



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu  
em Física

Dissertação de Mestrado

**Densidade de Máximos e Função de  
Correlação em Mecânica Clássica e Sinais  
Biológicos**

Helena Christina Piuvezam de Albuquerque Bastos

João Pessoa  
2017



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu  
em Física

Dissertação de Mestrado

**Densidade de Máximos e Função de  
Correlação em Mecânica Clássica e Sinais  
Biológicos**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos, apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física na Área de Concentração de Física das Partículas Elementares e Campos.

Helena Christina Piuvezam de Albuquerque Bastos

João Pessoa  
2017

*Catálogo na publicação*  
*Setor de Catalogação e Classificação*

B327d Bastos, Helena Christina Piuvezam de Albuquerque.  
Densidade de máximos e função de correlação em mecânica clássica e  
sinais / Helena Christina Piuvezam de Albuquerque Bastos. – João Pessoa,  
2017.  
109 f. : il.

Orientador: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.  
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Física. 2. Estudo do caos. 3. Pêndulo Duplo. 4. Comprimento de correlação  
- ECG. 5. Densidade de máximos. 6. ECG - eletrocardiograma. I. Título.

UFPB/BC

CDU -

Ata da Sessão Pública da Defesa de  
Dissertação de **Mestrado** da aluna **Helena  
Christina Piuvezam de Albuquerque  
Bastos**, candidata ao Título de Mestre em  
Física na Área de Concentração Física das  
Partículas Elementares e Campos.

Aos sete dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezessete, às 10:00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar a candidata ao grau de Mestre em Física na área de Física das Partículas Elementares e Campos, **Helena Christina Piuvezam de Albuquerque Bastos**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, João Antônio Plascak (DF/UFPB) e Anderson Luiz da Rocha e Barbosa (UFRPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Densidade de Máximos e Função de Correlação em Mecânica Clássica e Sinais Biológicos*". Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovada**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **07 de dezembro de 2017**.

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos

Orientador - UFPB

Prof. Dr. João Antônio Plascak

UFPB

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa

UFRPE

# Agradecimentos

*"He who can no longer pause to wonder and stand rapt in awe, is as good as dead."  
-Albert Einstein*

Primeiramente ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, pela disponibilidade para a pesquisa e estudo.

A CNPq por seu auxílio financeiro durante toda extensão do meu mestrado, auxílio necessário para compra e manutenção de equipamentos.

Ao meu orientador, Professor Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos por seu suporte em especial técnico e moral com dedicação e competência, suporte fundamental para a conclusão deste trabalho.

A minha mãe que, mesmo quando não acreditava que eu poderia terminar meus estudos, esteve ao meu lado, sem expressar seus medos, sempre me levando a acreditar em meu próprio potencial.

A meu pai e minha irmã, que me apoiaram e estiveram ao meu lado em todos os momentos tanto de vitória quanto de dificuldade, me ajudando sempre que possível com conhecimento ou uma palavra amiga.

Ao Professor Oleg Lunin, da Universidade de Albany, SUNY, Estados Unidos, por seu grande incentivo à minha carreira, sendo uma das primeiras pessoas da Física que acreditou em meu trabalho e perseverança.

Aos meus professores do mestrado e da graduação por me ensinarem da melhor forma possível não somente Física, mas valiosas lições para a minha vida.

E finalmente, Aos meus familiares, amigos e colegas por seu apoio moral e emocional, e por me apoiarem até quando eu pensei em desistir.

# Resumo

Nos dias atuais, a medicina preventiva é assunto de extrema importância, pois muitas doenças podem ser tratadas ou até curadas quando é possível encontrá-las em sua fase inicial. Então várias áreas do conhecimento como biologia, medicina, química e física estão usando seus métodos de forma a facilitar o diagnóstico. Neste trabalho, o estudo do caos e sua relação com a densidade de máximos em sinais de eletrocardiograma foram utilizados com o objetivo de adicionar mecanismos na busca de um diagnóstico mais preciso e rápido. Para embasar o conceito de caos, testar o método e conectar a biologia à física, primeiro analisamos o pêndulo duplo, um exemplo mecânico de caos. Através de simulações, foi possível estudar o comprimento de correlação deste. Para sinais biológicos, o primeiro sinal analisado foi o de densidade de populações. A seguir, estudamos o sinal produzido pelo modelo Hodgkin-Huxley de um axônio gigante de lula, após simulação e adquirido em bases de dados. Em seguida, encontramos em sinais de Eletrocardiograma um padrão no comprimento de correlação e na sua densidade de máximos, que quando aplicados à análise do exame possa fornecer informação adicional em prol de facilitar o diagnóstico.

**Palavras-chave:** Caos, Pêndulo Duplo, Correlação, densidade de máximos, ECG

# Abstract

Nowadays, preventive medicine is a very important subject, since many diseases can be treated and even cured when it is possible to catch them in their initial phase. Therefore many areas of knowledge, like biology, medicine, chemistry, and physics are using their tools to facilitate diagnosis. In this study, chaos and its relationship with signal density were used to add new mechanisms in the search for a more precise and fast diagnosis. Supporting the concept of chaos, testing the method, and connecting physics to biology, we first look at the double pendulum, a classical mechanics example of chaos, finding its length of correlation. For biological signals, the first signal analyzed was population density. Next, we study the signal produced by the Hodgkin-Huxley model of a giant squid axon, after it was simulated and acquired in databases. Then, we find on electrocardiogram signals a pattern in the length of correlation and their peak density, which when applied to the analysis of the clinical exam may provide information that is going to facilitate the diagnosis.

**Keywords:** Chaos, Double Pendulum, Correlation, Maxima Density, ECG

# Sumário

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lista de Tabelas</b>                              | <b>iii</b> |
| <b>Lista de Figuras</b>                              | <b>v</b>   |
| <b>1 Introdução</b>                                  | <b>1</b>   |
| 1.1 Expoente de Lyapunov                             | 2          |
| 1.2 Caos na Dinâmica                                 | 3          |
| 1.3 Caos na Biodiversidade                           | 8          |
| 1.4 Análise do Eletrocardiograma                     | 12         |
| 1.5 Objetivos                                        | 15         |
| 1.6 Estrutura do Trabalho                            | 16         |
| <b>2 Métodos</b>                                     | <b>17</b>  |
| 2.1 Histograma de autovalores                        | 17         |
| 2.2 Transformada de Fourier                          | 18         |
| 2.3 Função de Correlação                             | 20         |
| 2.4 Comprimento de Correlação e Densidade de Máximos | 21         |
| <br>                                                 |            |
| <b>I Caos e a Mecânica Clássica</b>                  | <b>24</b>  |
| <br>                                                 |            |
| <b>3 Uma Breve Introdução a Dinâmica e Caos</b>      | <b>25</b>  |
| <br>                                                 |            |
| <b>4 O Pêndulo Duplo</b>                             | <b>32</b>  |
| 4.1 Formulação de Lagrange                           | 33         |
| 4.2 Formulação de Hamilton                           | 34         |
| 4.3 Resolvendo Numericamente                         | 36         |
| 4.4 Resultados e Discussão                           | 37         |
| <br>                                                 |            |
| <b>II Sinais Biológicos</b>                          | <b>42</b>  |
| <br>                                                 |            |
| <b>5 Introdução a Bioeletricidade</b>                | <b>43</b>  |
| 5.1 Modelo Hodgkin-Huxley                            | 47         |
| <br>                                                 |            |
| <b>6 Eletrocardiograma - ECG</b>                     | <b>50</b>  |
| 6.1 Um Pouco de História                             | 50         |
| 6.2 Atividade Elétrica do Coração                    | 52         |
| 6.3 O Eletrocardiograma                              | 57         |

|            |                                                                 |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>7</b>   | <b>Resultados e Discussão</b>                                   | <b>61</b> |
| 7.1        | Base de dados MIT-BIH                                           | 61        |
| 7.1.1      | Sinus Normal                                                    | 61        |
| 7.1.2      | Arritmia Ventricular                                            | 65        |
| 7.1.3      | Fibrilação Atrial                                               | 68        |
| 7.1.4      | Arritmia Supra-Ventricular                                      | 71        |
| 7.2        | Base de Dados diagnóstico PBT                                   | 73        |
| 7.3        | Base de Dados sobre término de um processo de Fibrilação Atrial | 77        |
| 7.4        | Base de Dados <i>Cyclic Alternation Pattern in human sleep</i>  | 81        |
| 7.5        | Base de Dados BIDMC                                             | 83        |
| <br>       |                                                                 |           |
| <b>III</b> | <b>Considerações finais</b>                                     | <b>87</b> |
| <br>       |                                                                 |           |
| <b>8</b>   | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                                | <b>88</b> |
| <br>       |                                                                 |           |
|            | <b>Referências Bibliográficas</b>                               | <b>91</b> |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | <b>Valores normais do intervalo PR.</b> Os valores estão dados em ms, em função da idade e da frequência cardíaca. [10]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 13 |
| 1.2 | <b>Valores normais do intervalo PR em função da sexo e da frequência cardíaca.</b> Ambas tabelas demonstram que as variações não são grandes, porém é relevante observar que existem diversas variáveis na análise do ECG. [10]                                                                                                                                                                                                                                                                  | 13 |
| 3.1 | <b>Síntese Histórica da Dinâmica e Caos.</b> Os acontecimentos importantes para o desenvolvimento da disciplina Dinâmica podem ser vistos Estruturados por data, nesta tabela traduzida de [2].                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 28 |
| 3.2 | <b>Sistemas conhecido ordenados por não-linearidade e ordem.</b> O eixo horizontal representa a dimensão do espaço de fase, ou seja, quantas variáveis são necessárias para caracterizar o estado do sistema e o eixo vertical representa a linearidade do sistema. Traduzido de [2].                                                                                                                                                                                                            | 31 |
| 4.1 | <b>Estimativa dos Coeficientes de Lyapunov.</b> Os coeficientes de Lyapunov para os ângulos iniciais simulados são positivos. Essa estimativa foi feita para 100 segundos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 39 |
| 4.2 | <b>Comprimento de Correlação e Densidade de máximos.</b> Resultados da análise dos sinais com seus respectivos ângulos centrais. Apesar de não haver colapso entre as funções é possível perceber que é válida a relação inversa entre o comprimento de correlação e a densidade de máximos $\tau \approx 1/6\rho$ .                                                                                                                                                                             | 40 |
| 7.1 | <b>Análise tradicional do ECG normal.</b> Através de um simples algoritmo foi possível adquirir a média de amplitudes das ondas R e Q e do período dos ciclos, que foi calculado através das distâncias entre os picos da onda R, observados na série temporal. Para o sinal saudável não observamos grandes desvios padrões. Porém as diferenças entre valores máximos e mínimos das amplitudes e do período conferem ao método uma suscetibilidade à erro quando o sinal é curto.              | 64 |
| 7.2 | <b>Análise tradicional do ECG apresentando fibrilação ventricular.</b> Através do mesmo algoritmo utilizado para a análise do ECG normal foi possível adquirir a média de amplitudes das ondas R e Q e do período dos ciclos observados na série temporal. Para este sinal observamos desvios padrões maiores e, principalmente para R e t, as diferenças entre valores máximos e mínimos são grandes, conferindo ao método tradicional uma suscetibilidade à erro em um sinal de curta duração. | 67 |

- 7.3 **Análise tradicional do ECG apresentando Fibrilação Atrial.** Ao adquirir a média de amplitudes das ondas R e S, neste caso a onda Q apareceu com menor amplitude que a onda S, e do período dos ciclos observamos grandes desvios padrões e diferenças entre valores máximos e mínimos das amplitudes e do período. Observamos que considerando os extremos dos valores médios de R, o médico pode ser induzido à acreditar que o paciente é saudável especialmente quando o sinal é curto. 70
- 7.4 **Análise tradicional do ECG apresentando Arritmia Supra-Ventricular.** Pela análise das médias de amplitudes das ondas R e S, neste caso, como na fibrilação atrial, a onda Q apareceu com menor amplitude que a onda S, e do período dos ciclos observamos pequenos desvios padrões e diferenças entre valores máximos e mínimos das amplitudes. O período tem um desvio padrão maior e considerando os extremos dos valores médios de R, o médico pode ser induzido à acreditar que o paciente tem fibrilação atrial. 72
- 7.5 **Análise tradicional do ECG da base de dados PTB.** Analisando as médias de amplitudes das ondas R e S, neste caso, como na fibrilação atrial e arritmia supra-ventricular, a onda Q apareceu com menor amplitude que a onda S, e do período dos ciclos observamos um desvio padrão maior que a média para a onda R, já a onda S aparece com um pequeno desvio padrão, quando comparado com a ordem da média. Essas características estatísticas conferem ao método suscetibilidade à erro, principalmente quando o sinal é curto. 75
- 7.6 **Análise tradicional do ECG para a base de dados de término do processador de fibrilação atrial.** Analisando as médias de amplitudes da onda R e do período dos ciclos observamos um desvio padrão pequeno para a média da onda R, mas razoável para o período. 80
- 7.7 **Análise tradicional do ECG da base de dados CAP.** Usando o mesmo algoritmo, é possível medir as médias de amplitudes das ondas R e T, neste caso, a onda T aparece invertida e tem amplitude maior que a onda Q, e do período dos ciclos. Observamos um desvio padrão maior que a média para a onda R, já a onda T aparece com um pequeno desvio padrão, quando comparado com a ordem da média e o período aparece com um desvio padrão grande e uma grande diferença entre o período máximo e mínimo. Essas características estatísticas conferem ao método suscetibilidade à erro, principalmente quando o sinal é curto. 82
- 7.8 **Análise tradicional do ECG da base de dados BIDMC.** Medindo as médias de amplitude da onda R e do período dos ciclos. Observamos um desvio padrão considerável para a onda R e ambas diferenças entre as amplitudes máximas e mínimas são grandes e conferem ao método suscetibilidade à erro, principalmente quando o sinal é curto. 85
- 8.1 **Resumo de Resultados da Análise das Funções de Correlação para Sinais Biológicos.** Encontramos um número comum que caracteriza doenças específicas. 89

# Lista de Figuras

- 1.1 **Seções de Poincaré e uma função dos coeficientes de Lyapunov do Pêndulo Duplo.** Os três primeiros gráficos são as seções de Poicaré do Pêndulo Duplo fazendo o ângulo  $\varphi_1 = 0$ , observa-se que para  $E_{01}$  e  $E_{02}$  as seções tem orbitas bem definidas e para  $E_{03}$  existe uma região caótica. No último gráfico, temos os coeficientes de Lyapunov em função do tempo para as diferentes energias  $E_{01}, E_{02}$  e  $E_{03}$ . Para as energias  $E_{01}$  e  $E_{02}$ , os expoentes de Lyapunov tendem a zero e para a energia  $E_{03}$  expoentes são positivos caracterizando caos. Figuras retiradas de [5]. 6
- 1.2 **Estado inicial e estado após 2000 gerações.** O sistema evolui com regiões espirais seguindo um padrão de equilíbrio, sem se estabelecer em regiões rígidas, as espécies se agrupam para proteção. Cada cor no gráfico é referente a uma das espécies simuladas, e o vazio é denotado pela cor branca. [9] 9
- 1.3 **Função de autocorrelação para evolução das espécies.** Essa função apresenta característica harmônica amortecida, esperada para sistemas homogêneos e periódicos caso do modelo pedra-papel-tesoura da biodiversidade, por ter condições de contorno cíclicas. Para este modelo observa-se uma amostra do todo, de forma a entender como funciona um vasto sistema complexo. Observa-se que para a evolução temporal da densidade de todas as espécies o comprimento de correlação é invariante. [9] 10
- 1.4 **Densidade de Espécies por geração.** Para calcular a função de correlação, utiliza-se uma série temporal que oscila em torno do zero. Para a evolução de espécies foi escolhida uma das espécies e observada a relação de sua densidade com o tempo, que está representada neste gráfico. 11
- 1.5 **Função de Correlação recuperada.** O sinal analisado não havia passado por nenhum filtro, por essa razão os comprimentos de correlação são um pouco diferentes, mas o formato da função também é harmônico amortecido. Neste caso, usamos apenas uma espécie. 12
- 1.6 **Sinal do ECG pré e pós filtro.** O Sinal com ruído reduzido tem mesmo formato do sinal puro, porém as oscilações encontradas ao longo da série temporal desaparece. Esse gráfico foi retirado de [11]. 14
- 1.7 **Espaços de fase para o ECG.** Para o sinal puro à esquerda, e para o sinal filtrado à direita. Ambos espaços de fase aparentam ter um atrator estranho, que mantém sua forma mesmo após o filtro. [11] 15
- 2.1 **Representação gráfica da sobreposição de funções.** Entre  $t = -1$  e  $t = 3$  existe sobreposição das funções  $f(t)$  e  $f(t + \tau)$ , para medí-la calcula-se a área entre elas através da integral. 21

- 3.1 **Equações de Lorenz resolvidas e projetadas no plano  $xz$ .** Observa-se que as suas trajetórias são "atraídas" para dois pontos do espaço (atratores estranhos), porém não os alcançam ou se estabelecem em volta deles. 26
- 4.1 **Pêndulo Duplo.** Aqui representadas estão as coordenadas generalizadas do pêndulo duplo relacionadas ao plano cartesiano. 32
- 4.2 **Simulação para três condições iniciais do Pêndulo Duplo.** As trajetórias do pêndulo duplo foram calculadas para ângulos iniciais de  $\varphi = \pi/2 \pm 0,015$  rad e estão traçadas neste gráfico as trajetórias referentes a segunda massa do pêndulo. 37
- 4.3 **Gráfico da variação do logaritmo da distância no tempo.** Visivelmente o aclave da curva referente a  $\pi/2$  é positivo, o aclave das curvas dos demais ângulos serão estudados na tabela 4.1. 38
- 4.4 **Histograma da Matrix Gaussiana de Wigner para a distância de 3 trajetórias.** Observa-se uma grande amplitude para autovalores próximos a zero, mostrando a característica determinística do caos do Pêndulo Duplo. 39
- 4.5 **Série Temporal do Pêndulo Duplo.** Na figura (a) observa-se que a série temporal oscila em torno de zero, que é necessário para fazer a função de correlação. A figura (b) representa uma fração do sinal são vistos máximos locais muito próximos, falsos máximos locais, que modificam a densidade de máximos do sistema. 40
- 4.6 **Funções de Correlação do Pêndulo Duplo.** Na figura (a) observa-se um comprimento de correlação de 0.09955. Obtido através do valor da função a meia altura. Na figura (b) apenas explicitamos os comprimentos de correlação para  $\pi/5$  e  $\pi/6$  para não deixar a figura ilegível. 41
- 5.1 **Experimentos de Galvani.** A figura A está representando o experimento onde um fio bimetálico fechava o circuito elétrico na perna do sapo causando contração muscular. A figura B representa a união de duas pernas através de um fio monometálico, que também ocasionou contração muscular. De forma a provar que a eletricidade era interna ao organismo biológico. Figuras retiradas de [25] 43
- 5.2 **Potenciais de ação** Observamos nesta figura os potenciais de ação para uma célula eletricamente carregada. Se seu pico é em  $+30\text{mV}$  e sua base em  $-90\text{mV}$ , observamos o potencial de ação de uma fibra de Purkinje, célula cardíaca mais larga. Retirada de [27] 47
- 5.3 **Função de correlação para um Axônio.** Na figura (a) diferente da função de correlação do Pêndulo Duplo, apenas um pulso de energia excita esse modelo, por isso a função de correlação decresce com o tempo. Na figura (b) observamos o mesmo comportamento do modelo de Hodgkin-Huxley, uma função de correlação que decai por ter apenas um pulso. 49
- 6.1 **Eletrograma (século XX).** Na figura (a) foi feita comparação entre os sinais obtidos por Waller e Einthoven. E em (b), o maquinário usado para obtenção dos sinais. Ilustrações históricas retiradas de [35]. 51
- 6.2 **Automatismo.** Observamos a curva do nódulo sinusal, que apresenta automatismo. Retirada de [27] 53
- 6.3 **Fibras da Condução.** NS é o nódulo sinusal; A, M, P e B são feixes internodais; NAV é o nódulo atrioventricular; b é o feixe de *by-pass*; H é o feixe de His; RD é o ramo direito; e HFAS e HFPI são os dois hemifascículos do ramo esquerdo. Retirada de [27] 53

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.4 | <b>Linhas de Campo de um Dipolo.</b> Observamos que as linhas de campo da carga positiva são direcionadas para longe da carga, para a carga negativa o sentido é oposto. Retirada de [27]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 54 |
| 6.5 | <b>Onda P</b> Retirada de [27]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 55 |
| 6.6 | <b>Vetor médio de QRS no espaço.</b> Representado nesta figura está o vetor resultante de inscrição do complexo QRS. Retirado de [27]                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 56 |
| 6.7 | <b>Derivação Bipolar D1.</b> A derivação bipolar de Einthoven entre as articulações dos ombros, apesar dos eletrodos serem colocados nos punhos como simples extensões elétricas dos ombros. Retirado de [27]                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 57 |
| 6.8 | <b>Derivações Pré cordiais.</b> Posição dos eletrodos para registrar derivações precordiais à esquerda e corte transversal do tórax, com os eixos das derivações precordiais. Retirada de [40].                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 59 |
| 6.9 | <b>Ondas discriminadas do sinal de ECG.</b> Observa-se os formatos normais das ondas P(onda relacionada a excitação dos átrios), do segmento QRS(relacionado a excitação dos ventrículos) e das ondas T e U que terminam o ciclo com a repolarização do maquinário elétrico do coração. Retirada de [40]                                                                                                                                                                                                              | 60 |
| 7.1 | <b>Fração de três segundos da série temporal do ECG.</b> É visto que para essa aquisição do ECG a onda de deflexão Q tem maior amplitude que a onda S, contrário à representação da figura 6.9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 61 |
| 7.2 | <b>Ruído aleatório no ECG.</b> Na figura (a) observa-se a função de correlação de um sinal puro de ECG, que decai de forma abrupta, uma indicação de ruído aleatório. A figura (b) representa o histograma de Wigner, que mostra em suas laterais autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12].                                                                                                                                                                                              | 62 |
| 7.3 | <b>Sinais de ECG normal (pós filtro).</b> Após a transformação do sinal pela transformada de Fourier, o sinal perde sua forma característica, mas carrega as mesmas características estatísticas. O espaço de frequências apresenta frequências características que tinham menor amplitude relacionados ao ruído aleatório, após um filtro passa banda, essas frequências foram retiradas e o sinal resultante foi analisado. Aqui estão representados os sinais de 17 pacientes, discriminados por cores diferentes. | 63 |
| 7.4 | <b>Funções de Correlação do ECG normal.</b> Observamos que para ambas as condições, existe um colapso dos primeiros segundos da função de correlação com um comprimento de correlação estatisticamente relacionado. Observamos um comprimento de correlação de aproximadamente 101 pontos. Cada paciente representado por uma cor.                                                                                                                                                                                    | 64 |
| 7.5 | <b>Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.</b> É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.                                                                                                                                                                                                                                     | 65 |
| 7.6 | <b>Sinais da Fibrilação Ventricular após filtro.</b> Após o filtro passa-banda de fourier (seção 2.2) observamos diferentes formatos entre as séries temporais dos 22 pacientes, representados por diferentes cores.                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 66 |
| 7.7 | <b>Funções de correlação para pacientes apresentando Fibrilação Ventricular.</b> Observamos que os primeiros segundos convergem para um comprimento de correlação de 38 pontos em todos os pacientes.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 67 |

- 7.8 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos para Fibrilação Atrial.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. 68
- 7.9 **Funções de Correlação do ECG normal.** Na figura(a) vemos que após um filtro passa banda, as frequências relacionadas a ruído aleatório foram retiradas e o sinal resultante foi analisado. Na figura(b) observamos um comprimento de correlação de aproximadamente 118 pontos em uma função de correlação que tem forma harmônica, que é esperado para o tipo de sistemas que estudamos. Os 22 pacientes estão discriminados por diferentes cores. 69
- 7.10 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. 70
- 7.11 **Sinais de ECG de Pacientes com Arritmia Supra-Ventricular (pós filtro).** Após a transformação do sinal pela transformada de Fourier, o sinal perde sua forma característica, ao retirar as frequências relacionadas ao ruído por um filtro passa banda o sinal resultante foi analisado. Observamos cada paciente representado por uma cor distinta. 71
- 7.12 **Funções de correlação para pacientes apresentando Arritmia Supra-Ventricular.** Observamos que os primeiros segundos de cada função, de cor diferente, converge para um comprimento de correlação de 29 pontos. 72
- 7.13 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. 73
- 7.14 **Histograma de Wigner para Pacientes com Infarto do Miocárdio.** A figura representa o histograma de Wigner, que mostra em suas laterais autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12]. 74
- 7.15 **Sinais de ECG de Pacientes que passaram por um Infarto do Miocárdio e Cateterismo (pós filtro).** Após um filtro passa banda, as frequências aleatórias foram retiradas e o sinal resultante foi analisado. Diferentes pacientes são representados por cores diferentes. 75
- 7.16 **Funções de correlação para Infarto do Miocárdio.** Observamos que os primeiros segundos de todas as funções de correlação convergem para um comprimento de correlação de 39 pontos. Cada cor representa um paciente. 76
- 7.17 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. 76
- 7.18 **Histograma de Wigner para a base de dados de Término da Fibrilação Atrial.** O histograma de Wigner mostra, em suas laterais, autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12]. 77
- 7.19 **Sinais da Fibrilação Atrial após filtro.** Após o filtro passa-banda de Fourier (seção 2.2) observamos diferentes formatos entre as séries temporais de diferentes pacientes, que estão representados por cores distintas em cada grupo. Os sinais tem formatos e amplitudes diferentes, mas apresentam funções de correlação que se superpõem nos primeiros segundos. 78

- 7.20 **Funções de correlação para pacientes com Fibrilação Atrial.** Observamos que os primeiros segundos de todos os grupos convergem para um comprimento de correlação de 7 pontos 79
- 7.21 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. ( $\times 10$ ). 80
- 7.22 **Ruído Aleatório e Sinais Filtrados.** A figura(a) representa o histograma de Wigner, que mostra, em suas laterais, autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12]. Na figura(b) aplica-se um filtro passa-banda de fourier (seção 2.2) e observamos diferentes formatos entre as séries temporais de diferentes pacientes, que estão discriminados por cor. 81
- 7.23 **Funções de correlação para pacientes que apresentavam *Cyclic Alternating Pattern*.** Observamos que os primeiros segundos convergem para um comprimento de correlação de 88 pontos 82
- 7.24 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.[errada] 83
- 7.25 **Ruído Aleatório e Sinais Filtrados.** A figura(a) representa o histograma de Wigner, mostrando, em suas laterais, autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12]. A figura(b) demonstra os sinais após o filtro passa-banda de Fourier, sinais utilizados para análise dos sistemas desta seção, onde cada paciente está representado por uma cor distinta. 84
- 7.26 **Funções de correlação para pacientes com Insuficiência Cardíaca.** Observamos para essa base de dados uma largura maior, os pacientes tem um comprimento de correlação próximo à 292 pontos, cada paciente está representado por uma cor distinta. 85
- 7.27 **Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. 86

## CAPÍTULO 1

# Introdução

Sistemas físicos podem ser descritos por um conjunto finito de equações diferenciais. Tais equações podem ser classificadas como: lineares, ou seja, suas equações não apresentam multiplicidade maior que um em suas variáveis, e não-lineares, equações diferenciais onde as variáveis têm potências diferentes de um ou estão multiplicadas entre si. As equações diferenciais também são classificadas em termos da ordem de suas derivadas, uma equação diferencial de primeira ordem tem derivadas de primeira ordem, e uma equação de segunda ordem apresenta derivadas de segunda ordem e assim sucessivamente. [1]

Sistemas de equações diferenciais não-lineares de ordem superior a três dissipativos, ou superior a quatro não dissipativos, exibem um comportamento chamado caótico. Seu movimento é a longo prazo imprevisível, mas possui vínculos que o distingue de movimentos aleatórios. Essa imprevisibilidade com estrutura interna é encontrada em alguns sistemas que não têm conjunto conhecido ou finito de equações diferenciais que os definem. [1]

O caos é um conceito atualmente utilizado em diversas áreas do conhecimento. De acordo com Steven Strogatz [2], o caos é caracterizado como um sistema de comportamento aperiódico, determinístico (sem ruído externo ou variáveis aleatórias) e, principalmente, sensibilidade às condições iniciais, as trajetórias são muito diferentes mesmo após uma fraca perturbação do estado inicial.

Em sua maioria equações não-lineares não permitem soluções analíticas, por não obedecerem o princípio de superposição, isto é, não é possível encontrar soluções independentes que formam uma base para todas as soluções do sistema. Na intenção de medir esse fenômeno diversos métodos foram criados entre eles: as seções de Poincaré, coeficiente de Lyapunov, que serão descritos mais a frente, e diagramas de bifurcação, onde se verifica o comportamento das soluções frente a um aumento de complexibilidade. [1]

A sensibilidade às condições iniciais é uma das características que garante a imprevisibilidade da evolução temporal de um sistema. Para sistemas reais não é possível obter adequadamente as todas condições iniciais. A seguir, observaremos que uma pequena perturbação pode modificar completamente o movimento. Uma forma conhecida de calcular a importância dessa sensibilidade é através do expoente máximo de Lyapunov.

## 1.1 Expoente de Lyapunov

Para um sistema dinâmico de tempo contínuo, é possível definir um conjunto de trajetórias de evolução temporal. Em um sistema que apresenta sensibilidade a condições iniciais, duas trajetórias provenientes de condições iniciais próximas, rapidamente se separam, tornando previsões a longo prazo impossíveis.

O vetor de separação entre duas trajetórias com duas condições iniciais diferentes pode ser chamado  $\vec{d}$ . Quando essas trajetórias se separam exponencialmente, o módulo do vetor  $\vec{d}$  em função do tempo terá a forma  $d(t) = d(t_0)e^{\chi t}$ , o expoente  $\chi$  é chamado expoente de Lyapunov. [2]

Com  $N$  como ordem do sistema, existem  $N$  trajetórias e com estas  $N$  expoentes diferentes. Assim é possível definir  $d_k(t) = d_k(t_0)e^{\chi_k t}$ , para cada deformação na dimensão  $k$ , que está definida no intervalo  $[1, N] \in \mathbb{N}$ . E chamaremos  $\chi$  o maior expoente de Lyapunov. Quando  $\chi$  é positivo, após uma média sobre vários pontos da trajetória, existe algum ponto no espaço-tempo onde não é mais possível prever a evolução do sistema. [2]

No caso de um tempo discreto, é possível definir a mesma quantidade considerando a distância entre os pontos da trajetória,  $d$ . Inicialmente para um ponto próximo à condição inicial  $x_0$ ,  $x_0 + d_0$ , existe  $d_0$ , uma separação pequena. Ao longo da trajetória para  $n$  pontos, caso a separação tenha dependência exponencial com o número de pontos,  $d_n = d_0 e^{n\chi}$ . Computacionalmente a separação pode ser escrita como  $d_n = f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)$ , onde  $f^n(x_0)$  é o ponto  $n$  da trajetória referente a condição inicial  $x_0$ . No limite  $d_0 \rightarrow 0$ , obtém-se: [2]

$$\begin{aligned}\chi &= \lim_{d_0 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d_n}{d_0} \right| \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \lim_{d_0 \rightarrow 0} \left( \frac{f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)}{d_0} \right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|.\end{aligned}$$

É possível expandir o argumento do logaritmo pela regra da cadeia:

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i).$$

Para definir o expoente de Lyapunov, toma-se o limite em que  $n \rightarrow \infty$  e o expoente dependente de  $x_0$  será:

$$\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}. \quad (1.1)$$

Caso o expoente de Lyapunov seja negativo, as trajetórias se aproximam, a distância entre

elas decresce para zero, isso ocorre quando o sistema possui pontos de equilíbrio ou trajetórias periódicas. Se o expoente é positivo, observa-se que com o tempo as trajetórias estão se separando exponencialmente, demonstrando sensibilidade a condições iniciais. [2]

O caos, como é explicitado no capítulo 3, foi derivado do estudo da dinâmica, que está intimamente ligada a equações diferenciais e tem seu início na mecânica clássica. Na mecânica clássica, o pêndulo duplo é um dos exemplos de caos mais simples, onde dois pêndulos estão conectados e têm seus movimentos vinculados. Sistema esse que já foi estudado de diversas formas, a seguir estão explicitados dois de seus estudos numéricos da literatura.

## 1.2 Caos na Dinâmica

Sistemas caóticos são em geral extremamente complexos, não têm forma fácil de classificar e caracterizar, e muitos não apresentam forma matemática definida. Sistemas como o pêndulo duplo ou o pêndulo simples forçado amortecido, são complexos o suficiente para apresentar caos, mas têm equações simples o suficiente para se observar o caos sem a necessidade dos métodos complexos citados no início deste capítulo. Para pequenas perturbações o pêndulo duplo é linear, mas a medida que a não linearidade do sistema aumenta suavemente o aspecto não-linear se dissipa e o movimento se mantém harmônico a longo prazo, ou seja, o sistema volta a um estado específico após um período fixo. Até que a complexidade do movimento atinge um estado de transição, onde não há dissipação do aspecto não-linear e não observa-se movimento harmônico a longo prazo. [1] [3]

As equações de movimento do pêndulo duplo resultantes das equações de movimento de Euler-Lagrange são altamente acopladas (serão derivadas na seção 4.1). Por esta razão, essas equações não têm solução analítica [4]:

$$\begin{aligned} l_1 [(m_1 + m_2)(l_1 \ddot{\varphi}_1 - g \sin \varphi_1) + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] &= 0 \\ m_2 l_2 [l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - g \sin \varphi_2] &= 0 \end{aligned}$$

Onde  $m$  é a massa,  $l$  o comprimento das hastes de massa desprezível e  $\varphi$  a coordenada generalizada relacionada ao ângulo que a haste faz com o eixo  $y$ .

É possível estudar o sistema nos seguintes limites [4]:

1. Para o caso em que  $l_1 = 0$ , o pêndulo duplo se transforma em pêndulo simples, com comprimento de sua haste  $l_2$  e massa  $m_2$ . Que pode ser resolvido completamente em função das funções elípticas. E ainda caso  $\varphi \gg \varphi^2/2$ , é possível escrever a função seno pela aproximação de primeira ordem da série de Taylor como  $\sin \varphi \approx \varphi$  e a equação de movimento se reduz a:

$$\ddot{\varphi}_2 - \frac{g}{l_2} \sin \varphi_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &\gg \varphi_2^2/2 \Rightarrow \sin \varphi_2 \approx \varphi_2 \\
\ddot{\varphi}_2 - \omega^2 \varphi_2 &= 0 \\
\text{com } \omega^2 &= \frac{g}{l_2} \\
\varphi_2 &= A \sin(\omega t - d).
\end{aligned}$$

2. Da mesma forma, para  $m_2 = 0$ , o sistema se transforma também em um pêndulo simples com comprimento da haste  $l_1$  e massa  $m_1$ .

