$

a qual converge absolutamente.

Prova. Dados $a_0 \in A^\times$ e $a \in A$ com $\|a\| < \|a_0^{-1}\|^{-1}$, como $\|aa_0^{-1}\| < 1$ então a série $\sum(-1)^k(aa_0^{-1})^k$ converge absolutamente. Pelo Teorema [1.1.4](#) temos que $\sum(-1)^k(aa_0^{-1})^k$ converge. Denote, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n(-1)^k(aa_0^{-1})^k$, logo

$$\begin{aligned} (a_0 + a)a_0^{-1}S_n &= (1 + aa_0^{-1}) \sum_{k=0}^n (-1)^k (aa_0^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^n [(-1)^k (aa_0^{-1})^k + (-1)^k (aa_0^{-1})^{k+1}] \\ &= \sum_{k=0}^n [(-1)^k (aa_0^{-1})^k - (-1)^{k+1} (aa_0^{-1})^{k+1}] \\ &= 1 - (-1)^{n+1} (aa_0^{-1})^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_0^{-1}S_n(a_0 + a) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0^{-1} (aa_0^{-1})^k a_0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0^{-1} (aa_0^{-1})^k a \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (-1) a_0^{-1} (aa_0^{-1})^{k-1} (aa_0^{-1}) a_0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0^{-1} (aa_0^{-1})^k a \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0^{-1} (aa_0^{-1})^k a + \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0^{-1} (aa_0^{-1})^k a \\ &= 1 - (-1)^n a_0^{-1} (aa_0^{-1})^n a \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\|aa_0^{-1}\| < 1$ temos que $\|(aa_0^{-1})^n\| \leq \|aa_0^{-1}\|^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$(a_0 + a)a_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (aa_0^{-1})^k = 1 = a_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (aa_0^{-1})^k (a_0 + a).$$

Portanto $a_0 + a \in A^\times$ e a expressão de $(a_0 + a)^{-1}$ no lema é válida. ■

Teorema 4.1.1. Seja A uma Álgebra de Banach. Dado $a \in A$ então $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ é não vazio, compacto e $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$.

Prova. Dado $a \in A$, afirmamos que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|a\|\} \subset \rho(a)$. De fato, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > \|a\|$ tem-se que $\|a/\lambda\| < 1$ e $\lambda 1 - a = \lambda(1 - a/\lambda)$. Pelo

lema (4.1.1) $1 - a/\lambda \in A^\times$, logo $\lambda 1 - a \in \rho(a)$. Com isto demonstramos que $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$.

Para mostrar que $\sigma(a)$ é fechado mostraremos que $\rho(a)$ é aberto. De fato, dados $\lambda \in \rho(a)$ e $\varepsilon \in \mathbb{C}$ com $|\varepsilon| < \|\lambda 1 - a\|^{-1}$ tem-se, pelo Lema (4.1.1), $(\lambda + \varepsilon)1 - a = \varepsilon 1 + \lambda 1 - a \in A^\times$, pois $\lambda 1 - a \in A^\times$ e $\|\varepsilon 1\| = |\varepsilon| < \|\lambda 1 - a\|^{-1}$. Assim $\lambda + \varepsilon \in \rho(a)$. Portanto $\rho(a)$ é aberto, ou seja, $\sigma(a)$ é fechado. Já que $\sigma(a)$ é fechado e limitado, temos que $\sigma(a)$ é compacto.

Mostremos que $\sigma(a) \neq \emptyset$. Suponhamos $\sigma(a) = \emptyset$, logo $\lambda 1 - a$ é invertível para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Vejamos que $f : \mathbb{C} \rightarrow A$ com $f(\lambda) = (\lambda 1 - a)^{-1}$ é derivável, com derivada $-(\lambda 1 - a)^{-2}$, ou seja,

$$\frac{((\lambda + \varepsilon)1 - a)^{-1} - (\lambda 1 - a)^{-1}}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -(\lambda 1 - a)^{-2}.$$

De fato, dado $\varepsilon \in \mathbb{C} - \{0\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{((\lambda + \varepsilon)1 - a)^{-1} - (\lambda 1 - a)^{-1}}{\varepsilon} &= ((\lambda + \varepsilon)1 - a)^{-1}(\lambda 1 - a)^{-1} \frac{\lambda 1 - a - (\lambda + \varepsilon)1 + a}{\varepsilon} \\ &= -((\lambda + \varepsilon)1 - a)^{-1}(\lambda 1 - a)^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -(\lambda 1 - a)^{-2}. \end{aligned}$$

Fixe $\varphi \in A'$ e defina $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(\lambda) = \varphi((\lambda 1 - a)^{-1})$. Segue que g é derivável e para $|\lambda| > \|a\|$ o lema (4.1.1) garante que

$$(\lambda 1 - a)^{-1} = \lambda^{-1} \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k,$$

como o membro da direita converge a 0 quando $|\lambda| \rightarrow \infty$, temos que $g(\lambda) \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0$. Disto segue que g é limitada, e como g é derivável, o Teorema de Liouville garante que g é constante. Daí, $g \equiv 0$, ou seja, $\varphi((\lambda 1 - a)^{-1}) = 0$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo $\varphi((\lambda 1 - a)^{-1}) = 0$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in A'$, o Corolário (1.1.3.1) garante que $(\lambda 1 - a)^{-1} = 0$, absurdo. Pois $1 = (\lambda 1 - a)^{-1}(\lambda 1 - a) = 0$. Portanto $\sigma(a) \neq \emptyset$. ■

A situação em nosso interesse é quando $A = \mathcal{L}(H)$, neste caso particionamos o espectro $\sigma(T)$ de um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ em três conjuntos:

- *espectro pontual*, $\sigma_p(T)$, são os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda I - T \text{ não é injetor,}$$

neste caso λ é chamado de *autovalor*;

- *espectro residual*, $\sigma_r(T)$, são os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda I - T \text{ é injetor e } \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} \neq H;$$

- *espectro contínuo*, $\sigma_c(T)$, são os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lambda I - T \text{ é injetor, não sobrejetor e } \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} = H.$$

Não é difícil ver que $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$ e $\sigma_c(T)$ são dois a dois disjuntos. Além disso, o Teorema do Isomorfismo de Banach [1.2.2.1](#) garante que se $\lambda \in (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T))^c$, então $\lambda \in \rho(T)$, concluindo que os conjuntos $\sigma_p(T)$, $\sigma_r(T)$ e $\sigma_c(T)$ formam uma partição de $\sigma(T)$.

Observação 4.1.1. Considere $\lambda \in \sigma_c(T)$ um elemento do espectro contínuo. Podemos definir a inversa de $\lambda I - T : H \rightarrow \text{Im}(\lambda I - T)$, dada por

$$(\lambda I - T)^{-1} \begin{cases} \text{Im}(\lambda I - T) \rightarrow H \\ v \mapsto \text{o único } w \in H \text{ com } \lambda w - T(w) = v, \end{cases}$$

a qual é um operador linear não limitado definido em um subespaço denso de H . Vejamos que $(\lambda I - T)^{-1}$ não é limitado, caso $(\lambda I - T)^{-1}$ fosse limitado podemos estender $(\lambda I - T)^{-1}$ de forma contínua para algum $f : H \rightarrow H$ limitado. Como f é uma extensão segue que

$$f \circ (\lambda I - T) = I.$$

Dado $v \in H$, existe (v_n) em $\text{Im}(\lambda I - T)$ tal que $v_n \rightarrow v$, logo

$$[(\lambda I - T) \circ f](v) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\lambda I - T) \circ f](v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v.$$

Portanto $\lambda I - T : H \rightarrow H$ possui inversa $f : H \rightarrow H$ contínua, ou seja, $\lambda \in \rho(T)$, contradizendo o fato que $\lambda \in \sigma_c(T)$.

