

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Adelson Carlos Madruga

**Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo
retângulo: contribuições à prática docente**

Rio Tinto – PB
2015

Adelson Carlos Madruga

Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo: contribuições à prática docente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba – Campus IV como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva

Rio Tinto – PB
2015

M178a Madruga, Adelson Carlos.

Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo: contribuições à prática docente. / Adelson Carlos Madruga. – Rio Tinto: [s.n.], 2015.

68 f. : il.-

Orientador (a): Prof. Msc. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva.
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Geometria - matemática. 2. Geometria - estudo e ensino. 3. Matemática - ensino e aprendizagem.

UFPB/BS-CCAE

CDU: 514(043.2)

Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo: contribuições à prática docente

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientadora: Profª. Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva

Aprovado em: 15 / 12 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva
Profª. Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva – UFPB/DCX (Orientadora)

Cibelle de F. Castro de Assis
Profª. Drª. Cibelle de Fátima Castro de Assis – UFPB/DCX

Rogéria Gaudencio do Rêgo
Profª. Drª. Rogéria Gaudencio do Rêgo – UFPB/DM

Aos meus heróis, meus pais, Luzia Felix
e Antonio Madruga, pelo amor
incondicional, dedicação e apoio
irrestrito em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é admitir que precisamos um do outro; é reconhecer que não chegamos a lugar algum sozinhos. Para que hoje esse estudo viesse a existir foi preciso a colaboração de um conjunto de pessoas, que, cada qual à sua maneira, contribui durante essa caminhada. Nomear essas pessoas se torna uma tarefa difícil; corro o risco de deixar algum nome de fora, entretanto, trago aqui alguns agradecimentos em especial.

Agradeço, primeiramente, a DEUS, por guiar meu caminho e permanecer presente em todos os momentos de minha vida, dando-me condições para alcançar essa tão sonhada e importante conquista;

Aos meus pais, Antonio Madruga e Luzia Felix, por se doarem integralmente, me propiciando uma base sólida para que cada etapa desse caminho fosse conquistada. Sem eles, definitivamente, esse sonho não teria se concretizado;

Aos meus irmãos, Francineide Madruga e Jaelson Madruga, por acreditarem em mim quando eu estava desacreditado, pelo carinho incondicional e por tornarem todas as dificuldades dessa caminhada superáveis;

Aos demais familiares, por todo apoio e credibilidade em mim depositada. Em especial, à Arioneide Soares, Dalva Madruga, Dioge Fernando, Dhiene Iasmin, Elza Florêncio, Fabiane Madruga, Francileide Madruga, Francisdalva Madruga, Hosana Felix, Kleyton Madruga, Lúcia Silva, Pedro Felix, Renata Cristina, Rosilda Silva e Severina Silva, pelos momentos de descontração, pelo apoio permanente e por terem sido meu abrigo nos momentos em que precisei;

Às amigas de escola, com os quais ainda tenho contato, Ana Maria e Asneth Êmilly, por compartilharem comigo, desde a infância, os principais acontecimentos de minha vida;

Aos irmãos que a vida me presenteou, Elizangela Silva e Pzeus Rodrigues, pelo companheirismo e por se fazerem presentes em todos os momentos dessa caminha, tornando-a mais leve e mais agradável;

Ao meu grande amigo, Adjancey Arnor, pela amizade sincera, pelo apoio em todos os momentos e por sempre estar disponível quando dele precisei;

Aos colegas de turma, Bruno Gomes, Francinaldo de Meireles, Ivania Dias, Marcelino José, Rafael Oliveira, Ramon Castro, Renata Karla e Ubiratan Barbosa, pelos momentos exaustivos de estudos e, principalmente, por compartilharem comigo momentos de alegrias e de conquistas;

Aos colegas que fiz durante a graduação, Aldair Santos, Alindemon Severino, Ana Paula, Anne Souza, Erisson Fernandes, Jéssica Almeida, Maria Verônica, Mariana Azevedo, Sandra Maria, Saulo Costa, Sônia Souza, Sueily Ferreira e Rosilanne Guimarães, por todos os momentos vividos juntos;

Aos colegas de trabalho, em especial, à Sabrina Rivad'avia e Riziany Oliveira, pela amizade e pelo apoio constante;

À minha orientadora, Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva, por toda paciência, compreensão e dedicação durante a elaboração desse trabalho;

À professora Cibelle de Fátima Castro de Assis, por aceitar o convite de participar da banca examinadora e por contribuir com essa pesquisa desde o momento da reformulação do tema;

À professora Rogéria Gaudencio do Rêgo, por aceitar o convite de fazer parte da banca e pelas valiosas contribuições dadas a essa pesquisa;

Aos professores da graduação, em especial, à Agnes Liliane, Cibelle Castro, Claudilene Gomes, Jussara Paiva, Marcos André, Jamilson Campos e Givaldo de Lima, por se mostrarem sempre disponíveis em todos os momentos que deles precisei;

Aos meus alunos e ex-alunos, principal inspiração para realização dessa pesquisa, por me fazerem acreditar a cada dia que escolhi a profissão certa;

À professora e aos alunos, sujeitos dessa pesquisa, pela disponibilidade e colaboração.

A todos vocês,
Meus sinceros agradecimentos.

Eu não sei se você se recorda do seu primeiro caderno, eu me recordo do meu. Com ele eu aprendi muita coisa, foi nele que eu descobri que a experiência dos erros, ela é tão importante quanto as experiências dos acertos, porque vistos de um jeito certo, os erros, eles nos preparam para nossas vitórias e conquistas futuras, porque não há aprendizado na vida que não passe pelas experiências dos erros.

Pe. Fábio de Melo

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo investigar as contribuições dos erros cometidos por alunos da 1^a série do Ensino Médio em questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo para a prática docente. A pesquisa é de natureza qualitativa e, de acordo com seus objetivos, caracteriza-se como uma pesquisa pedagógica. O levantamento de dados contou com a colaboração de 72 alunos da 1^a série do Ensino Médio e uma professora de Matemática de uma escola pública da rede estadual de ensino. Para coleta dos dados, utilizou-se como instrumento o questionário. A análise dos erros dos alunos mostrou que as principais dificuldades apresentadas por eles estão na compreensão do enunciado das questões, na representação dos dados na linguagem algébrica e/ou pictórica, em definir as razões trigonométricas e utilizá-las corretamente. Em relação à prática do professor pesquisado, ficou visível que em alguns momentos o erro ainda é tomado como um elemento negativo da aprendizagem. Mas, de modo geral, a professora deixou evidente que o erro possibilita a autoavaliação de sua prática e é um elemento que contribui na aprendizagem dos alunos. Desse modo, a análise de erros permite ao professor um acompanhamento mais amplo do processo de ensino-aprendizagem, permitindo-o (re)orientar sua prática em sala de aula e minimizar as dificuldades dos alunos.

Palavras-chave: Análise de erros. Razões trigonométricas no triângulo retângulo. Prática docente.

ABSTRACT

This study has the purpose of investigating contribuition for teaching practice from errors made by students from the first year of High School in problems involving trigonometric ratios in right triangles. This research is qualitative and due to its purposes, is characterised as a pedagogical research. The collection of data was made by the contribuition of 72 students from the first year of High School and one mathematic teacher from a public school in the state education network. For the collection of data, a questionnaire was used as an instrument. The analysis of students' errors indicate that their main difficulties lies on comprehending the questions' wording, representing the data with algebraic or pictorial language, defining trigonometric ratios and using them correctly. Regarding the researched teacher's technique, in some instances, it was noticeable that errors are still seen as a negative element in learning. Nevertheless, generally speaking the teacher made clear that errors enable self evaluation of her practice and it is an element which contributes to students learning. Thus, the errors' analysis enable the teacher to monitor more widely the teaching and learning process, allowing her to conduct her technique inside the classroom and to minimize students' difficulties.

Keywords: Analysis of errors. Trigonometric ratios in right triangle. Teaching practice.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de item do descritor 5 do Saeb.....	32
Figura 2 – Triângulo retângulo.....	41
Figura 3 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A2.....	42
Figura 4 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A45.....	42
Figura 5 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A38.....	43
Figura 6 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A13.....	43
Figura 7 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A60.....	44
Figura 8 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A49.....	44
Figura 9 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A26.....	45
Figura 10 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A61.....	45
Figura 11 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A52.....	46
Figura 12 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A34.....	46
Figura 13 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A29.....	46
Figura 14 – Solução da questão 3 apresentada pelo aluno A1.....	47
Figura 15 – Solução da questão 3 apresentada pelo aluno A30.....	48
Figura 16 – Solução da questão 4 apresentada pelo aluno A28.....	50
Figura 17 – Representação geométrica da questão 5	51

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Taxonomia de Borasi para os usos dos erros.....	22
Quadro 2 – Categorias de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	37

LISTA DE ABREVIATURAS/SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
FA	Frequência absoluta
FR	Frequência relativa
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PB	Paraíba
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
Saeb	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
1.1 Apresentação.....	13
1.2 Justificativa e Problemática	14
1.3 Objetivos.....	15
1.3.1 Objetivo Geral	15
1.3.2 Objetivos específicos	16
1.4 Considerações Metodológicas	16
2. A ANÁLISE DE ERROS E O ENSINO DE TRIGONOMETRIA.....	18
2.1 O erro no processo de ensino-aprendizagem	18
2.1.1 Análise de erros: retrospectiva histórica e perspectivas atuais	19
2.1.2 A análise de erros como metodologia de ensino	24
2.1.3 Análise de erros e formação de professores.....	26
2.2 O ensino de Trigonometria no Ensino Médio.....	28
2.2.1 Dificuldades de aprendizagem em trigonometria no triângulo retângulo	31
2.2.2 A resolução de problemas em Matemática: uma proposta para o ensino de Trigonometria	33
3. DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DOS DADOS.....	36
3.1 Metodologia da intervenção	36
3.2 Descrição da intervenção e análise dos resultados.....	38
3.2.1 Análise de erros: o que nos mostram as respostas dos alunos?.....	39
3.2.2 Análise do questionário do professor	52
CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
REFERÊNCIAS	60
APÊNDICES	63
APÊNDICE A – Questionário do aluno	63
APÊNDICE B – Questionário do professor.....	65

1. INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

O processo de ensino-aprendizagem é constituído por etapas que são desenvolvidas com base em diversos elementos. Dentre esses elementos, destacamos aqui o erro, que vem sendo objeto de investigação no ensino da Matemática desde o século XX e é abordado em sala de aula em duas perspectivas antagônicas: o erro enquanto indicador de fracasso e o erro como elemento construtivo da aprendizagem.

Na perspectiva do erro enquanto indicador de fracasso, ele é considerado como algo que não deveria acontecer, que uma vez acontecendo deve ser eliminado sem a investigação, pois é reconhecido como uma falha na aprendizagem do aluno. Desse modo, o acerto e o erro passam a serem peças fundamentais na compreensão do que os alunos não sabem e do que eles aprenderam de forma quantitativa. No entanto,

[...] quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma situação-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras de como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. (CURY, 2008, p. 13)

Nesse ponto de vista, o erro como elemento construtivo da aprendizagem permite ao professor ter uma melhor compreensão do raciocínio utilizado pelo aluno e dos caminhos percorridos por ele na resolução de uma determinada questão. Portanto, a análise de erros vai além de pontuar as dificuldades dos alunos, ela torna os erros enxergáveis e auxilia o professor a definir novas situações de aprendizagem que permitam aos alunos traçarem novas estratégias e levantarem novas hipóteses para se chegar até o acerto, tornando-se, assim, um sujeito ativo no processo da aprendizagem. Pois, “[...] a autonomia desenvolve-se a partir da interação do sujeito com suas estruturas internas, com outros sujeitos e os objetos de conhecimento e não, apenas, de orientações, apelos e lições dos docentes” (ROSSO; BERTI, 2010, p. 1007).

Entretanto, é preciso que o professor comprehenda as estruturas intelectuais de seus alunos, pois só assim ele será capaz de promover um ensino que atenda às necessidades deles.

Por isso, é necessário que ele veja nos erros a oportunidade de (re)organizar o seu ensino, levando em consideração as ideias prévias e os conflitos cognitivos desses alunos.

O presente trabalho se encontra estruturado da seguinte forma: ainda nessa introdução, trazemos a justificativa pela escolha da temática estudada, os questionamentos que impulsionaram as nossas investigações, o objetivo geral e os específicos e as considerações metodológicas.

No primeiro Capítulo, encontram-se os pressupostos teóricos que fundamentam nossa pesquisa. Nele trazemos uma abordagem da análise de erros ao longo do tempo, destacando suas contribuições enquanto metodologia de ensino. Trazemos também algumas considerações sobre o ensino e as dificuldades de aprendizagem em trigonometria no triângulo retângulo.

No segundo Capítulo, apresentamos a metodologia da investigação e a análise dos resultados, descrevendo os instrumentos utilizados e o processo de levantamento e análise de dados, destacando a análise dos erros dos alunos e as opiniões da professora em relação ao ensino da trigonometria no triângulo retângulo e os erros no processo de ensino-aprendizagem.

Nas Considerações Finais, buscamos responder os nossos questionamentos iniciais, retomando nossos objetivos, geral e específico, analisando-os se foram atingidos. Além disso, trazemos uma discussão sobre algumas possibilidades da análise de erros no ensino das razões trigonométricas.

1.2 Justificativa e Problemática

Nesse panorama do erro na aprendizagem escolar, o desejo para realização desta pesquisa, envolvendo análise de erros e as razões trigonométricas no triângulo retângulo, surgiu a partir do estágio extracurricular na escola Hello – Colégio e Cursos (2012 – 2013), situada na cidade de Jacaraú – PB, onde atuamos na função de professor de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Ao iniciar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo no 9º ano do Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, percebemos que muitos alunos demonstravam insegurança em relação a esse conteúdo, principalmente quando se tratava de resolver

questões contextualizadas. Durante o desenvolvimento das aulas, os alunos demonstraram dificuldades na resolução das questões, apresentando erros por não saberem interpretar o enunciado, por não compreenderem qual razão trigonométrica utilizar na resolução e por dificuldades em conteúdos matemáticos estudados nos anos anteriores.

Quando os alunos realizaram a avaliação escrita surgiram os mesmos erros que apareceram durante as atividades realizadas nas aulas. Identificamo-los na avaliação e realizamos a correção das questões na lousa procurando minimizar as dúvidas dos alunos. Para os que não atingiram a nota 7,0¹ aplicamos a atividade de recuperação, mas alguns alunos ainda apresentaram as mesmas dificuldades em relação ao conteúdo.

