



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
– MESTRADO –

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL COM EXPANSÃO
POLINOMIAL**

Por

Eduardo Morais de Medeiros

*Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do grau de Mestre*

João Pessoa – Paraíba

Abril de 2018



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

– MESTRADO –

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL COM EXPANSÃO POLINOMIAL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Eduardo Moraes de Medeiros

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii

João Pessoa – Paraíba

Abril de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M488a Medeiros, Eduardo Morais de.

Análise de Confiabilidade Estrutural com Expansão
Polinomial / Eduardo Morais de Medeiros. - João Pessoa,
2018.

40 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT.

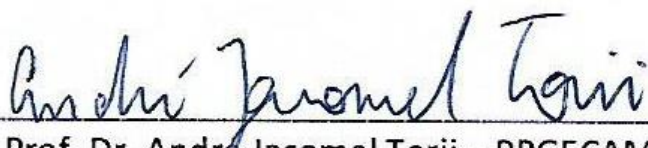
1. Análise Confiabilidade. 2. Confiabilidade
Estrutural. 3. Probabilidade de Falha. 4. Expansão
Polinomial. I. Título

UFPB/BC

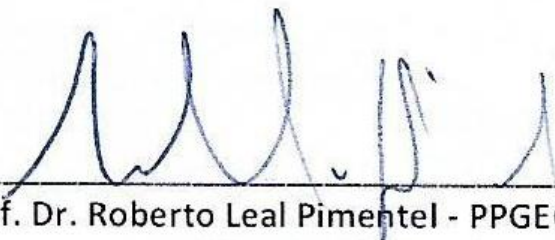
**"ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL COM EXPANSÃO
POLINOMIAL"**

EDUARDO MORAIS DE MEDEIROS
Dissertação aprovada em 26 de fevereiro de 2018

Período Letivo: 2017.2



Prof. Dr. Andre Jacomel Torii – PPGECAM/UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Roberto Leal Pimentel - PPGECAM/UFPB
(Membro Interno)



Prof. Dr. Julio Florez Lopez – UNILA/PR
(Membro Externo)

João Pessoa/PB
2018

Agradecimentos

À Deus, por me ajudar a superar todas as dificuldades que enfrentei nesta caminhada.

Aos meus pais, Solange e Aristeu, que sempre serviram de exemplo para mim, e por me apoiaram em todas as decisões.

Aos meus irmãos, Evaniel, Evandro e Emannuel, que além de grandes irmãos e amigos, foram decisivos para esta minha vitória.

Aos amigos, por todas as risadas e momentos alegres que me proporcionaram, tornando o caminho mais agradável de ser percorrido.

Aos professores e profissionais, estes que contribuíram para a minha formação acadêmica, em especial, os do Curso de Engenharia Civil da UFRN e os do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da UFPB. Agradecimento especial ao meu professor orientador André Torii, pela amizade e por servir de inspiração para mim, tanto no caráter pessoal como profissional.

À CAPES e ao CNPq, por todo auxílio financeiro durante esse período.

À todos que, mesmo indiretamente, me auxiliaram na conquista de mais uma etapa da minha vida.

Muito Obrigado!

Resumo

MEDEIROS, E. M. **Análise de confiabilidade estrutural com expansão polinomial**, 2018. 44p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

Toda estrutura de engenharia deve cumprir uma série de requisitos e critérios, que podem ser relacionados à segurança estrutural, e a limitações no dano de certos elementos ou peças estruturais à excessivas deformações que podem causar desconforto ou insegurança. Ademais, a forma que a estrutura responderá as ações externas dependerá do tipo e da intensidade das cargas, da sua seção transversal, das propriedades dos materiais, entre outros fatores. Uma das maneiras de avaliar o nível desses critérios e a segurança da estrutura é através do cálculo da probabilidade de falha estrutural. Contudo, de maneira geral, o cálculo da probabilidade de falha gera um grande custo computacional. Desse modo, com o objetivo de diminuir o esforço computacional e manter a eficácia nos resultados obtidos, a proposta deste estudo é usar a expansão polinomial na análise de confiabilidade estrutural. Para isso, a função *performance* original é substituída por polinômios, resultando em uma análise com resultados satisfatórios e com baixo custo computacional. Assim, aplicações numéricas para diferentes tipos de estruturas são apresentadas e os resultados obtidos são comparados com outros métodos da literatura, demonstrando convergência nos resultados e um menor esforço computacional.

Palavras-chave: análise confiabilidade; confiabilidade estrutural; probabilidade de falha; expansão polinomial.

Abstract

MEDEIROS, E. M. **Structural Reliability Analysis with Polynomial Expansion**, 2018. 44p. Master's Thesis - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

All engineering structures must accomplish a series of requisites and criteria, which may be related to structural safety, and some admissible deformations that may cause discomfort and insecurity. Moreover, the structure's response to external forces depends on its cross section, its materials properties, the type and intensity of the loads and other factors. One of the ways of assessing these criteria and structural safety is evaluating the probability of failure. In general, the evaluation of the probability of structural failure generates a significant computational cost. Therefore, aiming to reduce the computational effort and maintaining the efficiency of the obtained results, the proposal of this study is to use the polynomial expansion in structural reliability analysis. For this purpose, the original functions are replaced by polynomials, resulting in a accurate analysis with low computational cost. Thus, numerical applications for truss and beam structures are presented and the results obtained show the effectiveness of the proposed formulation.

Keywords: reliability analysis; structural reliability; probability of failure; polynomial expansion.

Lista de abreviaturas e siglas

FDA	Função de Distribuição Acumulada de Probabilidades
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FORM	<i>First Order Reliability Method</i> - Método de aproximação de primeira ordem
MCS	<i>Monte Carlo Simulation</i> - Simulação de Monte Carlo
MQC	Método dos Mínimos Quadrados Contínuo
MQD	Método dos Mínimos Quadrados Discreto
NAE	Número de Análises Estruturais
SORM	<i>Second Order Reliability Method</i> - Método de aproximação de segunda ordem

Lista de símbolos

A	Área
P	Carga concentrada aplicada
q	Carga distribuída aplicada
ν	Coefficiente de Poisson
δ	Coefficiente de variação
c_i	Coefficiente de g_k
L	Comprimento da barra
C_e	Constante elástica
ϵ	Deformação
σ	Desvio padrão
D	Domínio de falha
e	Erro
α	Fator de falha
ψ_i	Função de base
$\Phi()$	Função de distribuição cumulativa normal padrão
F_X	Função de distribuição acumulada
f_X	Função densidade de probabilidade
g	Função estado limite ou Função <i>Performance</i> original
$I(t)$	Função indicadora
$w(x)$	Função peso
g_k	Função polinomial
k	Grau do polinômio

du	Incremento de deslocamento
df	Incremento de força
β	Índice de confiabilidade
K	Matriz de rigidez
μ	Média
E	Módulo de elasticidade
Z	Módulo de plasticidade
I	Momento de inércia
λ	Multiplicar de carga
n_f	Número de simulações com $g < 0$
n_{si}	Número de simulações totais
P_k	Polinômios de ordem k
P_f	Probabilidade de falha
Ω	Suporte de uma função
Δ	Tamanho do Incremento de Carga
f_y	Tensão de escoamento
E	Valor esperado ou valor médio
Var	Variância
u	Vetor de deslocamentos
f	Vetor de forças

Lista de ilustrações

Figura 1 – Relação entre FDA e FDP.	5
Figura 2 – Valor da probabilidade $P(x_1 \leq X \leq x_2)$	6
Figura 3 – Função <i>performance</i> $g(X)$	10
Figura 4 – Método de Monte Carlo.	12
Figura 5 – (a) linearidade física do material;(b) não linearidade física do material.	23
Figura 6 – (a) linearidade geométrica do material;(b) não linearidade geométrica do material.	23
Figura 7 – Tipos de Análise Estrutural	26
Figura 8 – Análise não linear de uma Treliça Plana	27
Figura 9 – Valor da constante elástica de uma Treliça Plana	28
Figura 10 – Ponto de colapso para uma Treliça Plana	28
Figura 11 – Ponto de colapso para uma Viga	29
Figura 12 – Ponto de colapso para uma Treliça Espacial	29
Figura 13 – Procedimento computacional	31
Figura 14 – Exemplo 1: Treliça plana com 6 barras	33
Figura 15 – Exemplo 2: Viga uniformemente distribuída	34
Figura 16 – Exemplo 3: Treliça Espacial	36

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tipos de distribuições probabilísticas	9
Tabela 2 – Pontos de integração de Gauss-Legendre	20
Tabela 3 – Pontos de integração de Gauss-Hermite	21
Tabela 4 – Exemplo 1 : Variáveis Aleatórias	33
Tabela 5 – Exemplo 1 : Resultados de β	34
Tabela 6 – Exemplo 2 : Variáveis Aleatórias	35
Tabela 7 – Exemplo 2 : Resultados de β	35
Tabela 8 – Exemplo 3 : Variáveis Aleatórias	36
Tabela 9 – Exemplo 3 : Resultados de β	37
Tabela 10 – Exemplo 3 : Resultados de β para Distribuição Uniforme	37

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Considerações Iniciais	1
1.2	Justificativa	2
1.3	Objetivos	2
1.3.1	Objetivo geral	2
1.3.2	Objetivos específicos	2
1.4	Organização do Trabalho	3
2	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	4
2.1	Introdução	4
2.2	Variáveis aleatórias	4
2.2.1	Funções densidade de probabilidade	4
2.2.2	Valor esperado e variância	6
2.2.3	Distribuição Gaussiana	7
2.2.4	Outras distribuições padrões	8
2.3	Análise de Confiabilidade	10
2.4	Simulação de Monte Carlo	11
2.4.1	Probabilidade de Falha	11
2.4.2	Erro	12
3	EXPANSÃO POLINOMIAL	15
3.1	Introdução	15
3.2	Construção da Expansão Polinomial	15
3.2.1	Colocação	15
3.2.2	Método dos Mínimos Quadrados Discreto	16
3.2.3	Método dos Mínimos Quadrados Contínuo	17
3.3	Funções de Base	18
3.4	Integração Numérica	19
3.4.1	Gauss-Legendre	19
3.4.2	Gauss-Hermite	20
4	ANÁLISE ESTRUTURAL	22
4.1	Fontes de não linearidade	22
4.2	Tipos de Análise Estrutural	23

4.2.1	Análise linear de primeira ordem	24
4.2.2	Análise linear de segunda ordem	24
4.2.3	Análise não linear de primeira ordem	24
4.2.4	Análise não linear de segunda ordem	25
4.3	Critério de Colapso	25
5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	30
6	EXEMPLOS	32
6.1	Exemplo 1: Treliça plana com 6 barras	32
6.2	Exemplo 2: Viga sujeita a carregamento distribuído uniformemente .	34
6.3	Exemplo 3: Treliça espacial de 18 barras	36
7	CONCLUSÕES	38
	REFERÊNCIAS	39

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Todo projeto estrutural deve atender a uma série de critérios e valores admissíveis para que os danos estruturais sejam mínimos durante a vida útil da estrutura. Esses parâmetros estão relacionados, principalmente, à segurança e ao conforto da obra durante sua utilização. Cada um desses critérios e parâmetros é chamado de estado limite, e a violação de um determinado estado limite resulta em uma situação indesejável para a estrutura (MELCHERS, 1999).

Nos métodos determinísticos se conhecem de forma exata todos os valores dos parâmetros envolvidos no problema analisado, porém, devido às incertezas do problema e a influência de diversos fatores externos, esses valores devem ser avaliados como variáveis aleatórias com uma probabilidade de falhar não nula.

Com isso, durante os últimos anos intensificaram-se as pesquisas no ramo da análise da confiabilidade devido à necessidade de levar esse fator em consideração nos problemas analisados. É importante incorporar essas incertezas dentro dos projetos, porque o projeto final de engenharia deve atender a uma série de critérios e alguns desses dependem de diversas fontes (tipos de forças e cargas, por exemplo) (MELCHERS, 1999; HALDAR; MAHADEVAN, 2000)

Além de incorporar incertezas aos problemas, outro fator importante é avaliar o comportamento de uma estrutura quando submetida à ações externas. Esta avaliação pode ser feita através de uma análise estrutural, sendo escolhida aquela que mais se ajusta as características do problema analisado.

Entre os diversos tipos de análise estrutural, a principal diferença é na consideração ou não da linearidade física e geométrica da estrutura. Vale salientar que, quanto mais próximo forem os parâmetros adotados na análise com os parâmetros da estrutura real, mais preciso e próximo da realidade será a análise e os resultados obtidos.