Exemplo 4.1.1. (Espectro dos shifts). Defina $S_\ell, S_r : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ tais que

$$S_\ell(x) = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots) \text{ e } S_r(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots).$$

S_ℓ é chamado de *shift a esquerda* e S_r é chamado de *shift a direita*. Encontremos os espectros, autovalores e adjuntos de S_ℓ e S_r .

Verifiquemos primeiramente se são contínuos ou compactos. Se $\|x\| = 1$ então

$$\|S_\ell(x)\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \text{ e } \|S_r(x)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

Assim S_ℓ e S_r são contínuos com $\|S_\ell\| \leq 1$ e $\|S_r\| = 1$. Para mostrar que $\|S_\ell\| = 1$ tome $x = (0, 2^{-1/2}, 2^{-2/2}, \dots, 2^{-(n+1)/2}, \dots)$, então $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ e

$$\|S_\ell(x)\| = \|(2^{-1/2}, 2^{-2/2}, \dots, 2^{-n/2}, \dots)\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Vejamos que $S_\ell, S_r \notin \mathcal{K}(\ell^2)$. De fato, considere a sequência (e_n) . Se $1 \neq n \neq m \neq 1$, então

$$\|S_\ell(e_n) - S_\ell(e_m)\| = \|e_{n-1} - e_{m-1}\| = \sqrt{2}$$

e

$$\|S_r(e_n) - S_r(e_m)\| = \|e_{n+1} - e_{m+1}\| = \sqrt{2}.$$

Como (e_n) é limitada, temos que $S_\ell, S_r \notin \mathcal{K}(H)$, pois caso contrário teríamos uma contradição com o item (c) da Proposição [1.5.2](#).

Encontremos $\sigma_p(S_\ell)$ e $\sigma(S_\ell)$. Pelo Teorema [4.1.1](#) temos que

$$\sigma_p(S_\ell) \subset \sigma(S_\ell) \subset B[0, 1],$$

onde $B[0, 1]$ é a bola em \mathbb{C} . Para encontrar $\sigma_p(S_\ell)$ devemos determinar para quais $\lambda \in \mathbb{C}$ existe $x \in \ell^2 - \{0\}$ tal que $(\lambda I - S_\ell)(x) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} (\lambda I - S_\ell)(x) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda x_1 - x_2, \lambda x_2 - x_3, \dots, \lambda x_n - x_{n+1}, \dots) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_n = \lambda x_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x_n = \lambda^{n-1} x_1 \quad \forall n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x = x_1(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}, \dots). \end{aligned}$$

Assim $\lambda \in \sigma_p(S_\ell)$ se, e somente se, $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}, \dots) \in \ell^2$. Veja que se $\lambda \in \sigma_p(S_\ell)$ então o autoespaço de λ é $[(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}, \dots)]$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda|^2)^n$$

converge se, e só se, $|\lambda| < 1$. Daí $(\lambda I - S_\ell)$ não é injetor se, e somente se, $|\lambda| < 1$. Logo $\sigma_p(S_\ell) = B(0, 1)$ e como $\sigma(S_\ell)$ é fechado (pelo Teorema 4.1.1) temos que

$$B[0, 1] = \overline{\sigma_p(S_\ell)} \subset \overline{\sigma(S_\ell)} = \sigma(S_\ell) \subset B[0, 1].$$

Portanto $\sigma(S_\ell) = B[0, 1]$.

Encontremos $\sigma_p(S_r)$ e $\sigma(S_r)$. Veja que $0 \notin \sigma_p(S_r)$ (pois se $S_r(x) = 0$ então $x = 0$) e $0 \in \sigma(S_r)$ (pois não existe $x \in \ell^2$ tal que $S_r(x) = (1, 0, \dots, 0, \dots)$). Pelo Teorema 4.1.1 temos que

$$\sigma_p(S_r) \subset \sigma(S_r) \subset B[0, 1],$$

onde $B[0, 1]$ é a bola em \mathbb{C} . Para encontrar $\sigma_p(S_\ell)$ devemos determinar para quais $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ existe $x \in \ell^2 - \{0\}$ tal que $(\lambda I - S_r)(x) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} (\lambda I - S_r)(x) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \dots, \lambda x_n - x_{n-1}, \dots) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda x_1 = 0 \text{ e } \lambda x_n = x_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ e } \lambda x_n = x_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Assim $\sigma_p(S_r) = \emptyset$. Afirmamos que $\sigma(S_r) = B[0, 1]$. De fato, seja $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq 1$. Note que

$$\begin{aligned} (\lambda I - S_r)(x) = (1, 0, \dots, 0, \dots) &\Leftrightarrow \lambda x_1 = 1 \text{ e } \lambda x_n = x_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x_n = \lambda^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x = (\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots, \lambda^{-n}, \dots) \end{aligned}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{-n}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{-2}|^n$$

diverge pelo fato que $|\lambda| \leq 1$. Daí $(\lambda I - S_r)$ não é sobrejetor se, e somente se, $|\lambda| \leq 1$. Logo $B[0, 1] \subset \sigma(S_r)$, portanto, $\sigma(S_r) = B[0, 1]$.

Por fim, encontremos S_ℓ^* e S_r^* . Note que

$$\begin{aligned} \langle S_\ell(x), y \rangle &= \langle (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} \bar{y}_n \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (0, y_1, \dots, y_{n-1}, \dots) \rangle = \langle x, S_r(y) \rangle \quad \forall x, y \in \ell^2. \end{aligned}$$

Logo $S_\ell^* = S_r$ e $S_r^* = (S_\ell^*)^* = S_\ell$. Além disso,

$$\begin{aligned} S_\ell(S_r(1, 0, \dots, 0, \dots)) &= S_\ell(0, 1, \dots, 0, \dots) = (1, 0, \dots, 0, \dots) \neq (0, 0, \dots, 0, \dots) \\ &= S_r(0, 0, \dots, 0, \dots) = S_r(S_\ell(1, 0, \dots, 0, \dots)). \end{aligned}$$

Então S_ℓ não é normal, portanto, não é auto-adjunto, positivo ou unitário. Analogamente, S_r não é normal, autoadjunto, positivo ou unitário.

Proposição 4.1.1. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$. Então

- (a) Se $\lambda \in \sigma_r(T)$, então $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$;
- (b) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$, então $\lambda \in \sigma_c(T)$ se, e somente se, existe uma sequência (v_n) em H tal que $\|v_n\| = 1$ e $\lim \|(\lambda I - T)v_n\| = 0$;
- (c) $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$. Equivalentemente, $\lambda \in \rho(T)$ se, e somente se, $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$.

