



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

## **Defeitos Topológicos em Teoria de Campos com Dinâmica Generalizada**

Igor Andrade Souza

Dissertação de Mestrado

João Pessoa  
2018

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Física

Igor Andrade Souza

## **Defeitos Topológicos em Teoria de Campos com Dinâmica Generalizada**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva*

João Pessoa  
2018

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S729d Souza, Igor Andrade.

Defeitos topológicos em teoria de campos com dinâmica  
generalizada / Igor Andrade Souza. - João Pessoa, 2018.  
76 f. : il.

Orientação: Roberto Menezes da Silva.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Campo escalar. 3. Defeitos topológicos.  
4. Dinâmica generalizada. I. Silva, Roberto Menezes da.  
II. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de  
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Igor  
Andrade Souza**, candidato ao Título de  
Mestre em Física na Área de Concentração  
Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, na sala  
2 de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da  
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora  
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física das  
5 Partículas Elementares e Campos, **Igor Andrade Souza**. A comissão examinadora  
6 composta pelos professores doutores: Roberto Menezes da Silva (DF/UFPB), orientador  
7 e presidente da banca examinadora, Dionísio Bazeia Filho (DF/UFPB) e Marcos  
8 Antônio Anacleto (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Roberto Menezes da  
9 Silva comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o  
10 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação  
11 intitulado "*Defeitos topológicos em teorias de campos com dinâmicas generalizadas*".  
12 Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o  
13 seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba  
14 expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu,  
15 Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos  
16 membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **26 de fevereiro de 2018**.

17



Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva  
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho  
UFPB

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
UFCG

*Roberto Menezes da Silva*

*Dionísio Bazeia Filho*

*Marcos Anacleto*



# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Universidade Federal da Paraíba, pelas condições proporcionadas e ao CNPq pelo apoio financeiro as minhas pesquisas. Ao meu orientador Roberto Menezes da Silva, pela dedicação e paciência, suporte fundamental para o desenvolvimento desse trabalho. Aos professores Dionísio Bazeia Filho e Laércio Losano por sempre me receberem e tirarem minhas dúvidas. E a todos outros professores e funcionários que de alguma maneira contribuíram de forma direta ou indireta para realização desse trabalho.

Um agradecimento especial à minha família, principalmente aos meus pais Aurea Andrade Freitas e José Neto de Sousa, a minha irmã Evelyn Christine Andrade Sousa e a minha tia Irene da Conceição de Freitas, por sempre acreditarem em mim. Aos meus amigos e colegas de curso que estiveram perto, me dando motivação e conselhos quando precisei.

*"Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited to all we now know and understand, while imagination embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand"*

— Albert Einstein

# Resumo

O foco dessa dissertação é a obtenção de soluções tipo defeitos em Teoria de Campos. Defeitos topológicos são soluções localizadas que possuem energia finita. Iniciaremos nossa discussão para modelos de um campo escalar real, com termo canônico em  $(1+1)$  dimensões do espaço-tempo. Daremos continuidade fazendo uma generalização desse formalismo e obteremos as equações de campo para modelos com dinâmica não-usual. Soluções de modelos generalizados são chamados de  $k$ -defeitos e geralmente são bastante diferentes das soluções dos modelos usuais.

**Palavras-chave:** campo escalar; defeitos topológicos; dinâmica generalizada.

# Abstract

The purpose of this dissertation is to obtain defects solutions in Field Theory. Topological defects are localized solutions with finite energy. We begin the discussion for models with one real scalar field with standard lagragian in  $(1+1)$  spacetime dimensions. We generalize this formalism to obtain field equations for models with no standard dynamics. Solutions of generalized models are called k-defects and are distinct of the solutions of the standard model.