Começamos a perceber que só identificar os erros dos alunos e fazer a correção das atividades na lousa não se mostrava uma prática efetiva na superação das dificuldades dos alunos. Começamos a refletir sobre como proceder em casos como esses: O que pode ser feito para amenizar as dificuldades dos alunos? Por que eles erram tanto? Será que os erros dos alunos podem orientar a prática do professor em sala de aula? Como usar os erros dos alunos em favor da aprendizagem?

Em vista a esse cenário, nossa pesquisa parte da seguinte problemática: *Os erros dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, ao resolverem questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, podem orientar a prática docente?* A priori, acreditamos que os erros podem contribuir positivamente com o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e, em especial, da trigonometria no triângulo retângulo. Entretanto, buscamos responder o nosso questionamento a partir da análise da produção escrita dos alunos e da vivência do professor em sala de aula.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Esta pesquisa tem como objetivo geral investigar os erros cometidos por alunos da 1ª série do Ensino Médio em questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo e discutir sobre suas possíveis contribuições para a prática docente.

¹ Nota mínima exigida para aprovação do aluno de acordo com o regulamento da escola supracitada.

1.3.2 Objetivos específicos

Na perspectiva de atingir o nosso objetivo geral, delineamos os seguintes objetivos específicos:

- a) Elaborar e aplicar questionários com os participantes da pesquisa;
- b) Identificar os erros cometidos por alunos da 1^a série do Ensino Médio na resolução de questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, presentes no questionário.
- c) Classificar os erros cometidos por esses alunos;
- d) Investigar a opinião de uma professora de Matemática da 1^a série do Ensino Médio sobre o ensino da trigonometria no triângulo retângulo e o papel do erro no processo de ensino-aprendizagem.

1.4 Considerações Metodológicas

Fundamentada na análise dos erros dos alunos da 1^a série do Ensino Médio ao resolverem questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo e nas contribuições desses erros para a prática docente, esta pesquisa é considerada de caráter qualitativo, uma vez que, de acordo com Silveira e Córdova (2009, p. 32), “os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito [...]. Segundo as mesmas autoras, a pesquisa qualitativa tem como características:

[...] objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever*, *compreender*, *explicar*; precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências. (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32)

Nossa investigação teve como principal campo de estudo a sala de aula e seus constituintes (o professor e os alunos) na busca por contribuições para um melhor desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem do conteúdo citado anteriormente. Nessa perspectiva, nossa pesquisa se caracteriza como uma pesquisa pedagógica, pois,

[...] ela pode contribuir, de forma demonstrável, para melhorar o ensino ou a formação dos alunos. Isto pode acontecer de diferentes maneiras. É por meio da sua própria pesquisa que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que faz com que os alunos tenham um menor rendimento, aprendendo menos do que poderiam. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p. 14)

Entretanto, não nos limitamos às investigações em sala de aula. Levamos em consideração também estudos realizados sobre análise de erros em Matemática por professores e pesquisadores como aporte teórico e subsídios para nossa pesquisa, pois, como afirmam Lankshear e Knobel (2008, p. 16),

[...] não acreditamos que a pesquisa de professores deva ficar confinada à *observação direta ou imediata das salas de aula*. Embora o impacto fundamental buscada pela pesquisa pedagógica seja o que ocorre nas salas de aula, isso não significa que esse fim só seja devidamente atingido pelo estudo empírico direto das salas de aula. Os professores podem aprender muito, informando e orientando sua prática atual por meio de estudos de investigação histórica, antropológica, sociológica ou psicológica e por trabalhos teóricos conduzidos em outros locais e/ou em outras épocas.

Dentre os estudos citados pelos autores que podem contribuir na pesquisa pedagógica, tomamos como apoio para nossa investigação alguns trabalhos teóricos que foram desenvolvidos ao longo do tempo e em diversas partes do mundo. Entretanto, salientamos que nossa pesquisa não se trata de uma pesquisa bibliográfica. O uso de estudos teóricos apenas nos deu suporte às nossas investigações em sala de aula.

2. A ANÁLISE DE ERROS E O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

2.1 O erro no processo de ensino-aprendizagem

Ao adentrarmos nas reflexões a respeito do erro no processo de ensino-aprendizagem vemos que o erro foi e ainda é fonte de punição para a maioria dos alunos. No contexto em que a sociedade é mantida por uma legislação temos configurado um padrão de condutas corretas em que seu descumprimento é considerado como erro e por isso merece punição. Nessa perspectiva, Luckesi (2008) diz que

A idéia e a prática do castigo decorrem da concepção de que as condutas de um sujeito – aqui, no caso, o aluno – que não correspondem a um determinado padrão preestabelecido, merecem ser castigadas, a fim de que ele “pague” por seu erro e “aprenda” a assumir a conduta que seria correta (p. 52).

Segundo Aragão e Freitas (2012), nos anos 1800 os professores utilizavam das férulas, chicotes e palmatórias para manter a ordem e a disciplina na sala de aula, punindo os alunos pelo seu mau comportamento e suas dificuldades de aprendizagem. Também era comum, segundo Luckesi (2008), os professores colocarem os alunos de joelhos sobre grãos de milho ou de feijão ou deixá-los em pé durante a aula, castigando-os física e moralmente, proporcionando situações de desconforto ao corpo e expondo publicamente seus erros e suas dificuldades.

Com o passar do tempo foram surgindo leis que proibiram os castigos físicos nas escolas. Mesmo assim, os professores continuaram a utilizar da sua autoridade para criar um clima de medo e de culpa nos alunos em relação ao erro, punindo-os com a perda de pontos na avaliação, com a gozação do erro e com a ameaça da reprovação.

Luckesi (2008) salienta que, ao ser castigado pelo seu erro na escola, é possível o desenvolvimento de uma compreensão culposa da vida pelos alunos, pois além das implicações que são feitas externamente por causa dos erros, muitas vezes é desenvolvida a autopunição.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto” (BRASIL, 1998, p. 55). Portanto, os erros cometidos pelos alunos devem ser diagnosticados e analisados pelos professores a fim de que eles possam compreender o modo

como seus alunos estão pensando e representando a Matemática, podendo assim desenvolver um trabalho de identificação das dificuldades da aprendizagem dos alunos e de (re)orientação do processo de ensino-aprendizagem.

Ainda segundo Luckesi (2008, p. 54) “a idéia de erro só emerge no contexto da existência de um padrão considerado correto” e a Matemática é uma ciência que se desenvolve na perspectiva do que é verdadeiro ou falso, sendo assim um campo propício de estudo do erro na aprendizagem escolar já que muitos alunos apresentam dificuldades e aversão à Matemática.

Os erros podem servir na promoção da aprendizagem desde que sejam identificados e compreendidos na finalidade de (re)orientar o entendimento e a prática do professor e do aluno. A partir daí, “reconhecendo a origem e a constituição do erro, podemos superá-lo, com benefícios significativos para o crescimento” (LUCKESI, 2008, p. 57).

Se o erro for encarado como fonte de castigo o professor não terá a oportunidade de fazer o aluno refletir sobre ele e a partir dele construir novos conhecimentos. Mas se o erro for considerado como um elemento que dê suporte ao crescimento da aprendizagem, ele será “[...] visto e compreendido de forma dinâmica, na medida em que contradiz o padrão, para, subsequentemente, possibilitar uma conduta nova em conformidade com o padrão ou mais perfeita que este” (LUCKESI, 2008, p. 58).

Quando o professor avalia a produção escrita dos seus alunos surge a oportunidade de analisar quais estratégias foram utilizadas por eles, quais suas dificuldades e o que ocasionou os erros. Nesse sentido, a análise de erros se torna uma ferramenta capaz de permitir ao professor a criação de intervenções que venham explorar os erros dos alunos em benefício da aprendizagem.

2.1.1 Análise de erros: retrospectiva histórica e perspectivas atuais

O estudo sobre o erro no processo de ensino-aprendizagem não é algo recente. A análise de erros se mostrou como uma tendência no ensino de Matemática desde o início do século XX e, de acordo com Rico (1998), tem se caracterizado por interesses e abordagens diferentes ao longo do tempo, apoiando-se em correntes predominantes da Pedagogia e da Psicologia.

Cury (1994), em sua tese doutoral, e Rico (1998)², a partir dos estudos de Radatz (1980)³, trazem uma abordagem histórica da análise de erros nos Estados Unidos e na Europa desde o início do século XX.

O estudo do erro foi marcado por pesquisas realizadas nos Estados Unidos e na Alemanha. Nos Estados Unidos, a análise de erros desenvolvida pelos colaboradores de Thorndike se apoiou nas ideias do behaviorismo⁴ e objetivava a superação do erro por meio de sua eliminação. “A análise de erros limitava-se ao cômputo do número de vezes em que uma operação tinha que ser apresentada para que o aluno desse a resposta correta, ou o tempo necessário para o aluno resolver a operação”. (RESNICK; FORD, 1990, apud CURY, 1994, p. 79).

Outro grande pesquisador do início do século passado foi Buswell. Ao estudar as 31 pesquisas sobre erros em Matemática realizadas na época nos Estados Unidos, Buswell (1925, apud RICO, 1998) ampliou o método da análise de erros utilizando além dos exercícios escritos a observação em sala de aula e a entrevista.

Na Alemanha, no período entre as duas guerras mundiais, os estudos sobre o erro ganhou destaque graça à crescente importância da pedagogia empírica. Weiner (1922), o fundador da investigação didática orientada para o estudo dos erros, de acordo com Rico (1998), estabeleceu padrões de erros com o objetivo de explicar equívocos individuais e os organizou em cinco categorias: os familiares; os persistentes; os semelhantes; os mistos; e os erros relacionados a situações emocionais.

Rico (1998) também aponta os estudos de Seseman (1931), que classificou os erros relativos à aritmética em três tipos: mecânico; associativo; e funcional; e de Rose (1928), que classificou as causas dos erros em: desatenção; desconhecimento das regras; confusão de conceitos; e dificuldades na compreensão de um problema matemático.

Ainda de acordo com Rico (1998), o interesse pela análise de erros na Alemanha continuou a partir dos anos 1960. Dentre os estudos realizados, destacaram-se os de Schlaak (1968), que observou erros pontuais em resolução de problemas; Glück (1971), que analisou erros de cálculos; e Pippig (1977); que estudou os erros em aritmética numa perspectiva psicológica.

² Alguns autores citados nesse capítulo não constam na referência. Eles são citados por Rico (1998).

³ RADATZ, H. Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 16-20. July. 1980.

⁴ Teoria psicológica que tem o comportamento como objeto de estudo.

De acordo com Cury (1994, p. 80), “uma segunda fase na análise de erros aconteceu a partir dos anos 50, sob o enfoque do processamento da informação”. Uma das pesquisas realizadas sob essa corrente, através dos protocolos verbais, foi a de Lankford. Ele estudou as estratégias de resolução de problemas e os padrões de erros envolvendo as quatro operações básicas com números inteiros e racionais de alunos de 7^a série (CURY, 1994).

Estudos como esses proporcionaram o desenvolvimento do programa de computador *Buggy*, por Brown e Burton, que tinha como finalidade estudar erros sistêmicos em operações de subtração (RESNICK; FORD, 1990 apud CURY, 1994).

Na Espanha, os estudos de Villarejo A. e Fernández Huerta J., em 1953, tiveram como foco a investigação dos erros mais comuns na aritmética escolar. A partir de seus estudos, os pesquisadores apresentaram bases para o ensino corretivo através de métodos diagnósticos baseados nos erros apresentados (RICO, 1998).

Na União Soviética, no início dos anos 1960, destacaram-se os estudos de Kuzmitskaya e de Menchinskaya. O estudo de Kuzmitskaya identificou quatro causas de erros: “falha de memória de curto prazo; compreensão insuficiente das condições do problema; erros devido à ausência de regras verbais para a realização de cálculos; erros devido ao uso incorreto das quatro operações básicas” (RICO, 1998, p. 78-79, tradução nossa). Já o estudo de Menchinskaya pesquisou sobre a regularidade dos erros em Educação Matemática e, assim como Kuzmitskaya, identificou quatro causas de erros: realização incorreta de uma operação; compreensão insuficiente de um conceito; distração; uso inadequado de regras ou de algoritmos (RICO, 1998).

O relato histórico apresentado até o momento nos mostra que as pesquisas do início do século XX até por volta dos anos 1960 tiveram como foco, em sua maioria, o estudo dos erros dos alunos em aritmética. Observa-se também que esses estudos parecem considerar o erro como sinônimo de fracasso, como algo que deve ser evitado. Diferente dessa concepção, a noção de construtivismo presente na obra de Piaget nos traz uma nova ideia da representação do erro no processo de construção do conhecimento.

Na perspectiva piagetiana, quando se leva em consideração a construção do conhecimento, o erro é um elemento que necessita ser analisado para ser compreendido. Pois “ao mesmo tempo em que é resposta a uma determinada questão, o erro é também a colocação de um problema que suscita novas soluções” (PINTO, 2000, p. 41).

Uma nova abordagem da análise de erros em Matemática é apresentada pela pesquisadora italiana Rafaella Borasi. Em seu estudo intitulado “Students' Constructive Uses

of Mathematical Errors: A Taxonomy”, a pesquisadora apresenta a taxonomia de usos construtivos dos erros que aborda a análise de erros em duas perspectivas: no seu sentido tradicional de identificar, classificar e eliminar o erro do aluno; e no sentido construtivo, com o intuito de proporcionar ao aluno usar o erro de forma construtiva em apoio a sua aprendizagem (BORASI, 1989).

Na taxonomia, Borasi (1989) propõe novas abordagens dos erros no processo de ensino-aprendizagem, destacando variáveis e dimensões importantes que professores e pesquisadores devem saber perante o planejamento de atividades que fazem uso de erros. Apresentamos, no Quadro 1, a taxonomia de Borasi para os usos dos erros, em sua última versão, adaptada e traduzida por Cury (2008).

Quadro 1 – Taxonomia de Borasi para os usos dos erros

Nível de discurso matemático			
Objetivo da aprendizagem	Realização de uma tarefa matemática específica	Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático	Compreensão sobre a natureza da Matemática
Remediação	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática ou de conteúdos específicos.
Descoberta	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
Pesquisa	Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a <i>insights</i> e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemática.

Fonte: Borasi (1996 apud, CURY, 2008, p. 37)

Para Borasi (1989), as variações apresentadas na taxonomia podem contribuir para a aprendizagem dos alunos de diferentes maneiras, dependendo da necessidade ou dos objetivos estabelecidos pelo professor. Entretanto, quando todas as nove variações são levadas em

consideração e utilizadas nas aulas de Matemática os benefícios podem ser bem maiores. Ao utilizar a taxonomia é importante que o professor faça adaptações necessárias a realidade dos seus alunos, com a finalidade de obter sucesso na implementação.