Prova. (a) Se $\lambda \in \sigma_r(T)$, então $\lambda I - T$ é injetor e sua imagem não é densa em H , ou seja, $\overline{\text{Im}(\lambda I - T)}^\perp \neq \{0\}$. Logo pelos itens (f) e (g) da Proposição 1.4.1

$$\ker(\bar{\lambda} I - T^*) = \text{Im}(\lambda I - T)^\perp \neq \{0\}.$$

Portanto $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

(b) Suponha $\lambda \in \sigma_c(T)$, pela Observação [4.1.1](#), obtemos que a inversa de $\lambda I - T : H \rightarrow \text{Im}(\lambda I - T)$ não é contínua, logo existe uma sequência (w_n) em $\text{Im}(\lambda I - T)$ tal que $\|w_n\| = 1$ e $\lim \|(\lambda I - T)^{-1}w_n\| = \infty$. Considere a sequência (v_n) em H definida por

$$v_n = \frac{(\lambda I - T)^{-1}w_n}{\|(\lambda I - T)^{-1}w_n\|}.$$

Veja que $\|v_n\| = 1$ e

$$\begin{aligned} \lim \|(\lambda I - T)v_n\| &= \lim \|(\lambda I - T)^{-1}w_n\|^{-1} \|(\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}w_n\| \\ &= \lim \|(\lambda I - T)^{-1}w_n\|^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Agora suponha $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$ e uma sequência (v_n) em H tal que $\|v_n\| = 1$ e $\lim \|(\lambda I - T)v_n\| = 0$. Como $\lambda \notin \sigma_p(T)$ tem-se que $\lambda I - T$ é injetor, logo $\lambda I - T : H \rightarrow \text{Im}(\lambda I - T)$ é invertível. Devido a $\lambda \notin \sigma_r(T)$, temos que $\overline{\text{Im}(\lambda I - T)} = H$. Veja que

$$\|(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)v_n\| = \|v_n\| \rightarrow 1,$$

disto segue que $(\lambda I - T)^{-1}$ não é limitado, pois se fosse limitado então este limite seria 0 uma vez que $\lim \|(\lambda I - T)v_n\| = 0$. Pelo Teorema do Isomorfismo de Banach [1.2.2.1](#) $\lambda I - T$ não é sobrejetor, portanto $\lambda \in \sigma_c(T)$.

(c) A equivalência $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T^*)$ segue imediatamente dos itens (f) e (h) da Proposição [1.4.1](#), pois

$$(\lambda I - T) \text{ é invertível} \Leftrightarrow (\bar{\lambda} I - T^*) \text{ é invertível}$$

■

Intuitivamente, o item (b) diz que se $\lambda \in \sigma_c(T)$ então obtemos uma sequência de “quase” autovetores. Em outras palavras, a menos de um ε encontramos um autovetor de λ .

Teorema 4.1.2. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$. Então

$$\sigma(T) \subset \overline{N(T)}, \tag{4.2}$$

onde $N(T)$ é a *imagem numérica* de T a qual é definida por

$$N(T) = \{\langle Tv, v \rangle : \|v\| = 1\}.$$

Prova. Dado $\lambda \in \sigma(T)$.

Caso 1: $\lambda \in \sigma_p(T)$.

De fato, existe $v \in H - \{0\}$ tal que $Tv = \lambda v$, logo

$$\lambda = \lambda \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \left\langle \lambda \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \left\langle \frac{Tv}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \in N(T) \subset \overline{N(T)}.$$

Caso 2: $\lambda \in \sigma_r(T)$.

De fato, pelo item (a) da Proposição 4.1.1 temos que $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, como mostrado no caso 1, obtemos que $\bar{\lambda} \in N(T^*)$. Assim existe $u \in H$ com $\|u\| = 1$ e $\bar{\lambda} = \langle T^*u, u \rangle$, logo $\bar{\lambda} = \langle T^*u, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \overline{\langle Tu, u \rangle}$. Portanto $\lambda = \langle Tu, u \rangle \in N(T) \subset \overline{N(T)}$.

Caso 3: $\lambda \in \sigma_c(T)$.

De fato, pelo item (b) da Proposição 4.1.1, existe (v_n) em H tal que $\|v_n\| = 1$ e $\lim \|(\lambda I - T)v_n\| = 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que

$$|\langle (\lambda I - T)v_n, v_n \rangle| \leq \|(\lambda I - T)v_n\| \|v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como $\langle (\lambda I - T)v_n, v_n \rangle = \langle \lambda v_n, v_n \rangle - \langle Tv_n, v_n \rangle = \lambda - \langle Tv_n, v_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lambda = \lim \langle Tv_n, v_n \rangle \in \overline{N(T)}$. ■

Observação 4.1.2. Analisando a demonstração verificamos que $\sigma_p(T), \sigma_r(T) \subset N(T)$ e $\sigma_c(T) \subset \overline{N(T)}$.

Definição 4.1.3. Para cada $T \in \mathcal{L}(H)$ definimos

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

e é chamado de *raio espectral*.

Veja que do Teorema 4.1.1 temos que $r(T) \leq \|T\|$ e da Proposição 4.1.1 segue que $r(T) = r(T^*)$.

Teorema 4.1.3. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$. Então

- (a) $r(T) = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$;
- (b) Se T é normal tem-se que $r(T) = \|T\|$.

Prova. (a) Fixe $m \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ existem $p, q \in \mathbb{N}$ com $q < m$ tais que $n = pm + q$. Logo

$$\|T^n\| \leq \|T\|^q \|T^m\|^p \leq \max\{1, \|T\|^m\} \|T^m\|^p.$$

Daí

$$\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \left(\max\{1, \|T\|^{\frac{m}{n}}\} \|T^m\|^{\frac{p}{n}} \right).$$

Como $\frac{m}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $\frac{p}{n} = \frac{1}{m} - \frac{q}{nm} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$ (já que $0 \leq \frac{q}{nm} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) temos que $\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$. Assim

$$\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}},$$

disto segue que $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe e $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} =: L$.

Da análise na reta segue que o raio de convergência da série $\sum z^{n+1} T^n$ é o número $\left(\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ o qual é L^{-1} . Vejamos primeiramente que $r(T) \leq L$. De fato, basta mostrar $B[0, L]^c \subset \rho(T)$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > L$, então a série $\sum T^n / \lambda^{n+1}$ converge (use o critério de Cauchy, também conhecido por teste da raiz). Veja que

$$(\lambda I - T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = I$$

e, analogamente, $(\sum T^n / \lambda^{n+1})(\lambda I - T) = I$, logo $\lambda \in \rho(T)$. Concluindo assim que $r(T) \leq L$. Suponhamos, por contradição, que $r := r(T) < L$, segue que qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > r$ existe

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1}.$$

Logo a função $\varphi : B(0, r^{-1}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definida por $\varphi(z) = (I - zT)^{-1}$ é analítica e possui uma série de Taylor no ponto $z = 0$. Por outro lado, pelo lema (4.1.1) φ é analítica em $B(0, \|T\|^{-1})$ com série de Taylor no ponto $z = 0$ igual a $\sum z^n T^n$, portanto, pela unicidade da série de Taylor, a série $\sum z^n T^n$ converge para $z \in B(0, r^{-1})$, contradizendo o fato que o raio de convergência de $\sum z^n T^n$ é L^{-1} o qual é menor que r^{-1} .

(b) Pelo Corolário 1.4.2.1 temos que $\|T^2\| = \|T\|^2$. Por indução obtemos que $\|T^{2^m}\| = \|T\|^{2^m}$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo item (a),

$$r(T) = \lim \|T^n\|^{1/n} = \lim \|T^{2^m}\|^{1/2^m} = \lim \|T\| = \|T\|.$$

■

4.2 Operadores Compactos em espaços de Hilbert

Sabemos que nos operadores definidos em espaços de dimensão finita o espectro é composto pelos autovalores. Entretanto, existe uma importante classe de operadores que o espectro de cada um é descrito suficientemente como o conjunto dos autovalores (veremos isto no Teorema 4.2.2), estes operadores são os operadores compactos. Os operadores Hilbert-Schmidt no Exemplo 3.2.2 é um caso desse tipo de operador.