**Keywords:** scalar field; topological defects; generalized dynamics.

# Sumário

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                              | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Campos Escalares e Soluções de Defeitos</b> | <b>3</b>  |
| 2.1      | Modelo de um Campo Escalar Real                | 3         |
| 2.2      | Defeitos Topológicos e Não-Topológicos         | 5         |
| 2.3      | Soluções BPS                                   | 8         |
| 2.4      | Teorema de Derrick                             | 9         |
| 2.5      | Estabilidade Linear                            | 10        |
| 2.6      | Exemplos de Soluções Topológicas               | 13        |
| 2.6.1    | Modelo $\phi^4$                                | 13        |
| 2.6.2    | Modelo $\phi^6$                                | 15        |
| 2.6.3    | Outros modelos                                 | 19        |
| 2.7      | Exemplos de Soluções Não-Topológicas           | 25        |
| 2.7.1    | Modelo $\phi^4$ Invertido                      | 25        |
| 2.8      | Método da Deformação                           | 28        |
| 2.8.1    | Exemplo                                        | 29        |
| <b>3</b> | <b>Dinâmica Generalizada</b>                   | <b>31</b> |
| 3.1      | Formalismo Generalizado                        | 31        |
| 3.1.1    | Estabilidade Linear                            | 34        |
| 3.2      | Modelo Monomial                                | 36        |
| 3.3      | Modelo Gêmeos                                  | 39        |
| 3.4      | Modelo do Tipo Born-Infeld                     | 42        |
| <b>4</b> | <b>Modelo Usual com Termo de Cuscuton</b>      | <b>46</b> |
| 4.1      | O Modelo                                       | 46        |
| 4.2      | Estabilidade Linear                            | 48        |
| 4.3      | Exemplos                                       | 49        |
| 4.3.1    | Exemplo 1                                      | 50        |
| 4.3.2    | Exemplo 2                                      | 51        |
| 4.3.3    | Exemplo 3                                      | 55        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões</b>                              | <b>61</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>              | <b>62</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Potencial do modelo $\lambda\phi^4$ , dado pela equação (2.14).                                                                                                                                                                                                                                                                            | 5  |
| 2.2  | Potencial e soluções estática, respectivamente, para o modelo $\phi^4$ .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 14 |
| 2.3  | Densidade de energia e superpotencial $W(\phi)$ , respectivamente, para o modelo $\phi^4$ .                                                                                                                                                                                                                                                | 15 |
| 2.4  | Potencial de estabilidade e seu parceiro supersimétrico, respectivamente, para o modelo $\phi^4$ .                                                                                                                                                                                                                                         | 16 |
| 2.5  | Potencial e suas soluções do modelo $\phi^6$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 17 |
| 2.6  | Densidades de energia para as soluções do primeiro e segundo setor topológico, respectivamente, do modelo $\phi^6$ , dado pela equação (2.76).                                                                                                                                                                                             | 18 |
| 2.7  | Superpotencial $W(\phi)$ para o modelo $\phi^6$ , dado pela equação (2.77).                                                                                                                                                                                                                                                                | 18 |
| 2.8  | Potenciais de estabilidade (2.78) e seus únicos estados ligados, dado pela equação (2.79), para o modelo $\phi^6$ .                                                                                                                                                                                                                        | 19 |
| 2.9  | Potencial, soluções, densidade de energia e potencial de estabilidade com seu modo zero para o modelo seno-Gordon.                                                                                                                                                                                                                         | 21 |
| 2.10 | Potencial, soluções, densidade de energia e potencial de estabilidade com seu modo zero para o modelo sem vácuo.                                                                                                                                                                                                                           | 22 |
| 2.11 | Potenciais, soluções, densidade de energia e superpotencial do modelo (2.88). Para $b = 1$ , $a = 3$ para a linha sólida, $a = 4$ para a linha tracejada, $a = 5$ para a linha com traços e pontos e $a = 6$ para a linha pontilhada.                                                                                                      | 23 |
| 2.12 | Potencial de estabilidade (2.94) de linha sólida e seu respectivo modo zero (2.95) de linha com traços e pontos, para $b = 1$ e $a = 3$ . Aparentemente esse potencial não parece suportar estados ligados, mas devido a sua descontinuidade na origem com a presença de um delta com sinal negativo, teremos apenas o estado fundamental. | 24 |
| 2.13 | Potencial e soluções para o modelo $\phi^4$ invertido.                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 26 |
| 2.14 | Densidade de energia para o modelo $\phi^4$ invertido, dada pela equação (2.104), com picos em $x = \pm \operatorname{arcsech}(1/\sqrt{2})$ .                                                                                                                                                                                              | 27 |
| 2.15 | Superpotencial $W(\phi)$ para o modelo $\phi^4$ invertido dado pela equação (2.105).                                                                                                                                                                                                                                                       | 27 |
| 2.16 | Potencial de estabilidade (linha sólida) do modelo $\phi^4$ invertido, dado pela equação (2.106). E seus estados ligados (linhas com traços e pontos), escritos na equação (2.107).                                                                                                                                                        | 28 |
| 2.17 | Potencial e suas soluções do modelo $\phi^{10}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 30 |

- 4.1 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.1, 0.01$  e  $0.001$ . 51
- 4.2 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.1, 0.01$  e  $0.001$ . 52
- 4.3 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.1, 0.01$  e  $0.001$ . 53
- 4.4 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1$  e  $0.01$ . 53
- 4.5 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.25$  e  $0.1$ . 55
- 4.6 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ . 56
- 4.7 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ . 57
- 4.8 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ . 58
- 4.9 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ . 58
- 4.10 Variável  $z$  dada pela equação (4.55b). A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ . 59
- 4.11 A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ . 60

# Introdução

Um defeito topológico pode ser entendido como uma região de transição entre dois possíveis estados de um sistema que detêm o mesmo valor de energia mínima [1, 2, 3, 4]. Um exemplo didático é imaginarmos uma flor que possua duas cores, podemos associar cada cor como um estado possível e entre as duas cores existirá uma região de conflito, que não saberemos dizer em qual cor está, essa faixa de transição tem um custo energético e é chamado de defeito topológico [5].

Usaremos Teoria de Campos para investigar defeitos topológicos, em particular com um campo escalar real, o campo mais simples, que tem grande importância por possuir diversas aplicações em vários ramos da física. Defeitos topológicos podem ser encontrados na cosmologia, onde surgem naturalmente na transição de fase do universo primordial [6, 7] e na matéria condensada para descrever interfaces em materiais [8, 9], como por exemplo em espumas [10, 11] e em crescimento de grãos [12].

Geralmente, os defeitos estão associados a alguma quebra de simetria que dá origem a um conjunto não trivial de estados degenerados. Modelos em Teoria de Campos descritos por um campo escalar real, têm soluções topológicas estáveis em apenas (1+1) dimensões no espaço-tempo, como foi mostrado por Derrick [13]. Focaremos nossa análise em obter soluções em (1+1) dimensões e iremos distinguir dois tipos de soluções possíveis, os *kinks* e os *lumps*, que podem ser determinadas a partir da construção de uma corrente topológica conservada, onde sua forma depende da dimensão espaço-temporal e do modelo em questão [14, 15].