A partir da análise estrutural, pode-se verificar se a mesma entrará em colapso para as ações externas que estão submetidas. Na análise não linear, uma das maneiras de avaliar o colapso estrutural é no momento em que os deslocamentos crescem indefinidamente sob a aplicação de uma carga externa constante (BATHE, 1996; REDDY, 2015).

Com os avanços na área de confiabilidade estrutural, as normas e os códigos (NBR 8800, AISC e EUROCODE, por exemplo) relacionados à área de projetos estruturais estão reformulando seus coeficientes e valores admissíveis através da consideração de incertezas nos projetos. Assim, pesquisas recentes tratam da reformulação, com a consideração da análise

de confiabilidade, desses antigos valores, como consta em Beck e Corrêa (2013), Honfi, Martensson e Thelandersson (2012) e Deftyarev (2012).

1.2 Justificativa

Por se tratar de um processo custoso do ponto de vista computacional, calcular a probabilidade de falha estrutural às vezes pode se tornar algo inviável para fins acadêmicos e práticos por causa do seu elevado tempo no processamento dos resultados, embora seja importante para avaliar a segurança da estrutura,.

Com o intuito de realizar uma análise mais próxima do comportamento real da estrutura, nesta dissertação realizou-se uma análise não linear de segunda ordem, considerando as não linearidades física e geométrica nos problemas analisados. Por se tratar de um método incremental, a análise não linear também é custosa computacionalmente, contribuindo para o aumento do esforço computacional no processo de análise de confiabilidade.

Com isso, nos últimos anos vem aumentando as pesquisas por métodos alternativos que viabilizem o cálculo da probabilidade de falha estrutural, diminuindo o esforço computacional e obtendo os resultados desejados, o qual será o foco principal desta dissertação. Além disso, os resultados obtidos poderão ser utilizados em futuras pesquisas, por exemplo, no ramo de otimização estrutural baseada em incertezas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo principal deste trabalho consiste em calcular a probabilidade de falha estrutural pelo método da expansão polinomial, ou seja, a análise de confiabilidade é feita com o uso de polinômios. Por fim, pretende-se avaliar o custo computacional e a precisão nos resultados obtidos para todos os casos analisados.

1.3.2 Objetivos específicos

Entre os objetivos específicos desta pesquisa estão:

- Desenvolver rotinas computacionais associadas à metodologia aplicada;
- Implementar o método de expansão polinomial para análise de confiabilidade;
- Calcular a probabilidade de falha estrutural;

- Comparar e validar os resultados obtidos;
- Avaliar o custo computacional e a precisão entre os resultados encontrados.

1.4 Organização do Trabalho

O texto da dissertação foi subdividido em mais seis capítulos. Inicialmente, foi apresentado um detalhamento dos temas relacionados ao objetivo dessa pesquisa. Em seguida, exemplos numéricos foram resolvidos para mostrar a eficácia do método aqui proposto e, por fim, foram comentadas as conclusões mais importantes da realização desse trabalho.

No **Capítulo 2**, os conceitos relacionados ao tema de confiabilidade estrutural foram discutidos, dando um destaque para o processo de determinação da probabilidade de falha da estrutura pelo método de Monte Carlo.

No **Capítulo 3**, foi detalhado a construção do método da expansão polinomial, mostrando a função de base adotada e os tipos de métodos utilizados para encontrar os coeficientes da função polinomial.

No **Capítulo 4**, os conceitos relacionados a análise estrutural foram discutidos, focando nas fontes de não linearidade, nos tipos de análise estrutural e no critério de colapso adotado nessa dissertação.

No **Capítulo 5** e **Capítulo 6**, o procedimento de implementação computacional e os exemplos numéricos foram mostrados, tendo sido aplicado, em todos eles, o método da expansão polinomial para o cálculo da probabilidade de falha e, posteriormente, feito a comparação desses resultados para validação do método desenvolvido.

Finalmente, no **Capítulo 7** são apresentadas as conclusões da pesquisa realizada. Além disso, sugestões de futuras pesquisas são comentadas, expandindo e dando continuidade à aplicação desse método aqui proposto em outras áreas de atuação.

2 Confiabilidade Estrutural

2.1 Introdução

A probabilidade de falha pode ser avaliada por vários métodos, sendo o *First and Second Order Reliability Methods* (FORM e SORM, respectivamente) e a Simulação de Monte Carlo (MCS) os mais utilizados (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

Os métodos FORM/SORM, embora sejam computacionalmente eficientes e rápidos, tem sua precisão limitada no resultado final para os casos onde a função g é não linear e para uma distribuição probabilística diferente da Gaussiana, como exemplificado em Lopez et al. (2015) e Lopez et al. (2014).

Em contrapartida, o Método de Monte Carlo, embora seja computacionalmente custoso, pode ser aplicado a qualquer tipo de função g (linear ou não linear) e para qualquer tipo de distribuição probabilística (Gaussiana, Lognormal, Betta, etc), tornando-se um dos métodos mais utilizados para estimar o valor da probabilidade de falha de um sistema (RUBINSTEIN; KROESE, 2007).

2.2 Variáveis aleatórias

2.2.1 Funções densidade de probabilidade

Como consta em Montgomery, Runger e Hubele (2001), para uma variável aleatória X , pode-se calcular a probabilidade P que o valor de X seja menor ou igual a um determinado valor x , através da função $F_x(x)$ de distribuição acumulada (FDA)

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} \quad (2.1)$$

Uma maneira de representar a frequência que os valores de X aparecem em uma determinada amostra ou população é através do valor da função densidade de probabilidade (FDP) ou função densidade $f_x(x)$. Com isso, para calcular a probabilidade de um valor X ser menor ou igual a um valor x , pode-se relacionar o valor de $F_x(x)$ com o de $f_x(x)$ da seguinte forma

$$F_x(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = \int_{-\infty}^x f_x(x)dx \quad (2.2)$$

Graficamente, a Eq.2.2 pode ser representada pela Fig.1, onde a probabilidade $P\{X \leq x\}$ corresponde ao valor de $F_x(x)$ e será igual a área abaixo da curva $f_x(x)$ no intervalo de $X \in (-\infty, x]$.

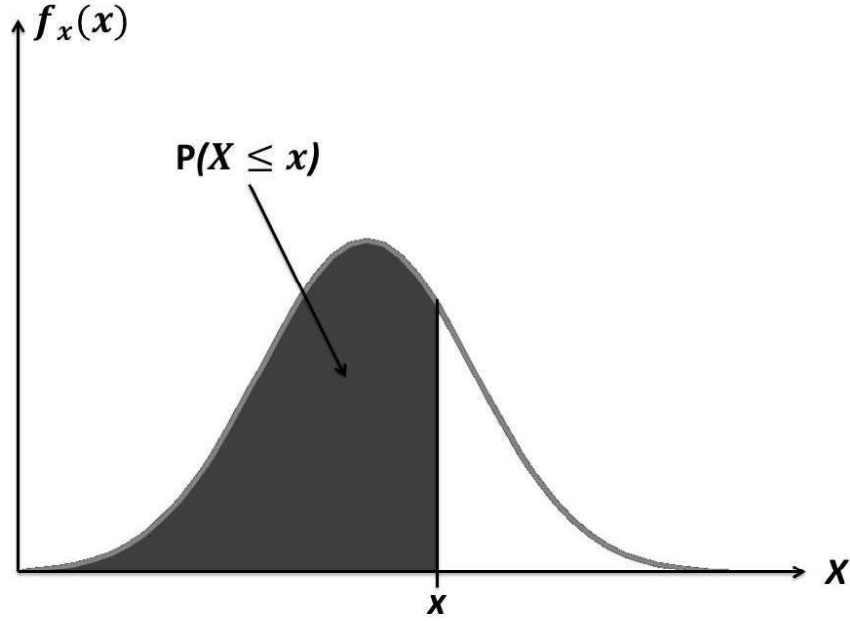


Figura 1 – Relação entre FDA e FDP.

No caso de $X \in [x_1, x_2]$, a probabilidade de um valor X se encontrar entre dois valores x_1 e x_2 pode ser calculada por

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_x(x_2) - F_x(x_1) \quad (2.3)$$

substituindo os valores de $F_x(x)$ da Eq. 2.2

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_x(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_x(x) dx \quad (2.4)$$

resultando em

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx \quad (2.5)$$

Como se trata de uma integral, a Eq. 2.5 também pode ser interpretada como a área abaixo da curva $f_x(x)$ entre os valores x_1 e x_2 , como mostrado na Fig 2.

Com relação as propriedades e os tipos de $f_x(x)$, trata-se de uma função que satisfaz:

- $f_x(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$;
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx$.

e com relação aos tipos de curvas ou distribuições probabilísticas, podem-se citar:

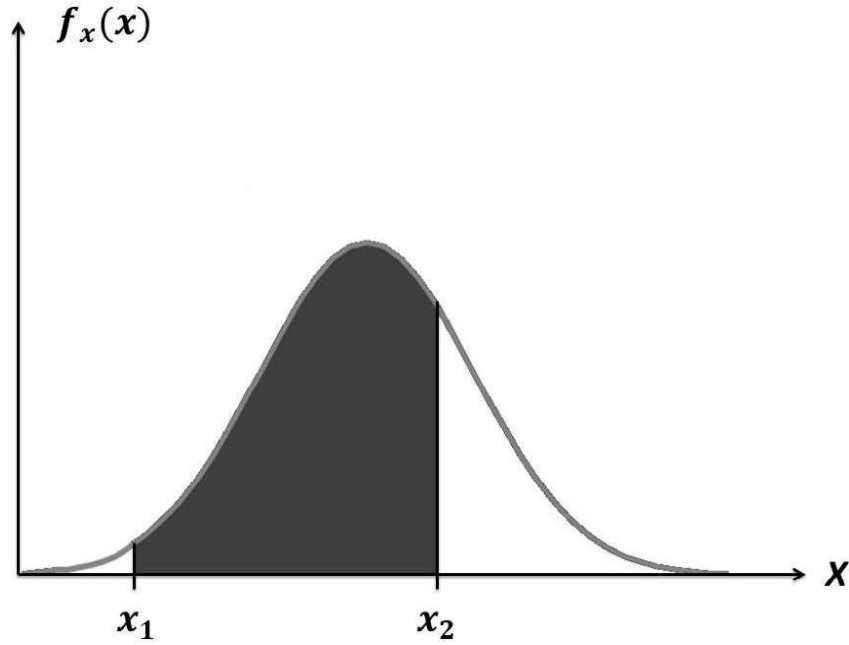


Figura 2 – Valor da probabilidade $P(x_1 \leq X \leq x_2)$.

- Distribuição Gaussiana;
- Distribuição Uniforme;
- Distribuição Gamma;
- Distribuição Betta.

Assim, como os valores de $f_x(x) \geq 0$ e definindo o suporte Ω de uma função contínua $f_x(x)$ como

$$\Omega = \{x \in \Re^n | f_x(x) > 0\} \quad (2.6)$$

o valor de $F_x(x)$ da Eq. 2.2 pode ser simplificada na forma

$$F_x(x) = \int_{\Omega} f_x(x) \quad (2.7)$$

2.2.2 Valor esperado e variância

Quando são consideradas variáveis aleatórias, outro conceito muito importante é o do Valor Esperado $E[]$ ou Valor Médio de uma variável aleatória X , que pode ser calculado por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_{\Omega} x f_x(x) \quad (2.8)$$

sendo Ω o suporte da função $f_x(x)$.

Embora o valor esperado represente uma média ponderada dos possíveis valores de X , ele não fornece informação sobre a dispersão dos valores de X com relação a média. Logo, uma alternativa de quantificar esta dispersão de valores é através da Variância Var , definida e calculada por

$$\begin{aligned}
 Var[X] &= E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_x(x) dx \\
 Var[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[(X^2 - 2XE[X] + E[X]^2)] \\
 Var[X] &= E[X^2] - E[2XE[X]] + E[E[X]^2] \\
 Var[X] &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\
 Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

com isso, percebe-se que a variância de X é o valor esperado da distância ao quadrado em relação à média e, portanto, é capaz de avaliar dispersão da variável aleatória em relação à média.

Na próxima subseção deste trabalho, será apresentada a Distribuição Gaussiana, por se tratar de uma das principais e mais usuais no meio acadêmico, sendo posteriormente mostrado uma tabela com os valores desses parâmetros para outros tipos de distribuições probabilísticas.

