



*Universidade Federal da Paraíba*

*Centro de Tecnologia*

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL - PPGECAM  
-MESTRADO-**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE APLICADA À ESTRUTURAS  
COM COMPORTAMENTO NÃO LINEAR**

*Por*

***RENAN GOMES DA SILVA***

***Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para obtenção  
do grau de Mestre***

**JOÃO PESSOA – PB**

**2016**

Renan Gomes da Silva

**Análise de confiabilidade aplicada a estruturas  
com comportamento não linear**

João Pessoa, Paraíba

2016

Renan Gomes da Silva

**Análise de confiabilidade aplicada a estruturas com  
comportamento não linear**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii

João Pessoa, Paraíba  
2016

S586a Silva, Renan Gomes da.

Análise de confiabilidade aplicada a estruturas com comportamento não linear / Renan Gomes da Silva.- João Pessoa, 2016.

72 f. : il.-

Orientador: Profº. Drº. André Jacomel Torii.

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CT

1. Estruturas – Construção Civil. 2. Análise Não Linear.  
3. Simulação de Monte Carlo. 4. Colapso – Construção Civil.  
5. MASTAN. I. Título

UFPB/BC

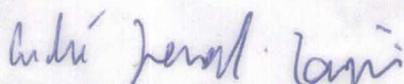
CDU – 624.04(043)

**"ANÁLISE DE CONFIABILIDADE APLICADA A ESTRUTURAS COM  
COMPORTAMENTO NÃO LINEAR"**

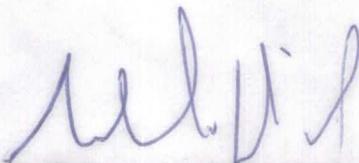
**RENAN GOMES DA SILVA**

**Dissertação aprovada em 29 de março de 2016**

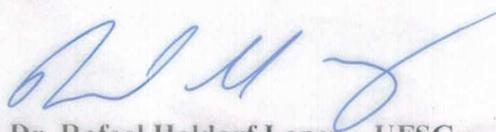
**Período Letivo: 2015.2**



**Prof. Dr. André Jacomel Torii – UFPB  
Orientador**



**Prof. Dr. Roberto Leal Pimentel – UFPB  
Examinador Interno**



**Prof. Dr. Rafael Holdorf Lopez – UFSC  
Examinador Externo**

**João Pessoa/PB  
2016**

# Agradecimentos

Aos meus pais, Ronaldo e Josenilda, e aos meus irmãos, Romney e Julianna, por sempre me apoiarem em toda essa trajetória.

Ao meu orientador, Prof. André Jacomel Torii, pela dedicação, paciência e amizade durante todo o mestrado e o apoio em todos os quesitos para realização deste trabalho. Gostaria de agradecer principalmente por me mostrar por diversas vezes o grande exemplo de educador e pessoa que você é.

À minha namorada Mirella, por ter me apoiado desde os primeiros instantes até os momentos mais difíceis e por saber compreender quando não foi possível dedicar a atenção que deveria.

Aos amigos Leovegildo, Cibelle e Bismark pela amizade e pelos bons momentos vividos durante o mestrado.

À Capes pela ajuda financeira na concretização deste trabalho.

À todos, que de certa forma, contribuíram para que este projeto fosse possível.

# Resumo

SILVA, R. G. **Análise de confiabilidade aplicada a estruturas com comportamento não linear**, 2016. 72p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

Em um projeto estrutural buscam-se soluções eficazes, com baixo custo e segurança aceitável para os padrões normativos. Com o avanço das tecnologias de construção e a utilização de ferramentas computacionais avançadas, é possível obter estruturas cada vez mais esbeltas, onde a instabilidade é fator a ser considerado no projeto estrutural. Assim, surge a necessidade de análises onde as não linearidades físicas e geométricas são consideradas. Existe também, a necessidade de quantificar a segurança estrutural destes sistemas, o que é obtido através da análise de confiabilidade. Neste contexto, o objetivo deste trabalho consiste em aplicar técnicas de análise de confiabilidade a estruturas com comportamento não linear e avaliar em quais tipos de estruturas esse tipo de efeito influência a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade. Para alcançar estes objetivos, foram desenvolvidas rotinas computacionais para a simulação de Monte Carlo, que foram acopladas ao programa de análise estrutural MASTAN. Esta metodologia permitiu que através de rotinas eficientes e de baixo custo computacional, fosse possível aplicar técnicas de confiabilidade a diferentes exemplos numéricos e avaliar em quais casos a utilização de modelos lineares é suficientemente precisa e em quais casos torna-se necessária a utilização de modelos estruturais não lineares. Através dos exemplos numéricos utilizados é possível afirmar que as rotinas implementadas são eficazes e concordam com os resultados obtidos analiticamente. Esses resultados sugerem que, para determinados tipos de estruturas, não são observadas diferenças significativas na probabilidade de falha obtida através das análises linear e não linear, enquanto que estruturas onde a instabilidade lateral ou global são observadas, o modelo linear subestima a probabilidade de falha estrutural, o que pode induzir a um projeto incorreto da estrutura.

**Palavras-chave:** Estruturas, Análise Não Linear; Simulação de Monte Carlo; Colapso; MASTAN.

# Abstract

SILVA, R. G. **Reliability Analysis applied to structures with nonlinear behavior**, 2016. 72p. Master's Thesis - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

Effective solutions are sought in a structural design, with low cost and acceptable security for regulatory standards. With advances in building technologies and the use of advanced computational tools, one can get more and more slender structures, where instability is a factor to be considered in structural design. Thus, there is the need for analysis where no physical and geometrical nonlinearities are considered. There is also a need to quantify the structural safety of these systems, which is obtained by Reliability Analysis. In this context, the objective of this work is to apply reliability analysis techniques to structures with nonlinear behavior and evaluate in which types of structures such effect influence the probability of failure and reliability index. To do so, computational routines were developed for the Monte Carlo simulation, which were added to the Mastan structural analysis program. This methodology was created so that more robust and effective reliability analysis were possible and so results were broadly discussed. Through the numerical examples used, it can be said that the implemented routines are effective and match the results obtained analytically. These results suggest that for certain types of structures, significant differences were observed in the failure probability obtained through the linear and non-linear analysis, while structures where the lateral or global instability are observed, the linear model underestimates the probability of structural failure, which may lead to an incorrect structure design.

**Keywords:**Structural Reliability; Non Linear Analysis; Monte Carlo Simulation; Collapse; MASTAN.

# Lista de abreviaturas e siglas

FDA	Função de Distribuição Acumulada de Probabilidades
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FORM	First Order Reliability Method - Método de aproximação de primeira ordem
SORM	Second Order Reliability Method - Método de aproximação de segunda ordem
NRP	Newton-Raphson Padrão
NRM	Newton-Raphson Modificado
FOSM	First-Order Second-Moment - Segundo momento de primeira ordem

# Lista de símbolos

$A$	Área
$P_{cr}$	Carga crítica de flambagem
$H_e$	Carga crítica elástica
$P_{ref}$	Carga de referência
$H_p$	Carga limite plástica
$W$	Carregamento distribuído
$CV$	Coefficiente de Variação
$J$	Constante torsional
$\sigma$	Desvio Padrão
$D$	Domínio de falha
$\gamma_2$	Fator adimensional relativo a seção
$f_X$	Função densidade de probabilidade
$F_X$	Função de distribuição acumulada
$\Phi ()$	Função de distribuição cumulativa normal padrão
$g()$	Função estado limite
$I(x)$	Função Indicadora
$\beta$	Índice de confiabilidade
$dF$	Incremento de carga
$d\Delta$	Incremento de deslocamento
$dU$	Incremento de deslocamento para o Método de controle de deslocamento
$K$	Matriz de rigidez
$F_{max}$	Máxima força em módulo resultante

$\mu$	Média
$G$	Módulo de cisalhamento do material
$Z$	Módulo plástico
$E$	Módulo de elasticidade
$I$	Momento de inércia
$M_p$	Momento Plástico
$\lambda$	Multiplicar de carga
$p_f$	Probabilidade de falha
$P_y$	Produto entre a área e o limite de escoamento
$\varepsilon$	Relaxação
$C$	Rigidez torsional
$f_y$	Tensão de escoamento
$E$	Valor Esperado
$Var(X)$	Variância
$P$	Vetor de cargas aplicadas
$f$	Vetor de forças
$F$	Vetor de forças internas
$R$	Vetor de forças residuais
$u$	Vetor de deslocamentos
$\Delta$	Vetor de deslocamentos

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Função Densidade de Probabilidade $f_R(s)$ e $f_S(s)$ (ANG; TANG, 1984) . . . . .	14
Figura 2 – Efeito da posição relativa entre $f_R(r)$ e $f_S(s)$ em $p_f$ (ANG; TANG, 1984)	14
Figura 3 – Efeito da dispersão entre $f_R(r)$ e $f_S(s)$ em $p_f$ (ANG; TANG, 1984) . . . . .	14
Figura 4 – Função densidade de probabilidade da função $G(x)$ (ANG; TANG, 1984)	16
Figura 5 – Espaço das variáveis reduzidas (ANG; TANG, 1984) . . . . .	17
Figura 6 – Sorteio de pontos da Simulação de Monte Carlo . . . . .	20
Figura 7 – Pequenas deformações com grandes deslocamentos e rotações. . . . .	23
Figura 8 – Efeitos de segunda ordem: $p - \Delta$ (Deslocamento lateral) e $p - \delta$ (Curvatura)	23
Figura 9 – Níveis de análise . . . . .	24
Figura 10 – Caminho de equilíbrio . . . . .	27
Figura 11 – Processo Incremental-iterativo com controle de carga (a) NRP (b) NRM (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000) . . . . .	30
Figura 12 – Processo Incremental-iterativo com controle de deslocamento . . . . .	31
Figura 13 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento. (a) Snap-through, (b) Matriz de rigidez tangente singular e (c) Snap-Back (LACERDA, 2014). . . . .	32
Figura 14 – Algoritmo de solução Incremental-Iterativo . . . . .	33
Figura 15 – Procedimento computacional . . . . .	37
Figura 16 – Treliça plana de 6 barras . . . . .	39
Figura 17 – Viga bi-apoiada com carregamento combinado . . . . .	41
Figura 18 – Pórtico Plano composto por 4 barras . . . . .	42
Figura 19 – Estruturas Treliçadas: (a) Isostática e (b) Hiperestática . . . . .	44
Figura 20 – Engastadas sujeita instabilidade lateral . . . . .	46
Figura 21 – Treliça Espacial de 36 barras . . . . .	48
Figura 22 – Modo de falha estrutural . . . . .	49
Figura 23 – Modo de falha estrutural - Vista Lateral e Superior da estrutura . . . . .	50
Figura 24 – Modo de falha estrutural - Carga Crítica Elástica . . . . .	50

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Distribuições Contínuas de probabilidade . . . . .	10
Tabela 2 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 1 . . . . .	40
Tabela 3 – Resultados encontrados para o Exemplo 1 . . . . .	40
Tabela 4 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 2 . . . . .	41
Tabela 5 – Resultados encontrados para o Exemplo 2 . . . . .	42
Tabela 6 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 3 . . . . .	43
Tabela 7 – Resultados encontrados para o Exemplo 3 . . . . .	44
Tabela 8 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 4 . . . . .	45
Tabela 9 – Resultados encontrados para o Exemplo 4 . . . . .	45
Tabela 10 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 5.6 . . . . .	47
Tabela 11 – Resultados encontrados para o Exemplo 5.6 . . . . .	49

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos e Metas</b>	<b>3</b>
1.3.1	Objetivo geral	3
1.3.2	Objetivos específicos	3
<b>1.4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>3</b>
1.4.1	Estudo sobre análise não linear de estruturas e confiabilidade	4
1.4.2	Desenvolvimento das rotinas computacionais	4
1.4.3	Experimentos numéricos e validação dos resultados	4
<b>1.5</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b>	<b>7</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2.2</b>	<b>Conceitos de probabilidade</b>	<b>7</b>
2.2.1	Variáveis aleatórias	8
2.2.2	Funções de distribuição acumulada de probabilidade	8
2.2.3	Funções densidade de probabilidade	9
2.2.4	Momentos de uma variável aleatória	11
<b>2.3</b>	<b>Incertezas em Projetos de Estruturas</b>	<b>11</b>
<b>2.4</b>	<b>Problema fundamental de Confiabilidade Estrutural</b>	<b>12</b>
<b>2.5</b>	<b>Simulação de Monte Carlo</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Fontes de não linearidade</b>	<b>21</b>
3.2.1	Não linearidade Física	22
3.2.2	Não linearidade Geométrica	22
3.2.3	Não linearidade de contato	23
<b>3.3</b>	<b>Tipos de Análises</b>	<b>24</b>
3.3.1	Análise Elástica de Primeira ordem	24
3.3.2	Análise Elástica de Segunda ordem	25
3.3.3	Análise Inelástica de Primeira ordem	25

3.3.4	Análise Inelástica de Segunda ordem . . . . .	25
<b>3.4</b>	<b>Métodos de Análise Não Linear . . . . .</b>	<b>26</b>
3.4.1	Considerações Gerais . . . . .	26
3.4.2	Método Incremental . . . . .	26
3.4.3	Método Iterativo . . . . .	28
3.4.3.1	Método do Controle de carga . . . . .	29
3.4.3.2	Método do Controle de Deslocamento . . . . .	30
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>5.1</b>	<b>Exemplo 1: Treliça plana de 6 barras . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>5.2</b>	<b>Exemplo 2: Viga sujeita a carregamento combinado . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>5.3</b>	<b>Exemplo 3: Pórtico plano com 3 barras . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>5.4</b>	<b>Exemplo 4: Treliça Plana Isostática e Hiperestática . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>5.5</b>	<b>Exemplo 5: Viga engastada . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>5.6</b>	<b>Exemplo 6: Treliça Espacial de 36 barras . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>53</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Considerações Iniciais

Em um projeto estrutural buscam-se soluções que levem em conta não apenas a sua funcionalidade, mas outros fatores como segurança, durabilidade e custo. Na busca por uma redução do custo, soluções mais eficientes são utilizadas e materiais cada vez mais resistentes são desenvolvidos para atender diferentes tipos de estruturas. Conseqüentemente, há uma redução significativa nas dimensões dos elementos estruturais, tornando estes cada vez mais esbeltos. Diante desse parâmetro, é necessário avaliar não somente os critérios de resistência do material, mas também a estabilidade da estrutura sob condições de serviço, o que requer análises capazes de representar os efeitos de segunda ordem e o comportamento da estrutura além do regime elástico.

Há dois tipos de não linearidades que podem ser considerados em uma análise estrutural. O primeiro tipo é chamado de não linearidade física, que ocorre quando o material não possui uma relação tensão-deformação linear e, neste caso, a relação força-deslocamento pode tornar-se não linear. É possível também que não linearidades físicas estejam associadas a rótulas plásticas provenientes dos mecanismos de colapso localizado (flambagem, plastificação ou fissuração localizada em componentes estruturais). O segundo tipo é chamado de não linearidade geométrica, e ocorre quando valores relativamente grandes de deslocamento ocasionam efeitos adicionais de segunda ordem, fazendo com que as equações de equilíbrio sejam formuladas a partir da configuração deformada da estrutura (BATHE, 1996; MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000; BIONDINI; BONTEMPO; MALEBRA, 2004).

Nesse contexto, surge a necessidade de avaliar o atendimento à segurança estrutural por parte dessas estruturas. Uma análise determinística não é capaz de prever com precisão o quão segura é uma estrutura projetada, uma vez que cada uma das variáveis de projeto está associada a incertezas. Desta forma é necessário considerar a variabilidade destes parâmetros, o que nos leva ao estudo da confiabilidade de estruturas.

Segundo (MELCHERS, 1999), a análise de confiabilidade vem a ser aquela que trata do cálculo da probabilidade de que determinados estados limites sejam ultrapassados para uma estrutura em qualquer estágio durante a sua vida útil. Em particular, o estudo da confiabilidade estrutural está preocupado com o limite último ou estado limite de segurança para a estrutura. Através desta análise, é possível obter a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade para uma determinada estrutura.

Para estruturas em aço, a análise de confiabilidade vem sendo bastante utilizada pelas

normas e códigos, como por exemplo, a NBR 8800 (2008). Outras normas para estruturas em aço utilizadas internacionalmente (Ex.: AISC, EUROCODE) vem reformulando os seus coeficientes e parâmetros através da análise de confiabilidade. Com esta análise, busca-se a substituição das formulações anteriores de normas que se baseavam no método das tensões admissíveis, uma vez que este tipo de abordagem, apesar de bastante utilizada inicialmente, não representa adequadamente o fenômeno probabilístico (i.e. os coeficientes não são ajustados com base na probabilidade de falha das estruturas). A análise de confiabilidade busca então, aperfeiçoar a concepção de um projeto, considerando a probabilidade de ocorrência da violação de um determinado estado limite. Nos últimos anos, várias pesquisas foram feitas com o objetivo de aperfeiçoar os parâmetros utilizados nos códigos normativos através da análise de confiabilidade, onde se mostrou que vários deles deveriam ser corrigidos, como em Honfi, Martensson e Thelandersson (2012), Deftyarev (2012), Beck e Corrêa (2013) e Harichandran e Iqbal (2011).