Quando $T \in \mathcal{L}(H)$ existem duas definições equivalentes para T ser um operador compacto, denotamos $T \in \mathcal{K}(H)$:

- (1) se $\overline{T(B[0, 1])}$ é compacto;
- (2) se existe (T_n) em $\mathcal{L}_p(H)$ (ou seja, $\dim \text{Im}(T_n) < \infty$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$) tal que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(H)$.

Para verificar isto basta usar o Corolário 1.5.4.1 e a Proposição 1.5.5.

Teorema 4.2.1. (Alternativa de Fredholm). Seja $T \in \mathcal{K}(H)$. Então,

- (a) $\ker(I - T)$ tem dimensão finita;
- (b) $\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$ e, em particular, $\text{Im}(I - T)$ é fechado;
- (c) $(I - T)$ é injetor se, e somente se, é sobrejetor.

Prova.

- (a) Denote $W := \ker(I - T)$, $B_W[0, 1]$ e $B_H[0, 1]$ bolas de centro 0 e raio 1 de W e H respectivamente. Veja que $T(w) = w$ para qualquer $w \in W$, logo $B_W[0, 1] \subset T(B_H[0, 1]) \subset \overline{T(B_H[0, 1])}$. Como $T \in \mathcal{K}(H)$, temos que $B_W[0, 1]$ é compacto. Pelo Teorema [1.1.1](#) obtemos que W tem dimensão finita.
- (b) Primeiramente, mostremos que $\text{Im}(I - T)$ é fechado. Seja (v_n) sequência em $\text{Im}(I - T)$ com $v_n \rightarrow v$. Devemos mostrar que $v \in \text{Im}(I - T)$. Considere (w_n) em H tal que $v_n = w_n - T(w_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Pelo item (a), temos que existe (x_n) sequência em $\ker(I - T)$ tal que $\|w_n - x_n\| = d(w_n, \ker(I - T)) \forall n \in \mathbb{N}$. Note que $x_n - T(x_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e que

$$v_n = w_n - x_n - T(w_n - x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmção: Existe $C > 0$ tal que $\|w_n - x_n\| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$.

De fato, suponha que existe uma subsequência tal que $\|w_{n_k} - x_{n_k}\| \rightarrow \infty$.

Defina $y_n = (w_n - x_n)/\|w_n - x_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, assim

$$\begin{aligned} y_{n_k} - T(y_{n_k}) &= \frac{w_{n_k} - x_{n_k}}{\|w_{n_k} - x_{n_k}\|} - T\left(\frac{w_{n_k} - x_{n_k}}{\|w_{n_k} - x_{n_k}\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|w_{n_k} - x_{n_k}\|}(w_{n_k} - x_{n_k} - T(w_{n_k} - x_{n_k})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como (y_{n_k}) é limitada, passando para subsequência caso necessário, temos que $T(y_{n_k}) \rightarrow z$. Logo $y_{n_k} = y_{n_k} - T(y_{n_k}) + T(y_{n_k}) \rightarrow z$ e

$$0 \leftarrow y_{n_k} - T(y_{n_k}) \rightarrow z - T(z).$$

Daí, $z \in \ker(I - T)$. Disto segue que $d(y_{n_k}, \ker(I - T)) \rightarrow d(z, \ker(I - T)) = 0$.

Porém

$$d(y_{n_k}, \ker(I - T)) = d\left(\frac{w_{n_k} - x_{n_k}}{\|w_{n_k} - x_{n_k}\|}, \ker(I - T)\right) = \frac{d(w_{n_k}, \ker(I - T))}{\|w_{n_k} - x_{n_k}\|} = 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, absurdo. Ficando assim demonstrada a Afirmação.

Como $T \in \mathcal{K}(H)$ então existe uma subsequência tal que $T(w_{n_k} - x_{n_k})$ converge para algum limite L . Assim

$$w_{n_k} - x_{n_k} = w_{n_k} - x_{n_k} - T(w_{n_k} - x_{n_k}) + T(w_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow v + L.$$

Defina $u = v + L$, note que

$$v \leftarrow v_{n_k} = w_{n_k} - x_{n_k} - T(w_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow v + L - T(v + L) = u - T(u).$$

Portanto $v \in \text{Im}(I - T)$, ou seja, $\text{Im}(I - T)$ é fechado.

Para verificar que $\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$ basta usar que $\text{Im}(I - T)$ é fechado e as proposições [1.4.1](#) e [1.3.3](#) e desta maneira

$$\text{Im}(I - T) = \overline{\text{Im}(I - T)} = (\text{Im}(I - T)^\perp)^\perp = \ker(I - T^*)^\perp.$$

(c) Suponhamos, por contradição, que $(I - T)$ é injetor e

$$W_1 := (I - T)(H) \neq H.$$

Pelo item (a), Teorema [1.1.2](#) e a Proposição [1.1.1](#), tem-se que W_1 é Hilbert. Veja que $T(W_1) \subset W_1$ (pois dado $T(v) \in T(W_1)$ tem-se $T(v) = v - (v - T(v)) \in W_1$), logo $T|_{W_1} \in \mathcal{K}(W_1)$ e $W_2 := (I - T)(W_1)$ é subespaço fechado de W_1 .

Afirmação: $W_2 \subsetneq W_1$.

De fato, se $W_2 = W_1$ então fixado $v \in H - W_1$ temos que $(I - T)(v) \in W_1$, mas como $(I - T)(W_1) = W_1$, existe $w \in W_1$ tal que $(I - T)(v) = (I - T)(w)$.

Pela injetividade de $(I - T)$, concluímos que $v = w$, contradizendo que $v \notin W_1$ e $w \in W_1$.

Pelo mesmo argumento anterior tem-se que $W_3 := (I - T)^3(H)$ é um subespaço fechado com $W_3 \subsetneq W_2$. Prosseguindo indutivamente obtemos subespaços fechados $W_n := (I - T)^n(H)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$H \supsetneq W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq \cdots \supsetneq W_n \supsetneq W_{n+1} \supsetneq \cdots .$$

Pelo Lema de Riesz [1.1.1](#) existe $u_1 \in W_1$ tal que $\|u_1\| = 1$ e $d(u_1, W_2) \geq 1/2$. Analogamente existe $u_2 \in W_2$ tal que $\|u_2\| = 1$ e $d(u_2, W_3) \geq 1/2$. Prosseguindo indutivamente obtemos uma sequência (u_n) tal que $u_n \in W_n$, $\|u_n\| = 1$ e $d(u_n, W_{n+1}) \geq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos $n > m$, logo

$$W_{n+1} \subsetneq W_n \subsetneq W_m \subsetneq W_{m+1}$$

e disto segue que

$$\underbrace{-(u_n - Tu_n)}_{\in W_{n+1}} + \underbrace{(u_m - Tu_m)}_{\in W_{m+1}} + \underbrace{u_n}_{\in W_n} \in W_{m+1}.$$

Donde obtemos

$$\|Tu_n - Tu_m\| = \|[-(u_n - Tu_n) + u_m - Tu_m + u_n] - u_m\| \geq d(u_m, W_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$$

para todo $n > m$. Portanto (Tu_n) não possui subsequência convergente, contradizendo o fato que $T \in \mathcal{K}(H)$.

Reciprocamente suponha $(I - T)$ sobrejetor, pela Proposição [1.4.1](#) temos que

$$\ker(I - T^*) = \text{Im}(I - T)^\perp = \{0\}.$$

Logo $(I - T^*)$ é injetor. Pelo Teorema de Schauder [1.5.1](#) e pela implicação já demonstrada tem-se que $(I - T^*)$ é sobrejetor. Portanto temos que

$$\ker(I - T) = \text{Im}(I - T^*)^\perp = \{0\},$$

donde segue que $(I - T)$ é injetor.