2.2.3 Distribuição Gaussiana

Na Distribuição Gaussiana, a função densidade de probabilidade $f_x(x)$ para uma variável aleatória X é calculada por

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{[\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2.10}$$

onde μ é a média e σ o desvio-padrão. Com isso, de acordo com a Eq.2.2, a função de distribuição acumulada $F_x(x)$ resultará em

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{[\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]} dx \tag{2.11}$$

Os valores do Valor Esperado $E[]$ e da variância Var , através das Eq.2.8 e 2.9, resultarão em

$$E[X] = \int_{\Omega} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} = \mu \quad (2.12)$$

$$Var[X] = \int_{\Omega} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} = \sigma^2$$

2.2.4 Outras distribuições padrões

Na Tabela 1 mostrada a seguir, constam os valores das funções $f_x(x)$, do valor esperado $E[]$, da variância Var e dos parâmetros envolvidos para alguns tipos de distribuições probabilísticas.

Tabela 1 – Tipos de distribuições probabilísticas

Distribuição	$f_X(x)$	Parâmetros				Valor Esperado	Variância
		p_1	p_2	p_3	p_4		
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]$	μ	σ	-	-	μ	σ^2
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	a	b	-	-	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Gama	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp^{-\frac{x}{\beta}}$	α	β	-	-	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Beta	$\frac{1}{B(q,r)} \frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	a	b	r	q	$a + \frac{q}{q+r}(b-a)$	$\frac{qr}{(q+r)^2(q+r+1)}(b-a)^2$
Lognormal	$\frac{1}{\xi x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi} \right)^2 \right]$	λ	ξ	-	-	$\exp[\lambda + 0.5\xi^2]$	$\mu^2[\exp(\xi^2) - 1]$

2.3 Análise de Confiabilidade

Como mostrado em Melchers (1999), Haldar e Mahadevan (2000), para o cálculo da probabilidade de falha, usa-se uma função *performance* $g(\mathbf{X})$, sendo \mathbf{X} o conjunto das variáveis aleatórias que estão relacionadas a segurança da estrutura, tal que $g(\mathbf{x}) < 0$ indica a falha do sistema, $g(\mathbf{x}) > 0$ indica que o sistema está seguro e $g(\mathbf{x}) = 0$ define a função de estado limite do problema de confiabilidade, como mostrado na Fig.3 com X_1 e X_2 sendo duas variáveis aleatórias.

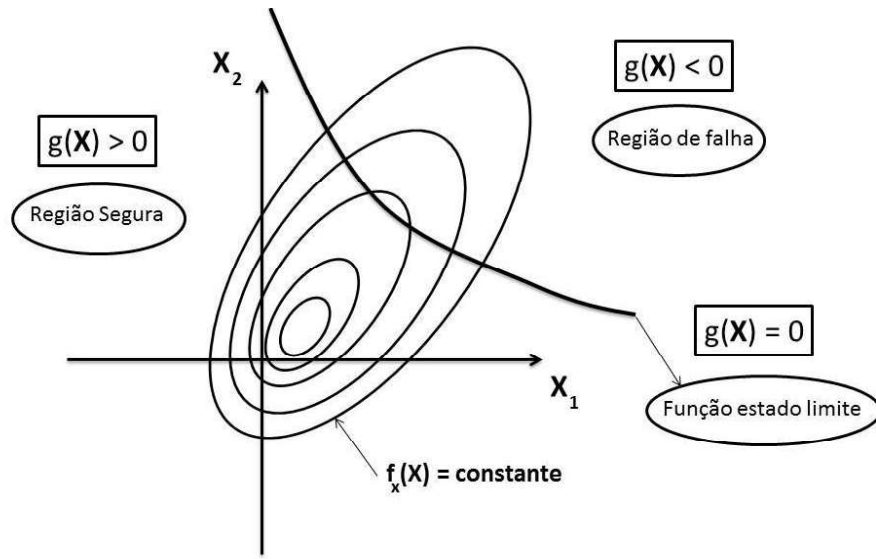


Figura 3 – Função *performance* $g(\mathbf{X})$.

Assim, a probabilidade de falha P_f pode ser definida como

$$P_f = P(g < 0) = \int_{g < 0} f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

onde $D = \{\mathbf{x} \in \Re, g < 0\}$ representa o domínio de falha do sistema. Em outras palavras, o domínio de falha D do sistema pode ser entendido como o conjunto de valores de X onde $g(\mathbf{X}) < 0$, indicando a falha do sistema.

No entanto, uma maneira mais usual de representar a probabilidade de falha da Eq. 2.13 é dada por

$$P_f = \int_{\Omega} I[g(\mathbf{x})] f_x(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

sendo I uma função indicadora e Ω o suporte da função $f_x(\mathbf{x})$. A função indicadora I pode ser definida como

$$I(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \geq 0 \\ 1 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Fazendo a substituição da Eq.2.8 na Eq.2.14 resulta por fim em

$$P_f = \int_{\Omega} I[g(\mathbf{x})] f_x(\mathbf{x}) = E[I(g)], \quad (2.16)$$

indicando que a probabilidade de falha P_f de um sistema é igual ao valor esperado $E[I(g)]$ da função indicadora $I(g)$.

2.4 Simulação de Monte Carlo

Por se tratar de um método probabilístico, o método de Monte Carlo simula uma grande amostra com possíveis resultados das variáveis randômicas \mathbf{X} . Em outras palavras, o método de Monte Carlo faz várias análises determinísticas do problema para se obter uma distribuição ou amostra estatística.

Vale salientar que, quanto maior a amostra, maior será o número de observações e melhor será a precisão do resultado final. Com isso, para calcular a P_f , várias amostras são simuladas e os valores da função g e $I(g)$ são calculados.

2.4.1 Probabilidade de Falha

Realizando um número total de simulações n_{si} por Monte Carlo, a probabilidade de falha da Eq.2.16 pode ser estimada por \tilde{P}_f (MELCHERS, 1999; HALDAR; MAHADEVAN, 2000)

$$P_f \approx \tilde{P}_f = \frac{1}{n_{si}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} I(x_i) = \frac{n_f}{n_{si}}, \quad (2.17)$$

no qual n_f indica o número de simulações onde $g < 0$. Em outras palavras, a probabilidade de falha pode ser calculada a partir da razão entre a quantidade de simulações n_f onde o sistema falha e o total de simulações n_{si} realizadas.

Graficamente, para o caso de duas variáveis aleatórias (X_1, X_2) e representando cada simulação pelo símbolo +, como mostrado na Fig. 4, a simulação de Monte Carlo estima a P_f como a razão do número de simulações que estão na região de falha do sistema $g < 0$ sobre o número total de simulações.

Vale ressaltar que o esforço computacional e a precisão do método de Monte Carlo estão diretamente ligados a quantidade de simulações realizadas n_{si} , onde uma maior quantidade n_{si} indica que mais casos serão analisados, gerando um maior esforço computacional.

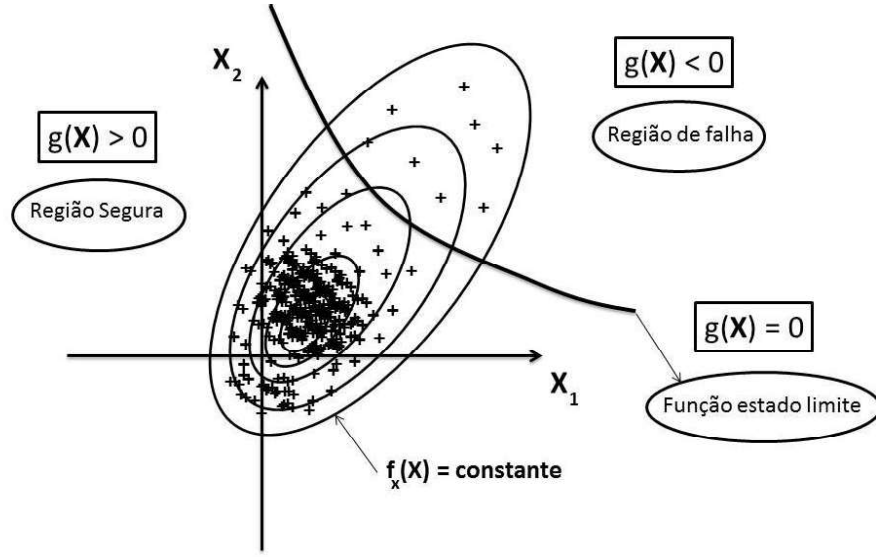


Figura 4 – Método de Monte Carlo.

2.4.2 Erro

Por se tratar de um método probabilístico e aproximado, a probabilidade de falha estimada por Monte Carlo possui um erro e

$$e = \tilde{P}_f - P_f \quad (2.18)$$

que está relacionado ao número de simulações n_{si} e com a precisão do valor da P_f .

Com o uso da Eq.2.16 e da Eq.2.17, o valor esperado de \tilde{P}_f vale

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_f] &= E\left[\frac{1}{n_{si}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} I(x_i)\right] \\ E[\tilde{P}_f] &= \frac{1}{n_{si}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} E[I(x_i)] \\ E[\tilde{P}_f] &= \frac{n_{si} P_f}{n_{si}} \\ E[\tilde{P}_f] &= P_f. \end{aligned} \quad (2.19)$$

indicando que o valor esperado da \tilde{P}_f é igual ao valor da probabilidade de falha P_f .

Uma das maneiras de encontrar a quantidade adequada de simulações é através da quantificação do erro esperado da \tilde{P}_f . A quantificação desse erro esperado pode ser feito através do valor do erro médio quadrático esperado (eleva-se ao quadrado para evitar que "erros positivos" se cancelem com "erros negativos") de \tilde{P}_f

$$\begin{aligned}
E[e^2] &= E[(\tilde{P}_f - P_f)^2] = E[(\tilde{P}_f - E[\tilde{P}_f])^2] \\
E[e^2] &= Var[\tilde{P}_f] = Var\left[\frac{1}{n_{si}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} I(x_i)\right] \\
E[e^2] &= \frac{1}{n_{si}^2} \cdot \sum_{i=1}^{n_{si}} Var[I(x_i)] = \frac{n_{si} \cdot Var[I(x_i)]}{n_{si}^2} \\
E[e^2] &= \frac{Var[I(x_i)]}{n_{si}} = Var[\tilde{P}_f]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

mostrando que o erro da \tilde{P}_f é inversamente proporcional ao número de simulações n_{si} , ou seja, quanto maior o número de simulações n_{si} , menor será o erro e e mais preciso é o resultado.

Substituindo o valor da variância da Eq.2.9 na Eq. 2.20, resulta em

$$\begin{aligned}
Var[\tilde{P}_f] &= \frac{Var[I]}{n_{si}} = \frac{E[I^2] - E[I]^2}{n_{si}} = \frac{E[I] - E[I]^2}{n_{si}} \\
Var[\tilde{P}_f] &= \frac{P_f - P_f^2}{n_{si}} = \frac{P_f(1 - P_f)}{n_{si}}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Com o valor da variância de \tilde{P}_f calculado, o desvio-padrão $\sigma_{\tilde{P}_f}$ será

$$\sigma_{\tilde{P}_f} = \sqrt{Var[\tilde{P}_f]} = \sqrt{\frac{P_f(1 - P_f)}{n_{si}}}. \tag{2.22}$$

Para medir o número de simulações n_{si} , deve-se definir a precisão desejada para o resultado de \tilde{P}_f através do valor do coeficiente de variação $\delta_{\tilde{P}_f}$

$$\delta_{\tilde{P}_f} = \frac{\sigma_{\tilde{P}_f}}{E[\tilde{P}_f]} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{n_{si} \cdot P_f}}. \tag{2.23}$$

o coeficiente de variação $\delta_{\tilde{P}_f}$ pode ser interpretado como o erro relativo de \tilde{P}_f , ou seja, o erro esperado de \tilde{P}_f (representado por $\sigma_{\tilde{P}_f}$) dividido pelo valor exato (representado por $E[\tilde{P}_f]$). Por exemplo, um coeficiente de variação igual a 0.05 indica que o erro esperado de \tilde{P}_f é de 5%.

Como o valor de P_f geralmente não é conhecido, pode-se fazer a aproximação $P_f \approx \tilde{P}_f$, ficando a Eq.2.23 na forma

$$\delta_{\tilde{P}_f} \approx \sqrt{\frac{1 - \tilde{P}_f}{n_{si} \cdot \tilde{P}_f}}. \tag{2.24}$$

Além disso, para os casos onde a probabilidade de falha é muito pequena, pode-se aproximar o valor de $1 - \tilde{P}_f \approx 1$, resultando em

$$\delta_{\tilde{P}_f} \approx \frac{1}{\sqrt{n_{si} \cdot \tilde{P}_f}} \longrightarrow n_{si} \approx \frac{1}{\delta_{\tilde{P}_f}^2 \tilde{P}_f} \quad (2.25)$$

onde o n_{si} indica o número de simulações necessárias para se obter a precisão $\delta_{\tilde{P}_f}$ para o valor da probabilidade de falha P_f .