Em 1998, por meio de observações astronômicas [16, 17], constatou-se que o universo está em expansão acelerada. O fato do universo estar acelerado contraria a lei da gravitação universal, onde os corpos exercem apenas forças atrativas. Uma das explicações de que se tem para essa expansão acelerada é devido a um componente estranho, que chamamos de energia escura [18]. Dentre as diversas descrições teóricas para a energia escura, podemos citar k-inflação e k-essência [19, 20, 21], com modelos dados por lagrangianas não usuais. Soluções topológicas encontrados para esses modelos, são chamados de k-defeitos [22].

Estudaremos modelos de campos escalares com dinâmica não-canônica, escrevendo a densidade lagrangiana de uma forma geral  $\mathcal{L}(\phi, X)$ , como realizado em [23, 24]. Veremos que as equações de movimento serão mais complicadas e que a equação de estabilidade não será mais do tipo Schödinger, e sim de uma forma geral Sturm-Liouville. Vamos ver também que o teorema de Derrick continuará válido para essa generalização. Os modelos generalizados normalmente possuem soluções com comportamento distintos do modelo usual. Entretanto, existem modelos que têm comportamentos semelhantes ao do

modelo usual, como soluções, densidade de energia e estabilidade linear. Por essa razão, chamamos de modelos gêmeos [25, 26, 27].

Essa dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2, introduzimos o embasamento teórico de como obter as equações de movimento para um campo escalar real a partir do princípio da mínima ação e uma breve análise sobre uma quantidade conservada, o tensor energia-momento. Apresentaremos um método para obter equações de primeira ordem com soluções de energia mínima. Ainda nesse capítulo discutiremos a estabilidade linear dessas soluções, seguido de vários exemplos de modelos que suportam soluções topológicas e não-topológicas. Por fim, discutiremos o método da deformação.

Os capítulos 3 e 4 serão dedicados as teorias com dinâmica generalizada que suportam defeitos topológicos. No capítulo 3, desenvolveremos o formalismo dessa generalização em  $(1+1)$  dimensões, comparando sempre com a teoria usual, que é um caso dessa generalização. Finalizamos esse capítulo com alguns exemplos. Já no capítulo 4, introduziremos um novo modelo que possui as mesmas equações de movimentos do modelo usual. Entretanto, essa teoria se diferencia em muitos outros aspectos do modelo usual.

Finalizaremos no capítulo 5 com as conclusões e comentários acerca dessa dissertação.

Ao longo dessa dissertação utilizaremos a notação padrão de tensores e a convenção de soma de Einstein. As coordenadas do espaço-tempo no espaço de Minkowski em  $(D,1)$  dimensões espaço-temporal são representados por  $x^\mu = (t, x^i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, D$ , com tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ , onde  $g^{00} = 1$ ,  $g^{11} = g^{22} = \dots = g^{DD} = -1$  e  $g^{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ . Quanto as unidades, usaremos o sistema de unidades naturais, onde a constante de Planck reduzida ( $\hbar$ ) e a velocidade da luz ( $c$ ), possuem valores unitário ( $\hbar = c = 1$ ).

# Campos Escalares e Soluções de Defeitos

Teorias de Campos podem ser descritas pela formulação lagrangiana, onde as equações de movimento são obtidas com o uso do método variacional [28, 29, 30]. Os campos escalares são representados por uma função genérica  $\phi = \phi(x^\mu)$ , que é uma função do espaço e do tempo. Campos escalares reais possuem uma transformação de simetria que deixam a ação invariante, desde que a lagrangiana não dependa explicitamente das coordenadas do espaço-tempo. Essa transformação de simetria implica numa lei de conservação.

Usaremos campos escalares para descrever defeitos topológicos em uma dimensão espacial. Conseguiremos obter soluções que tem características topológicas e outras não, que se diferenciarão em diversos aspectos.

## 2.1 Modelo de um Campo Escalar Real

A densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$ , para um único campo escalar real, é uma função do campo  $\phi = \phi(x^\mu)$  e de suas derivadas  $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$ , com ação dada por:

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.1)$$

onde a integração é realizada em todo o espaço-tempo. O requerimento básico da densidade lagrangiana é que seja um escalar de Lorentz.

A partir do princípio da mínima ação, temos a equação de movimento:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (2.2)$$

Podemos usar o teorema de Noether [31] para fazer uma transformação infinitesimal nas coordenadas do campo, do tipo  $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$  e obter uma quantidade conservada, já que o campo é invariante por translação devido a homogeneidade do espaço-tempo. Essa quantidade é chamada de tensor energia-momento e tem a forma:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.3)$$

temos que  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . O tensor energia-momento é simétrico sob permutação de índices, ou seja  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ .

A densidade lagrangiana para o modelo usual pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.4)$$

onde  $V(\phi)$  é a densidade potencial, que por conveniência vamos chamá-lo apenas de potencial e é função do campo escalar  $\phi$ . Essa densidade lagrangiana é real, invariante de Lorentz e quadrático nas derivadas.

A equação de movimento (2.2), para o modelo usual (2.4) será:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = 0 \quad (2.5)$$

onde  $V_\phi = dV/d\phi$ .