No Brasil, as pesquisas encontradas envolvendo análise de erros em Matemática foram desenvolvidas a partir da década de 1980 (CURY, 2008). Dentre os estudos realizados, destacaremos aqui os de Cury (1988, 1990, 1994), de Moren, David e Machado (1992), Batista (1995) e de Pinto (1998), por se apresentarem como alguns dos primeiros trabalhos desenvolvidos na área.

Cury (1988), em sua dissertação de mestrado, analisou os erros cometidos por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática em demonstrações de geometria plana. Após a análise dos erros, a pesquisadora entrevistou os alunos com o objetivo de melhor compreender as causas dos erros cometidos por eles e chegou à conclusão que as principais causas dos erros estavam ligadas ao processo de ensino-aprendizagem e às conceituações sobre demonstrações de teoremas. Em uma segunda pesquisa, Cury (1990) investigou os erros dos alunos em uma questão na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; analisou as correções feitas pelos professores da disciplina; e discutiu as possíveis causas dos erros com eles.

Cury (1994), a partir da necessidade de compreender melhor as concepções dos professores para analisar com mais profundidade os depoimentos dos alunos sobre os seus erros, desenvolveu sua tese doutoral com o objetivo de analisar as concepções de professores universitários em relação à Matemática e suas formas de considerarem os erros dos alunos. Ao final de sua pesquisa, concluiu que os professores, em sua maioria, ainda apresentam uma visão da Matemática como a ciência das verdades absolutas e que, para eles, os caminhos que possam levar os alunos aos erros devem ser evitados.

A pesquisa de Moren, David e Machado (1992), intitulada “Diagnóstico e análise de erros em Matemática: subsídio para o processo de ensino-aprendizagem”, baseou-se nas ideias do processamento da informação e teve como objetivo identificar os níveis de dificuldades da aprendizagem em torno da operação de subtração de crianças de 3^a a 6^a série do Ensino Fundamental. De acordo com as autoras, a análise dos erros dos alunos mostrou que a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal influencia num bom desenvolvimento das contas. Entretanto, afirmam que a recíproca não é verdadeira.

Batista (1995) analisou os erros de alunos de 2^a a 4^a série do Ensino Fundamental em operações aritméticas e observou que parte dos erros cometidos por eles estava ligada à falta de compreensão do valor posicional dos algarismos. Pinto (1998), em sua tese doutoral,

investigou os erros cometidos por alunos da 4^a série do Ensino Fundamental também em aritmética e chegou à conclusão que o erro pode se apresentar como uma estratégica didática capaz de orientar o ensino do professor em sala de aula.

Nas concepções atuais, o erro não é encarado apenas como uma manifestação das dificuldades de aprendizagem, mas como uma oportunidade do professor compreender o processo de construção do conhecimento matemático de seus alunos e (re)orientar o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula. Nessa perspectiva, o erro passa a se configurar como um elemento construtivo da aprendizagem dos alunos.

Em síntese, vê-se que diversas pesquisas em análise de erros se desenvolveram sob a influência do behaviorismo, do processamento da informação e do construtivismo. Nas duas primeiras correntes a superação do erro estava ligada diretamente a sua eliminação. Já os estudos baseados no construtivismo buscaram mostrar que o erro deve ser superado através da sua exploração em sala de aula.

2.1.2 A análise de erros como metodologia de ensino

De acordo com Cury (2008), a análise de erros pode ser considerada como uma metodologia de ensino ou como uma abordagem de pesquisa. Como metodologia de ensino a análise de erros é entendida como investigação em sala de aula. Enquanto abordagem de pesquisa, “[...] a análise de erros – ou a análise da produção escrita, seja ela representativa de acertos ou de erros – é uma tendência em Educação Matemática” (p. 17).

Consideraremos aqui a análise de erros enquanto metodologia de ensino, visto que o foco do nosso trabalho é a investigação das possíveis contribuições dos erros dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, especialmente para a prática docente, relativa ao trabalho com a trigonometria do triângulo retângulo.

A análise de erros, quando abordada como metodologia de ensino, se desenvolve de modo a propiciar aos alunos a investigação de problemas gerados por eles mesmos através de situações de aprendizagem em sala de aula. Nessa perspectiva, observa-se que a análise de erros vai além de identificar as dificuldades dos alunos, ela possibilita, quando desenvolvida adequadamente, a construção da aprendizagem.

No processo de consolidação da aprendizagem, “errar” é apenas um passo dentre outros que são necessários na construção de um conhecimento que ainda não se sabe, pois,

segundo Pinto (2000, p. 137), “o erro é apenas um sinal de passagem para o acerto, um sinal da presença de um obstáculo que será superado, sem medo e sem culpa. O erro é produtivo, um componente natural do sucesso escola”. A autora ainda enfatiza que

[...] é possível inferir implicações didáticas, como, por exemplo, constatar que os erros decorrem de concepções adquiridas anteriormente, e reconhecer que o próprio processo de ensino pode ser um elemento gerador de erros. Nessa perspectiva, o erro pode contribuir positivamente para o processo de ensino-aprendizagem, desde que se modifique a atitude de condenação do aluno como o único culpado pelo erro, e que se faça um tratamento preventivo dos erros. Quando um aluno comete um erro, ele expressa o caráter incompleto de seu conhecimento. Esta é, na verdade, uma oportunidade de o professor ajudá-lo a adquirir o conhecimento que lhe falta, ou levá-lo a reconhecer por que errou. (PINTO, 2000, p. 54)

Para que o erro contribua positivamente para a aprendizagem dos alunos é necessário que o professor o encare como uma etapa da construção do conhecimento, pois, a partir dele, o professor poderá refletir sobre sua prática de ensino e planejar suas aulas na perspectiva de um ensino preventivo dos erros e que leve os alunos a compreenderem as causa dos seus erros quando eles surgirem.

De acordo com Cury (1994, p. 20), “os erros cometidos pelos alunos fazem parte do próprio processo de elaboração do conhecimento e devem ser fonte de exploração de novas idéias e novos conteúdos matemáticos”. Nessa perspectiva, o erro não se configura como ausência de conhecimento, mas como um elemento da construção dele, pois “o erro faz parte das formas provisórias de conhecimento do real; ele é intrínseco ao ato de aprender” (PINTO, 2000, p. 151).

Quando os erros surgem não basta apenas que o professor os identifique. É preciso um estudo e um direcionamento do uso deles em sala de aula, pois, caso contrário, a tentativa da análise de erros não passará apenas de uma forma do professor conceituar as dificuldades dos seus alunos.

Ao identificar o erro é necessário que seja feito um diagnóstico da sua origem. Entretanto, só o diagnóstico por si só não surtirá efeito na aprendizagem do aluno. É preciso que o professor (re)oriente sua prática em sala de aula, discuta os erros com os alunos e lhes apresente novas situações que os permitam reajustar suas ideias. Como afirma Pinto (2000, p. 37), “diagnosticar e corrigir os erros não é suficiente para melhoria do ensino. Os erros contêm um potencial educativo que precisa ser mais bem explorado, não apenas pelo professor, como também pelos próprios alunos”.

A análise da produção escrita dos alunos oferece ao professor condições necessárias e suficientes de um planejamento da sua prática em sala de aula que busque desenvolver nos alunos a aprendizagem, visto que

As análises de erros e as maneiras de lidar vão ao encontro da avaliação como prática de investigação e oferecem subsídios para um quadro teórico sobre a atividade matemática dos alunos, propiciando um leque de repertórios e estratégias para o professor construir suas práticas pedagógicas, sempre considerando os modos idiossincráticos de os alunos produzirem significados. (SANTOS; BURIASCO; CIANI, 2008, p. 41)

Assim, mediante as dificuldades apresentadas pelos alunos, o professor poderá “[...] possibilitar que seus alunos analisem produções escritas deles mesmos ou de outros alunos, que elaborem e resolvam questões diferentes das propostas nos enunciados” (SANTOS; BURIASCO; CIANI, 2008, p. 43).

No processo de ensino-aprendizagem o erro deve ser visto como um indicador do raciocínio do aluno ao resolver um determinado problema. Ao ser analisado, o erro permitirá ao professor criar situações que levem os alunos a avaliarem as suas próprias dificuldades e a construírem novos conhecimentos. De acordo com Pinto (2000, p. 151),

Se o professor compreender por que o aluno erra, poderá planejar um ensino eficaz. Não se trata apenas de sancionar o erro, mas sobretudo de adotar outros tipos de intervenção, capazes de atingir todo grupo-classe, tendo em vista o progresso do aluno e, consequentemente, a superação dos erros.

Dessa forma, o professor terá a oportunidade de (re)organizar a sua prática em sala de aula e de utilizar o erro em favor da construção da aprendizagem, desmitificando a ideia do erro como sinônimo de fracasso e fazendo com que os alunos o considerem como um obstáculo que poderá ser superado.

2.1.3 Análise de erros e formação de professores

O professor tem como função prioritária mediar o conhecimento e orientar o desenvolvimento das ideias dos seus alunos na consolidação da aprendizagem. Por isso, é importante que ele comprehenda como os seus alunos pensam e organizam essas ideias e não faça apenas suposições a respeito delas (RICO, 1998).

Os alunos, na maioria das vezes, expõem suas ideias por meio de suas produções escritas, mas são poucos os professores que dão a importância necessária no momento de

corrigi-las. Geralmente, os professores estão preocupados apenas em identificar os erros e a partir deles atribuir uma nota à “aprendizagem” do aluno.

Hoje, há uma maior preocupação em relação aos erros cometidos pelos alunos em Matemática no sentido de utilizá-los como um elemento construtivo da aprendizagem. Entretanto, essa prática ainda está pouco disseminada nos cursos de formação de professores. São poucas as licenciaturas que fazem a abordagem necessária da análise de erros em suas atividades curriculares.

Ao realizar uma busca sobre as ementas de disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Cury, Bisognin e Bisognin (2012) observaram que a análise de erros não é utilizada nem como uma abordagem de pesquisa nem como metodologia de ensino nas disciplinas relacionadas ao ensino, metodologia e didática da Matemática.

De acordo com as mesmas autoras, as produções existentes sobre análise de erros e os próprios erros cometidos pelos alunos da licenciatura deveriam fazer parte das atividades das disciplinas didático-pedagógica. Pois,

Os erros cometidos pelos alunos são bons exemplos das dificuldades que os futuros docentes vão enfrentar, mas também os erros cometidos por eles próprios são importantes, porque mostram quais aspectos dos conteúdos não foram bem compreendidos durante seus cursos de formação, inicial ou continuada. Assim, discutir erros, buscar estratégias para superá-los e planejar atividades em que esses erros possam se tornar observáveis, são ações que devem fazer parte da formação do professor (CURY, 2013, p. 550).

Nessa mesma linha de raciocínio, Rico (1998) reforça que o tratamento do erro durante a formação inicial é importante porque tanto os professores quanto os alunos têm uma concepção prévia sobre o erro que pode influenciar no comportamento do professor em relação aos erros de seus alunos. Por isso, é importante que na formação de professores sejam discutidos as concepções construtivas a respeito dos erros para que os professores possam ajudar seus alunos a superá-los.

Rico (1998) e Cury (2013) salientam que empregar a análise de erros nos cursos de formação inicial de professores de Matemática vai além de inserir uma disciplina específica no currículo. Para eles, o tratamento do erro deve estar presente em todas as disciplinas do curso e uma das possibilidades para que essa prática seja efetivada é o aproveitamento dos erros dos próprios alunos.

A identificação dos seus próprios erros e dificuldades existentes em conceitos e conteúdos matemáticos deve ser utilizada pelos professores na sua formação inicial e continuada, pois essas dificuldades podem levar o professor a não abordar nas aulas

determinados aspectos que tem dificuldade ou levar os seus alunos a reproduzirem esses erros. De modo geral, a análise de erros proporciona aos professores a oportunidade de compreender as suas dificuldades e a de seus alunos e de utilizar o erro como uma ferramenta pedagógica capaz de promover melhorias no processo de ensino-aprendizagem.

2.2 O ensino de Trigonometria no Ensino Médio

A Trigonometria, do grego: medidas dos triângulos, é o ramo da Matemática que tem como objetivo o estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. Indícios antigos apontam que as primeiras noções de Trigonometria foram realizadas por meio do cálculo de razões entre lados de triângulos semelhantes pelos babilônios e egípcios no estudo da Astronomia (SOUZA; VICTER; LOPES, 2011).

Apesar de conhecer e usar alguns teoremas relativos à Trigonometria, os babilônios e os egípcios não tinham o domínio teórico desse assunto. O processo de elaboração da Trigonometria foi iniciado pelos gregos a partir da sistematização desse conhecimento (MENDES, 2009). Segundo Dante (2010, p. 362), “acredita-se que foi o astrônomo grego Hiparco (190 a.C. – 125 a.C.) quem empregou, pela primeira vez, relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, por volta de 140 a.C.”, sendo considerando assim o “pai da Trigonometria”.

Desde o passado, a Trigonometria vem sendo utilizada por diversas áreas do conhecimento, como a Astronomia, a música, as Engenharias ou a Topografia, se tornando um conteúdo necessário na composição do currículo da Matemática no Ensino Básico. Entretanto, a Trigonometria ganhou esse sentido mais tardio que as outras áreas da Matemática, entrando no currículo escolar brasileiro como disciplina isolada posteriormente às disciplinas de Aritmética, Álgebra e Geometria, nas séries do curso do Colégio Pedro II, a partir de 1928 (GOMES, 2013).

O Movimento da Matemática Moderna na década de 1960 trouxe poucas contribuições ao ensino de Trigonometria. Neste movimento o ensino da Trigonometria se resumia às noções de conjuntos e funções com ênfase na utilização da linguagem matemática e nas técnicas de resolução. A partir da Proposta Curricular de 1992,

[...] percebe-se uma mudança de ênfase metodológica para o ensino de trigonometria. Isso, de certa forma, revela os avanços ocorridos nas discussões sobre ensino de matemática e a sua aprendizagem pelos alunos, ou seja, a necessidade de um ensino mais voltado à compreensão e elaboração conceitual do que a técnicas, procedimentos e rigor na linguagem, que foram fatores predominantes na proposta anterior (1978), elaborada na efervescência dos ideais modernistas que marcaram as décadas de 60 e 70. (NACARATO; BREDARIOL; PASSOS, 2001, s/p)

Com o Movimento da Educação Matemática o ensino dessa ciência foi repensado. A partir dessa nova fase, foram elaborados documentos que têm como finalidade orientar o processo de ensino-aprendizagem em sala de aula. Esses documentos trouxeram propostas para uma nova abordagem para o ensino da Matemática no ensino básico e, em especial, no ensino da Trigonometria. Mas o que dizem esses documentos sobre o ensino da Trigonometria no Ensino Médio?