A partir da Eq.2.25, nota-se que quanto menor o valor da \tilde{P}_f , maior será o número de simulações n_{si} . No caso de uma probabilidade de falha $P_f \approx 10^{-n}$ e para um erro esperado de 10% ($\delta_{\tilde{P}_f} = 0.1$), por exemplo, o valor de n_{si} será

$$n_{si} \approx \frac{1}{0.1^2 10^{-n}} = 10^{n+2} \quad (2.26)$$

Com isso, através da Eq. 2.26, percebe-se que para o cálculo da probabilidade de falha P_f pela Simulação de Monte Carlo, quanto menor for o valor da probabilidade de falha, maior será o número de simulações n_{si} necessárias e, conseqüentemente, maior será o custo computacional.

Como nos problemas de engenharia geralmente se trabalha com uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-3} ou 10^{-4} , serão necessárias em torno de 10^5 a 10^6 simulações para estimar com precisão o valor da P_f . Neste trabalho, usou-se um valor de $n_{si} = 10^6$ com uma probabilidade de falha na ordem de 10^{-3} (MELCHERS, 1999).

3 Expansão Polinomial

3.1 Introdução

Criado inicialmente por Wiener (1938) e, posteriormente, empregada no ramo da engenharia por Ghanem e Spanos (1991) e Xiu e Karniadakis (2002), o método da expansão polinomial utiliza os polinômios para reduzir a complexidade dos problemas em que a função *performance* original $g(\mathbf{X})$ é custosa do ponto de vista computacional e matemático.

No método da expansão polinomial, utilizam-se as funções polinomiais como funções de base. O uso de funções polinomiais se dá principalmente pelas vantagens de se manipular e operar polinômios. Além disso, para as operações de derivação e integração, o custo matemático torna-se menor quando comparado aos outros tipos de funções de base.

3.2 Construção da Expansão Polinomial

No método da expansão polinomial, a função *performance* original $g(\mathbf{X})$ é substituída por uma função polinomial $g_k(\mathbf{X})$ de ordem k

$$g_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m c_i \psi_i(\mathbf{X}), \quad (3.1)$$

onde ψ_i forma uma base para o espaço polinomial de ordem k , denominado \mathcal{P}_k , em n dimensões, c_i são os coeficientes a serem determinados e m é o número de funções de base empregadas.

A obtenção dos coeficientes c_i das funções $g_k(\mathbf{X})$ pode ser feita por diversas maneiras, sendo apresentadas neste trabalho:

- Método da Colocação;
- Método dos Mínimos Quadrados Discreto (MQD);
- Método dos Mínimos Quadrados Contínuo (MQC).

3.2.1 Colocação

No Método da Colocação os coeficientes c_i são obtidos por imposição da condição

$$g_k(x_j) = g(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n_c, \quad (3.2)$$

resultando em um sistema de equações lineares

$$\sum_{i=1}^m c_i \psi_i(x_j) = g(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n_c \quad (3.3)$$

sendo x_j pontos não repetidos e n_c o número de pontos adotados. Assim, este método garante que $g_k(x_j)$ tenha o mesmo valor de $g(x_j)$ nos pontos x_j .

No entanto, para que o sistema da Eq. 3.3 tenha solução única, deve-se ter um número de coeficientes m igual ao número de pontos n_c . No caso de $n_c < m$, o sistema pode ser possível e indeterminado (com infinitas soluções), e para $n_c > m$ o sistema linear não tem solução.

Com isso, a prática comum dos pesquisadores em aumentar o número de pontos n_c para ter uma melhor função interpoladora final pode resultar no caso de $n_c > m$, com um sistema final sem solução. Uma alternativa viável é usar uma curva de aproximação que melhor se aproxime da solução exata nos pontos analisados, através do Método dos Mínimos Quadrados Discreto ou Contínuo.

3.2.2 Método dos Mínimos Quadrados Discreto

No Método dos Mínimos Quadrados Discreto, procura-se uma função $g_k(\mathbf{X})$ que se aproxime da função original $g(\mathbf{X})$ e que possua o menor resíduo entre as duas funções. Sendo o resíduo $r(x)$ igual a diferença entre a aproximação e a função original em um intervalo fechado $[a, b]$ da aproximação

$$r(x) = g_k(x) - g(x) \quad (3.4)$$

Para evitar que erros negativos se cancelem com erros positivos, eleva-se o resíduo total $R(x)$ ao quadrado para considerar todos os erros existentes na aproximação, independente do seu sinal algébrico

$$R(x) = \sum_{x \in [a, b]} [g_k(x_i) - g(x_i)]^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Com isso, o objetivo do método dos Mínimos Quadrados Discreto é encontrar os coeficientes da função aproximada $g_k(\mathbf{x})$ que minimize o resíduo total $R(\mathbf{x})$. Isto pode ser feito derivando-se o resíduo total em relação aos coeficientes e igualando-se a zero, o que resulta no sistema de equações lineares (ATKINSON, 1989)

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.6)$$

com

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \psi_i(x_k) \psi_j(x_k) \quad (3.7)$$

$$b_i = \sum_{k=1}^n \psi_i(x_k) g(x_k) \quad (3.8)$$

Analisando os possíveis valores de n e m , percebe-se que para $n = m$ o Método dos Mínimos Quadrados Discreto se reduz no Método da Colocação com um resíduo total nulo nos pontos $x \in X$, logo, a Colocação será um caso particular do Método dos Mínimos Quadrados Discreto. Além disso, para $n > m$ a Colocação deverá ser chamada de Método dos Mínimos Quadrados Discreto, do ponto de vista conceitual.

3.2.3 Método dos Mínimos Quadrados Contínuo

Na situação onde o valor da função original $g(x)$ seja conhecida em todo o domínio $x \in [a, b]$, outra maneira de construir a função polinomial $g_k(x)$ é através do Método dos Mínimos Quadrados Contínuo. O procedimento é feito encontrando os coeficientes que minimizem o resíduo total R

$$R = \int_{\Omega} [g_k(x) - g(x)]^2 w(x), \quad (3.9)$$

sendo $w(x)$ uma função peso e Ω o domínio de integração. Como resultado da minimização de $R(x)$, tem-se um sistema de equações lineares

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.10)$$

com

$$A_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle, \quad (3.11)$$

$$b_i = \langle \psi_i, g(x) \rangle, \quad (3.12)$$

onde o produto interno entre duas funções $u(x)$ e $v(x)$ é definido como

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) v(x) w(x). \quad (3.13)$$

Como o Ω pode ser ilimitado, uma forma de garantir um valor finito para o produto interno da Eq. 3.13 é atribuir funções de distribuições às funções peso $w(x)$. Assim, a escolha mais natural seria adotar a função peso $w(x)$ como sendo uma função densidade de probabilidade $f_x(X)$, garantindo que os erros sejam ponderados pela mesma função usada

para calcular o valor da probabilidade, além de dar ênfase variada nas diferentes regiões do domínio de integração (XIU; KARNIADAKIS, 2002).

Logo, substituindo w por f_X nas Equações 3.9, 3.11 e 3.12, resulta em

$$R = \int_{\Omega} [g_k(x) - g(x)]^2 f_X(x) = E[r^2] \quad (3.14)$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i(x) \psi_j(x) f_X(x) = E[\psi_i(x) \psi_j(x)] \quad (3.15)$$

$$b_i = \int_{\Omega} \psi_i(x) g(x) f_X(x) = E[\psi_i(x) g(x)] \quad (3.16)$$

mostrando que os valores da Eq. 3.14, 3.15 e 3.16 resultam em valores esperados quando a função densidade probabilidade $f_X(x)$ é usada como a função peso $w(x)$.

Vale ressaltar que o sistema final para o caso contínuo (Eq.3.10) é igual ao do caso discreto (Eq.3.6), porém, a diferença é que no caso discreto o produto interno é feito entre dois vetores e para o caso contínuo é feito entre duas funções. Da mesma forma que foi empregado anteriormente em Torii, Lopez e Miguel (2017), neste trabalho os coeficientes c_j da função $g_k(x)$ foram encontrados pelo Método dos Mínimos Quadrados Contínuo.

3.3 Funções de Base

Como detalhado em Torii, Lopez e Miguel (2017), para a composição das funções de base foram utilizados conjuntos de polinômios $P_k(x)$ de ordem até k

$$P_k(x) = \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k\}. \quad (3.17)$$

que formam uma base para o espaço dos polinômios de ordem até k em uma dimensão. Para o caso n -dimensional, uma base completa para o espaço de polinômios de ordem até k dos vetores $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ pode ser construída como

$$P_k^n(x) = P_k(x_1) \otimes P_k(x_2) \otimes \dots \otimes P_k(x_n). \quad (3.18)$$

onde \otimes é o produto diádico e indica a multiplicação entre todos as componentes de dois conjuntos de polinômios $P_k(x)$ entre si, resultando em $(k+1)^n$ funções de base. Com isso, as funções de base ψ_i da função polinomial g_k são compostas pelos elementos de $P_k^n(x)$

$$\psi_i(x) \in P_k^n, \quad i = 1, 2, \dots, (k+1)^n. \quad (3.19)$$

Por exemplo, no caso de uma expansão bidimensional de segunda ordem, tem-se $n = 2$ e $k = 2$, o que resulta em $P_2^2(x) = \{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2^2\}$.

3.4 Integração Numérica

Para encontrar os coeficientes c_j da Eq. 3.10 é necessário calcular as integrais dos produtos internos da Eq. 3.11 e Eq. 3.12. Assim, como essas integrais são compostas por polinômios e pela função densidade de probabilidade, com base em Hildebrand (2013) e Atkinson (1989), fez-se o uso dos seguintes tipos de integração numérica:

- Gauss-Legendre ;
- Gauss-Hermite ;
- Gauss-Laguerre.

3.4.1 Gauss-Legendre

No caso da função densidade de probabilidade ser uniforme no intervalo $[a, b]$, a função $f_X(x)$ pode ser representada por

$$\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{b-a} & , \quad x \in [a, b] \\ f_X(x) = 0 & , \quad x \notin [a, b] \end{cases} \quad (3.20)$$

Assim, assumindo que $f(x)$ seja uma função polinomial, pela integração numérica de Gauss-Legendre, a integral de $f(x)$ em um dado intervalo $x \in [a, b]$ é aproximada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i \quad (3.21)$$

onde w_i é uma função peso e $f(x_i)$ corresponde ao valor da função $f(x)$ no ponto x_i . Vale ressaltar que a quantidade n e a posição dos pontos x_i estão relacionados ao grau do polinômio da função $f(x)$. No entanto, quando n pontos e pesos são utilizados, a integração será exata para polinômios até a $(2n - 1)$ -ordem (HILDEBRAND, 2013; ATKINSON, 1989).

Como forma de exemplificação, para um intervalo $[a, b] = [-1, +1]$ e utilizando dois pontos de integração $n = 2$, integra-se exatamente uma função $f(x)$ cúbica

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. 3.22 na Eq. 3.21

$$\int_{-1}^{+1} 1dx + \int_{-1}^{+1} xdx + \int_{-1}^{+1} x^2dx + \int_{-1}^{+1} x^3dx = f(x_1)w_1 + f(x_2)w_2 \quad (3.23)$$

e analisando cada parcela separadamente

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} 1dx &= 1w_1 + 1w_2 \rightarrow 2 = 1w_1 + 1w_2 \\
\int_{-1}^{+1} xdx &= x_1w_1 + x_2w_2 \rightarrow 0 = x_1w_1 + x_2w_2 \\
\int_{-1}^{+1} x^2dx &= x_1^2w_1 + x_2^2w_2 \rightarrow \frac{2}{3} = x_1^2w_1 + x_2^2w_2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\int_{-1}^{+1} x^3dx = x_1^3w_1 + x_2^3w_2 \rightarrow 0 = x_1^3w_1 + x_2^3w_2$$

A posição dos pontos e seus respectivos pesos são encontrados através do sistema da Eq. 3.24

$$\begin{aligned}
w_1 &= w_2 = 1 \\
x_1 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \\
x_2 &= +\frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Com isso, a integral de uma função cúbica para um intervalo $[-1, +1]$ pode ser calculada exatamente por

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)1 + f\left(+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)1 \tag{3.26}$$

Para integração de polinômios de ordem superior, na Tabela 2 são mostrados os números de pontos n , a posição dos pontos x_i , os pesos w_i e a ordem do polinômio $(2n - 1)$ que será integrado exatamente para um intervalo $x = [-1, 1]$.