O tensor energia-momento (2.3) relacionado as soluções da equação de movimento (2.5), é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.6)$$

onde a componente  $T^{00}$  é a densidade de energia da solução:

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \quad (2.7)$$

e cada termo caracteriza uma contribuição para densidade de energia:

$$\rho_C = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2, \quad \rho_G = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \quad \text{e} \quad \rho_P = V(\phi) \quad (2.8)$$

que são as densidades de energia cinética, gradiente e potencial, respectivamente. As componentes  $T^{0i}$  é o fluxo de energia na direção  $i$  e  $T^{i0}$  é a densidade de momento da componente  $i$ , ambas com mesmo valor:

$$T^{0i} = T^{i0} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (2.9)$$

As componentes restantes,  $T^{ij}$ , é o fluxo da componente  $i$  do momento na direção  $j$ , também conhecido como tensor das tensões. Se  $i = j$ , temos a pressão:

$$T^{ii} = p^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \quad (2.10)$$

que é a tensão normal na direção  $i$ , também chamado de estresse ou apenas de tensão. Para  $i \neq j$ , temos a tensão de cisalhamento:

$$T^{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \quad (2.11)$$

Escrevendo a conservação do tensor energia momento,  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , em componentes:

$$\partial_0 T^{\mu 0} + \partial_i T^{\mu i} = 0 \quad (2.12)$$

obtemos um conjunto de  $D+1$  equações de continuidade, onde indentificamos o  $T^{\mu 0}$  como a densidade e o  $T^{\mu i}$  como o fluxo. Em três dimensões espaciais:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j} = - \oint_S d^2x \hat{n} \cdot \vec{j} \quad (2.13)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor normal à superfície  $S$  que delimita o volume  $V$ . Fazendo uma integração em todo o espaço, obtemos uma quantidade conservada  $Q \equiv \int d^3x T^{\mu 0}$ , desde que o fluxo  $\vec{j} \equiv T^{\mu i}$ , desapareça suficientemente rápido no infinito. Para  $\nu = 0$ , a quantidade conservada é a energia e temos a conservação do momento para  $\mu = j$ , com  $j = 1, 2$  e  $3$ .

## 2.2 Defeitos Topológicos e Não-Topológicos

Em teoria de campos, um dos modelos mais conhecidos da literatura é o modelo  $\lambda\phi^4$ . Esse modelo gera o fenômeno conhecido como quebra espontânea de simetria [32, 33, 34] e possui a forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (2.14)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são constantes reais. Em unidades naturais, a ação é adimensional e as coordenadas espaço-temporais terão dimensão de inverso da energia. Dessa maneira, em  $(D, 1)$  dimensões espaço-temporal, o campo terá dimensão de energia elevado à potência  $(D-1)/2$ , ou simplesmente dimensão  $(D-1)/2$ . O potencial deve ter dimensão  $(D+1)$ , com isso,  $\mu$  e  $\lambda$  terão dimensão 2 e  $3-D$ , respectivamente.

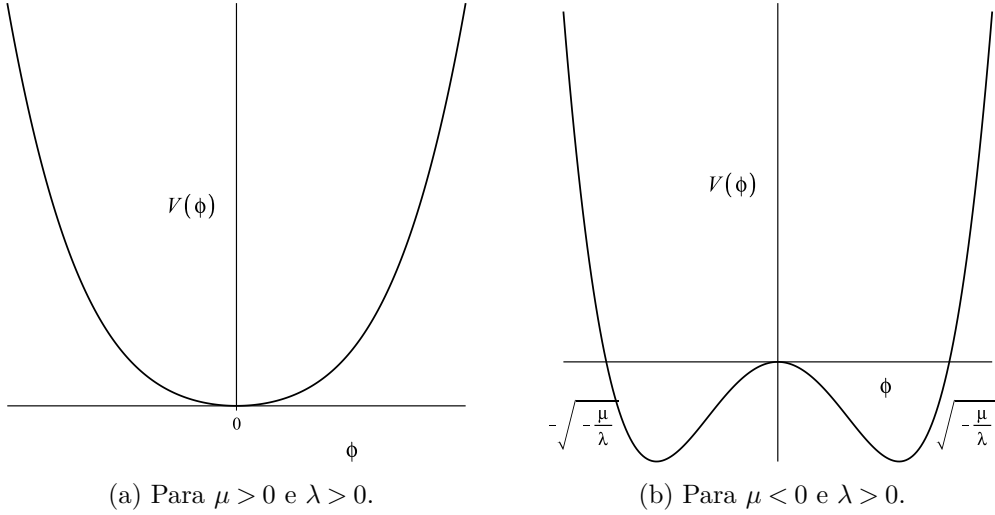


Figura 2.1: Potencial do modelo  $\lambda\phi^4$ , dado pela equação (2.14).