As duas equações diferenciais de segundo grau podem se transformar em quatro equações lineares, quando linearizadas [5]:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \omega_1 \\
\dot{\varphi}_2 &= \omega_2 \\
\dot{\omega}_1 &= \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)[l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\omega_1^2 + \omega_2^2] - 2(1 + m_2) \sin \varphi_1 + 2 \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2)}{2l_1[1 + m_1 - \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)]} \\
\dot{\omega}_2 &= \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \frac{(1 + m_1)(\cos \varphi_1 + l_1 \omega_1^2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\omega_2^2}{1 + m_1 - \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}.
\end{aligned}$$

No artigo de referência [5], os autores optaram por deixar a equação sem dimensão considerando  $m_2 = 1$ ,  $l_2 = 1$  e  $g = 1$ , unitarizando as dimensões de massa, comprimento e tempo. É possível calcular a forma da energia como:

$$\begin{aligned}
E_{total} &= \frac{1}{2}(m_1 \omega_1^2 + m_2 \omega_2^2) - g[m_1 l_1 \cos \varphi_1 + m_2(l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2)] \\
&= \frac{1}{2}(m_1 \omega_1^2 + \omega_2^2) - m_1 l_1 \cos \varphi_1 - l_1 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1 \omega_1^2 + \omega_2^2) - \cos \varphi_2 - l_1 \cos \varphi_1 (1 + m_1).
\end{aligned}$$

Ainda com  $m_1 = 3$  e  $l_1 = 2$ , é possível definir quatro pontos críticos, ou seja, pontos estacionários ou fixos, que têm suas primeiras derivadas nulas. E suas energias [5]

$$(\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2) = \begin{cases} (0, 0, 0, 0), & E_{01} = -1 - l_1(1 + m_1) = -9 \\ (0, \pi, 0, 0), & E_{02} = 1 - l_1(1 + m_1) = -7 \\ (\pi, 0, 0, 0), & E_{03} = -1 + l_1(1 + m_1) = 7 \\ (\pi, \pi, 0, 0), & E_{04} = 1 + l_1(1 + m_1) = 9 \end{cases},$$

essas energias são necessárias para a construção das chamadas seções de Poincaré. As seções de Poincaré estão intimamente relacionadas ao espaço de fase, espaço formado pelas variáveis e momentos generalizados do sistema, um sistema de  $N$  graus de liberdade produz um espaço de fase de dimensão  $N$ . Para casos com mais de três graus de liberdade, a representação geométrica das orbitas formadas no espaço de fase não é possível, para solução desse problema definem-se

as seções de Poincaré. Essas seções reduzem a dimensão do espaço traçando-o quando algum(s) de seus parâmetro(s) é(são) mantido(s) constante(s). No pêndulo, a dimensão do espaço de fase é 4, então não é viável traçar o espaço de fase geometricamente. Solucionando esse problema são traçadas as seções de Poincaré (figuras 1.1(a), 1.1(b), 1.1(c)) [5]. No artigo citado, o ângulo  $\varphi_1$  é mantido constante e nulo. Para uma energia pequena, como é esperado, as seções de Poincaré têm comportamento regular e oscilatório. Ao aumentar a energia o comportamento fica mais complexo com deformação das trajetórias. E para uma energia suficiente, as trajetórias se transformam em uma região caótica, com diversos estados espalhados, que pode ser vista na figura 1.1(c).

Considerando que sistemas não-lineares, em geral, não possuem soluções analíticas, é necessário utilizar cálculo numérico para resolução do sistema. Em Stachowiak et al. [5], a análise numérica foi feita através do método de Bulirsch-Stoer e extrapolação de Richardson, com o intuito de obter as seções de Poicaré e os expoentes de Lyapunov. A extrapolação de Richardson sugere a utilização de diferentes intervalos entre os pontos,  $h$ , que não precisam ser próximos a zero, ao observar o comportamento do sistema para estes diferentes valores, encontra-se uma função analítica relacionada com o parâmetro  $h$ , utilizando essa função para encontrar o comportamento em que  $h = 0$ . O método de Bulirsch-Stoer utiliza essa extrapolação em funções racionais para reduzir as limitações da série de potências para energias e seu raio de convergência. Porém para problemas suaves, a extrapolação direta do polinômio é mais eficiente do que a extrapolação da função racional, por essa razão, funções polinômiais foram utilizadas para achar soluções para o pêndulo duplo. [6]

Para este sistema os maiores expoentes de Lyapunov foram calculados através da divergência entre duas trajetórias fechadas das seções de Poincaré, como:

$$\chi(t) = \frac{1}{tN} \sum_{i=1}^N \ln \frac{|d_i(t)|}{|d_i(0)|},$$

onde  $\chi(t)$  é uma função dos expoentes de Liapunov, os índices  $i$  estão relacionados a diferentes condições iniciais e a função  $d_i(t)$  é a função diferença entre as trajetórias. [5]

É possível observar na figura 1.1(d) que para as menores energias, os expoentes de Lyapunov tendem a zero, que é esperado por não terem comportamento caótico. No terceiro caso os expoentes estão sempre no primeiro quadrante, apesar de não existir um limite definido, ele é positivo caracterizando caos. Nessa breve análise numérica do sistema, é possível detectar um processo de alto custo computacional, há diversas etapas para chegar a um resultado que conclui o estado do comportamento, mas que não converge para uma quantidade definida.

Uma análise mais completa foi feita na referência [4], utilizando os métodos de cálculo numérico em resolução de EDOs de Runge-Kutta, Adams-Bashforth e Adams-Moulton de forma a classificá-los. Através da energia mecânica do sistema que deve se manter constante, a amplitude de suas oscilações indica a qualidade do método para resolução do sistema. Para este

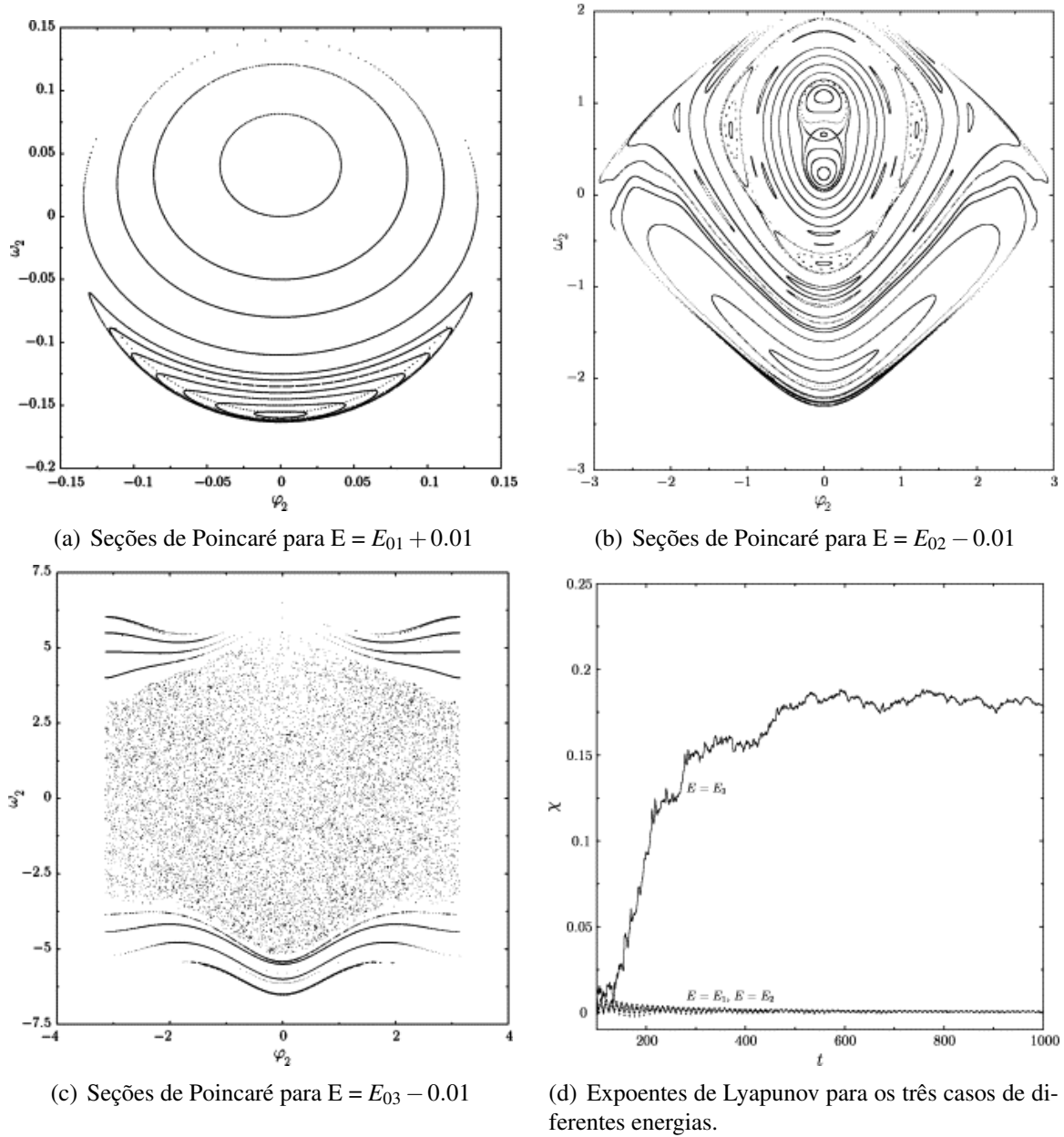


**Figura 1.1 Seções de Poincaré e uma função dos coeficientes de Lyapunov do Pêndulo Duplo.** Os três primeiros gráficos são as seções de Poicaré do Pêndulo Duplo fazendo o ângulo  $\varphi_1 = 0$ , observa-se que para  $E_{01}$  e  $E_{02}$  as seções tem orbitas bem definidas e para  $E_{03}$  existe uma região caótica. No último gráfico, temos os coeficientes de Lyapunov em função do tempo para as diferentes energias  $E_{01}, E_{02}$  e  $E_{03}$ . Para as energias  $E_{01}$  e  $E_{02}$ , os expoentes de Lyapunov tendem a zero e para a energia  $E_{03}$  expoentes são positivos caracterizando caos. Figuras retiradas de [5].

artigo foram usados  $m_1 = m_2 = 0.1\text{kg}$ ,  $l_1 = l_2 = 0.3\text{m}$  e  $g = 9.8\text{m/s}^2$ , as velocidades angulares inicialmente nulas e os ângulos iniciais simétricos inicialmente. Como é explicitados na seção 4.3, o método de integração Runge-Kutta de quarta ordem é derivado do método de Euler, tem erro local de  $(\delta t)^4$  e um erro global de  $(\delta t)^5$ , por isso é chamado método de quarta ordem.

Utilizando as equações de movimento acima, é possível resolver numericamente as funções dos ângulos e velocidades angulares e com esse resultado é possível observar a evolução da

energia mecânica. O erro cumulativo da energia para o tempo em diferentes condições iniciais, derivou-se por [4]

$$\xi(t) = \sum_{\mu=t_0}^t \frac{|E(\mu) - E(0)|}{|E_{ref}|},$$

esse erro cresce com o ângulo inicial, e decresce com o tamanho do passo, mas de acordo com os resultados obtidos nesse artigo, a partir de  $10^{-4}$  o erro começa a subir novamente, então baseado nesta análise o intervalo ideal entre os pontos é de  $10^4$ , para Runge-Kutta de quarta ordem. [4]

Utilizando o método de Adams-Bashforth também de quarta ordem, a equação diferencial é reescrita da forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{X} &= \vec{f}(t, \vec{X}) \\ \vec{X}(t_{n+1}) - \vec{X}(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{X}'(t) dt, \end{aligned}$$

onde  $\vec{X}$  é a solução da equação diferencial. Esse método aproxima  $\vec{X}'$  para um polinômio, usado para fazer a integração. Os termos descartados desse método são da ordem de  $(\delta t)^4$ , que é o erro local. Após efetuado o mesmo processo anterior, foi possível observar que esse método não é melhor que o Runge-Kutta de quarta ordem, mas que ele tem menor sensibilidade a mudanças nas condições iniciais e é mais rápido computacionalmente.

O último método testado pelo artigo foi o de Adams-Moulton de quarta ordem, que é uma modificação do método de Adams-Bashforth, mas tem melhor precisão que ele para o mesmo intervalo. A sua vantagem é que ele tem melhor performance computacional que Runge-Kutta de quarta ordem. Porém todos os métodos mencionados se mostraram equivalentes. Os melhores métodos de integração em termos de precisão são os chamados simpléticos, mas esses métodos têm a desvantagem de requererem grande custo computacional. [4]

Para caracterizar o caos em sistemas não-lineares é comum calcular os seus expoentes de Lyapunov. Em Calvão et al., primeiramente foi calculado o espaço de fase, que contém toda a informação do sistema, em termo de orbitas. Quando o sistema tem comportamento caótico essas órbitas se afastam exponencialmente,  $e^{\chi t}$ , onde  $\chi$  é chamado expoente de Lyapunov, existem tantos expoentes quanto equações lineares, e se algum deles é positivo, o sistema é dito caótico. Considerando que a separação entre as orbitas é  $\varepsilon_i(t)$  na dimensão  $i = 1, \dots, m$ , para  $m$  a dimensão do espaço de fase. O expoente de Lyapunov, já explanada na seção 1.1, é definido como [4]

$$\chi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \left( \lim_{\varepsilon(t_0) \rightarrow 0} \log_2 \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_i(t_0)} \right) \right].$$

Normalmente não é possível resolver equações não-lineares analiticamente. Uma estimativa inicial do expoente de Lyapunov é integrar numericamente duas trajetórias e calcular como estas

divergem. O expoente tende a crescer até uma estimativa com um erro considerável. A fim de evitar o problema, escolhe-se um intervalo  $\tau$ , e estima-se o expoente considerando a divergência média de várias orbitas. Assim se torna possível a utilização das equações linearizadas. [4]

Primeiro é necessário criar uma base ortonormal,  $\hat{\phi}_i$ , de condições iniciais para essas equações, ao integrar esta base é possível estimar a divergência das orbitas, pela mudança de tamanho dos vetores com  $h_i = \log_2(|\vec{\phi}'_i|)$  e itera-se  $\Sigma_i = \Sigma_i + h_i(t)$  para cada  $\tau$ , que são então renormalizados e o espectro de expoentes de Lyapunov será  $\chi_i = \Sigma_i / t$ . Apenas o maior expoente de Lyapunov é de interesse para a caracterização do caos, os outros pontos do espectro são interessantes para saber quando o expoente converge. [4]

O problema deste procedimento é a quantidade de iterações, numericamente é possível fazer o procedimento várias vezes, mas a grande quantidade de iterações torna o procedimento lento e custoso computacionalmente. A vantagem do método explicitado neste trabalho é a simplicidade e a facilidade de implementação, onde apenas é necessário contar a quantidade de picos da série temporal integrada numericamente.

Com o avanço experimental da física, alguns dos fenômenos não eram explicados pela mecânica clássica culminando com o advento da mecânica quântica. Em mecânica clássica, o caos é visual em termos das trajetórias divergentes. Em mecânica quântica, o conceito de trajetórias é inexistente, sendo substituído pela mecânica estatística. [7]

Em 2011, através do estudo de propriedades estatísticas do transporte eletrônico em pontos quânticos abertos, foi encontrada uma relação inversa entre o comprimento de correlação e a densidade de máximos. Que neste contexto, a função de correlação é ajustada pela lorentziana quadrada e tem um decaimento a meia altura que relaciona a densidade de máximos,  $\rho$ , com o comprimento de correlação,  $\tau$ , por  $\langle \rho \rangle = \sqrt{3}/(\pi\tau)$ . [8]

No artigo de referência [9], a relação inversa entre o comprimento de correlação e a densidade de máximo foi usada para um sistema complexo estocástico de biodiversidade.

### 1.3 Caos na Biodiversidade

A biologia populacional, iniciada em 1859 com o livro "*On the origin of species*" de Darwin, tem em sua estrutura processos não-lineares e estocásticos, onde o sistema apresenta variáveis aleatórias. A seleção natural traz em seus sistemas certa imprevisibilidade, apesar da existência de regras intrínsecas a sua evolução temporal, características que denotam a presença de caos. [9]

A competição de espécies por espaço é um problema dentro da biologia de grande interesse para simulações estocásticas. Pelo Modelo de May e Leonard que relaciona a competição das espécies com o jogo pedra-papel-tesoura, descrevendo competição predatória cíclica e priorizando mobilidade ao descrever as regras da simulação, é possível observar um comportamento caótico. [9]

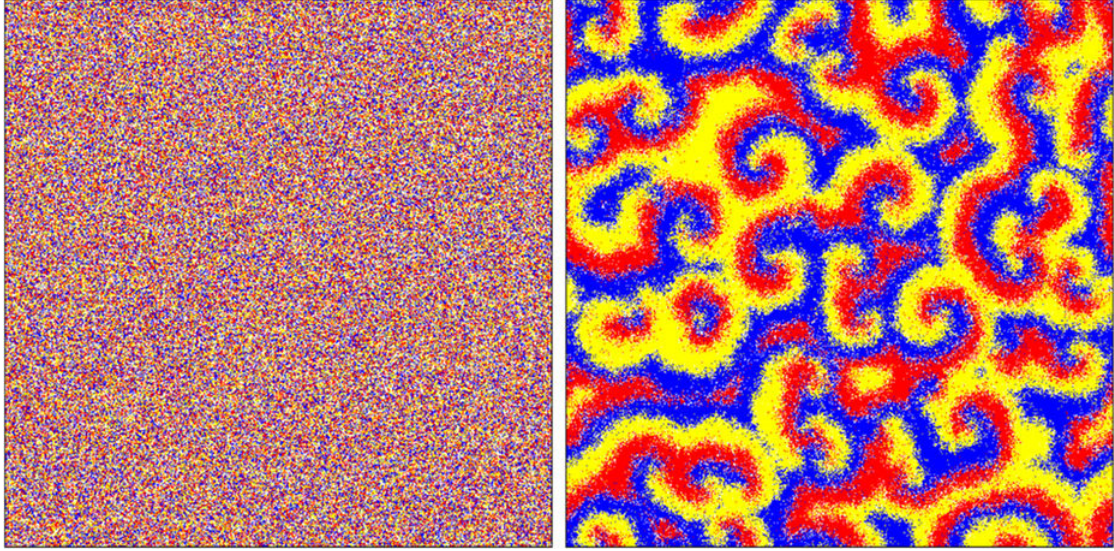


**Figura 1.2 Estado inicial e estado após 2000 gerações.** O sistema evolui com regiões espirais seguindo um padrão de equilíbrio, sem se estabelecer em regiões rígidas, as espécies se agrupam para proteção. Cada cor no gráfico é referente a uma das espécies simuladas, e o vazio é denotado pela cor branca. [9]

A simulação foi feita usando o modelo cíclico, de três espécies (a, b e c) e três tipos de movimento, mobilidade, predação e reprodução, pedra-papel-tesoura. Após distribuir as três espécies e espaços vazios igualmente, observa-se a evolução do sistema com as seguintes probabilidades  $m = 0.5$ , mobilidade,  $p = 0.25$ , predação e  $r = 0.25$ , reprodução. A mobilidade e reprodução só são possíveis quando o seu vizinho é um espaço vazio e a predação acontecia de forma cíclica, a se alimenta de b, b de c e c de a, formando um espaço no lugar do animal predado.

Antes de iniciar a simulação, espaços vazios e as três espécies são distribuídos aleatoriamente e em igual proporção em uma matriz  $N \times N$ . A simulação ocorre escolhendo um sítio aleatório e um dos sítios vizinhos para utilizar uma das regras. Após diversas iterações desse processo o estado final do sistema é comparado com seu estado inicial.(figura 1.2)

A diferença entre o estado inicial e final não classifica o sistema como estocástico, para esse efeito é necessário modificar o estado inicial e observar sua evolução. Para construir uma série temporal, observa-se a quantidade de indivíduos de cada espécie,  $L_i$ , em termos da densidade,  $\bar{l}_i = L_i/N^2$ , que sempre flutuará em torno do mesmo valor para as três espécies. Essa série temporal contém uma subestrutura aleatória devido á característica discreta da simulação, essa subestrutura não é relevante ao estudo de simulações estocásticas e é retirado através de um algoritmo para suavizar a curva. [9]

A curva de densidade produz máximos locais, onde  $\bar{l}_i(t) > 0$  e  $\bar{l}_i(t + \delta t) < 0$ , com  $\delta t$  suficientemente pequeno, de forma que  $-\bar{l}_i'(t)\delta t > \bar{l}_i(t) > 0$ . A probabilidade  $P(\bar{l}_i, \bar{l}_i')$  pode ser usada para calcular a densidade de máximos.

$$\langle \rho_i \rangle \equiv \frac{1}{\delta t} \int_{-\infty}^0 d\bar{l}_i' \int_0^{-\bar{l}_i'} d\bar{l}_i P(\bar{l}_i, \bar{l}_i') = - \int_{-\infty}^0 d\bar{l}_i' \bar{l}_i' P(0, \bar{l}_i')$$

Onde a probabilidade pode ser calculada em função dos momentos da função de correlação,  $C_i(\delta t)$ :

$$\begin{aligned}\langle \bar{l}_i^2 \rangle &= - \frac{d^2}{d(\delta t)^2} C_i(\delta t) \Big|_{\delta t=0} \\ \langle \bar{l}_i'^2 \rangle &= - \frac{d^4}{d(\delta t)^4} C_i(\delta t) \Big|_{\delta t=0} \\ P(0, \bar{l}_i'^2) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\langle \bar{l}_i^2 \rangle \langle \bar{l}_i'^2 \rangle}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\bar{l}_i'^2}{\langle \bar{l}_i'^2 \rangle} \right)\end{aligned}$$

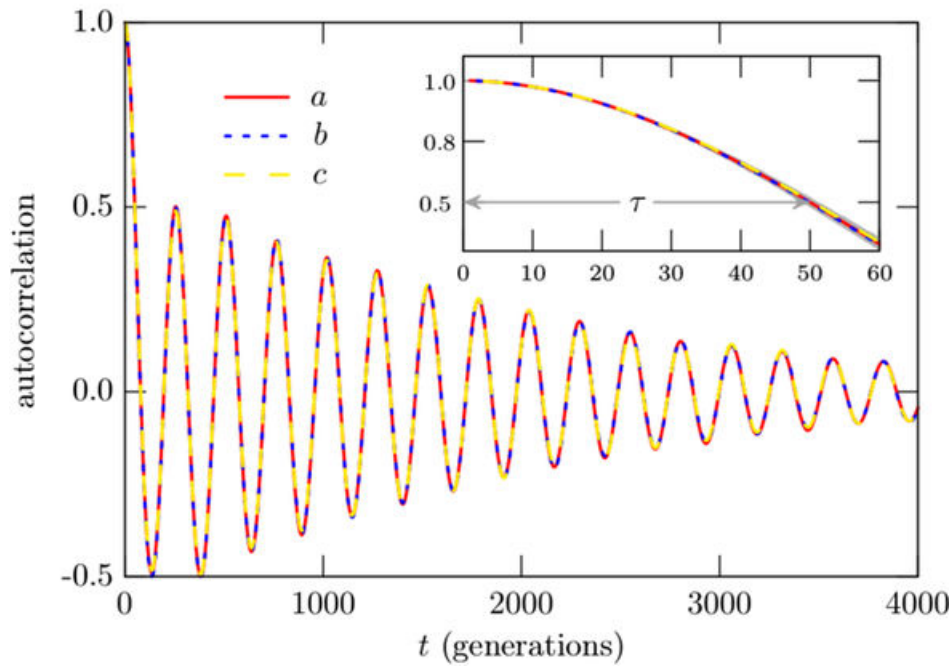


**Figura 1.3 Função de autocorrelação para evolução das espécies.** Essa função apresenta característica harmônica amortecida, esperada para sistemas homogêneos e periódicos caso do modelo pedra-papel-tesoura da biodiversidade, por ter condições de contorno cíclicas. Para este modelo observa-se uma amostra do todo, de forma a entender como funciona um vasto sistema complexo. Observa-se que para a evolução temporal da densidade de todas as espécies o comprimento de correlação é invariante. [9]

A função de correlação tem, para seus primeiros momentos, a forma da função cosseno. Então é possível ajustar a curva para  $C_i(\delta t) = \cos(\omega \delta t)$ . Assim define-se uma relação entre a densidade de máximos e o comprimento de correlação.

$$\tau = \frac{1}{6 \langle \rho \rangle}$$

A contagem de máximos está relacionado com a tendência do sistema de chegar a um estado de equilíbrio que não é alcançado. Para 5000 gerações do sinal suavizado pelo algoritmo de Bézier, os autores deste artigo obtiveram uma densidade de máximos de  $\langle \rho \rangle \approx 0.0034$  e, pela

figura 1.3, o comprimento de correlação, avaliado como o valor do argumento da função a meia altura é observado como  $\tau \approx 49$ , através da relação acima calcula-se  $\tau \approx 49.0196$ , que é coerente com a teoria.

De forma a confirmarmos a validade do nosso programa, adquirimos o sinal produzido por simulação estocástica no artigo de referência [9].

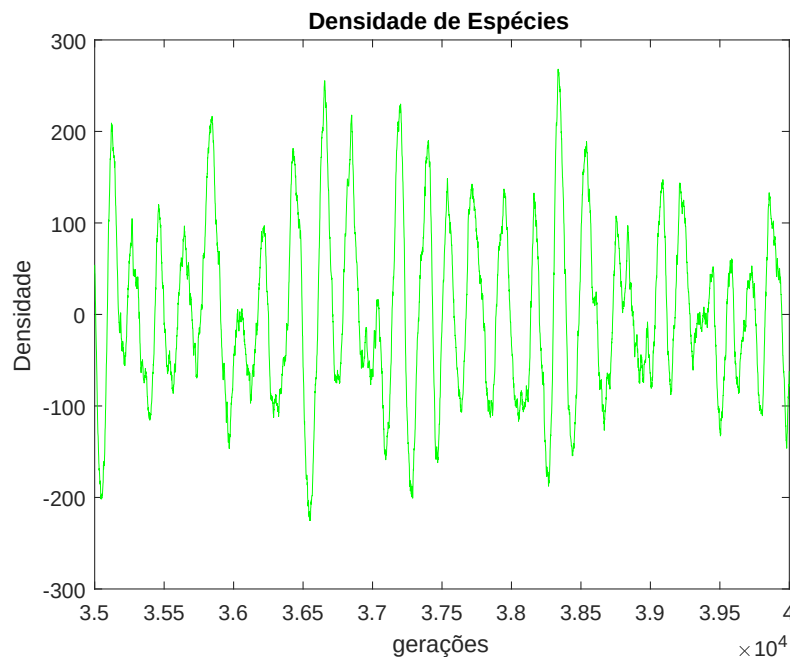


**Figura 1.4 Densidade de Espécies por geração.** Para calcular a função de correlação, utiliza-se uma série temporal que oscila em torno do zero. Para a evolução de espécies foi escolhida uma das espécies e observada a relação de sua densidade com o tempo, que está representada neste gráfico.

Desse sinal é possível extrair a função de correlação. De acordo com a discussão na seção 2.4, a função de correlação tem a forma harmônica amortecida. No artigo, a densidade de espécies foi suavizada pela curva de Bézier, o sinal usado para obter essa curva não foi suavizado por filtros. Por essa razão, da mesma forma que com o pêndulo aparecem falsos máximos que não são reconhecidos pelo programa, para resolver esse problema usamos a distância mínima entre os máximos de 100 gerações. Obtemos um comprimento de correlação de  $\tau = 32$  e uma densidade de máximos de 0.0053 por pontos. Utilizando a equação 2.15, obtém-se  $\tau \approx 31.4465$ , que é consistente com o proposto.

O sucesso de aplicação dessa relação para o modelo de biodiversidade, sugere que é possível usar essa relação para diferentes sistemas. A necessidade de aperfeiçoamento de métodos diagnósticos desperta o interesse de estudar séries temporais relacionadas a exames comuns. Um exame simples e de baixo custo, que tem como saída uma série temporal do potencial elétrico do coração, é o Eletrocardiograma.

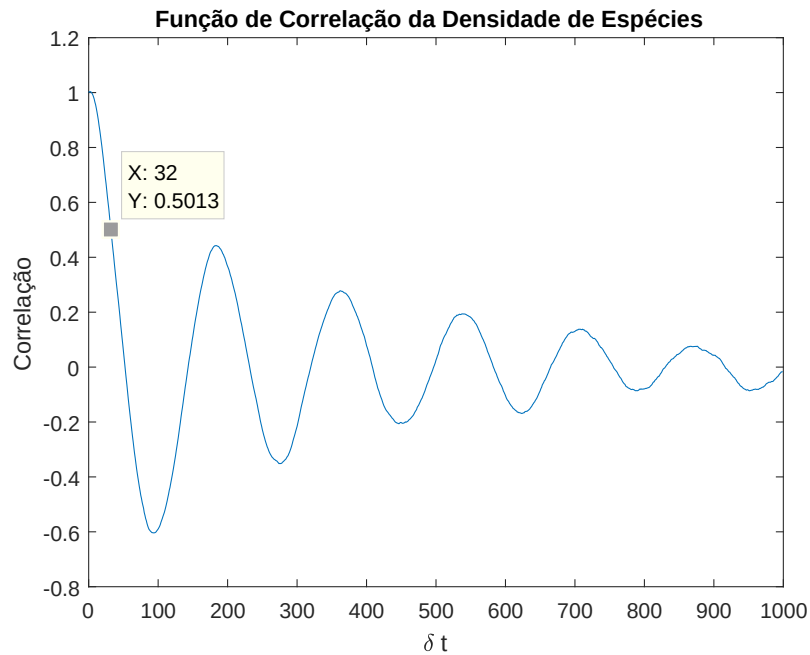


**Figura 1.5 Função de Correlação recuperada.** O sinal analisado não havia passado por nenhum filtro, por essa razão os comprimentos de correlação são um pouco diferentes, mas o formato da função também é harmônico amortecido. Neste caso, usamos apenas uma espécie.

## 1.4 Análise do Eletrocardiograma

O exame Eletrocardiograma (ECG) mede as alterações de corrente das fibras miocárdicas, através de eletrodos sensíveis a correntes alternadas que podem ser medidas pela superfície da pele. A análise desse exame é feita tradicionalmente pelo médico.

A curva obtida no eletrocardiograma é impressa em um papel milimetrado termosensível por uma agulha de ponta aquecida. Cada onda de amplitude  $10mm$  corresponde a medição de um potencial de  $1mV$ . A velocidade de aquisição é dependente do maquinário, mas os números dados nesta seção, estão relacionados com uma velocidade de aquisição de  $25mm/s$ , então os pontos estão distribuídos com distância de 0.04 segundos. [10]

Para um sinal normal, é representado na série temporal uma sequência fixa, uma onda P(relacionada a despolarização do nódulo sinusal, grupo de células eletricamente ativas) é seguida de um segmento PR(segmento relacionado a excitação das fibras atriais pelo sistema His-Purkinje em direção aos ventrículos), um complexo QRS(Conjunto de ondas relacionadas a ativação ventricular), um segmento ST(segmento entre o final da despolarização ventricular e o começo da sua repolarização) e uma onda T(repolarização dos ventrículos). A forma dessas ondas varia dependendo da posição do eletrodo, do estado de integridade do coração, ainda variando com o sexo, idade e frequência cardíaca. Nas tabelas 1.1 e 1.2 são explicitados os intervalos para diferentes idades, sexos e frequências cardíacas.

A análise do ECG é feita pela identificação de alterações no ritmo cardíaco, ativação das

| Idade(anos)      | Frequência cardíaca(batimentos/min) |       |        |         |      |
|------------------|-------------------------------------|-------|--------|---------|------|
|                  | <70                                 | 71-90 | 91-110 | 111-130 | >130 |
| 0-1,5            | 160                                 | 150   | 150    | 140     | 130  |
| 1,5-6            | 170                                 | 170   | 160    | 150     | 140  |
| 7-13             | 180                                 | 170   | 160    | 150     | 140  |
| 14-17            | 190                                 | 180   | 170    | 160     | 150  |
| Adultos pequenos | 200                                 | 190   | 180    | 170     | 160  |
| Adultos grandes  | 210                                 | 200   | 190    | 180     | 170  |

**Tabela 1.1 Valores normais do intervalo PR.** Os valores estão dados em ms, em função da idade e da frequência cardíaca. [10]

| Frequência<br>(bpm) | Limite Mínimo<br>(ms) | Valor médio<br>(ms) |        | Limite máximo<br>(ms) |        |
|---------------------|-----------------------|---------------------|--------|-----------------------|--------|
|                     |                       | Homem               | Mulher | Homem                 | Mulher |
| 40                  | 420                   | 450                 | 460    | 490                   | 500    |
| 50                  | 360                   | 410                 | 430    | 450                   | 460    |
| 60                  | 330                   | 390                 | 400    | 430                   | 430    |
| 71                  | 310                   | 360                 | 370    | 380                   | 410    |
| 80                  | 290                   | 340                 | 350    | 370                   | 380    |
| 93                  | 280                   | 320                 | 330    | 350                   | 360    |
| 100                 | 270                   | 310                 | 320    | 340                   | 350    |
| 109                 | 260                   | 300                 | 310    | 330                   | 330    |
| 120                 | 250                   | 280                 | 460    | 310                   | 320    |
| 133                 | 240                   | 270                 | 280    | 290                   | 300    |
| 150                 | 230                   | 250                 | 260    | 280                   | 280    |
| 172                 | 220                   | 230                 | 240    | 260                   | 260    |

**Tabela 1.2 Valores normais do intervalo PR em função da sexo e da frequência cardíaca.** Ambas tabelas demonstram que as variações não são grandes, porém é relevante observar que existem diversas variáveis na análise do ECG. [10]

câmaras cardíacas, condição do impulso, irrigação sanguínea e volume e massa muscular das câmaras.

Ao observar a morfologia das ondas, é necessário procurar características específicas, a exemplo as ondas P e T terão uma forma achatada e são mais largas que o complexo QRS que deverá ter uma amplitude, em geral, maior e largura menor. A frequência dos átrios e ventrículos ao olhar para o traçado do exame é dada pela distância entre dois picos R, para uma frequência fidedigna é necessário calcular uma média ao longo da série temporal. [10]

Quanto a ritmo, o ritmo normal é denominado sinusal por serem controlados especialmente pelo nódulo sinusal, por esse motivo os traços mais importantes para o ritmo são a onda P e o segmento PR. [10]

Por existirem diversos parâmetros, existe uma grande chance de erro humano na análise deles. Despertando o interesse na análise da série temporal, no artigo de referência [11] o sinal

do eletrocardiograma é analisado como uma série temporal não-linear.

No artigo de Perc [11], a porção de eletrocardiograma de uma Polissonografia, exame que incorpora eletroencefalograma, eletrocardiograma, taxa de respiração e observação do sono do paciente, é estudada. O paciente estudado não apresentou durante o exame nenhum sinal patológico.

É possível inferir que o eletrocardiograma utilizado nesse estudo é bastante poluído por ruído, especialmente entre seus picos. A fidelidade da análise de um sinal ruidoso é dubiosa. A primeira etapa do estudo foi reduzir esse ruído através do método de transformação do sinal,  $\vec{p}(i) = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau})$ , onde são escolhidos do vetor pontos analisados em relação da consistência em relação a três parâmetros  $\tau$ , intervalo entre os pontos, sobre um ponto  $m$  e a diferença de amplitude  $\varepsilon$ . Obtendo um sinal mais "limpo", mas observando o tamanho dos parâmetros, pois caso  $\tau$  seja maior que o valor de otimização pode causar redução da correlação, transformando o sinal em uma série aleatória. [11]

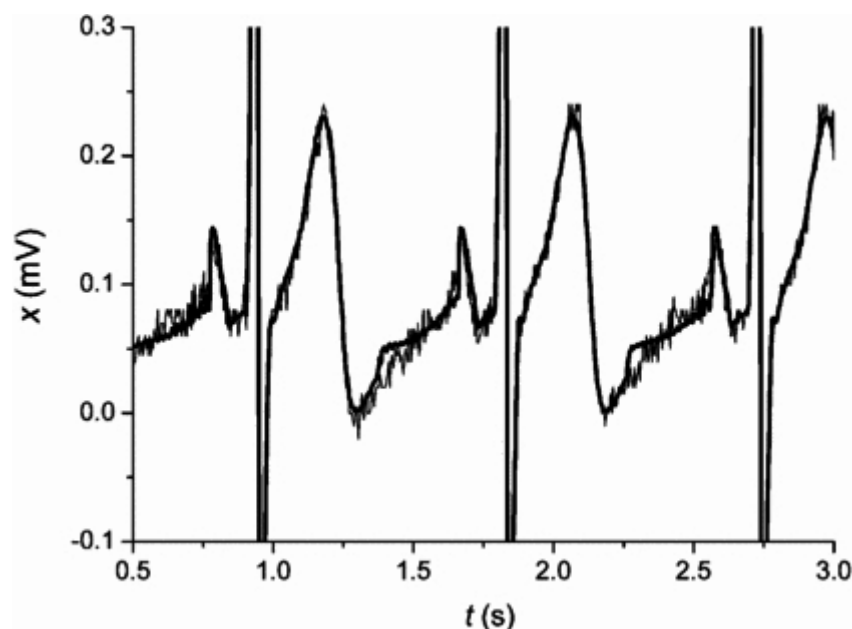


**Figura 1.6 Sinal do ECG pré e pós filtro.** O Sinal com ruído reduzido tem mesmo formato do sinal puro, porém as oscilações encontradas ao longo da série temporal desaparece. Esse gráfico foi retirado de [11].