A análise não linear de estruturas associada a análise de confiabilidade é de grande importância para o projeto de estruturas, uma vez que possibilita uma modelagem mais precisa do comportamento real da estrutura, e assim, determinar qual o limite último que uma estrutura pode resistir. Dessa forma, é importante introduzir o conceito de colapso, que de acordo com Chakrabarty (2006) é o estado onde os deslocamentos crescem indefinidamente sob a aplicação de cargas externas constantes. Avaliar as cargas em que ocorre o colapso plástico é de grande importância, principalmente quando associadas à análise de confiabilidade, pois torna possível calcular a probabilidade que tal evento ocorra em uma determinada estrutura.

## 1.2 Justificativa

Os avanços observados na construção civil são de grande importância para toda a sociedade e nesse contexto, os engenheiros devem ser capazes de desenvolver novas técnicas construtivas e aplicar diferentes materiais para que as necessidades dos projetos estruturais sejam atendidas. Entretanto, paralelo a este desenvolvimento, existe uma necessidade do mercado por estruturas mais econômicas, o que implica na utilização de elementos mais esbeltos e na consideração da resistência limite do material, com a garantia de uma segurança mínima exigida.

Conseqüentemente, é necessário analisar esse tipo de estrutura através de ferramentas que considerem o comportamento não linear da estrutura e dos materiais, uma vez que os elementos mais esbeltos estarão mais susceptíveis a apresentarem instabilidades geométricas, com ou sem plastificação do material, o que não pode ser representado adequadamente por uma análise linear. Diante dessa realidade, surge a necessidade fundamental de avaliar a segurança desses sistemas, o que justifica a implementação da análise de confiabilidade à

estruturas onde o comportamento não linear é significativo e a adoção deste tema para esta dissertação de mestrado.

## 1.3 Objetivos e Metas

### 1.3.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho consiste em avaliar em quais casos a utilização de modelos lineares é suficientemente precisa e em quais casos torna-se necessária a utilização de modelos estruturais não lineares. Busca-se alcançar este objetivo através da aplicação de técnicas de análise de confiabilidade a estruturas com comportamento não linear, . Assim, para determinados problemas propostos, serão calculadas as probabilidades de falha e avaliados os efeitos das não linearidades físicas e geométricas, em especial, aquelas relacionadas a análise do colapso plástico.

### 1.3.2 Objetivos específicos

Para que a proposta acima seja realizada, diferentes atividades foram desenvolvidas. Desta forma, ao detalhar este objetivo, apresentaram-se os objetivos específicos do trabalho:

- Desenvolver rotinas computacionais associadas a metodologia a ser aplicada para o caso de estruturas treliçadas e pórticos;
- Aplicar os métodos de análise de confiabilidade a determinados tipos de problemas, tornando possível avaliar o efeito das não linearidades estruturais na probabilidade de falha destes sistemas;
- Comparar os resultados obtidos com resultados teóricos;
- Identificar em quais casos a análise de confiabilidade considerando colapso estrutural requer a utilização de modelos estruturais não-lineares.

## 1.4 Metodologia

A metodologia utilizada neste trabalho foi dividida em três etapas: estudo sobre análise não linear de estruturas e análise de confiabilidade; desenvolvimento de estratégias de acoplamento entre análise não-linear (utilizando rotinas computacionais pré-existentes) e análise de confiabilidade (utilizando rotinas computacionais desenvolvidos pelo autor); experimentação numérica e a validação dos resultados.

### 1.4.1 Estudo sobre análise não linear de estruturas e confiabilidade

Foi desenvolvido inicialmente um estudo sobre os principais conceitos abordados nesse trabalho, buscando aprofundar o conhecimento relacionado à análise não linear de estruturas, em específico, aqueles ligados à plasticidade. Também foi feita uma revisão dos aspectos da análise de confiabilidade, em particular do método de simulação de Monte Carlo, onde foram desenvolvidas rotinas computacionais aplicadas a problemas propostos na literatura para que, em uma fase posterior do trabalho, houvesse a possibilidade de desenvolver o método de acoplamento das duas análises.

### 1.4.2 Desenvolvimento das rotinas computacionais

Foram desenvolvidas inicialmente as rotinas computacionais para a análise de confiabilidade utilizando a simulação de Monte Carlo, e após esta fase, as rotinas foram acopladas ao programa de análise estrutural MASTAN (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000), o qual possibilita modelagem das não linearidades físicas e geométricas. Esta implementação foi feita no ambiente de desenvolvimento MATLAB, o que possibilitou uma maior facilidade de acoplamento com as rotinas de confiabilidade estrutural, uma vez que o MASTAN foi desenvolvido no mesmo ambiente de programação.

### 1.4.3 Experimentos numéricos e validação dos resultados

A etapa final deste trabalho consistiu na realização de experimentos numéricos para diferentes tipos de estrutura. Foram utilizadas as rotinas computacionais desenvolvidas na fase anterior do trabalho. Estes resultados foram então validados através da comparação destes com resultados teóricos.

## 1.5 Organização do Trabalho

A dissertação foi elaborada e subdividida em mais quatro capítulos. De modo geral, os dois capítulos subseqüentes apresentam aspectos teóricos importantes e que estão diretamente relacionados ao assunto, enquanto que os demais são destinados a apresentação e discussão dos resultados numéricos.

No **Capítulo 2**, são discutidos os principais conceitos de Confiabilidade Estrutural e da Simulação de Monte Carlo utilizados neste trabalho, abordando a teoria relacionada e apontando as referências que podem ser consultadas para maiores detalhes.

No **Capítulo 3**, são analisados os aspectos principais da análise não linear pertinentes a esse trabalho. Ainda neste capítulo, é apresentada a metodologia de solução para sistemas

não lineares, onde são discutidas as estratégias incrementais e iterativas utilizadas neste trabalho.

No **Capítulo 4**, são apresentados os resultados da análise de confiabilidade para diferentes tipos de estruturas, onde busca-se validar a estratégia de análise proposta nesse trabalho e comparar os resultados obtidos para a probabilidade de falha na análise linear e através da análise não linear. Outros aspectos, como a instabilidade global da estrutura e a flambagem lateral de vigas, são discutidos para que se possa avaliar a influência destes fenômenos nos resultados obtidos.

Finalmente, no **Capítulo 5** são apresentadas as observações e conclusões do trabalho. Com o objetivo de propor uma continuidade ao trabalho e expandir os métodos de análise propostos neste trabalho, são apontadas linhas de desenvolvimento futuro desta dissertação.



## 2 Confiabilidade Estrutural

Neste capítulo são discutidos os aspectos teóricos da confiabilidade estrutural, onde busca-se através desta abordagem fundamentar a implementação computacional da metodologia de análise de confiabilidade aplicada a análise não linear de estruturas.

### 2.1 Introdução

O termo confiabilidade estrutural define um parâmetro de avaliação da segurança de um determinado sistema, frente a um dado desempenho esperado. A confiabilidade, por outro lado, pode ser definida como a propensão de um determinado sistema em não violar o estado limite, quer seja por falha ou por não atender o desempenho esperado. Segundo Melchers (1999), O termo confiabilidade é comumente definido como um complemento da probabilidade de falha  $p_f$  (i.e.  $1 - p_f$ ) onde seria mais apropriado defini-la como a probabilidade de segurança de uma estrutura dentro de dado período de tempo. A falha estrutural pode ser considerada como a ocorrência de um ou mais tipos de respostas indesejadas quando estas provocam a violação de estados predefinidos. Como exemplo de falha, pode-se citar o escoamento de um dado material, o colapso de partes de uma estrutura, fissuras, deformações excessivas e colapso.

Como muitos parâmetros estruturais não são deterministicamente conhecidos ou não podem ser previstos, devido à variabilidade das propriedades mecânicas dos materiais e dos carregamentos aplicados, sempre existirão incertezas quanto à resposta estrutural. Assim, cabe ao engenheiro projetar uma estrutura cuja probabilidade de falha (seja ela atrelada ao colapso ou à requisitos de utilização) seja pequena o suficiente para garantir a segurança da estrutura. Esta tarefa pode ser realizada com o auxílio de normas ou com o auxílio da análise de confiabilidade, uma vez que esta permite a avaliação da probabilidade de falha da estrutura diretamente.

### 2.2 Conceitos de probabilidade

A seguir são apresentados alguns conceitos teóricos de probabilidade fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Para informações mais aprofundadas sobre assunto, é recomendada a consulta às referências indicadas.

### 2.2.1 Variáveis aleatórias

Considerar que as variáveis resistência e solicitação são quantidades aleatórias em um projeto estrutural é uma idéia bastante razoável, uma vez que não é possível definir valores fixos para estas variáveis. Para exemplificar esta questão, considera-se um ensaio de corpos de prova de aço submetidos a tração. Ao considerar a mesma seção transversal dos corpos de prova, as mesmas dimensões e o mesmo equipamento controlado para aplicação da força, teoricamente todos os corpos de prova deveriam apresentar valores idênticos para a resistência do material. Entretanto, o que se observa é que cada corpo de prova apresenta uma determinada resistência a tração após os ensaios. Assim, obtêm-se um conjunto de possíveis resultados para a variável resistência do aço, onde para esse conjunto dá-se o nome de **espaço amostral**. No projeto de estruturas, pode-se dizer que todas as variáveis são aleatórias, uma vez que são observadas variações desde as propriedades mecânicas até as dimensões dos elementos estruturais.

Define-se uma variável aleatória como uma função que atribui um valor real para cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório (MONTGOMERY; RUNGER; HUBELE, 2001). Uma variável aleatória é comumente representada por uma letra maiúscula, enquanto valores medidos desta variável (realizações da variável) são denotado por uma letra minúscula. O espaço amostral da variável aleatória é também denominado de domínio da função e pode ser classificado como discreto, quando os valores dentro deste domínio são finitos ou infinitos contáveis, e contínuo, no caso dos pontos dentro do domínio da função serem infinitos.

### 2.2.2 Funções de distribuição acumulada de probabilidade

As funções de distribuição acumulada (FDA) de probabilidade representam a probabilidade de que a variável aleatória  $X$  assuma um valor menor ou igual a um valor de referência  $x$ , definido para qualquer número real no intervalo de  $(-\infty \leq x \leq \infty)$ . A representação matemática dessa função de probabilidade é expressa por (MONTGOMERY; RUNGER; HUBELE, 2001):

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx, \quad (2.1)$$

onde  $P(\cdot)$  indica a probabilidade de ocorrência de um dado evento.

Algumas propriedades desta função devem ser destacadas, tais como:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- Se  $x \leq y$ , então  $F_X(x) \leq F_X(y)$

### 2.2.3 Funções densidade de probabilidade

As funções densidade de probabilidade (FDP) descrevem as distribuições de probabilidade de uma variável aleatória  $X$ , ou seja, as probabilidades de ocorrência dos diversos eventos envolvendo a mesma. Avalia-se através dessa função, a probabilidade de que a variável assumira um valor contido dentro de um intervalo pré-definido. Esta é uma função bastante utilizada nas quantidades descritivas das variáveis aleatórias, como mostrado nas Equações 2.3 e 2.4. Uma das formas de se definir a FDP de uma variável aleatória  $X$  é através da derivada da função de distribuição acumulada em relação a  $x$  (MONTGOMERY; RUNGER; HUBELE, 2001), tal que:

$$f_x(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.2)$$

Histogramas são aproximados por esta função visto que a frequência relativa é uma estimativa da probabilidade de certo resultado cair no intervalo, logo, a função densidade de probabilidade define a curva do histograma e possibilita o cálculo de uma área qualquer sobre o gráfico que representa a probabilidade da variável aleatória assumir um valor num dado intervalo.

Algumas propriedades importantes dessa função são:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$

Na literatura, existem diversos modelos de funções densidade de probabilidade e suas respectivas aplicações, onde desta forma é possível modelar fenômenos como ventos, resistência dos materiais, dentre outros. Na Tabela 1, são mostradas algumas das distribuições contínuas de probabilidade utilizadas neste trabalho, bem como outros modelos frequentemente utilizados em análises de confiabilidade.

Tabela 1 – Distribuições Contínuas de probabilidade

Distribuição	$f_X(x)$	Parâmetros				Média	Variância
		$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$		
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	a	b	-	-	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\mu$	$\sigma$	-	-	$\mu$	$\sigma^2$
Log-Normal	$\frac{1}{\xi x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2\right]$	$\lambda$	$\xi$	-	-	$\exp[\lambda + 0.5\xi^2]$	$\mu^2[\exp(\xi^2) - 1]$
Exponencial deslocada	$v \exp[-v(x - \varepsilon)]$	$v$	$\varepsilon$	-	-	$\frac{1}{v} + \varepsilon$	$\frac{1}{v^2}$
Gumbel mínimos	$\beta \exp[\beta(x - u_1) - e^{-\beta(x-u_1)}]$	$u_1$	$\beta$	-	-	$u_1 - \frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{6\beta^2}$
Gumbel máximos	$\beta \exp[\beta(x - u_n) - e^{-\beta(x-u_n)}]$	$u_n$	$\beta$	-	-	$u_n - \frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{6\beta^2}$
Frechet mínimos	$\frac{\beta}{u_1} \left(\frac{x}{u_1}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\frac{x}{u_1}\right)^\beta\right]$	$u_1$	$\beta$	-	-	$u_1 \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$	$u_1^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]$
rechet máximos	$\frac{\beta}{u_n} \left(\frac{u_n}{x}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\frac{u_n}{x}\right)^\beta\right]$	$u_n$	$\beta$	-	-	$u_n \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$	$u_n^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]$
Weibull mínimos	$\frac{\beta}{u_1 - \varepsilon} \left(\frac{x - \varepsilon}{u_1 - \varepsilon}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x - \varepsilon}{u_1 - \varepsilon}\right)^\beta\right]$	$u_1$	$\beta$	$\varepsilon$	-	$\varepsilon + (u_1 - \varepsilon)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$(u_1 - \varepsilon)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]$
Weibull máximos	$\frac{\beta}{\varepsilon - u_n} \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon - u_n}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon - u_n}\right)^\beta\right]$	$u_n$	$\beta$	$\varepsilon$	-	$\varepsilon + (\varepsilon - u_n)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$(\varepsilon - u_n)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]$

### 2.2.4 Momentos de uma variável aleatória

Utilizando os conceitos estatísticos é possível definir um valor médio de resistência e um valor que avalie o grau de dispersão dos resultados em torno do valor médio. Esses valores são denominados de primeiro (média ou valor esperado) e segundo momento (variância) estatístico. Devido a dificuldade que existe em comparar o desvio-padrão de diferentes variáveis aleatórias, pode-se ainda utilizar o coeficiente de variação como medida de dispersão no lugar do desvio padrão, uma vez que esta é uma medida adimensional e representa de maneira mais significativa o grau de dispersão das variáveis aleatórias do problema.

A média ou valor esperado de uma variável aleatória  $X$  contínua, pode ser definida como a integral:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx \quad (2.3)$$

onde  $f_x(x)$  é a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $X$ ,  $E[.]$  é o operador valor esperado e  $\mu$  é a média da variável aleatória.

De forma semelhante, a variância de uma variável aleatória contínua é definida por:

$$Var[X] = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_x(x) dx \quad (2.4)$$

A partir desses dois parâmetros é possível definir o desvio-padrão ( $\sigma$ ) e o coeficiente de variação ( $CV$ ) por:

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \quad (2.5)$$

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.6)$$

É preciso avaliar qual o modo de variação de cada uma das variáveis aleatórias, ou seja, definir um intervalo possível de valores onde as variáveis podem assumir qualquer valor. Por isso, para caracterizar uma variável aleatória é necessário definir, além do seu valor médio e a sua medida de dispersão, qual a sua distribuição de probabilidades. A seguir, são apresentados os conceitos das funções básicas de distribuição de probabilidade e algumas funções utilizadas nesse trabalho.

## 2.3 Incertezas em Projetos de Estruturas

Para solução de problemas de engenharia estrutural serão sempre necessárias estimativas e previsões, uma vez que inúmeras incertezas são encontradas devido a diferença entre o comportamento previsto no modelo e o comportamento real da estrutura. Algumas incertezas

podem ser reduzidas ou até eliminadas através da obtenção de maiores informações sobre estas, enquanto outras são intrínsecas ao problema e não podem ser eliminadas.