Esse potencial tem simetria discreta de reflexão  $\phi \rightarrow -\phi$ , ou simetria  $Z_2$ . Para  $\mu$  e  $\lambda > 0$ , o potencial terá mínimo em  $\phi = 0$  e massa clássica  $m^2 = \mu$ , ilustrado na Figura 2.1(a). Já para  $\mu < 0$  e  $\lambda > 0$ , o potencial terá dois mínimos, em  $\phi = \pm\sqrt{-\mu/\lambda}$ , como

mostrado na Figura 2.1(b). O surgimento de dois mínimos degenerados, ocasiona o fenômeno da quebra espontânea de simetria. A massa clássica parece ser imaginária, porém, ela é bem definida e é dada por:

$$m^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi = \pm \sqrt{-\mu/\lambda}} = -2\mu \quad (2.15)$$

nos mínimos do potencial. Afim de fazer uma análise do fenômeno da quebra espontânea de simetria, escolhamos um dos mínimos  $\phi = \pm \sqrt{-\mu/\lambda}$ , na escolha do mínimo deixamos o modelo bem definido, porém, quebramos a simetria existente. Uma maneira de constarmos esse acontecimento é fazendo um deslocamento  $\phi \rightarrow \phi \pm \sqrt{-\mu/\lambda}$  e substituirmos no potencial (2.14):

$$V(\phi) = -\mu\phi^2 \pm \sqrt{-\mu\lambda}\phi^3 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (2.16)$$

esse modelo tem a massa clássica bem definida, mas não tem mais a simetria  $Z_2$ , por causa do termo cúbico em  $\phi$ , dizemos então que a simetria foi quebrada espontaneamente ao fazermos a escolha de um mínimo.

Em (1+1) dimensões espaço-temporal, a equação de movimento (2.5) torna-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V_\phi = 0 \quad (2.17)$$

como estamos procurando defeitos topológicos, nos interessa apenas as soluções estáticas,  $\phi = \phi(x)$ , a equação (2.17) se reduz a:

$$\phi'' = V_\phi \quad (2.18)$$

onde  $\phi'' = d^2\phi/dx^2$ . A invariância relativística da teoria permite obtermos soluções de onda viajante para o campo, com velocidade constante  $v$ . Obtemos a solução de onda viajante fazendo a substituição  $x \rightarrow \gamma(x - vt)$ , onde  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  é o fator de contração de Lorentz. Logo, se existir um campo  $\phi = \phi(x)$ , que resolva a equação de movimento (2.18), existirá uma solução do tipo onda viajante que satisfaz a equação (2.17).

Para o caso estático unidimensional, as únicas componentes não-nula do tensor energia-momento (2.6), serão a densidade de energia e o estresse, dados respectivamente por:

$$\rho = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \quad (2.19a)$$

$$p = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \quad (2.19b)$$

com  $\phi' = d\phi/dx$ . O primeiro e o segundo termo da densidade de energia (2.19a), representam as densidades de energia gradiente e potencial, respectivamente. A energia é obtida pela integração em todo o espaço:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right] \quad (2.20)$$

Soluções estáticas e uniformes, satisfazem a equação:

$$V_\phi = 0 \quad (2.21)$$

onde simbolizamos essas soluções como  $\bar{\phi}_i$ , que são extremos do potencial  $V_\phi(\bar{\phi}_i) = 0$ . Além disso, para que tenha relevância física, elas devem ser raízes do potencial,  $V(\bar{\phi}_i) = 0$ , pois, como não tem dinâmica, a energia (2.20) deve ser nula.

Já as soluções estáticas,  $\phi = \phi(x)$ , devem satisfazer as seguintes condições:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \rightarrow v_i \quad (2.22a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi'(x) \rightarrow 0 \quad (2.22b)$$

onde  $v_i$  são mínimos do potencial. Caso contrário, teremos divergência nas energias potencial e gradiente. A condição (2.22a) estabelece que nos extremos o campo deve ser um dos zeros do potencial, podemos analisar melhor essa condição a partir da definição da corrente topológica [4, 14]:

$$j_T^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (2.23)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o símbolo de Levi-Civita e essa corrente é conservada,  $\partial_\mu j_T^\mu = 0$ . Para as soluções estáticas, apenas a componente temporal permanece, podendo ser integrada em todo o espaço para obtermos a carga topológica:

$$Q_T = \phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty) \quad (2.24)$$

analisamos o comportamento assintótico das soluções estáticas a partir da carga topológica, nos permitindo diferenciar dois tipos de soluções: soluções topológicas e soluções não-topológicas.

As soluções topológicas, também conhecida como *kinks*, têm limites assintóticos,  $\phi(x \rightarrow -\infty)$  e  $\phi(x \rightarrow \infty)$  distintos, fazendo com que tenham uma carga topológica não-nula. Soluções como essas se iniciam em um valor e crescem ou decrescem até um outro valor.

As soluções não-topológicas, também conhecida como *lumps*, tendem assintoticamente ao mesmo valor,  $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi(x \rightarrow \infty)$ , resultando numa carga topológica nula. Soluções como essas se iniciam em um valor, crescem ou decrescem até um outro valor, denominado como ponto de retorno e decrescem ou crescem até o valor inicial.

Pelo método da quadratura, podemos reduzir a equação de movimento de segunda ordem (2.18), para uma equação de primeira ordem. Multiplicando a equação (2.18) por  $\phi'$  e fazendo uma integração, obtemos:

$$\phi' = \pm \sqrt{2(V(\phi) + C)} \quad (2.25)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Se substituirmos a equação (2.25) na equação da energia para soluções estáticas (2.20), teremos:

$$E = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(\phi(x)) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx C \quad (2.26)$$

dessa maneira a energia irá divergir, tomamos  $C = 0$  para que tenhamos energia finita, reduzindo assim a equação (2.25) para  $\phi' = \pm\sqrt{2V}$ . A energia (2.20) pode ser reescrita como:

$$E = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(\phi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi'^2(x) \quad (2.27)$$

nota-se que a contribuição da energia gradiente é equivalente a contribuição da energia potencial. Comparando a equação (2.25) com a equação (2.19b), identificamos a constante  $C$  como o estresse da solução. Como  $C = 0$ , concluímos que soluções com energia finita têm estresse nulo. Obtemos essa mesma restrição pelo teorema de Derrick, que será apresentado posteriormente.