Para traçar o espaço de fase, Perc usa o método de falsos vizinhos, que é baseado na hipótese de que o espaço de fase é determinístico. Para o método é considerado que pontos próximos devem obedecer uma regra intrínseca do sistema, os que não obedecem são chamados falsos vizinhos. O espaço de fase é aleatório se o parâmetro de dimensão do vetor é pequeno, quando  $m$  é escolhido corretamente a fração de falsos vizinhos limita zero. O espaço de fase para o sinal puro e para o sinal filtrado tem a mesma forma, como mostrado em 1.7. Perceberam que havia uma estrutura semelhante a um atrator estranho em seu espaço de fase, que indica a presença de caos.

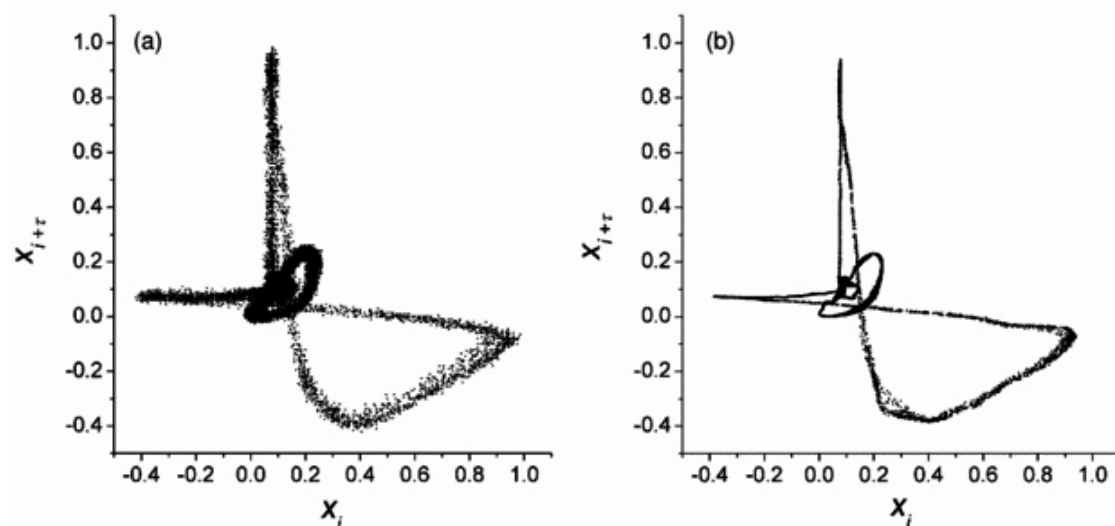


**Figura 1.7 Espaços de fase para o ECG.** Para o sinal puro à esquerda, e para o sinal filtrado à direita. Ambos espaços de fase aparentam ter um atrator estranho, que mantém sua forma mesmo após o filtro. [11]

## 1.5 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é analisar a relação entre a densidade de máximos e o comprimento de correlação para o pêndulo duplo e eletrocardiograma, de forma a contribuir com o método diagnóstico, adicionando um parâmetro a ser medido quando estudado o exame do eletrocardiograma.

Especificamente para o pêndulo duplo: integrar numericamente as equações de movimento do pêndulo duplo, para construir uma série temporal das distâncias entre as trajetórias; encontrar o histograma de autovalores, para observar se há ruídos externos aleatórios; calcular a função de correlação, para caracterizar o caos do pêndulo duplo pelo seu comprimento de correlação relacionando-o à densidade de máximos,  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$ , e validar essa relação.

Para o eletrocardiograma: encontrar o histograma de autovalores, para observar a existência de ruídos externos aleatórios; Utilizar um filtro, para retirada dos ruídos externos aleatórios; calcular a função de correlação, para caracterizar o caos do eletrocardiograma pelo seu comprimento de correlação relacionando-o à densidade de máximos; e usar esse valor de caracterização para diferenciar cardiopatologias no eletrocardiograma.

## 1.6 Estrutura do Trabalho

**O capítulo 2** explicitará os métodos utilizados para os diferentes sistemas estudados.

**A primeira parte** está relacionada com a mecânica clássica.

O capítulo 3 é uma breve introdução a dinâmica e o caos, começando com a história, explicitando o método de linearização das equações de movimento e uma forma de classificação do caos através da ordem do sistema.

O capítulo 4 será dedicado ao pêndulo duplo, suas equações e como o nosso método aplica-se a ele.

**A segunda parte** é referente a sinais biológicos.

O capítulo 5 introduz conceitos de bioeletricidade, desde a disputa entre Galvani e Volta até o modelo de Hodgkin-Huxley, onde aplicamos a nossa metodologia após a solução numérica deste.

O capítulo 6 introduz os conceitos e mecanismos do exame Eletrocardiograma, ECG.

O capítulo 7 apresenta os comprimentos de correlação encontrados para diferentes doenças.

**Em Conclusões e Perspectivas** conectamos os resultados obtidos e propomos uma ampliação do estudo realizado nesta dissertação.

# Métodos

## 2.1 Histograma de autovalores

Para fazer comparação com o método explicitado em Bin et al. [12], que utiliza teoria das Matrizes aleatórias, ou seja, autovalores e autovetores de matrizes de alta dimensão estuda-se a distribuição espectral dos sinais. Primeiro é normalizado o sinal por:

$$S_n = \frac{S - \langle S \rangle}{S_{max}}. \quad (2.1)$$

O artigo compara a lei de Marchenko-pastur e a lei do semicírculo de Wigner, que são dois teoremas famosos que descrevem a distribuição limite de matrizes de Wishart e das matrizes gaussianas de Wigner, respectivamente.

A lei Marchenko-pastur está relacionada ao comportamento assintótico dos autovalores. Transforma-se uma matriz aleatória,  $X_{m \times n}$ , em uma matriz de Wishart quadrada e normalizada por forma  $W = (1/m)X^T X$ . A densidade espectral estatística é representada por uma função dos autovalores,  $\lambda$ :

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q\sqrt{(\lambda-\lambda_{min})(\lambda_{max}-\lambda)}}{2\pi\lambda} & \lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{m}{n} \\ \lambda_{min} &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{Q}}\right)^2 \\ \lambda_{max} &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Q}}\right)^2. \end{aligned}$$

O semicírculo de Wigner representa o espectro de autovalores de uma matriz aleatória. Para uma matriz quadrada,  $Y_{m \times m}$ , com distribuição gaussiana, a matriz de Wigner é da forma  $W' = (Y + Y^T)/\sqrt{2}$ , para  $m \rightarrow \infty$  a distribuição de probabilidades segue a função:

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} & -2 \leq \lambda \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3)$$

Neste trabalho, transformamos o sinal em uma matriz gaussiana de Wigner e analisamos o que foi encontrado. Para encontrar a matriz gaussiana de Wigner, fizemos o seguinte processo, primeiro transformamos o sinal em uma matriz quadrada. Dividimos o sinal que tem forma vetorial em uma matriz com a seguinte configuração, para  $i = 1, 2, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} V_i &= (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im}) \\ A_{m \times m} &= (V_1^T, V_2^T, \dots, V_m^T) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Depois utilizamos a equação dada por eles para construir uma matriz de correlação como a matriz gaussiana de Wigner:

$$C = \frac{A + A^T}{\sqrt{2m}} \quad (2.5)$$

Verificaremos a seguir que a distribuição dos autovalores dessa matriz que é chamada matriz de correlação. Quando apresenta um pico central, mostra que há uma correlação, ou uma estrutura interna que se destaca do ruído aleatório. [12]

## 2.2 Transformada de Fourier

Problemas envolvendo oscilações ou vibrações são descritos por funções harmônicas. A série de Fourier é uma expansão de uma função, em geral harmônica, em termos de senos e cossenos.

A série de Fourier é comumente usada para descrever funções periódicas, mas é possível transformar qualquer função se a soma em frequências discretas for substituída por um espectro de frequências contínuas.

A transformada de Fourier contínua é baseada na função núcleo  $e^{i\alpha t}$ , onde, para facilitar os cálculos, é preferível usar números complexos a ter que aplicar duas transformações. A transformada,  $g(\alpha)$  e sua inversa, onde se recupera a função original,  $f(x)$ , são da forma:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \end{aligned}$$

A transformada de Fourier contínua recebeu uma versão discreta, versão essa de maior acessibilidade para dados recolhidos digitalmente, que são aferidos de forma discreta. É possível

demonstrar que qualquer conjunto de valores discretamente distribuídos podem ser descritos pela soma de um conjunto finito de componentes de ondas senoidais. A transformada de Fourier projeta as amplitudes dessas componentes, descrevendo um espaço de frequências. Essa transformada discreta e sua inversa têm a forma:

$$\begin{aligned} F(\omega_p) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{i\omega_p t_k} \\ f(t_k) &= \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p) e^{-i\omega_p t_k} \end{aligned}$$

Onde  $\omega_p$  e  $t_k$  são a frequência e o tempo discretos,  $2N$  é o tamanho da amostra e  $p$  e  $k$  pertencem aos números naturais. [13]

A função Fast Fourier Transform, FFT, foi desenvolvida por Cooley e Tukey em 1965 [14]. Este algoritmo fatora e rearranja os termos das somas da transformada de Fourier discreta utilizando a simetria entre as funções seno e cosseno para fazer a transformação, reduzindo a quantidade de operações numéricas necessárias. Por exemplo, quando o número de medidas é  $N$ , o cálculo direto da transformada discreta de Fourier precisa de aproximadamente  $N^2$  multiplicações. O caso de um  $N$  que pode ser escrito como uma potência de 2,  $N = 2^n$ , com  $n$  natural, a FFT realiza apenas  $N/2 \log_2(N)$  multiplicações. Da mesma forma, a inversa retorna o sinal a sua forma original. [15] [16]

Percebemos que os sinais de eletrocardiograma carregam um ruído aleatório. Portanto, foi necessário projetar o sinal no espaço de frequência de forma a avaliar a contribuição de cada frequência para o sinal total. Após normalizar o sinal com a equação 2.1, calculamos a frequência central e a largura de frequências desejadas, através das equações:

$$\begin{aligned} L &= f_f - f_i \\ f_c &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Onde  $L$  é a largura da banda que é de interesse ao nosso estudo,  $f_c$  é a frequência central da banda e  $f_i$  e  $f_f$  são as frequências que delimitam a banda.

A transformada FFT do sinal foi aplicada para encontrar as maiores amplitudes de frequência e retirar aquelas que não eram relevantes para o estudo da doença. Utilizamos uma função já existente na biblioteca do matlab, a função `ifilter.m` [16]. A função usa um filtro Fourier discreto, passa-banda, banda-baixa ou banda-alta, e permite que façamos modificações na frequência central e na largura da banda após o programa ser executado. A função primeiro faz a transformada de Fourier e atenua ou amplifica frequências selecionadas e então usa a transformada inversa para retornar o sinal filtrado desejado. Apesar de encontrarmos um padrão de frequências em geral relacionado ao maquinário, é ainda necessário encontrar uma forma de automatizar a seleção da frequência central, que transladava sutilmente para cada sinal. [17] [18]

## 2.3 Função de Correlação

O comportamento de um sistema em equilíbrio sob pequenas perturbações pode ser quantificado usando mecânica estatística.

Um sistema caótico é extremamente sensível a pequenas perturbações. Inclusive quando a sua trajetória pode ser completamente determinada por equações diferenciais, seu comportamento é errático. Com a finalidade de quantificar a evolução do sistema, procura-se uma medida de tamanho típico como função do tempo, medida que também pode variar com o espaço.

A função de correlação é uma quantidade deste tipo, medindo a coerência do problema em relação ao tempo e espaço, ou seja, quantos pontos em comum existem entre os estados de um mesmo sistema, ou de sistemas distintos, em estados distintos. Para este trabalho, o interesse é na translação temporal.

Da matemática, a sobreposição de funções contínuas é dada pela integral do produto das duas funções:

$$f_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt,$$

onde  $f_c(\tau)$ , que é parametrizada pela translação feita na segunda função, é a função de correlação entre uma função  $f_1(t)$  conjugada para excluir eventuais oscilações do tempo e uma função transladada  $f_2(t + \tau)$ .

Em sistemas com apenas um pulso das funções, o maior valor da função de correlação será para  $\tau$  nulo. Mas em um pulso harmônico, como seno e cosseno, a função de correlação será periódica, a sobreposição oscilará entre destrutiva e construtiva, situação explorada na seção 2.4.

Podemos também calcular a função de autocorrelação, como a função se relaciona consigo após uma translação, utilizando o mesmo método, e normalizando-o:

$$f_a = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) f(t + \tau) dt. \quad (2.6)$$

Essa função terá como valor máximo um e espera-se que, com o tempo, ela decaia. A velocidade desse decaimento é de nosso interesse, mede por quanto tempo ainda há uma relação entre os pontos do sinal. Uma forma de calcular essa medida é através da largura a meia altura, que é chamado de comprimento de correlação.

Para sistemas discretos, podemos usar a mesma lógica, modificando a integral, por médias em várias simulações da forma:

$$C(r, \tau) = \langle S(x, t) S(x + r, t + \tau) \rangle, \quad (2.7)$$

onde  $C(r, \tau)$  é a função de correlação e está definida como função das translações feitas. Para

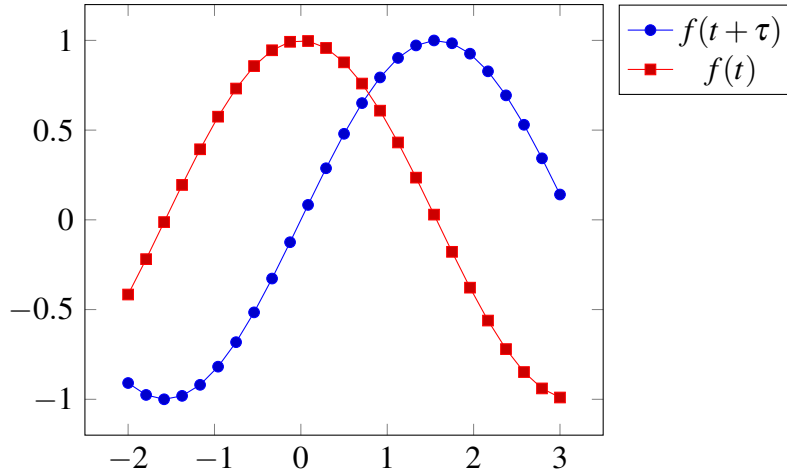


**Figura 2.1 Representação gráfica da sobreposição de funções.** Entre  $t = -1$  e  $t = 3$  existe sobreposição das funções  $f(t)$  e  $f(t + \tau)$ , para medi-la calcula-se a área entre elas através da integral.

o nosso trabalho  $r = 0$ , apenas existe translação temporal, e  $S(x, t)$  é o conjunto de pontos a ser examinado. [19]

A fim de calcular a função de correlação, é necessário ter diversas realizações de um mesmo experimento de forma a fazermos a média do produto de dois pontos. No nosso problema, em especial para a análise dos ECG, não era possível fazer o mesmo exame no mesmo paciente diversas vezes para calcular a média, pois utilizamos bases de dados proporcionadas por hospitais. Então, para solucionar esse problema, o sinal que tem forma vetorial é dividido como explicitado na equação 2.4. E então tratamos cada linha da matriz como uma realização e podemos calcular a função de correlação como:

$$C_i = \langle A_{i,1} * A_{i,j} \rangle. \quad (2.8)$$

## 2.4 Comprimento de Correlação e Densidade de Máximos

Na intenção de encontrar a taxa de decaimento da função de correlação, definimos o comprimento de correlação como a largura desta a meia altura. No caso de translações temporais, o comprimento de correlação é o tempo em que a correlação decai para 0.5, considerando que a função é normalizada.

Quando o sinal oscila de alguma forma é possível encontrar diversos máximos locais em um intervalo  $[t, t + \delta t]$ , com  $\delta t \rightarrow 0$ , aproximando o ponto de máximo pelo lado esquerdo esperamos que a sua derivada seja positiva,  $S'_i > 0$ , pela direita a derivada deverá ser negativa,  $S'_i < 0$  e finalmente queremos que sua segunda derivada seja negativa para termos a concavidade correta, e  $-S''(t)\delta t > S'_i(t) > 0$ , podemos utilizar a probabilidade  $P(S'_i, S'')$  para calcular sua densidade de máximos. Onde essa densidade é proporcional a integral da probabilidade em todo o espaço. [9]

$$\langle \rho_i \rangle \equiv \frac{1}{\delta t} \int_{-\infty}^0 dS_i'' \int_0^{-S_i''} dS_i' P(S_i', S_i'') = - \int_{-\infty}^0 dS_i'' S_i'' P(0, S_i''). \quad (2.9)$$

Pelo princípio da máxima entropia, que dita que a entropia de um sistema com energia interna constante fora do equilíbrio evolui de forma a maximizar sua entropia [20], é possível construir uma distribuição de probabilidade para  $S_i$  e suas derivadas [9]:

$$P(0, S_i'') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\langle S_i'^2 \rangle \langle S_i''^2 \rangle}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{S_i''^2}{\langle S_i''^2 \rangle} \right). \quad (2.10)$$

Da equação 2.7 é possível obter os várias ordens de momentos, em especial [9]:

$$\begin{aligned} \langle S_i'^2 \rangle &= -\frac{d^2}{d(\delta t)^2} C_i(\delta t) \Big|_{\delta t=0} \\ \langle S_i''^2 \rangle &= \frac{d^4}{d(\delta t)^4} C_i(\delta t) \Big|_{\delta t=0}. \end{aligned}$$

Integrando a equação 2.9 usando 2.10, e ao final substituindo as equações acima:

$$\begin{aligned} \langle \rho_i \rangle &= - \int_{-\infty}^0 dS_i'' S_i'' \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\langle S_i'^2 \rangle \langle S_i''^2 \rangle}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{S_i''^2}{\langle S_i''^2 \rangle} \right) \\ x &= S_i''^2 \Rightarrow dx = 2S_i'' dS_i'' \\ \langle \rho_i \rangle &= - \int_{\infty}^0 dx \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\langle S_i'^2 \rangle \langle S_i''^2 \rangle}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{x}{\langle S_i''^2 \rangle} \right) \\ \langle \rho \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\langle S_i''^2 \rangle}{\langle S_i'^2 \rangle}} \Big|_{\delta t=0} \\ \langle \rho \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C^{(4)}(\delta t)}{-C''(\delta t)}} \Big|_{\delta t=0}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para sistemas homogêneos que apresentam certa ciclicidade, espera-se que a função de correlação tenha um comportamento oscilatório e por isso é possível ajustá-la com uma função cosseno, neste caso:

$$C(\delta t) = A \cos(\omega \delta t) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} C'(\delta t) &= -A\omega \sin(\omega \delta t) = -\omega C(\delta t) \\ C''(\delta t) &= -A\omega^2 \cos(\omega \delta t) = -\omega^2 C(\delta t) \\ C^{(3)}(\delta t) &= A\omega^3 \sin(\omega \delta t) = \omega^3 C(\delta t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$C^{(4)}(\delta t) = A\omega^4 \cos(\omega\delta t) = \omega^4 C(\delta t), \quad (2.14)$$

e da equação 2.11:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega^4 C(\delta t)}{\omega^2 C(\delta t)}} \Big|_{\delta t=0} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.15)$$

O comprimento de correlação é definido como o valor da função a meia altura. Quando normalizada a função de correlação tem seu valor inicial em um, e considerando um decaimento do tipo cosseno, a função atingirá o valor 0.5 quando  $\omega\tau = \pi/3$ , onde  $\tau$  é o valor da variável na largura da função a meia altura. Então:

$$\begin{aligned} \omega\tau &= \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3\tau} \\ \langle \rho \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{6\pi\tau} = \frac{1}{6\tau} \end{aligned} \quad (2.16)$$

PARTE I

# **Caos e a Mecânica Clássica**

## Uma Breve Introdução a Dinâmica e Caos

O Caos é observado em sistemas com comportamento a longo prazo aperiódico, mas que ainda é determinístico e se prova ser muito sensível às condições iniciais, como foi descrito no livro de Steven H. Strogatz de referência [2]. O termo aperiódico está associado a um sistema que não tem posição privilegiada no plano de fase, o termo determinístico envolve a inexistência de ruído externo ou parâmetros aleatórios e, finalmente, a sensibilidade às condições iniciais determina que o desenvolvimento do sistema modifica-se drasticamente quando tais condições são variadas. Assim, ao observar um sistema evoluir, podemos mapear todos os pontos, em outra realização com uma pequena mudança nas condições iniciais o sistema segue uma trajetória significativamente diferente.

O livro considera o berço da disciplina dinâmica em 1660 com Newton. Ao formular suas leis de gravitação, e com seus avanços no cálculo diferencial e integral, foi possível resolver o problema da órbita de dois corpos, como o Sol e a Terra, explicando as Leis de Kepler. Por essa descoberta, a comunidade científica da época começou a procurar uma solução analítica para o problema de três corpos, mas encontraram impasses, e por muitos anos tentou-se resolver o problema de  $N$  corpos, como um modelo mais realístico do sistema solar e do universo.

Porém no século XIX, com o trabalho do matemático francês Poincaré foram obtidas provas de que era impossível resolver o problema de mais de dois corpos analiticamente, entretanto ele propôs uma nova forma de explorar problemas que não apresentam soluções analíticas, mas onde é possível descrever em termos de um sistema de equações diferenciais finito. Poincaré desenvolveu o que hoje chamamos de espaço de fase, representação geométrica das equações diferenciais. Pelo método não é mais necessário calcular as soluções das equações para entender o desenvolvimento do sistema, essa nova abordagem geométrica se concentra no aspecto qualitativo do problema ao invés de suas características quantitativas, se desenvolvendo no tema dinâmica.

Na primeira metade do século XX, os temas de Mecânica Quântica e Relatividade Geral se tornaram o foco da comunidade científica e o tema da dinâmica ficou concentrado em osciladores não-lineares e suas aplicações, como em radares e lasers. Esse estudo ajudou o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas derivadas por Van der Pol, com um modelo matemático para um oscilador com amortecimento não-linear, Andronov, que com Pontryagin introduziu a noção de estabilidade de sistemas dinâmicos, onde sua evolução temporal obedece certas regras e estruturas, em geral descritas por equações diferenciais. O método desenvolvido por Poincaré, nesse momento, estava sendo utilizado para um melhor entendimento da mecânica

clássica com os trabalhos de Birkhoff(1913) e um pouco mais tarde de Kolmogorov, Arnold e Moser, com a Teoria KAM(1954) que tem duas ideias principais, linearizar o problema ao redor de uma solução aproximada, resolver o problema linearizado e intuitivamente melhorar essa solução [21].

Na década de 1950, o computador de alta velocidade tornou possível experimentos mais ousados com as equações diferenciais, por terem uma maior capacidade de resolver numericamente processos em cadeia de forma efetiva. Com essa nova tecnologia foi possível criar uma intuição a cerca das soluções de sistemas não-lineares.

Em 1963, Edward Lorenz, Meteorologista e Matemático do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*), estudava um modelo cilíndrico de convecção na atmosfera, de forma a tentar entender a imprevisibilidade climática. Lorenz percebeu que a solução tinha um comportamento "estranho", esta não se estabelecia em um ponto de equilíbrio ou em um estado periódico e, ainda que quando suas simulações começavam em condições iniciais com pequenas alterações, uma mudança considerável em sua trajetória após pouco tempo de simulação era observada. Lorenz mostrou certa imprevisibilidade no problema e que qualquer pequeno erro de medida se ampliava rapidamente levando a grandes erros. Entretanto Lorenz pôde observar que as soluções apresentavam uma certa estrutura, suas trajetórias aparentavam serem atraídas para dois pontos no espaço cartesiano, apesar de não se estabelecerem neles ou mesmo chegarem a eles, e tinham uma imagem que se assemelhava a uma borboleta, como vemos na figura 3.1.

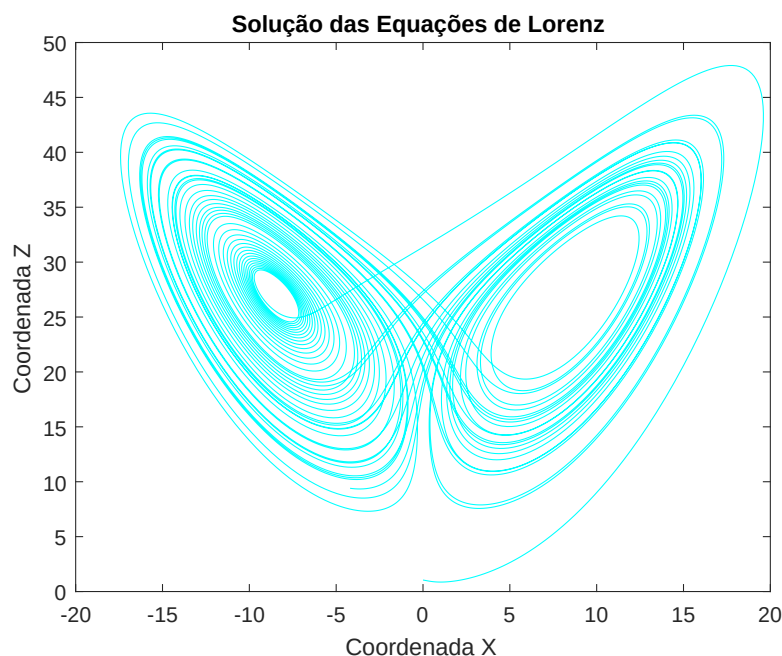


**Figura 3.1 Equações de Lorenz resolvidas e projetadas no plano  $xz$ .** Observa-se que as suas trajetórias são "atraídas" para dois pontos do espaço (atratores estranhos), porém não os alcançam ou se estabelecem em volta deles.

As equações de Lorenz são não-lineares e tem três variáveis independentes, características

fundamentais para definir o caos do sistema, são elas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

onde  $\sigma$  é o número Prandtl,  $r$  é a constante de Rayleigh e  $b$  é um parâmetro sem nome.

A década de 70 foi de crescimento da teoria do caos. Em 1971, Ruelle e Takens propuseram uma nova teoria de turbulência em fluidos, alguns anos mais tarde May encontrou exemplos de caos em biologia populacional através de mapas iterados (ou equações de diferença), conjunto de pontos que representam a evolução do sistema no tempo discreto. Hoje o modelo mais simples de biologia populacional é o de equações logísticas, equações da forma  $f(x) \approx 1/(1 + e^{-kx})$ .

Ainda em biologia, Winfree aplicou métodos geométricos da dinâmica em ritmos cardíacos e outras oscilações biológicas. E em seguida Feigenbaum encontrou certas regras universais que governam a transição de comportamento de regular para caótico, literalmente Feigenbaum encontrou que sistemas diferentes podem apresentar a mesma forma de mudar para caótico. Seu trabalho, em mapas iterados, mostra uma conexão entre caos e transição de fase. Na área da dinâmica, Mandelbrot codificou e popularizou fractais, objetos matemáticos que ao serem observados em uma nova escala têm seus padrões repetidos, no seu livro "*The Fractal Geometry of Nature*" (1992).

Sistemas dinâmicos podem ser divididos em dois tipos: as equações diferenciais e os mapas iterados. As equações diferenciais descrevem a evolução dos sistemas no tempo contínuo enquanto os mapas iterados são usados para o tempo discreto. Nos detemos as equações diferenciais pois o pêndulo duplo, sistema estudado a seguir, é descrito por equações diferenciais.

As equações diferenciais são divididas em equações diferenciais ordinárias e parciais. Um exemplo de equação diferencial ordinária é o oscilador harmônico amortecido, que é de segunda ordem e possui todas as ordens de derivada para  $x(t)$ , que é a função de posição dependente do tempo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = 0$$

**ou**

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \tag{3.1}$$

onde  $x$  é a coordenada,  $m$  é a massa do sistema,  $b$  é a constante de atrito e  $k$  é a constante elástica.

A equação 3.1 apresenta apenas uma variável independente, ou seja, um parâmetro, o tempo. Essa equação, portanto, é chamada autônoma por não ter termos explicitamente dependentes de sua variável independente.

## Dinâmica - Folheto de história

|                               |                                            |                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1666<br>1700s                 | Newton                                     | Invenção do caos, explicação do movimento planetário<br>Evolução do Cálculo e da Mecânica Clássica                                                                          |
| 1800s<br>1890s<br>1920-1950   | Poincaré                                   | Estudo analítico do movimento planetário<br>Abordagem geométrica, pesadelos do caos<br>Oscilações não-lineares em Física e Engenharia,<br>invenção dos radio, radar e laser |
| 1920-1960                     | Brikhoff<br>Kolmogorov<br>Arnol'd<br>Moser | Comportamento complexo na mecânica de Hamilton                                                                                                                              |
| 1963                          | Lorenz                                     | Atratores estranhos em modelos simples de convecção                                                                                                                         |
| 1970s                         | Ruelle & Takens<br>May<br>Feigenbaum       | Turbulência e caos<br>Caos em mapas logísticos<br>Universalidade e renormalização, conexão entre<br>caos e transição de fase                                                |
| Estudos experimentais de caos |                                            |                                                                                                                                                                             |
|                               | Winfree<br>Mandelbrot                      | Osciladores não-lineares em Biologia<br>Fractais                                                                                                                            |
| 1980s                         |                                            | Interesse generalizado no caos, fractais, osciladores<br>e suas aplicações                                                                                                  |

**Tabela 3.1 Síntese Histórica da Dinâmica e Caos.** Os acontecimentos importantes para o desenvolvimento da disciplina Dinâmica podem ser vistos Estruturados por data, nesta tabela traduzida de [2].

As equações diferenciais parciais apresentam como solução funções que dependem de mais de um parâmetro ou variável independente, como é o caso da equação de Schrödinger em uma dimensão e dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t)$$

**ou**

$$i\hbar \dot{\Psi}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t), \quad (3.2)$$

onde  $i$  é  $\sqrt{-1}$ , número imaginário,  $\hbar$  é a constante de Planck,  $\hbar/2\pi$ ,  $m$  é a massa da partícula, a função do potencial é  $V(x, t)$  e a função  $\Psi(x, t)$  é a função de onda dependente do tempo.

A equação 3.2 também é autônoma, e se tivermos um potencial independente do tempo

poderemos fazer uma separação de variáveis que transforma essa equação de variáveis parciais em duas equações ordinárias, facilitando a sua resolução.

Nosso estudo é concentrado em equações diferenciais ordinárias, para tais equações, existe a possibilidade de escrever equações de altas ordens como equações de primeira ordem. Poderemos renomear as variáveis da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_1 &= x & x_i &= y \\x_2 &= \dot{x} & x_{i+1} &= \dot{y} \\x_3 &= \ddot{x} & x_{i+2} &= \ddot{y} \\&\vdots & &\vdots\end{aligned}$$

E então teremos um novo conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Neste sentido dizemos que um sistema é linear quando todas as variáveis e suas derivadas são de primeira ordem de potência, como exemplo o oscilador harmônico amortecido, de 3.1, tem equações linearizadas:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1.\end{aligned}$$

Portanto, a ordem do sistema é definida como a quantidade de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Por outro lado, o sistema pode ser não-linear, quando apresenta potências superiores nas variáveis independentes. Um exemplo de não-linearidade é o pêndulo simples, pois tem todos os infinitos valores de potência ímpares, a função seno.

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin(x) = 0.$$

Usando o método explanado acima podemos escrever:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L} \sin(x_1).\end{aligned}$$

O fator não-linear faz as equações do pêndulo simples sejam de difícil solução analítica, apesar de existirem tais soluções em termos das equações elípticas, funções especiais definidas

por Carl Gustav Jakob Jacobi (1830). Afinal, o movimento do pêndulo é simples, em baixas energias, ele apenas balança para frente e para trás, e para altas energias, o pêndulo orbita circularmente seu eixo. Para o pêndulo simples, as trajetórias no espaço de fase, em termos das coordenadas generalizadas de Hamilton, é senoidal, contendo todos os pontos que podem servir como condição inicial para o problema. Percebemos então que o espaço de fase tem a ordem do sistema e nos permite ter uma ideia do comportamento do sistema, sem a necessidade resolvê-lo. O pêndulo simples tem comportamento harmônico, não caótico.

Quando as equações diferenciais não são autônomas podemos usar o parâmetro como nova variável, onde a derivada dela será um, aumentando a ordem do sistema, o oscilador harmônico forçado, como exemplo:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos t. \quad (3.4)$$

Ao ser Linearizando:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1. \end{aligned}$$

Vemos que a equação 3.4 é de segunda ordem mas precisamos de três condições iniciais para determinar o estado do sistema, ou seja seu espaço de fase tem três dimensões.

A maioria dos sistemas que encontramos no nosso dia-a-dia são não-lineares, onde a propriedade de super-posição(o sistema é a soma de suas partes) não é mais válida.

Na tabela 3.2 classifica-se sistemas conhecidos, na horizontal pela ordem das equações e na vertical classificados como linear e não-linear. Os sistemas mais simples são os lineares de primeira ordem que estão no canto superior esquerdo da tabela e no canto inferior a direita estão sistemas complexos que estão na fronteira do conhecimento.

O caos é observado em equações não-lineares e com ordem maior que três, a fronteira está apontando equações de ordem altíssima e não-lineares. Discussão baseada no Livro "*Nonlinear Dynamics and Chaos*", Steven H. Strogatz [2].

A seguir aplicaremos esses conceitos em um sistema puramente mecânico, o pêndulo duplo.

|                                                |  | Número de Variáveis →                          |                                                       |                                                  |                                           |                                                       |
|------------------------------------------------|--|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
|                                                |  | $n = 1$                                        | $n = 2$                                               | $n \geq 3$                                       | $n \gg 1$                                 | Contínuo                                              |
| <div>linear</div> <div>← Não-linearidade</div> |  | <i>Crescimento, decaimento ou equilíbrio</i>   | <i>Oscilações</i>                                     |                                                  | <i>Fenômeno Coletivo</i>                  | <i>ondas e padrões</i>                                |
|                                                |  | Crescimento exponencial                        | Oscilador linear<br>Massa e mola<br>circuito RLC      | Engenharia Civil,<br>estruturas                  | Osciladores Harmônicos acoplados          | Elasticidade<br>equações de onda                      |
|                                                |  | Circuito RC                                    | Problema de 2 corpos<br>(Kepler, Newton)              | Engenharia Elétrica                              | Física do Estado Sólido                   | Eletromagnetismo(Maxwell)                             |
|                                                |  | Decaimento                                     |                                                       |                                                  | Dinâmica Molecular                        | Mecânica Quântica<br>(Schrödinger, Heisenberg, Dirac) |
|                                                |  | Radioativo                                     |                                                       |                                                  | Equilíbrio Estatístico                    | Calor e Difusão                                       |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  | Mecânica                                  | Acústica                                              |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  |                                           | Fluídos Viscosos                                      |
| Não-linear                                     |  |                                                |                                                       | <i>Caos</i>                                      | <b>Fronteira</b>                          |                                                       |
|                                                |  | Pontos Fixos                                   | pêndulo                                               | Atratores Estranhos<br>(Lorenz)                  | Osciladores não-lineares acoplados        | <i>Complexidade Espaço-Temporal</i>                   |
|                                                |  | Bifurcações                                    | osciladores anarmônicos                               | Problema de 3 corpos                             | Lasers, ótica não-linear                  | ondas não-lineares(shocks, solitons)                  |
|                                                |  | Sis. Superamortecidos<br>dinâmica relaxacional | Ciclo Limite                                          | Cinética Química                                 | Mecânica Estatística<br>de não-equilíbrio | Plasmas                                               |
|                                                |  | Equação Logística<br>para uma espécie          | Osciladores Biológicos<br>(neurônios, cel. cardíacas) | Mapas iterados(Feigenbaum)                       | Física do estado sólido                   | Terremotos                                            |
|                                                |  |                                                | Ciclo presa-predador<br>(van der Pol, Josephson)      | Fractais<br>(Mandelbrot)                         | Não-linear(semicondutores)                | Relatividade Geral(Einstein)                          |
|                                                |  |                                                |                                                       | osci. não-lineares forçados<br>(Levinson, Smale) | efeito de Josephson                       | Teoria de Campos Quânticos                            |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  | sinc. de fibras miocárdicas               | difusão-reação,                                       |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  | Neural networks                           | ondas biológicas e químicas                           |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  |                                           | Fibrilação                                            |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  |                                           | Epilepsia                                             |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  | Sistema Imune                             | Turbulência(Navier-Stokes)                            |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  | Ecosistemas                               | Vida                                                  |
|                                                |  |                                                |                                                       |                                                  | Economia                                  |                                                       |
|                                                |  |                                                |                                                       | uso prático de caos                              |                                           |                                                       |
|                                                |  |                                                |                                                       | Caos Quântico?                                   |                                           |                                                       |

**Tabela 3.2 Sistemas conhecidos ordenados por não-linearidade e ordem.** O eixo horizontal representa a dimensão do espaço de fase, ou seja, quantas variáveis são necessárias para caracterizar o estado do sistema e o eixo vertical representa a linearidade do sistema. Traduzido de [2].