Na análise de confiabilidade, busca-se então, relacionar as variáveis que descrevem o sistema estrutural com a variabilidade destas, onde esta variabilidade estará presente sob a forma de incertezas. São inúmeras as incertezas associadas ao projeto e a construção de estruturas, onde segundo Melchers (1999), estas podem ser classificadas como:

1. **Incerteza do modelo:** São associadas às simplificações ou limitações das variáveis básicas para representar fenômenos ou estruturas reais
2. **Incerteza de predição:** Surgem devido à predição de alguns estados futuros para problemas em confiabilidade estrutural, principalmente por essas estimativas estarem associadas ao conhecimento prévio do analista
3. **Incerteza físicas:** São caracterizadas pela natureza aleatória das variáveis, tais como a variabilidade da resistência de escoamento no aço, a variabilidade das cargas de vento, etc. Esta incerteza pode ser reduzida através da coleta de dados e controle de qualidade, mas não pode ser eliminada.
4. **Incerteza estatísticas:** Proveniente da limitação das descrições estatísticas das variáveis baseadas em interferências sobre amostras finitas da população
5. **Incerteza ligadas a fatores humanos:** É resultado de erro humano e da intervenção humana nos processos de dimensionamento, construção e utilização da estrutura.
6. **Incerteza fenomenológicas:** Ocorrem devido a existência de eventos não previsíveis ou não levados em consideração

Não se podem considerar todas as incertezas citadas acima na análise de confiabilidade, de forma que, a confiabilidade sempre estará relacionada ao número de incertezas consideradas. Portanto, apenas faz sentido a comparação entre sistemas sujeitos aos mesmos tipos de incertezas. Diante de tais incertezas, as variáveis do sistema são modeladas como pertencentes a um determinado intervalo, podendo ser modeladas através de variáveis aleatórias.

## 2.4 Problema fundamental de Confiabilidade Estrutural

Um dos principais objetivos da análise de confiabilidade é quantificar a segurança de uma estrutura considerando as incertezas presentes em resistências e solicitações e assim, garantir que a resistência da estrutura seja capaz de suportar a atuação máxima de uma ação ou uma combinação destas durante toda a sua vida útil.

O problema fundamental da confiabilidade estrutural considera que a solicitação atuante  $S$  e a resistência  $R$  são variáveis aleatórias e possuem distribuição de probabilidade conhecidas. A equação de estado limite para este problema é representada pela diferença entre estas duas variáveis,

$$Z = R - S, \quad (2.7)$$

onde  $Z$  representa a performance do sistema, que também é uma variável aleatória com desvio padrão  $\sigma_z$  e média  $\mu_z$ . No caso das duas variáveis aleatórias possuírem distribuição normal de probabilidade e serem independentes, obtém-se o seguinte resultado (MELCHERS, 1999):

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S, \quad (2.8)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2. \quad (2.9)$$

A partir de  $Z$ , pode-se definir o estado seguro como  $Z > 0$  e o estado de falha como  $Z < 0$ . O contorno que separa os dois estados é o limite definido por  $Z = 0$ , que corresponde ao condição de estado limite da estrutura. Logo, a probabilidade de uma estrutura falhar será a probabilidade de que a resistência  $R$  seja menor que o efeito do carregamento aplicado  $S$ . Logo, a probabilidade de falha é representada por (ANG; TANG, 1984)

$$p_f = P(R \leq S) = \int_0^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds, \quad (2.10)$$

onde  $P(\cdot)$  representa a probabilidade de ocorrência de um dado evento,  $F_R(s)$  é a função de distribuição acumulada da variável  $R$  e  $f_S(s)$  é a função densidade de probabilidade da variável  $S$ . A análise da equação 2.10 constitui o *problema fundamental da confiabilidade estrutural* e assim é possível definir confiabilidade como a probabilidade de que a resistência seja maior que a solicitação, ou seja,  $1 - p_f$ .

A probabilidade de falha pode também ser formulada através da integração em relação a resistência da estrutura

$$p_f = \int_0^{\infty} (1 - F_S(r)) f_R(r) dr, \quad (2.11)$$

A representação das funções densidade de probabilidade  $f_S(s)$  e  $f_R(r)$  são mostradas na 1. A sobreposição destas duas curvas é proporcional, mas não idêntica, a probabilidade de falha,  $p_f$ .

Ao analisar as Figuras 2 e 3 é possível afirmar que a região composta pela interseção das curvas depende da posição relativa entre  $f_S(s)$  e  $f_R(r)$ . À medida que as curvas se distanciam, a  $p_f$  diminui, enquanto que a aproximação das duas curvas resulta em um aumento da  $p_f$ .

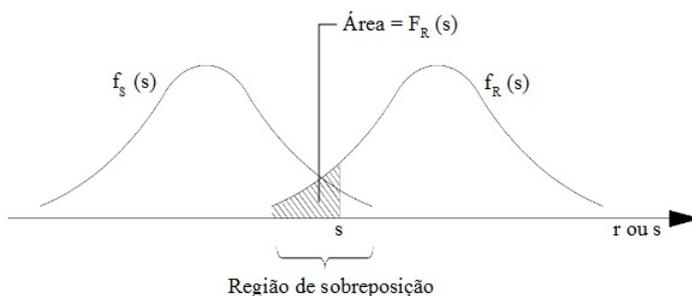


Figura 1 – Função Densidade de Probabilidade  $f_R(s)$  e  $f_S(s)$  (ANG; TANG, 1984)

A posição relativa entre as funções pode ser medida pelo *fator de segurança central*, que é definido pela razão  $\mu_R/\mu_S$ . Outra forma de avaliar esta distância é através da *margem de segurança média*, que é a diferença entre as médias  $\mu_R - \mu_S$ .

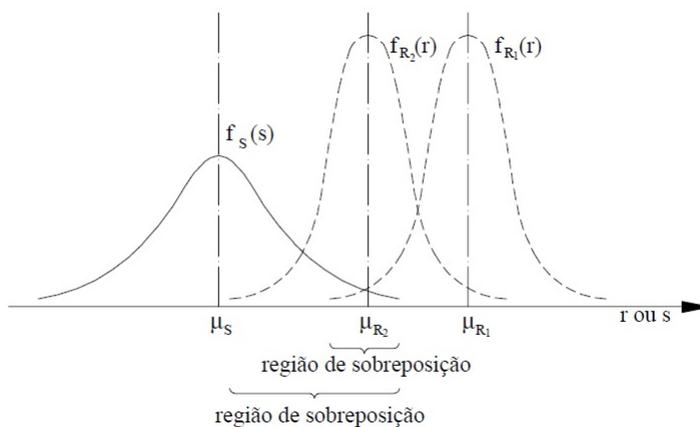


Figura 2 – Efeito da posição relativa entre  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  em  $p_f$  (ANG; TANG, 1984)

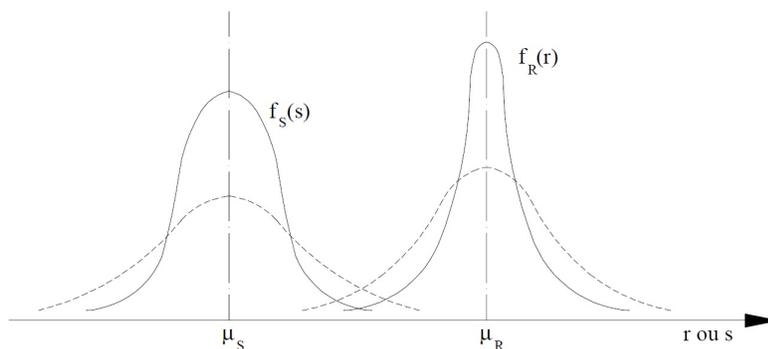


Figura 3 – Efeito da dispersão entre  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  em  $p_f$  (ANG; TANG, 1984)

A região de sobreposição é também função do grau de dispersão de  $f_S(s)$  e  $f_R(r)$ , conforme mostrado na Figura 3. Observa-se que ao fixar os valores das médias e aumentando a dispersão de  $f_S(s)$  ou  $f_R(r)$ , ou de ambas, a probabilidade de falha aumenta. As dispersões destas variáveis aleatórias são representadas pelos desvios padrões, ou pelos seus quadrados, as variâncias. É possível relacionar as variâncias com os valores médios através dos coeficientes de variação e obtendo assim, uma medida relativa de dispersão envolvendo os parâmetros dos quais depende a probabilidade de falha,  $p_f$ . Na prática, uma forma de reduzir a dispersão das variáveis analisadas é através do controle de qualidade dos processos, garantindo valores menores de desvios padrões.

De forma mais geral, a Eq. 2.10 pode ser representada por

$$p_f = P(G \leq 0), \quad (2.12)$$

onde  $G$  é chamada de função de estado limite e é utilizada para quantificar algum aspecto da resposta estrutural. No caso da Eq. 2.10, a função de estado limite é  $G(R, S) = R - S$ . Porém, a versão da Eq. 2.12 possibilita também a consideração de outras variáveis (e.g. deslocamentos admissíveis).

Em geral, as funções densidade  $f_R$  e  $f_S$  para as variáveis  $R$  e  $S$ , podem ser representadas pela função de densidade conjunta de probabilidade  $f_{S,R}(r, s)$ . Define-se então o domínio de falha  $D$  como o conjunto dos casos tais que  $R \leq S$  (i.e.  $G < 0$ ), ou seja, que ocasionam a falha. Ao integrar esta função, sob o domínio de falha  $D$ , a probabilidade de falha será (MELCHERS, 1999):

$$p_f = P(G \leq 0) = \int_D f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o vetor das variáveis aleatórias (e.g.  $R$  e  $S$ ),  $f_{\mathbf{X}}$  é a função densidade de probabilidade de  $\mathbf{X}$  e  $D$  é o domínio de falha dado por

$$D = \{\mathbf{x} \in R^n | G(\mathbf{x}) \leq 0\}. \quad (2.14)$$

Graficamente, a probabilidade de falha corresponde a área hachurada da Figura 4.

No caso de  $G$  possuir distribuição Gaussiana, pode-se aplicar uma transformação que resulte em uma variável aleatória normal padrão  $Y$ , que possui média nula e desvio padrão unitário, é possível avaliar probabilidades associadas a esta variável utilizando a função de distribuição cumulativa normal padrão,  $\Phi()$ . Dessa forma, a probabilidade de falha pode ser calculada pela equação 2.16.

$$Y = \frac{G - \mu_G}{\sigma_G} \quad (2.15)$$

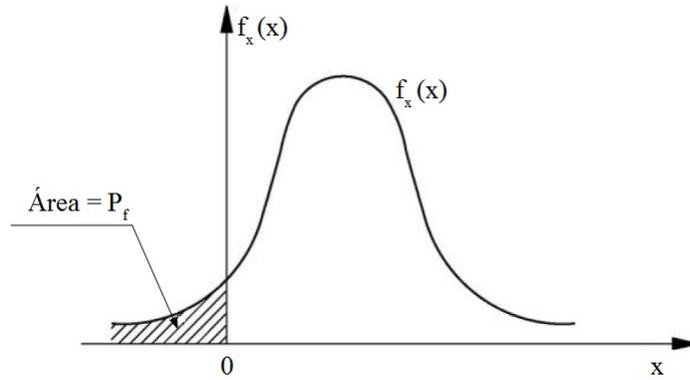


Figura 4 – Função densidade de probabilidade da função  $G(x)$ (ANG; TANG, 1984)

$$p_f = P(G \leq 0) = P\left(Y \leq \frac{0 - \mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right) \quad (2.16)$$

onde a função  $\Phi()$  é definida como (MONTGOMERY; RUNGER; HUBELE, 2001)

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2.17)$$

Constata-se que a partir da variável padrão normalizada  $Y$ , obtêm-se uma medida para  $p_f$  que é a razão entre a média e o desvio padrão de  $G$ . Esta razão representa a distância entre o ponto correspondente a  $G = 0$  e a origem da distribuição  $Y$  e é chamada de **índice de confiabilidade**, representado por  $\beta$  e utilizado frequentemente como uma medida de confiabilidade. Logo,

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (2.18)$$

Portanto, caso  $G$  possua distribuição Gaussiana, a equação 2.16 pode ser reescrita da seguinte forma

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (2.19)$$

Este índice é de extrema importância na confiabilidade estrutural, pois permite encontrar a probabilidade de falha para cada equação de estado limite e para problemas envolvendo um número qualquer de variáveis aleatórias. Para  $G(R, S) = R - S$ , onde as variáveis aleatórias  $R$  e  $S$  são independentes com distribuição normal de probabilidade, o índice de confiabilidade é dado por

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.20)$$

Geometricamente,  $\beta$  pode ser interpretado como a menor distância (no espaço normalizado) entre o caso médio (origem do espaço normalizado) e um caso no limiar de falha, sobre a função de estado limite  $G = 0$ . Assim, quanto maior for o índice de confiabilidade, menor será a probabilidade de falha de um dado sistema.

Relacionando as variáveis reduzidas, obtém-se:

$$G = R - S \quad (2.21)$$

onde,

$$S' = \frac{S - \mu_s}{\sigma_s} \quad (2.22)$$

$$R' = \frac{R - \mu_r}{\sigma_r} \quad (2.23)$$

e, portanto,

$$G = R' \sigma_r + \mu_r - S' \sigma_s - \mu_s = 0, \quad (2.24)$$

que representa uma reta conforme mostrado na Figura 5.

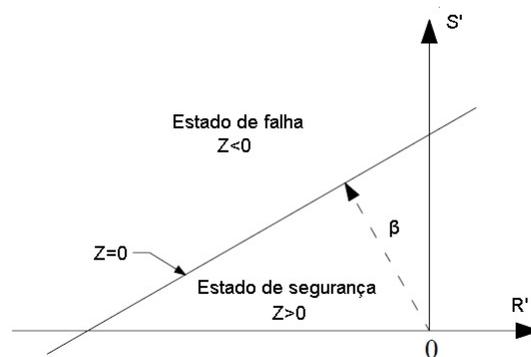


Figura 5 – Espaço das variáveis reduzidas (ANG; TANG, 1984)

## 2.5 Simulação de Monte Carlo

Os experimentos relacionados a engenharia estrutural nem sempre podem ser executados, um vez que muitos destes envolvem uma alta complexidade de montagem dos equipamentos ou do modelo, assim como, necessitam da realização de diversas combinações de carregamento e resistências do modelos estudados. Os métodos de simulação são utilizados como uma alternativa para reproduzir numericamente os experimentos que na prática não podem

ser executados, onde estes experimentos numéricos consistem em submeter a estrutura à diferentes configurações de ações e resistências, sendo estas consideradas variáveis aleatórias.

O método de Monte Carlo é um dos métodos de simulação mais utilizados para estimar de forma precisa a probabilidade de falha. O método de Monte Carlo é utilizado quando os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem (e.g. FORM e SORM), que são mais eficientes computacionalmente, não são aplicáveis, em geral em problemas que envolvem variáveis aleatórias que não sejam Gaussianas ou funções de estado limite não lineares (MELCHERS, 1999). O método de Monte Carlo pode ser utilizado para todos os tipos de problemas e para qualquer nível desejado de precisão e é utilizado também quando se quer testar a resposta obtida através dos métodos de transformação. Dentre suas várias aplicações, tem sido aplicado para determinar a confiabilidade de sistemas estruturais (AGOSTINI, 2014)

O nome deste método de simulação faz referência a um dos mais famosos cassinos do mundo, localizado no principado de Mônaco. Esta referência é feita devido a simulação ter como base o uso de números aleatórios, assim como as roletas encontradas no cassino. Segundo Haldar e Mahadevan (2000), o método foi utilizado pela primeira vez por Von Neumann durante a Segunda Guerra Mundial para construção da bomba atômica americana no Laboratório de Los Alamos no Novo México e é apresentado no artigo intitulado *The Monte Carlo Method*.

A simulação de Monte Carlo é utilizada em problemas que envolvem variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecidas ou assumidas. Esta compreende um processo repetido, usando em cada simulação uma amostra de valores das variáveis geradas de acordo com as distribuições de probabilidade correspondentes. Através do processo de repetição, uma amostra de soluções, cada qual correspondendo a um conjunto de valores das variáveis aleatórias, é obtida.

Uma amostra (conjunto de observações) obtida a partir da simulação de Monte Carlo é semelhante a uma amostra de observações experimentais. Por essa razão, os resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo podem ser tratados estatisticamente; tais resultados também podem ser apresentados na forma de histograma, e métodos de estimativa e inferência estatística também são aplicáveis. Assim, a simulação de Monte Carlo é também uma técnica de amostragem, ou seja, os resultados também estão sujeitos a erros de amostragem. Geralmente, por este motivo, as soluções de Monte Carlo a partir de modelos finitos não são exatas (a menos que o tamanho do modelo seja infinitamente grande) (ANG; TANG, 1984).

A técnica de simulação de Monte Carlo consiste inicialmente na geração de números aleatórios  $y_i$ , com distribuição uniforme entre 0 e 1. Em seguida é calculada a respectiva variável física através de uma transformação para espaço físico dado por,  $x_i = F_X^{-1}(y_i)$ . Com isso, no processo de simulação, são geradas diversas amostras aleatórias das variáveis

envolvidas no experimento e sua correspondente avaliação da função estado limite, tornando possível determinar a resposta mecânica da estrutura. Assim, o método de Monte Carlo busca substituir a equação 2.13 por um estimador da probabilidade de falha através do cálculo do valor esperado da função indicadora  $I(\mathbf{x})$ , como:

$$p_f = \int_{D_f} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int_{R^n} I(\mathbf{x})f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = E[I(\mathbf{x})] \quad (2.25)$$

onde  $E[I(\mathbf{x})]$  é o valor esperado da função indicadora  $I(\mathbf{x})$  e  $f_{\mathbf{x}}$  é a função densidade de probabilidade de  $\mathbf{X}$ . Define-se a função indicadora  $I(\mathbf{x})$  através de:

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } G(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & \text{se } G(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

sendo  $G(\mathbf{x})$  a função estado limite que separa o espaço amostral entre o domínio de falha ( $D_f = \{\mathbf{x} \in R^n | G(\mathbf{x}) \leq 0\}$ ) e o domínio de segurança ( $D_s = \{\mathbf{x} \in R^n | G(\mathbf{x}) > 0\}$ ).