■

Observação 4.2.1. (1) Segue da linearidade que, para $\lambda \neq 0$, podemos substituir $(I - T)$ por $(\lambda I - T)$ e $(I - T^*)$ por $(\bar{\lambda}I - T^*)$ com o resultado ainda válido.

(2) O Teorema da Alternativa de Fredholm garante uma resolução da equação $u - Tu = f$. Ele nos diz que somente uma das seguintes condições ocorrem:

- para todo $f \in H$ a equação $u - Tu = f$ possui única solução;
- a equação homogênea $u - Tu = 0$ admite n soluções L.I. (onde $n = \dim \ker(I - T)$) e a equação não homogênea $u - Tu = f$ tem solução se, e somente se, f satisfaz

$$f \in \ker(I - T^*)^\perp (= \text{Im}(I - T)).$$

(3) O item (c) garante que o operador $(I - T)$ satisfaz a mesma propriedade (injetor se, e somente se, sobrejetor) dos operadores lineares em dimensão finita.

Para o próximo resultado necessitaremos do seguinte lema:

Lema 4.2.1. Sejam $T \in \mathcal{K}(H)$ e (λ_n) sequência de números complexos distintos em $\sigma_p(T) - \{0\}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Então $\lambda = 0$.

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $e_n \in H$ tal que $\|e_n\| = 1$ e $(\lambda_n I - T)(e_n) = 0$. Mostremos que $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é um conjunto L.I. para todo $n \in \mathbb{N}$. A prova é por indução em n . Para $n = 1$ é imediato. Suponhamos $\{e_1, \dots, e_n\}$ L.I. e $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1} = 0.$$

Caso $\alpha_{n+1} = 0$ o resultado é imediato da hipótese de indução. Caso $\alpha_{n+1} \neq 0$ denotando $\tilde{\alpha}_i = -\alpha_i/\alpha_{n+1}$ para cada $i = 1, \dots, n$ temos que

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i e_i.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{n+1} \tilde{\alpha}_i e_i = \lambda_{n+1} e_{n+1} = T(e_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \lambda_i e_i.$$

Segue da hipótese de indução que $\tilde{\alpha}_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0 \forall i = 1, \dots, n$. Como $\lambda_{n+1} \neq \lambda_i \forall i = 1, \dots, n$ segue que $\tilde{\alpha}_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$, absurdo devido a

$$0 \neq e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i e_i = 0.$$

Portanto $\{e_1, \dots, e_n\}$ é L.I. para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denote $W_n = [e_1, \dots, e_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veja que

$$W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_n \subsetneq W_{n+1} \subsetneq \dots,$$

pois como foi mostrado anteriormente $e_{n+1} \in W_{n+1} - W_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fixe $u_1 \in W_1$ com $\|u_1\| = 1$. Pelo Lema de Riesz [1.1.1](#) existe $u_2 \in W_2$ tal que $\|u_2\| = 1$ e $d(u_2, W_1) \geq 1/2$. Prosseguindo indutivamente obtemos (u_n) com $u_n \in W_n$, $\|u_n\| = 1$ e $d(u_n, W_{n-1}) \geq 1/2$ para cada $n \geq 2$. Vejamos que $(\lambda_n I - T)(W_n) \subset W_{n-1}$ para cada $n \geq 2$. De fato, dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{aligned} (\lambda_n I - T) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) &= \lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i e_i \in W_{n-1} \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Para $n > m \geq 2$ tem-se

$$W_{m-1} \subsetneq W_m \subset W_{n-1} \subsetneq W_n.$$

Note que, para $n > m \geq 2$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(u_n)}{\lambda_n} - \frac{T(u_m)}{\lambda_m} \right\| &= \left\| u_n - \underbrace{u_m}_{\in W_m} - \underbrace{\frac{\lambda_n u_n - T(u_n)}{\lambda_n}}_{\in (\lambda_n I - T)(W_n)} + \underbrace{\frac{\lambda_m u_m - T(u_m)}{\lambda_m}}_{\in (\lambda_m I - T)(W_m)} \right\| \\ &\geq d(u_n, W_{n-1}) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Isto conclui que a sequência $(T(u_n)/\lambda_n)$ não possui subsequência convergente. Por fim, suponhamos $\lambda \neq 0$, logo, como $T \in \mathcal{K}(H)$, existe (u_{n_k}) subsequência de (u_n) tal que

$$T(u_{n_k}) \rightarrow u_0 \text{ para algum } u_0 \in H.$$

Assim

$$T\left(\frac{u_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right) = \frac{T(u_{n_k})}{\lambda_{n_k}} \rightarrow \frac{u_0}{\lambda},$$

contradizendo o fato que $(T(u_n)/\lambda_n)$ não possuir subsequência convergente. Portanto $\lambda = 0$. ■

Os seguintes resultados (Teoremas [4.2.2](#), [4.2.3](#) e [4.2.4](#)) são importantes para o estudo de Teoria espectral para operadores compactos (e auto-adjunto) e são devidos a Riesz, Fredholm, Hilbert e Schmidt.

Teorema 4.2.2. (Teorema espectral para operadores compactos). Sejam H um espaço de Hilbert com $\dim H = \infty$ e $T \in \mathcal{K}(H)$. Então

- (a) $0 \in \sigma(T)$ e $0 \in \sigma_p(T)$ se, e somente se, T não é injetor;
- (b) com a exceção do 0, o espectro de T é o conjunto dos autovalores, em outras palavras

$$\sigma(T) - \{0\} = \sigma_p(T) - \{0\};$$

- (c) $\sigma(T)$ é finito ou enumerável com o único ponto de acumulação o 0. Além disso,

$$\dim \ker(\lambda I - T) < \infty \quad \forall \lambda \in \sigma(T) - \{0\}.$$

Prova.

- (a) A equivalência $0 \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow T$ não é injetor é imediata da definição de $\sigma_p(T)$.

Vejamus que $0 \in \sigma(T)$. Se $0 \notin \sigma(T)$ então T é invertível. Logo, pela Proposição propriedade de ideal [1.5.3](#), $I = T^{-1}T$ é compacto, absurdo pois contradiz o item (c) da Proposição [1.5.1](#) já que $\dim H = \infty$.

(b) Dado $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ temos que $(\lambda I - T)$ não é invertível. Disto segue que $(\lambda I - T)$ não é injetor, pois se $(\lambda I - T)$ é injetor então, pelo item (c) da Alternativa de Fredholm [4.2.1](#), $(\lambda I - T)$ é invertível, absurdo. Portanto $\lambda \in \sigma_p(T) - \{0\}$.

(c) Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$A_n := \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1/n\}$$

Afirmação: A_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, suponha A_{n_0} infinito para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então existe uma sequência (λ_m) em A_{n_0} com termos distintos. Pelo Teorema [4.1.1](#), existe (λ_{m_k}) subsequência de (λ_m) tal que $\lambda_{m_k} \rightarrow \lambda$ para algum $\lambda \geq 1/n_0$ (já que $\lambda_{m_k} \geq 1/n_0 \forall k \in \mathbb{N}$). Pelo item (b), (λ_{m_k}) está em $\sigma_p(T) - \{0\}$, logo (pelo Lema [4.2.1](#)) $\lambda = 0$, absurdo pois $\lambda \geq 1/n_0$. Portanto A_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veja que

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Como cada A_n é enumerável segue que $\sigma(T)$ é enumerável. Mais ainda, se $\sigma(T)$ é enumerável infinito, ou seja, $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, então (pelo lema [4.2.1](#)) $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

A prova que $\dim \ker(\lambda I - T) < \infty \forall \lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ foi demonstrada no item (a) da Alternativa de Fredholm [4.2.1](#).