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM, o currículo dessa etapa da educação básica deve garantir ao aluno a ampliação e o aprofundamento dos seus conhecimentos matemáticos e a estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo, a fim de que eles possam estabelecer conexões entre os diferentes temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas do currículo. Além disso, é essencial que o ensino dessa disciplina proporcione aos alunos o desenvolvimento de habilidades necessárias à resolução de problemas do cotidiano (BRASIL, 1999).

Na busca da construção de um currículo sólido e ligado ao desenvolvimento de habilidades necessárias à formação do cidadão, a Trigonometria se tornou, segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006, p. 74), “[...] um assunto que merece ser priorizado na escola” visto sua ligação com diversas áreas do conhecimento e com a realidade dos alunos. Entretanto,

Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo (BRASIL, 2002, 121-122).

Percebemos, então, que pensar na Trigonometria como um conteúdo que foi desenvolvido a partir da necessidade do próprio homem e que foi e é responsável por grandes

avanços tecnológicos, nos permite ensiná-la estabelecendo conexões com o cotidiano dos alunos. Por isso, é importante que no ensino desse conteúdo seja dada ênfase às situações-problema em que a Trigonometria seja utilizada como uma ferramenta importante na sua resolução.

De acordo com as Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+, a Trigonometria se encontra no tema Álgebra: números e funções e é sugerido que se ensine a trigonometria do triângulo retângulo na 1^a série e a trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta na 2^a série (BRASIL, 2002). Para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, as OCEM orientam que

Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90° , deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180° . A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e co-seno relativos aos ângulos de medida 30° , 45° e 60° (BRASIL, 2006, p. 73).

É importante ressaltar que alguns conteúdos que estão presentes no estudo da trigonometria podem ser descartados do plano de ensino, por não terem ligações com o cotidiano dos alunos, como, por exemplo, “as fórmulas para $\sin(a+b)$ e $\cos(a+b)$, que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas” (BRASIL, 2006, p. 74).

Os conteúdos básicos da Trigonometria são essenciais no desenvolvimento de habilidades necessárias para resolução de algumas situações-problema. Assim, ao desenvolver a trigonometria nas aulas de Matemática, espera-se que os alunos adquiram as habilidades de

- Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
- Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais. (BRASIL, 2002, p. 123)

De acordo com a matriz de referência do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Saeb (BRASIL, 2011), almeja-se que, ao término do Ensino Médio, os alunos tenham desenvolvido algumas habilidades referentes à Matemática. Em relação à trigonometria no triângulo retângulo é estabelecido o descritor 5, presente no tema espaço e forma, segundo o qual se espera que os alunos saibam “resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente)” (BRASIL, 2011, p.78).

Para que essa e outras habilidades sejam desenvolvidas nos alunos, as OCEM (BRASIL, 2006) ressaltam que o ensino de Trigonometria a partir de problemas de cálculos

de distâncias inacessíveis é uma interessante aplicação desse conteúdo e merece ser priorizado na escola. “Por exemplo, como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições – com régua e transferidor ou com calculadora?” (BRASIL, 2006, p. 74).

De modo geral, o ensino de Trigonometria só terá significado se ultrapassar a manipulação algébrica e possibilitar ao aluno o desenvolvimento de habilidades que sejam necessárias na compreensão e utilização desse conteúdo em situações reais. Por isso, é importante que o ensino de Matemática esteja ligado à resolução de problemas, já que ela é considerada peça central para o ensino dessa ciência e permite uma maior aproximação dos conteúdos matemáticos à realidade dos alunos.

2.2.1 Dificuldades de aprendizagem em trigonometria no triângulo retângulo

Ao iniciar o conteúdo de Trigonometria é comum que os alunos perguntem ao professor: “para que serve esse assunto?”, “vou usar ele em que?”. Esses questionamentos acontecem porque, em muitos casos, a Matemática é ensinada priorizando o uso de algoritmos, apresentada de forma mecânica e distante da realidade. Dessa forma, os alunos identificam a Matemática como um amontoado de “contas” insignificantes e sem nenhuma ligação com seu cotidiano.

Para melhor compreender as dificuldades dos alunos em relação à trigonometria no triângulo retângulo nos apoiamos no relatório do Saeb 2011 e nas pesquisas de Dionizio e Brandt (2011), Silva e Thomaz Neto (2006) e Fortes (2012).

De acordo com o relatório do Saeb 2011, a análise das respostas dos alunos no item que contempla a habilidade estabelecida no descritor relativo à trigonometria do triângulo retângulo (descritor 5) mostra que os alunos apresentam dificuldades em relação à utilização correta das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Vejamos o enunciado da questão, na Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de item do descriptor 5 do Saeb

Exemplo de item:

Um caminhão sobe uma rampa inclinada 15° em relação ao plano horizontal. Sabendo-se que a distância HORIZONTAL que separa o início da rampa até o ponto vertical mede 24 m, a que altura, em metros, aproximadamente, estará o caminhão depois de percorrer toda a rampa?

Dados
Sen 15° = 0,25
Cos 15° = 0,96
Tg 15° = 0,26

➡ (A) 6 (B) 23 (C) 25 (D) 92 (E) 100

Fonte: Brasil (2011, p. 86)

Analizando as respostas dos alunos em relação a esse item, constataram-se algumas dificuldades que podem ter levado os alunos a assinalarem as alternativas erradas. De acordo com o relatório, apenas 30% dos alunos acertaram, utilizando a razão tangente para resolução da questão e assinalaram a alternativa “A”. Dos 66% dos alunos que se equivocaram na resolução, 23% deles marcaram a alternativa (D), possivelmente por confundirem cateto oposto com o cateto adjacente quando utilizaram a razão tangente; 10% e 24%, respectivamente, assinalaram as alternativas (B) e (C), provavelmente por utilizarem a razão trigonométrica cosseno para resolver a questão.

A pesquisa de Dionizio e Brandt (2011) teve como objetivo identificar as dificuldades dos alunos em Trigonometria. A coleta de dados foi realizada por meio de um instrumento com 5 atividades que foi aplicado à 22 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Ponta Grossa – PR. Nas atividades 1 e 2 foi abordada a trigonometria do triângulo retângulo; nas atividades 3 e 4 as relações entre as unidades para medir arcos; e na atividade 5 a determinação de quadrantes.

Em seu artigo, foram apresentados apenas os resultados referentes às duas primeiras questões. As pesquisadoras constataram que as dificuldades dos alunos em utilizar as relações trigonométricas corretamente estão relacionadas à incompreensão das várias representações de um mesmo objeto matemático. Para elas, os alunos não conseguem visualizar o enunciado da questão, o modelo geométrico e a representação algébrica como representações diferentes de uma mesma situação. Por não conseguirem, em muitos casos, converter o enunciado da questão na representação pictórica e/ou algébrica correta, os alunos acabam utilizando a relação trigonométrica errada e encontrando uma solução equivocada.

Silva e Thomaz Neto (2006) realizaram uma pesquisa tendo como objetivo verificar os conhecimentos dos alunos sobre as definições, as relações e os problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para coleta de dados, foi aplicado um teste escrito com 5 questões à 37 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Pará.

Os pesquisadores chegaram à conclusão que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos estão em identificar corretamente o que é a hipotenusa e o que são os catetos; em utilizar adequadamente as relações trigonométricas; e em resolver problemas que não têm a representação geométrica.

Fortes (2012), em sua dissertação de mestrado, analisou os erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Rio Grande do Sul. Para coleta de dados, a pesquisadora utilizou um teste com 5 questões relacionadas às razões trigonométricas no triângulo retângulo que foi aplicado à uma turma com 33 alunos e 5 atividades de base conceitual que foram desenvolvidas com 22 alunos.

Com a análise dos erros, Fortes (2012) constatou que as principais dificuldades dos alunos estão relacionadas à identificação incorreta dos elementos do triângulo retângulo; ao uso equivocado das razões trigonométricas; e à incompreensão do enunciado dos problemas. A pesquisadora também menciona que os alunos apresentaram dificuldades em conteúdos matemáticos necessários no desenvolvimento da trigonometria no triângulo retângulo que deveriam ter sido apreendidos por eles nas séries anteriores.

Com base nos estudos apresentados é possível concluir que as dificuldades dos alunos em trigonometria no triângulo retângulo vão desde a identificação dos elementos do triângulo retângulo até a transcrição do enunciado das situações-problema em linguagem matemática e a utilização correta das razões trigonométricas.

2.2.2 A resolução de problemas em Matemática: uma proposta para o ensino de Trigonometria

Ao propor problemas nas aulas de Matemática estes só terão sentido quando se constituírem de situações reais e, de preferência, ligadas ao cotidiano dos alunos. Pois, os problemas oferecem “[...] a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de

resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido” (BRASIL, 2002, p. 113).

Sabendo-se que o ensino de Trigonometria deve estar ligado às situações reais, especialmente que estejam atreladas ao cotidiano dos alunos, é necessário que a resolução de problemas esteja presente nas aulas de Matemática, já que ela é considerada peça central para o ensino dessa ciência e permite uma maior aproximação dos conteúdos matemáticos à realidade.

Entretanto, resolver um problema não é uma tarefa simples e não há uma “receita” nem um modelo único para chegar à solução, porém a Heurística de Polya é tida como referência na resolução de problemas. No intuito de facilitar a resolução de um problema, Polya (1995) organizou o processo da busca da solução em quatro etapas:

1^a etapa: *compreensão do problema*. Nesta etapa é importante que o aluno compreenda o problema, localize a incógnita e os dados que a questão dispõe por meio do seu enunciado.

2^a etapa: *elaboração de um plano de execução*. Antes de estabelecer como irá resolver o problema proposto é importante analisar se já se resolveu um problema semelhante, relacionar os dados obtidos no enunciado com a incógnita, identificar se os dados obtidos no enunciado são suficientes para solucioná-lo. E, em seguida, identificar um conteúdo, um algoritmo ou um conceito que ajude na resolução.

3^a etapa: *execução do plano*. Nessa etapa coloca o plano elaborando na etapa anterior em ação, observando se a solução em construção tem coerência com o que se deseja encontrar. Caso o plano não seja adequado deve-se voltar à etapa anterior e elabora um novo plano.

4^a etapa: *verificação da solução*. Por fim, verificar se a solução obtida serve para o problema apresentado e se há outro modo de resolução que possa ser executada e, caso exista e seja realizado, confrontar as respostas obtidas.

Assim, para resolver um problema o aluno deve ler e compreender o enunciado, elaborar um plano, aplicá-lo e confrontar o resultado obtido. Entretanto, mesmo a resolução de problemas constituindo-se de uma metodologia para desenvolvimento da aprendizagem matemática e da formação do cidadão, a abordagem dela em sala de aula não é uma tarefa fácil.

Muitos professores sentem dificuldades em abordar a resolução de problemas em sala de aula. De acordo com Paiva e Rêgo (2011), dentre essas dificuldades, destacam-se: à superlotação da sala de aula; a grande quantidade de conteúdos que devem ser abordados

durante o ano letivo; o tempo necessário para correção; e as dificuldades dos alunos em compreender o enunciado do problema.

Dificuldades como essas sempre irão existir, mas é possível que elas sejam minimizadas. Cabe ao professor dar o primeiro passo e utilizar a resolução de problema de forma adequada às suas habilidades e à necessidade dos alunos. É importante salientar que mesmo utilizando a Heurística de Polya, as resoluções dos alunos não estarão livres de erros. Entretanto, em casos como esse, o professor deve fazer do erro um elemento de construção da aprendizagem.

3. DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Metodologia da intervenção

Propondo investigar as possíveis contribuições dos erros dos alunos para a prática do professor em sala de aula, a presente pesquisa teve como sujeitos 72 alunos da 1^a série do Ensino Médio e 3 professores de Matemática de uma escola pública da rede estadual de ensino da cidade de Jacaraú – PB. Entretanto, dos três professores, apenas um deles respondeu e entregou o questionário.

Nessa pesquisa, para fins de identificação dos alunos participantes, foi utilizada a letra inicial da palavra “Aluno”, seguida dos números dos questionários para identificação das respostas (A1, A2, A3, A4, e assim sucessivamente até A72). Não tivemos a necessidade de atribuir um pseudônimo ao professor pesquisado por se tratar de apenas de um sujeito. Entretanto, visto que a não identificação dos participantes foi assegurada desde o primeiro contato, durante a análise, por ser do sexo feminino, o trataremos pelo termo professora.

A escola escolhida para a intervenção possui seis turmas da 1^a série do Ensino Médio, entretanto, levamos em consideração, para coleta de dados, apenas as turmas que já tinham estudado o conteúdo trigonometria no triângulo retângulo. Com base nesse critério, selecionamos apenas três dessas turmas para essa pesquisa: uma do turno matutino, com 25 alunos; uma do vespertino, com 34 alunos; e uma do noturno, com 13 alunos.

A intervenção da pesquisa foi desenvolvida por meio de uma etapa que se constituiu da coleta de dados junto aos sujeitos da pesquisa com a finalidade de identificar os principais erros cometidos pelos alunos no estudo e nas aplicações das razões trigonométricas no triângulo retângulo em situações-problemas e as concepções dos professores sobre o ensino desse conteúdo e sobre o erro dos alunos no processo de ensino-aprendizagem. O tratamento e análise dos dados coletados buscou compreender como os erros cometidos pelos alunos podem ser úteis na prática em sala de aula.

Para a coleta de dados utilizamos como instrumento de investigação o questionário que, de acordo com Gil (2010, p. 102), é um “[...] conjunto de questões que são respondidas por escrito pelo pesquisado”. Visando uma melhor identificação dos erros dos alunos elaboramos o questionário deles apenas com questões abertas (Apêndice A). No questionário dos professores utilizamos tanto questões abertas quanto fechadas (Apêndice B).

Com a finalidade de nortear a elaboração e análise dos questionários dos alunos, elaboramos 6 categorias de erros envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo com base na literatura estudada. Salientamos que algumas delas apresentam semelhanças entre si pelo fato de que o seu uso pode ser individual ou em conjunto com outras categorias.

Pensando no surgimento de erros que não se enquadravam nas categorias elaboradas com base nos autores estudados, criamos a categoria C₆ – Outros erros. Apresentamos no Quadro 1 as categorias e os autores nos quais nos apoiamos para sua elaboração.