A partir de um número  $n_{si}$  de simulações do vetor aleatório de parâmetros de projeto são calculadas amostras da função indicadora,  $I_i = I(x_i)$ . A média empírica dos valores da função indicadora  $I(x)$  é um estimador da probabilidade de falha. Logo,

$$p_f \approx \bar{p}_f = \frac{1}{n_{si}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} I(x_i) = \frac{n_f}{n_{si}}, \quad (2.27)$$

onde  $n_f$  é o número de simulações que ocasionam falha  $G \leq 0$ .

Por se tratar de uma estatística computada através de uma amostra finita, o estimador na Eq. 2.27 estará sujeito a um erro de amostragem, que corresponde a variância da probabilidade de falha, definida como:

$$\sigma_{\bar{p}_f}^2 = \frac{1}{n_{si} - 1} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} (I(x_i) - \bar{p}_f)^2 \quad (2.28)$$

Observa-se que a variância converge para zero a medida que  $n_{si} \rightarrow \infty$ . O coeficiente de variação de  $p_f$  pode ser estimado através de:

$$\hat{\delta}_{\bar{p}_f} = \frac{1}{n_{si}\bar{p}_f} \cdot \sqrt{n_{si}(\bar{p}_f - \bar{p}_f^2)} \quad (2.29)$$

O método de Monte Carlo é representado graficamente na Fig.6. Cada simulação produz uma resposta mecânica que se encontra no domínio de falha ou no domínio de segurança, onde a probabilidade de falha é representada pela razão entre o conjunto de pontos presentes no domínio de falha e todo o conjunto de eventos possíveis.

É intuitivo que o número de simulações  $n_{si}$  requerido estará diretamente relacionado com a precisão que se precisa para a probabilidade falha e esta é uma das principais desvantagens do método. Em geral, para se estimar uma probabilidade da ordem de  $10^{-n}$ , o número

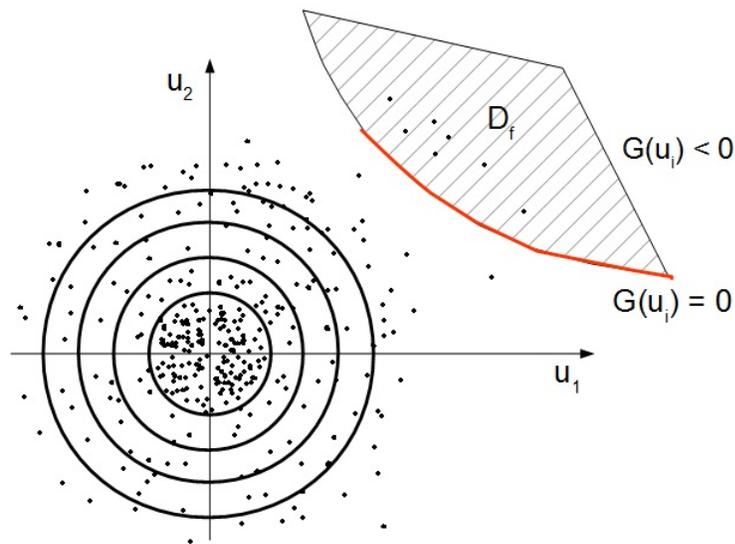


Figura 6 – Sorteio de pontos da Simulação de Monte Carlo

de simulações não deve ser inferior a  $10^{n+2}$  e  $10^{n+3}$ , o que para estruturas civis de um modo geral, que tem probabilidades de falha em torno de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ , são necessárias cerca de  $10^5$  a  $10^9$  simulações. Dessa forma, ao utilizar modelos não-lineares para representação do comportamento da estrutura, o método de Monte Carlo requer em cada simulação uma análise não-linear da estrutura, o que inicialmente torna o método ineficaz para esta aplicação. Entretanto, a metodologia de acoplamento entre o método de Monte Carlo e o método de análise não-linear proposta através deste trabalho, mostra que é possível utilizar esse método de simulação de forma bastante eficaz. Outro ponto a ser observado é que o método é vantajoso apenas quando o número de tentativas ou simulações forem menores que o número de pontos de integração requeridos para uma integração através de métodos numéricos.

Algumas estratégias podem ser utilizados para reduzir o custo computacional envolvido nas simulações do método de Monte Carlo, podendo-se citar a amostragem por importância (*Importance Sampling*) utilizando o Hipercubo Latino conforme mostrado no trabalho desenvolvido por Santos e Beck (2015). Esse assunto é discutido de forma mais detalhada em (MELCHERS, 1999).

# 3 Análise Estrutural Não Linear

## 3.1 Introdução

De forma geral, os projetos estruturais são desenvolvidos através de análises lineares e relações de equilíbrio que tomam como referência a configuração original indeformada da estrutura. Portanto, assume-se a hipótese de que os deslocamentos, rotações e deformações dos elementos estruturais são infinitesimalmente pequenos. Outros aspectos importantes para reproduzir uma resposta estrutural linear devem ser considerados, tais como, a relação de proporção entre as tensões e deformações, assim como, deve-se assumir que as condições de contorno são invariáveis durante o processo de deformação. A partir dessas hipóteses, é possível relacionar linearmente o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  e a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{f}$  é o vetor das forças totais aplicadas. Então, se o vetor das cargas  $\mathbf{f}$  for igual à  $\alpha\mathbf{f}$ , onde  $\alpha$  é uma constante, o vetor de deslocamentos deve ser igual à  $\alpha\mathbf{u}$ . Quando isso não ocorre, existem não linearidades no sistema que devem ser consideradas. Diferentes tipos de não linearidades são observadas ao desconsiderar qualquer uma destas hipóteses da análise linear, onde estas serão discutidas ao longo deste capítulo.

Busca-se através da análise não linear uma simulação mais realista da estrutura, ao considerar efeitos que afetam significativamente o comportamento deste sistema. Assim, os projetos estruturais são capazes de prever com uma maior exatidão o comportamento dos sistemas estruturais. Como consequência, tem-se um aumento da complexidade do problema e um aumento do custo computacional. Através dos avanços tecnológicos recentes, os engenheiros estruturais dispõem de ferramentas computacionais extremamente eficientes, o que torna possível realizar análises não lineares mais rigorosas, a um custo computacional razoável.

## 3.2 Fontes de não linearidade

O comportamento não linear de uma estrutura, sujeita a ação de um carregamento qualquer, pode ser classificado de acordo com os seus efeitos. Dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se as não linearidades físicas, geométricas e de contato, descritas a seguir. É importante ressaltar que é possível combinar estes tipos de não linearidades e assim obter uma análise mais realista da estrutura em estudo.

### 3.2.1 Não linearidade Física

As não linearidades físicas são caracterizadas pelo fato do material não apresentar uma relação tensão-deformação linear, isto é, o comportamento do material não ser elástico linear. Neste caso, são verificadas mudanças na resposta física dos materiais (e.g. distribuição das tensões ao longo da extensão da barra, assim como ao longo dos eixos e das faces das suas próprias seções), o que exige que estes efeitos sejam descritos por formas mais complexas de equações constitutivas. As principais causas deste tipo de comportamento não linear correspondem à fenômenos como a elasticidade não linear, plasticidade, viscoelasticidade e fluência.

### 3.2.2 Não linearidade Geométrica

Conforme discutido anteriormente, as equações de equilíbrio na análise linear são baseadas na configuração indeformada da estrutura, onde é válida a hipótese de pequenos deslocamentos. Conseqüentemente, se ocorrerem mudanças significativas na geometria da estrutura, as equações de equilíbrio deixam de ser válidas e uma nova formulação deve ser obtida a cada mudança da geometria do sistema, causando uma perda da linearidade nas relações deslocamento e deformação. Este tipo de não linearidade é denominada de não linearidade geométrica e pode ser classificada como:

- **Pequenas deformações, mas grandes deslocamentos ou rotações:** Neste tipo de não linearidade geométrica a estrutura sofre pequenas deformações, porém os deslocamentos e rotações são finitos. Podem existir não linearidades físicas ou não. Estruturas esbeltas como molas, arcos, barras de treliças, placas e cascas finas são exemplos de estruturas em que são observadas esse tipo de não linearidade. A Figura 7 ilustra esse efeito, onde a estrutura está sujeita a grandes deslocamentos e rotações, mas no sistema de coordenadas  $x'y'$  são observadas pequenas deformações.

Para grandes deslocamentos, a deflexão lateral de um elemento pode resultar no surgimento de momentos de flexão adicionais, em virtude da presença de um esforço normal. Este tipo de comportamento é também chamado de efeitos de segunda ordem e é responsável pelos efeitos  $p - \Delta$  (Global) e  $p - \delta$  (local - a nível de elemento), que são importantes fontes de não linearidade no problema estrutural e exigem formulações numéricas adequadas para sua representação. Na Figura 8, estes efeitos são exemplificados.

- **Grandes deformações:** São não linearidades presentes em estruturas sujeitas a grandes deformações, onde frequentemente, são observadas não linearidades físicas associadas a esse efeito.

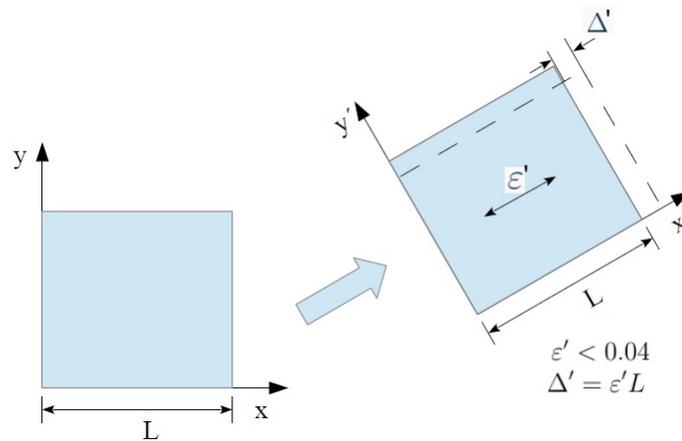


Figura 7 – Pequenas deformações com grandes deslocamentos e rotações.

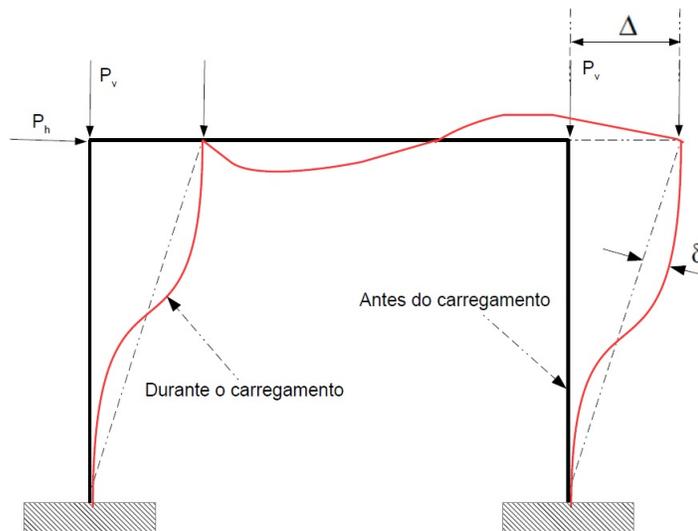


Figura 8 – Efeitos de segunda ordem:  $p - \Delta$  (Deslocamento lateral) e  $p - \delta$  (Curvatura)

### 3.2.3 Não linearidade de contato

Ocorrem quando as condições de contorno se alteram durante o deslocamento da estrutura. Isto ocorre, por exemplo, devido ao contato ou impacto entre dois corpos ou quando as forças externas são dependentes dos deslocamentos (e.g. forças não conservativas). Esse tipo de não linearidade não será considerada neste trabalho.

### 3.3 Tipos de Análises

Na análise não linear é necessário decidir qual tipo de análise melhor representa o problema e, deste modo, é possível definir qual formulação será utilizada para descrever este sistema. Dificilmente é possível modelar todos os tipos de não linearidades presentes em uma estrutura e assim, a forma mais eficiente de descrever um problema físico é escolher quais efeitos devem ser considerados para que se tenha uma simulação adequada do sistema. Na Figura 9, são apresentadas as curvas força-deslocamento de uma estrutura submetida a carregamentos estáticos, para cada tipo de análise a ser considerada.

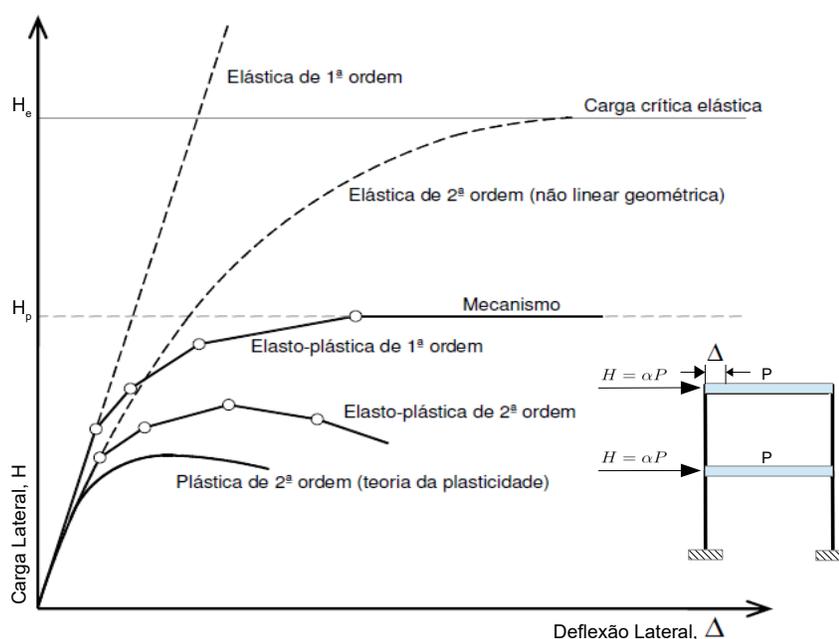


Figura 9 – Níveis de análise

#### 3.3.1 Análise Elástica de Primeira ordem

Na análise elástica de primeira ordem, as não linearidades Físicas e Geométricas são desconsideradas. O equilíbrio da estrutura é formulado a partir da configuração original (Não deslocada) da estrutura e o material é considerado elástico linear. Logo, a hipótese de pequenos deslocamentos e o princípio da superposição dos efeitos são considerados neste tipo de análise. Embora seja bastante utilizada nas rotinas de cálculo utilizadas por escritórios de projetos, por representar satisfatoriamente as condições de serviço de uma estrutura, esse

tipo de análise não apresenta informações sobre influência da plasticidade e da estabilidade no comportamento das estruturas. No dimensionamento, ao verificar cada barra isoladamente através de equações de interação, das curvas de resistência de pilares, do comprimento efetivo e dos fatores de amplificação dos momentos, essas influências são consideradas indiretamente. Obtém-se uma curva força x deflexão linear, neste tipo de análise, como indicado na Fig. 9,

### 3.3.2 Análise Elástica de Segunda ordem

Na análise elástica de segunda ordem, considera-se o efeito de grandes deslocamentos e deformações do sistema na formulação das equações de equilíbrio e o material ainda é elástico linear. A resposta da curva força x deflexão, tende assintoticamente para para carga crítica elástica ( $H_e$ ) do sistema, conforme mostrado na Fig. 9. É possível obter uma boa representação de fenômenos de instabilidade elástica (flambagem elástica),  $p - \Delta$  e  $p - \delta$  nesta análise, mas não são obtidas informações diretas sobre a resistência inelástica real da estrutura. Esta é uma análise não linear geométrica.

### 3.3.3 Análise Inelástica de Primeira ordem

Para a Análise inelástica de primeira ordem, as equações de equilíbrio são formuladas a partir da geometria inicial da estrutura e as não linearidades do material são consideradas. Os efeitos de plastificação das barras, representados por modelos simples de rótulas plásticas ou por modelos mais detalhados que contemplam a propagação da plastificação no interior destas, podem ser incluídos nesse tipo de análise. As não linearidades geométricas e a sua influência na estabilidade do sistema, não são descritas por esse tipo de análise. A resposta da curva força x deflexão para a análise inelástica de primeira é mostrada na Fig. 9, onde é possível observar que a curva se aproxima assintoticamente da da carga limite plástica, ( $H_p$ ).