Tabela 2 – Pontos de integração de Gauss-Legendre

n	x_i	w_i	$2n - 1$
2	$\pm 0,577350$	1	3
3	0	8/9	5
	$\pm 0,774597$	5/9	
4	$\pm 0,339981$	0,6521450	7
	$\pm 0,861136$	0,347855	

3.4.2 Gauss-Hermite

No caso da distribuição gaussiana, a função $f_X(x)$ é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{3.27}$$

A integração de Gauss-Hermite aproxima a integral de uma função polinomial $f(x)$ no domínio $x \in (-\infty, +\infty)$ por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i \quad (3.28)$$

onde w_i é uma função peso e $f(x_i)$ corresponde ao valor da função $f(x)$ no ponto x_i .

Da mesma maneira como acontece na integração de Gauss-Legendre, a quantidade n e a posição dos pontos x_i estão relacionados ao grau do polinômio da função $f(x)$. Na Tab. 3 são mostrados alguns exemplos da quantidade de pontos integração, posições, pesos e o grau do polinômio onde o valor da aproximação será exato.

Tabela 3 – Pontos de integração de Gauss-Hermite

n	x_i	w_i	$2n - 1$
2	$\pm 0,707107$	$0,886227$	3
3	0	$1,18164$	5
	$\pm 1,22474$	$0,295409$	
4	$\pm 0,524648$	$0,804914$	7
	$\pm 1,65068$	$0,0813128$	

Nos casos onde a distribuição é do tipo Gamma, pode-se utilizar a integração de Gauss-Laguerre. Vale ressaltar que outros tipos de distribuições probabilísticas podem ser tratadas por outros esquemas de integração Gaussiana.

4 Análise Estrutural

De maneira geral, a análise estrutural simula o comportamento de uma estrutura quando solicitada às ações externas. Assim, pode-se avaliar os valores dos esforços internos para tomar como base na elaboração de um projeto estrutural preciso e seguro.

A análise estrutural é realizada, basicamente, através dos valores da rigidez K , da força aplicada f e dos deslocamentos u nos pontos da estrutura. Contudo, esses parâmetros podem ter uma relação linear ou não linear, dependendo do comportamento físico e geométrico adotado para a estrutura e o material durante a análise estrutural.

No comportamento linear, as propriedades do material são invariáveis durante toda a análise estrutural e as equações de equilíbrio são formuladas na geometria inicial indeformada da estrutura, sendo adotada a relação linear $K.u = f$. Além disso, os deslocamentos são tratadas como infinitesimalmente pequenos, sendo desconsiderado seus efeitos no equilíbrio do sistema.

No comportamento não linear, a análise estrutural é feita através de incrementos de carga df , e a matriz de rigidez K depende do deslocamento du correspondente a cada incremento de carga, podendo assumir diversos valores durante a análise e fazendo com que a relação linear $K.u = f$ não necessariamente seja atendida. Vale salientar que esse comportamento não linear é causado por várias fontes, que serão comentadas na próxima seção.

4.1 Fontes de não linearidade

Segundo Bathe (1996), Reddy (2015), McGuire, Gallagher e Ziemian (2000), dentre as várias fontes de não linearidade, destacam-se as físicas e as geométricas. Vale ressaltar que, dependendo do problema e da estrutura analisada, pode-se considerar apenas um tipo de não linearidade, assim como também pode ser feito a combinação de efeitos de vários tipos de fontes diferentes.

Com relação a não linearidade física do material, após o início de aplicação da carga, os efeitos das mudanças das propriedades do material são levados em consideração no equilíbrio do sistema. Uma maneira de representar graficamente este comportamento é através do diagrama tensão σ x deformação ϵ , fazendo com que o valor do módulo de elasticidade do material $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ varie ao longo da análise estrutural, como mostrado na Fig. 5.

Com relação a não linearidade geométrica, neste caso são considerados os efeitos das deformações e deslocamentos finitos (anteriormente considerados infinitesimais e desprezados na análise linear) nas equações de equilíbrio do sistema. Assim, o equilíbrio da estrutura é

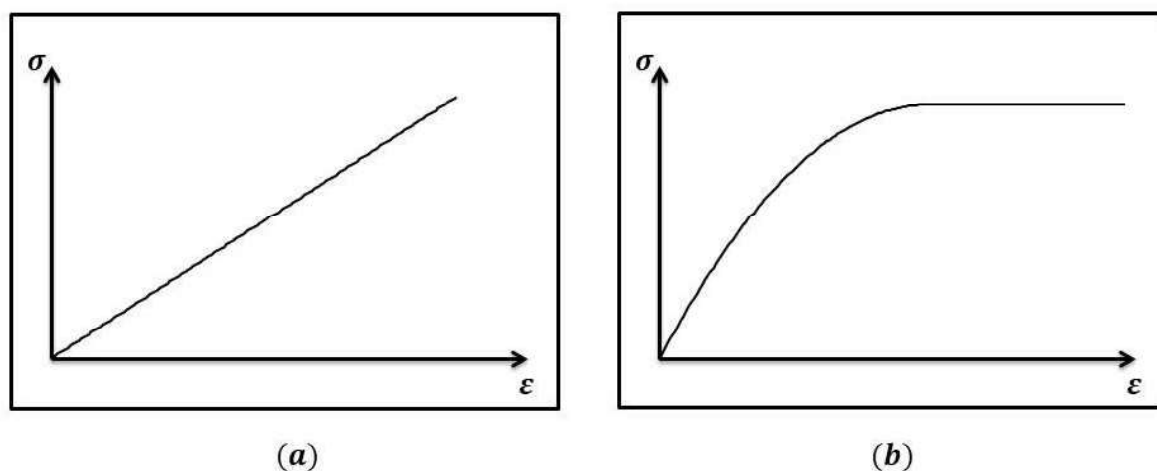


Figura 5 – (a) linearidade física do material; (b) não linearidade física do material.

baseado na estrutura deformada. Este efeito pode ser exemplificado graficamente pelo efeito $P-\Delta$, onde o deslocamento finito Δ ocasiona um acréscimo nos esforços internos da estrutura, como mostrado na Fig. 6.

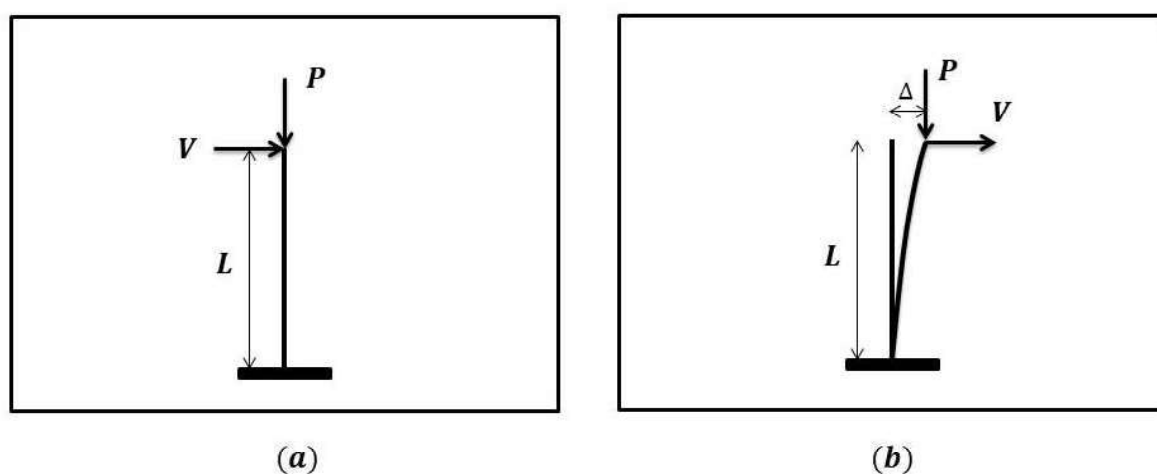


Figura 6 – (a) linearidade geométrica do material; (b) não linearidade geométrica do material.

4.2 Tipos de Análise Estrutural

Com base em McGuire, Gallagher e Ziemian (2000), a análise de uma estrutura pode ser realizada de diversas maneiras, entre as quais estão:

- Análise linear de primeira ordem;

- Análise linear de segunda ordem;
- Análise não linear de primeira ordem;
- Análise não linear de segunda ordem.

4.2.1 Análise linear de primeira ordem

Neste tipo de análise, são excluídas as não linearidades físicas e geométricas, sendo válida durante toda a análise a relação linear $K.u = f$ para simular e calcular os esforços da estrutura. Neste caso, a matriz de rigidez K pode ser entendida como uma matriz de rigidez elástica linear K_e , resultando em

$$[K_e].u = f \quad (4.1)$$

4.2.2 Análise linear de segunda ordem

Na análise linear de segunda ordem, embora as propriedades do material permaneçam inalteradas durante toda a análise, os efeitos de 2ª ordem dos deslocamentos e deformações finitos são considerados no cálculo das equações de equilíbrio do sistema. Usando esse tipo de análise estrutural já é possível perceber o efeito da instabilidade geométrica (principalmente em treliças e pórticos) e o efeito $P - \Delta$.

De modo geral, por se tratar de uma análise não linear, os deslocamentos du são encontrados para cada incremento de carga df pela seguinte relação

$$[K_e + K_g].du = df \quad (4.2)$$

onde a matriz de rigidez geométrica K_g surge por causa do efeito dos deslocamentos e deformações finitos e pode ser entendida como uma maneira de penalizar a rigidez da estrutura por causa da não linearidade geométrica.

4.2.3 Análise não linear de primeira ordem

Na análise não linear de primeira ordem, ainda que seja considerada a estrutura na sua posição inicial indeformada, a não linearidade física é considerada e as propriedades do material podem ter uma relação não linear dependendo do valor do incremento de força df e deslocamento du , sendo calculado por

$$[K_e + K_m].du = df \quad (4.3)$$

com K_m sendo uma matriz de rigidez do material, também conhecida como matriz de redução plástica. A matriz K_m surge por causa da não linearidade física e representa a mudança na rigidez causada pelo comportamento não linear do material da estrutura.

4.2.4 Análise não linear de segunda ordem

Neste tipo de análise, ambas não linearidades física e geométrica são adotadas, ou seja, as equações de equilíbrio são formuladas em termos da geometria do sistema deformado e as propriedades do material são consideradas não lineares. Na análise não linear de segunda ordem é possível detectar tanto os problemas de instabilidade geométrica (flambagem inelástica, por exemplo) como a plastificação do material. A equação geral nesse caso é dado por

$$[K_e + K_m + K_g].du = df \quad (4.4)$$

onde a matriz de rigidez do sistema é composta pela matriz de rigidez elástica K_e , matriz de rigidez geométrica K_g e pela matriz de rigidez do material K_m .

Nesse trabalho, adotou-se em todos os exemplos a análise não linear de segunda ordem, por se tratar de uma análise onde o maior número de imperfeições (ou não linearidades) da estrutura e do material são consideradas, aproximando-se cada vez mais do comportamento real da estrutura.

Além disso, nesse tipo de análise é possível detectar tanto os problemas de instabilidade estrutural como o ponto onde a estrutura perde sua capacidade de resistência mecânica. Por não ser o foco deste trabalho, não será detalhado o procedimento matemático e numérico usado para calcular cada tipo de análise. No entanto, esses procedimentos podem ser vistos detalhadamente em Bathe (1996) e Reddy (2015).

Como visto anteriormente, a principal diferença entre os tipos de análises é com relação a consideração da linearidade ou não linearidade física e geométrica do material, como mostrado esquematicamente na Fig. 7.

4.3 Critério de Colapso

Como foi utilizado a análise não linear de segunda ordem, adotou-se neste trabalho o critério de colapso da estrutura baseado na sua perda de rigidez, ou seja, a estrutura falha no momento que sua rigidez atinge um valor significativamente baixo. Em outras palavras, o colapso ocorre quando o equilíbrio não pode ser satisfeito para o carregamento aplicado (BATHE, 1996).

Por se tratar de um método incremental, uma das maneiras de identificar esse momento de colapso estrutural é com o gráfico do deslocamento $\|u\|$ pelo multiplicador do carregamento λ durante a análise não linear, como mostrado na Fig. 8.