## 2.3 Soluções BPS

Existe um método muito eficiente para se obter soluções de defeitos topológicos, esse método foi desenvolvido por Bogomol'nyi [35], cujas soluções são chamadas de soluções BPS, em homenagem aos físicos Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield [35, 36].

Para potenciais não negativos podemos escrever o potencial como função de  $W(\phi)$ :

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 \quad (2.28)$$

onde  $W_\phi = dW/d\phi$ .  $W = W(\phi)$  são funções contínuas do campo escalar, denominada de superpotencial e estão relacionadas com a descrição de setores bosônicos reais em teorias supersimétricas [37, 38, 39, 40], como veremos ao fazer o estudo da estabilidade linear das soluções.

Podemos reescrever a equação de movimento (2.18), como:

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (2.29)$$

e a energia (2.20), como:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\phi'^2 + W_\phi^2] \quad (2.30)$$

completando o quadrado, teremos:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} (\phi' \mp W_\phi)^2 \pm \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\phi' \mp W_\phi)^2 + E_B \quad (2.31)$$

onde:

$$E_B = \Delta W = |W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))| \quad (2.32)$$

é chamada de energia de Bogomol'nyi. Ela depende apenas dos limites assintóticos do campo e ainda é o menor valor da energia, desde que:

$$\phi' \mp W_\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi' = \pm W_\phi \quad (2.33)$$

essas equações resolvem a equação de movimento (2.18) e são chamadas de equações BPS. Obtemos a função  $W(\phi)$  integrando a equação (2.28) e descartamos a constante de integração por não ser necessário para nossos estudos, já que estamos interessados apenas na diferença da equação (2.32).

Observa-se que além de termos uma equação diferencial de primeira ordem para resolvermos ao invés de uma de segunda ordem, ainda minimizamos a energia e ela dependerá apenas dos valores assintóticos das soluções, ou seja, podemos determinar o valor da energia das soluções sem sabermos sua forma explícita.

## 2.4 Teorema de Derrick

O teorema de Derrick examina as condições necessárias para a estabilidade das soluções estáticas [13]. O teorema diz que só existem soluções estáticas de energia finita em uma dimensão espacial e para um caso particular em duas dimensões.

Para uma teoria de campo escalar em  $D$  dimensões espaciais com densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.34)$$

e solução estática,  $\phi = \phi(x^i)$ , que satisfaz a equação de movimento:

$$\nabla^2 \phi = V_\phi \quad (2.35)$$

com energia:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] = E_G + E_P \quad (2.36)$$

onde  $E_G$  e  $E_P$  são as energias gradiente e potencial, respectivamente.

A solução estática,  $\phi = \phi(x^i)$ , deve ser estável para qualquer tipo de variação, inclusive para mudanças de escala. Vamos considerar a solução reescalada da seguinte maneira:

$$\phi_\lambda(x^i) = \phi(\lambda x^i) \quad (2.37)$$

a solução é contraída para  $\lambda > 1$  e dilatada para  $\lambda < 1$ . Teremos a energia da solução reescalada  $E_\lambda$ , dada por:

$$E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi_\lambda)^2 + V(\phi_\lambda) \right] \quad (2.38)$$

onde  $E_\lambda|_{\lambda=1} = E$ . Fazendo uma mudança de variável de  $\lambda x^i$  para  $x^i$ , obtemos:

$$E_\lambda = \lambda^{2-D} E_G + \lambda^{-D} E_P \quad (2.39)$$

essa expressão deve ser mínima para  $\lambda = 1$ , logo:

$$\left. \frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-D)E_G - DE_P = 0 \quad (2.40)$$

como já se sabe,  $E_G$  e  $E_P$  são não negativas e em uma dimensão espacial ( $D = 1$ ), conseguimos satisfazer a equação (2.40), já que  $E_G = E_P$ . A partir de duas dimensões espaciais ( $D \geq 2$ ), não conseguimos mais cumprir essa exigência, apenas para o caso especial em duas dimensões, quando  $E_P = 0$ . Podemos fazer o teste da derivada segunda para verificarmos se  $E_\lambda|_{\lambda=1}$  é mínimo:

$$\left. \frac{\partial^2 E_\lambda}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} = (2-D)(1-D)E_G + D(1+D)E_P \geq 0 \quad (2.41)$$

em  $D = 1$  ficamos com  $\left. \frac{\partial^2 E_\lambda}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} = 2E_P > 0$ , comprovando que a solução é estável por mudança de escala. Podemos reescrever a equação (2.40) para  $D = 1$ , como:

$$\left. \frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p = 0 \quad (2.42)$$

concluimos que teremos soluções estáveis por reescala apenas para estresse nula. Através de outra argumentação chegamos a mesma exigência já mencionada, da condição de estresse nulo das soluções.