## O Pêndulo Duplo

O pêndulo duplo é um sistema formado por duas massas ligadas por duas hastes, uma conectando as massas e a segunda conecta o sistema ao teto, ambas hastes têm massas desprezíveis. Este sistema é um exemplo simples de caos, amplamente estudado. Vejamos abaixo como as coordenadas polares se relacionam às coordenadas cartesianas do pêndulo duplo.

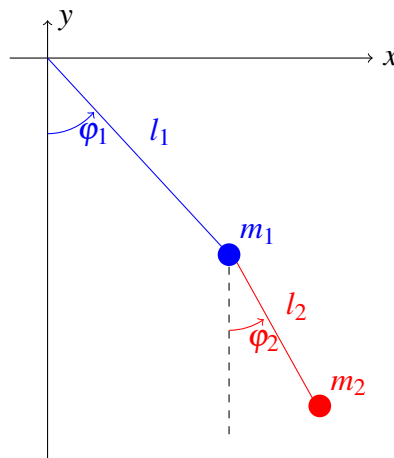


**Figura 4.1 Pêndulo Duplo.** Aqui representadas estão as coordenadas generalizadas do pêndulo duplo relacionadas ao plano cartesiano.

O nosso estudo propõe fazer uma conexão entre a física e a biologia, no sentido de que o mesmo fenômeno, o caos, pode ser observado para os dois sistemas, obedecendo uma mesma relação entre eles.

O pêndulo duplo físico pode ser um bom modelo inicial para os braços e pernas do ser humano, afinal ambos têm duas articulações, no caso do pêndulo a articulação onde medimos o ângulo  $\varphi_1$  e a outra onde medimos o ângulo  $\varphi_2$ , para o braço humano, o ombro e o cotovelo e para a perna humana, o joelho e a articulação coxofemoral. Mas esse não é o foco do nosso estudo, neste trabalho demonstraremos a existência do mesmo tipo de fenômeno físico, o caos, em um sistema mecânico, o pêndulo duplo, e em um sistema biológico, o Eletrocardiograma, um exame que mede a atividade elétrica do miocárdio.

Matematicamente é possível escrever todas as equações de movimento do pêndulo duplo. Por diversos formalismos deriva-se essas equações, as mais famosas são o diagrama de forças e Leis de Newton e os dois métodos utilizados a seguir, as formulações de Lagrange e de Hamilton.

## 4.1 Formulação de Lagrange

Na mecânica clássica existe um formalismo chamado lagrangiano, que é baseado em uma função das coordenadas generalizadas e suas derivadas no tempo, que chamamos velocidades generalizadas. Geralmente a função lagrangiana é escrita como:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i), \quad (4.1)$$

onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas,  $\dot{q}_i$  são as derivadas temporais dessas coordenadas,  $dq_i/dt$ , e as funções  $T$  e  $V$  são as energias cinética e potencial, respectivamente.

Para o pêndulo duplo usamos as seguintes coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 & x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ y_1 &= l_1 \cos \varphi_1 & y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas cartesianas de cada massa e  $l_i$  é o comprimento da haste conectada a cada massa, representado na figura 4.1.

A lagrangiana em geral tem dois termos, um que é exclusivamente dependente das coordenadas generalizadas e um termo que é exclusivamente dependente das velocidades generalizadas. As velocidades generalizadas em função das velocidades em  $x$  e  $y$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

O pêndulo duplo tem como energia potencial apenas o potencial gravitacional, com o vínculo de que  $l_1$  e  $l_2$  são constantes restringindo o movimento, e a energia cinética é a usual. O potencial gravitacional e a energia cinética são:

$$\begin{aligned} V &= mgy \\ T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \end{aligned}$$

onde  $m$  é a massa e  $g$  é a aceleração da gravidade.

Substituindo 4.2 e 4.3 acima:

$$\begin{aligned} V_1 &= m_1 g l_1 \cos \varphi_1 \\ V_2 &= m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2}m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2], \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as massas especificadas na figura 4.1.

Finalmente escrevemos a seguinte lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2gl_2\cos\varphi_2. \quad (4.6)$$

Para expressar suas equações de movimento são utilizadas as equações de Lagrange para os dois graus de liberdade, os ângulos de suas hastes com o eixo vertical,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  respectivamente. Com essas definições podemos escrever as equações de movimento para cada coordenada generalizada, chamadas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (4.7)$$

De 4.6:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 - m_2l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= (m_1 + m_2)g\sin\varphi_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) &= l_2\ddot{\varphi}_2 + l_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= g\sin\varphi_2 \end{aligned}$$

Colocando estes resultados em 4.7, obtemos:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - (m_1 + m_2)g\sin\varphi_1 &= 0 \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + l_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - g\sin\varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

É possível observar que existem duas equações de movimento com duas coordenadas generalizadas, mas para definir completamente o pêndulo duplo precisamos também do valor inicial das velocidades generalizadas [1]. A seguir, na formulação de Hamilton encontramos quatro equações de primeira ordem.

## 4.2 Formulação de Hamilton

A equação de primeira ordem pode ser encontrada de forma explícita em uma outra formulação também muito conhecida, a formulação de Hamilton, ou formulação do espaço de fase. Podemos trocar de formulação usando a transformada de Legendre:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_j, \dot{q}_j, t),$$

onde  $H$  é a função hamiltoniana,  $q_j$ s são coordenadas generalizadas e  $p_j$ s os momentos generalizados. Se a hamiltoniana é independente do tempo, a energia cinética depende apenas do momento e a energia potencial depende apenas das coordenadas generalizadas, a equação acima

será reescrita como:

$$H(q_j, p_j) = T(p_j) + V(q_j).$$

E ainda podemos definir o momento generalizado como:  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , que para o pêndulo duplo será escrito como:

$$\begin{aligned} p_1 &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_2 l_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ p_2 &= m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2 l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Usando todos os termos anteriores, a hamiltoniana do pêndulo duplo será:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \left[ \frac{p_1^2}{2l_1^2} + \frac{(m_1 + m_2)p_2^2}{2m_2 l_2^2} - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)p_1 p_2}{l_1 l_2} \right] + \\ &\quad - (m_1 + m_2)gl_1 \cos(\varphi_1) - m_2 gl_2 \cos(\varphi_2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para expressar as equações de movimento nesta formulação, as duas equações de segunda ordem de Lagrange se reduzem a quatro equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_1} & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo 4.9 acima, encontramos as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \left[ \frac{p_1}{l_1^2} - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)p_2}{l_1 l_2} \right] \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{1}{m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)} \left[ \frac{(m_1 + m_2)p_2}{m_2 l_2^2} - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)p_1}{l_1 l_2} \right] \\ \dot{p}_1 &= \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)p_2 p_1}{l_1 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} - \frac{2m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))^2} \left[ \frac{p_1^2}{2l_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m_1 + m_2)p_2^2}{2m_2 l_2^2} - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)p_1 p_2}{l_1 l_2} \right] + (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\varphi_1) \\ \dot{p}_2 &= \frac{-\sin(\varphi_1 - \varphi_2)p_2 p_1}{l_1 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))} + \frac{2m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{(m_1 + m_2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2))^2} \left[ \frac{p_1^2}{2l_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m_1 + m_2)p_2^2}{2m_2 l_2^2} - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)p_1 p_2}{l_1 l_2} \right] + m_2 gl_2 \sin(\varphi_2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Existem quatro equações de movimento com quatro coordenadas generalizadas. Todas as equações são acopladas e como é explicitado na tabela 3.2, em um sistema que é determinado por mais que três variáveis e tem equações de movimento não-lineares, circunstâncias que achamos no pêndulo duplo, observa-se caos.

### 4.3 Resolvendo Numericamente

Usando Runge-Kutta, método de solução numérica elaborado por Carl David Runge e Martin Wilhelm Kutta(1895), que é um aperfeiçoamento do método de resolução de Euler, quando a equação diferencial tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}y = f(x,y)$$

Com o valor inicial  $y(x_0) = y_0$ , aplica-se:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \text{ com } h \rightarrow 0 \\ y_{n+1} &= y_n + k_1 \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Partindo do valor inicial é possível resolver a equação diferencial, porém com um erro proporcional a  $h$ . No caso de Runge-Kutta, soma-se uma média de valores, para segunda ordem:

$$k_1 \rightarrow \frac{k_1 + k_2}{2}, \text{ com } k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$

A quarta ordem do método foi usada, pois o erro é da ordem de  $h^4$ , e a modificação em 4.12 é:

$$\begin{aligned} k_1 &\rightarrow \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Esse método é válido para equações de primeira ordem, mas como foi mostrado no capítulo 3 com a equação 3.3 é possível escrever qualquer equação diferencial de ordem  $n$  em termos de um sistema de  $n$  equações de primeira ordem. Esse método pode ser generalizado para um sistema de equações diferenciais quando calculados em processos paralelos. [22] [23] [4]

As trajetórias da figura 4.2 foram simuladas para mesmas velocidades angulares iniciais mas com o ângulo inicial discretamente modificado. Em um sistema determinístico as trajetórias seriam paralelas, mas é visível que neste caso as três trajetórias são muito diferentes umas das outras.

Para o estudo do caos utilizamos a integração numérica de 21 ângulos iniciais diferentes, em grupos de três com uma diferença de  $\pm 0.015\text{rad}$  entre eles. Ainda utilizamos  $\varphi_1(0)$  e  $\varphi_2(0)$  sempre simétricos, com as velocidades angulares  $\omega_1(0) = 0$  e  $\omega_2(0) = 5\text{rad/s}$ , com as massas iguais a  $1\text{kg}$ , gravidade aproximada  $9,8\text{m/s}^2$  e comprimentos das hastes  $l_1$  e  $l_2$  iguais a  $1/3$  e

1/6, respectivamente.

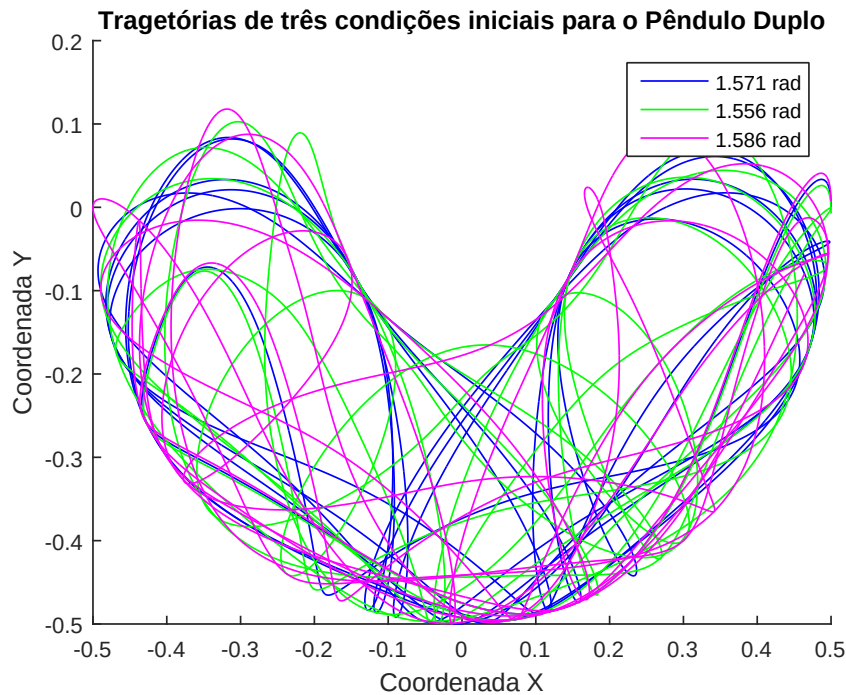


**Figura 4.2 Simulação para três condições iniciais do Pêndulo Duplo.** As trajetórias do pêndulo duplo foram calculadas para ângulos iniciais de  $\varphi = \pi/2 \pm 0,015$  rad e estão traçadas neste gráfico as trajetórias referentes a segunda massa do pêndulo.

## 4.4 Resultados e Discussão

Os sinais dos pêndulos foram simulados como é explicado na seção 4.3 e comparados em uma simulação com o passo de  $\delta t = 10^{-4}$  segundos entre os pontos e diferentes ângulos, pois segundo a referência [4], a partir de  $\delta t = 10^{-5}$ , pelo método Runge-Kutta de quarta ordem, o erro começa a crescer.

Neste trabalho, integramos as equações diferenciais para três condições iniciais que se diferenciavam por 0,0015rad de um ângulo central e calculamos a diferença entre as distâncias entre suas trajetórias. Essa série temporal foi calculada pois precisávamos de uma função que oscilasse em torno do zero, e como veremos a seguir a distância entre duas trajetórias do pêndulo duplo oscila, mas também cresce de forma exponencial, a diferença entre as distâncias suprime esse crescimento exponencial. Para calcular a função de correlação, é necessário um conjunto de dados de uma longa simulação ou várias simulações do mesmo sistema com pequenas mudanças nas condições iniciais. A simulação longa foi usada para manter a mesma metodologia em todas as séries temporais estudadas, para o eletrocardiograma, não tínhamos acesso a várias realizações do exame para um mesmo paciente.

Na intenção de garantir que todas as condições iniciais utilizadas levam a um movimento

caótico do sistema uma estimação simples do coeficiente de Lyapunov foi feita. O coeficiente de Lyapunov sugere que existe um crescimento exponencial da distância entre trajetórias com uma diferença muito pequena entre suas condições iniciais.

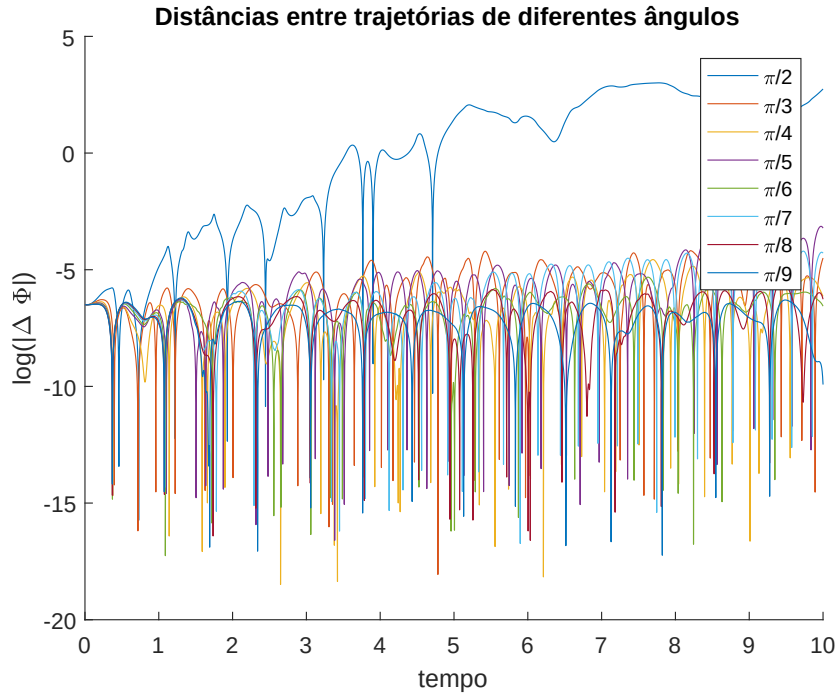


**Figura 4.3** Gráfico da variação do logarítmo da distância no tempo. Visivelmente o aclave da curva referente á  $\pi/2$  é positivo, o aclave das curvas dos demais ângulos serão estudados na tabela 4.1.

A estimação simples foi feita baseada no exemplo do livro de John R. Taylor [1], onde calcula-se a diferença:

$$\Delta\varphi(t) = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|,$$

onde  $\varphi_1$  é o resultado da integração para os primeiros valores iniciais e  $\varphi_2$  após uma pequena perturbação, 0.0015rad em tais valores.

E observa-se seu comportamento, esperando que ele tenha a forma  $\Delta\varphi(t) \sim Ae^{\lambda t}$ . Ao traçar o gráfico  $\ln(\Delta\varphi(t)) \times t$  (figura 4.3) é possível utilizar o ajuste linear para detectar o aclave da reta que será uma boa estimativa do sinal do expoente de Lyapunov. Para um ângulo de  $90^\circ$  a inclinação é nitidamente positiva, ao fazer um ajuste da curva por uma reta encontra-se um coeficiente linear  $a_{90} \approx 1,88$ . Na tabela 4.1 observamos que são todos positivos e próximos ou maiores que um.

Todos os ângulos estudados apresentaram coeficiente de Lyapunov estimado positivo. Espera-se que para um ângulo que seja próximo a zero o coeficiente seja negativo, assim, com o tempo, a distância entre as trajetórias decai, e a longo prazo não é mais possível distinguir as trajetórias, transformando o sistema em previsível, e portanto um sistema completamente determinístico.

| Ângulo Central | coeficiente | Ângulo Central | coeficiente |
|----------------|-------------|----------------|-------------|
| $\pi/4$        | 1.36        | $\pi/3$        | 2.59        |
| $\pi/6$        | 1.474       | $\pi/5$        | 1.05        |
| $\pi/8$        | 0.76        | $\pi/7$        | 0.78        |

**Tabela 4.1 Estimativa dos Coeficientes de Lyapunov.** Os coeficientes de Lyapunov para os ângulos iniciais simulados são positivos. Essa estimativa foi feita para 100 segundos

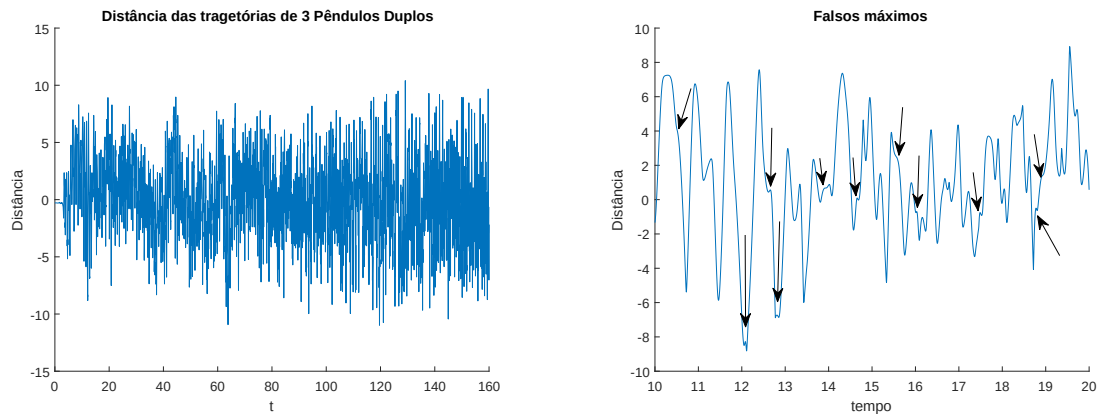
Seguindo a sequência de cálculo do histograma de autovalores, função de correlação, densidade de máximos e definição do comprimento de correlação, observamos o histograma (figura 4.4), onde não existem grandes amplitudes relacionadas à ruído externo, mostrando que o caos do pêndulo duplo é de natureza determinística.



**Figura 4.4 Histograma da Matrix Gaussiana de Wigner para a distância de 3 trajetórias.** Observa-se uma grande amplitude para autovalores próximos a zero, mostrando a característica determinística do caos do Pêndulo Duplo.

O cálculo da densidade de máximos é feita através do estudo de máximos locais. Um máximo local é definido por um ponto da função onde a primeira derivada é nula e a segunda derivada é negativa. Para a distância de pêndulos duplos utilizando um ângulo central de  $\pi/2$  (sem filtros) e um pequeno passo entre as medidas, que causa o aparecimento de falsos máximos locais. Existem duas formas de contornar erros numéricos, através de um filtro ou estabelecendo uma distância fixa para contar os máximos, que foi o que fizemos, fazendo uma média da distância que observamos. A função do Matlab que calcula os máximos registra picos que estão muito próximos, que para nosso estudo não são relevantes. Para sanar esse problema, definimos uma distância mínima de 0.3 segundos entre um máximo e outro.

A função de correlação do pêndulo duplo deverá ter um comportamento periódico devido a gravidade, que promove um vínculo entre os pontos da série temporal. Na figura 4.6(a) ob-



(a) Série Temporal da Distância entre três condições iniciais,  $\pi/2(\pm 0.0015)$ .

(b) Fração da série temporal (figura 4.5(a)).

**Figura 4.5 Série Temporal do Pêndulo Duplo.** Na figura (a) observa-se que a série temporal oscila em torno de zero, que é necessário para fazer a função de correlação. A figura (b) representa uma fração do sinal são vistos máximos locais muito próximos, falsos máximos locais, que modificam a densidade de máximos do sistema.

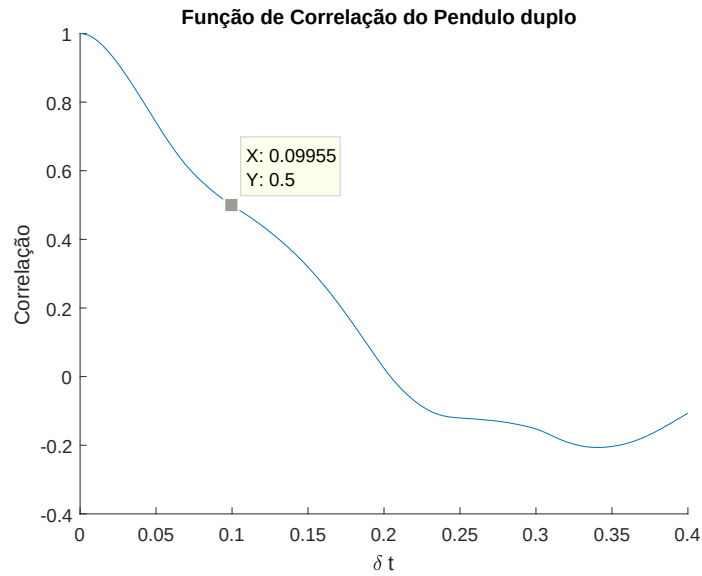
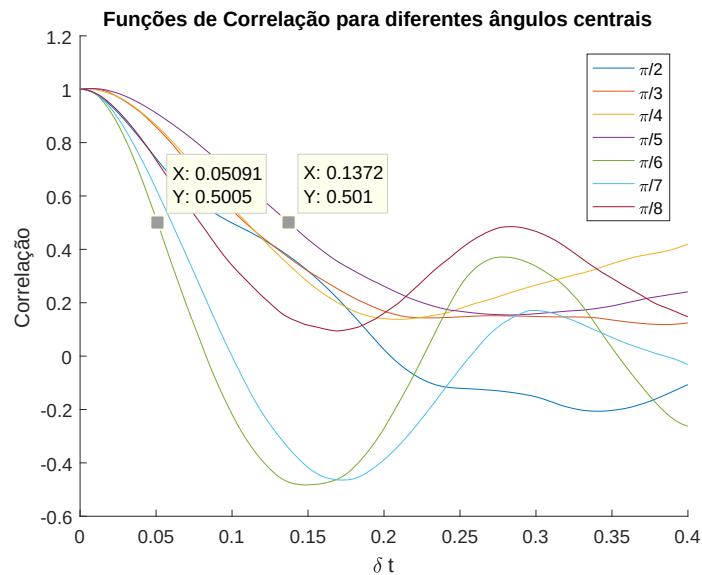
servamos que a função de correlação no espaço de tempo analisado apresenta periodicidade irregular, pois o tipo de integração usado, neste trabalho impediu que integrássemos o sistema para um intervalo de tempo maior. Entretanto nesse intervalo, já é possível ajustar essa função por um cosseno. A densidade de máximos advinda da série temporal, 1,5063, prevê um comprimento de correlação de 0,1106 e experimentalmente encontramos um comprimento de correlação de 0.0995, encontrado na figura 4.6(a). Resultados condizentes à relação obtida pelo método descrito na seção 2.4, explicitada na equação 2.15.

Variando o ângulo central foi possível calcular novas funções de correlação (figura 4.6(b)), que também apresentam periodicidade relativa ao vínculo promovido pela gravidade. Funções essas que ao serem ajustadas pela função cosseno validam a relação inversa entre a densidade de máximos e o comprimento de correlação (tabela 4.2).

| Ângulo Central | Comprimento de correlação | densidade de máximos( $\times 10^{-5}$ ) | $\langle \tau \rangle$<br>( $1/6\rho$ ) |
|----------------|---------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\pi/2$        | 0.09955                   | 1.5063                                   | 0.1106                                  |
| $\pi/3$        | 0.1087                    | 1.4438                                   | 0.1154                                  |
| $\pi/4$        | 0.1094                    | 1.3938                                   | 0.1196                                  |
| $\pi/5$        | 0.1372                    | 1.4250                                   | 0.1169                                  |
| $\pi/6$        | 0.05091                   | 3.2938                                   | 0.0506                                  |
| $\pi/7$        | 0.06029                   | 3.4438                                   | 0.0484                                  |
| $\pi/8$        | 0.07904                   | 2.3750                                   | 0.0702                                  |

**Tabela 4.2 Comprimento de Correlação e Densidade de máximos.** Resultados da análise dos sinais com seus respectivos ângulos centrais. Apesar de não haver colapso entre as funções é possível perceber que é válida a relação inversa entre o comprimento de correlação e a densidade de máximos  $\tau \approx 1/6\rho$ .

O método, que relaciona a densidade de máximos e o comprimento de correlação, proposto

(a) Pêndulo Duplo para um ângulo central de  $\pi/2$ .

(b) Pêndulos Duplos com diferentes ângulos centrais.

**Figura 4.6 Funções de Correlação do Pêndulo Duplo.** Na figura (a) observa-se um comprimento de correlação de 0.09955. Obtido através do valor da função a meia altura. Na figura (b) apenas explicitamos os comprimentos de correlação para  $\pi/5$  e  $\pi/6$  para não deixar a figura ilegível.

no capítulo 2 é então verdadeiro para o pêndulo duplo, exemplo da mecânica clássica. Neste trabalho demonstraremos que o mesmo método pode ser utilizado para caracterizar o caos em sistemas biológicos como o eletrocardiograma.

PARTE II

## **Sinais Biológicos**

## Introdução a Bioeletricidade

Desde o século XIV, com o estudo de peixes elétricos, que produziam eletricidade como forma de proteção, vem se estudando a eletricidade em seres vivos. [10]

Na Itália, Galvani estudou membros inferiores de sapos com seus nervos expostos e um fio bimetálico conectado a seu canal vertebral(1791). As pernas do sapo tinham seus músculos contraídos quando estimulados eletricamente. Após expor esse conjunto a eventos atmosféricos, e notando que o mesmo processo ocorria em locais isolados do meio ambiente, quando conectados a placas metálicas formando um circuito, Galvani concluiu que havia uma forma de eletricidade intrínseca no animal e que os condutores que estavam conectados aos nervos apenas permitiam fluxo de eletricidade, provocando contração muscular. Alessandro Volta, avançando em seus estudos sobre eletricidade em seres vivos, teorizou que a contração demonstrada nos experimentos de Galvani estavam associadas com uma eletricidade induzida pela manipulação dos experimentos, via um arco bimetálico. Ao usar um arco similar para estimular a própria língua, concluiu que os músculos não necessitavam de um circuito com corrente elétrica para condução nervosa, mas que os fios bimetálicos produziam e mantinham uma diferença de potencial. [10] [25]

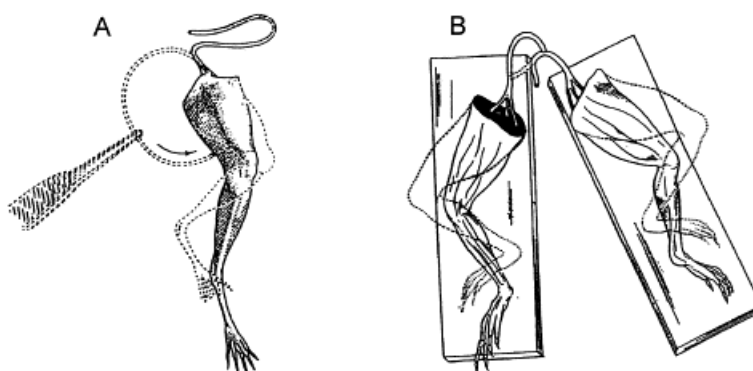


**Figura 5.1 Experimentos de Galvani.** A figura A está representando o experimento onde um fio bimetálico fechava o circuito elétrico na perna do sapo causando contração muscular. A figura B representa a união de duas pernas através de um fio monometálico, que também ocasionou contração muscular. De forma a provar que a eletricidade era interna ao organismo biológico. Figuras retiradas de [25]

Disposto a provar sua teoria, Galvani(1794) então utilizou um arco monometálico e tocando um nervo apenas com o tecido muscular (figura 5.1) e obteve os mesmos resultados. Porém Volta havia avançado em seu estudo em produção elétrica por dois metais, na época zinco e

prata, culminando em 1800 na invenção da bateria elétrica, desacreditando Galvani e provocando um relativo abandono de suas ideias por aproximadamente três décadas. [25]

Hoje sabemos que as conexões e pulsos produzidos entre músculos e nervos são de natureza elétrica, com características diferentes do pulso elétrico em um cabo de energia, por exemplo.

A bioeletricidade tem como material de estudo as voltagens e correntes elétricas em tecidos orgânicos, neste capítulo será enfatizado a bioeletricidade em células de membranas excitáveis, entretanto os mesmos conceitos aqui apresentados podem ser aplicados a outros fenômenos elétricos observados em organismos vivos. [10]

A membrana é uma camada bilipídica fina que envolve a célula. Ela é chamada bilipídica pois é formada por duas camadas de moléculas lipídicas, que mantém o exterior da membrana hidrofílico e o seu interior hidrofóbico. Para fazer a conexão com o meio externo a membrana apresenta topologia modificada por proteínas, que, entre outras, podem ter função de canal ou de "bomba". O canal tem a propriedade de permitir a passagem de íons do meio extracelular para o meio intracelular sem que haja gasto de energia, já as "bombas" utilizam energia para fazer o transporte de íons contra o fluxo normal de concentração. [26] [10]

Em uma membrana celular excitável, existe a chamada voltagem de transmembrana, que é a diferença de potencial através da membrana, considerando que o potencial extracelular é negativo e o intracelular é positivo, formando uma espécie de dipolo elétrico. A membrana, portanto, tem dois estados, passivo e ativo. No estado passivo a voltagem de transmembrana é mantida estática, enquanto que quando um estímulo passa pela membrana, ela tem sua diferença de potencial modificada e entra em seu estado ativo. [10]

Corrente elétrica é definida como movimento de cargas. Para a bioeletricidade, essas cargas são íons, em especial de sódio( $Na^+$ ), potássio( $K^+$ ) e cloro( $Cl^-$ ). A membrana está imersa em uma solução repleta de íons livres, por isso essa solução é chamada solução condutora, pela facilidade de movimento através do seu volume. [10]

Em 1879, foi descrito um modelo chamado *core-conductor* que modelava o nervo com simetria cilíndrica, semelhante a um cabo de energia. O modelo apresentava geometria cilíndrica e uniforme. Suas resistividades interna( $\rho_i$ ) e externa( $\rho_e$ ) eram dependentes da concentração de íons na solução e por ter simetria cilíndrica, tinha resistência( $R$ ):

$$R = \frac{\rho L}{A_s} = \frac{\rho L}{\pi r^2}, \quad (5.1)$$

onde  $L$  é o tamanho longitudinal do cilindro,  $A_s$  é a área da seção vertical e  $r$ , o raio do cilindro. Da mesma forma que fazemos em eletromagnetismo podemos definir corrente e campo elétrico dentro deste cilindro homogêneo:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{V}{R} \\ \vec{E} &= -\frac{V}{L}\vec{l}, \end{aligned}$$

onde  $\vec{l}$  é a direção do movimento dos íons e  $V$ , o potencial, depende da concentração de íons. [18]

Mesmo neste modelo, os nervos se diferenciam dos cabos, pois a corrente elétrica normal a superfície do cilindro é considerada e, em razão da resistência da membrana, será importante para o entendimento do modelo. [18]

É possível medir a resistência da membrana pela fórmula  $R_m = \rho_m / A_{sm}$ , onde o subscrito  $m$  está relacionado a membrana. Para o modelo de Hodgkin-Huxley, que é o modelo mais famoso da bioeletricidade, essa resistividade é de aproximadamente  $1500\Omega/cm^2$ , que, ao comparar com fios elétricos, uma resistência muito pequena para cabos elétricos. [18]

Por causa da diferença de potencial e resistência, existe uma corrente elétrica através da membrana, essa corrente elétrica é positiva quando se direciona de dentro para fora e negativa no sentido contrário. Infelizmente para a membrana celular a lei de Ohm não se aplica, pois a membrana tem uma dependência em seu estado anterior, não é uma constante. [10]

A membrana separa os meios externo e interno da célula. No potencial de repouso observa-se que o íon de potássio,  $K^+$ , está em maior concentração no meio intracelular, seguindo a difusão simples, dependendo da permeabilidade da membrana, o íon migra para o exterior da célula. O íon de sódio,  $Na^+$ , faz o caminho inverso, está em maior concentração no meio extracelular e migra para o interior da célula. O sódio hidratado é bem maior que o potássio, por essa razão ele tem dificuldade para passar pelos poros da membrana. Para o repouso elétrico, então, é comum iniciar o estudo considerando sua concentração. [27]

Essa mobilidade de concentração cria uma diferença de potencial elétrico entre os meios intra e extracelular, aparecendo, então, uma força elétrica tendendo a compensar a *força* de difusão. Quando essas forças são iguais a membrana está em equilíbrio, com seu interior negativo. Esse equilíbrio acontece próximo ao potencial de Nernst para a concentração de  $K^+$ , que pode ser derivado como:

$$\begin{aligned} F_d &= RT \ln \left( \frac{[K]_i}{[K]_e} \right) \\ F_e &= nFV_m, \end{aligned}$$

onde  $F_d$  é o módulo da força de difusão,  $R$  é constante universal dos gases,  $T$  é a temperatura absoluta e  $[K]_e$  e  $[K]_i$  as concentrações de K no meio externo e interno, e  $F_e$  é o módulo da força elétrica,  $n$  é o número de valência do íon,  $F$  é a constante de Faraday e  $V_m$  é o potencial de transmembrana. No equilíbrio  $V_m$  é o potencial de Nernst,  $V_{nernst}$ , e as forças têm mesmo módulo: [27]

$$nFV_{nernst} = RT \ln \left( \frac{[K]_i}{[K]_e} \right).$$

Obtém-se finalmente a equação de Nernst:

$$V_{\text{nernst}} = \frac{RT}{nF} \ln \left( \frac{[K]_i}{[K]_e} \right).$$

Utilizando uma temperatura de 37°C (310K), número de valência como um, constante de Faraday como 96485,33C/mol, a constante dos gases como 8,31J/mol·K e a relação entre as concentrações intra e extracelular como 30 : 1, obtemos -90,8mV, sendo próxima a medida experimentalmente que é aproximadamente -90mV para uma célula cardíaca. [27]

Para calcular o potencial de equilíbrio total é preciso observar todas as concentrações iônicas principais nos deixando com a equação de Goldman:

$$V_{mt} = \frac{RT}{F} \ln \left( \frac{P_K[K]_e + P_{Na}[Na]_e + P_{Cl}[Cl]_i}{P_K[K]_i + P_{Na}[Na]_i + P_{Cl}[Cl]_e} \right),$$

onde os  $P_s$  são os coeficientes de permeabilidade. [18]

Esse processo está representando os processos da membrana em equilíbrio, ou seja, em seu estado passivo. É importante ressaltar que a membrana tem topologia heterogênea e por esse motivo ao longo dela estão as chamadas bombas de sódio-potássio. Esse mecanismo de "bomba" não é responsável pelo estado eletronegativo da membrana, entretanto ele é usado para manter a eletronegatividade da membrana. [10]

A eletronegatividade é necessária para que haja ativação da membrana, com o potencial de transmembrana e os canais e "bombas", em especial a "bomba" de sódio-potássio, existe uma recarga da membrana após um pulso elétrico, devido ao movimento de íons de sódio e potássio. As bombas de sódio-potássio transportam potássio para dentro da célula enquanto libera sódio no meio externo, esse transporte é energético por ser contra a direção de concentração desses íons. Por necessitar de energia para fazer o transporte através das bombas, os mecanismos menos energéticos, de difusão simples, são priorizados. [10] [18]

Após a membrana ser ativada seu potencial oscila para um potencial positivo, para a célula cardíaca esse potencial é aproximadamente 30mV, em uma fração de milissegundos. A curva de potencial produzida por esse processo tem as seguintes fases: [27]

- Uma fase de ascensão do potencial de ação que acontece em aproximadamente 1 milissegundo, relacionada com a despolarização. Onde ocorre grande aumento de permeabilidade a  $Na^+$ .
- Deslocamento da curva em direção ao zero do potencial, que é uma repolarização rápida e precoce.
- Fase de relativa estabilização em torno do zero, formando um *plateau*.
- Fase de repolarização de volta a linha de base. Aumentando a permeabilidade ao íon  $K$ , e os íons de  $Na$  saem lentamente da célula.