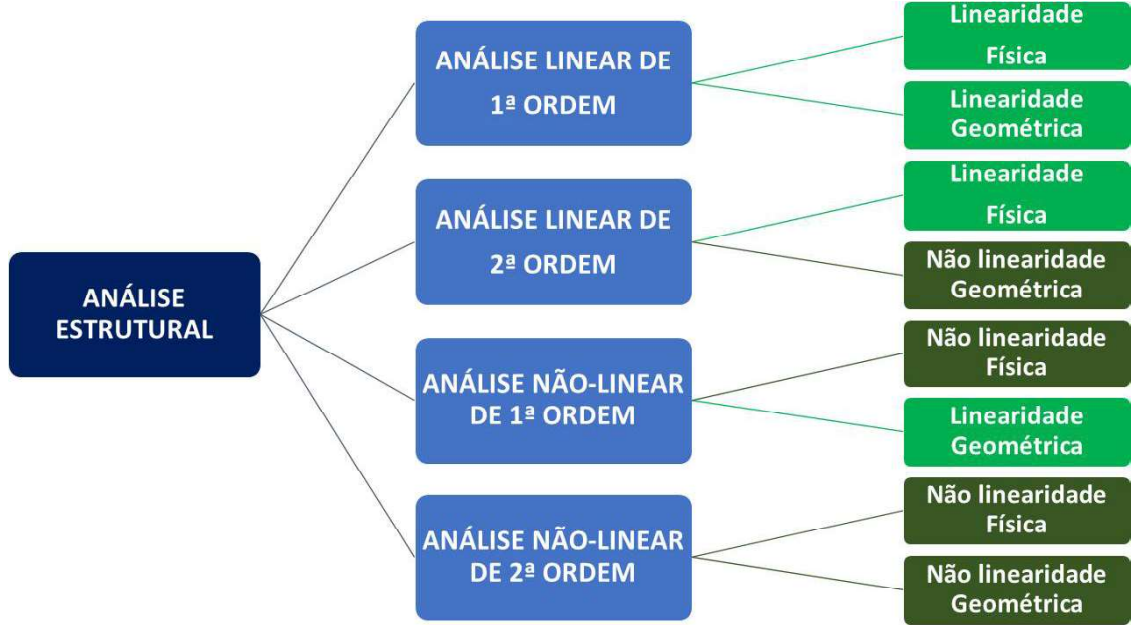


Figura 7 – Tipos de Análise Estrutural

Na 8, o ponto **A** indica o momento a partir do qual um incremento infinitesimal de carga λ faz com que o valor do deslocamento $\|u\|$ tenda ao infinito, ou seja, nesse ponto a estrutura perde a sua rigidez e acontece a falha estrutural.

Para identificar este ponto de falha **A**, foi então definido o seguinte critério de colapso estrutural

$$\frac{\delta\|u\|}{\delta\lambda} \approx \frac{\Delta\|u\|}{\Delta\lambda} \leq \alpha.C_e \quad (4.5)$$

com C_e sendo uma constante elástica e α um fator de falha. Assim, a estrutura estará segura caso satisfaça a Eq.4.5 durante toda a análise estrutural. Caso contrário, a estrutura falha e o ponto **A** é o momento inicial onde a relação da Eq. 4.5 deixa de ser satisfeita.

Neste trabalho, o valor da constante C_e foi calculado a partir da razão inicial de u_1 por λ_1

$$C_e = \frac{\|u_1\|}{\lambda_1} \quad (4.6)$$

para os primeiros incrementos de carga, onde a estrutura ainda está com um comportamento linear, como mostrado na Fig. 9.

Para o valor do fator de falha α , adotou-se para todos os casos o $\alpha = 10$, indicando que, no momento onde a rigidez assumir um valor de 10% do valor inicial, será considerado que a estrutura falhou. Como mostrado na Fig.10, Fig.11 e na Fig.12 para uma treliça plana, viga

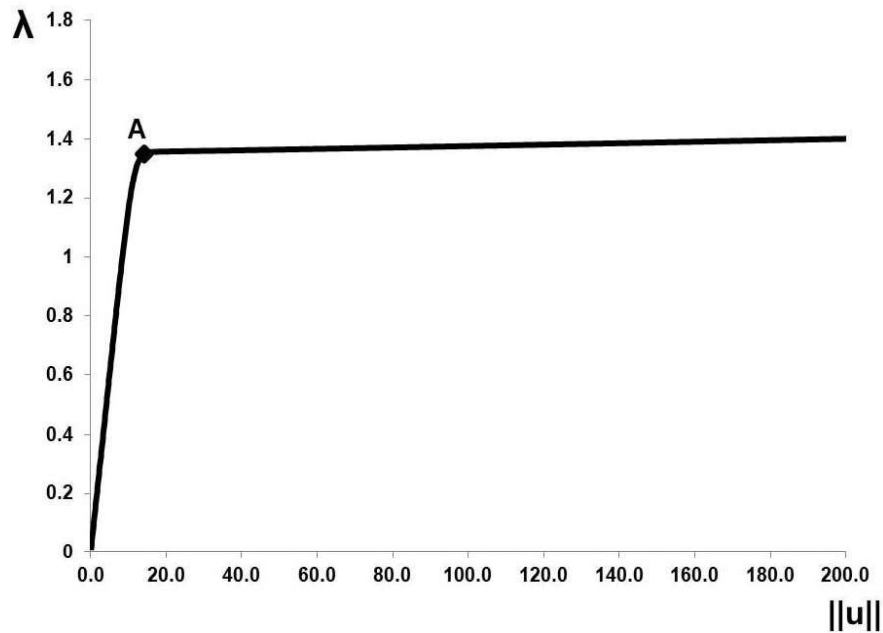


Figura 8 – Análise não linear de uma Treliça Plana

e treliça espacial, respectivamente, a estrutura pode ter comportamentos diferentes da Fig. 8 durante a análise estrutural.

Nas figuras 10, 11 e 12, inicialmente é mostrado (lado esquerdo das imagens) o diagrama $\|u\| \times \lambda$ sem considerar o critério de colapso definido na Eq. 4.5 e posteriormente (lado direito das imagens) é mostrado o resultado onde a análise é interrompida quando o critério de colapso da Eq. 4.5 é violado.

Vale ressaltar que, em todos os casos analisados, o valor de $\alpha = 10$ mostrou-se eficaz para se obter o ponto de falha **A** e, além disso, evitou-se instabilidades numéricas observadas quando a rigidez estrutural torna-se muito baixa.

Vale ressaltar ainda que, outro tipo de análise estrutural poderia ser utilizado, porém, o critério de colapso deve se adequar a cada tipo de análise. Por exemplo, no caso de utilizar a análise linear de primeira ordem, o critério de colapso poderia ser feito com base nos valores dos esforços internos ou deslocamentos e comparados com os seus respectivos valores admissíveis.

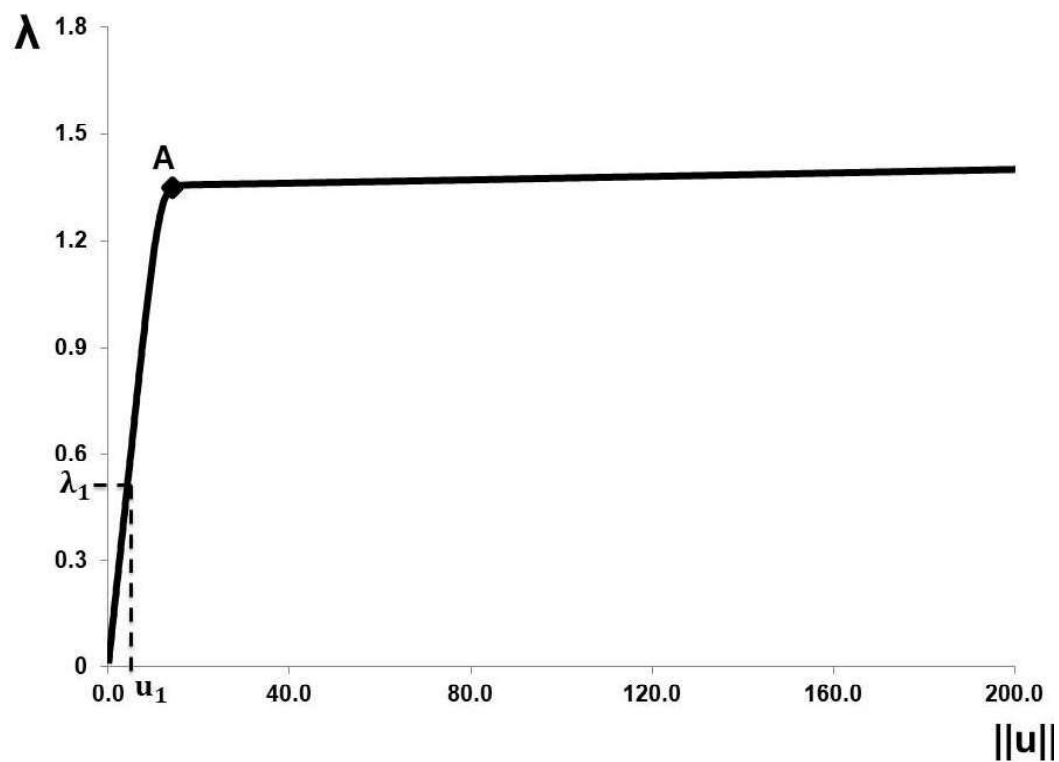


Figura 9 – Valor da constante elástica de uma Trelça Plana

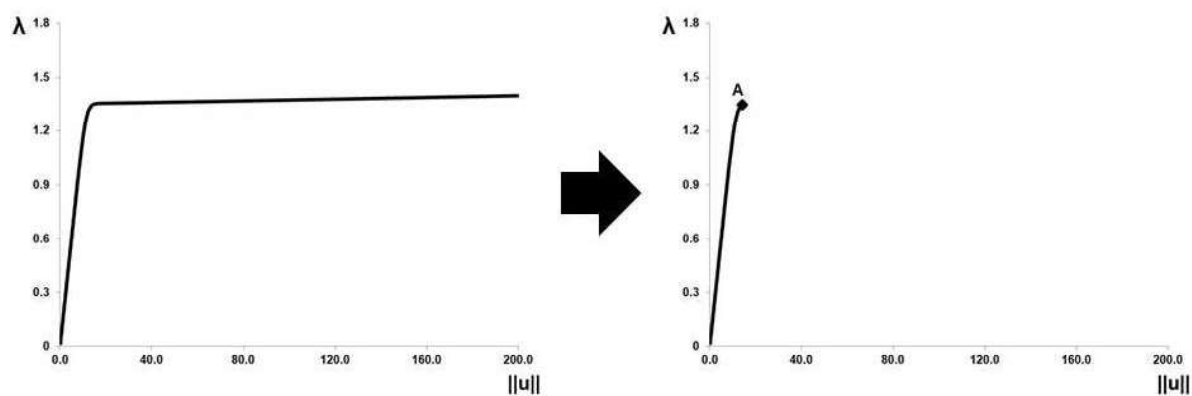


Figura 10 – Ponto de colapso para uma Trelça Plana

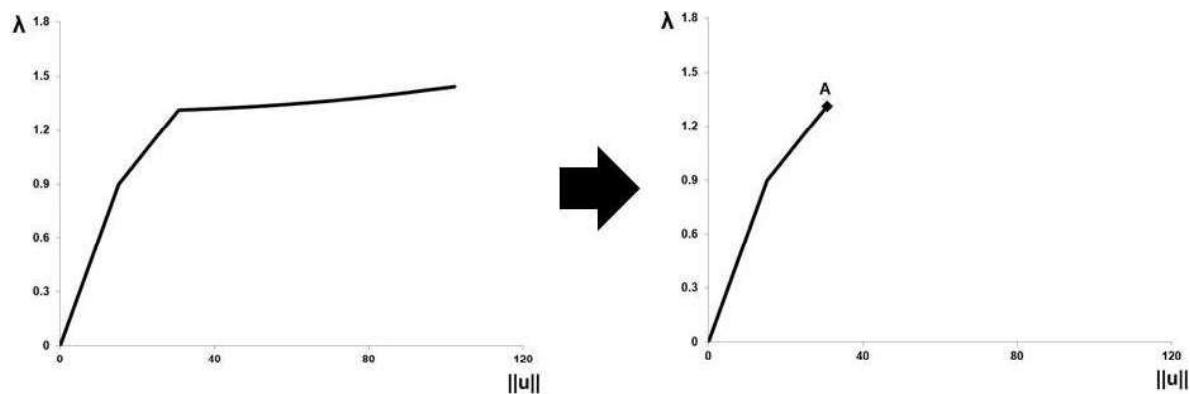


Figura 11 – Ponto de colapso para uma Viga

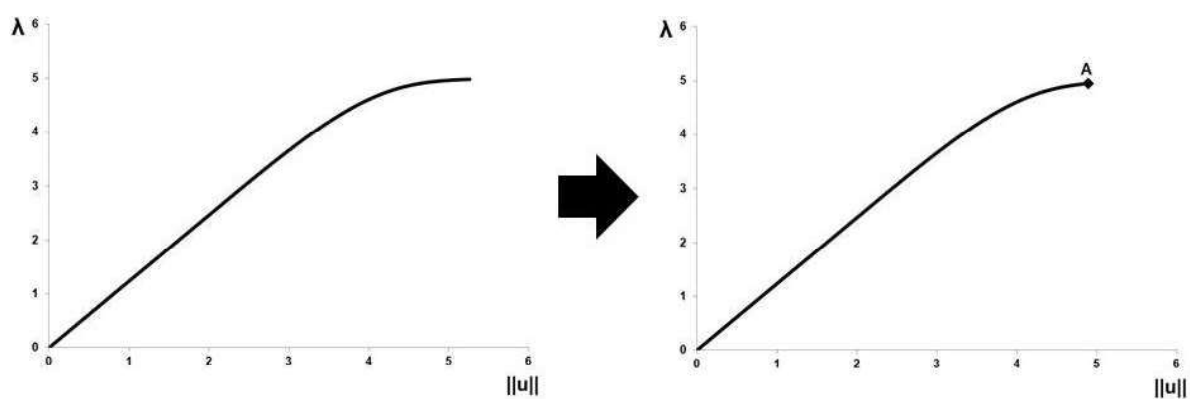


Figura 12 – Ponto de colapso para uma Treliça Espacial

5 Implementação Computacional

Com relação ao processo de implementação computacional, todas as rotinas desenvolvidas foram elaboradas no software Matlab e Mastan. A utilização do Matlab foi, principalmente, pela sua grande capacidade de cálculo, demonstrando-se capaz de simular de forma eficiente todos os exemplos analisados, e por ser facilmente acoplado ao software Mastan.