### 3.3.4 Análise Inelástica de Segunda ordem

Em uma Análise inelástica de segunda ordem, as equações de equilíbrio são formuladas considerando a estrutura na sua posição deslocada e considera-se a não linearidade do material. Esta análise é a que melhor representa o comportamento real da estrutura e permite a obtenção de modelos analíticos capazes de calcular a carga limite que mais se aproxima da resistência real de um sistema. Esta é uma análise não linear geométrica e do material.

## 3.4 Métodos de Análise Não Linear

### 3.4.1 Considerações Gerais

A estratégia de solução de um problema estrutural que tem um comportamento não linear, envolve necessariamente a solução de um sistema de equações algébricas não lineares. Neste tipo de análise é necessário atualizar constantemente a matriz de rigidez para capturar o estado de equilíbrio, seja devido a alterações na geometria da estrutura ou devido aos efeitos de escoamento do material. Para isso, são utilizados métodos de soluções incrementais e iterativos, que consistem na aplicação do carregamento através de incrementos ao longo da análise até que seja atingido o valor total da carga, ou até um número limite de passos de carga. Em cada etapa da análise, correspondente a um incremento de carga, as equações de equilíbrio são resolvidas por meio de métodos iterativos.

É possível identificar duas fases distintas em uma análise não linear incremental onde são utilizados procedimentos iterativos. Inicialmente, na fase denominada *Preditada*, é encontrada a solução dos deslocamentos incrementais, através das equações de equilíbrio da estrutura, a partir de um determinado acréscimo de carga. Na fase posterior, denominada *Corretiva*, é realizada uma correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamento pela utilização de um processo iterativo. Tais forças internas são então comparadas com o carregamento externo, obtendo-se a quantificação do desequilíbrio existente entre as forças internas e externas. (SILVA, 2009). Caso este desequilíbrio, ou vetor de forças residuais, seja nulo ou próximo a um critério de convergência estabelecido inicialmente, assume-se que o sistema encontra-se em equilíbrio e o processo iterativo é interrompido.

### 3.4.2 Método Incremental

A condição de equilíbrio para um dado sistema, pode ser expressa de forma geral como

$$R = P - F = 0 \quad (3.2)$$

onde  $R$  é o vetor de forças residuais,  $P$  é o vetor de cargas aplicadas e  $F$  representa o vetor de forças internas, correspondente as tensões nos elementos para uma determinada configuração. Diante disto, vários métodos numéricos utilizam estratégias para minimizar o vetor de forças residuais.

Ao analisar um gráfico que relaciona a carga aplicada e o deslocamento resultante uma estrutura, é possível observar importantes conceitos de um comportamento estrutural não linear. Cada ponto da curva contínua descrita neste gráfico representa uma configuração de equilíbrio estático da estrutura que satisfaz a condição estabelecida na Eq.3.2. A Figura 10 ilustra esta curva que recebe a denominação de caminho de equilíbrio.

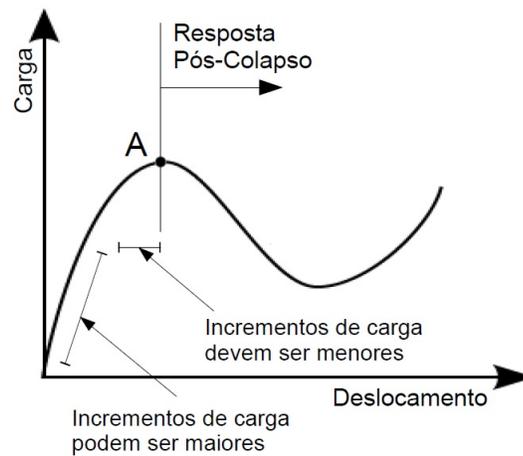


Figura 10 – Caminho de equilíbrio

Observa-se que para pequenas cargas, a resposta do sistema é linear. Entretanto, conforme a carga aumenta, a curva se torna cada vez mais não linear até que no ponto A, a carga de colapso é atingida e a estrutura pode se tornar instável. O ponto A é também chamado de ponto limite de carga e neste ponto a matriz de rigidez se torna singular. A carga de colapso é de grande importância neste trabalho, uma vez que a o critério de falha para a análise de confiabilidade em estruturas com comportamento não linear é avaliado a partir deste parâmetro.

Um dos problemas encontrados nos métodos de solução da resposta mostrada na Figura 10 é que inicialmente grandes incrementos de cargas podem ser aplicados a estrutura, enquanto que a medida que o colapso do modelo estrutural é atingido, estes incrementos devem ser menores. Outro ponto importante é que o estudo do comportamento pós-colapso requer um procedimento de solução que permita uma redução da carga com o aumento da deformação para que a solução seja encontrada. Um método eficiente utilizado para solucionar esses problemas é a introdução de um multiplicador de carga,  $\lambda$ , na equação 3.2, onde este é responsável por ponderar a intensidade da carga aplicada, com uma rápida convergência em cada passo de carga e assim, o comportamento pós-colapso pode ser avaliado. Portanto,

$$\lambda P - F = 0 \quad (3.3)$$

A solução da equação 3.3 é obtida através de um processo de solução incremental-iterativo. Inicialmente, avalia-se a configuração de equilíbrio para o passo de carga  $j-1$  por um processo iterativo e após verificada a convergência, repete-se o mesmo processo para o passo de carga posterior  $j$ . Ao utilizar essa metodologia, é encontrada uma solução para cada nível de carregamento.

Na análise incremental, a equação 3.3 pode ser reescrita na forma

$$\lambda^j P - F^j = 0 \quad (3.4)$$

Supondo que a solução para o passo de carga  $j - 1$  é conhecida, é possível afirmar que

$$F^j = F^{j-1} + dF^j \quad (3.5)$$

onde  $dF$  é o incremento de forças internas no elemento. Esse vetor pode ser aproximado utilizando a matriz de rigidez tangente, correspondente as condições geométricas e do material no incremento  $j - 1$ , descrita através da equação 3.1. Logo,

$$K_i^{j-1} d\Delta^j = dF^j \quad (3.6)$$

Ao substituir as equações 3.5 e 3.6 na equação 3.4, a equação de equilíbrio incremental é definida como

$$K^{j-1} d\Delta^j = \lambda^j P - F^{j-1} \quad (3.7)$$

onde o multiplicador de carga para o passo  $j$  é definido por

$$\lambda^j = \lambda^{j-1} + d\lambda^j \quad (3.8)$$

### 3.4.3 Método Iterativo

A solução da equação 3.7 em relação ao incremento de deslocamentos  $d\Delta$  é obtida através de métodos iterativos, onde após verificada a convergência do método, é possível avaliar a matriz de rigidez tangente  $K^{j-1}$ . Neste método, a equação de equilíbrio incremental (Eq. 3.7), correspondente ao passo  $j$  na iteração  $i$ , pode ser reescrita na seguinte forma:

$$K_i^{j-1} d\Delta_i^j = \lambda_i^j P - F_i^{j-1} \quad (3.9)$$

Inicialmente, é escolhido um valor para o incremento do multiplicador de carga  $d\lambda^j$  em função dos parâmetros de controle, discutidos nas seções 3.4.3.1 e 3.4.3.2. Em seguida, o vetor de deslocamentos  $d\Delta_i^j$  é avaliado através de duas parcelas distintas. Uma destas referente à carga de referência  $P_{ref}$  e outra correspondente à força residual  $R_i^{j-1}$ . Portanto,

$$d\Delta_i^j = \lambda_i^j [d\Delta_i^j]^P + [d\Delta_i^j]^R \quad (3.10)$$

onde,

$$K_i^{j-1} [d\Delta_i^j]^P = P_{ref} \quad (3.11)$$

e

$$K_i^{j-1}[d\Delta_i^j]^F = R_i^{j-1} = P_i^{j-1} - F_i^{j-1} \quad (3.12)$$

Ao final de cada iteração, verifica-se a convergência por meio da magnitude do vetor de forças residuais  $R_i^j$  e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos iterativos  $d\Delta_i^j$ , onde o processo é repetido até que um critério de convergência seja atendido. Caso não seja possível encontrar uma solução que atenda ao critério de convergência em um determinado passo de carga, entende-se que a matriz de rigidez tangente é singular e que a estrutura não suporta este nível de carregamento. Portanto, assume-se que a estrutura colapsa.

A atualização das variáveis para o passo de carga  $j$  após verificada a convergência, é feita da seguinte forma:

$$\lambda^j = \lambda^{j-1} + d\lambda^j \quad (3.13)$$

e

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} + d\Delta^j \quad (3.14)$$

Enquanto que o vetor de cargas residuais do passo  $j$  é definido por

$$R^j = \lambda^j P - F^j \quad (3.15)$$

#### 3.4.3.1 Método do Controle de carga

Neste método, também definido como Newton-Raphson Padrão (NRP), toda a carga para um passo de carregamento  $j$  é aplicada na primeira iteração ( $i = 1$ ) e nas demais iterações ( $i \leq 2$ ) o carregamento externo é um valor constante, uma vez que o incremento de carga é igual à zero. Logo, para o método do controle de carga,  $d\lambda_i^j$  pode ser descrito através de

$$d\lambda_i^j = \begin{cases} \text{Constante} & , \text{para } i = 1 \\ 0 & , \text{para } i \geq 2 \end{cases} \quad (3.16)$$

O método de controle de carga, é representado através da Figura 11 (a). Segundo (LACERDA, 2014), Este método pode ser ineficiente em um estudo do comportamento estrutural pós colapso, uma vez que as iterações processadas à carga constante podem causar os efeitos do tipo *snap-through* (ver Figura 13(a)), onde um aumento na carga pode causar um salto na trajetória de iteração e conseqüentemente, possíveis erros de convergência podem ser observados. Outro problema verificado neste método é que no ponto crítico A, a matriz de rigidez se torna singular e por isso o sistema de equações não pode ser resolvido, uma vez que a tangente de rigidez é horizontal (Figura13(b)).

Uma variação deste método é o Newton-Raphson Modificado (NRM) (ver Figura 11 (b)), onde a matriz de rigidez tangente é mantida constante durante um passo de carga ou em um conjunto de passos.

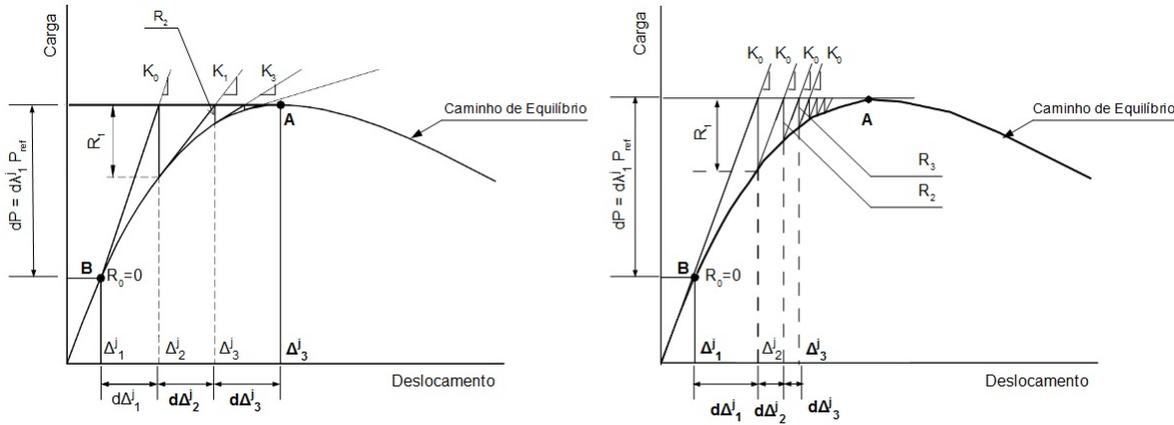


Figura 11 – Processo Incremental-iterativo com controle de carga (a) NRP (b) NRM (MC-GUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000)

Apesar deste método necessitar de um maior número de iterações para convergir, é possível observar uma melhora significativa na eficiência do método iterativo, uma vez que não é necessário obter uma nova matriz de rigidez a cada iteração. Vale ressaltar que essa técnica pode ser inadequada para análises estruturais que exibem deformações extremas.

### 3.4.3.2 Método do Controle de Deslocamento

No método de controle de carga (BATOZ; DHAT, 1979), o incremento do multiplicador de carregamento é definido de forma que, todas as iterações para um passo de carregamento  $j$ , sejam processadas com deslocamento constante  $dU_i^j$ , a ser definido. Diante disto, o incremento do vetor de deslocamentos, é definido por

$$dU_i^j = \begin{cases} \text{Constante} & , \text{para } i = 1 \\ 0 & , \text{para } i \geq 2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Substituindo o vetor de deslocamentos incrementais  $dU_i^j$  na equação 3.10, é possível definir o incremento de carga para o passo  $j$  como

$$\lambda_i^j = \frac{dU_i^j - [dU_i^j]^R}{[dU_i^j]^P} \quad (3.18)$$

Na primeira iteração  $i = 1$  de cada passo de carregamento, o vetor de forças residuais  $R_1^{j-1}$  é nulo e de acordo com a equação 3.12, os deslocamentos associado a ele  $[dU_1^j]^R$  também serão. Logo, para a primeira iteração, a equação 3.18 pode ser reescrita como

$$\lambda_1^j = \frac{dU_1^j}{[d\Delta_1^j]^P}, \text{ para } i = 1. \quad (3.19)$$

Para as demais iterações, tem-se que  $dU_i^j = 0$ . Portanto, o incremento de cargas  $\lambda_i^j$  pode ser descrito como

$$\lambda_1^j = -\frac{[dU_i^j]^R}{[dU_i^j]^P}, \text{ para } j \leq 1. \quad (3.20)$$

Uma desvantagem deste método é a necessidade de conhecimento prévio da estrutura a ser analisada para que se possa escolher a componente de deslocamentos  $dU_i^j$  adequada a ser utilizada na análise. Em alguns casos, essa escolha é óbvia, porém nem sempre isso é válido. Dessa forma, a experiência do usuário contribui para solução do problema. Este método iterativo é ilustrado na Figura 12.

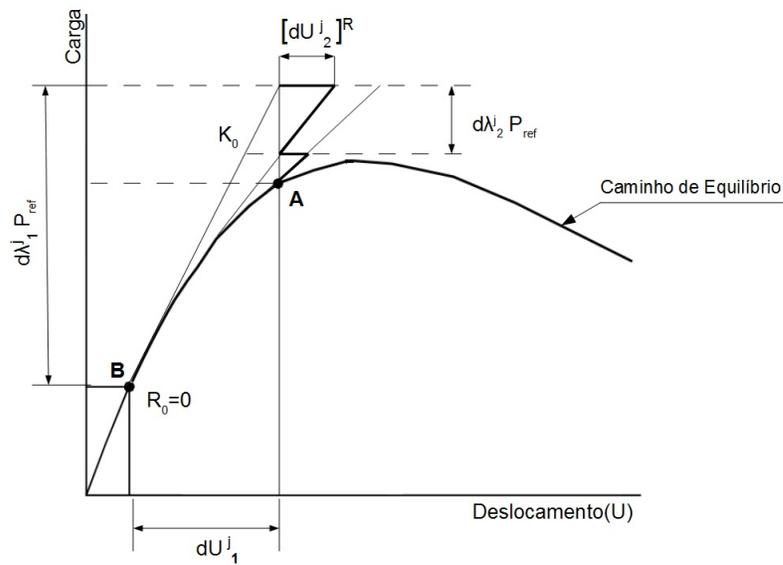


Figura 12 – Processo Incremental-iterativo com controle de deslocamento

Segundo (LACERDA, 2014), o método de controle de carga deveria, sempre que possível, ser utilizado no lugar do controle de carga, pois supera parte de suas limitações. O ponto A seria alcançado naturalmente e a matriz de rigidez tangente não se tornaria singular no ponto crítico, permitindo avaliar o comportamento pós colapso. Contudo, da mesma forma que o *snap-through* causa dificuldades ao método do controle de carga, o efeito *snap-back* limita a utilização do método do controle de deslocamento, conforme mostrado na Figura 13(c). Uma alternativa a estes dois métodos é a utilização do método do comprimento de arco, ou o método do controle de trabalho, descritos com maiores detalhes em (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000) e (CRISFIELD, 1991).