- Fase de Repouso elétrico.



**Figura 5.2 Potenciais de ação** Observamos nesta figura os potenciais de ação para uma célula elétrica-carregada. Se seu pico é em  $+30\text{mV}$  e sua base em  $-90\text{mV}$ , observamos o potencial de ação de uma fibra de Purkinje, célula cardíaca mais larga. Retirada de [27]

Discussão deste capítulo é baseada nas referências [27], [10], [18] e [26]

## 5.1 Modelo Hodgkin-Huxley

O modelo de Hodgkin-Huxley para a membrana celular excitável é escrito em termos de equações diferenciais não-lineares acopladas, sendo resolvidas de forma numérica. O modelo resolve a situação onde para um estímulo pequeno em uma membrana em seu estado passivo, há uma resposta pequena e, para membranas ativas causando uma deflexão aumentada, chamada potencial de ação.

Os estudos experimentais de potenciais de ação foram feitos, em especial, no nervo de uma lula que controla sua locomoção, esse nervo está ligado ao músculo chamado sifão por onde entram e saem jatos de água do mar, possibilitando seu movimento. Este nervo tem um axônio de aproximadamente 30cm, sendo a maior célula animal conhecida, o que facilita sua visualização e manipulação.

Hodgkin e Huxley(1939) usaram esse axônio para inserir eletrodos e fios elétricos de forma a medir a corrente elétrica, que permitiu o cálculo da condutância da membrana. Ao aumentar o potencial da membrana observou-se um breve pulso de corrente elétrica que cai para valores negativos próximos a zero e, em seguida, mantém uma corrente elétrica positiva.

Usando seus resultados experimentais os autores teorizaram que a corrente elétrica da membrana seria uma corrente capacitiva somada a uma corrente iônica, corrente esta que é a soma das correntes produzidas pela movimentação dos íons de potássio e sódio e uma corrente de vazamento:

$$\begin{aligned}
I_m(t) &= I_{ion}(t) + I_C(t) \\
I_{ion}(t) &= I_{Na^+}(t) + I_{K^+}(t) + I_{vazamento}(t) \\
I_C(t) &= C_m \frac{d}{dt} V_m(t),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde  $I$  é a corrente,  $C$  a capacitância e  $V$  é o potencial.

A corrente iônica é simulada como a corrente elétrica de um sistema de resistência variável em série com uma bateria, que tem como voltagem o potencial de Nernst do íon.

Após vários experimentos variando as concentrações desses íons, Hudgkin e Huxley criaram um modelo matemático que é base para muitos modelos atuais, recebendo o prêmio Nobel em 1963. As equações 5.2 dependem do comportamento de  $m$ ,  $n$  e  $h$  que estão respectivamente relacionados com a ativação dos canais de potássio( $K^+$ ), sódio( $Na^+$ ) e inativação do canal de sódio, e do comportamento do potencial de transmembrana com a evolução temporal. As equações do modelo são:

$$\begin{aligned}
\dot{n} &= \alpha_n V_m (1 - n) - \beta_n V_m n \\
\dot{m} &= \alpha_m V_m (1 - m) - \beta_m V_m m \\
\dot{h} &= \alpha_h V_m (1 - h) - \beta_h V_m h \\
I &= C_m \dot{V}_m + \bar{g}_K n^4 (V_m - V_K) + \bar{g}_{Na} m^3 h (V_m - V_{Na}) + \\
&\quad + \bar{g}_v (V_m - V_v),
\end{aligned}$$

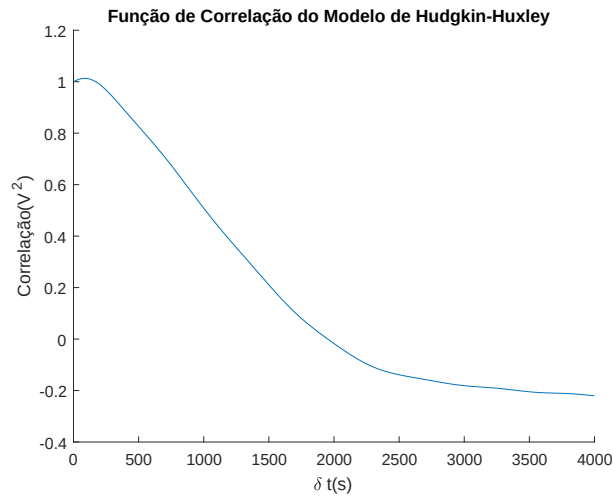
onde  $g$  está relacionado a condutância por unidade de área,  $\alpha$  e  $\beta$  são funções empíricas que estão relacionadas a velocidade de transição, e os potenciais  $V_K$ ,  $V_{Na}$  e  $V_v$  estão relacionados a baterias teóricas de potássio, sódio e vazamento, respectivamente.

Simulando esse modelo, com corrente elétrica inicial de  $12nA$ , potencial da transmembrana inicial  $-65V$ , valores relacionados a ativação dos canais de potássio, sódio e inativação do canal de potássio ( $m$ ,  $n$  e  $h$ ), respectivamente, 0.5, 0.5 e 0.06 (quantidades sem dimensão) foi possível calcular sua função de correlação(figura 5.3(a)).

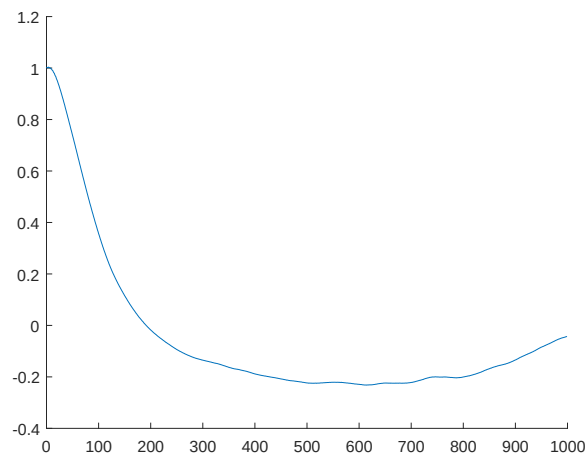
E observando os dados adquiridos experimentalmente em um axônio gigante de lula(figura 5.3(b)). [28]

Podemos observar que as funções de correlação têm a mesma forma, contrário às funções de correlação do pêndulo duplo que tem comportamento periódico. Essas funções são resultado de um pulso apenas, apesar do sinal se manter, a "força" que causou o movimento não permanece, causando decaimento da função de correlação para valores negativos da função de correlação, anticorrelação, que estão relacionados com o período de repolarização do axônio. No capítulo 7, estudamos o comportamento de um conjunto de células, as ondas de repolarização são superpostas a ondas de excitação de outras células, mostrando uma função de correlação com outro

comportamento.



(a) Função de Correlação das simulações do modelo de Hodgkin-Huxley.



(b) Função de correlação da série temporal de um axônio gigante de lula.

**Figura 5.3 Função de correlação para um Axônio.** Na figura (a) diferente da função de correlação do Pêndulo Duplo, apenas um pulso de energia excita esse modelo, por isso a função de correlação decresce com o tempo. Na figura (b) observamos o mesmo comportamento do modelo de Hodgkin-Huxley, uma função de correlação que decai por ter apenas um pulso.

Este capítulo é baseado nas referências [26] e [30].

O estudo da bioeletricidade em seres vivos foi base para a criação de exames que detectam falhas nas diversas atividades elétricas do corpo humano. Este trabalho se concentra no estudo do eletrocardiograma.

## Eletrocardiograma - ECG

O eletrocardiograma reflete os eventos elétricos do conjunto de suas células. O eletrocardiograma que usamos hoje em dia foi idealizado por Einthoven, recebendo o Nobel por sua descoberta em 1924.

### 6.1 Um Pouco de História

Em *De Viribus Electricitatis in Motu muscolari*(1791), Galvani mostrou que o musculo de sapos se contraía via de estímulos elétricos [31]. No século seguinte, em 1820, Hans Christian Oersted registrou mudanças de corrente elétrica que causavam movimento em uma agulha, que foi chamado de "galvanômetro", em homenagem a Galvani. [32] [34]

Em 1908, Gabriel Lippmann ganhou o prêmio Nobel em física ao criar um eletrômetro capilar, que consistia de um tubo de vidro preenchido com mercúrio, e com um tubo capilar imerso em ácido sulfúrico diluído. O mercurio se movimentava quando havia alguma mudança no potencial elétrico, movimento esse que era projetado em uma tela de papel fotosensível. [33]

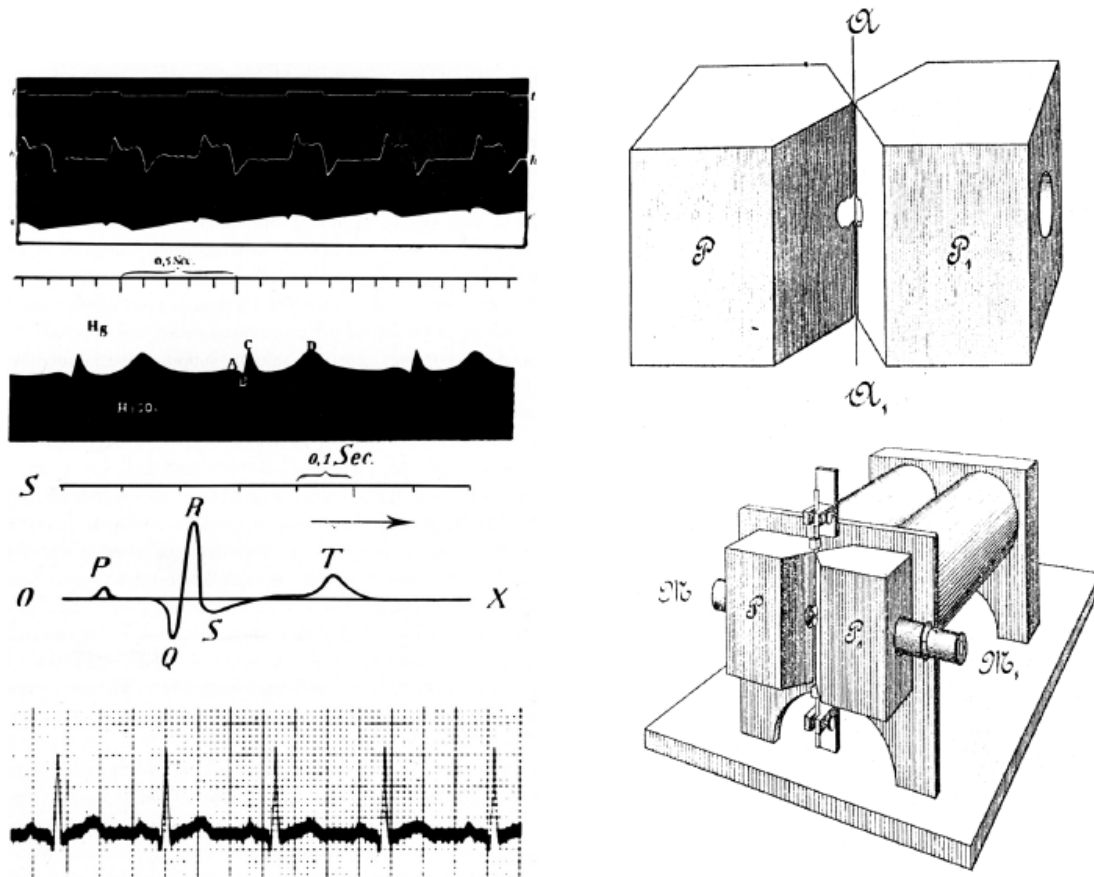
Augusto D. Waller, em 1887, foi o primeiro a provar que era possível captar o impulsos elétricos do coração humano através da pele, registrando o primeiro "eletrograma"(nome do aparelho na época) usando o eletrômetro capilar de Lippmann. [36] Após presenciar a demonstração de Waller, Einthoven iniciou os estudos da atividade elétrica do coração. Einthoven registrou sinais elétricos do coração com maior precisão devido ao seu vasto conhecimento em física e matemática, classificando o pulso em 5 defleções: P, Q, R, S e T, como será explicitado a seguir. [10] [33]

Einthoven não conseguiu aperfeiçoar o eletrômetro capilar de Lippmann o suficiente para fins diagnósticos, então ele cria o galvanômetro de cordas [37], instrumento com um fino filamento de quartzo revestido de prata entre dois eletroímãs. Uma corrente elétrica passa pelo filamento projetando o movimento ampliado com melhor resolução devido a massa e largura reduzida do filamento. [38]

O eletrocadiógrafo, nome dado ao galvanômetro de cordas, era extremamente grande e de difícil locomoção [33], mas após a primeira guerra mundial foram criados aparelhos portáteis e, o menor aparelho da atualidade é o *Holter*, que fica conectado a pessoa por 24 horas, para avaliar a resposta cardíaca do paciente em suas atividades normais. [35]

Desde então os equipamentos se modificaram, com a intenção de diminuir o ruído externo,

mas sua base continua a mesma. O equipamento de medida das variações de potencial no corpo precisa ter eletrodos que são fixados na pele limpa para diminuir a resistência elétrica e um amplificador, pois os eletrodos captam uma pequena magnitude, para discriminar o ruído externo. O amplificador tem uma entrada capacitativa balanceada para que só amplifique as voltagens que produzem correntes alternadas, pois o contato dos eletrodos sobre a pele estabelece um potencial de corrente contínua. [35]



(a) Sinais produzidos por Waller, primeiro, e por Einthoven seguintes, o último produzido pelo Galvanômetro de cordas.

(b) Galvanômetro de Cordas, instrumento com um fino filamento de quartzo revestido de prata entre dois eletroímãs.

**Figura 6.1 Eletrograma (século XX).** Na figura (a) foi feita comparação entre os sinais obtidos por Waller e Einthoven. E em (b), o maquinário usado para obtenção dos sinais. Ilustrações hitóricas retiradas de [35].

Cada fabricante ajusta os valores dos resistores de entrada, por esse motivo a distribuição de frequências tem formas diferentes para diferentes aparelhos. Ainda em *Individual Identification via Electrocardiogram Analysis*(2015), é mostrado que existem muitos empecilhos para melhorar o sinal do eletrocardiograma, e que existem características dos sinais que podem ser utilizadas para indentificar pacientes, existindo portanto, certos propriedades dos sinais que são individuais. [39]

## 6.2 Atividade Elétrica do Coração

Com o intuito de entender o eletrocardiograma, se torna necessário entender a atividade elétrica do coração. O coração tem como função principal bombear sangue para todos os tecidos do corpo, incluindo o seu próprio tecido. Esse fenômeno é essencialmente mecânico, porém é coordenado pela atividade elétrica que normalmente é iniciada no nódulo sinusal. O acoplamento entre o processo elétrico e mecânico é feito através do influxo de íons de cálcio aumentando a concentração de cálcio livre no interior da célula promovendo a contração das fibras musculares do miocárdio. Esse processo é diferente da contração das fibras musculares esqueléticas, neste o cálcio é liberado intracelularmente. [10]

O coração dos mamíferos é constituído por três camadas, o endocárdio, o miocárdio e o epicárdio, e está localizado no mediastino possuindo quatro cavidades, os ventrículos esquerdo(VE) e direito(VD) e os átrios direito(AD) e esquerdo(AE). Conectadas ao átrio direito estão a veia cava superior(VCS) e a veia cava inferior(VCI), conectadas ao átrio esquerdo estão as veias pulmonares: os vasos aórtico(Ao) e pulmonar(P). [10]

Uma única célula miocárdica compreende uma sucessão cíclica de dois eventos: o potencial de repouso e o potencial de ação. As células do coração estão associadas por ligações chamadas *nexus*, que têm baixa resistência elétrica, permitindo assim que haja facilidade no fluxo de corrente elétrica. Deste modo podemos dizer que qualquer região do miocárdio pode ser considerada um marcapasso. Em alguns casos, as áreas se ativam de forma desincronizadas e aparecem então as diversas formas de arritmia [10], entre elas a arritmia supra-ventricular, fibrilação atrial e ectopia ventricular que descreveremos no capítulo seguinte. Existem dois tipos de reposta elétrica nas células cardíacas, a resposta rápida e a resposta lenta, observada nos nódulos e válvas. Na resposta lenta a despolarização celular e a condução do estímulo têm velocidade reduzida, caso essas células apresentem resposta rápida encontramos arritmias. [27] [10]

O automatismo pode ser observado em certas células do coração, onde após a repolarização, o potencial da membrana diminui vagarosamente, chamado despolarização diatólica, até atingir seu limiar, deflagrando espontaneamente um potencial. Esse processo é encontrado experimentalmente nas células que pertencem ao nódulo sinusal(figura 6.2), mas também é encontrado em outras células de resposta lenta e nas fibras que compõem o sistema His-Purkinje. Nestas fibras, as fibras de Purkinje (células mais largas do coração), a despolarização diatólica é gerada principalmente pela corrente despolarizante, especialmente de íons de sódio, já no nódulo sinusal a corrente é considerada puramente de íons de potássio, diferenças necessárias para o automatismo, independência elétrica, do movimento cardíaco. [27]

A propagação do impulso cardíaco se inicia no nódulo sinusal, que está na parede posterior do átrio direito, se propagando até o miocárdio contrátil ventricular, músculo que envolve a cavidade ventricular. O grau de automatismo do nódulo sinusal é maior que o resto do sistema porém sua velocidade de condução é pequena. [27]

Entre o nódulo sinusal e o atrioventricular existem feixes, os feixes internodais, formados

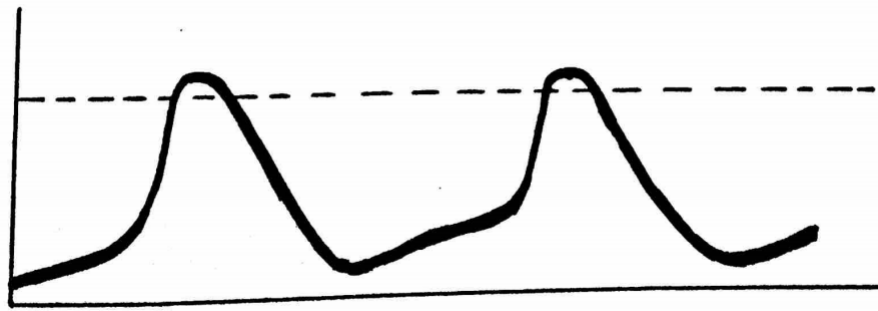


**Figura 6.2 Automatismo.** Observamos a curva do nó sinusal, que apresenta automatismo. Retirada de [27]

especialmente por fibras de Purkinje. O nó atrioventricular está próximo ao óstio do seio coronário, entrada da coleção de veias na parte posterior do sulco coronário, em seu interior há uma grande artéria, com fibras curtas que se entrelaçam. O sistema de His-Purkinje é formado pelo feixe de His, que se origina adjacente ao corpo fibroso central do nó atrio-ventricular sem seu entrelaçamento típico, e tem um conjunto de canais, que são compostos predominantemente por células do tipo Purkinje. [27] [10]

Podemos resumir a condução da seguinte forma: inicia-se no nó sinusal, se propaga preferencialmente pelos feixes internodais, ativando os átrios. Segue para o nó atrio-ventricular, alcançando o sistema de His-Purkinje, ativando a musculatura ventricular. A velocidade de propagação de cada etapa depende da resistência elétrica da célula; da capacitância elétrica, que está relacionada ao tempo que precede uma nova despolarização da célula, o período refratário; do diâmetro da fibra; e do potencial de repouso, relacionado com a amplitude de despolarização. [27]

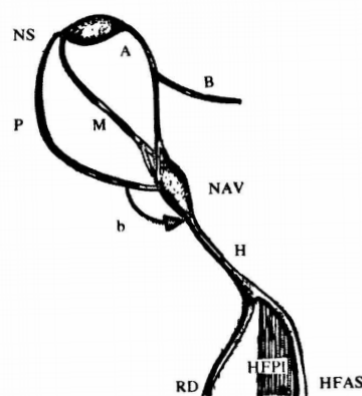


**Figura 6.3 Fibras da Condução.** NS é o nó sinusal; A, M, P e B são feixes internodais; NAV é o nó atrioventricular; b é o feixe de *by-pass*; H é o feixe de His; RD é o ramo direito; e HFAS e HFPI são os dois hemifascículos do ramo esquerdo. Retirada de [27]

O eletrocardiograma é baseado na teoria do dipolo para o coração. Um dipolo é formado por duas cargas separadas por uma distância,  $r$ . Em uma única célula miocárdica em repouso

elétrico, encontram-se vários dipolos elétricos perpendiculares a membrana, pois seu interior é negativo e o seu exterior é positivo. Após ser estimulada a resistência da membrana é minimizada surgindo então uma corrente através da membrana. [27]

Ao longo da membrana observamos zonas ativadas e as que ainda não foram ativadas, a corrente em um ponto é de curta duração, porém estimula os pontos próximos pela extensão da superfície da membrana. Aparecem novos dipolos com eixos paralelos à direção de propagação do sinal, o polo positivo na direção não ativada e negativo na região estimulada. [27]

Como o dipolo é uma grandeza vetorial é possível considerar a soma vetorial dos diversos dipolos ao longo da membrana como um dipolo equivalente que se desloca ao longo do processo de despolarização celular. Assim após o término do processo de despolarização da célula se inicia o processo de repolarização que tem sentido oposto, mas que é baseado na mesma ideia. [27]

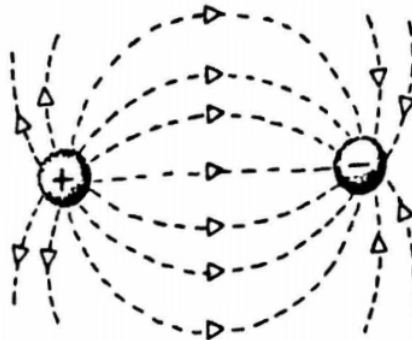


**Figura 6.4 Linhas de Campo de um Dipolo.** Observamos que as linhas de campo da carga positiva são direcionadas para longe da carga, para a carga negativa o sentido é oposto. Retirada de [27]

Cada ponto de carga cria um campo elétrico, um dipolo apresenta a mesma propriedade, formando um campo elétrico que é a soma vetorial do campo formado pelas suas duas cargas. Observamos as linhas de campo na figura 6.4. [27]

A quantidade escalar associada ao campo elétrico é o potencial elétrico que é dado para um dipolo por:

$$V_P = \frac{|m|}{|r|^2} \cos \alpha, \quad (6.1)$$

onde  $V_P$  é o potencial em um ponto P qualquer,  $\vec{m}$  é o momento elétrico do dipolo,  $\vec{r}$  é o vetor distância do centro do dipolo até o ponto de medida, P, e  $\alpha$  é o ângulo que esse vetor faz com o momento de dipolo,  $\vec{m}$ . Existem diversos dipolos relacionados a atividade cardíaca. [27] [10]

Muitos vetores de dipolos são formados nas fibras cardíacas. As ondas são planas para a despolarização, então podemos generalizar o cálculo de cada vetor de dipolo para uma frente de onda que ao se propagar forma um cilindro, resultando em um momento dipolar  $\vec{M}$  que depende da área da frente de onda. Em coordenadas cilíndricas podemos encontrar o potencial induzido

no mesmo ponto anterior:

$$V_{in} = \frac{|M| \cos \alpha}{r^2} = \frac{V_m \Omega}{4\pi}, \quad (6.2)$$

onde  $V_m$  é o potencial da transmembrana e  $\Omega$  é o ângulo sólido entre os vetores distantes do ponto de medida até os pontos da área vertical do cilindro. O potencial se reduz com o aumento da distância até o ponto de medição e também com a redução do ângulo sólido, então precisa-se medir a localização dos eletrodos de forma a aumentar a captação do potencial. [10]

Naturalmente, a despolarização começa com a ativação dos átrios no nódulo sinusal, progredindo pela junção sinoatrial nas paredes dos átrios. O primeiro átrio a ser ativado é o direito. Pela soma dos vetores de dipolo, o vetor da ativação do átrio direito é direcionado para baixo, para frente e levemente para a esquerda, considerando o referencial do paciente. No átrio esquerdo o vetor de direção é para trás, para a esquerda e levemente para baixo. Ao somar esses vetores, observa-se um vetor resultante chamado SAP, que é o vetor global de ativação dos átrios. Esse vetor é responsável pela transcrição da onda S (figura 6.5), que é a soma dos eventos de ativação dos átrios direito e esquerdo. [27] [10]

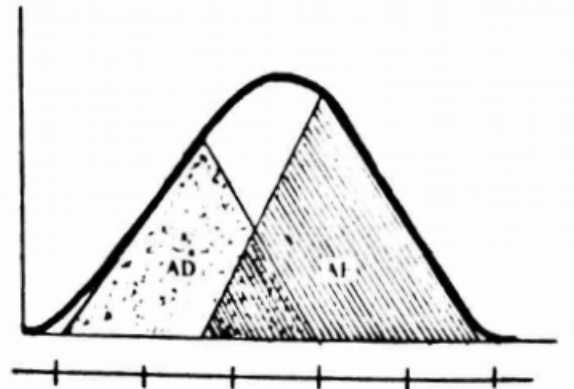


**Figura 6.5 Onda P** Retirada de [27]

Logo após a despolarização total dos átrios, inicia-se a repolarização, que também se inicia no nódulo sinusal, mas o vetor resultante tem sinal contrário à propagação da onda. Nos átrios, ambas ondas, de repolarização e despolarização, partem do mesmo ponto e se propagam longitudinalmente às suas paredes, permitindo o cálculo de vetores ao longo de suas fibras, que podem ser somados a fim de termos uma resultante para cada cavidade do miocárdio. [27] [10]

O estímulo progride chegando ao nódulo atrioventricular, durante a incisão da onda P. Caso não existisse o nódulo atrioventricular para retardar a condução, não seria possível observar a onda P independentemente, antes do complexo QRS, que representa a despolarização, ou ativação, ventricular. Experimentalmente é encontrado que a condução sinoventricular acontece independente da condução sinoatrial. [27]

O intervalo conhecido como intervalo PR é formado pela onda P e o segmento PR, segmento isoeletrico que antecede o complexo QRS. Durante esse intervalo ocorre a despolarização dos

átrios e após o retardo do estímulo no nódulo atrioventricular, a despolarização do feixe de His, que não é captada pelo eletrocardiograma convencional. [27] [10]

A ativação ventricular se inicia na parte média do septo esquerdo e, ao mesmo tempo, que desce pelo septo direito na direção do ramo direito, que observamos na figura 6.3. Como há mais massa muscular no ventrículo esquerdo, o vetor resultante de ativação septal média, o vetor septal ou septo médio, apontará para frente, para a direita e é dirigido para cima ou para baixo dependendo da posição elétrica do coração. Esse é o primeiro vetor de ativação ventricular. [27]

Quando as superfícies septais são despolarizadas, segue o estímulo para a região baixa do septo, formando o segundo vetor de ativação ventricular, o vetor de septo baixo. Este é direcionado para frente, para esquerda e para baixo. [27]

O terceiro vetor de ativação é o chamado vetor de parede livre do ventrículo esquerdo, que está relacionado com a progressão da onda de ativação através das paredes laterais dos dois ventrículos. O vetor tem maior amplitude e é direcionado para a esquerda, para trás e para cima ou para baixo dependendo da posição elétrica do coração. [27]

O quarto e último vetor de ativação ventricular é o vetor basal. Representando a chegada do processo de ativação à parede póstero-lateral e basal dos ventrículos, podendo apontar para a esquerda ou direita em pacientes saudáveis, e direcionado para trás e para cima. Nos ventrículos, as ondas são transversais às paredes tendo vetores na direção das camadas cardíacas, e estes se modificam de forma contínua, modificando o vetor resultando a cada instante. As células epicárdicas ventriculares apresentam potenciais de ação mais curtos. [27] [10]

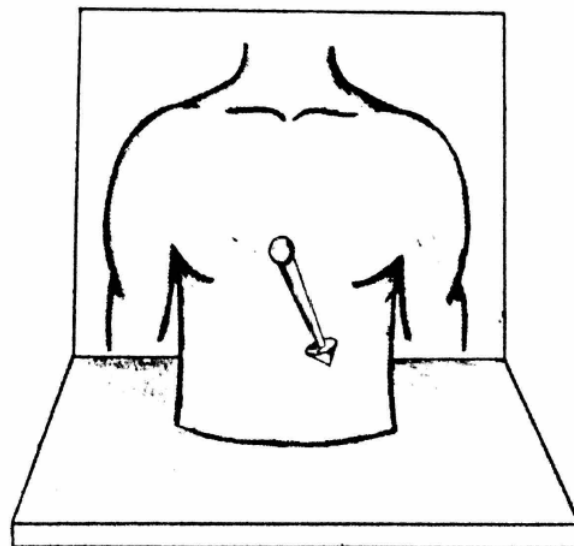


**Figura 6.6 Vetor médio de QRS no espaço.** Representado nesta figura está o vetor resultante de inscricção do complexo QRS. Retirado de [27]

Para os ventrículos a repolarização se inicia antes da despolarização completa do órgão, mas os vetores iniciais de repolarização não têm amplitude suficiente para se manifestar, então após o complexo QRS, encontra-se um segmento isoeletrico, ST, que antecede a onda T. Em uma célula

isolado e nos átrios a repolarização se inicia no ponto de início da despolarização, o que não ocorre nos ventrículos. Nos ventrículos as direções de despolarização e repolarização se opõem por terem direções opostas literalmente entre diferentes tecidos, a repolarização acontece do endocárdio para o epicárdio e a despolarização no sentido contrário. Os dipolos de repolarização apontam no sentido contrário ao sentido de condução, por esse motivo o dipolo resultante que inscreve o complexo QRS tem o mesmo sentido que o vetor de repolarização que inscreve a onda T. [27]

É importante comentar que esse procedimento é apenas didático e representativo para melhor entendimento do exame. Os processos elétricos do miocárdio acontecem de forma contínua, explicou-se acima como se o processo estivesse sendo "fotografado" em certo momento. [27]

### 6.3 O Eletrocardiograma

Pela proposta de Einthoven, o coração está ao meio de um triângulo equilátero formado pelos ombros e região inguinal esquerda, as forças elétricas podem ser representadas por vetores dipolares aplicados no centro do triângulo e o meio em que está o coração deve ser considerado um volume condutor homogêneo. Na realidade, o triângulo é aproximadamente escaleno, o coração não está ao meio dele e não é envolvido por um meio homogêneo. [10]

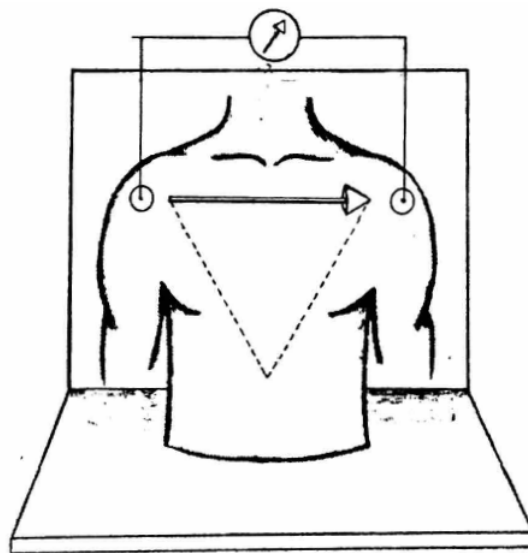


**Figura 6.7 Derivação Bipolar D1.** A derivação bipolar de Einthoven entre as articulações dos ombros, apesar dos eletrodos serem colocados nos punhos como simples extensões elétricas dos ombros. Retirado de [27]

As derivações eletrocardiográficas são eixos elétricos que unem eletrodos para captar os potenciais elétricos, a linha que une dois eletrodos. Para Einthoven existiam três derivações, que são conhecidas como derivações bipolares dos membros: a diferença ( $D_1$ ) entre o poten-

cial do braço esquerdo( $V_E$ ) e do braço direito( $V_D$ ), a diferença( $D_2$ ) entre o potencial da perna esquerda( $V_L$ ) e do braço direito( $V_D$ ) e a diferença( $D_3$ ) entre o potencial da perna esquerda( $V_L$ ) e do braço esquerdo( $V_E$ ). Estas são as derivações relacionadas ao triângulo de Einthoven. [10] [27]

Posteriormente, foram acrescentadas as derivações unipolares e pericordais. As derivações unipolares são a central terminal de Wilson(CTW) e a central terminal de Goldberg(CTG), a fim de medir o potencial absoluto de cada extremidade do corpo. A central terminal de Wilson é baseada nas leis de Kirchhoff, onde em um circuito fechado a diferença de potencial é nula [10]:

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0.$$

Nesse caso, existe um eletrodo de referência que é sempre nulo e outro chamado explorador que é conectado a cada um dos eletrodos dos membros, para registrar a evolução temporal dos potenciais. Esta configuração apresenta ondas de baixa amplitude, por isso foi necessário modificar essa configuração da forma CTG. [10]

Para a central terminal de Goldberg, o eletrodo explorador está conectado a um dos eletrodos dos membros e o eletrodo de referência não é mais a junção de todos os potenciais, mas dos potenciais restantes. Essa nova configuração tem o nome de derivação unipolar aumentada. [10]

As derivações precordiais foram propostas por Wolfeth & Wood em 1932. Estas são captadas através da superfície torácica. O primeiro eletrodo( $V_1$ ) fica no quarto espaço intercostal direito próximo ao esterno, o segundo( $V_2$ ) fica no quarto espaço intercostal esquerdo também próximo ao esterno, o quarto( $V_4$ ) está no quinto espaço intercostal esquerdo na linha hemiclavicular, o terceiro( $V_3$ ) fica na meia distância entre  $V_2$  e  $V_4$ , do quinto ao nono( $V_5$ - $V_9$ ) estão no mesmo nível que o quarto mas nas linhas axilar anterior esquerda, média esquerda, posterior, escapular média e paravertbral esquerda, e o último na ponta do apêndice xifóide( $V_E$ ). Na figura 6.8 podemos ver a posição de  $V_1$  a  $V_6$ . Em alguns casos de nas posições de  $V_3$  a  $V_9$  são colocados no lado direito do corpo. [10] [40]

Essas posições são sutilmente modificadas para se adaptar à posição do coração. [40]

Einthoven classificou o pulso cardíaco em 5 defleções, hoje em dia existem 6 deflexões. A onda P do eletrocardiograma é formada quando começa a despolarização no nódulo sinoatrial(NSA) e percorre a musculatura atrial. A curva tem contorno suave, que é o resultado da soma da atividade de despolarização dos atrios, esta curva é normalmente monofásica. [10]