Quadro 2 – Categorias de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo⁵

CATEGORIAS	AUTORES
C ₁ – Identificação incorreta dos elementos do triângulo retângulo (hipotenusa, cateto adjacente e cateto oposto) e das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).	Silva e Thomaz Neto (2006); Fortes (2012).
C ₂ – Aplicação indevida das razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).	Dionizio e Brandt (2011); Silva e Thomaz Neto (2006); Fortes (2012).
C ₃ – Compreensão insuficiente dos dados da questão/problema.	Dionizio e Brandt (2011); Silva e Thomaz Neto (2006); Fortes (2012).
C ₄ – Realização incorreta das quatro operações básicas.	Fortes (2012).
C ₅ – Dificuldades na representação dos dados da questão/problema na linguagem algébrica e na linguagem pictórica.	Dionizio e Brandt (2011); Silva e Thomaz Neto (2006).
C ₆ – Outros erros.	

Fonte: Elaboração do autor

Com base nessas categorias de erros, elaboramos/selecionamos cinco questões para compor o questionário do aluno. A questão 1 foi elaborada levando em consideração a categoria de erros C₁ e teve como objetivo verificar os erros que os alunos cometem na identificação dos elementos do triângulo retângulo.

A questão 2 também foi elaborada com base na categoria de erros C₂ e objetivou identificar os erros dos alunos na compreensão conceitual das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, com base nas respostas dadas por eles na questão 1.

Elaboramos a questão 3 levando em consideração a categoria de erros C₂. O objetivo dessa questão foi detectar os erros dos alunos na aplicação das razões trigonométricas em uma situação-problema que fornecia para o aluno uma figura como apoio aos dados fornecidos pelo enunciado.

⁵ As categorias C₁ e C₂ apresentam relação direta com a Trigonometria. As demais categorias são gerais e não apresentam relação direta com a Trigonometria.

A questão 4 foi retirada do livro Novo olhar: Matemática (SOUZA, 2013). Essa questão foi selecionada com base nas categorias de erros C₂ e C₅ e teve como objetivo identificar os erros dos alunos na aplicação das razões trigonométricas em uma situação-problema sem o apoio da representação geométrica.

A questão 5 foi retirada do livro Matemática: ensino médio (FARAGO; CARNEIRO, 2010) com base nas categorias de erros C₂ e C₃. Essa questão teve como objetivo identificar os erros dos alunos na aplicação das razões trigonométricas em uma situação-problema em que o triângulo apresentado como apoio à questão não é um triângulo retângulo.

O questionário do professor foi composto por 15 questões divididas em três seções. A primeira seção, que foi composta por duas questões, teve como objetivo a identificação pessoal dos professores.

A segunda seção foi composta por três questões que tiveram como objetivo obter informações dos entrevistados a respeito da sua formação inicial e do período de tempo da atuação docente no ensino de Matemática.

A terceira seção foi dividida em duas partes e contou com as principais questões da investigação. A primeira parte teve como objetivo compreender as opiniões dos professores a respeito do processo de ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo e a segunda teve como objetivo compreender as opiniões dos professores a respeito dos erros dos alunos e da maneira de lidar com eles em sala de aula.

3.2 Descrição da intervenção e análise dos resultados

A intervenção da pesquisa realizada na escola se desenvolveu em uma única etapa que se caracterizou pela aplicação dos questionários aos alunos e professores. Para aplicação do questionário aos alunos, utilizamos duas horas/aula de 45 minutos para cada turma selecionada.

De início fizemos uma breve apresentação da pesquisa e entregamos um questionário a cada aluno; ressaltamos que no surgimento de dúvidas eles as registrassem nas próprias questões, pois não poderíamos saná-los. Mesmo não precisando da presença do pesquisador na aplicação desse tipo de instrumento, durante o preenchimento do questionário permanecemos na sala para observar o comportamento dos alunos diante das questões

propostas e, especialmente, para assegurar que cada aluno iria responder seu questionário individualmente e sem consulta.

O questionário do professor foi aplicado individualmente e no próprio turno de trabalho de cada docente. Devido à quantidade de questões para o tempo livre dos professores, disponibilizamos mais de um dia para que respondessem todas as questões. Entretanto, dois dos professores alegaram não ter disponibilidade para responder o questionário na escola. Permitimos, então, que eles levassem para casa, mas não o entregaram.

3.2.1 Análise de erros: o que nos mostram as respostas dos alunos?

Antes de iniciar a análise dos questionários dos alunos, montamos o *corpus* em que nos debruçamos para encontrar as possíveis respostas dos nossos questionamentos iniciais. Reproduzimos os questionários, identificamo-los aleatoriamente e, em seguida, cortamos as questões e as colamos em papel sulfite formando um único documento para cada uma das questões.

Com os documentos prontos, realizamos a correção das questões e numa análise preliminar classificamos as respostas dos alunos em corretas⁶, parcialmente corretas, incompletas, incorretas e em branco.

Na tabela 1, estão apresentados os resultados da análise preliminar. Para uma melhor interpretação, os dados estão organizados na frequência absoluta (FA) e na frequência relativa (FR).

Tabela 1 – Resultados da análise preliminar das soluções dos alunos no questionário

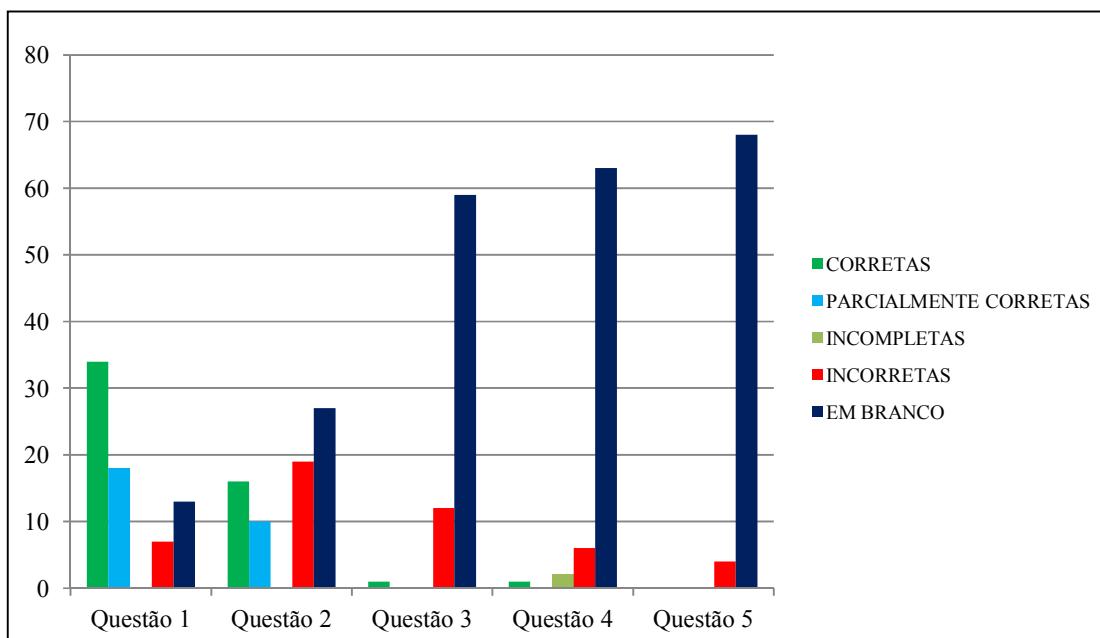
	CORRETAS		PARCIALMENTE CORRETAS		INCOMPLETAS		INCORRETAS		EM BRANCO	
	FA	FR	FA	FR	FA	FR	FA	FR	FA	FR
Questão 1	34	47,2%	18	25%	0	0%	7	9,7%	13	18,1%
Questão 2	16	22,2%	10	13,9%	0	0%	19	26,4%	27	37,5%
Questão 3	1	1,4%	0	0%	0	0%	12	16,7%	59	81,9%
Questão 4	1	1,4%	0	0%	2	2,8%	6	8,3%	63	87,5%
Questão 5	0	0%	0	0%	0	0%	4	5,6%	68	94,4%

Fonte: Elaboração do autor

⁶ Consideramos como corretas todas as soluções que não apresentaram nenhum tipo de erro.

Para uma melhor visualização e compreensão da análise preliminar das respostas dadas pelos alunos, apresentamos os dados da Tabela 1 no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Resultados da análise preliminar das soluções dos alunos no questionário



Fonte: Elaboração do autor

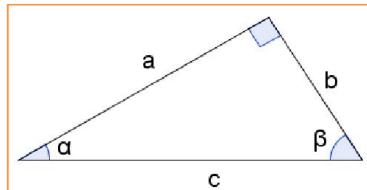
De acordo com os dados, é possível observar que mais de 80% dos alunos deixaram as questões 3, 4 e 5 em branco. Alguns alunos afirmaram que não se lembravam do conteúdo e por isso não sabia como proceder para resolver as questões e outros relataram que lembravam o conteúdo, mas não sabiam como utilizá-lo. Isso pode indicar que quando a Matemática é ensinada como um amontoado de cálculos sem ligação com a realidade, os alunos sentem grandes dificuldades em utilizá-la como ferramenta na resolução de problemas do cotidiano.

Apresentaremos, a seguir, a análise das respostas dos alunos. Nela consideramos apenas as questões com as soluções parcialmente corretas e incorretas uma vez que o foco do nosso trabalho é a análise de erros. Também discorremos aqui sobre as respostas em branco na finalidade de discutirmos algumas das causas que podem ter contribuído para que alguns alunos não respondessem as questões.

Classificamos os erros em subcategorias e, quando necessário, utilizamos figuras das soluções dadas pelos alunos para exemplificar o tipo de erro cometido por eles. Para identificação das subcategorias, utilizamos a palavra “Erro”, seguida dos números romanos em ordem crescente.

Na primeira questão os alunos deveriam identificar os elementos do triângulo retângulo a partir de uma figura (Figura 2). No intuito de melhor compreender as dificuldades dos alunos através dos seus erros, optamos por um triângulo retângulo que não se apresentasse na forma canônica⁷ que é a mais utilizada nos livros didáticos e na maioria das situações-problema.

Figura 2 – Triângulo retângulo



Fonte: Elaboração do autor

Dos alunos que responderam a essa questão, 18 deles tiveram a solução parcialmente correta, identificando pelo menos um dos lados, e sete erraram a questão por inteiro. A questão 1 teve um número bem inferior de respostas em branco, se comparada às demais questões. Como é possível ver na Tabela 1, apenas 18,1% dos alunos não resolveram essa questão. Acreditamos que por ser um conteúdo elementar, visto que o triângulo retângulo e seus elementos são estudados no Ensino Fundamental, os alunos se sentiram mais preparados para resolver essa questão. Entretanto, o índice de 18% de respostas em branco é um dado preocupante por se tratar de uma questão muito elementar.

Os erros cometidos pelos alunos aqui inicialmente destacados se enquadram na categoria C₁ e foram classificados em cinco subcategorias, que estão descritas a seguir e exemplificadas quando necessário. Nos casos em que o mesmo erro se adequar em mais de uma categoria, essas serão indicadas na discussão.

Erro I – Os alunos indicaram corretamente a hipotenusa, mas erraram ao identificar, de forma invertida, o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α . Esse erro foi cometido por cinco alunos e pode ter ocorrido devido à deficiência dos alunos na compreensão do significado dos termos oposto e/ou adjacente. Outra causa que pode ter levado os alunos a cometerem esse erro é a identificação dos catetos em relação ao outro ângulo agudo. Ao invés de identificarem os catetos em relação ao ângulo α eles podem ter, por incompreensão do enunciado ou por desatenção ao lê-lo, levado em consideração o ângulo β . Na Figura 3, destacamos a solução do aluno A2.

⁷ Compreende-se por triângulo retângulo na forma canônica o triângulo que se apresenta com um cateto na vertical, o outro na horizontal e a hipotenusa inclinada.

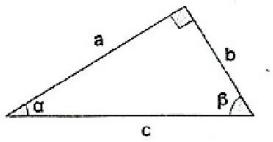
Figura 3 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A2

1. No triângulo retângulo abaixo, indique o lado correspondente à hipotenusa e aos catetos oposto e adjacente ao ângulo α .

Hipotenusa = c

Cateto oposto a α = b

Cateto adjacente a α = a



Fonte: Produção do aluno A2

Erro II – Os alunos identificaram corretamente o cateto oposto à α , mas trocaram a hipotenusa pelo cateto adjacente à α . Esse erro foi cometido por 13 alunos. O modo como o triângulo retângulo foi apresentado nessa questão pode ter sido um fator determinante para que esse erro acontecesse. Nos livros didáticos e na maioria das situações cotidiana que são abordadas na sala de aula os triângulos retângulos, geralmente, são apresentados sempre na mesma disposição: um cateto na vertical, o outro na horizontal e a hipotenusa inclinada. Esses alunos aparentam compreender o significado dos termos oposto e adjacente, ao contrário dos alunos que cometeram o Erro I, mas por apresentar essa visão engessada, chamaram a hipotenusa de cateto adjacente por se apresentar na horizontal e estar adjacente ao ângulo α e o cateto adjacente de hipotenusa por estar apresentado de forma inclinada. A figura 4 traz a solução apresentada pelo aluno A45.

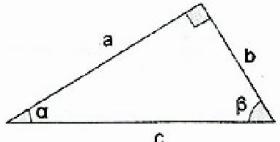
Figura 4 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A45

1. No triângulo retângulo abaixo, indique o lado correspondente à hipotenusa e aos catetos oposto e adjacente ao ângulo α .

Hipotenusa = a

Cateto oposto a α = b

Cateto adjacente a α = c



Fonte: Produção do aluno A45

Erro III – Em relação ao ângulo α , os alunos identificaram a hipotenusa da figura dada na questão como sendo o cateto adjacente, o cateto adjacente como sendo o oposto e o cateto oposto como sendo a hipotenusa. Quatro alunos cometeram esse erro. Para uma melhor compreensão desse erro, apresentamos, na Figura 5, a solução dada pelo aluno A38.

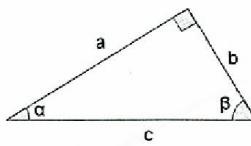
Figura 5 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A38

1. No triângulo retângulo abaixo, indique o lado correspondente à hipotenusa e aos catetos oposto e adjacente ao ângulo α .

Hipotenusa = b

Cateto oposto a α = a

Cateto adjacente a α = c



Fonte: Produção do aluno A38

Erro IV – Os alunos indicaram a hipotenusa como sendo o cateto oposto, o cateto oposto como sendo adjacente e o cateto adjacente como sendo a hipotenusa. Esse erro foi cometido por dois alunos. A Figura 6, retirada do questionário do aluno A13, exemplifica esse erro.

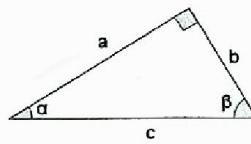
Figura 6 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A13

1. No triângulo retângulo abaixo, indique o lado correspondente à hipotenusa e aos catetos oposto e adjacente ao ângulo α .