## 2.5 Estabilidade Linear

Defeitos topológicos geralmente são estruturas estáveis, porém, podemos fazer um procedimento para fazer essa análise. Esse procedimento consiste em executar pequenas perturbações em torno da solução estática, vamos considerar a solução perturbada como:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x) + \eta(x, t) \quad (2.43)$$

onde  $\phi_0(x)$  é a solução estática e  $\eta(x, t)$  a perturbação. Substituindo na equação de movimento (2.17) e fazendo uma expansão de Taylor no potencial  $V(\phi)$  em torno da solução, mantendo apenas a contribuição linear em  $\eta$ , já que trata-se de pequenas perturbações, obtemos:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_0(x)} \eta = 0 \quad (2.44)$$

uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Utilizamos o método de separação de variáveis e escrevemos  $\eta(x, t)$  como combinação linear:

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t) \quad (2.45)$$

para reescrevermos a equação (2.44) como:

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \quad (2.46)$$

onde:

$$U(x) \equiv \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi_0(x)} \quad (2.47)$$

é chamado de potencial de estabilidade pelo fato de fazer o mesmo papel do potencial da equação de autovalores de Schrödinger na mecânica quântica. Apesar de ser um análogo aos problemas da mecânica quântica, todo o tratamento desse trabalho envolve apenas fenômenos clássicos. Pela condição (2.22a), sabemos que a solução tende para os mínimos do potencial no limite em que  $x \rightarrow \pm\infty$ , fazendo com que o potencial de estabilidade (2.47) tenda para os valores das massas clássica nos mínimos que a solução liga.

Podemos reescrever a equação tipo Schrödinger (2.46), como:

$$H\eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \quad (2.48)$$

onde:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \quad (2.49)$$

os autovalores da equação (2.48) devem ser não-negativos, pois, para autovalores negativos, teremos um argumento imaginário no cosseno, tornando-se um cosseno hiperbólico, que ao evoluir no tempo, o termo da perturbação divergirá, violando o fato de ser pequenas perturbações, para esses casos dizemos que as soluções são instáveis.

Em toda equação (2.48) vai existir um estado com autovalor zero, decorrente da invariância translacional da teoria, chamado de modo zero ou modo translacional [41]. O modo zero não contribui para a energia da solução perturbada e pode ser obtido derivando a equação de movimento (2.18) em relação a  $x$ :

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \phi'_0(x) = 0 \quad (2.50)$$

identificamos a derivada da solução estática com respeito a variável como o modo zero:

$$\eta_0(x) = \mathcal{N} \phi'_0(x) \quad (2.51)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização. Uma maneira de entender a ocorrência do modo zero é levando em consideração que se  $\phi_0(x)$  é solução da equação de movimento então  $\phi_0(x + x_0)$  também é, expandindo  $\phi_0(x + x_0) = \phi_0(x) + x_0 \phi'_0(x)$  e comparando com

(2.43), notamos que  $\phi'_0(x)$  é uma pequena perturbação com autovalor zero. O modo zero é útil para identificarmos a estabilidade das soluções, se o modo zero possuir nó, saberemos que ele não corresponde ao estado de menor autovalor [42], nesse caso, têm-se autovalor negativo.

Para potencias não-negativos, existem as soluções do tipo BPS. A estabilidade desses estados podem ser mostradas de maneira geral quando reescrevemos o  $H$  da equação (2.49), com uso da equação (2.28), como:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} \quad (2.52)$$

onde o potencial de estabilidade toma forma,  $U(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}$ , com  $\phi = \phi_0(x)$  dado pela solução estática. A motivação para escrevermos o  $H$  dessa maneira é porque podemos fatorá-lo com uso dos operadores:

$$S_\pm = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \quad (2.53)$$

e construir  $H_+$  e  $H_-$  parceiros supersimétricos [37]:

$$H_\pm = S_\pm^\dagger S_\pm \quad (2.54)$$

O  $H_+$  reproduz o  $H$  da equação (2.49), com potencial de estabilidade,  $U^+(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi}$ , e o potencial do seu respectivo parceiro supersimétrico  $H_-$ , como  $U^-(x) = W_{\phi\phi}^2 - W_\phi W_{\phi\phi\phi}$ . Como conseguimos fatorar o operador  $H$ , garantimos que ele é não-negativo, logo não possuirá autovalores negativos:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \langle \eta_n | H | \eta_n \rangle = \langle \eta_n | S^\dagger S | \eta_n \rangle = \sum_m \langle \eta_n | S^\dagger | \eta_m \rangle \langle \eta_m | S | \eta_n \rangle \\ &= \sum_m \langle \eta_n | S | \eta_m \rangle^* \langle \eta_m | S | \eta_n \rangle = \sum_m |\langle \eta_n | S | \eta_m \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

as soluções BPS sempre serão soluções estáveis.

Podemos determinar o modo zero com uso do superpotencial  $W(\phi)$ . Se fizemos  $S_\pm \eta_0 = 0$ , satisfazemos  $H_\pm \eta_0 = S_\pm^\dagger S_\pm \eta_0 = 0$  e podemos escrever:

$$\frac{d\eta_0}{dx} = \pm W_{\phi\phi} \eta_0 \quad \Rightarrow \quad \eta_0 = \mathcal{N} \exp\left(\pm \int^x dx W_{\phi\phi}\right) \quad (2.56)$$

temos ainda uma forma alternativa de escrevermos o modo zero, fazendo uso das equações (2.33) e (2.51):

$$\eta_0 = \pm \mathcal{N} W_\phi \quad (2.57)$$

Geralmente, em modelos descritos por campos escalares, soluções topológicas são estáveis, como defeitos do tipo kink e soluções não-topológicas são instáveis, como defeitos do tipo lump.