Temporalmente, a onda P inicia-se com o despolarização do NSA, sua largura é alusivo a despolarização ao longo dos átrios e ao final da onda acontece a despolarização do nódulo atrioventricular(NAV), e por último um segmento PR, que abrange a despolarização do NAV e propagação do pulso pelo sistema His-Purkinje. Existe uma onda chamada Ta, que representa a repolarização arterial, mas esta onda é mascarada pela despolarização ventricular. [10] [40]

Quando os impulsos elétricos das fibras de Purkinje atingem o sépto interventricular, primeira porção a despolarizar, há uma reação em cadeia contínua, formando uma soma de ondas

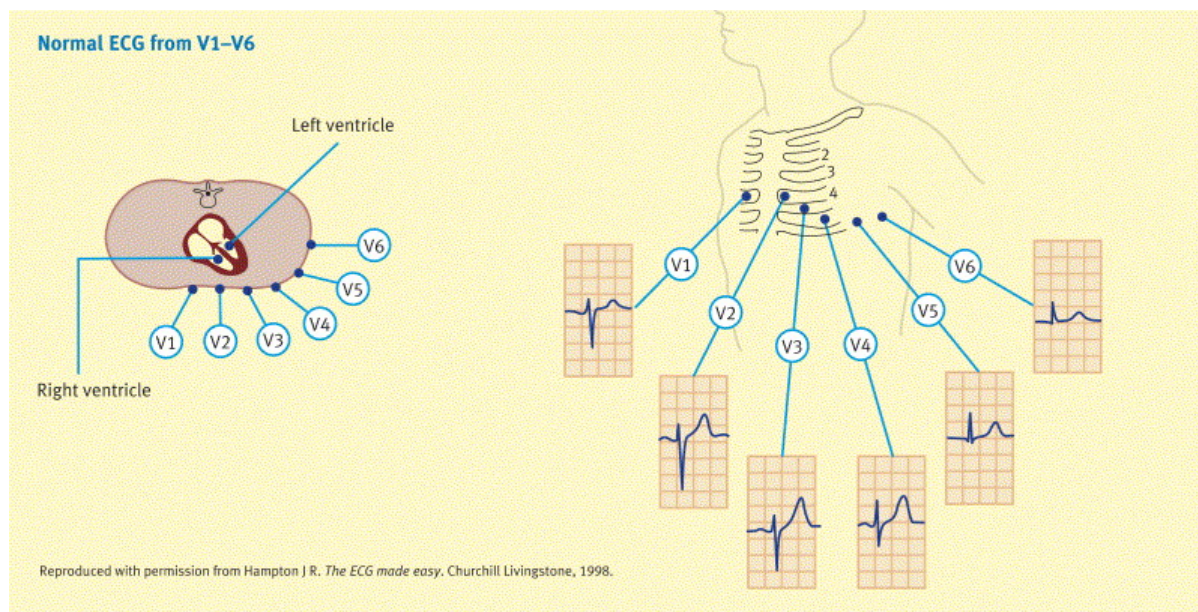


**Figura 6.8 Derivações Pré cordiais.** Posição dos eletrodos para registrar derivações precordiais à esquerda e corte transversal do tórax, com os eixos das derivações precordiais. Retirada de [40].

elétricas chamada complexo QRS, a onda Q é negativa e precede a onda R, primeira deflexão positiva seguida de uma deflexão negativa, a onda S. [10] [40]

Ao final da despolarização ventricular e começo da repolarização está o segmento ST que precede a onda T, em eletrocardiogramas (ECGs) normais o desnivelamento deste segmento não é maior que 1mm. Nas taquicardias, por efeito da adrenalina esse segmento pode apresentar grande amplitude. O único segmento verdadeiramente isoeletrico é aquele entre o final da onda T e o início da nova onda P. Onde T é referente a repolarização ventricular e é assimétrica pois sua taxa de crescimento é menor que a de decrescimento. O tempo total da sístole ventricular é o chamado QT, desde o começo do segmento QRS até o final da curva T. O resultado final desse processo pode ser visto na figura 6.9. [40] [10] [18]

Arritmias são modificações na atividade elétrica e mecânica do coração, essas podem decorrer do início ou de condução anormal do estímulo elétrico do coração. [10] [41]

As anormalias decorrentes de início anormal se subdividem em anormalidades de automatismo ou de atividade deflagrada. Anormalidades de automatismo acontecem quando há uma despolarização de uma ou mais células fora de compasso, apresentando um foco elétrico ectópico ao nódulo sinusal, onde se inicia os pulsos elétricos atriais. O sinal eletrocardiográfico apresentará inícios e terminos mais longos com supressão de ritmos rápidos. A taquicardia atrial ectópica é a mais comum desse tipo de arritmia e pode, se não for tratada, culminar em uma disfunção sistólica do ventrículo esquerdo, ou taquicardiomiopatia. [41]

As anormalidades de atividade deflagrada, são observadas no fenômeno de pós-despolarização e decorrem de estímulos anteriores ao início do pulso. A pós-despolarização precoce acontece quando há uma repolarização rápida de forma a atingir um platô que possibilita um novo potencial de ação, em tempo reduzido. Pode ser causada por medicamentos, mas o funciona-

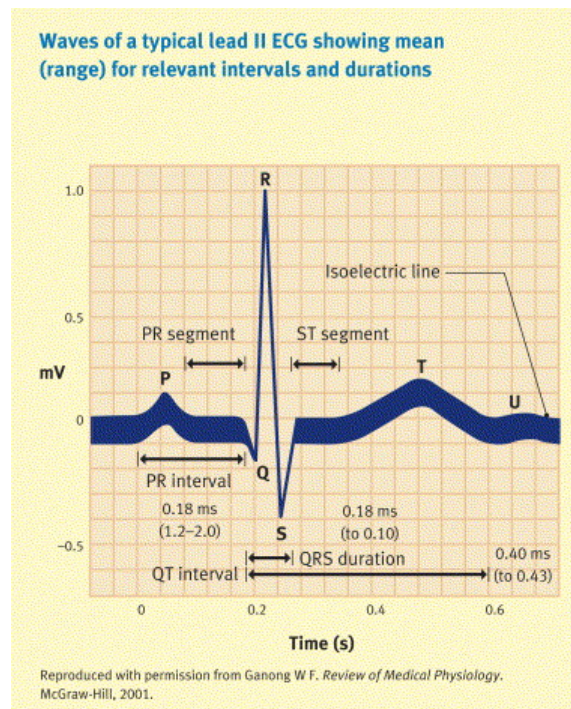


**Figura 6.9 Ondas discriminadas do sinal de ECG.** Observa-se os formatos normais das ondas P(onda relacionada a excitação dos átrios), do segmento QRS(relacionado a excitação dos ventrículos) e das ondas T e U que terminam o ciclo com a repolarização do maquinário elétrico do coração. Retirada de [40]

mento dessa anomalia ainda não é bem conhecido. A pós-despolarização tardia é induzida por oscilações no potencial da membrana após a repolarização, e culmina no acúmulo de cálcio intracelularmente. [41] [10]

Nas arritmias causadas por anormalidades na condução do estímulo, os pulsos elétricos que deveriam extinguir-se mantêm sua atividade, excitando células nos átrios e ventrículo após o período refratário (período onde acontece a repolarização). Esse processo é chamado reentrada, a mesma onda causa excitação nas células mudando o caminho normal de propagação do estímulo. Essa arritmia pode ser causada por anormalidades anatômicas ou funcionais. Quando a anormalidade é anatômica a arritmia é estável, pode se dar, por exemplo, após um infarto, onde parte das células sofrem necrose formando uma cicatriz. As anormalidades funcionais estão relacionados a disfunção na ativação das células será variável com as condições de excitabilidade do tecido. [10] [41]

Existem ainda outras formas de classificar arritmias, mas sob a intenção de ilustrar o fenômeno não se faz necessário citar as demais formas. Para mais informações em arritmias as referências [41] e o segundo tomo do livro referenciado por [27] são leituras sugeridas.

Para uma descrição mais detalhada e fisicamente correta do eletrocardiograma recomendamos a leitura do livro de referência [27].

## Resultados e Discussão

O método descrito no capítulo 2 também foi utilizado para séries temporais do eletrocardiograma, com o objetivo de encontrar uma relação entre a densidade de máximos, comprimento de correlação e doenças cardiovasculares.

### 7.1 Base de dados MIT-BIH

Na plataforma Physionet [42] existe um vasto conjunto de sinais de diferentes bases de dados pelo mundo, a base com maior diversidade de sinais de ECGs é a base do MIT e the Beth Israel Deaconess Medical Center(BIH, "*Beth Israel Hospital*").

#### 7.1.1 Sinus Normal

O primeiro grupo de sinais(sinus normal) contém, de acordo com dados MIT/BIH, 17 pacientes observados por duas horas e 10 minutos com um intervalo de aquisição da atividade elétrica de 0.0078 segundos, não demonstrando doenças cardiovasculares. [42] [43] [44]

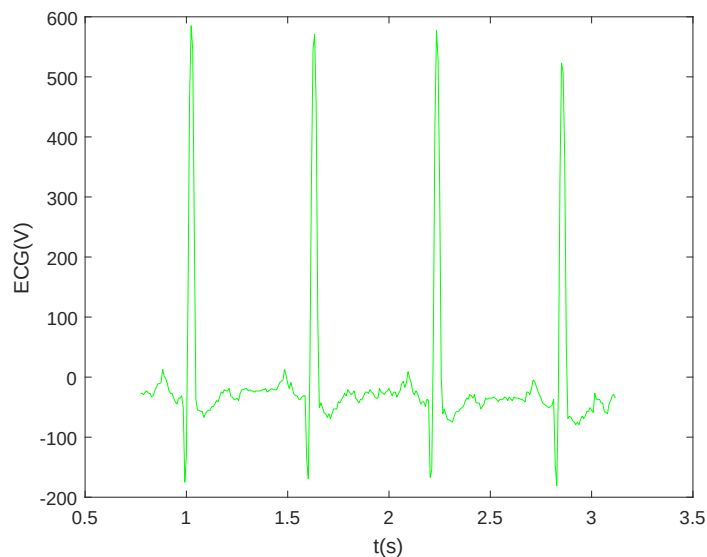


**Figura 7.1 Fração de três segundos da série temporal do ECG.** É visto que para essa aquisição do ECG a onda de deflexão Q tem maior amplitude que a onda S, contrário à representação da figura 6.9

Como pode ser observado na figura 7.1, que representa uma fração (em três segundos)

do ECG de um dos pacientes, os picos estão representados de forma harmônica, regidos pelo compasso das fibras miocárdias. As ondas P, Q, R, S, T e U se apresentam como esperado em um ECG normal. Entretanto observamos pequenas oscilações ao longo da série temporal provenientes dos ruídos aleatórios. Ruídos estes advindos de diversas fontes tais como: ruído do próprio paciente [39], da máquina e vindo de eventuais correntes alternadas pelos tecidos musculares.

Na interpretação do ECG, deve-se observar diferentes parâmetros tais como sexo, idade e frequência cardíaca (tabelas 1.1 e 1.2). Demonstrando alta variabilidade na análise das ondas do ECG, podendo levar a erros.

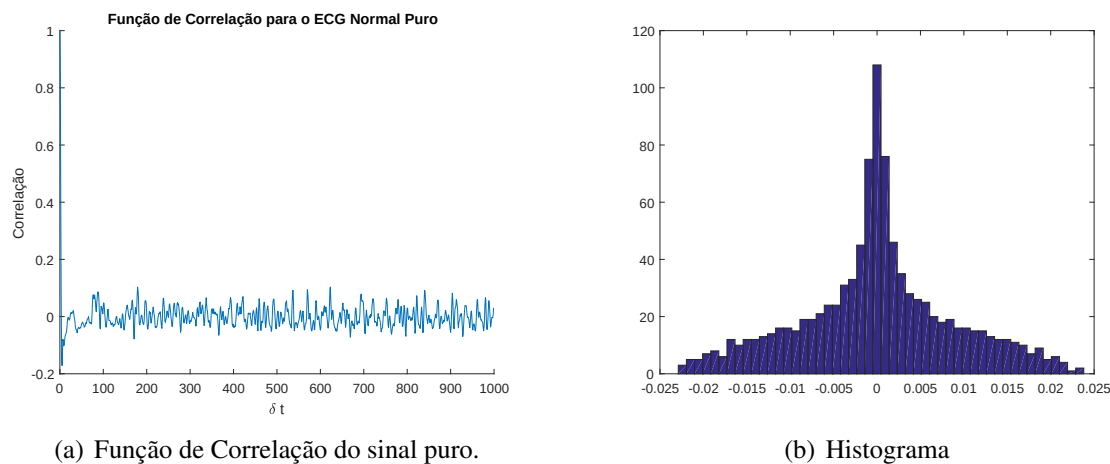


**Figura 7.2 Ruído aleatório no ECG.** Na figura (a) observa-se a função de correlação de um sinal puro de ECG, que decai de forma abrupta, uma indicação de ruído aleatório. A figura (b) representa o histograma de Wigner, que mostra em suas laterais autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12].

A função de correlação ( $C(\delta t)$ ), obtida sem a utilização de filtros, do ECG da figura 7.1 decai rapidamente (de um para  $-0.2$ , figura 7.2(a)) demonstrando que em pouco tempo já não existe correlação (em média) entre o primeiro ponto e os seguintes indicando influências aleatórias internas.

Apesar de todo maquinário moderno ter diversos mecanismos de redução desses ruídos externos, ainda não foi possível retirá-lo completamente. Para confirmação de nossa hipótese, existência de influências aleatórias, calculamos o histograma de autovalores (figura 7.2(b)) mencionado na seção 2.1 e observamos um pico central e em suas laterais encontramos a presença de autovalores diferentes que, de acordo com o método apresentado por Xuesong et al. [12], sugere a existência de ruído aleatório, o que está de acordo com a nossa avaliação da função de correlação sem filtro.

Para remover esse ruído, que não é relevante ao estudo de caos, foi utilizada a função do matlab chamada `ifilter` ([16], seção 2.2). Essa filtragem nos permitiu ter sinais mais limpos, explicitados na figura 7.3.

As funções de correlação dos sinais filtrados permitiram um colapso total dos primeiros

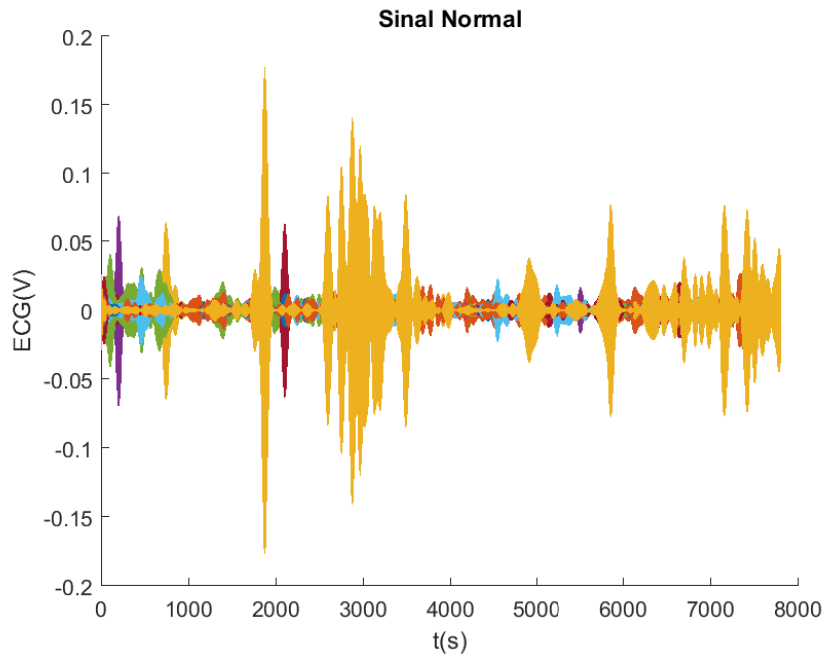


**Figura 7.3 Sinais de ECG normal (pós filtro).** Após a transformação do sinal pela transformada de Fourier, o sinal perde sua forma característica, mas carrega as mesmas características estatísticas. O espaço de frequências apresenta frequências características que tinham menor amplitude relacionados ao ruído aleatório, após um filtro passa banda, essas frequências foram retiradas e o sinal resultante foi analisado. Aqui estão representados os sinais de 17 pacientes, discriminados por cores diferentes.

segundos de forma a termos como comprimento de correlação  $\tau \approx 101$  (figura 7.4(a)) em função da quantidade de pontos.

Utilizando os métodos descritos por Ramos et al. (2011 [8] e 2017 [9]) medimos a densidade de máximos para todos os sinais e obtivemos uma média de  $\langle \rho \rangle = 0.0016464$  por número de pontos, com variância de  $\sigma^2 = 2.4868 \times 10^{-11}$ , calculando o  $\langle \rho \rangle$  da equação 2.15 (capítulo 2 por derivada numérica utilizando cinco pontos,  $\langle \rho \rangle_{5pts} = 0.0016411$ , e para três pontos,  $\langle \rho \rangle_{3pts} = 0.0016426$ , verificamos uma diferença entre esses resultados e a densidade de máximos calculada mecanicamente na quinta casa decimal. Em adição, calculamos o comprimento de correlação pela equação  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  [9] obtendo  $\tau_p \approx 101.23$  que é aproximadamente o valor encontrado a meia altura da função de correlação sem a necessidade de calcular a função de correlação propriamente dita (figura 7.4(a)).

Duplicando a largura de frequências do filtro observamos que as funções de correlação se distanciam pelo surgimento de frequências individuais (figura 7.4(b)). O sinal se torna mais ruidoso, porém ainda é viável encontrar um comprimento de correlação médio  $\langle \tau \rangle = 102 \pm 2$ , com média de densidade de máximos  $\langle \rho \rangle = 0.0016502$ , por quantidade de pontos, e sua variância é  $\sigma_\rho = 3.7404 \times 10^{-11}$ , pela equação  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  o comprimento de correlação é  $\tau \approx 100.998$ .

Portanto, utilizando o método de Ramos et al. [9] no ECG confirmamos a relação inversa entre a densidade de máximos e o comprimento de correlação. Desta forma, caracterizamos o

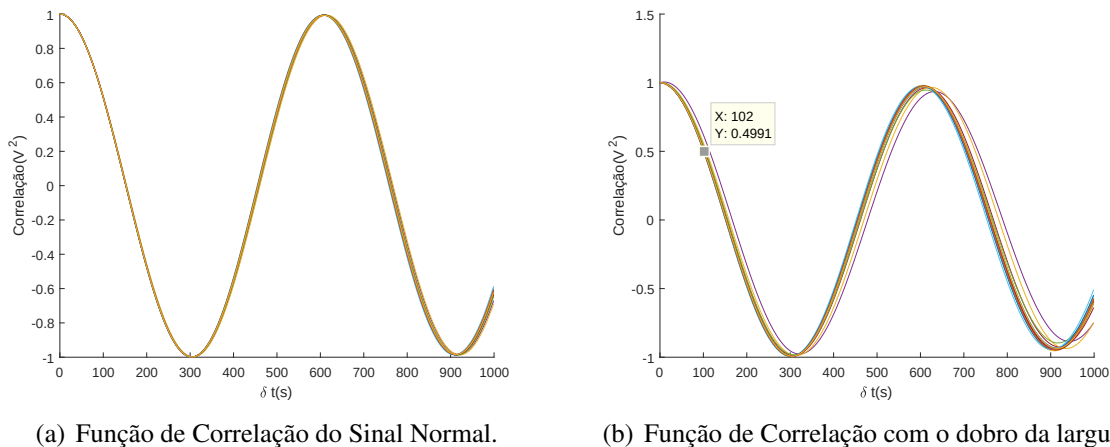


**Figura 7.4 Funções de Correlação do ECG normal.** Observamos que para ambas as condições, existe um colapso dos primeiros segundos da função de correlação com um comprimento de correlação estatisticamente relacionado. Observamos um comprimento de correlação de aproximadamente 101 pontos. Cada paciente representado por uma cor.

caos do ECG de diferentes pacientes por um único número, o comprimento de correlação, de fácil obtenção e similar para diversos pacientes com mesma condição.

Para diagnosticar um paciente através de uma análise tradicional de ECG são necessários observar os formatos(largura, período e amplitude) das ondas P, Q, R, S, T e eventualmente U que formam seus ciclos.

Implementar um algoritmo no matlab para identificar o período, amplitude e largura das ondas P, S e T(sinal normal) não é trivial, em razão da oscilação de amplitudes, por esse motivo a análise dessas ondas foi feita por observação. A onda P está presente e bem discriminada com uma amplitude de aproximadamente 5.856V na maioria dos ciclos da série temporal estudada, mas em alguns trechos sua amplitude foi a mesma do ruído, tornando a onda indistinguível mesmo após aplicação de um algoritmo de redução de ruído. O mesmo aconteceu repetidamente com a onda T, em grande parte dos ciclos as ondas T e U não se distinguem do ruído. Uma análise das amplitudes do sinal está feita na tabela 7.1

|            | Média        | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|--------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 590.40V      | 26.06V        | 706.22V          | 404.2V           |
| Onda Q     | 174.46V      | 23.90V        | 427.78V          | 127.78V          |
| Período(t) | 86.98 pontos | 10.16 pontos  | 142 pontos       | 56 pontos        |

**Tabela 7.1 Análise tradicional do ECG normal.** Através de um simples algoritmo foi possível adquirir a média de amplitudes das ondas R e Q e do período dos ciclos, que foi calculado através das distâncias entre os picos da onda R, observados na série temporal. Para o sinal saudável não observamos grandes desvios padrões. Porém as diferenças entre valores máximos e mínimos das amplitudes e do período conferem ao método uma suscetibilidade à erro quando o sinal é curto.

Na intenção de testar a validade do método tradicional para um sinal de curta duração,

foi escolhida uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 7140 pontos e observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 523.32$ ,  $\langle Q \rangle = 149.53$  e  $\langle t \rangle = 66.75$ , que estão fora do valor previsto pelo desvio padrão. O método tradicional requer uma grande quantidade de pontos para ser analisado.

O método desenvolvido neste trabalho tem como característica principal o estudo da densidade de máximos. No gráfico 7.5 demonstra-se a quantidade de pontos necessárias para a densidade de máximos convergir para um valor fixo, mostra-se que com menos de 1000 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

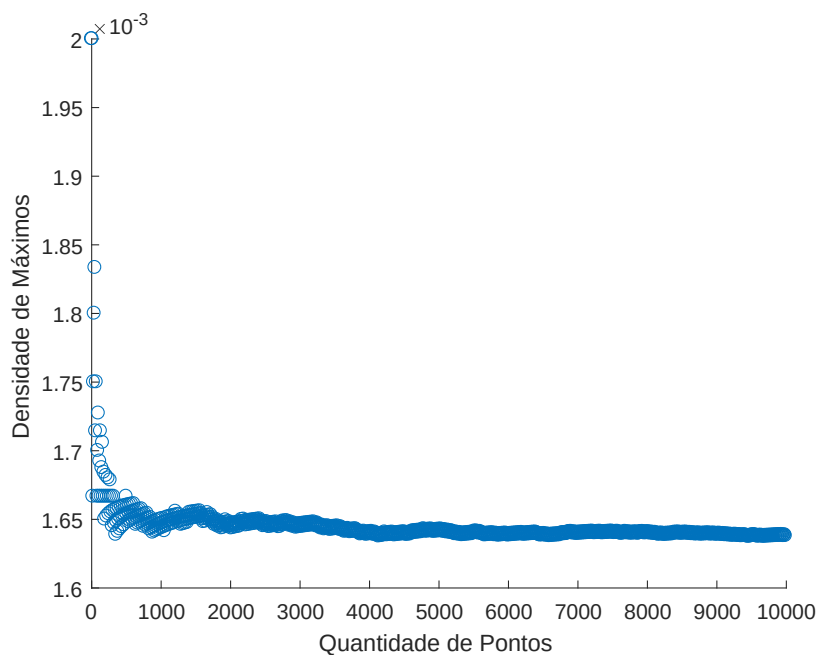


**Figura 7.5 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.

### 7.1.2 Arritmia Ventricular

Na base de dados MIT-BIH para arritmia ventricular estão os sinais elétricos de 22 pacientes observados em um tempo de registro de 35 min com um intervalo de aquisição de 0.04 segundos. A obtenção desses sinais foi feita para a construção de um programa utilizando "*machine learning*" para reconhecimento de padrões característicos no sinal elétrico. [45] [46]

Os sinais representam fibrilação ventricular que é uma série de contrações descompassadas e rápidas, taquicardia (frequência cardíaca aumentada) ventricular, que tem fator alto de mortalidade. O ECG mostra um sinal elétrico de alta frequência, totalmente irregular, sem ondas T e redução de amplitude das ondas R. [41]

Para retirar os ruídos externos utilizamos a função do matlab, `ifilter` ([16], seção 2.2) e obtivemos os sinais apresentados na figura 7.6.

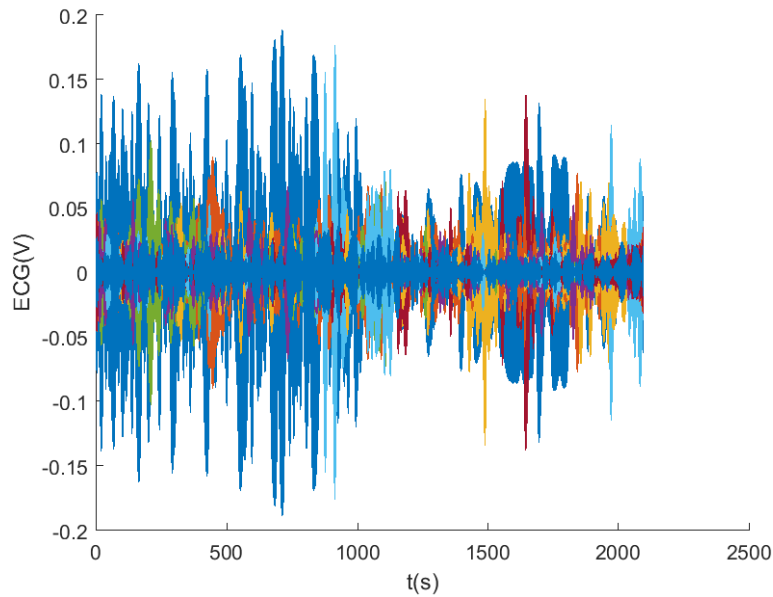


**Figura 7.6 Sinais da Fibrilação Ventricular após filtro.** Após o filtro passa-banda de fourier (seção 2.2) observamos diferentes formatos entre as séries temporais dos 22 pacientes, representados por diferentes cores.

Pelas funções de correlação (figura 7.7) dos sinais filtrados, observamos um colapso total dos primeiros segundos, comprimento de correlação para todos os pacientes de  $\tau \approx 38$  por pontos e um média de densidade de máximos  $\langle \rho \rangle = 0.0043967$  por número de pontos, com variância de  $\sigma^2 = 1.6681 \times 10^{-11}$ , calculando o  $\langle \rho \rangle$  da equação 2.15(capítulo 2) por derivada numérica utilizando cinco pontos,  $\langle \rho \rangle_{5pts} = 0.0043558$ , e para três pontos,  $\langle \rho \rangle_{3pts} = 0.0043857$ , verificamos uma diferença entre esses resultados e a densidade de máximos calculada mecanicamente na quinta casa decimal. Assim por  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  podemos estimar o comprimento de correlação por  $\tau \approx 37.91$  concordando com a hipótese de que o comprimento de correlação e a densidade de máximos são inversamente proporcionais.

Portanto, a correlação entre os pontos do sinal elétrico da arritmia ventricular decai mais rapidamente do que a correlação do sinus normal ( $\tau_n = 101$ ). Isso se deve ao fato de que a arritmia ventricular apresenta um sinal irregular que, por vezes, tem supressão das ondas R e desaparecimento das ondas T, demonstrando clara diferença para o comportamento de um sinal doentil. Os cálculos nos fornecem um único número de caracterização da fibrilação ventricular, que difere do número que caracteriza o sinal saudável.

A análise tradicional de um paciente com arritmia ventricular através do ECG é diferente do ECG normal.

Por observação detectamos que as ondas P aparecem em apenas alguns ciclos, que para a arritmia ventricular não são completos, as ondas T quando aparecem têm amplitude aproximada de 52.856V e aparece como uma onda ruidosa, isto é, com diversas frequências, a onda R tem sua amplitude diminuída e largura aumentada consideravelmente e a onda S se confunde

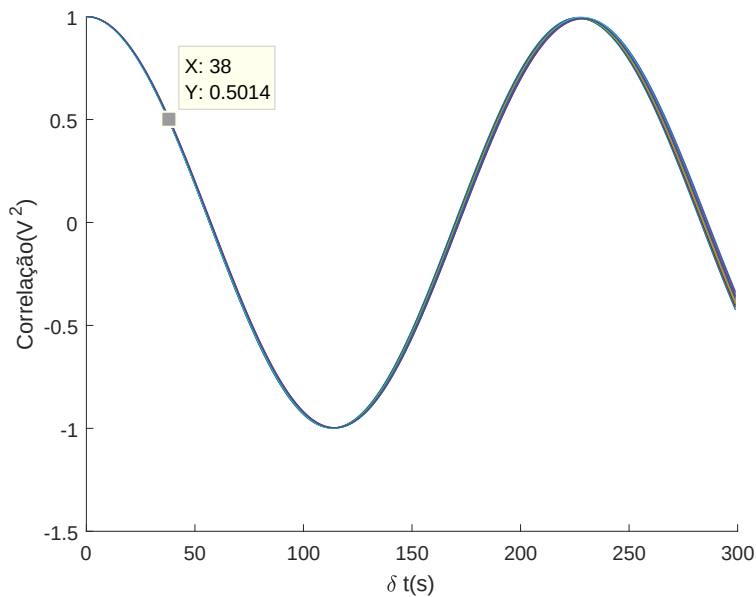


**Figura 7.7 Funções de correlação para pacientes apresentando Fibrilação Ventricular.** Observamos que os primeiros segundos convergem para um comprimento de correlação de 38 pontos em todos os pacientes.

com o ruído. O ruído também interfere na onda R que, por sua largura, adquire diferentes frequências, atrapalhando também a análise automatizada do sinal. Na tabela 7.2, observamos o comportamento do sinal através da estatística dos seus ciclos.

|            | Média        | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|--------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 125.89V      | 64.54V        | 377.46V          | 11.47V           |
| Onda Q     | 180.70V      | 31.58V        | 290.53V          | 110.53V          |
| Período(t) | 93.74 pontos | 35.24 pontos  | 401 pontos       | 41 pontos        |

**Tabela 7.2 Análise tradicional do ECG apresentando fibrilação ventricular.** Através do mesmo algoritmo utilizado para a análise do ECG normela foi possível adquirir a média de amplitudes das ondas R e Q e do período dos ciclos observados na série temporal. Para este sinal observamos desvios padrões maiores e, principalmente para R e t, as diferenças entre valores máximos e mínimos são grandes, conferindo ao método tradicional uma suscetibilidade à erro em um sinal de curta duração.

Validando o método tradicional para um sinal de curta duração, escolhemos uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 7500 pontos e observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 90.39$ ,  $\langle Q \rangle = 161.54$  e  $\langle t \rangle = 91.60$ , que estão dentro do valor previsto pelo desvio padrão, mas neste caso o desvio padrão para a amplitude da onda R é grande e modifica a média de forma drástica. Causando erros na análise do sinal.

Para este sinal específico, o sinal observado é distinto em formato dos demais. Analisando principalmente a densidade de máximos, não se faz necessário conhecer o perfil da doença. No

gráfico 7.8, a quantidade de pontos necessárias para a densidade de máximos convergir para um valor fixo é elucidada, com menos de 1500 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

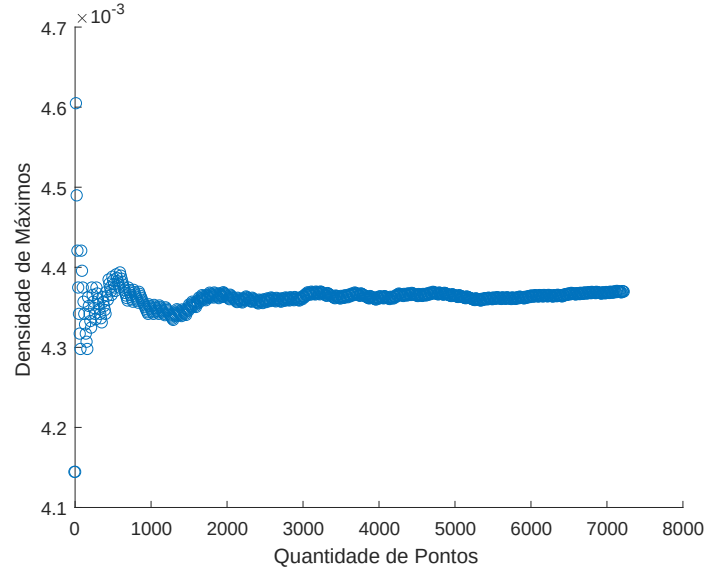


**Figura 7.8 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos para Fibrilação Atrial.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.

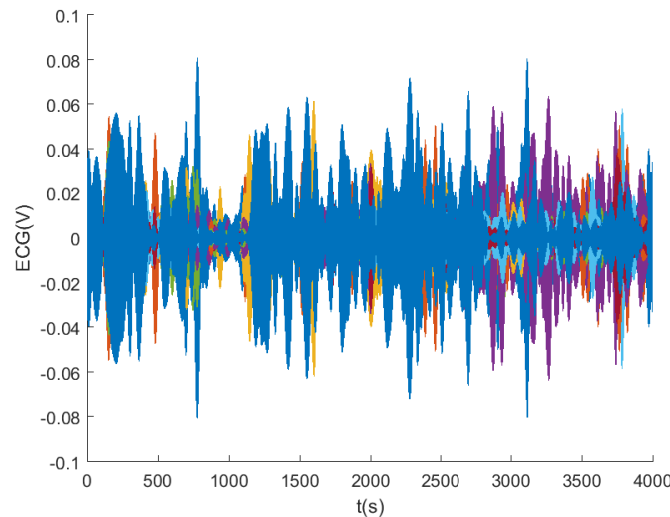
### 7.1.3 Fibrilação Atrial

A fibrilação atrial é extremamente comum sendo um tipo de taquicardia caracterizada por atividade rápida e irregular nos atrios. Para seu diagnóstico observa-se uma instabilidade elétrica com alternância entre altas e baixas frequências, com sístoles atriais (contrações) adicionais, incorporando ondas P no segmento QRT. [47] [41]

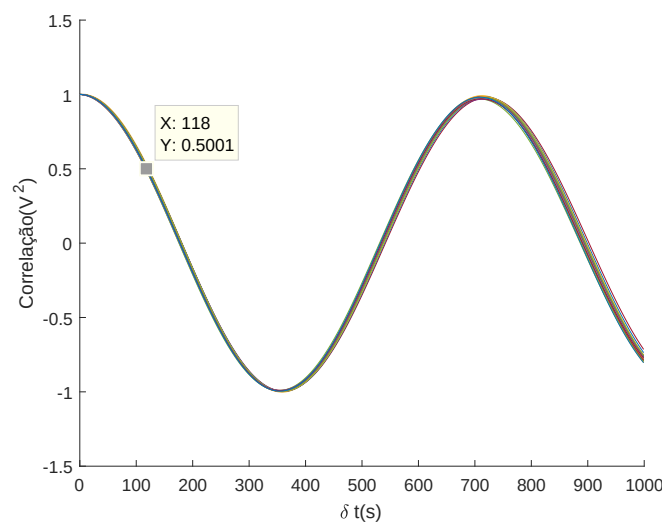
Para tirar o ruído foi utilizada a função do matlab chamada ifilter( [16], seção 2.2). Essa filtragem nos permitiu ter um sinal mais limpo, explicitado na figura 7.9(a).