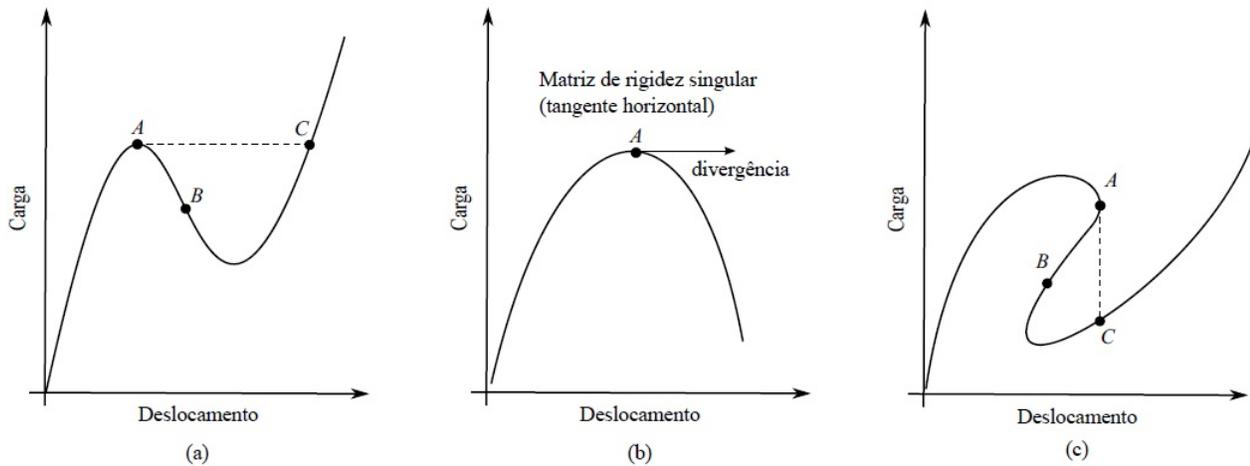


Figura 13 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento. (a) Snap-through, (b) Matriz de rigidez tangente singular e (c) Snap-Back (LACERDA, 2014).

A Figura 14 representa o algoritmo de solução do processo incremental-iterativo. O processo inicia-se a partir dos parâmetros iniciais do problema, como: O vetor de carga de referência  $P_{ref}$ , os graus de liberdade, o valor máximo dos parâmetros de carga  $\lambda_{max}$ , o valor inicial do incremento de carga  $d\lambda_0$ , entre outros. Em seguida, a matriz de rigidez na configuração indeformada  $K_0$  é calculada e o processo incremental é iniciado a partir da aplicação de um incremento de força  $d\lambda$  e da estimativa inicial do incremento de deslocamento  $d\Delta_0$ .

Um processo iterativo é então utilizado para obter o incremento de deslocamentos  $d\Delta_j$  correspondente ao passo de carga  $j$  (e.g. Método Predictor-Corretor). O processo é repetido até que a força total seja aplicada na estrutura. É importante salientar que dois parâmetros básicos devem ser definidos para que o processo de análise estrutural incremental seja utilizado: o número de incrementos de força a serem aplicados e o critério de convergência do procedimento iterativo (e.g. Método Predictor-Corretor). O processo é descrito em detalhes por (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000) e (BATHE, 1996).

É importante ressaltar que a não convergência do processo iterativo indica que o equilíbrio não pode ser satisfeito para o incremento de carga aplicado. Neste caso assume-se que a estrutura não suporta o carregamento total a ser aplicado e que ocorre uma falha estrutural.

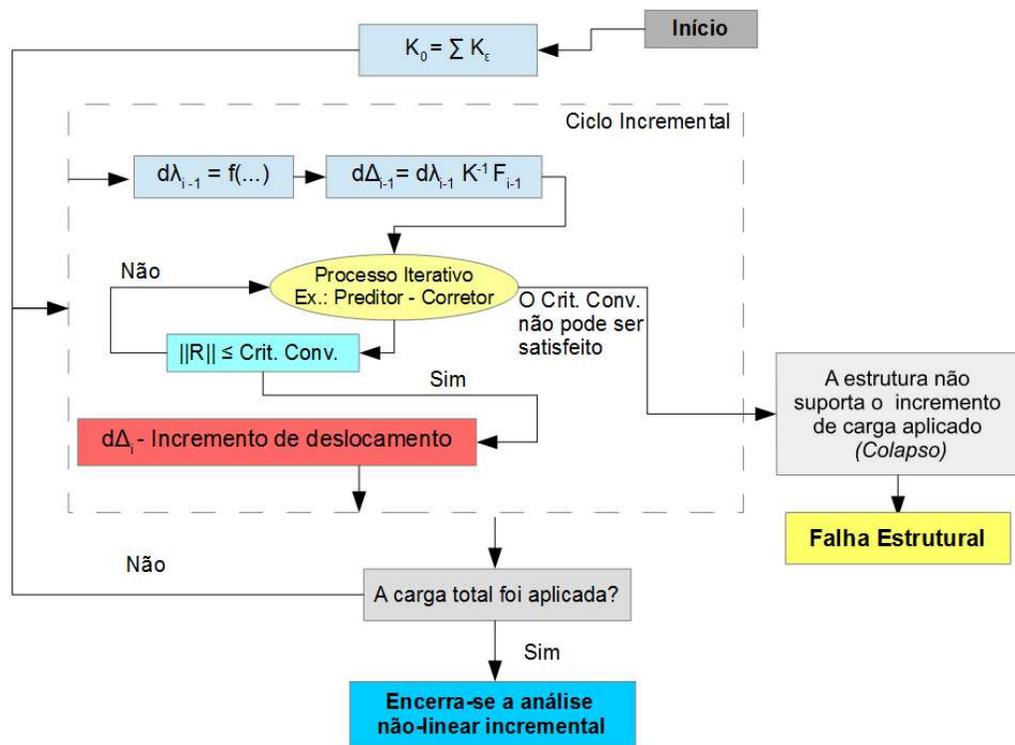


Figura 14 – Algoritmo de solução Incremental-Iterativo

## 4 Implementação Computacional

Os métodos numéricos utilizados para uma análise estrutural, são necessariamente de natureza computacional devido ao grande número de operações necessárias para a sua solução, onde a sua utilização se justifica até para sistemas relativamente simples. Essa necessidade se acentua em uma análise onde as não linearidades são consideradas, principalmente quando esta análise é realizada em conjunto com uma simulação de Monte Carlo. Diante disto, desenvolver ferramentas computacionais capazes de processar esse tipo de informação é de grande importância na prática de cálculo e projeto estrutural. Neste capítulo, é apresentada a implementação computacional da metodologia de acoplamento entre as rotinas desenvolvidas para Simulação de Monte Carlo e o programa MASTAN.

Para as análises estruturais e de confiabilidade, optou-se por utilizar o MATLAB pelos seguintes motivos:

- A linguagem utilizada pelo MATLAB torna muito mais rápido o desenvolvimento de um código computacional, uma vez que este ambiente de programação foi desenvolvido com o intuito de facilitar a representação de operações matemática matriciais. Este fato é de grande importância para a facilidade de compreensão do código por um usuário eventual ou até mesmo pelos desenvolvedores dos códigos utilizados.
- As análises estruturais realizadas ao longo deste trabalho foram desenvolvidas através do MASTAN2. Este é um programa para análise não linear de sistema estruturais reticulados, bidimensionais e tridimensionais, desenvolvida por Ronald D. Ziemian e William Mcguire, utilizando a linguagem do MATLAB. Esse fator foi decisivo na escolha desta linguagem, uma vez que as rotinas da análise de confiabilidade e a análise estrutural podem ser facilmente acopladas por serem desenvolvidas em uma mesma linguagem de programação.

De modo geral, o processo de simulação numérica é realizado em três etapas: Pré-processamento, análise e pós-processamento, sendo estas três etapas tratadas de forma independente.

Para este trabalho, na fase inicial da análise, ou pré-processamento, são definidos os principais parâmetros da análise estrutural, tais como as dimensões do problema, forças, restrições, etc. Estes dados são inseridos no MASTAN2, onde é realizada uma análise estrutural inicial e são obtidos os esforços e deslocamentos resultantes na estrutura. Ainda nesta fase, define-se os parâmetros da análise de confiabilidade em uma subrotina chamada *my\_sym*,

onde são definidas as variáveis aleatórias do problema, as médias e desvios padrão para cada uma destas e o número de simulações a serem realizadas.

Em um segundo momento do pré-processamento, os parâmetros da análise estrutural e do método incremental-iterativo são definidos através da subrotina *my\_settings*, onde nesta etapa, são definidos o parâmetro inicial do incremento de carga, o tipo de análise a ser realizada, o critério de convergência do método iterativo e o número de incrementos que serão realizados. Ao final do processamento deste parâmetros, estes são salvos para que sejam utilizados em todas as amostras da simulação de Monte Carlo. Em seguida, são gerados as amostras da simulação de Monte Carlo, a partir dos parâmetros definidos anteriormente. Estas amostras são geradas através de uma rotina presente na biblioteca de funções do MATLAB chamada *Random*, onde é possível definir a distribuição de probabilidade relativa a cada uma das variáveis aleatórias e assim gerar amostras aleatórias com média e desvio padrão estabelecidos pelo problema.

Na fase de análise, as amostras geradas na etapa anterior são alocadas nas variáveis do modelo numérico, e para cada amostra é realizada uma análise estrutural através do MASTAN2, com os parâmetros definidos na subrotina *my\_settings*. Posteriormente, dois tipos de análises podem ser realizadas. Na análise linear, é definido um critério de falha para o sistema através da função de estado limite, relacionada com os esforços internos, e caso o resultado obtido na análise estrutural viole esse critério é considerada uma falha.

Quando a estrutura é analisada considerando-se um comportamento não linear, assume-se que a falha estrutural (colapso) ocorre quando o Método Preditor-Corretor não converge, i.e. quando o equilíbrio não pode ser satisfeito para o carregamento aplicado (BATHE, 1996). Para esta finalidade, é possível utilizar a seguinte função de estado limite

$$g = 1 - \lambda_{\max} - \varepsilon, \quad (4.1)$$

onde  $\lambda_{\max}$  é o máximo multiplicador de carregamento aplicado à estrutura e  $\varepsilon > 0$  é um termo de relaxação. O termo de relaxação é utilizado apenas para garantir que se tenha  $g < 0$  quando  $\lambda_{\max} = 1$ , considerando eventuais erros de arredondamento. Neste trabalho foi utilizado  $\varepsilon = 1e-3$ .

Para as duas análises, na fase de pós-processamento são analisados todas os casos gerados e é verificado em quais destes os critérios de falha foram violados. Esta análise é realizada através da subrotina *my\_post*, onde o número de falhas é então comparado ao número de amostras geradas e desta forma, é obtida a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade  $\beta$  para o problema estudado. Outros dados, como gráficos de momento fletor e da estrutura deformada, carga crítica elástica e inelástica, e a frequência natural do sistema (para problemas dinâmicos) podem ser analisados nesta fase de pós-processamento.

Um fluxograma ilustrando o procedimento computacional é mostrado na Figura 15.

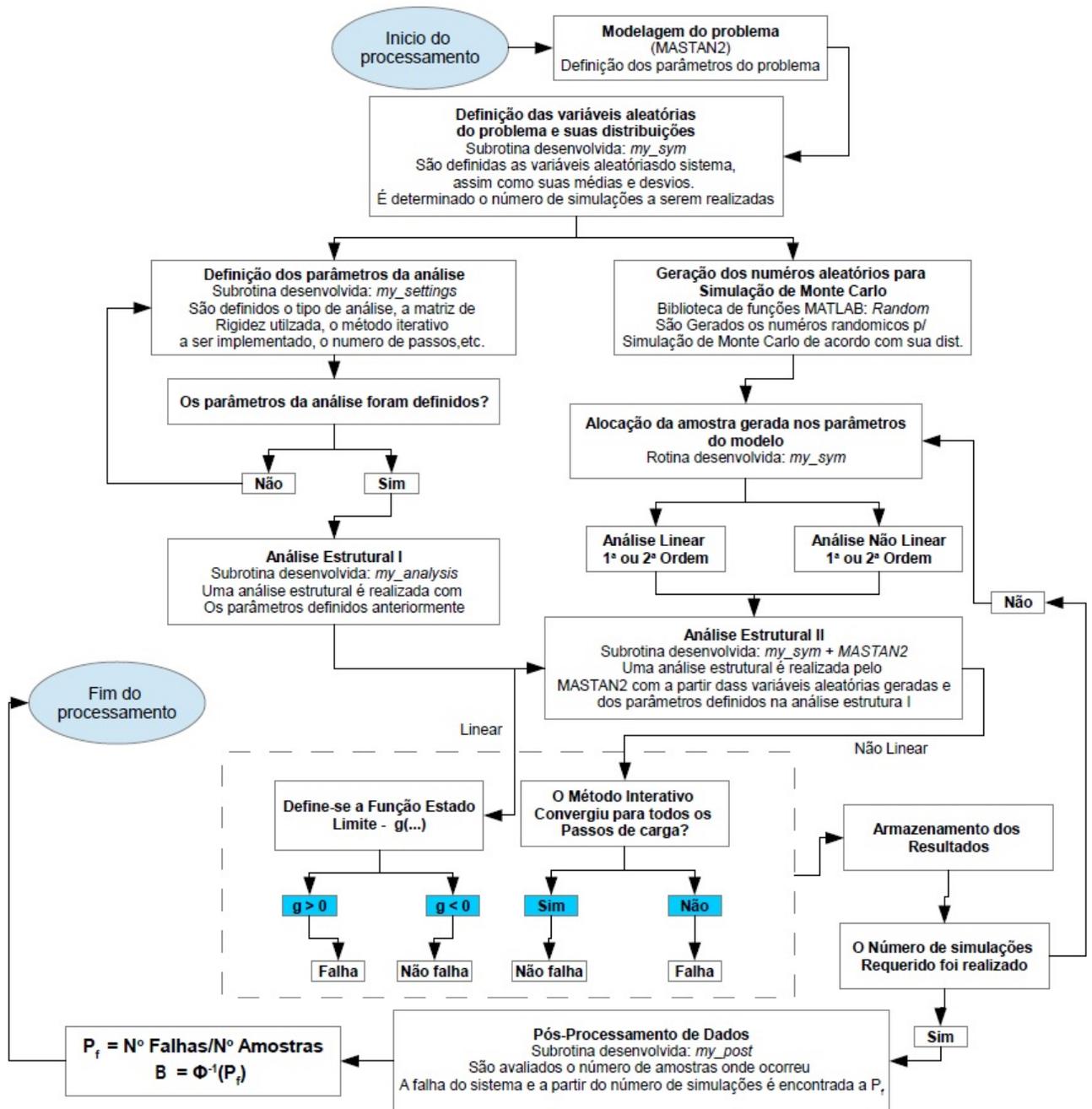


Figura 15 – Procedimento computacional

## 5 Exemplos

Neste capítulo são mostrados os exemplos utilizados para análise de confiabilidade através do método de Simulação de Monte Carlo, comparando os resultados obtidos através da análise linear e da análise não linear das estruturas. Busca-se através desta seção, aplicar os conceitos discutidos nos capítulos anteriores, validar a metodologia desenvolvida nesse trabalho e discutir aspectos importantes tanto da análise confiabilidade, quanto da análise não linear.

Divide-se este capítulo em duas partes. Inicialmente, são discutidos os exemplos onde é possível obter a solução analítica da análise de confiabilidade para a análise estrutural linear, com o objetivo de validar os resultados obtidos nas análises posteriores. Nos exemplos 5.5 e 5.13, são discutidos aspectos importantes de instabilidade local e global, e a sua influência na análise de confiabilidade. Todos os modelos estudados tratam de estrutura metálicas.

### 5.1 Exemplo 1: Treliça plana de 6 barras

O primeiro exemplo selecionado consiste em uma treliça de 6 barras sujeita a uma força aplicada, conforme mostrado na Fig. 16. Essa estrutura é interessante pelo fato de que é possível determinar a probabilidade de falha da estrutura analiticamente, o que resulta em um parâmetro importante para calibração do algoritmo utilizado. São utilizados perfis I de aço em toda treliça, onde as propriedades destes perfis são os da seção W150x13. As dimensões da estrutura estudada são:  $L = 800\text{mm}$  e  $H = 800\text{mm}$ .

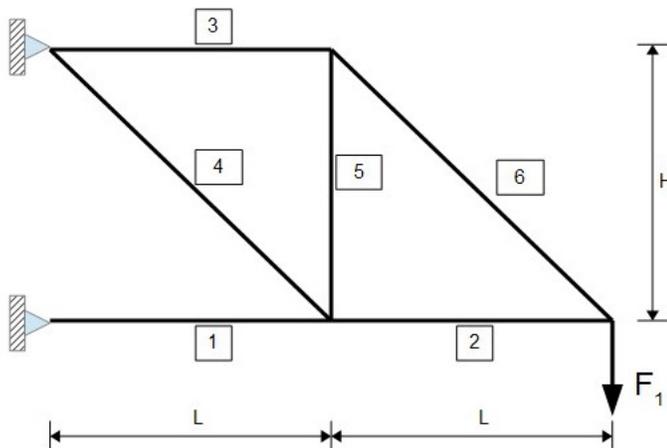


Figura 16 – Treliça plana de 6 barras

As variáveis aleatórias do problema são o Módulo de elasticidade  $E$ , a tensão de escoamento do material  $f_y$  e a carga aplicada  $F_1$ . Cada uma destas variáveis é descrita através da média  $\mu$ , desvio padrão  $\sigma$  e das funções de distribuição de probabilidade apresentadas na Tabela 4.