Hipotenusa = c

Cateto oposto a α = a

Cateto adjacente a α = b



Fonte: Produção do aluno A13

Acreditamos que os erros III e IV podem estar associados à interpretação que já inferimos para o Erro II, que é a utilização, em grande parte dos livros didáticos, da figura do triângulo retângulo na qual a hipotenusa aparece inclinada.

Erro V – O aluno indicou a hipotenusa como sendo o cateto oposto, o cateto oposto como sendo a incógnita x e o cateto adjacente como sendo a hipotenusa. Esse erro foi cometido por apenas um aluno. Uma das formas que o aluno pensou para cometer esse erro pode estar relacionada à forma canônica do triângulo retângulo utilizada na maioria dos exemplos que lhe são apresentados. Ele chamou um dos catetos de hipotenusa por ele estar apresentado de forma inclinada na figura e como a hipotenusa está na vertical ele a nomeou de cateto adjacente. Como na maioria das questões que envolvem as razões trigonométricas o que se procura é a medida de um dos lados do triângulo ele chamou o cateto oposto de x. Vejamos, na Figura 7, a solução apresentada por esse aluno.

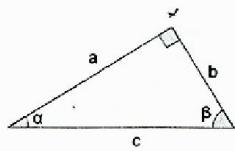
Figura 7 – Solução da questão 1 apresentada pelo aluno A60

1. No triângulo retângulo abaixo, indique o lado correspondente à hipotenusa e aos catetos oposto e adjacente ao ângulo α .

Hipotenusa = b

Cateto oposto a α = x

Cateto adjacente a α = c



Fonte: Produção do aluno A60

A questão 2 solicitava, a partir da resolução da questão 1, que os alunos determinassem as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em relação ângulo α . Dos 72 alunos participantes 37,5% deles deixaram essa questão em branco. Por meio desse dado, conjecturamos que uma das principais causas que impossibilitam os alunos a resolverem questões envolvendo as razões trigonométricas está em não saber defini-las.

Destacamos que dos 34 alunos que acertaram a questão 1, apenas 16 acertaram a questão 2. Portanto, 18 alunos que identificaram corretamente a hipotenusa e os catetos não fizeram a relação entre esses lados e as razões trigonométricas.

Nessa questão, 10 alunos tiveram a solução classificada como parcialmente correta, por acertarem apenas uma ou duas das razões, e 19 tiveram sua solução classificada como incorreta, por errarem as três razões. Após a análise das soluções dessa questão, categorizamos os erros encontrados em sete novas subcategorias da categoria de erros C₁. A seguir, descrevemos as subcategorias e as exemplificamos quando necessário.

Erro VI – Os alunos identificaram corretamente os elementos que formam as razões trigonométricas, mas, ao determiná-las, os inverteram. Esse erro foi cometido por seis alunos e os erros variam entre a inversão da razão seno, da razão cosseno e da razão tangente.

Erro VII – Os alunos trocaram as razões trigonométricas. Nessa categoria se encontra a solução de sete alunos: cinco alunos confundiram a razão seno com a razão cosseno; três alunos confundiram a razão cosseno com a tangente; três alunos confundiram a razão tangente com a razão seno e dois alunos confundiram a razão tangente com a razão cosseno. A Figura 8 traz a solução apresentada pelo aluno A49.

Figura 8 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A49

2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$$\text{sen } \alpha = \frac{c_3}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{c_0}{c_4}$$

$$\tg \alpha = \frac{b}{c_0}$$

Fonte: Produção do aluno A49

Erro VIII – Os alunos confundiram as razões trigonométricas e as apresentaram de forma invertida. Nessa categoria, se encontram as soluções de cinco alunos. Os alunos A26 e A27 confundiram o seno com o cosseno. O aluno A36 confundiu o cosseno com o seno. O aluno A42 confundiu a tangente com o cosseno. O aluno A49 confundiu a tangente com o seno. A Figura 9, retirada do questionário do aluno A26, exemplifica esse erro.

Figura 9 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A26

2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\tg \alpha = \frac{b}{c}$$

Fonte: Produção do aluno A26

Erro IX – Os alunos, ao invés de determinarem as razões, atribuíram valores aleatoriamente. Esse erro foi cometido por dois alunos. O aluno A61 atribuiu valores numéricos às razões seno e cosseno e a incógnita x à tangente e o aluno A62 atribuiu medidas de ângulos às razões. Uma das causas que pode ter levado os alunos a esse erro está relacionada à dificuldade de aceitação de respostas abertas como corretas. Como na aritmética o objetivo da atividade é encontrar uma resposta numérica e particular, os alunos ainda não aceitam as respostas algébricas que expressa uma forma simplificada e geral como corretas (BOOTH, 1995). Outro motivo que influenciou os alunos pode ter sido os exercícios feitos em sala, já que a maioria das atividades de razões trigonométricas trazidas pelos livros didáticos tem como objetivo primordial a descoberta de um valor numérico. Vejamos, na Figura 10, a solução dada pelo aluno A61.

Figura 10 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A61

2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$$\sin \alpha = 15$$

$$\cos \alpha = 10$$

$$\tg \alpha = x$$

Fonte: Produção do aluno A61

Erro X – Os alunos determinaram as razões trigonométricas associando-as a um único elemento do triângulo retângulo. Foi o caso de dez alunos. A solução, apresentada na Figura 11, retirada do questionário do aluno A52, é um exemplo desse tipo de erro.

Figura 11 - Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A52

2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$$\sin \alpha = a$$

$$\cos \alpha = b$$

$$\tg \alpha = c$$

Fonte: Produção do aluno A52

Erro XI – Um aluno ao invés de determinar as razões trigonométricas como o quociente entre dois dos elementos do triângulo retângulo, as determinou como o produto entre esses elementos. Além disso, os elementos utilizados pelo aluno para determinar cada uma das razões não correspondiam aos elementos corretos que define cada uma delas. A solução apresentada na Figura 12 traz a solução dada pelo aluno A34.

Figura 12 – Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A34

2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$$\sin \alpha = a \cdot b$$

$$\cos \alpha = c \cdot b$$

$$\tg \alpha = a \cdot c$$

Fonte: Produção do aluno A34

Uma das causas que podem ter influenciado os alunos a cometerem os erros X e XI é a falta de compreensão do termo razão. Como a palavra “razão” é utilizada em diferentes contextos no dia a dia dos alunos é importante que o professor (re)lembre a seus alunos que, na Matemática, razão é divisão.

Erro XII – Essa subcategoria reúne as soluções dos alunos que erraram pelo menos uma das razões, provavelmente, por não terem compreendido o conteúdo e, para não deixar a questão em branco, responderam-na de forma incoerente. Enquadram-se nessa categoria as soluções de quatro alunos. Vejamos a solução dada pelo aluno A29, na Figura 13.

Figura 13 - Solução da questão 2 apresentada pelo aluno A29

2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$$\sin \alpha = \frac{\text{SEN}}{\text{CA}}$$

$$\cos \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\tg \alpha = \frac{TG}{CA}$$

Fonte: Produção do aluno A29

A questão 3 trata-se de uma questão contextualizada que pode ser solucionada utilizando a razão cosseno. Nela o aluno deveria encontrar o comprimento de uma rampa construída a partir de uma escada, conhecendo apenas o comprimento dos degraus e o ângulo de inclinação da rampa.

Entre as três questões contextualizadas presentes no questionário, essa questão foi a que apresentou um menor percentual de soluções em branco, no entanto, ainda um número muito alto: 81,9% dos alunos não responderam a essa questão e alegaram não se lembrar de como solucioná-la. Acreditamos que como a questão trazia uma figura que ilustrava a situação os alunos se sentiram mais confiantes em respondê-la. No entanto, percebemos que além de apresentar dificuldades em definir as razões trigonométricas, os alunos sentem grandes dificuldades em interpretar o enunciado da questão e utilizar uma das razões para solucioná-la, mesmo havendo uma representação gráfica clara dessa situação.

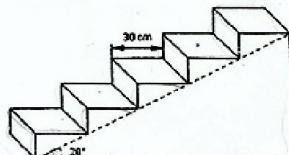
Dos 13 alunos que resolveram essa questão, 12 deles tiveram a solução classificada como incorreta. Após analisamos as respostas dos alunos, organizamos os erros em 4 subcategorias que estão apresentadas em seguida e, quando necessário, exemplificadas.

Erro XIII – Os alunos usaram a razão trigonométrica correta, mas erraram na transcrição da linguagem materna para a linguagem algébrica. Esse erro se enquadra nas categorias C₃, C₄ e C₅. Eles consideraram o cateto adjacente como sendo o comprimento da rampa e atribuíram a medida do degrau à hipotenusa. Esse erro foi cometido por dois alunos. Além disso, esses alunos erraram no produto de números decimais: o aluno A1 errou no posicionamento da vírgula e o aluno A3 na multiplicação dos valores. Vejamos a solução apresentada pelo aluno A1 na Figura 14.

Figura 14 – Solução da questão 3 apresentada pelo aluno A1

3. Uma empresa, para facilitar o transporte de cargas por meio de carrinhos, irá transformar a escada do depósito em uma rampa, conforme a figura abaixo. Sabendo que a escada é formada por cinco degraus e que cada um deles mede 30 cm de comprimento, qual será o comprimento aproximado da rampa? (Dados: $\text{sen}20^\circ = 0,34$; $\cos20^\circ = 0,94$ e $\tg20^\circ = 0,36$.)

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ &= \frac{x}{30} \\ 0,94 &= \frac{x}{30} \\ x &= 2,82\end{aligned}$$



Fonte: Produção do aluno A1

Erro XIV – O aluno não utilizou nenhuma das razões trigonométricas na resolução da questão. Essa subcategoria está presente na categoria C₆. Ele apenas multiplicou a medida do degrau pela quantidade de degraus presentes na escada e chegou à conclusão que o comprimento da rampa era de aproximadamente 150 cm. Esse aluno pode ter considerado o comprimento da rampa como sendo o plano horizontal (cateto adjacente) e, desse modo, ter feito a projeção da medida dos degraus para o cateto adjacente. Esse erro foi cometido por apenas um aluno.

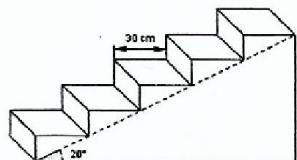
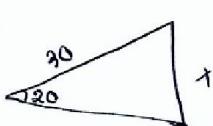
Erro XV – Um dos alunos utilizou a razão seno; identificou o comprimento como sendo o cateto oposto (a altura da rampa); atribuiu à hipotenusa a medida de um degrau (30 cm) e, por distração, usou $\text{sen}20^\circ = 0,94$. Esse erro se enquadra nas categorias C₂ e C₃.

Na figura 15, é possível observar que o erro desse aluno (A30) é decorrente da incompreensão do problema. Vê-se que o cálculo algébrico realizado é coerente à figura da rampa desenhada por ele, concluindo-se, assim, que a maior dificuldade do aluno está na transcrição do enunciado para a linguagem geométrica e/ou algébrica.

Figura 15 – Solução da questão 3 apresentada pelo aluno A30

3. Uma empresa, para facilitar o transporte de cargas por meio de carrinhos, irá transformar a escada do depósito em uma rampa, conforme a figura abaixo. Sabendo que a escada é formada por cinco degraus e que cada um deles mede 30 cm de comprimento, qual será o comprimento aproximado da rampa? (Dados: $\text{sen}20^\circ = 0,34$; $\cos20^\circ = 0,94$ e $\tg20^\circ = 0,36$.)

$$\begin{aligned} \cancel{\text{sen}20^\circ = 0,34} \\ \cancel{0,34 = x} \\ \cancel{x = 27,20} \end{aligned}$$



Fonte: Produção do aluno A30

Erro XVI – Os alunos demonstraram não ter compreensão suficiente do conteúdo e mesmo tendo memorizado as razões trigonométricas, não conseguem usá-las com coerência. Nota-se que há uma tentativa de solucionar o problema, mas as soluções são escritas de modo desorganizado e, na maioria das vezes, apoiadas em raciocínios sem uma lógica adequada. Nessa categoria, enquadram-se as soluções de oito alunos.

Os alunos A2 e A31 utilizaram a razão seno e não fizeram corretamente a substituição dos valores na fórmula nem os cálculos. O aluno A2 substituiu o seno do ângulo pelo próprio ângulo; o cateto oposto por 34, provavelmente porque o $\text{sen}20^\circ = 0,34$; e a hipotenusa por x.

O aluno A31 substituiu o seno do ângulo pelo próprio ângulo; o cateto oposto pela medida do comprimento de um degrau; e a hipotenusa pela medida do sen20°. Esses erros se enquadram nas categorias C₂ e C₃.

O aluno A7 utilizou a razão cosseno na resolução e a considerou como sendo o quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa. Igualmente aos alunos A2 e A31, ele cometeu equívocos na substituição e nos cálculos. Substituiu o cos20° pela fração $\frac{94}{20}$; o cateto oposto pelo comprimento de um degrau; e a hipotenusa por x. O aluno A26 utilizou as razões trigonométricas seno e tangente na resolução da questão. De acordo com a representação geométrica da rampa, realizada por ele, a medida do comprimento de um degrau foi atribuída à hipotenusa; ao cateto oposto o valor do cos20° e ao cateto adjacente o valor da tan20°. Os alunos A29 e A34 utilizaram a razão cosseno, mas a escreveram como o produto entre o comprimento de um degrau e o valor do cos20°. Os alunos A32 e A60 utilizaram a razão seno e a escreveram como o quociente entre a hipotenusa e o cateto oposto. Esses erros se enquadram nas categorias C₁, C₂ e C₃.

A questão 4 trata-se de uma contextualização na qual se solicita encontrar o quanto se eleva, verticalmente, uma pick-up que sobe uma ladeira com comprimento de 50 m e inclinação de 40° em relação ao solo.

Essa questão também apresentou um grande percentual de respostas em branco. Dos 72 alunos participantes, 63 deles não responderam a essa questão, o que totalizou 87,5% das respostas em branco. Uma das causas que pode ter influenciado para que isso acontecesse pode ter sido a falta da figura como complemento dos dados do enunciado.

Dos nove alunos que responderam a essa questão, dois deles apresentaram a solução incompleta e seis uma solução incorreta. Os erros cometidos por eles foram classificado em três subcategorias que estão apresentadas em seguida.