As funções de correlação (figura 7.9(b)) dos sinais filtrados colapsam totalmente nos primeiros segundos com comprimento de correlação  $\tau \approx 118$  por pontos e um média de densidades de máximos de  $\langle \rho \rangle = 0.0014031$ , por número de pontos, com variância de  $\sigma^2 = 3.939 \times 10^{-11}$ , calculando o  $\langle \rho \rangle$  através da equação 2.15(capítulo 2) por derivadas numéricas utilizando cinco pontos,  $\langle \rho \rangle_{5pts} = 0.0014021$ , e para três pontos,  $\langle \rho \rangle_{3pts} = 0.0014033$ , verificamos uma diferença entre esses resultados e a densidade de máximos calculada mecanicamente na sexta e sétima casas decimais, respectivamente. Assim por  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  podemos estimar o comprimento de correlação por  $\tau \approx 118.784$  essa estimativa é consistente com a hipótese de que o comprimento de correlação e a densidade de máximos são inversamente proporcionais.

Portanto, percebemos que o comportamento da correlação para a fibrilação atrial é consideravelmente maior que o dos comprimentos de correlação relacionados a arritmia ventricular ( $\tau_{av} \approx 38$ ) e ao sinus normal ( $\tau_n \approx 101$ ). Na fibrilação atrial esse resultado é esperado devido às excitações extras das fibras miocárdicas atriais, introduzindo um vínculo de correlação entre os pontos da série temporal.



(a) Sinais de ECG para Pacientes com Fibrilação Atrial (pós filtro).



(b) Função de Correlação para Pacientes com Fibrilação Atrial

**Figura 7.9 Funções de Correlação do ECG normal.** Na figura(a) vemos que após um filtro passa banda, as frequências relacionadas a ruído aleatório foram retiradas e o sinal resultante foi analisado. Na figura(b) observamos um comprimento de correlação de aproximadamente 118 pontos em uma função de correlação que tem forma harmônica, que é esperado para o tipo de sistemas que estudamos. Os 22 pacientes estão discriminados por diferentes cores.

A análise tradicional de um paciente com fibrilação atrial é similar à do ECG normal. Por observação detectamos que as ondas P aparecem de forma discriminada e com maior amplitude que para o sinal normal, as ondas T aparecem invertidas e têm amplitude aproximada de

180.90V, a onda Q é completamente suprimida, a onda R tem sua amplitude diminuída, mas com largura equivalente a dessas ondas no sinal normal e a onda S tem grande amplitude. A tabela 7.3 se refere ao comportamento das amplitudes das ondas R e S e do período.

|            | Média         | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 282.44V       | 107.61V       | 1343.00V         | 59.99V           |
| Onda S     | 289.98V       | 89.54V        | 1209.10V         | 145.00V          |
| Período(t) | 209.22 pontos | 123.20 pontos | 5854 pontos      | 151 pontos       |

**Tabela 7.3 Análise tradicional do ECG apresentando Fibrilação Atrial.** Ao adquirir a média de amplitudes das ondas R e S, neste caso a onda Q apareceu com menor amplitude que a onda S, e do período dos ciclos observamos grandes desvios padrões e diferenças entre valores máximos e mínimos das amplitudes e do período. Observamos que considerando os extremos dos valores médios de R, o médico pode ser induzido à acreditar que o paciente é saudável especialmente quando o sinal é curto.

Validando o método tradicional para um sinal de curta duração, escolhemos uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 73400 pontos e observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 195.68$ ,  $\langle S \rangle = 353.76$  e  $\langle t \rangle = 110.50$ , que estão dentro do valor previsto pelo desvio padrão, mas neste caso os desvios padrões atribuem grande variabilidade aos parâmetros necessários para diagnóstico.

Com o objetivo de mostrar a eficácia do estudo deste trabalho, demonstramos no gráfico 7.10 que a densidade de máximos converge para um valor fixo rapidamente, com menos de 500 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

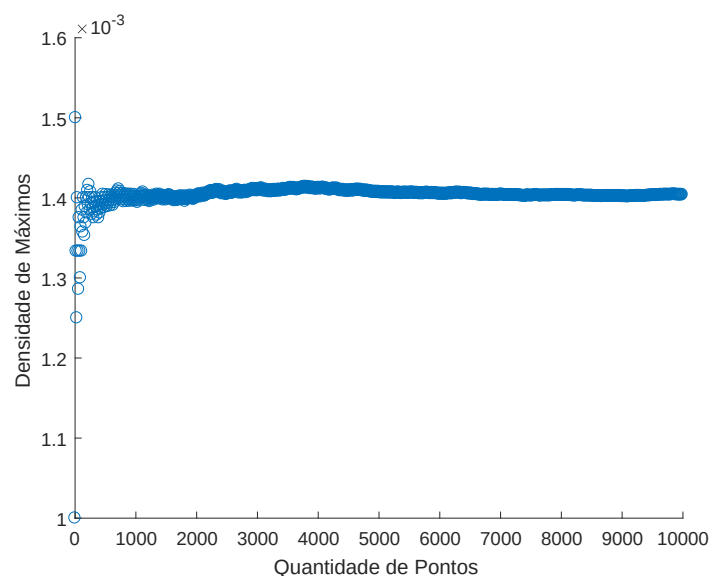


**Figura 7.10 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.

### 7.1.4 Arritmia Supra-Ventricular

A base de dados MIT-BIH para a arritmia supra-ventricular e o conjunto de dados do ECG normal foram retirados de registros de Holters de 24 horas. Na base de dados referente a arritmia supra-ventricular foram particionados 30 minutos do sinal de 43 pacientes desses registros onde observava-se arritmia supra-ventricular. A arritmia supra-ventricular inicia-se acima das fibras de His(fibras essenciais do sistema His-Purkinje), diferindo da arritmia ventricular que se inicia no nódulo atrio-ventricular. [48]

Para essa arritmia o complexo QRS é estreito e absorve a onda P pela falta de sincronia entre a excitação de contração do átrio e ventrículo, diminuindo a quantidade de pontos dentro dos ciclos. Esse fato causa refluxo do sangue que sai do átrio. [41]

Para remover o ruído foi utilizada a função do matlab ifilter ( [16], seção 2.2). Os novos sinais estão explicitados na figura 7.11.

Calculando as funções de correlação dos sinais filtrados houve um colapso total dos primeiros segundos com comprimento de correlação  $\tau \approx 29$  por pontos(figura 7.12). Utilizando os métodos descritos por Ramos et al.(2011 [8] e 2017 [9]) medimos a densidade de máximos para todos os sinais e obtivemos uma média de  $\langle \rho \rangle = 0.0056543$  por número de pontos, com variância de  $\sigma^2 = 8.3237 \times 10^{-11}$ . Em adição, calculamos o comprimento de correlação pela relação  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  obtendo  $\tau \approx 29.48$  essa estimativa é consistente com o valor encontrado próximo ao valor a meia altura.

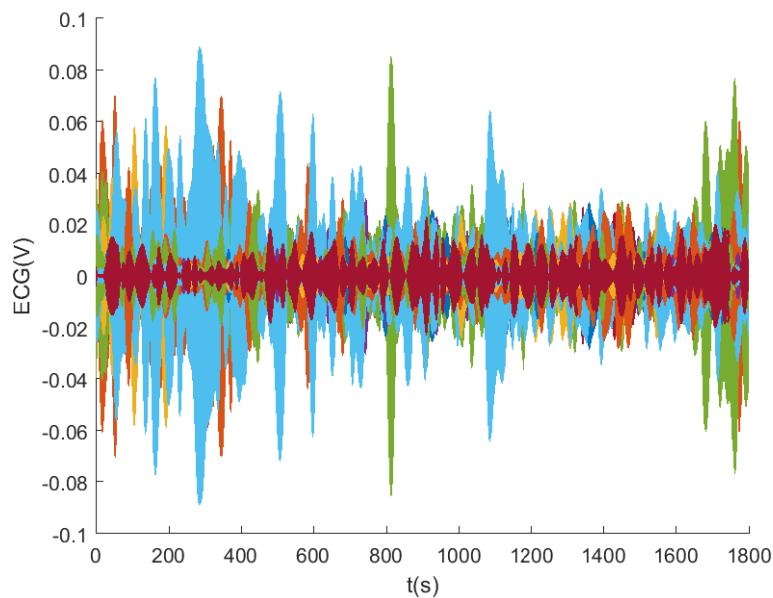


**Figura 7.11 Sinais de ECG de Pacientes com Arritmia Supra-Ventricularr (pós filtro).** Após a transformação do sinal pela transformada de Fourier, o sinal perde sua forma característica, ao retirar as frequências relacionadas ao ruído por um filtro passa banda o sinal resultante foi analisado. Observamos cada paciente representado por uma cor distinta.

Portanto a correlação entre os pontos dos sinais elétricos da arritmia supra-ventricular decai

mais abruptamente que a correlação da arritmia ventricular ( $\tau = 38$ ), pois além da supressão da onda P, na arritmia supra-ventricular, o complexo QRS é mais estreito.

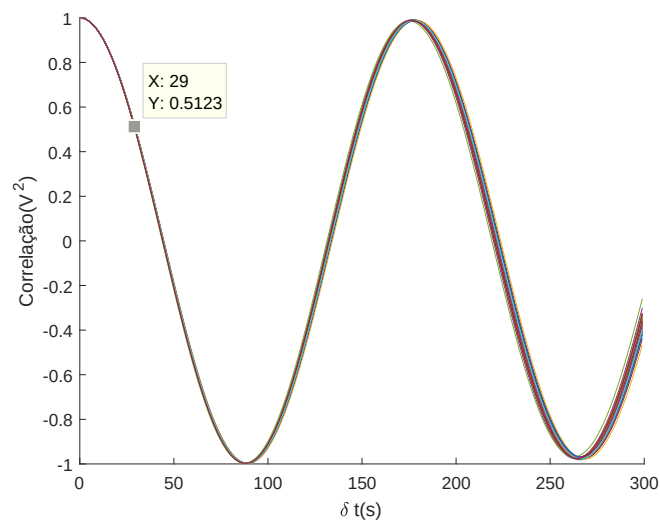


**Figura 7.12 Funções de correlação para pacientes apresentando Arritmia Supra-Ventricular.** Observamos que os primeiros segundos de cada função, de cor diferente, converge para um comprimento de correlação de 29 pontos.

A análise tradicional de um paciente com arritmia supraventricular também é similar à do ECG normal. Por observação detectamos a supressão das ondas P e Q, não existe nenhuma deflexão prévia a o início da onda R, e uma grande amplitude de onda T aproximadamente de 66.49V, A onda R apresenta amplitude e largura reduzidas e, por fim, a onda S apresenta maior amplitude. Na tabela 7.4 expomos a estatística das amplitudes e período do sinal sem filtro.

|            | Média         | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 300.84V       | 17.92V        | 340.50V          | 206.51V          |
| Onda S     | 102.81V       | 41.35V        | 267.49V          | −57.50V          |
| Período(t) | 284.64 pontos | 76.94 pontos  | 479 pontos       | 161 pontos       |

**Tabela 7.4 Análise tradicional do ECG apresentando Arritmia Supra-Ventricular.** Pela análise das médias de amplitudes das ondas R e S, neste caso, como na fibrilação atrial, a onda Q apareceu com menor amplitude que a onda S, e do período dos ciclos observamos pequenos desvios padrões e diferenças entre valores máximos e mínimos das amplitudes. O período tem um desvio padrão maior e considerando os extremos dos valores médios de R, o médico pode ser induzido à acreditar que o paciente tem fibrilação atrial.

Validando o método tradicional para um sinal de curta duração, escolhemos uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 38500 pontos e observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 288.49$ ,  $\langle S \rangle = 97.84$  e  $\langle t \rangle = 168.50$ , seu período esta fora do valor previsto pelo desvio padrão, contribuindo para um erro de diagnóstico.

Com o objetivo de mostrar a eficácia do estudo deste trabalho, demonstramos no gráfico 7.13 a densidade de máximos converge para um valor fixo rapidamente, com menos de 500 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

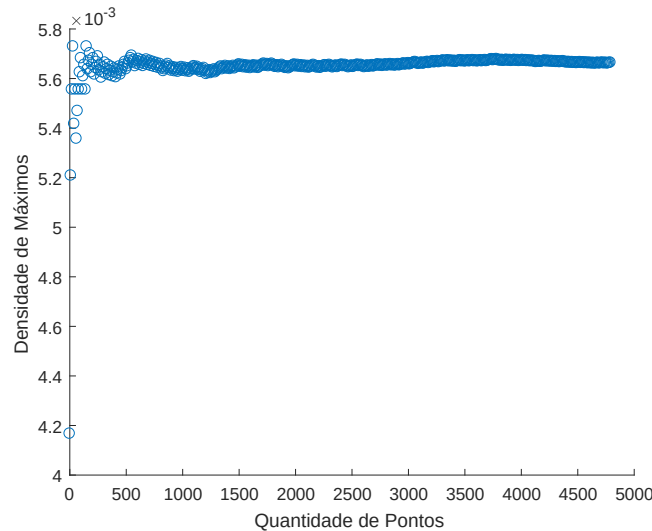


**Figura 7.13 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.

## 7.2 Base de Dados diagnóstico PBT

A base de dados proveniente do instituto de Berlin, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, foi utilizada previamente para programar computadores a reconhecer padrões de doenças em sinais eletrocardiográficos.

Nesta base de dados existem 294 pacientes onde, para cada paciente estão disponíveis os sinais de 15 medições dos eletrodos, anotações de anormalias e informações dos pacientes. Apenas alguns estão na forma .mat, para matlab e, por limitação computacional, não foi possível processar todos os sinais disponíveis em um *script*, mas foi possível processar os ECGs de 119 pacientes diferentes após, pelo menos, um infarto do miocárdio e após o tratamento chamado cateterismo.

O infarto do miocárdio é uma doença causada por uma redução da perfusão miocárdica, ou seja, do fluxo de sangue para o interior do coração, de forma a causar necrose celular, em razão da isquemia, fornecimento insuficiente de sangue para os tecidos musculares do coração. A manifestação clínica do infarto agudo do miocárdio(IAM) é dor no peito, que pode irradiar para os membros superiores, pescoço, mandíbula e costas, dispneia (dificuldade de respiração), diaforese (excesso de suor) e náusea. Apesar de existirem casos assintomáticos, o estudo de Framingham [49] mostrou que 28% dos infartos são descobertos por mudanças no sinal do

ECG. As ondas T são em alguns casos invertidas, o segmento ST é elevado, e na maioria dos casos, 60%-70%, há o aumento das ondas Q.

Por esse motivo existem duas classificações de infarto do miocárdio de ondas Q e de ondas não-Q, este é mais perigoso, pois a probabilidade de reincidência do episódio é maior, e a isquemia é mais grave, resultando em uma mortalidade maior. Essa doença é comumente causada pela formação de trombo em uma artéria coronária, por algum rompimento de placas lipídicas, resultando em um processo de coagulação dentro das artérias. [50] [51] [52]

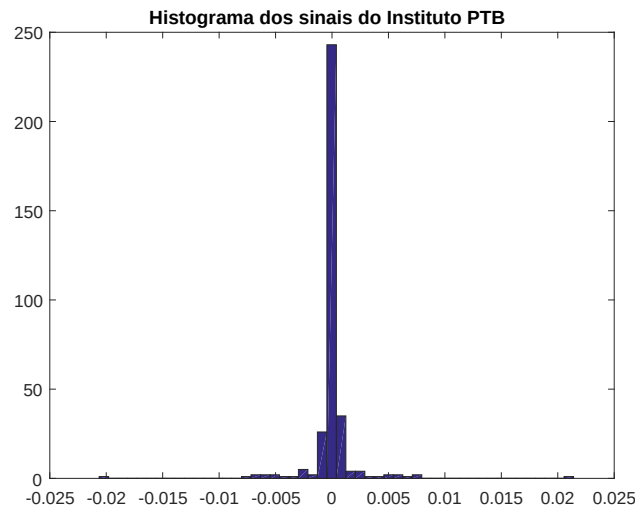


**Figura 7.14 Histograma de Wigner para Pacientes com Infarto do Miocárdio.** A figura representa o histograma de Wigner, que mostra em suas laterais autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12].

O histograma de autovalores (figura 7.14) dos sinais obtidos pela base de dados PTB apresenta ruído aleatório reduzido quando comparado com sinais elétricos de ECG normal (figura 7.2(b)) da base de dados de MIT-BIH, portanto o filtro provido pela função do matlab ifilter ([16], seção 2.2) tem menor efeito.

Pelas funções de correlação (figura 7.7) dos sinais filtrados, observamos um colapso total dos primeiros segundos, comprimento de correlação para todos os pacientes de  $\tau \approx 39$  por pontos e uma média de  $\langle \rho \rangle = 0.0042229$ , por número de pontos, para a densidade de máximos, com variância de  $\sigma^2 = 6.0646 \times 10^{-11}$ , calculando o  $\langle \rho \rangle$  da equação 2.15 (capítulo 2 por derivada numérica utilizando cinco pontos,  $\langle \rho \rangle_{5pts} = 0.0041894$ , e para três pontos,  $\langle \rho \rangle_{3pts} = 0.0042159$ , verificamos uma diferença entre esses resultados e a densidade de máximos calculada mecanicamente na quarta casa decimal. Assim por  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  podemos estimar o comprimento de correlação por  $\tau \approx 39.467$  concordando com a hipótese de que o comprimento de correlação e a densidade de máximos são inversamente proporcionais.

Os dados indicam que existe um número comum, o comprimento de correlação  $\tau = 39$ , que caracteriza pacientes que apresentam histórico de infarto do miocárdio e se submeteram a cateterismo.

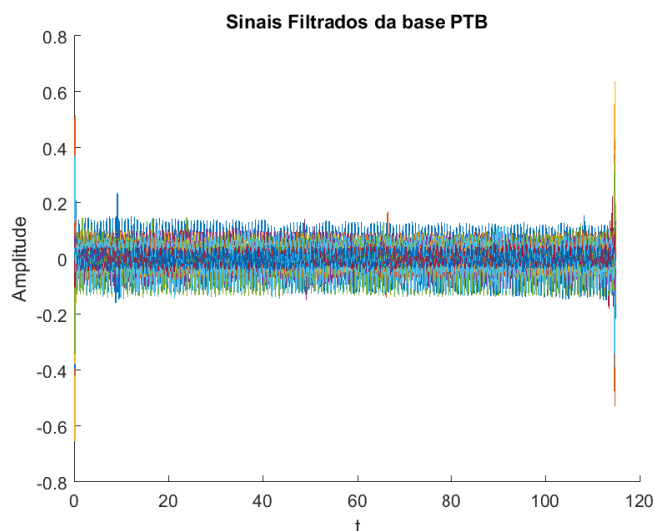


**Figura 7.15 Sinais de ECG de Pacientes que passaram por um Infarto do Miocárdio e Cateterismo (pós filtro).** Após um filtro passa banda, as frequências aleatórias foram retiradas e o sinal resultante foi analisado. Diferentes pacientes são representados por cores diferentes.

A análise tradicional de ECG é feita por observação e cálculo estatístico dos formatos (largura, período e amplitude) das ondas P, Q, R, S, T e eventualmente U.

Implementar um algoritmo no matlab para identificar o período, amplitude e largura das ondas P e T não é trivial, em razão da oscilação de amplitudes, a análise dessas ondas foi então feita por observação. A onda P está presente, bem discriminada e com uma amplitude aumentada de aproximadamente 354.80V e a onda T aparece bem pronunciada com uma amplitude de aproximadamente 532.78V. As ondas S se mostraram maiores que as ondas Q, que por sua vez eram maiores que as amplitudes das ondas R. As ondas S e Q têm amplitudes de valor próximo, para distingui-las o algoritmo utilizou a distância característica entre os picos. Na tabela 7.5, analisamos do sinal através da estatística dos seus ciclos.

|            | Média        | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|--------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 390.03V      | 459.50V       | 1780.50V         | -590.53V         |
| Onda S     | 1843.90V     | 113.89V       | 2039.50V         | 1726.50V         |
| Período(t) | 98.14 pontos | 45.21 pontos  | 709 pontos       | 71 pontos        |

**Tabela 7.5 Análise tradicional do ECG da base de dados PTB.** Analisando as médias de amplitudes das ondas R e S, neste caso, como na fibrilação atrial e arritmia supra-ventricular, a onda Q apareceu com menor amplitude que a onda S, e do período dos ciclos observamos um desvio padrão maior que a média para a onda R, já a onda S aparece com um pequeno desvio padrão, quando comparado com a ordem da média. Essas características estatísticas conferem ao método suscetibilidade à erro, principalmente quando o sinal é curto.

Na intenção de testar a validade do método tradicional para um sinal de curta duração, foi escolhida uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 300000 pontos e

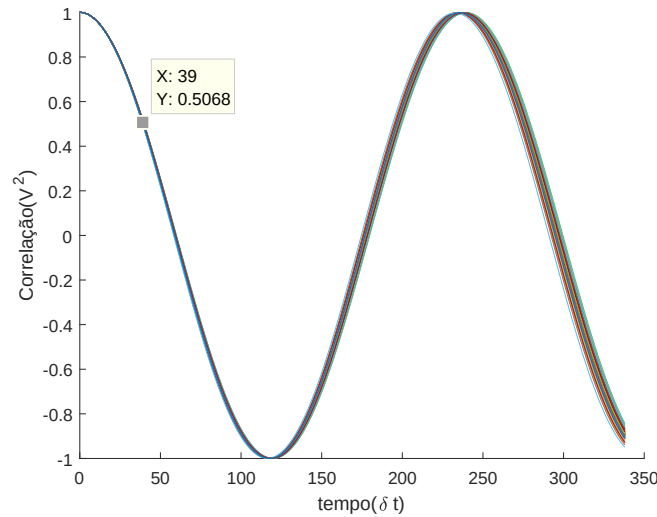


**Figura 7.16 Funções de correlação para Infarto do Miocárdio.** Observamos que os primeiros segundos de todas as funções de correlação convergem para um comprimento de correlação de 39 pontos. Cada cor representa um paciente.

observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 935.00$ ,  $\langle S \rangle = 891.18$  e  $\langle t \rangle = 450.20$ , que estão fora do valor previsto pelo desvio padrão, que atribui ao sistema grande variabilidade. O método tradicional requer uma grande quantidade de pontos para alcançar precisão diagnóstica.

O método desenvolvido neste trabalho tem como característica principal o estudo da densidade de máximos. No gráfico 7.17 demonstra-se a quantidade de pontos necessárias para a densidade de máximos convergir para um valor fixo, mostra-se que com menos de 500 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

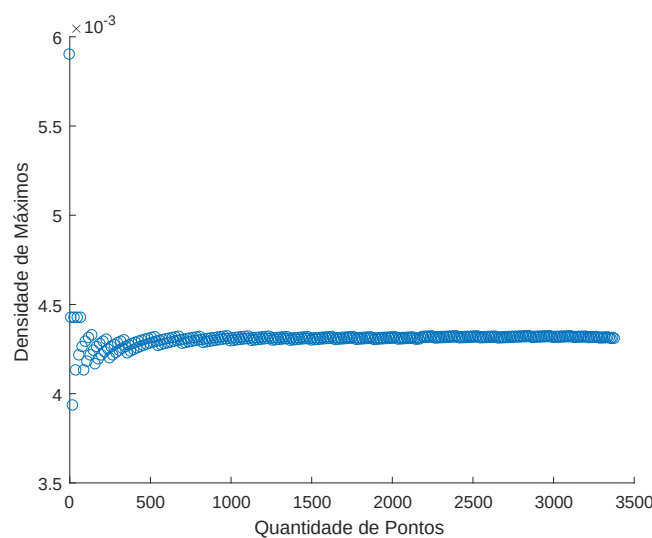


**Figura 7.17 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.

### 7.3 Base de Dados sobre término de um processo de Fibrilação Atrial

Na base de dados *Atrial Fibrillation Termination* existem 5 grupos de sinais elétricos distintos que representam a mesma doença, fibrilação atrial, que já foi explicado na subseção 7.1.2. A base de dados foi registrada na intenção de reconhecer a qual grupo pertencia o sinal elétrico referente a fibrilação atrial.

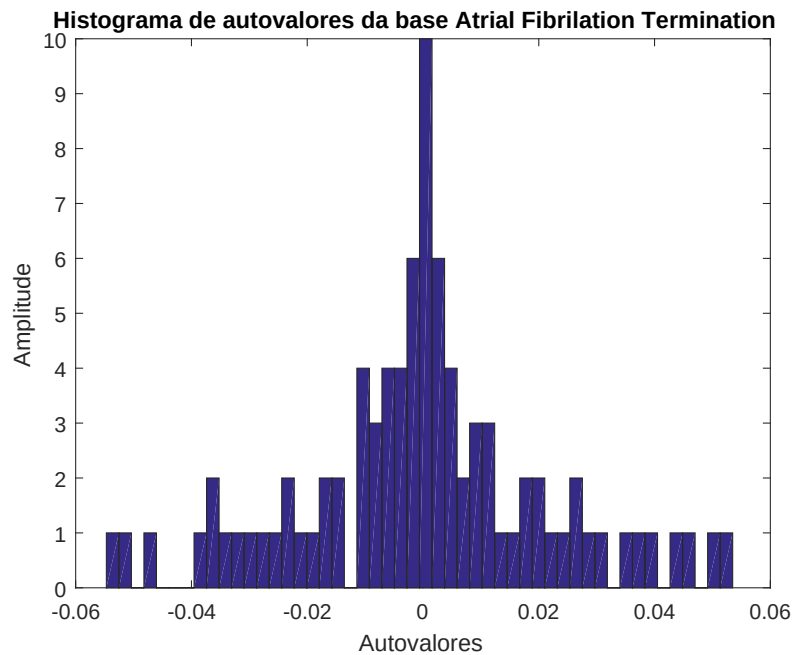


**Figura 7.18** Histograma de Wigner para a base de dados de Término da Fibrilação Atrial. O histograma de Wigner mostra, em suas laterais, autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12].

Os cinco grupos estão divididos da seguinte forma: no grupo N não foi observado final do episódio, mesmo após uma hora de término do registro; no grupo S a arritmia termina um minuto após do término do registro e o grupo T é continuação do grupo S, esperando o episódio terminar um segundo após o final do registro. Os grupos A e B são grupos de teste do programa de reconhecimento de término do episódio. O grupo A é uma junção do grupo N com alguns do grupo T, o grupo B tem apenas sinais do grupo S e T, mas nenhum dos que já foram colocados no grupo A.

O histograma de autovalores (figura 7.18) de sinais elétricos obtidos pela base de dados *Atrial Fibrillation Termination* apresenta ruído aleatório compatível com o ruído de sinais elétricos dos sinais normais da base de dados MIT-BIH (figura 7.2(b)). Utilizando o filtro da função `ifilter` do matlab ([16], seção 2.2) e obtivemos as novas séries temporais das figuras 7.19.

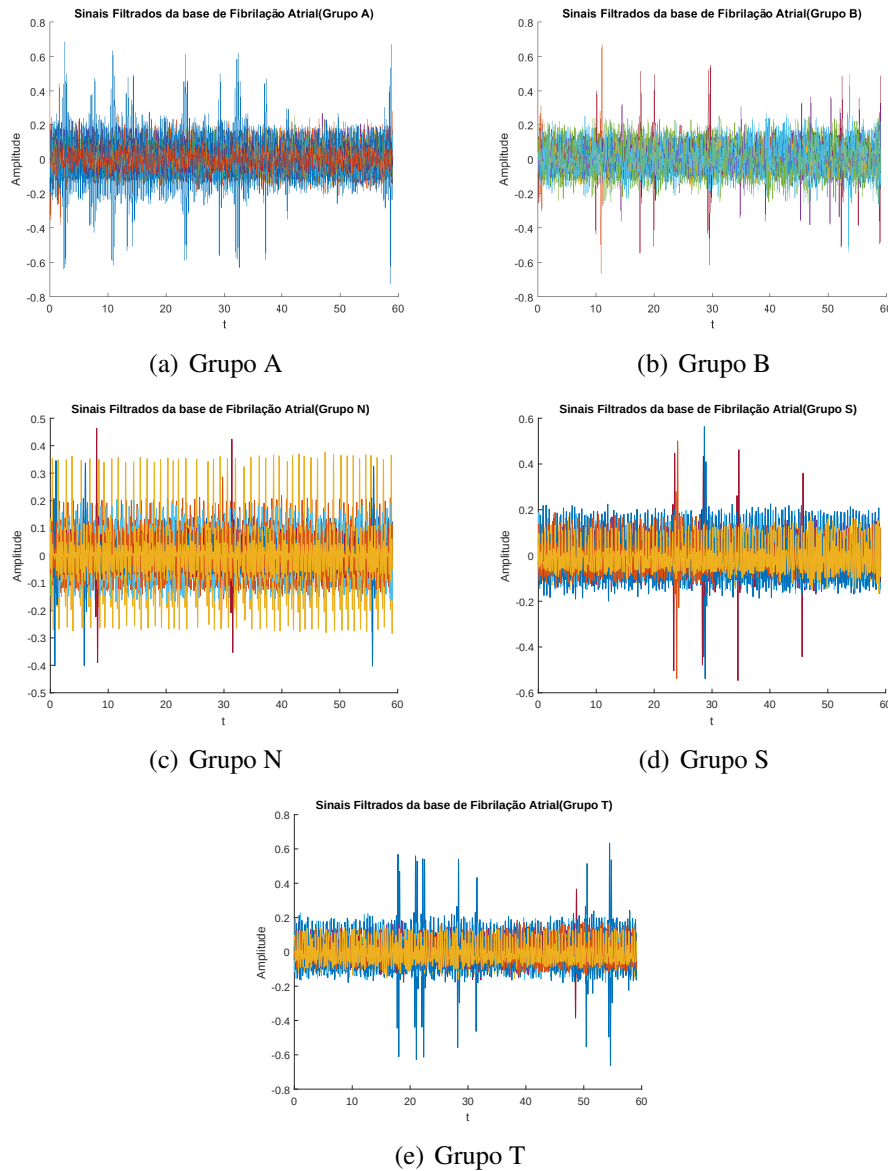


**Figura 7.19** Sinais da Fibrilação Atrial após filtro. Após o filtro passa-banda de fourier (seção 2.2) observamos diferentes formatos entre as séries temporais de diferentes pacientes, que estão representados por cores distintas em cada grupo. Os sinais tem formatos e amplitudes diferentes, mas apresentam funções de correlação que se superpõe nos primeiros segundos.

As funções de correlação para cada grupo apresentam colapso nos segundos iniciais com comprimento de correlação aproximado comum  $\tau = 7$  por pontos. A análise do sinal nos fornece uma densidade de máximos média de  $\langle \rho \rangle = 0.02454 \pm 4.54 \times 10^{-5}$  por número de pontos, ao utilizarmos a relação  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  prevê um comprimento de correlação de 6.8 confirmando a hipótese da relação inversa entre o comprimento de correlação e a densidade de máximos.

Concluimos que é possível ter um número comum para sinais elétricos cardiológicos que apresentam fibrilação atrial utilizado o maquinário desta base de dados, porém por estarmos analisando o comportamento geral do sinal elétrico não é possível diferenciar entre os grupos os sinais através do nosso método.

Para diagnosticar um paciente através de uma análise tradicional de ECG são necessários

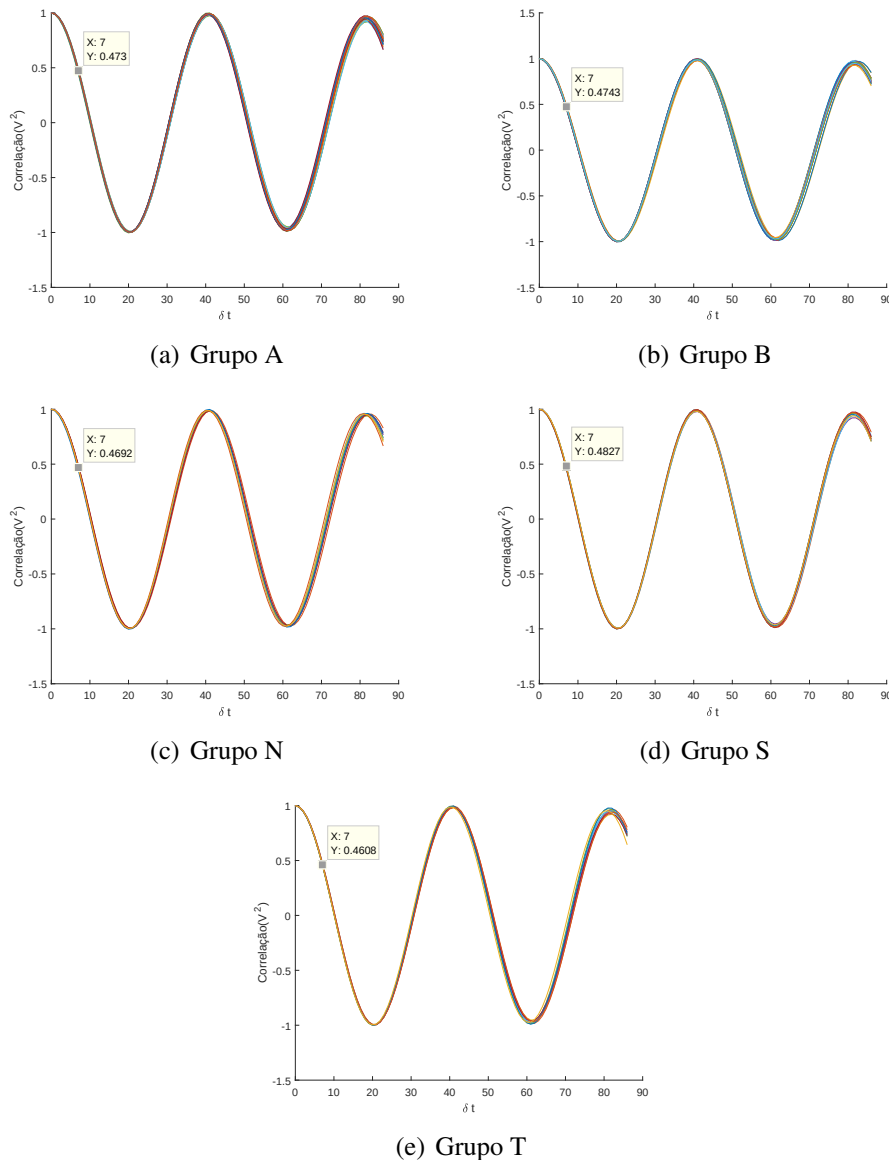


**Figura 7.20 Funções de correlação para pacientes com Fibrilação Atrial.** Observamos que os primeiros segundos de todos os grupos convergem para um comprimento de correlação de 7 pontos

observar os formatos (largura, período e amplitude) das ondas P, Q, R, S, T e eventualmente U que formam seus ciclos.

Implementar um algoritmo no matlab para identificar o período, amplitude e largura das ondas P, S, Q e T para esta base de dados não é trivial, então a análise dessas ondas foi feita por observação. A onda T está presente e bem discriminada com uma amplitude de aproximadamente 34.72V. As ondas P, Q e S são indistinguíveis do ruído, por uma redução de suas amplitudes. A onda R aparece com amplitude diminuída, mas largura regular. O desaparecimento das ondas P e S foi interessante, pois ao comparar com a análise da fibrilação atrial na base de dados do MIT-BIH, encontramos uma mesma doença que demonstra comportamento levemente diferente para bases de dados distintas. Observamos na tabela 7.6 uma análise estatística do sinal puro recolhido pelo eletrocardiograma.

|            | Média         | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 226.81V       | 14.53V        | 254.22V          | 195.09V          |
| Período(t) | 195.42 pontos | 56.46 pontos  | 329 pontos       | 115 pontos       |

**Tabela 7.6 Análise tradicional do ECG para a base de dados de término do processador de fibrilação atrial.** Analisando as médias de amplitudes da onda R e do período dos ciclos observamos um desvio padrão pequeno para a média da onda R, mas razoável para o período.

Na intenção de testar a validade do método tradicional para um sinal de curta duração, foi escolhida uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 3940 pontos e observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 209.52$  e  $\langle t \rangle = 188$ , que têm valor de amplitude da onda R fora do valor previsto pelo desvio padrão. O método tradicional requer uma grande quantidade de pontos para ter estatística convergente.