Criado por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000), o software Mastan é capaz de executar diversos tipos de análise estrutural (análise linear/não linear de primeira/segunda ordem, análise dinâmica, entre outras) e podem ser simuladas a partir do software Matlab. Assim, as estruturas foram criadas inicialmente no software Mastan e, posteriormente, simuladas junta com o Matlab.

Com relação as etapas do processo computacional, um fluxograma ilustrando o procedimento realizado é mostrado na Fig. 13 e todo o procedimento pode ser resumido nas seguintes etapas:

- **Etapa 1:** a estrutura é modelada no software Mastan. As propriedades do material, as cargas aplicadas, os tipos de apoios, a seção transversal e as dimensões da estrutura são definidas nesse software, assim como o tipo de análise estrutural que será executada;
- **Etapa 2:** as variáveis aleatórias do problema são definidas no Matlab. Com a estrutura modelada, define-se quais são as variáveis aleatórias do problema, atribuindo o valor da média, desvio padrão e o tipo de distribuição probabilística para cada variável aleatória. Além disso, define-se o grau k do polinômio que será usado para construir a função polinomial g_k ;
- **Etapa 3:** executa-se o método da expansão polinomial. Com o grau k do polinômio e o número de variáveis aleatórias já conhecidos, os polinômios para cada variável são criados, sendo feito a seguir o produto diádico entre todos eles. Por fim, os coeficientes da função g_k são encontrados com o uso da integração numérica e do Método dos Mínimos Quadrados Contínuo. Vale salientar que, para cada ponto de integração, uma análise estrutural é realizada automaticamente pelo Mastan;
- **Etapa 4:** a simulação de Monte Carlo é realizada com a aproximação polinomial g_k , o que permite um grande número de simulações com baixo esforço computacional, encontrando o valor da probabilidade de falha P_f e do coeficiente de confiabilidade β para a estrutura analisada.

Com relação ao custo computacional, pode-se dizer que as simulações estruturais necessárias para se determinar os coeficientes de g_k , na Etapa 3, são responsáveis por quase todo o custo computacional do procedimento completo. Assim sendo, com o uso de funções polinomiais, o processo completo se torna menos custoso e a simulação de monte carlo resulta em baixo custo computacional.

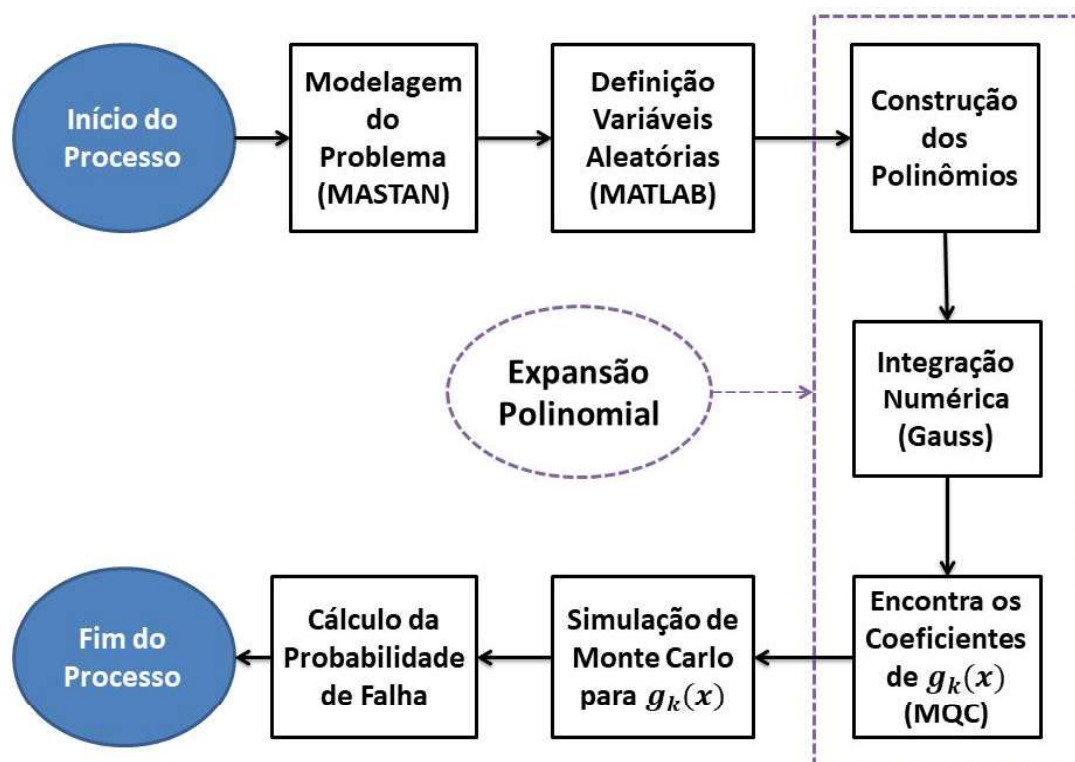


Figura 13 – Procedimento computacional

6 Exemplos

Neste seção, alguns exemplos de análise de confiabilidade estrutural são resolvidos pelo método da expansão polinomial. A análise não linear de segunda ordem foi aplicada em todos os casos com a utilização do software MASTAN. Com relação aos tipos de estruturas analisados, escolheu-se a treliça e a viga.

A função *performance* adotada é dada por

$$g = \lambda - 1 \quad (6.1)$$

onde o λ é o multiplicador da carga de colapso. Note que, neste caso, assume-se que a falha estrutural ocorre quando o multiplicador da carga de colapso é menor que 1, ou seja, quando a estrutura entra em colapso para uma carga menor que a carga total aplicada.

Nos exemplos analisados, o nível de segurança da estrutura foi mensurado usando o índice de confiabilidade β

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (6.2)$$

sendo Φ^{-1} a função densidade acumulada inversa da distribuição normal. Neste caso, quanto maior for o valor de β , menor será o valor da P_f . A razão de substituir P_f por β como medida do nível de segurança estrutural é para evitar trabalhar com valores pequenos de P_f , frequentemente encontrado nos casos de confiabilidade estrutural.

6.1 Exemplo 1: Treliça plana com 6 barras

O primeiro exemplo analisado se trata de uma treliça plana com 6 barras, biapoiada e submetida a carga concentrada, como apresentada na Fig. 14. A estrutura é formada por perfis I de aço, sendo utilizada a seção $W150x13$ para todas as barras.

O comprimento L e a área A da seção transversal de cada barra são $800mm$ e $1620mm^2$, respectivamente, o Momento de Inércia é $I = 6160000mm^4$ e Módulo de Plasticidade $Z = 25400mm^3$. Além disso, foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

As variáveis aleatórias adotadas neste exemplo são o módulo de elasticidade E , a tensão de escoamento f_y e a carga concentrada P . O tipo de distribuição probabilística, o valor da média e do desvio padrão adotados para as essas variáveis aleatórias são mostrados a seguir na Tab. 4.

Essa estrutura foi escolhida pelo fato de que é possível obter o valor de β analiticamente e pela simulação de Monte Carlo, como calculado anteriormente em Silva (2016) e Torii et

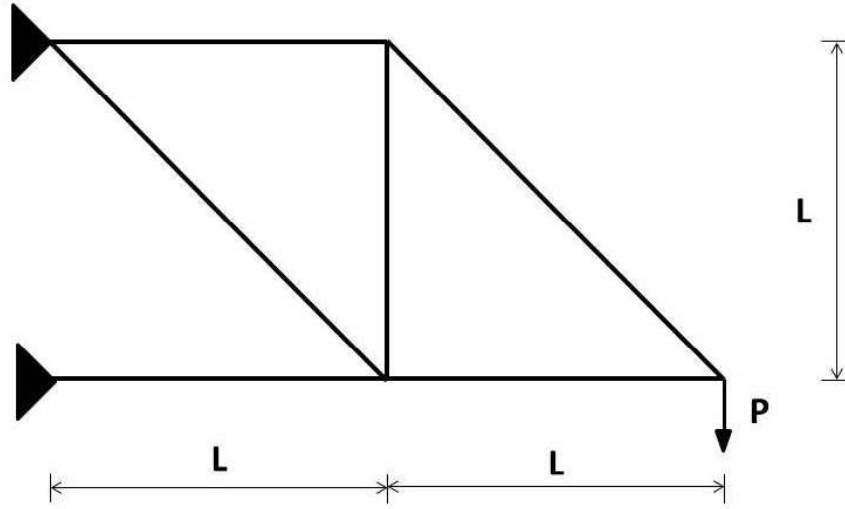


Figura 14 – Exemplo 1: Treliça plana com 6 barras

Tabela 4 – Exemplo 1 : Variáveis Aleatórias

Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
$E(N/mm^2)$	Normal	210000	20000
$f_y(N/mm^2)$	Normal	345	35
$P(N)$	Normal	215000	21500

al. (2016), servindo de parâmetro de comparação e validação para os valores obtidos pela expansão polinomial.

A partir do equilíbrio do sistema, a maior força axial T nas barras da estrutura é $T = 2P$ (barra na parte inferior esquerda). Consequentemente, a tensão máxima na estrutura é dada por $\sigma = 2P/A$, onde o rompimento de uma barra levará ao colapso estrutural. Com isso, o índice de confiabilidade considerando o colapso pode ser calculado analiticamente com a função de estado limite $g = f_y - 2P/A$, resultando em $\beta = 1.8113$ (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

Para efeito de comparação dos resultados, foi feito a variação do grau k do polinômio adotado para a função $g_k(X)$ e do tamanho do incremento de carga Δ adotado em cada análise não linear, sendo mostrado na Tab. 5 os resultados obtidos para os valores de β . O número de análises estruturais nae também é apresentado na Tab. 5.

De acordo com os resultados de β da Tab. 5, percebe-se uma convergência dos resultados obtidos com a expansão polinomial com aqueles obtidos analiticamente e por Monte Carlo em , ficando a diferença máxima em torno de 2.75% . Vale ressaltar que, o uso de um polinômio de baixa ordem ($k = 2$) é suficiente para obter os resultados desejados, evitando o uso de um polinômio de maior ordem k e de um maior esforço computacional.

Tabela 5 – Exemplo 1 : Resultados de β

k	2	3	4
$\Delta = 0.1$	1.8365	1.8099	1.8287
$\Delta = 0.01$	1.7695	1.7664	1.7615
nae*	27	64	125

*nae: número de análises estruturais

A comparação do esforço computacional foi medido pelo número de análises estruturais *nae* da função *performance*, que é o número de análises estruturais requeridas em cada caso. Como consta na Tab. 5, os valores de *nae* indicam a ordem de grandeza do esforço computacional exigida no método da expansão polinomial.

Com relação ao tempo total computacional, o método da expansão polinomial demorou aproximadamente 15 segundos (para *nae* = 27) enquanto que a aplicação direta do Método de Monte Carlo ao mesmo problema, realizada por Torii et al. (2016) e Silva (2016), demorou aproximadamente 15 horas, ressaltando também a eficiência computacional do uso da expansão polinomial.

6.2 Exemplo 2: Viga sujeita a carregamento distribuído uniformemente

Neste exemplo, a viga sujeita a carregamento q distribuído uniformemente foi analisada, como mostrado na Fig. 15. A viga é constituída por perfil metálico com comprimento $L = 5000mm$, área da seção transversal $A = 1910mm^2$, inércia $I = 12800000mm^4$ e Módulo de Plasticidade $Z = 145000mm^3$.