■

Lema 4.2.2. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjunto. Então

$$\|T\| = \sup\{|\langle T(v), v \rangle| : \|v\| = 1\}.$$

Prova. Denotamos $C = \sup\{|\langle T(v), v \rangle| : \|v\| = 1\}$. Se $T \equiv 0$, então $\|T\| = 0 = C$. Suponhamos $T \neq 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz [1.2](#), temos que

$$|\langle T(v), v \rangle| \leq \|T(v)\| \|v\| \leq \|T\|$$

para todo $v \in H$ com $\|v\| = 1$. Logo $C \leq \|T\|$. Resta mostrar que $\|T\| \leq C$. Como $T \neq 0$, fixemos $v_0 \in H$ tal que $\|v_0\| = 1$ e $T(v_0) \neq 0$. Defina

$$v = \|T(v_0)\|^{\frac{1}{2}}v_0 \text{ e } u = \|T(v_0)\|^{-\frac{1}{2}}T(v_0).$$

Note que $\|v\|^2 = \|u\|^2 = \|T(v_0)\|^2$, $\langle T(v), u \rangle = \|T(v_0)\|^2$ e, como T é auto-adjunto,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = \overline{\langle T(v), u \rangle} = \|T(v_0)\|^2 \in \mathbb{R}.$$

Disto segue que

$$\langle T(v), u \rangle = \langle T(u), v \rangle = \|T(v_0)\|^2.$$

Denotando $x = u + v$ e $y = u - v$ temos que

$$\langle T(x), x \rangle = \langle T(u), u \rangle + \langle T(u), v \rangle + \langle T(v), u \rangle + \langle T(v), v \rangle$$

e

$$\langle T(y), y \rangle = \langle T(u), u \rangle - \langle T(u), v \rangle - \langle T(v), u \rangle + \langle T(v), v \rangle$$

Subtraindo estas equações, membro a membro, obtemos

$$\langle T(x), x \rangle - \langle T(y), y \rangle = 2\langle T(u), v \rangle + 2\langle T(v), u \rangle = 4\|T(v_0)\|^2.$$

Assim, pela lei do paralelogramo (1.4),

$$\begin{aligned} 4\|T(v_0)\|^2 &= \langle T(x), x \rangle - \langle T(y), y \rangle \leq |\langle T(x), x \rangle| + |\langle T(y), y \rangle| \\ &= |\langle T(x/\|x\|), x/\|x\| \rangle| \|x\|^2 + |\langle T(y/\|y\|), y/\|y\| \rangle| \|y\|^2 \\ &\leq C\|x\|^2 + C\|y\|^2 = C(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2) \\ &= C(2\|u\|^2 + 2\|v\|^2) = 4C\|T(v_0)\|. \end{aligned}$$

Como $T(v_0) \neq 0$ concluímos que $\|T(v_0)\| \leq C$. Mostramos que $\|T(v_0)\| \leq C$ para qualquer $v_0 \in H$ com $\|v_0\| = 1$ e $T(v_0) \neq 0$, disto segue que $\|T(v_0)\| \leq C$ para qualquer $v_0 \in H$ com $\|v_0\| = 1$ pois se $T(v_0)$ é imediato. Portanto $\|T\| \leq C$. ■

Proposição 4.2.1. Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjunto. Então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T .

Prova. Caso $T \equiv 0$ é imediato. Suponhamos $T \neq 0$. Pelo Lema 4.2.2, existe uma sequência (v_n) em H tal que $\|v_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ e $|\langle T(v_n), v_n \rangle| \rightarrow \|T\|$. Como $(\langle T(v_n), v_n \rangle)$ é uma sequência limitada, então existe uma subsequência $(\langle T(u_n), u_n \rangle)$ com $\langle T(u_n), u_n \rangle \rightarrow \lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Devido a $|\langle T(u_n), u_n \rangle| \rightarrow \|T\|$ temos que $\lambda = \|T\|$ ou $\lambda = -\|T\|$. Vamos mostrar que λ é um autovalor de T . Como T é autoadjunto e $\|u_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T(u_n) - \lambda u_n\|^2 = \langle T(u_n) - \lambda u_n, T(u_n) - \lambda u_n \rangle \\ &= \|T(u_n)\|^2 - \lambda \langle T(u_n), u_n \rangle - \lambda \langle u_n, T(u_n) \rangle + \lambda^2 \|u_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle T(u_n), u_n \rangle + \lambda^2 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim $T(u_n) - \lambda u_n \rightarrow 0$. Como T é compacto e (u_n) é limitada, existe $(T(w_n))$ subsequência convergente de $(T(u_n))$. Logo $T(w_n) - \lambda w_n \rightarrow 0$ e (λw_n) converge (pois $\lambda w_n = T(w_n) - (T(w_n) - \lambda w_n)$) para algum $w_0 \in H$. Veja que $w_0 \neq 0$ pois $\|\lambda w_n\| = \|T\| \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Daí

$$T(w_0) = T(\lim \lambda w_n) = \lim \lambda T(w_n) = \lambda \lim (T(w_n) - \lambda w_n + \lambda w_n) = \lambda w_0. \quad \blacksquare$$

Corolário 4.2.1.1. Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjunto. Então

$$\sigma(T) \subset \overline{N(T)} \subset B(0, \|T\|).$$

Corolário 4.2.1.2. Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ autoadjunto. Se $\sigma(T) = \{0\}$ então $T \equiv 0$.

Prova. Se $T \neq 0$ então $\|T\| \in \sigma(T) = \{0\}$, absurdo pois $\|T\| \neq 0$. ■

Teorema 4.2.3. (Teorema espectral para operadores compactos e auto-adjuntos).
Sejam $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjunto, $H_0 = \ker(T)$ e $H_1 = \ker(T)^\perp$ com $\dim H_1 = \infty$.

Então existem uma base de Hilbert (e_n) de H_1 e, para cada e_n , $\lambda_n \in \sigma_p(T) - \{0\}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

e

$$T(e_n) = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, dado $v \in H$ existe $v_0 \in H_0$ tal que

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Logo

$$T(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Prova. Seja (μ_n) uma sequência de termos distintos de todos os autovalores não nulos de T (existe pelo Teorema [4.2.2](#)) a qual satisfaz $\lim \mu_n = 0$. Defina

$$\mu_0 := 0, \quad W_0 := H_0 = \ker(T) \quad \text{e} \quad W_n := \ker(\mu_n I - T) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmção: $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n$.

Vejamos que $(W_n)_{n=0}^{\infty}$ é mutualmente ortogonal.

De fato, dados $u \in W_m$ e $v \in W_n$ com $m \neq n$, então, como T é auto-adjunto,

$$\mu_m \langle u, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = \mu_n \langle u, v \rangle,$$

o fato que $\overline{\mu_n} = \mu_n$ é decorrente da Observação [1.4.2](#). Logo $(\mu_m - \mu_n) \langle u, v \rangle = 0$, ou seja, $\langle u, v \rangle = 0$.

Considere V o espaço gerado pelos espaços $(W_n)_{n=0}^{\infty}$, ou seja, $V = [\bigcup_{n=0}^{\infty} W_n]$.

Devemos mostrar que V é denso em H .