O método desenvolvido neste trabalho tem como característica principal o estudo da densidade de máximos. No gráfico 7.21 demonstra-se a quantidade de pontos necessárias para a densidade de máximos convergir para um valor fixo, mostra-se que com menos de 1000 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

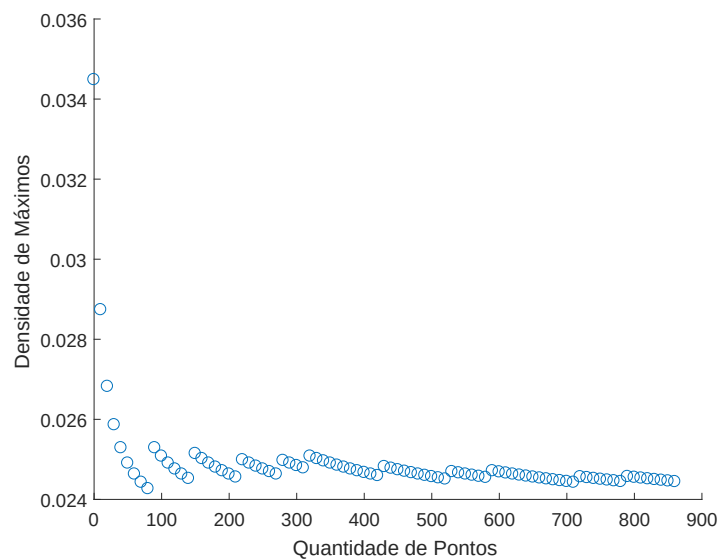


**Figura 7.21 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação. ( $\times 10$ ).

## 7.4 Base de Dados *Ciclic Alternation Pattern in human sleep*

*Ciclic alternating pattern*, ou CAP, é uma alteração do sono encontrada fora da etapa REM ("*Rapid Eye Movement*"), onde tem-se sono instável e/ou perturbado, com modificações no comportamento do indivíduo de forma a ter movimentação periódica da perna, respiração descompassada, entre outros sinais clínicos. A nossa intenção com essa base de dados é analisar o ECG desses pacientes com uma mudança não muito expressiva em seu ritmo cardíaco. Nesta base de dados trabalhamos com 9 sinais de ECG de aproximadamente 1 hora. [53] [54]

Calculando o histograma de autovalores (figura 7.22(a)) observamos um pico central e em suas laterais a presença de ruído aleatório.

Para retirar esse ruído foi utilizada a função do matlab `ifilter` ([16], seção 2.2). Após filtragem os novos sinais são explicitados na figura 7.22(b).

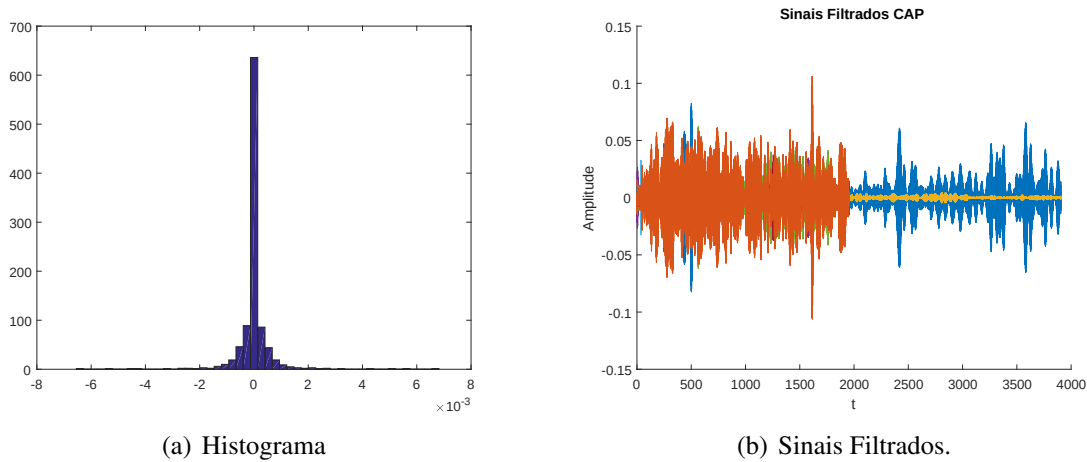


**Figura 7.22 Ruído Aleatório e Sinais Filtrados.** A figura(a) representa o histograma de Wigner, que mostra, em suas laterais, autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12]. Na figura(b) aplica-se um filtro passa-banda de fourier (seção 2.2) e observamos diferentes formatos entre as séries temporais de diferentes pacientes, que estão discriminados por cor.

As funções de correlação dos sinais filtrados colapsam completamente nos primeiros segundos de forma a termos como comprimento de correlação  $\tau \approx 88$  (figura 7.23) por pontos.

Utilizando o método descrito por Ramos et. al. (2011 [8] e 2016 [9]) medimos a densidade de máximos para todos os sinais e obtivemos uma média de  $\langle \rho \rangle = 0.0019039$ , por número de pontos, com variância de  $\sigma^2 = 2.8111 \times 10^{-11}$ , calculando o  $\langle \rho \rangle$  da equação 2.15 (capítulo 2 por derivada numérica utilizando cinco pontos,  $\langle \rho \rangle_{5pts} = 0.0019014$ , e para três pontos,  $\langle \rho \rangle_{3pts} = 0.0019038$ , verificamos uma diferença entre esses resultados e a densidade de máximos calculada mecanicamente na quinta casa decimal. Usando a relação  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  é possível prever o comprimento de correlação como  $\tau \approx 87.5396$  essa estimativa é compatível com a relação sugerida para sistemas que apresentam vínculos.

Esses dados indicam que é possível caracterizar ECGs de pacientes com CAP em termos de seu comprimento de correlação, obtido pela contagem de seus picos.

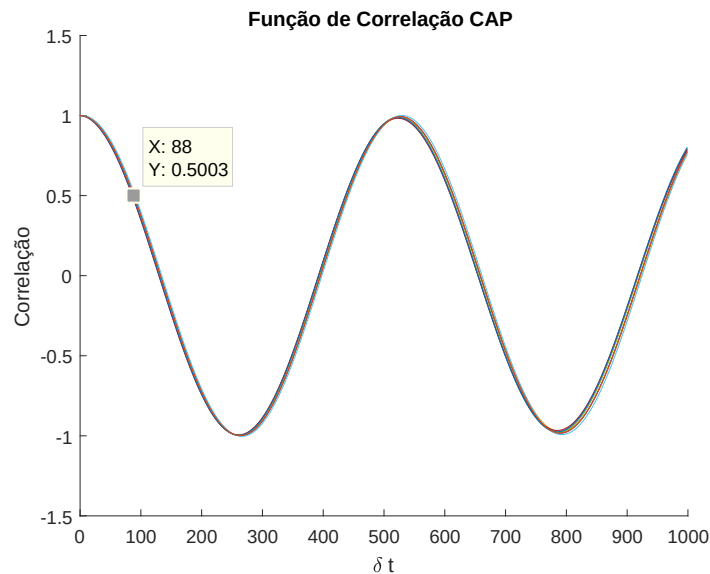


**Figura 7.23** Funções de correlação para pacientes que apresentavam *Ciclic Alternating Pattern*. Observamos que os primeiros segundos convergem para um comprimento de correlação de 88 pontos

Em uma análise tradicional de ECG são observados os formatos (largura, período e amplitude) das ondas P, Q, R, S, T e eventualmente U que formam seus ciclos.

Um algoritmo simples para fazer essa análise não permite automatização do período, amplitude e largura das ondas P, S e Q desta base de dados, em razão da oscilação de amplitudes, por esse motivo a análise dessas ondas foi feita por observação. A onda P está presente e discriminada em todos os ciclos mas tem uma mistura de frequências proporcionadas pelo ruído, com uma amplitude central de aproximadamente 966.30V. A onda Q aparece com amplitude reduzida de aproximadamente 729.71V. A onda R aparece reduzida em amplitude e largura, com desaparecimento da onda S. E por fim, a onda T aparece invertida e com grande amplitude e onda U aparece com mesma aparência ruidosa da onda P com amplitude aproximada 994.34V. A tabela 7.7 mostra o comportamento estatístico das amplitudes das ondas R e S e do período.

|            | Média        | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|--------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 390.03V      | 459.50V       | 1780.50V         | -590.53V         |
| Onda T     | 1843.90V     | 113.89V       | 2039.50V         | 1726.50V         |
| Período(t) | 98.14 pontos | 45.21 pontos  | 709 pontos       | 71 pontos        |

**Tabela 7.7** Análise tradicional do ECG da base de dados *CAP*. Usando o mesmo algoritmo, é possível medir as médias de amplitudes das ondas R e T, neste caso, a onda T aparece invertida e tem amplitude maior que a onda Q, e do período dos ciclos. Observamos um desvio padrão maior que a média para a onda R, já a onda T aparece com um pequeno desvio padrão, quando comparado com a ordem da média e o período aparece com um desvio padrão grande e uma grande diferença entre o período máximo e mínimo. Essas características estatísticas conferem ao método suscetibilidade à erro, principalmente quando o sinal é curto.

Na intenção de testar a validade do método tradicional para um sinal de curta duração, foi escolhida uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 76940 pontos e observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 2385.00$ ,  $\langle T \rangle = 1379.21$  e  $\langle t \rangle = 284.67$ , que estão fora do valor previsto pelo desvio padrão. O método tradicional requer uma grande quantidade de pontos para ser analisado.

O método desenvolvido neste trabalho tem como característica principal o estudo da densidade de máximos. No gráfico 7.24 demonstra-se a quantidade de pontos necessárias para a densidade de máximos convergir para um valor fixo, mostra-se que com pouco mais de 1000 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

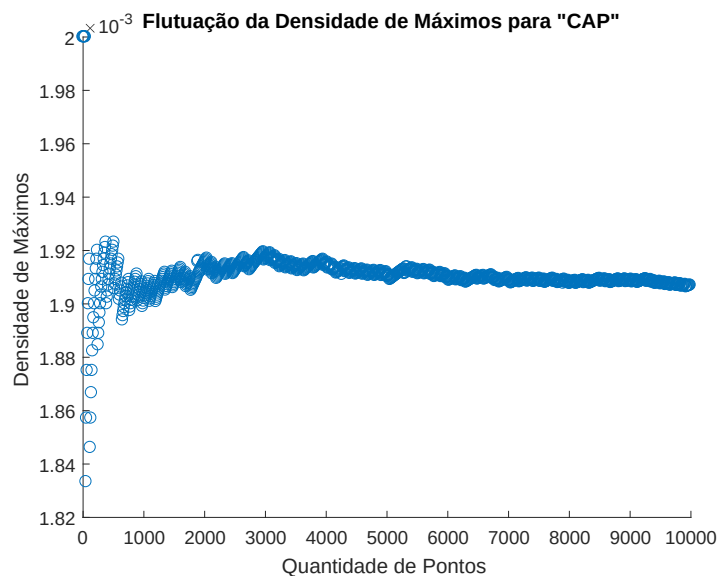


**Figura 7.24 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.[errada]

## 7.5 Base de Dados BIDMC

A base de dados de *Beth Israel Deaconess Medical Center* para insuficiência cardíaca congestiva contém 15 sinais de pacientes, duração de pouco mais de uma hora, que apresentaram insuficiência cardíaca.

A insuficiência cardíaca congestiva é uma manifestação comum de doenças coronárias, de valvas ou do miocárdio. Pessoas nesta condição tem uma taxa de mortalidade precoce alta, de forma que o objetivo pós-coleta de dados foi tratar os pacientes com Milrinone, de forma a melhorar a longevidade desses pacientes. [56] Nosso estudo tem o objetivo de apenas caracterizar a doença, de forma a dar aos médicos e aos pacientes mais tempo para tratar a doença.

A insuficiência cardíaca ocorre quando o coração recorre a um em estágio de ativação de

mecanismos de compensação, devido a problemas cardíacos anteriores. Inicialmente os mecanismos são bem sucedidos, mas o mantimento desse estado é prejudicial, por levar a sobrecarga dos músculos reativando o crescimento celular e síntese de novas mitocôndrias, pois é necessário aumentar a produção de energia. A longo prazo, esse fenômeno causa remodelamento ventricular, diminuindo a capacidade cardíaca de funcionamento normal. Na insuficiência cardíaca há um bloqueio no ramo esquerdo do feixe His definindo uma zona eletricamente inativa, apresentando um sinal de fibrilação atrial ou arritmia ventricular. [41]

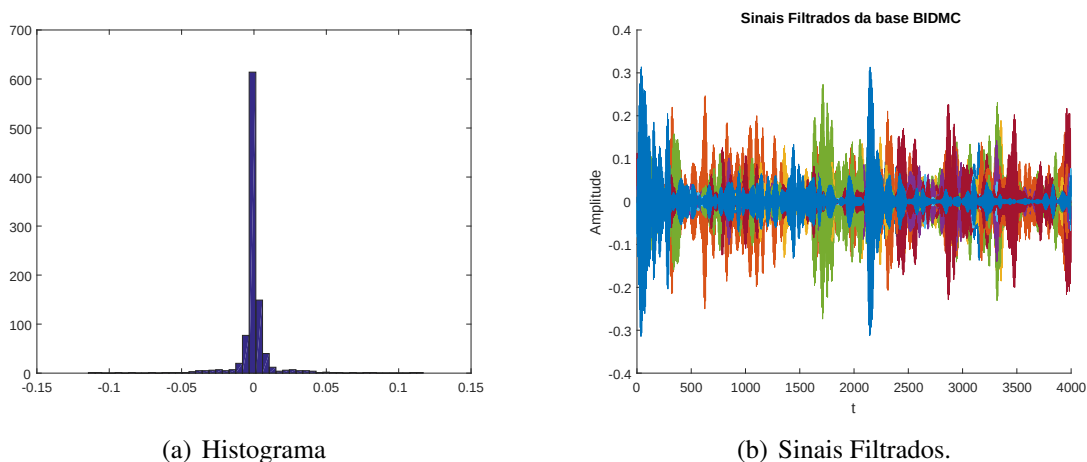


**Figura 7.25 Ruído Aleatório e Sinais Filtrados.** A figura(a) representa o histograma de Wigner, mostrando, em suas laterais, autovalores relacionados a ruído aleatório, como foi descrito em [12]. A figura(b) demonstra os sinais após o filtro passa-banda de Fourier, sinais utilizados para análise dos sistemas desta seção, onde cada paciente está representado por uma cor distinta.

Ao calcular o histograma de autovalores (figura 7.25(a)) observamos um pico central e em suas laterais a presença de ruído aleatório. Utilizando o filtro da função do matlab( [16], seção 2.2) foi possível obter sinais com ruído reduzido (figura 7.25(b)).

As funções de correlação colapsam para os primeiros segundos com comprimento de correlação  $\tau \approx 292$  (figura 7.26) por pontos. Usando o método proposto por Ramos et al.(2011 [8] e 2016 [9]) calculamos a densidade de máximos com média de  $\langle \rho \rangle = 0.00057653$ , por número de pontos, com variância de  $\sigma^2 = 3.6952 \times 10^{-12}$ . Calculando o  $\langle \rho \rangle$  da equação 2.15(capítulo 2) por derivadas numéricas utilizando cinco pontos,  $\langle \rho \rangle_{5pts} = 0.0005667$ , e para três pontos,  $\langle \rho \rangle_{3pts} = 0.0005775$ , verificamos uma diferença entre esses resultados e a densidade de máximos calculada mecanicamente na quinta casa decimal. Para a relação  $\langle \rho \rangle = 1/(6\tau)$  é possível prever o valor do comprimento de correlação como  $\tau \approx 289.09$  validando a relação entre o comprimento de correlação e a densidade de máximos.

Esses dados apontam que é possível caracterizar sinais elétricos que apresentam irregularidades do tipo de insuficiência cardíaca pela contagem de seus máximos, essa base de dados vem do mesmo hospital da base MIT-BIH, mas é relacionado a dados captados recentemente. Os dados nos indicam que o comprimento de correlação mais longo deve-se a um esforço cardíaco de compensar as anomalias mecânicas, adicionando mais de um vínculo ao sistema e tornando

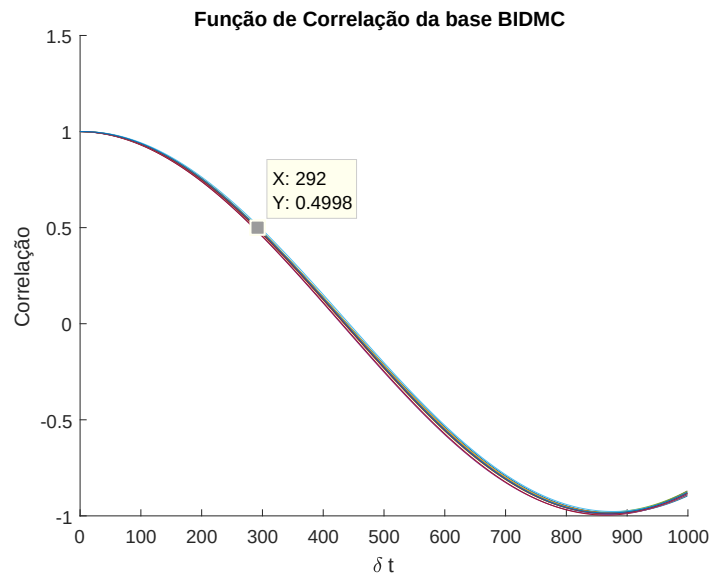


**Figura 7.26 Funções de correlação para pacientes com Insuficiência Cardíaca.** Observamos para essa base de dados uma largura maior, os pacientes tem um comprimento de correlação próximo à 292 pontos, cada paciente está representado por uma cor distinta.

os ciclos elétricos mais longos.

Para diagnosticar um paciente através de uma análise tradicional de ECG são necessários observar os formatos (largura, período e amplitude) das ondas P, Q, R, S, T e eventualmente U que formam seus ciclos.

Implementar um algoritmo no matlab para identificar o período, amplitude e largura das ondas P, S, Q e T para esta base não é simples, em razão da oscilação de amplitudes, assim a análise dessas ondas foi feita por observação. A onda P está presente e bem discriminada e sua amplitude é aproximada 34.95V. As ondas Q e S desaparecem, não há deflexão precedendo ou sucedendo a onda R. Esta onda tem amplitude reduzida e largura aumentada. Finalmente a onda T aparece invertida com pequena amplitude aproximada 58.23V e as ondas U se mostraram indistinguíveis ao ruído. A tabela 7.8 se refere a análise estatística das amplitudes da onda R e do período.

|            | Média         | Desvio padrão | Amplitude máxima | Amplitude mínima |
|------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| Onda R     | 215.68V       | 56.43V        | 791.30V          | 114.29V          |
| Período(t) | 306.11 pontos | 10.16 pontos  | 1550 pontos      | 226 pontos       |

**Tabela 7.8 Análise tradicional do ECG da base de dados BIDMC.** Medindo as médias de amplitude da onda R e do período dos ciclos. Observamos um desvio padrão considerável para a onda R e ambas diferenças entre as amplitudes máximas e mínimas são grandes e conferem ao método suscetibilidade à erro, principalmente quando o sinal é curto.

Na intenção de testar a validade do método tradicional para um sinal de curta duração, foi escolhida uma seção aleatória do sinal com cinco minutos de duração ou 7500 pontos e

observamos que as médias apresentadas no parágrafo anterior se modificaram para  $\langle R \rangle = 209.11$  e  $\langle t \rangle = 332$ , pelos grandes desvios padrões a estatística necessita de uma longa série temporal. O método tradicional requer uma grande quantidade de pontos para ser analisado.

O método desenvolvido neste trabalho tem como característica principal o estudo da densidade de máximos. No gráfico 7.27 demonstra-se a quantidade de pontos necessárias para a densidade de máximos convergir para um valor fixo, mostra-se que com menos de 1000 pontos o valor dessa densidade é muito próximo do esperado.

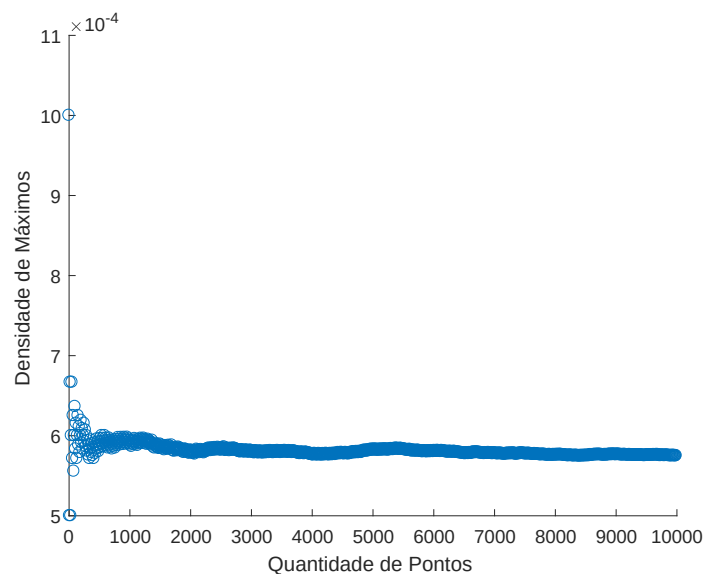


**Figura 7.27 Flutuação da Densidade de Máximos por quantidade de pontos.** É visto que não há grande flutuação entre os valores da densidade de máximos para uma série temporal com mais de 1000 pontos, rapidamente a densidade de máximos converge para o inverso do comprimento de correlação.

## PARTE III

# **Considerações finais**

## Conclusões e Perspectivas

Os dados obtidos pela análise dos sinais da base MIT-BIH sugerem que existem diferenças na velocidade de decaimento da função de correlação resferente ao estado clínico do paciente.

Para pacientes que não apresentavam nenhum sinal clínico de patologia, o comprimento de correlação comum foi calculado como  $\tau_N \approx 101$ , diferindo do comprimento de correlação para a arritmia ventricular, que ventricular apresenta um sinal irregular com supressão das ondas R ou T,  $\tau_{AV} \approx 38$ . No caso de pacientes com fibrilação atrial, por suas excitações extras das fibras miocárdicas atriais, o seu comprimento de correlação foi calculado como  $\tau_{FA} \approx 118$ . Finalmente, para arritmia supra-ventricular, por sua supressão da onda P e estreitamento do complexo QRS, há uma maior velocidade de decaimento da função ( $\tau_{SV} \approx 29$ ) quando comparado com a arritmia ventricular.

Para as quatro base de dados seguintes observamos convergência total das funções de correlação para os segundos iniciais, indicando a existência um número comum para cada doença. Para infarto do miocárdio encontramos um comprimento de correlação de  $\tau_{IM} \approx 39$ , não é possível comparar esse número com os resultados da base de dados do MIT-BIH pois há uma diferença entre máquinas que deve ser considerada.

Essa hipótese de diferença é testada quando estudamos a função de correlação da base de dados de "*Atrial Fibrillation Termination*", a mesma doença apresenta um comprimento de correlação diferente para uma base de dados diferente. O método também não é bem sucedido na distinção entre os grupos da base de dados que possuem diferentes tempos de término pós exame. Para essa base de dados o comprimento de correlação comum a todos os grupos é  $\tau_{AFTer} = 7$ .

A base de dados relacionada a anomalia do sono, CAP, está relacionada com pequenas anomalias de ritmo cardíaco, que como sugerido pelos resultados de nossa análise podem ser caracterizados pelo comprimento de correlação  $\tau_{CAP} \approx 19$ . Por último, a análise feita para a base de BIDMC apontam que sinais elétricos que apresentam insuficiência possuem um comprimento de correlação de  $\tau_{BIDMC} \approx 291$ , devido ao a um esforço cardíaco de compensar as fibras perdidas.

Neste trabalho, foi possível testar uma nova forma de avaliação do Eletrocardiograma. Pela análise tradicional do ECG, a oscilação das amplitudes e períodos promovem uma interceção de valores entre as doenças, que podem levar à dúvida no diagnóstico. O método desenvolvido foi intencionado a auxiliar os agentes de saúde no diagnóstico de doenças cardíacas. É possível observar indícios de um padrão caótico que se modifica quando o funcionamento do coração

| Tipo de Sinal | derivada<br>(5 pontos) | derivada<br>(3 pontos) | Comprimento de<br>correlação | densidade de<br>máximos por pontos |
|---------------|------------------------|------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| N             | 0.0016411              | 0.0016426              | 101                          | 0.0016464                          |
| AV            | 0.0043558              | 0.0043857              | 38                           | 0.0043467                          |
| FA            | 0.0014021              | 0.0014033              | 118                          | 0.0014031                          |
| SV            | 0.005565               | 0.005629               | 29                           | 0.0056543                          |
| IM            | 0.004189               | 0.004216               | 39                           | 0.004223                           |
| AFTer         | 0.01556                | 0.02258                | 7                            | 0.02454                            |
| CAP           | 0.001901               | 0.001903               | 88                           | 0.001904                           |
| BIDMC         | 0.000576               | 0.000577               | 292                          | 0.000577                           |

**Tabela 8.1 Resumo de Resultados da Análise das Funções de Correlação para Sinais Biológicos.** Encontramos um número comum que caracteriza doenças específicas.

se mostra defeituoso. Nossos resultados mostram que um bom caminho para entender sinais elétricos dos seres vivos é estudando seu fenômeno caótico. É possível ver diferença entre os comprimentos de correlação e densidades de máximos para diferentes doenças.

A análise tradicional tem, além de flutuações internas ao sinal que foram demonstradas nas discussões do capítulo 7, flutuações relacionadas às características dos indivíduos, como sexo e idade. A análise feita neste trabalho de diferentes sinais foi bem abrangente, mas foram observadas a conversão das funções de correlação para pessoas de sexo e idades diferentes.

Para justificar a utilização de métodos físicos em problemas médicos, o mesmo método foi utilizado neste trabalho para o pêndulo duplo, mostrando que para um problema puramente mecânico também apresentava a mesma relação entre a densidade de máximos e o comprimento de correlação.

A análise de sistemas com características completamente diferentes à princípio se mostra semelhante fenomenologicamente. O pêndulo duplo é um sistema que conhecemos muito bem como físicos, e é em sua forma muito simples no estudo da Mecânica Clássica (suas equações de movimento são inteiramente conhecidas). E os sinais biológicos, já não são tão bem definidos, mas já existem diversos modelos para eles, entre esses modelos, estudamos o modelo pedra-papel-tesoura de evolução biológica, e o modelo de Hodgkin-Huxley. Analisamos também o sistema elétrico do miocárdio, sistema esse de extrema complexidade para os cientistas da área, onde ainda encontramos perguntas não respondidas e surpresas em seu estudo. Mas podemos observar um fenômeno em comum a os dois, o caos. Podemos então ver que na natureza existe coerência, não é possível isolar um sistema por completo, estão eles interconectados, cabendo a nós estudiosos desvendar os mistérios das conexões de tais sistemas.

Por fim, como perspectivas, é de grande interesse observar a possibilidade de uma normatização do método para diferentes máquinas possibilitando assim números universais que facilitem diagnóstico. Para isso é necessário uso exaustivo do método para diferentes doenças e bases de dados cardíacos. Após essa normatização seria de grande interesse clínico construir um aparelho que as pessoas comuns teriam em casa para aferir o comprimento de correlação

de seus ECGs, indicando se há necessidade de visitar um médico, como já existe para pressão arterial e diabetes. Finalmente, estudar outras séries temporais relacionadas a exames clínicos na intenção de simplificar o diagnóstico de outros tipos de patologia.

## Referências Bibliográficas

- [1] TAYLOR, J R. *Classical Mechanics*, Estados Unidos da America: University Science Books (2005) p.786.
- [2] STROGATZ, S H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with application to Physics, Biology, Chemistry and Engeneering*. New York: Perseus Books Publishing, L.L.C. (1994) p. 498.
- [3] LOSKUTOV, A Dynamical chaos: systems of classical mechanics. *Physics-Uspexhi*, Moscow, v. 50, n. 9, p. 939-964, 2007.
- [4] CALVÃO, A M; PENNA, T J P The Double Pendulum: a numerical study. *European Journal of Physics*, Rio de Janeiro, v. 36, n. 4, 2015.
- [5] STACHOWIAK, T; OKADA, T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 29, n.2, p. 417-422, 2006.
- [6] PRESS, W H et al. *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*. Segunda Edição. Cambridge: Cambridge University Press (1992) p. 1106.
- [7] HABIB, S. et al. Chaos and Quantum Mechanics *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 1045, p. 305-332, 2005.
- [8] RAMOS, J G G S et al. Conductance Peaks in Open Quantum Dots, *Physical Review Letters*, v. 107, n. 17, 2011;
- [9] BAZEIA, D et al. A novel procedure for the identification of chaos in complex biological systems. *Sci. Rep.*, v. 7, 2017.
- [10] GARCIA, E A C. *Biofísica*. Segunda Edição. Brasil: Sarvier (2011) p. 544.
- [11] PERC, M. Nonlinear time series analysis of the human electrocardiogram, *European Journal of Physics*, v. 26, n. 5, 2005.
- [12] BIN, Y et al. Distinguishing chaotic time series from noise: A random Matrix approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 44, p. 284-291, 2017.
- [13] ARFKEN, G B; WEBER, H J. *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Sexta Edição. Rio de Janeiro: Elsevier (2005) p. 936

- [14] BOAS, M L. Mathematical Methods in the Physical Sciences. Terceira Edição. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. (2006) p. 839.
- [15] COOLEY, J W; TURKEY, J W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Math. Comput.*, v. 19, n. 90,p. 297-301, 1965.
- [16] O'HAVER, T. A Pragmatic Introduction to Signal Processing with applications in scientific measurement. University of Maryland (1997).
- [17] ORFANDIS, S J. A Pragmatic Introduction to Signal Processing with applications in scientific measurement. Rutgers University (2010).
- [18] HOMOUD, M. K. Introduction to Electrocardiography. Lectures. Thufts University (2008) p. 248.
- [19] SETHONA, J P Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexity. Oxford:Clarendon Press (2006) p. 371.
- [20] SALINAS,S R A. *Introdução à Física Estatística* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo (2005) p. 462.
- [21] WAYNE, C E. Dynamical Systems and Probabilistic Methods in Partial Differential Equations(Lectures in Applied Mathematics). Introduction to KAM Theory. Berkley: American Mathematical Soc (1994) p. 268
- [22] ANDRADE, L N. Cálculo Numérico: Introdução à matemática computacional. João Pessoa:UFPB Departamento de Matemática (2013) p. 207
- [23] MAITI, S. et al. Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum. *Physics Letters A*, v. 380, n. 3, p. 408-412, 2016.
- [24] TUSSETL, A M. et al. Chaos control and sensitivity analysis of a double pendulum arm excited by an RLC circuit based nonlinear shaker *Journal of Vibration and control*, v. 22, n. 17, p. 3621-3637, 2016.
- [25] PICCOLINO, M. Luigi Galvani and animal electricity: two centuries after the foundation of electrophysiology. *Trends in neurosciences*, v. 20, n. 10, p. 443-448, 1997.
- [26] PLONSEY, R; BARR, R C. Bioelectricity, A Quantitative Approach. Terceira Edição. Durham: Springer Science+Business Media L.L.C. (2007) p. 398.
- [27] CARNEIRO, E F. O Eletrocardiograma: 10 anos depois. Primeira Edição. Brasil: Livraria Editora Enéas Ferreira Carneiro (1997) p. 622
- [28] BOD'OÁ, K; PAYDARFAR, D; FORGER, B. Characterizing spiking in noisy type II neurons. *Journal of Theoretical Biology*, v. 365, n. 21, p. 40-54, 2015.

- [29] TOMOV, P. et al. Sustained oscillations, irregular firing, and chaotic dynamics in hierarchical modular networks with mixtures of electrophysiological cell types. *Frontiers in Computational Neuroscience*, v. 8, p. 103, 2014.
- [30] DAYAN, P; ABBOTT, L F. Theoretical Neuroscience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems, Cambridge: The MIT Press(2001) p. 480.
- [31] GALVANI, L A. De viribus electricitatis in motu musculari. De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia, commentarii (1791) p. 53.
- [32] M'KENDRICK, J G. A text-book of physiology: General physiology. Volume 1. Glasgow: James Maclehose & Sons (1888) p. 546.
- [33] BAROLD, S S. Willem Einthoven and the birth of clinical electrocardiography a hundred years ago. *Card Electrophysiol Rev*, v. 7, n. 1, p. 99-104, 2003.
- [34] SIROL, M. Galvani et le galvanisme. Vigot Frères (1939) p. 62
- [35] RIVERA, R. Einthoven's string galvanometer - The first electrocardiograph *Texas Heart Institute journal*, v. 35, n. 2, p. 174-178, 2008.
- [36] WALLER A D. On the electromotive changes connected with the beat of the mammalian heart, and of the human heart in particular. *Phil Tran Roy Soc London*, v. 180, p. 169-194, 1889.
- [37] BAROLD, S S; FAZEKAS, T. Einthoven's first electrocardiogram 100 years ago. *Pacing Clin Electrophysiol*, v. 25, n. 12, 2002.
- [38] EINTHOVEN, W. Galvanometrische registratie van het menschelijk electrocardiogram. In: Herinneringsbundel Professor S.S. Rosenstein. Leiden: Eduard Ijdo (1902)
- [39] FRATINI, A. et al. Individual Identification via Electrocardiogram Analysis BioMedica Engineering OnLine, 2015.
- [40] KIRKMAN, E. The electrogram. *Anaesthesia and intense care medicine*, v. 7, n. 8, p. 264-266, 2006.
- [41] LOPES A C. Tratado de Clínica Médica. Volume I. Roca (2009) p. 2000.
- [42] Goldberger AL, Amaral LAN, Glass L, Hausdorff JM, Ivanov PCh, Mark RG, Mietus JE, Moody GB, Peng C-K, Stanley HE. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals. *Circulation* 101(23):e215-e220 [Circulation Electronic Pages; <http://circ.ahajournals.org/content/101/23/e215.full>]; 2000 (June 13).

- [43] CASALEGGIO, A. Differences on the Correlation Dimension of MIT-BIH ECG Database Recordings. *IEEE Computers in Cardiology*, p. 539-542, 1993.
- [44] MOODY, G B; MARK R G. The impact of the MIT-BIH Arrhythmia Database. *IEEE Eng in Med and Biol* 20(3):45-50 (May-June 2001). (PMID: 11446209)
- [45] GREENWALD, S D. Development and analysis of a ventricular fibrillation detector. Dissertação, MIT Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 1986.
- [46] MOODY, G B; MARK, R G. The impact of the MIT-BIH Arrhythmia Database. *IEEE Engeneering in Medicine and Biology*, v. 20, n. 3, p. 45-50, 2001.
- [47] MOODY, G B; MARK, R G. A new method for detecting Atrial Fibrillation using R-R Intervals. *Computers in Cardiology*, v. 10, p. 227-230, 1983.
- [48] GREENWALD S D. Improved detection and classification of arrhythmias in noise-corrupted electrocardiograms using contextual information. Tese, Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology, 1990.
- [49] KANNEL, W B; ABBOTT, R D. Incidence and prognosis of unrecognized myocardial infarction: an update on the Framingham study. *N Engl J Med*, v. 311 , p. 1144-1161, 1984.
- [50] BOATENG S; SANBORN T. Acute myocardial infarction. *Disease-a-Month*, v. 59, p. 86-93, 2013.
- [51] TAYLOR R B. et al. *Taylor's Cardiovascular Diseases: A Handbook*. New York:Springer-Verlag (2005) p. 300.
- [52] BOUSSELJOT R; KREISERLER, D; SCHNABEL, A. Nutzung der EKG-Signaldatenbank CARDIODAT der PTB über das Internet. *Biomedizinische Technik*, Band 40, Ergänzungsband 1 (1995).
- [53] TERZANO M G. et al. Atlas, rules, and recording techniques for the scoring of cyclic alternating pattern (CAP) in human sleep. *Sleep Med* 2001 Nov; 2(6):537-553.
- [54] NÄSI, T. et al. Cyclic Alternating Pattern Is Associated with Cerebral Hemodynamic Variation: A Near-Infrared Spectroscopy Study of Sleep in Healthy Humans. *PLoS ONE*, v. 7, n. 10, 2012.
- [55] MOODY G B; MULDROW W E; MARK R G. A noise stress test for arrhythmia detectors. *Computers in Cardiology*, v. 11, n. 3, p. 381-384, 1984.
- [56] BAIM D S. et al. Survival of patients with severe congestive heart failure treated with oral milrinone. *J American College of Cardiology*, v. 7, n. 3, p. 661-670 1986.