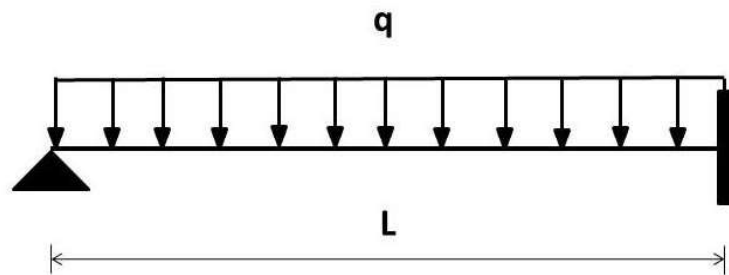


Figura 15 – Exemplo 2: Viga uniformemente distribuída

Como variáveis aleatórias, adotaram-se o módulo de elasticidade E , a tensão de escoamento f_y e a intensidade da carga distribuída q . O tipo de distribuição probabilística, o

valor da média e do desvio padrão adotados para as essas variáveis aleatórias são mostrados a seguir na Tab. 6.

Tabela 6 – Exemplo 2 : Variáveis Aleatórias

Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
$E(N/mm^2)$	Normal	210000	2000
$f_y(N/mm^2)$	Normal	250	25
$q(N/mm)$	Normal	15	1.25

A viga foi subdividida e modelada com 10 elementos finitos, adotando-se um modelo de viga plana e realizando uma análise estrutural não linear de segunda ordem. Para comparação dos resultados, variou-se o grau k do polinômio adotado para a função $g_k(X)$ e o tamanho do incremento de carga Δ adotado em cada análise, sendo mostrado na Tab. 7 os resultados obtidos para os valores de β .

Tabela 7 – Exemplo 2 : Resultados de β

k	2	3	4
$\Delta = 0.1$	1.8094	2.0050	2.0347
$\Delta = 0.01$	0.9543	0.9562	0.9681
$\Delta = 0.001$	0.9372	0.9399	0.9381
nae*	27	64	125

*nae: número de análises estruturais

A partir dos resultados da Tab. 7, para o incremento de carga $\Delta = 0.1$, percebe-se que os valores de β não convergem para um único resultado, alcançando um erro de 12.5%, e não convergem para os resultados encontrados para $\Delta = 0.01$ e $\Delta = 0.001$.

Essa não convergência é explicada pelo incremento de carga $\Delta = 0.1$ ser considerado grande para a análise não linear realizada. Em alguns casos, devido ao incremento ser muito alto, a estrutura falha em um ponto diferente da realidade, podendo ser antes ou depois do ponto de falha adotado nesse trabalho.

No entanto, para o incremento de carga $\Delta = 0.01$, a análise estrutural é mais precisa e os valores de β apresentam uma convergência nos resultados, com um erro máximo de 1.43%.

Para mostrar mais segurança nos resultados de β , neste exemplo foi feito ainda a análise estrutural para $\Delta = 0.001$, percebendo-se também uma convergência com os resultados obtidos para a situação de $\Delta = 0.01$, com um erro máximo de aproximadamente 3.2%.

Vale salientar que, assim como ocorreu no exemplo anterior, os resultados da Tab. 7 mostram que o uso de um polinômio de baixa ordem ($k = 2$) é suficiente para se obter os resultados desejados, resultando em pouco esforço computacional.

6.3 Exemplo 3: Treliça espacial de 18 barras

Neste terceiro exemplo foi analisado uma treliça espacial composta por 18 barras tubulares, como apresentado na Fig. 16. Todas as barras possuem área $A = 59.6903mm^2$, inércia $I = 2700.9843mm^4$, Módulo de Plasticidade $Z = 45.1667mm^3$ e comprimentos $L_x = L_y = 400mm$ e $L_z = 100mm$. O módulo de elasticidade E , a tensão de escoamento f_y e a carga concentrada P foram adotadas como variáveis aleatórias, com média e desvio-padrão mostrados na Tab. 8.

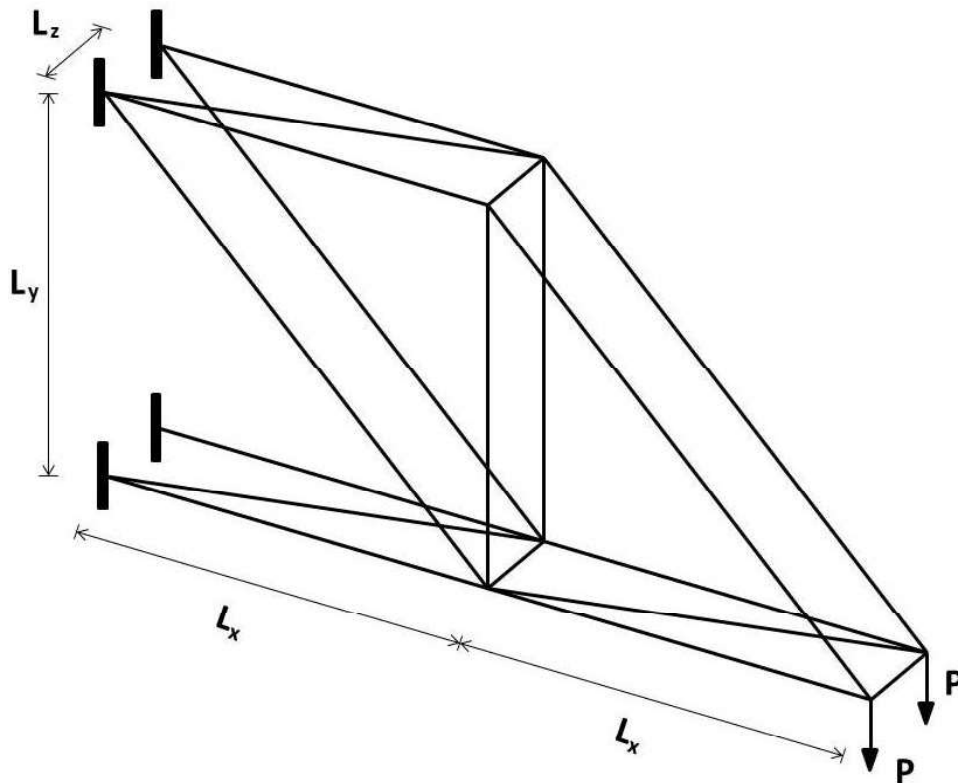


Figura 16 – Exemplo 3: Treliça Espacial

Tabela 8 – Exemplo 3 : Variáveis Aleatórias

Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
$E(N/cm^2)$	Normal	210000	20000
$f_y(N/cm^2)$	Normal	350	30
$P(N)$	Normal	750000	100000

A análise estrutural não linear também foi realizada neste exemplo, adotando-se um modelo de treliça espacial. Os resultados obtidos para os valores de β estão mostrados na Tab. 9, onde foi feito uma variação do grau k do polinômio adotado para a função $g_k(X)$ e do tamanho do incremento de carga Δ .

Tabela 9 – Exemplo 3 : Resultados de β

k	2	3	4
$\Delta = 0.1$	1.9540	1.9065	1.8810
$\Delta = 0.01$	1.8903	1.8580	1.8577
nae*	27	64	125

*nae: número de análises estruturais

Com os resultados da Tab. 9, constata-se que os valores de β convergiram para ambos os incrementos, com uma diferença máxima de aproximadamente 4.9%, mostrando a eficácia do uso da expansão polinomial no cálculo da probabilidade de falha estrutural. Además, da mesma forma que aconteceu nos exemplos anteriores, o uso de um polinômio de baixa ordem ($k = 2$) é suficiente e preciso para obter os valores de β .

Ademais, para verificar o comportamento e a eficácia do uso da expansão polinomial para outros tipos de distribuições probabilísticas diferente da Distribuição Normal, neste exemplo também foi empregado a Distribuição Uniforme, mantendo as mesmas variáveis aleatórias, média e desvio padrão apresentados na Tab. 8. Os resultados obtidos para os valores de β estão mostrados na Tab. 10, onde também foi constatado uma convergência entre os valores de β para uma distribuição diferente da Normal.

Tabela 10 – Exemplo 3 : Resultados de β para Distribuição Uniforme

k	2	3	4
$\Delta = 0.1$	2.0298	1.9555	2.0522
$\Delta = 0.01$	1.9160	1.9021	1.9076
nae*	27	64	125

*nae: número de análises estruturais

7 Conclusões

O presente trabalho se refere à análise de confiabilidade estrutural com o uso da expansão polinomial para diferentes tipos de estruturas. A formulação proposta baseou-se em substituir a função original do problema por polinômios através do Método dos Mínimos Quadrados Contínuo.

A análise estrutural foi feita usando o software Mastan. Os exemplos numéricos indicam que resultados satisfatórios podem ser obtidos com pouco esforço computacional em comparação com o método de Monte Carlo.

A diminuição do esforço computacional e do tempo total gasto são explicados, principalmente, pela diminuição da quantidade de análise estrutural realizada no Mastan. Nos exemplos estudados, 27 análises estruturais foram suficientes para se obter resultados satisfatórios, enquanto que pelo método de Monte Carlo seriam necessárias aproximadamente 10^5 análises estruturais.

Para efeito comparativo, usando g_k o tempo total gasto ficou na ordem de segundos e minutos, enquanto que na utilização de g demoraria na ordem de horas e dias. Essa diminuição no tempo se deve também ao uso de polinômios, pois, do ponto de vista computacional, o cálculo de polinômios é algo que pode ser feito de maneira rápido e com pouco esforço.

Além disso, percebe-se uma convergência dos resultados finais com o uso de polinômios de baixa ordem, resultando também em menos custo computacional. Com o intuito de expandir o campo de atuação e conhecimento desta dissertação, futuros trabalhos poderão ser realizados com a aplicação do método aqui estudado, entre os quais estão:

- Utilização de outros tipos de estruturas;
- Simular a estrutura em outros programas de análise estrutural (Ansys, Abaqus, entre outros);
- Inclusão de outras funções de distribuição probabilística;
- Definir outras variáveis aleatórias;
- Aplicar outro tipo de análise estrutural, com seu respectivo critério de colapso;
- Otimizar estruturas baseada em confiabilidade usando expansão polinomial.

Referências

- ATKINSON, K. *Introduction to numerical analysis*. 2nd edn. ed. New York: John Willey & Sons, 1989.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures*. Upper Sadle River: Prentice-Hall, 1996.
- BECK, A. T.; CORRÊA, M. R. S. New design chart for basic wind speeds in brazil. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 10, p. 707–723, 2013.
- DEFTYAREV, V. V. Construction stage reliability of composite steel deck designed according to canadian standard. *Canadian Journal of Civil Engineering*, v. 39, p. 344 – 349, 2012.
- GHANEM, R.; SPANOS, P. *Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1991.
- HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- HILDEBRAND, F. *in: Introduction to numerical analysis*. 2nd edn. ed. [S.l.]: Dover books on mathematics Dover Publications, 2013.
- HONFI, D.; MARTENSSON, A.; THELANDERSSON, S. Reliability of beams according to eurocodes in serviceability limit state. *Engineering Structures*, v. 35, p. 48 – 54, 2012.
- LOPEZ, R. et al. Overcoming the drawbacks of the form using a full characterization method. *Structural Safety*, v. 54, p. 57 – 63, 2015.
- LOPEZ, R. H. et al. Advantages of employing a full characterization method over form in the reliability analysis of laminated composite plates. *Compos Struct*, v. 107, p. 635 – 642, 2014.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix structural analysis*. 2nd edn. ed. New York: John Willey & Sons, 2000.
- MELCHERS, R. *Structural reliability analysis and prediction*. Chichester: John Willey & Sons, 1999.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. F. *Estatística aplicada a engenharia*. New York: John Willey & Sons, 2001. 43 p.
- REDDY, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2015. 768 p.
- RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. *Simulation and the Monte Carlo method*. 2nd edn. ed. New York: John Willey & Sons, 2007.

SILVA, R. G. da. *Análise de confiabilidade aplicada a estruturas com comportamento não linear*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2016.

TORII, A.; LOPEZ, R.; MIGUEL, L. Probability of failure sensitivity analysis using polynomial expansion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 48, p. 76–84, 2017.

TORII, A. J. et al. Collapse and allowable displacements in the context of reliability analysis of nonlinear structures. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 39, p. 1045 – 1051, 2016.

WIENER, N. The homogeneous chaos. *Am J Math*, v. 60, n. 23-26, p. 897–936, 1938.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E. The wiener-askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J Sci Comput*, v. 24, n. 2, p. 619–644, 2002.