Tabela 2 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 1

Variável Aleatória	Distribuição	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )
$E(N/mm^2)$	Normal	210.000	20.000
$f_y(N/mm^2)$	Normal	345	35
$F_1(N)$	Normal	215.000	21.500

Das equações de equilíbrio da estrutura, sabe-se que a maior força axial resultante nas barras será aquela encontrada na barra 1, com magnitude igual ao dobro da força  $F_1$ . Portanto, A função do estado limite para esse problema é:

$$g(E, P, f_y) = f_y A - 2F_1 \quad (5.1)$$

onde  $f_y A$  é a força máxima que a barra pode resistir sem que o material escoe e  $2F_1$  representa a força resultante na barra. O índice de confiabilidade encontrado analiticamente através do método FOSM (HALDAR; MAHADEVAN, 2000), é igual a  $\beta = 1,8113$  e conseqüentemente a probabilidade de falha para essa estrutura, desconsiderando-se instabilidade geométrica, é  $p_f = 0,03515$ .

Este exemplo também foi resolvido utilizando-se as rotinas computacionais implementadas. No caso da análise estrutural não linear, assume-se que a falha ocorre quando o método Preditor-Corretor não converge (i.e. o equilíbrio não pode ser satisfeito para o carregamento aplicado). Já no caso da análise estrutural linear, assume-se que a falha ocorre quando a tensão em qualquer uma das barras ultrapassar a tensão de escoamento do material. As probabilidades de falha obtidas numericamente através do método de simulação de Monte Carlo com  $10^4$  amostras são mostradas na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados encontrados para o Exemplo 1

Tipo de análise	$\beta$	$p_f$	Erro (%)
FOSM	1.8113	0.0351	-
Monte Carlo (Linear)	1.8042	0.0356	0,39
Monte Carlo (não-linear)	1.7966	0.0362	0,81

Nota-se que os resultados obtidos com as rotinas desenvolvidas estão de acordo com o resultado analítico, a não ser por erros inerentes do Método de Monte Carlo. Assim, conclui-se que as rotinas desenvolvidas estão funcionando corretamente.

## 5.2 Exemplo 2: Viga sujeita a carregamento combinado

O segundo exemplo proposto consiste de uma viga bi-apoiada sujeita a um carregamento distribuído  $W$  combinado a uma força aplicada  $P$ , conforme mostrado na Figura 17. Considere-se que o carregamento  $W$ , a força  $P$  e a tensão de escoamento do material  $f_y$ , são variáveis aleatórias e que são modeladas através de uma função de distribuição de probabilidade Gaussiana. É utilizado no problema um perfil metálico com seção transversal W200x15 (módulo plástico  $Z = 145E3 \text{ mm}^4$ ) e um comprimento  $L = 2000\text{mm}$ . As variáveis aleatórias são descritas na Tabela 2. No modelo computacional dividiu-se a viga em quatro elementos de mesmo tamanho.

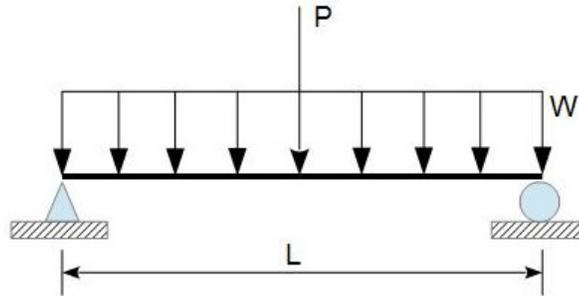


Figura 17 – Viga bi-apoiada com carregamento combinado

No caso de uma análise estrutural linear, a função estado limite é definida como

$$g(W, P, f_y, Z) = f_y \cdot Z - \left( \frac{W \cdot L^2}{8} + \frac{P \cdot L}{4} \right), \quad (5.2)$$

onde  $f_y$  é o limite de escoamento do material e  $Z$  é o módulo plástico da seção. A falha do sistema ocorre quando o momento máximo resultante na viga excede o momento plástico da seção, ou seja,  $g(W, P, f_y, Z) < 0$ .

Tabela 4 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 2

Variável Aleatória	Distribuição	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )
$W(N/mm)$	Normal	10	1
$P(N)$	Normal	350	35
$f_y(N/mm^2)$	Normal	345	35

Os resultados obtidos com o método FOSM (MELCHERS, 1999; HALDAR; MAHADEVAN, 2000) (analítico) e com as rotinas desenvolvidas utilizando Simulação de Monte Carlo são apresentados na Tabela 5. Para o método numérico, foram utilizadas  $10^4$  amostras. Pode-se então, concluir que, a não ser por erros inerentes à simulação, os resultados obtidos com

as rotinas estão de acordo com o resultado analítico. Este exemplo e o anterior demonstram que as rotinas desenvolvidas estão funcionando corretamente.

Tabela 5 – Resultados encontrados para o Exemplo 2

Tipo de análise	$\beta$	$p_f$	Erro (%)
FOSM	1,5655	0,0587	-
Monte Carlo (Linear)	1,5632	0,0590	0,39
Monte Carlo (não-linear)	1,5761	0,0575	0,90

### 5.3 Exemplo 3: Pórtico plano com 3 barras

A estrutura da Figura 18 refere-se ao exemplo 3 e descreve um pórtico plano composto por 3 barras com um carregamento distribuído combinado a um carregamento lateral à estrutura. Esse exemplo é utilizado em diferentes referências, como (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000) e (HALDAR; MAHADEVAN, 2000), e para o estudo aplicado a este exemplo, as dimensões e perfis aplicados foram adaptados. Considera-se que  $H = 1$  m e  $L = 2$  m, e foram utilizados perfis de aço W150x13 em todas as barras ( $E = 210000$  N/mm<sup>2</sup>;  $f_y = 200$  N/mm<sup>2</sup>;  $\nu = 0.3$ ). Para uma melhor precisão dos resultados, foram utilizados quatro elementos em cada barra. Busca-se através deste exemplo obter a probabilidade da estrutura falhar através do surgimento de rótulas plásticas, porém utilizando uma análise linear, o que é apresentado como uma forma de validar os resultados obtidos na análise não linear de segunda ordem.

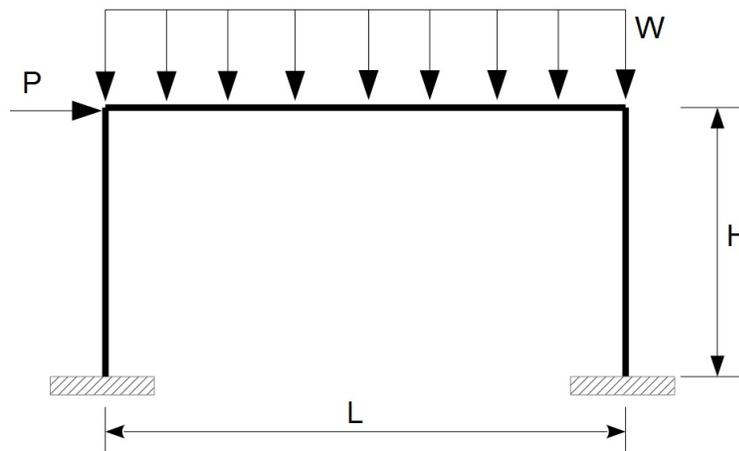


Figura 18 – Pórtico Plano composto por 4 barras

Segundo (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2000), o momento máximo aplicado a uma viga metálica sem que ocorra a formação de rótulas plásticas é

$$M = 1.19 \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_y} \right)^2 \right] M_p \leq M_p \quad (5.3)$$

onde  $M$  é o momento na seção transversal da viga,  $P$  é a força máxima resultante,  $P_y$  é o produto entre a área  $A$  e o limite de escoamento do material  $f_y$ , e  $M_p$  é o momento plástico, definido através do produto entre o modulo plástico  $Z$  e o limite de escoamento  $f_y$ . Entretanto, uma aproximação para o momento plástico pode ser descrita como

$$\phi(p, m_y, m_z) = p^2 + m_z^2 + m_y^4 + 3.5p^2m_z^2 + 3p^6m_y^2 + 4.5m_z^2m_y^2 = 1 \quad (5.4)$$

onde esta equação descreve um hiperplano que define o limite entre o regime elástico e plástico na seção. Para um problema bidimensional, como o Exemplo 5.3, esta equação é reduzida a

$$\phi(p, m_z) = p^2 + m_z^2 + 3.5p^2m_z^2 = 1 \quad (5.5)$$

onde  $p$  é igual a razão entre a carga máxima resultante nas barra e  $P_y$ , enquanto que  $m_z$  é a razão entre o momento resultante máximo  $M$  e o momento plástico  $M_p$ . Portanto, define-se a função estado limite, como

$$g(p, m_z) = p^2 + m_z^2 + 3.5p^2m_z^2 - 1 \quad (5.6)$$

Para a análise de confiabilidade, considerou-se as variáveis aleatórias descritas na Tabela 6, onde foram geradas 10e4 amostras para a análise linear e não linear.

Tabela 6 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 3

Variável Aleatória	Distribuição	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )
$E(N/mm^2)$	Normal	210000	21000
$f_y(N/mm^2)$	Normal	200	20
$P(N)$	Normal	250000	25000
$W(N/mm)$	Normal	1000	100

Ao analisar os resultados indicados na Tabela 7 percebe-se uma proximidade entre os resultados da análise de confiabilidade, gerada com base na análise linear e não linear geométrica, o que fundamenta a metodologia utilizada para ambas as análises. Este resultado é particularmente interessante, pois a partir da definição da função estado limite em relação a formação de rotulas plásticas para a análise linear, foi possível reproduzir o resultado da análise não linear.

Tabela 7 – Resultados encontrados para o Exemplo 3

Tipo de análise	$\beta$	$p_f$
Monte Carlo (Linear/Plastificação)	1.5481	0.0608
Monte Carlo (não-linear)	1.5744	0.0577

## 5.4 Exemplo 4: Treliça Plana Isostática e Hiperestática

Neste exemplo, será estudado a influência do comportamento não linear na análise de confiabilidade em estruturas treliçadas planas isostáticas e hiperestáticas, conforme mostrado na Figura 19. Este estudo é uma continuidade do trabalho realizado por (ALMEIDA, 2006), onde foi avaliado o comportamento elástico pós flambagem para vários incrementos de carregamento pré-estabelecidos, nas estruturas analisadas neste exemplo.

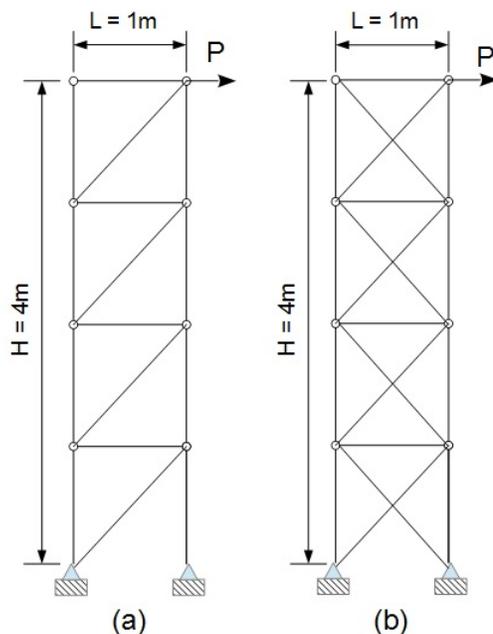


Figura 19 – Estruturas Treliçadas: (a) Isostática e (b) Hiperestática

As estruturas tem largura  $L = 1\text{m}$  e altura total  $H = 4\text{m}$ , sendo esta ultima dimensão dividida em 4 partes e submetidas a uma força horizontal  $P$ , conforme indicado. As barras verticais, correspondentes às colunas da estrutura, são compostas por perfis de aço e com seção transversal equivalente ao perfil W100x19.3. Para as vigas, foram considerados perfis W150x13, enquanto que para os contraventamentos, foram utilizados perfis tubulares de área igual à  $A = 900\text{mm}^2$ . As variáveis aleatórias do problema são o módulo de elasticidade  $E$ , o limite de escoamento do material  $f_y$  e a força vertical  $P$ . As médias, desvios e distribuições desta variáveis são apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 4

Variável Aleatória	Distribuição	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )
$E(N/mm^2)$	Normal	210000	21000
$f_y(N/mm^2)$	Normal	345	35
$P(N)$	Normal	170000	17000

Para a simulação de Monte Carlo, foram utilizadas 10e4 amostras para cada tipo de análise estrutural. Para que uma melhor precisão fossem obtida, foram considerados 4 elementos para cada barra. Os resultados obtidos para a probabilidade de falha  $p_f$  e para o índice de confiabilidade  $\beta$ , são descrito na Tabela 9.

Tabela 9 – Resultados encontrados para o Exemplo 4

Tipo de análise	$\beta$	$p_f$
Treliça Plana Isostática		
Monte Carlo (Linear)	1,3650	0,0861
Monte Carlo (não-linear)	1,2107	0,1130
Treliça Plana Hiperestática		
Monte Carlo (Linear)	2,1767	0,0147
Monte Carlo (não-linear)	2,1701	0,0150

Através da análise dos resultados, é possível perceber que a probabilidade de falha ao comparar as análises linear e não linear não apresentam diferenças significativas, sendo os resultado para as análises linear e não linear da treliça plana Hiperestática bastante semelhantes. Ao comparar a estrutura e a Hiperestática, é possível observar também que a utilização de um contraventamento á mais em cada pavimento, ocasiona um redução significativa na probabilidade de falha, o que é bastante vantajoso em termos do projeto estrutural, uma vez que o custo associado é baixo. Estes dados concordam com os resultados obtidos por (ALMEIDA, 2006). Entretanto, foi mostrado neste trabalho que os travamentos contribuem para uma maior rigidez do conjunto até um determinado nível de carregamento e que a partir daí, ambas estruturas passam a se comportar de modo semelhante.

## 5.5 Exemplo 5: Viga engastada

Neste exemplo, busca-se avaliar a probabilidade de falha à flambagem lateral para uma viga em balanço sujeita a um carregamento na extremidade, conforme mostrado na Figura 20. Foi analisada uma viga de aço com comprimento  $L = 1500$  mm, seção retangular com altura  $H = 250$  mm e base  $B = 50$  mm, momento de inércia  $I_y = 2,604e6$  mm<sup>4</sup>, modulo de elasticidade  $E = 210000$  N/mm<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson igual a  $\nu = 0,3$ .

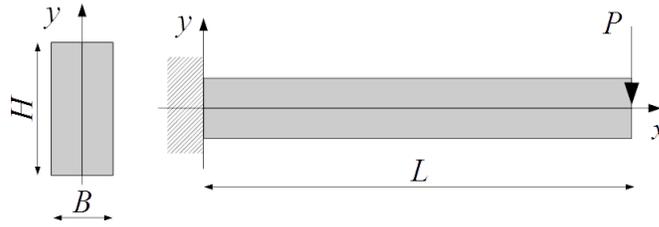


Figura 20 – Engastadas sujeita instabilidade lateral

A carga crítica de flambagem lateral de uma viga em balanço é o máximo carregamento que pode ser aplicado ao sistema sem que este sofra instabilidades e esta é definida através de (TIMOSHENKO; GERE, 1961)

$$P_{cr} = \gamma_2 \frac{\sqrt{EI_y C}}{L^2}, \quad (5.7)$$

onde  $\gamma_2$  é um fator adimensional referente a seção transversal,  $L$  é comprimento da viga,  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $C$  é a rigidez torsional da seção. Para uma seção retangular esbelta, o fator  $\gamma_2$  e a rigidez torsional  $C$  são definidos por

$$C = JG = \frac{1}{3}hb^3G, \quad (5.8)$$

$$\gamma_2 = 4,013, \quad (5.9)$$

onde  $J$  é a constante torsional de uma viga sujeita a torsão de St. Venant e  $G$  é o módulo de cisalhamento do material. Logo, a carga crítica de flambagem lateral para uma viga retangular em balanço é

$$P_{cr} = 4,013 \frac{\sqrt{EI_y C}}{L^2}. \quad (5.10)$$

A partir dos parâmetros utilizados neste exemplo, a rigidez torsional do problema é igual a  $C = 841,554e9$  N mm<sup>2</sup> e a carga crítica de flambagem lateral  $P_{cr} = 1209,81$  KN. O mesmo problema foi modelado através do MASTAN2, para que fosse possível comparar a carga elástica crítica descrita pela equação 5.10 com aquela resultante do modelo numérico. O carregamento crítico utilizando uma análise de estabilidade linear é  $P_{cr} = 1210,35$  KN, o que mostra que é possível reproduzir o resultado analítico através do modelo com bastante precisão.

Entretanto, a carga crítica teórica da equação 5.10 (e o carregamento crítico obtido com análise de estabilidade linear) não considera as não linearidades geométricas. Novamente, utilizou-se o MASTAN2 para avaliar a carga crítica de flambagem lateral, utilizando agora

uma análise não linear de segunda ordem, o que resultou em uma carga crítica igual à  $P_{cr} = 1290,00$  KN. Logo, é possível concluir que a diferença observada entre os resultados obtidos na análise linear e não linear para a carga crítica de flambagem lateral, pode afetar diretamente o cálculo da probabilidade falha, uma vez que a carga crítica é o principal parâmetro da equação de estado limite do problema.