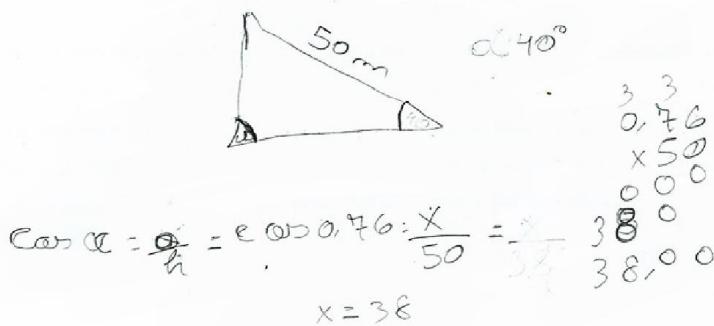
Erro XVII – Os alunos utilizaram a razão seno; substituíram os dados corretamente; fizeram a manipulação da fórmula; mas erram na multiplicação. Esse erro foi cometido por três alunos. Os alunos A1 e A29 erraram no posicionamento da vírgula e o aluno A5 no cálculo dos valores. Esses erros se enquadram na Categoria C₄.

Erro XVIII – O aluno errou ao utilizar a razão cosseno na resolução do problema. Esse erro foi cometido por um aluno e está presente na categoria C₂. Ele pode ter cometido esse erro por ter confundido o termo vertical com o horizontal ou por dificuldades em definir a razão cosseno durante a resolução. Como podemos observar na Figura 16, o aluno A28 define a razão cosseno da seguinte forma: $\cos \alpha = \frac{o}{h}$, o que pode ser entendido como cateto

oposto (o) sobre a hipotenusa (h). Entretanto, na questão 2, esse aluno define corretamente as razões seno e cosseno. Também consideramos como hipótese que o erro cometido pelo aluno possa ter ocorrido por distração, visto que ele demonstrou saber definir as razões seno e cosseno anteriormente.

Figura 16 – Solução da questão 4 apresentada pelo aluno A28

4. (Unifap-AP) Luiz fez uma viagem à cidade de Oiapoque numa *pick-up*. Em um determinado trecho do caminho existe uma ladeira com inclinação de 40° em relação ao plano horizontal. Se a ladeira tem 50 m de comprimento, quantos metros a *pick-up* se eleva verticalmente, após percorrer toda a ladeira? (Dados: $\text{sen}40^\circ = 0,64$; $\text{cos}40^\circ = 0,76$ e $\text{tg}40^\circ = 0,83$.)

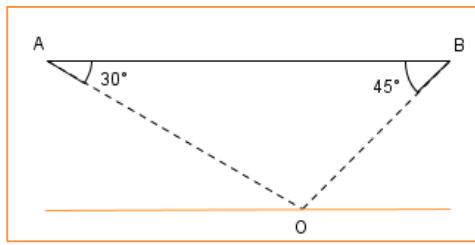


Fonte: Produção do aluno A28

Erro XIX – Os alunos demonstraram não ter compreensão suficiente do conteúdo para resolver a questão. Enquadram-se nessa categoria as soluções de dois alunos. O aluno A26 utilizou a razão seno e a definiu como o quociente entre o ângulo de inclinação da ladeira e o valor do $\text{sen}20^\circ$ e realizou os cálculos de forma incoerente com o que ele mesmo tinha escrito inicialmente. O aluno A31 também utilizou a razão seno; escreveu-a corretamente; mas não soube substituir os dados na questão. Ele substituiu o cateto oposto pela medida do comprimento da ladeira e a hipotenusa pelo valor do seno do ângulo. Na manipulação dos cálculos fez a multiplicação entre o grau, o valor atribuído à hipotenusa e o valor atribuído ao cateto oposto. Esses erros se enquadram na categoria C₆.

A questão 5 aborda uma situação que busca encontrar a distância percorrida por uma avião entre dois pontos dada sua altitude em relação ao solo e os ângulos formados entre a trajetória do avião e a vista de um observador no solo (Figura 17).

Figura 17 – Representação geométrica da questão 5



Fonte: Adaptado de Farago e Carneiro (2010, p. 49)

Dentre as questões propostas, a questão 5 foi a que teve o maior número de respostas em branco, com um percentual de 94,4% dos alunos não tendo resolvido essa questão. Desse modo, consideramo-la como a mais difícil do questionário, por se tratar de uma questão que, além de ter tido um grande percentual de soluções em branco, o uso da trigonometria em sua resolução não é tão óbvio como nas outras. Os alunos deveriam ter traçado a altitude no ponto O perpendicularmente ao plano do observador, dividindo o triângulo AOB em dois triângulos retângulos para, assim, aplicar as razões trigonométricas na resolução. O fato dos alunos não terem essa visualização pode ter sido uma das causas que ocasionaram os erros e o grande percentual de respostas em branco.

Dos 72 alunos participantes, apenas quatro deles resolveram essa questão e todos chegaram a uma solução equivocada. Essas soluções foram organizadas em três subcategorias que estão inseridas nas categorias C₂ e C₃.

Erro XX – O aluno usou a razão cosseno e considerou o triângulo ABO como retângulo. Na substituição, utilizou o valor do $\cos 30^\circ$; considerou o cateto oposto como o segmento AB e atribuiu à hipotenusa a medida da altitude. Realizou o cálculo de modo coerente com a substituição feita, mas errou o posicionamento da vírgula no produto entre o valor do $\cos 30^\circ$ e a altitude. Esse erro foi cometido por um aluno.

Erro XXI – O aluno considerou o triângulo como sendo um triângulo retângulo e o segmento AB como a hipotenusa e a ela atribuiu a medida da altitude. Na resolução, utilizou a razão seno de forma invertida; atribuiu ao cateto oposto à medida do ângulo \widehat{B} e não utilizou a medida do $\sin 45^\circ$, encontrando uma solução equivocada. Esse erro foi cometido por apenas um aluno.

Erro XXII – Os alunos não souberam interpretar o problema e mostraram não ter adquirido habilidade matemática suficiente para solucioná-lo. Nessa categoria estão as respostas de dois alunos. O aluno A2 utilizou as razões seno e cosseno na resolução do

problema e mesmo tendo escrito as fórmulas corretamente não soube substituir os dados. O aluno A26 utilizou a razão cosseno e também não soube substituir os dados.

3.2.2 Análise do questionário do professor

Apresentaremos, a seguir, a análise e discussão das respostas do questionário do professor. Expomos aqui apenas as respostas das questões presentes nas seções II e III, visto que a seção I contém exclusivamente dados de identificação do sujeito participante. Além das respostas dadas pela professora no questionário, usamos, quando necessário, falas suas proferidas durante a aplicação do mesmo.

A professora pesquisada é graduada em licenciatura em Matemática e atua a menos de cinco anos como docente na área. Durante a sua formação inicial, nenhuma das disciplinas presentes na estrutura curricular de sua graduação abordou o erro num aspecto positivo/construtivo. Esse fato reafirma o que vimos nos estudos de Cury, Bisognin e Bisognin (2012), em que os cursos de licenciatura em Matemática ainda não trazem a análise de erros em sua estrutura curricular, nem fazem o uso dela em suas aulas. A falta dessa abordagem em cursos de formação de professores, seja ele inicial ou continuada, configura-se como uma das causas que possibilita que o erro ainda seja encarado por alguns docentes como um fator negativo na aprendizagem dos seus alunos.

Analizando a seção III, obtivemos informações referentes às opiniões da professora sobre o ensino de trigonometria no triângulo retângulo e o erro no processo de ensino-aprendizagem. Na finalidade de compreender melhor essas opiniões, iniciamos essa seção perguntando se a professora já tinha abordado o conteúdo trigonometria no triângulo retângulo em sala de aula, pois, a partir desta resposta, temos uma melhor compreensão se as opiniões dadas por ela são oriundas da prática docente aliada à teoria ou só da teoria.

Segundo a professora, o conteúdo em questão já foi ministrado em sala de aula e foi abordado “por meio de uma aula expositiva dialogada, até porque muitos alunos não têm uma base do conteúdo e consequentemente situações-problema são passadas”. Durante a abordagem do conteúdo, sua maior dificuldade foi fazer com que os alunos compreendessem qual razão trigonométrica utilizar na resolução das situações-problema. Mediante a fala da professora, percebemos que para ela a aula expositiva dialogada, considerada por muitos

educadores com um método tradicional e que deve ser extinto, se torna a melhor opção quando os alunos não têm base suficiente do conteúdo.

Além do livro didático, a professora afirmou conhecer e utilizar em suas aulas o teodolito, instrumento de precisão para medir ângulos. Para ela, o uso desse instrumento possibilita aplicações práticas da trigonometria e a vivência dos alunos em situações reais em que a Matemática se mostra uma ferramenta indispensável.

Procuramos saber quais os erros mais frequentes cometidos pelos alunos ao resolverem questões que envolvem a trigonometria no triângulo retângulo. Não tivemos uma resposta que se adequasse perfeitamente à questão, mas conseguimos compreender que os erros mais frequentes estão atrelados ao uso incorreto das razões trigonométricas na resolução de problemas. Vejamos a resposta dada pela professora: “saber qual relação trigonométrica deve utilizar na resolução do problema”. Com base nessa resposta, percebemos que os erros mais frequentes dos alunos estão diretamente relacionados com a principal dificuldade da professora em ministrar esse conteúdo.

Em relação ao erro no processo de ensino-aprendizagem, podemos observar que para a ela, o erro possibilita ao professor identificar possíveis falhas em sua metodologia e a partir dele melhorar o ensino em sala de aula, como podemos ver na resposta a seguir: “O erro tem sua importância no processo de ensino-aprendizagem, pois observamos que a nossa metodologia não está alcançando todo alunado”. Entretanto, salientamos que nenhuma metodologia é capaz de atingir todos os alunos.

Pedimos para que a professora elencasse, em sua opinião, o porquê dos alunos errarem muito em Matemática. A professora nos deu a seguinte resposta: “Percebo que eles têm muita dificuldade nas operações básicas e muitas vezes não conseguem interpretar o que pede a situação-problema”. Não obtivemos uma resposta precisa que atendesse a pergunta feita, mas a partir da resposta dada, observamos que a professora associa os erros dos alunos aos conteúdos e habilidades que eles deveriam ter compreendido e adquirido em anos (séries) anteriores.

Questionamos a professora qual a sua postura diante dos erros dos alunos e obtivemos a seguinte resposta: “Infelizmente se a resolução do aluno não tiver sentido, a questão não será pontuada”. Nessa perspectiva, percebemos que o erro se configura como um fator negativo na aprendizagem e serve como um elemento responsável apenas pela atribuição da nota que quantifica o desempenho do aluno.

Sabendo do valor negativo que o erro ainda carrega consigo, perguntamos sobre o comportamento dos alunos a respeitos dos seus próprios erros. A professora respondeu que eles “ficam decepcionados por terem errado coisas simples”.

Finalizando o questionário, a professora expressou sua opinião a respeito de como os erros podem orientar a prática do professor em sala de aula nos dando a seguinte resposta: “Podemos orientar outros alunos para que não cometam os mesmos erros”. Por meio dessas e das outras respostas dadas ao longo do questionário, fica claro que, para ela, o erro é considerando um fator contribuinte para sua prática em sala de aula e para o processo de ensino-aprendizagem. Mesmo ficando explícito, em alguns momentos, o sentido do erro como elemento negativo da aprendizagem, observou-se que, para a professora, ele possibilita a autoavaliação da sua metodologia e se torna um elemento que pode ajudar na aprendizagem de outros alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O caráter desafiador é intrínseco a qualquer pesquisa. Quando ela se propõe investigar as relações entre os erros dos alunos e o processo de ensino-aprendizagem da Matemática os desafios se tornam ainda maiores, principalmente quando se investiga de que forma o erro, que traz em si a imagem de um elemento negativo, pode contribuir positivamente na prática docente.

Na perspectiva de descaracterizar o sentido negativo que o erro carrega em si e de explorá-lo como um elemento contribuinte às ações de ensinar e aprender, desenvolvemos nossa investigação em torno da seguinte questão: *Os erros dos alunos da 1^a série do Ensino Médio, ao resolverem questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, podem orientar a prática docente?* Assim, levamos em consideração a análise dos erros dos alunos em razões trigonométricas no triângulo retângulo e o ponto de vista de uma professora de Matemática do Ensino Médio a respeito do ensino da Trigonometria e do erro no processo de ensino-aprendizagem.

Durante o processo de investigação não tivemos problemas que viessem a atrapalhar o desenvolvimento da nossa pesquisa. No entanto, sentimos dificuldades no recolhimento dos questionários dos professores. Ao iniciar a coleta de dados, procuramos saber se eles teriam disponibilidade em participar da pesquisa. A resposta foi afirmativa, mas dois dos três professores solicitados não entregaram o questionário e alegaram que não iriam respondê-lo mais.

Quando a ideia desse trabalho surgiu, pensamos em elaborar uma sequência didática levando em consideração os erros apresentados pelos alunos nas razões trigonométricas. Ao iniciar as leituras e o processo investigativo, notamos que não necessitávamos, a priori, de uma sequência de atividades que contribuísse para o uso do erro em sala de aula, mas de uma pesquisa que proporcionasse aos professores de Matemática uma reflexão sobre a importância do erro e das maneiras de lidar com ele, em especial, no ensino de Trigonometria. Desse modo, esperamos que os resultados obtidos aqui sirvam de parâmetros para o (re)planejamento do ensino de Trigonometria pelos professores do Ensino Médio no intuito de que eles possam desenvolver suas aulas pensando em estratégias didáticas que minimizem as dificuldades de seus alunos.

Mediante a análise dos erros, foi possível inferir que as dificuldades dos alunos transitam entre a deficiência na aprendizagem de conteúdos básicos da Matemática e a falta de habilidades necessárias para a interpretação do enunciado das questões e do uso da Matemática como ferramenta de resolução. Os resultados nos mostraram que as dificuldades apresentadas pelos alunos não estão apenas ligadas à Trigonometria, mas também a conteúdos vistos anteriormente que funcionam como base essencial para a aprendizagem das razões trigonométricas.

Em relação às opiniões da professora, notamos que em alguns aspectos o erro é considerado como um elemento que propicia a autoavaliação de sua metodologia e que a permite orientar seus alunos para não cometerem os mesmos erros. Entretanto, vimos que na avaliação ele serve apenas como um indicador de fraqueza que é responsável pela atribuição de notas. Analisando suas respostas a respeito do ensino da trigonometria no triângulo retângulo, vimos que esse conteúdo ainda é abordado através de aulas expositivas que pouco contribuem para o desenvolvimento da aprendizagem.

Diante dos resultados obtidos, voltamos aos nossos objetivos iniciais e analisamos cada um deles a fim de verificar se, de fato, conseguimos atingir nossos propósitos. Levando em consideração que o objetivo geral depende da execução dos específicos, analisaremos inicialmente os nossos objetivos específicos que estão descritos a seguir:

- a) Elaborar e aplicar questionários com os participantes da pesquisa;
- b) Identificar os erros cometidos por alunos da 1^a série do Ensino Médio na resolução de questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, presentes no questionário.
- c) Classificar os erros cometidos por esses alunos;
- d) Investigar a opinião de uma professora de Matemática da 1^a série do Ensino Médio sobre o ensino da trigonometria no triângulo retângulo e o papel do erro no processo de ensino-aprendizagem.