De fato, veja que $T(V) \subset V$, pois

$$T \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i w_i \right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T(w_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mu_i w_i \in V$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ e $w_0 \in W_0, \dots, w_n \in W_n$. Consequentemente $T(V^\perp) \subset V^\perp$, pois dado $u \in V^\perp$, como T é auto-adjunto, temos que

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = 0 \quad \forall v \in V.$$

Desta forma podemos definir $T_0 := T|_{V^\perp} : V^\perp \rightarrow V^\perp$. Note que T_0 herda de T as propriedades de ser auto-adjunto e compacto. Vamos mostrar que $\sigma(T_0) = \{0\}$. Suponha, por contradição, que existe $\lambda \in \sigma(T_0) - \{0\} = \sigma_p(T_0) - \{0\}$, então existe $v \in V^\perp - \{0\}$ tal que $T_0(v) = \lambda v$. Então λ é autovalor não nulo de T , digamos $\lambda = \mu_n$ com $n \in \mathbb{N}$. Logo $v \in W_n \subset V$. Como $v \in V^\perp \cap V$, temos que $v = 0$, contradição. Aplicando o Corolário 4.2.1.2 temos que $T_0 \equiv 0$, ou seja, T se anula em V^\perp . Daí $V^\perp \subset \ker(T) \subset V$. Como $V \cap V^\perp = \{0\}$ temos que $V^\perp = \{0\}$, e pela continuidade do produto interno obtemos que $(\overline{V})^\perp = \{0\}$. Portanto $H = \overline{V}$, já que $H = \overline{V} \oplus (\overline{V})^\perp$. Ficando assim demonstrada a afirmação.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixe uma base ortonormal β_n de W_n (existe devido a $\dim W_n < \infty$). Como cada β_n é finito, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n$ é enumerável. Considere uma sequência $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ com $\{e_1, e_2, \dots\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n$ e com os primeiros elementos de β_1 , os seguintes β_2 e assim por diante. Defina (λ_n) tal que λ_n é autovalor de e_n para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$(\lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots, \mu_n, \dots).$$

Como $\lim \mu_n = 0$, temos que $\lim \lambda_n = 0$. Além disso,

$$T(e_n) = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela Afirmação e o Teorema 1.3.3, dado $v \in H$ temos que

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} P_{W_n}(v) = P_{W_0}(v) + \sum_{n=1}^{\infty} P_{W_n}(v) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n,$$

onde $v_0 = P_{W_0}(v) \in W_0 = \ker(T)$. Portanto

$$T(v) = T(v_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

■

Observação 4.2.2. Se $\dim H_1 < \infty$, então seguindo os argumentos da prova do Teorema (de forma mais simples) temos que existem uma base ortonormal (e_1, \dots, e_k) de H_1 e, para cada e_n , $\lambda_n \in \sigma_p(T) - \{0\}$ tais que

$$T(e_n) = \lambda_n e_n \quad \forall n = 1, \dots, k.$$

Além disso, dado $v \in H$ existe $v_0 \in H_0$ tal que

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^k \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Logo

$$T(v) = \sum_{n=1}^k \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Teorema 4.2.4. Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjunto com H espaço de Hilbert separável. Então existem uma base de Hilbert (e_n) formada por autovetores de H e, para cada e_n , $\lambda_n \in \sigma_p(T)$ tais que $\lim \lambda_n = 0$ e dado $v \in H$ temos que

$$T(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Prova. Análoga à prova do Teorema [4.2.3](#) até quando vamos definir a base de Hilbert de H . Para isto use o Teorema [1.3.4](#) no $H_0 = W_0$ para obter β_0 base de Hilbert de H_0 . Por fim considere $\bigcup_{n=0}^{\infty} \beta_n$ e mostra-se, de forma análoga ao Teorema [4.2.3](#), que é base de Hilbert para H . ■

Uma consequência disto é que obtemos um “modelo diagonal” em ℓ^2 para um operador $T \in \mathcal{K}(H)$ auto-adjunto com H separável. De fato, considerando as notações do Teorema [4.2.4](#), defina $U : H \rightarrow \ell^2$ e $\tilde{T} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ lineares tais que

$$U(e_n) = \tilde{e}_n \text{ e } \tilde{T}(\tilde{e}_n) = \lambda_n \tilde{e}_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\tilde{e}_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ com 1 na n -ésima entrada. Sabe-se que (\tilde{e}_n) é base de Hilbert de ℓ^2 . Logo

$$U \circ T = \tilde{T} \circ U \tag{4.3}$$

e U é unitário. U é unitário pois devido ao Corolário [1.3.3.1](#) tem-se que

$$\|U(v)\| = \left\| U \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n \right) \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle| \|\tilde{e}_n\| = \|v\| \quad \forall v \in H.$$

Pela identidade de polarização ([1.6](#)) temos que

$$\langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in H.$$

Como U é invertível, já que leva base em base, concluímos que

$$\langle U(u), v \rangle = \langle U(u), U(U^{-1}(v)) \rangle = \langle u, U^{-1}(v) \rangle \quad \forall u, v \in H.$$

Portanto U é unitário.

A equação ([4.3](#)) é um caso de ([3.1](#)), assim encontramos um modelo desta forma: veja que \tilde{T} é um operador diagonal, como visto no Exemplo [3.2.6](#) temos que a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ com $g(n) = \lambda_n$ é tal que $g \in \ell^\infty$ e $\tilde{T} = M_g$. Portanto

$$U \circ T = M_g \circ U. \tag{4.4}$$

4.3 Aplicação no princípio minimax de Courant-Rayleigh

Apresentaremos uma aplicação para o Teorema [4.2.3](#) num importante resultado usado para aproximar e estimar autovalores de operadores compactos. Como esperado, este resultado é uma generalização do caso em dimensão finita.

Seja $T \in \mathcal{K}(H)$ um operador positivo. Sabe-se pela Observação [1.4.2](#) que os autovalores de T são não negativos. Se $\dim \ker(T)^\perp = \infty$ ou $\dim \ker(T)^\perp < \infty$ então, pelo Teorema [4.2.3](#) ou pela Observação [4.2.2](#), podemos considerar (λ_n) a sequência decrescente de todos os autovalores não nulos de T (contando com a multiplicidade) que é finita (caso $\dim \ker(T)^\perp < \infty$) ou infinita (caso $\dim \ker(T)^\perp = \infty$) tendendo a zero.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots > 0. \tag{4.5}$$

Proposição 4.3.1. (Princípio minimax de Courant-Rayleigh). Sejam $T \in \mathcal{K}(H)$ positivo e (λ_n) a sequência definida anteriormente. Então

$$\lambda_k = \max_{\substack{\dim V=k \\ V \subset \ker(T)^\perp}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} \quad (4.6)$$

e

$$\lambda_k = \min_{\dim V=k-1} \max_{v \in V^\perp - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} \quad (4.7)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ com λ_k definido.