Para a análise de confiabilidade, assume-se que a falha ocorre quando a carga  $P$  atuante na viga é maior que a carga elástica de flambagem  $e$ , portanto, a função de estado limite é dada por

$$g = P_{cr} - P. \quad (5.11)$$

As variáveis aleatórias do problema são a carga  $P$  e o módulo elástico  $E$ , e estas variáveis possuem distribuição Normal com média 1100 KN, 210000  $N/mm^2$  e desvio padrão 110 KN, 21000  $N/mm^2$ , respectivamente. A probabilidade de falha calculada com a função de estado limite da Eq. (5.11) e utilizando a Simulação de Monte Carlo com 1E6 amostras é igual a  $P_f = 0.0018$  ( $\beta = 2.9086$ ). Já a probabilidade de falha calculada utilizando a análise estrutural acoplada as rotinas desenvolvidas, com 10E4 amostras, é igual a  $P_f = 0,1320$  ( $\beta = 1,1170$ ). Nota-se que neste caso que as probabilidades de falha são bastante diferentes e que a análise de estabilidade linear subestima a confiabilidade estrutural em relação a análise estrutural considerando não linearidade geométrica.

## 5.6 Exemplo 6: Treliça Espacial de 36 barras

O último exemplo é uma treliça composta de 36 barras, sujeita a dois carregamentos concentrados na extremidade livre do problema, conforme mostrado na Figura 21. As barras desta estrutura são compostas por tubos metálicos com área  $A = 403$  mm<sup>2</sup> e dois valores para a dimensão  $B$  da treliça são testados: 150 mm e 300 mm.

O módulo de elasticidade do material  $E$ , o limite de escoamento  $f_y$  e a carga  $P$  são as variáveis aleatórias do problema e possuem média, desvio padrão e distribuição de probabilidade descritas na Tabela 10.

Tabela 10 – Variáveis Aleatórias do Exemplo 5.6

Variável Aleatória	Distribuição	Média ( $\mu$ )	Desvio Padrão ( $\sigma$ )
$E(N/mm^2)$	Normal	210.000	20.000
$f_y(N/mm^2)$	Normal	345	35
$P(N)$	Normal	42.500	4.250

A carga crítica de Euler (TIMOSHENKO; GERE, 1961) é dada por

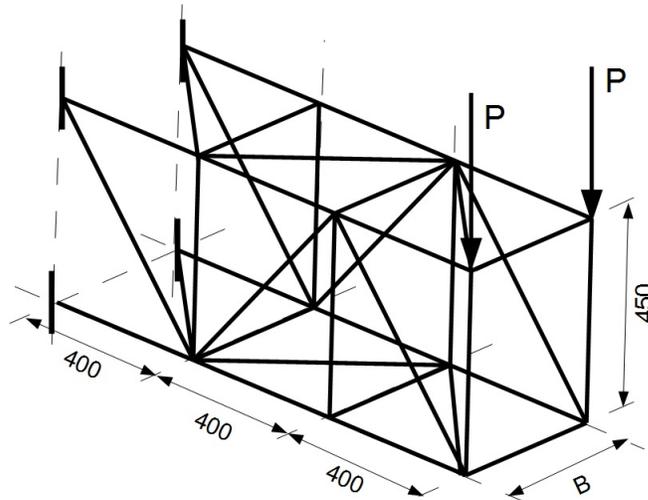


Figura 21 – Treliça Espacial de 36 barras

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}. \quad (5.12)$$

Para a barra de maior comprimento tem-se então  $F_{cr} = 438,5\text{KN}$ . Por outro lado, a força necessária para causar escoamento do material é  $F = f_y A = 139,05\text{KN}$ . Logo, não é necessário verificar a carga crítica de Euler neste exemplo, uma vez que esta é sempre superior à carga de escoamento do material. Assim, a função de estado limite utilizada no caso da análise linear é dada por

$$g(E, P, f_y) = f_y A - F_{max}, \quad (5.13)$$

onde  $F_{max}$  é a máxima força em módulo resultante nas barras.

Para a análise não linear, a falha ocorre quando as equações de equilíbrio para um determinado nível de carregamento não podem ser encontradas. Avaliou-se a confiabilidade da estrutura através da simulação de Monte Carlo acoplada a análise estrutural com  $10^4$  amostras, onde foram obtidos os resultados mostrados na Tabela 11, de forma que estes possam ser comparados.

Primeiramente, vale salientar que os resultados obtidos com a análise linear para os dois casos não são iguais pois as barras que compõem o contraventamento inferior e superior possuem inclinações diferentes nos dois casos (ver Figura 22). No caso da estrutura obtida com  $B = 150\text{mm}$ , o contraventamento absorve mais esforços, o que reduz a força máxima observada nas barras da estrutura. Consequentemente, a probabilidade de falha da estrutura com  $B = 150\text{mm}$  é menor.

Tabela 11 – Resultados encontrados para o Exemplo 5.6

Tipo de análise	$\beta$	$p_f$
B = 150 mm		
Linear	2,0456	0,0204
Não-Linear	0,8783	0,1899
Não-Linear/Linear	-	9,3088
B = 300 mm		
Linear	1,5573	0,0597
Não-Linear	0,6840	0,2470
Não-Linear/Linear	-	4,1373

Com base nos resultados apresentado na Tabela 11, é possível observar uma relevante diferença entre as probabilidades de falhas obtidas através da análise linear e não linear. Esta discordância entre os resultados pode ser justificada através da análise do modo de falha descrito pela a análise não linear de segunda ordem da estrutura, mostrada nas Figuras 22 e 23. Observa-se que as estruturas sofrem falha por instabilidade lateral e escoamento do material simultaneamente.

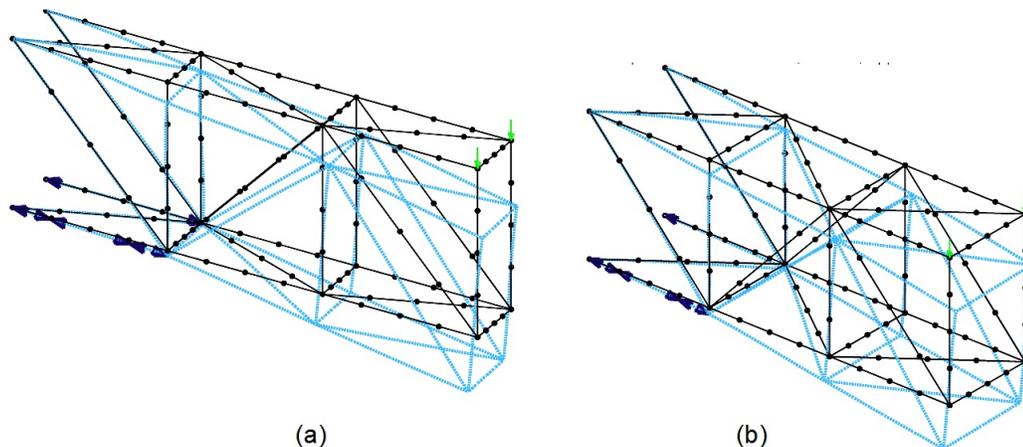


Figura 22 – Modo de falha estrutural

Apesar da plastificação ser observada de forma semelhante para ambas as estruturas, é possível observar que a instabilidade global é reduzida à medida que a dimensão  $B$  da estrutura é aumentada. Esse efeito pode ser observado ao relacionar os resultados obtidos nas duas análises para os exemplos estudados, onde na estrutura mais esbelta, a razão entre as probabilidades de falhas obtidas mostra que a análise linear subestima a probabilidade de falha da análise não linear através de um fator cerca de nove vezes, enquanto que na estrutura onde  $B = 300\text{mm}$ , esse fator é reduzido pela metade.

Outro aspecto importante, é que a análise da carga crítica elástica, mostrada na 24, não

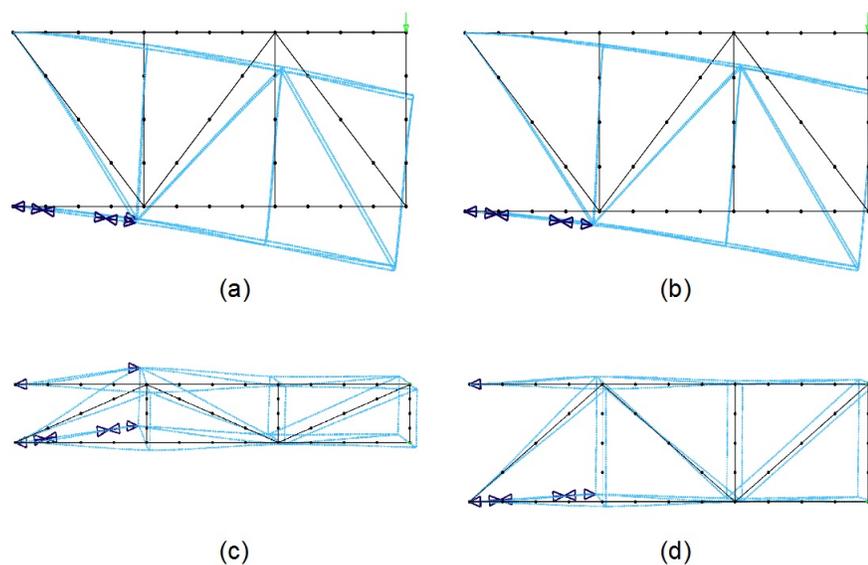


Figura 23 – Modo de falha estrutural - Vista Lateral e Superior da estrutura

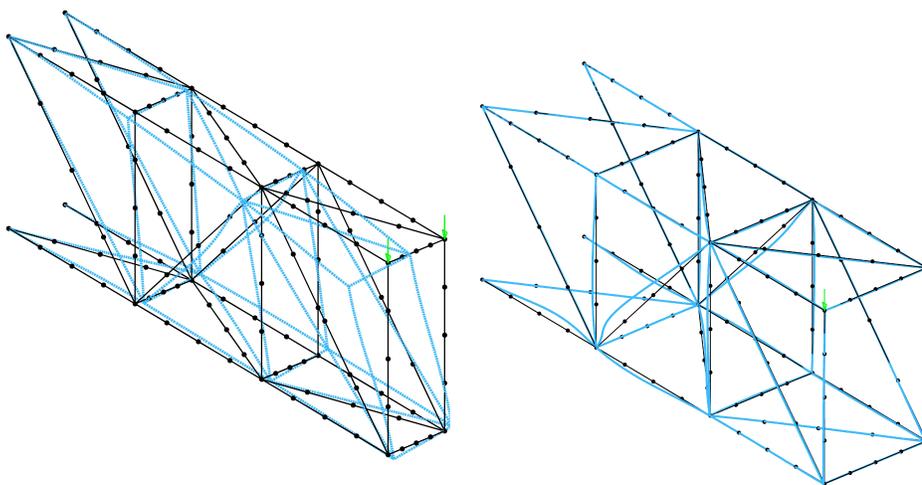


Figura 24 – Modo de falha estrutural - Carga Crítica Elástica

representa de forma adequada o modo de falha obtido com análise não-linear. Não apenas o modo de falha é diferente, como também a resistência obtida, uma vez que a análise crítica elástica não considera plastificação do material. Assim, qualquer análise que não considere as não linearidades geométrica e do material simultaneamente irá subestimar de maneira significativa a probabilidade de falha para essa estrutura. Este exemplo é de grande interesse teórico, pois indica que a probabilidade de falha pode ser severamente subestimada caso apenas análises lineares sejam consideradas.

## 6 Conclusões

Neste trabalho, buscou-se avaliar a influencia das não linearidades na análise de confiabilidade estrutural, através da uma metodologia de acoplamento entre uma rotina de análise de confiabilidade desenvolvida e a análise estrutural não linear realizada através do programa MASTAN. A partir deste método, diferentes tipos de estruturas puderam ser estudadas, como treliças, pórticos planos e espaciais e para cada um destes casos é possível incluir os efeitos das não linearidade do material e das não linearidade geométricas. Logo, foi possível aproximar ainda mais o modelo numérico ao comportamento real da estrutura, e conseqüentemente obteve-se uma estimativa da probabilidade de falha de forma mais precisa para diferentes tipos de estruturas. Foi possível também analisar os casos em que a análise linear é bastante conservadora e os casos onde esta é insuficiente para descrever o estado limite da estrutura.

Dessa forma, foram avaliados diversos exemplos numéricos, onde foram estimadas as probabilidades de falha através de análises lineares e não lineares. Os problemas 5.1, 5.2 e 5.3 não apresentaram diferenças significativas no calculo do índice de confiabilidade  $\beta$  quando as não linearidades geométricas são consideradas. Entretanto, estes dois exemplos permitem o cálculo da probabilidade de falha de forma analítica (FOSM), e assim é possível afirmar que a metodologia proposta neste trabalho foi implementada corretamente, uma vez que houve uma boa convergência entre os resultados. O Exemplo 5.3, foi proposto para que a partir de uma análise linear, fosse possível validar os resultados obtidos na análise não linear, o que fundamentou a metodologia de acoplamento entre as análises. No quarto exemplo é possível concluir que uma estrutura hiperestática apresenta uma probabilidade de falha significadamente menor que àquela observada para uma estrutura isostática, onde a diferença entre estas é apenas de uma barra por pavimento, o que em termos do projeto estrutural é bastante vantajoso.

Para os exemplos 5.5 e 5.6, onde os efeitos da instabilidade lateral da viga e da instabilidade global da estrutura foram considerados, foi observado uma considerável divergência entre os resultados obtidos nas duas análises, e portanto é possível afirmar que para estes dois exemplos, a análise linear é insuficiente para que se possa estimar a probabilidade de falha com precisão. Em particular, o último exemplo indica que a probabilidade de falha pode ser severamente subestimada caso apenas de análises lineares sejam consideradas, mesmo quando uma análise crítica linear é realizada.

Outro aspecto importante, é que a metodologia adotada neste trabalho proporciona uma análise estrutural robusta em termos de implementação numérica e econômica sob o aspecto da capacidade computacional, o que diferencia a proposta realizada neste trabalho das de-

mais análises implementadas recentemente. Isso por que tanto a simulação de Monte Carlo, quanto a análise não linear de estruturas, estão associadas a um elevado custo computacional e através da implementação desenvolvida, foi possível acoplar os dois métodos de forma eficiente.

Diante do estudo apresentado nesta dissertação, observa-se que há um vasto campo a ser explorado em pesquisas futuras nesta linha. Para aprimorar o método utilizado e acrescentar novas contribuições ao estudo iniciado neste dissertação, os trabalhos de pesquisa poderão ser estendidos para se considerar:

- Estudo mais detalhado sobre a plastificação combinada a instabilidade global de estruturas;
- Inclusão de diferentes métodos de simulação, como o *Importance Sampling*, para tornar o método mais eficiente;
- Utilização de outros tipos de estruturas;
- Inserção da aleatoriedade relativa a outros parâmetros, como posicionamento da força aplicada e área das barras, entre outros;
- Inclusão de outras funções de distribuição de probabilidade;
- Inserção de outros métodos de análise de confiabilidade;
- Inclusão do critério de falha por análise de vibração.

# Referências

- AGOSTINI, B. M. *Análise de confiabilidade estrutural de pórticos planos com ligações semi-rígidas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2014.
- ALMEIDA, A. C. B. *Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e os efeitos das tensões residuais nos perfis estruturais de aço*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. *Probability concepts in engineering planning and design – Decision, risk and reliability*. New York: John Wiley & Sons, 1984. 562 p.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.
- BATOZ, J.; DHAT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1262 – 1267, 1979.
- BECK, A. T.; CORRÊA, M. R. S. New design chart for basic wind speeds in Brazil. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 10, p. 707 – 723, 2013.
- BIONDINI, F.; BONTEMPO, F.; MALEBRA, P. G. Fuzzy reliability analysis of concrete structures. *Computers and Structures*, v. 82, p. 1033 – 1052, 2004.
- CHAKRABARTY, J. *Theory of Plasticity*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006.
- CRISFIELD, M. A. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. New York: John Wiley & Sons, 1991. 8-13 p.
- DEFTYAREV, V. V. Construction stage reliability of composite steel deck designed according to Canadian standard. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 39, p. 344 – 349, 2012.
- HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- HARICHANDRAN, R. S.; IQBAL, S. Capacity reduction and fire load factors for LRFD of steel columns exposed to fire. *Fire Safety Journal*, v. 46, p. 234 – 242, 2011.
- HONFI, D.; MARTENSSON, A.; THELANDERSSON, S. Reliability of beams according to Eurocodes in serviceability limit state. *Engineering Structures*, v. 35, p. 48 – 54, 2012.
- LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix structural analysis*. 2nd edn. ed. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- MELCHERS, R. *Structural reliability analysis and prediction*. Chichester: John Wiley & Sons, 1999.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. F. *Estatística aplicada a engenharia*. New York: John Wiley & Sons, 2001. 43 p.

SANTOS, K. dos; BECK, A. T. A benchmark study on intelligent sampling techniques in monte carlo simulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, p. 624 – 648, 2015.

SILVA, A. R. D. da. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2009.

TIMOSHENKO, A.; GERE, J. *The theory of elastic stability*. 2nd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1961.