Utilizando o questionário como instrumento de coleta de dados, conseguimos identificar os erros cometidos pelos alunos da 1^a série do Ensino Médio em razões trigonométricas no triângulo retângulo. Analisamos e classificamos os erros identificados anteriormente, tendo assim uma visão mais ampla da estrutura desses erros e das possíveis causas que levaram os alunos a cometê-los.

Sabemos que quando se trata da trigonometria no triângulo retângulo conhecer e identificar os catetos, a hipotenusa e os ângulos são indispensáveis para seu estudo. No entanto, vimos que 52% dos alunos não conseguem sequer identificar corretamente esses elementos, fazendo com que as dificuldades em resolver questões que necessitam do uso das razões trigonométricas em sua resolução sejam ainda maiores.

Por meio dos registros escritos dos alunos, vimos que cerca de 77,8% apresentaram dificuldades em definir as razões trigonométricas. Além disso, notamos que utilizá-las corretamente se configura como uma dificuldade ainda maior. Dos 72 alunos participantes, apenas 2 deles conseguiram resolver corretamente uma das questões contextualizadas e outros 2 utilizaram as razões corretamente, mas não finalizaram a resolução da questão.

Os alunos demonstram não ter uma compreensão conceitual das razões, assimilando-as, na verdade, como simples fórmulas que são usadas mecanicamente a fim de se obter um valor específico. Além disso, vimos que há uma grande deficiência, por parte deles, na compreensão do enunciado das questões e na representação dos dados na linguagem algébricas e/ou pictórica.

Salientamos que não estávamos interessados na quantidade de professores, mas almejávamos a participação de mais professores para que pudéssemos ter uma visão mais ampla das suas opiniões e das dificuldades vivenciadas por eles. No entanto, temos a convicção, que mesmo com apenas um participante, conseguimos ter um panorama de como o ensino de Trigonometria foi abordado nas turmas investigadas e quais as opiniões da professora a respeito do erro no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, temos a convicção que o nosso objetivo geral que consistiu em *investigar os erros cometidos por alunos da 1^a série do Ensino Médio em questões envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo e discutir sobre suas possíveis contribuições para a prática docente* foi alcançado. Foi possível verificar que o erro pode e contribui positivamente na prática do professor em sala de aula e fora dela. Diante dos erros dos alunos o professor tem a oportunidade de (re)planejar suas aulas e de traçar e executar estratégicas didáticas que possibilitem diminuir as dificuldades dos alunos em Matemática e, em especial, no estudo das razões trigonométricas.

A partir dessa análise de erros, elencamos algumas contribuições que podem subsidiar o (re)planejamento das ações da prática dos professores no ensino das razões trigonométricas. Salientamos que as contribuições estão baseadas no desempenho das turmas estudadas, mas que são úteis a qualquer grupo de alunos.

Percebe-se que, no grupo estudado, é fundamental o trabalho na identificação dos ângulos e dos elementos básicos do triângulo retângulo e das razões trigonométricas. Com esse diagnóstico, percebemos que trabalhar com esses alunos as aplicações das razões trigonométricas sem a consolidação da identificação desses elementos básicos não teria efeito positivo no processo de ensino-aprendizagem. Assim, destacamos a importância do professor revisar sobre o triângulo retângulo e dar ênfase a identificação das razões trigonométricas.

Propomos também que a abordagem da trigonometria no triângulo retângulo deva levar em consideração o conteúdo semelhança de triângulos, pois essa é uma das formas que possibilita o entendimento conceitual das razões. Para isso, podem-se usar, por exemplo, construções geométricas com o auxílio de software, régua, compasso, transferidor ou outras atividades que permitam a visualização das razões trigonométricas através da semelhança de triângulos.

Sabemos que o modo como os alunos interpretam o enunciado de uma questão é o fio condutor de todo o processo de resolução. Portanto, é importante e necessária que a resolução de problemas seja abordada em sala de aula com mais ênfase, permitindo, assim, aos alunos o desenvolvimento de habilidades e estratégias indispensáveis à resolução de uma questão/problema.

Considerando que a análise de erros deve ser incorporada na prática docente, como pesquisas futuras almejamos avançar nossas investigações para os cursos de formação de professores que ensinam Matemática, em especial nas disciplinas do bloco metodologia do ensino da Matemática, buscando compreender de qual forma a análise de erros pode ser inserida nessas disciplinas e como ela pode contribuir na formação desses (futuros) professores.

Queremos deixar claro que quando falamos no uso construtivo do erro não estamos fazendo apologia à existência dele. Do mesmo modo que quando falamos que a sua ocorrência deva ser amenizada não estamos o tratando como um elemento negativo da aprendizagem. O que queremos, de fato, é que ele não seja ignorado e não seja encarado com um indicador de fracasso, mas que seja visto como um elemento propício ao desenvolvimento efetivo do processo de ensino-aprendizagem.

Em linhas gerais, a análise de erros permite a nós professores uma compreensão mais ampla dos fenômenos que acontecem nas entrelinhas do processo de ensino-aprendizagem. Mais do que identificar o que o aluno não aprendeu, podemos compreender as suas

dificuldades e rever nossa metodologia fazendo do erro um elemento de reflexão e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ARAGÃO, M.; FREITAS, A. G. B. Práticas dos castigos escolares: enlaces históricos entre normas e cotidiano. **Conjectura**, Caxias do Sul, v. 17, n. 2, p. 17-36, maio/ago. 2012.
- BATISTA, C. G. Fracasso Escolar: Análise de Erros em Operações Matemáticas. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 3, n. 4, p. 61-72, nov. 1995.
- BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 26 – 36.
- BORASI, R. Students' constructive uses of mathematical errors: a taxonomy. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1989, San Francisco. **Proceedings...** San Francisco: AERA, 1989. p. 1-32.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SE, 1998. 92 p.
- BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2011. 127 p.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999. 58 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2002. 144 p.
- CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos de 3º grau**. 120 f. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988.
- _____. **Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral: análise, classificação e tentativas de superação**. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática, 1990. 44 p.
- _____. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. 276 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.
- _____. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 116 p.
- _____. Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, SP, v.15, n. 3, p. 547-562, 2013.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Análise de erros de professores em formação inicial e continuada em uma questão de matemática. In: V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012, Petrópolis. *Anais...* Petrópolis: SBEM, 2012, 20 p.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicação. v. 1. São Paulo: Ática, 2010. 504 p.

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio em Trigonometria. In: X CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2011, Curitiba. *Anais...* Curitiba: EDUCERE, 2011. p. 4409 – 4421. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728_2885.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2014.

FARAGO, J. L.; CARNEIRO, L. N. S. **Matemática:** ensino médio, 1^a série. v. 2. Curitiba: Positivo, 2010.

FORTES, A. W. B. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo:** uma análise de erros no ensino médio. 2012. 97. p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática)–Centro Universitário Franciscano, UNIFRA, 2012.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisas.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007. 200 p.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino da Matemática:** uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 68 p.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Tradução de Magda F. Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem escolar:** estudos e proposições. 19. ed. São Paulo: Cortez, 2008. 272 p.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. In: MIGUEL, A. et al. (Org.). **História da Matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 105 – 178.

MOREN, E. B. S.; DAVID, M. M. M. S.; MACHADO, M. P. L. Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo ensino/aprendizagem. **Cadernos de Pesquisa.** São Paulo: FCC; Cortez, n.83, p.43-51, nov. 1992.

NACARATO, A. M.; BREDARIOL, C. C.; PASSOS, M. P. F. Trigonometria: uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares. In: VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2001, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro. VII ENEM, 2001. 13 p.

PAIVA, J. P. A. A.; RÊGO, R. G. Por que ensinar Matemática pela Resolução de Problemas? In: ASSIS, C. F. C. A.; ASSIS, J. G. (Org.). **Atividades para Aulas de Matemática do Ensino Fundamental:** aprender resolvendo, resolver aprendendo. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2011. p. 1 – 18.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar.** São Paulo: USP, 1998. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1998.

_____. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro na matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000. 184 p.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto metodológico. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

RICO, L. Errores en el aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P.; RICO, L (Org.). **Errores y dificultades de los Estudiantes Resolución de problemas Evaluación Historia.** Bogotá: Una empresa docente, 1998. p. 69 – 108.

ROSSO, A. J.; BERTI, N. M. O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 23, n. 37, p. 1005 – 1035, dez. 2010.

SANTOS, J. R. V.; BURIASCO, R. L. C.; CIANI, A. B. A avaliação como prática de investigação e análise da produção escrita em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, SP, v. 13, n. 25, p. 35 – 45, nov. 2008.

SILVA, D. M. M.; THOMAZ NETO, M. O. Conhecimentos de Estudantes do Ensino Médio sobre Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2006, 11 p. Disponível em:
<<http://www.lematec.net/CDS/SIPEMAT06/artigos/silvathomazneto.pdf>>. Acesso em: 12 jun. 2014.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de pesquisa.** 19. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 31 – 42.

SOUZA, C. A.; VICTER, E. F.; LOPES, J. R. **Uma breve história da trigonometria e seus conceitos fundamentais.** Mesquita: Entorno, 2011. 86 p.

SOUZA, J. R. **Novo olhar:** Matemática. 2 ed. v. 1. São Paulo: FTD, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário do aluno

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Prezado(a) aluno(a),

Solicitamos, gentilmente, a sua colaboração no sentido de responder este questionário que faz parte da coleta de dados do trabalho de conclusão de curso intitulado **Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo: contribuições para a prática docente** orientado pela Prof.^a Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva. Sua participação é de extrema importância para realização dessa pesquisa. Agradecemos a sua colaboração.

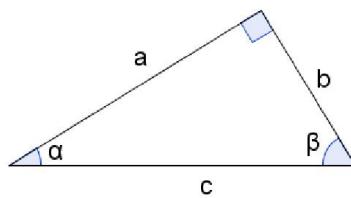
Adelson Carlos Madruga

1. No triângulo retângulo abaixo, indique o lado correspondente à hipotenusa e aos catetos oposto e adjacente ao ângulo α .

Hipotenusa = _____

Cateto oposto a α = _____

Cateto adjacente a α = _____



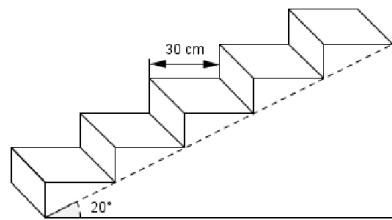
2. Com base nos dados adquiridos na questão anterior determine as seguintes razões trigonométricas:

$\sin \alpha =$

$\cos \alpha =$

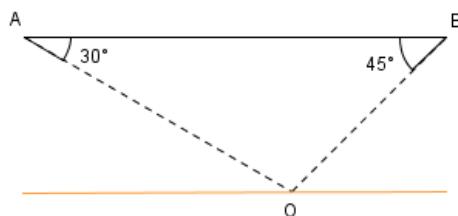
$\tan \alpha =$

3. Uma empresa, para facilitar o transporte de cargas por meio de carrinhos, irá transformar a escada do depósito em uma rampa, conforme a figura abaixo. Sabendo que a escada é formada por cinco degraus e que cada um deles mede 30 cm de comprimento, qual será o comprimento aproximado da rampa? (Dados: $\sin 20^\circ = 0,34$; $\cos 20^\circ = 0,94$ e $\tan 20^\circ = 0,36$.)



4. (Unifap-AP) Luiz fez uma viagem à cidade de Oiapoque numa *pick-up*. Em um determinado trecho do caminho existe uma ladeira com inclinação de 40° em relação ao plano horizontal. Se a ladeira tem 50 m de comprimento, quantos metros a *pick-up* se eleva verticalmente, após percorrer toda a ladeira? (Dados: $\sin 40^\circ = 0,64$; $\cos 40^\circ = 0,76$ e $\tan 40^\circ = 0,83$.)

5. Um avião que voa a uma altitude de 1000 m é avistado, quando passa pelos pontos **A** e **B**, por um observador no solo, de acordo com o desenho:



Determine a distância entre os pontos **A** e **B**. (Dados: $\sin 30^\circ = 0,50$; $\cos 30^\circ = 0,87$; $\tan 30^\circ = 0,58$; $\sin 45^\circ = 0,71$; $\cos 45^\circ = 0,71$ e $\tan 45^\circ = 1$.)

APÊNDICE B – Questionário do professor

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Prezado(a) professor(a),

Solicitamos, gentilmente, a sua colaboração no sentido de responder este questionário que faz parte da coleta de dados do trabalho de conclusão de curso intitulado **Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo: contribuições para a prática docente** orientado pela Prof.^a Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva. Sua participação é de extrema importância para realização dessa pesquisa. Embora seja necessária a sua identificação, manteremos sigilo em relação a ela. Agradecemos a sua colaboração.

Adelson Carlos Madruga

I. DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

1. Nome: _____

2. Sexo:

Masculino Feminino

II. FORMAÇÃO ACADÊMICA E ATUAÇÃO DOCENTE

3. Qual a sua formação inicial?

Licenciatura em Matemática

Aluno(a) de licenciatura em Matemática

Outra: _____

4. Há quanto tempo você atua como professor(a) de Matemática?

Menos de 1 ano De 1 a 5 anos

De 6 a 10 anos De 10 a 20 anos

Mais de 20 anos

5. Durante a sua formação inicial você teve alguma disciplina que abordou o erro num aspecto positivo/construtivo?

Sim. Qual? _____

Não

III. OPINIÕES PESSOAIS

Do ensino de trigonometria no triângulo retângulo

6. Você já abordou em sala de aula o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo?

Sim Não

7. Quais as dificuldades que você sente em abordar as razões trigonométricas?

8. Como você aborda(ria) as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em sala de aula?

9. Você conhece algum recurso, além do livro didático, para ensinar trigonometria no triângulo retângulo?

Sim. Qual(is)? _____

Não.

10. Quais os erros mais frequentes cometidos pelos alunos no conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo?

Do erro no processo de ensino-aprendizagem

11. Em sua opinião, qual o significado do erro no processo de ensino-aprendizagem?

12. Por que os alunos erram muito em Matemática?

13. Qual a sua postura diante dos erros cometidos pelos seus alunos?

14. Como os alunos, de forma geral, lidam com o erro em sala de aula?

15. Os erros cometidos pelos alunos podem orientar a prática do professor em sala de aula?

() Sim. Como?

() Não. Por quê?