Prova. Fazemos para $\dim \ker(T)^\perp = \infty$, pois o caso $\dim \ker(T)^\perp < \infty$ é análogo com diferenças na notação. Pelo Teorema 4.2.3 podemos fixar uma base de Hilbert (e_n) de $\ker(T)^\perp$ tal que dado $v \in H$ existe $v_0 \in \ker(T)$ com

$$v = v_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle v, e_n \rangle e_n \quad e \quad T(v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n. \quad (4.8)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle T(v), v \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle v, e_n \rangle \left(\langle e_n, v_0 \rangle + \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{\langle v, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle v, e_n \rangle \overline{\langle v, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \\ \langle T(v), v \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle v, e_n \rangle|^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

e pelo Corolário 1.3.3.1 temos que

$$\|v\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v, e_n \rangle|^2. \quad (4.10)$$

Denote, para cada $k \in \mathbb{N}$, $V_k = [e_1, \dots, e_k]$. Mostremos (4.6). Fixe $k \in \mathbb{N}$. Dado $v \in V_k$, por (4.9), (4.5) e (4.10), temos que

$$\langle T(v), v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle v, e_n \rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^k \lambda_n |\langle v, e_n \rangle|^2 \geq \lambda_k \sum_{n=1}^k |\langle v, e_n \rangle|^2 = \lambda_k \|v\|^2.$$

Logo

$$\inf_{v \in V_k - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} \geq \lambda_k.$$

Veja que este ínfimo é atingido quando $v = e_k$. Assim

$$\min_{v \in V_k - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} = \lambda_k. \quad (4.11)$$

Disto segue que

$$\lambda_k \leq \sup_{\substack{\dim V = k \\ V \subset \ker(T)^\perp}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2}. \quad (4.12)$$

Observe que este mínimo é atingido devido a função $\langle T(\cdot), \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ ser contínua, $S[0, 1]$ ser compacto e

$$\inf_{v \in V - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} = \inf_{v \in V - \{0\}} \left\langle T \left(\frac{v}{\|v\|} \right), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \inf_{v \in S[0,1]} \langle T(v), v \rangle$$

para qualquer $V \subset \ker(T)^\perp$ com $\dim V = k$.

Afirmção 1: Dado $V \subset \ker(T)^\perp$ com $\dim V = k$ existe $v_0 \in V - \{0\}$ tal que

$$\frac{\langle T(v_0), v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \leq \lambda_k.$$

Supondo provada a Afirmção 1 concluímos que

$$\lambda_k \geq \sup_{\substack{\dim V = k \\ V \subset \ker(T)^\perp}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Disto e (4.12) segue que

$$\lambda_k = \sup_{\substack{\dim V = k \\ V \subset \ker(T)^\perp}} \min_{v \in V - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2},$$

e como este supremo é atingido quando $V = V_k$, vide (4.11), obtemos (4.6).

Provemos agora a Afirmção 1. Seja $V \subset \ker(T)^\perp$ com $\dim V = k$. Considere a projeção ortogonal sobre V_k ($\tilde{P}_k : H \rightarrow V_k$) restrita a V ($P_k = \tilde{P}_k|_V : V \rightarrow V_k$).

Caso 1: P_k não é injetor.

De fato, seja $v_0 \in \ker(P_k) \subset V$ não nulo. Então $v_0 \in V - \{0\}$ e $\tilde{P}_k(v_0) = 0$, ou seja, $v_0 \in (V \cap V_k^\perp) - \{0\}$. Portanto, por (4.9), (4.5) e (4.10),

$$\langle T(v_0), v_0 \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle v_0, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n |\langle v_0, e_n \rangle|^2 \leq \lambda_{k+1} \|v_0\|^2 \leq \lambda_k \|v_0\|^2.$$

Caso 2: P_k é injetor.

De fato, como $\dim V = \dim V_k = k < \infty$ temos que P_k é bijetor. Assim existe $v_0 \in V$ tal que $P_k(v_0) = e_k$. Note que

$$v_0 = e_k + v_0 - P_k(v_0) = e_k + w$$

onde $w = v_0 - P_k(v_0) \in V_k^\perp$. Portanto, por T ser auto-adjunto,

$$\begin{aligned} \langle T(v_0), v_0 \rangle &= \langle T(e_k), e_k \rangle + \langle T(w), e_k \rangle + \langle w, T(e_k) \rangle + \langle T(w), w \rangle \\ &= \lambda_k + 2\langle w, \lambda_k e_k \rangle + \langle T(w), w \rangle = \lambda_k + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle w, e_n \rangle|^2 \\ &\leq \lambda_k + \lambda_{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle w, e_n \rangle|^2 = \lambda_k + \lambda_{k+1} \|w\|^2 \leq \lambda_k (\|e_k\|^2 + \|w\|^2) \\ &= \lambda_k (\|e_k\|^2 + 2\langle e_k, w \rangle + \|w\|^2) = \lambda_k \|e_k + w\|^2 = \lambda_k \|v_0\|^2. \end{aligned}$$

Ficando assim demonstrada a Afirmação 1 e (4.6).

Mostremos (4.7). Fixe $k \in \mathbb{N}$. Dado $v \in V_{k-1}^\perp - \{0\}$, por (4.9), (4.5) e (4.10), temos que

$$\langle T(v), v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle v, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_k |\langle v, e_n \rangle|^2 \leq \lambda_k \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2 = \lambda_k \|v\|^2.$$

Logo

$$\sup_{v \in V_{k-1}^\perp - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} \leq \lambda_k.$$

Veja que este supremo é atingido quando $v = e_k$. Assim

$$\max_{v \in V_{k-1}^\perp - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2} = \lambda_k. \quad (4.13)$$

Disto segue que

$$\lambda_k \geq \inf_{\dim V = k-1} \max_{v \in V^\perp - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2}. \quad (4.14)$$

Observe que este máximo é atingido devido a função $\langle T(\cdot), \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ ser fracamente contínua e $B[0, 1]$ ser fracamente compacto (para mais detalhes consulte [3]).

Afirmção 2: Dado $V \subset H$ com $\dim V = k - 1$ existe $v_0 \in V^\perp - \{0\}$ tal que

$$\frac{\langle T(v_0), v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \geq \lambda_k.$$

Supondo provada a Afirmção 2 concluímos que

$$\lambda_k \leq \inf_{\dim V = k-1} \max_{v \in V^\perp - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Disto e (4.14) segue que

$$\lambda_k = \inf_{\dim V = k-1} \max_{v \in V^\perp - \{0\}} \frac{\langle T(v), v \rangle}{\|v\|^2},$$

e como este ínfimo é atingido quando $V = V_k$, vide (4.13), obtemos (4.7).

Provemos agora a Afirmção 2. Seja $V \subset H$ com $\dim V = k - 1$. Considere a projeção ortogonal sobre V ($\tilde{Q}_k : H \rightarrow V$) restrita a V_k ($Q_k = \tilde{Q}_k|_{V_k} : V_k \rightarrow V$). Como $\dim V = k - 1 < k = \dim V_k$, existe $v_0 \in V_k - \{0\}$ tal que $\tilde{Q}_k(v_0) = Q_k(v_0) = 0$, ou seja, $v_0 \in (V_k \cap V^\perp) - \{0\}$. Portanto,

$$\langle T(v_0), v_0 \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle v_0, e_n \rangle|^2 \geq \lambda_k \sum_{n=1}^k |\langle v_0, e_n \rangle|^2 = \lambda_k \|v\|^2.$$

Ficando assim demonstrada a Afirmção 2 e (4.7). ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARTTLE, R. **The elements of integration and Lebesgue measure.** New York: Jonh Willeys & Songs Inc, 1995. 179 p.
- [2] BOTELHO, G. M. A.; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V. **Fundamentos de Análise Funcional.** 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 411 p.
- [3] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** New York: Springer, 2010. 599 p.
- [4] KOWALSKI, E. **Spectral theory in Hilbert spaces.** Junho de 2009. 130 p. Notas de Aula.
- [5] LIEB, E. H.; Loss, M. **Analysis.** 2.ed. Providence: American Mathematical Society, 2001. 346 p.
- [6] LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 299 p.
- [7] SAXE, K. **Beginning Functional Analysis.** New York: Springer, 2002. 197 p.