## 2.6 Exemplos de Soluções Topológicas

Soluções topológicas ou simplesmente kinks, são funções que vão de um valor a outro, possuindo assim uma carga topológica. Chamamos os setores que suportam kinks de setores topológicos. Pelo fato do modelo (2.4) ser invariante por paridade, num mesmo setor topológico existirá duas soluções tipo kink com valores assintóticos invertidos.

Como os kinks são soluções monotônicas, sua derivada não troca de sinal, a equação de primeira ordem (2.33), pode ser dividida em duas:

$$\phi' = W_\phi \quad \text{ou} \quad \phi' = -W_\phi \quad (2.58)$$

uma para o kink e a outra para o que denominaremos de antikink. Podemos integrar a equação acima e obter:

$$x - x_0 = \pm \int \frac{d\phi}{W_\phi} = \pm G(\phi) \quad (2.59)$$

onde  $x_0$  é uma constante de integração e caracteriza o centro da solução. Como os modelos a serem estudados apresentam invariância translacional, o centro da solução é arbitrário, centralizamos a solução na origem, ou seja,  $x_0 = 0$ . Sempre que possível, tomamos a inversa da função  $G(\phi)$  e obtemos a solução estática:

$$\phi(x) = \pm G^{-1}(x) \quad (2.60)$$

para o sinal positivo nossa solução é monotonicamente crescente (kink) e para o sinal negativa, monotonicamente decrescente (antikink). A seguir iremos mostrar exemplos de modelos que suportam soluções topológicas.

### 2.6.1 Modelo $\phi^4$

O modelo  $\phi^4$  com quebra espontânea de simetria, pode ser escrito de maneira mais simplificada, de maneira que o potencial toma a forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 \quad (2.61)$$

esse pontecial tem mínimos em  $\phi = \pm 1$  e um máximo local em  $\phi = 0$ , como pode ser visto na Figura 2.2(a). Com massas clássica  $m^2 = 4$ , para ambos os mínimos.

A equação de movimento (2.18) para esse modelo é dada por:

$$\phi'' = 2\phi(\phi^2 - 1) \quad (2.62)$$

com soluções uniformes  $\bar{\phi}_\pm = \pm 1$ , que satisfazem as condições de serem mínimos do potencial e terem energia nula.

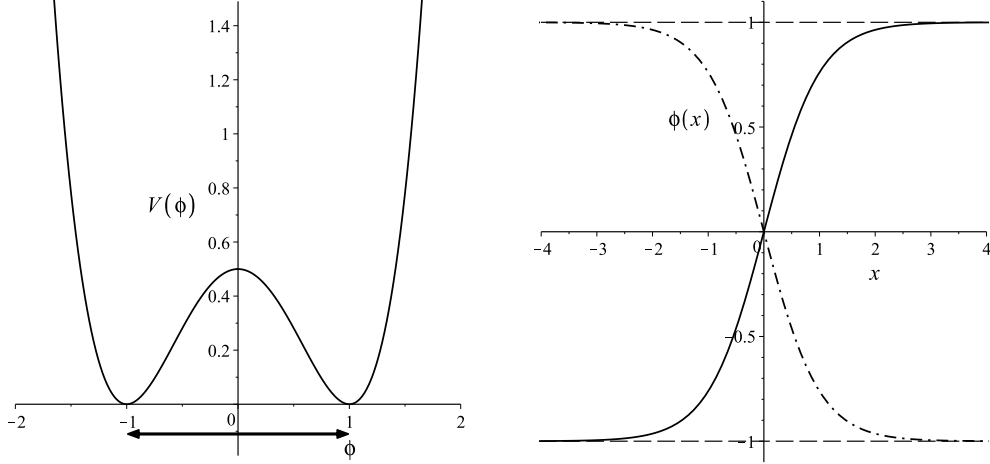
Para determinarmos as soluções estáticas vamos fazer uso da equação (2.59):

$$x = \pm G(\phi) = \pm \int \frac{d\phi}{1 - \phi^2} = \pm \operatorname{arctanh}(\phi) \quad (2.63)$$

com  $x_0 = 0$  e tomando a função inversa, obtemos:

$$\phi(x) = \pm \tanh(x) \quad (2.64)$$

que são o kink e o antikink. Essas soluções ligam um mínimo a outro, ilustrado na Figura 2.2(b).



(a) Potencial da equação (2.61) com mínimos em  $\phi = \pm 1$ . A seta representa o setor topológico que conecta os mínimos.

(b) Soluções dado pela equação (2.64). A linha sólida representa o kink, a linha com traços e pontos o antikink e as linhas tracejadas os valores que as soluções ligam.

Figura 2.2: Potencial e soluções estática, respectivamente, para o modelo  $\phi^4$ .

A densidade de energia dada pela equação (2.19a) para as soluções (2.64) será:

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x) \quad (2.65)$$

note que a densidade de energia está localizada na origem, como mostrado na Figura 2.3(a). Podemos calcular a energia das soluções fazendo uma integração em todo o espaço ou de forma direta pelo superpotencial  $W(\phi)$ , que para esse modelo tem forma:

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 \quad (2.66)$$

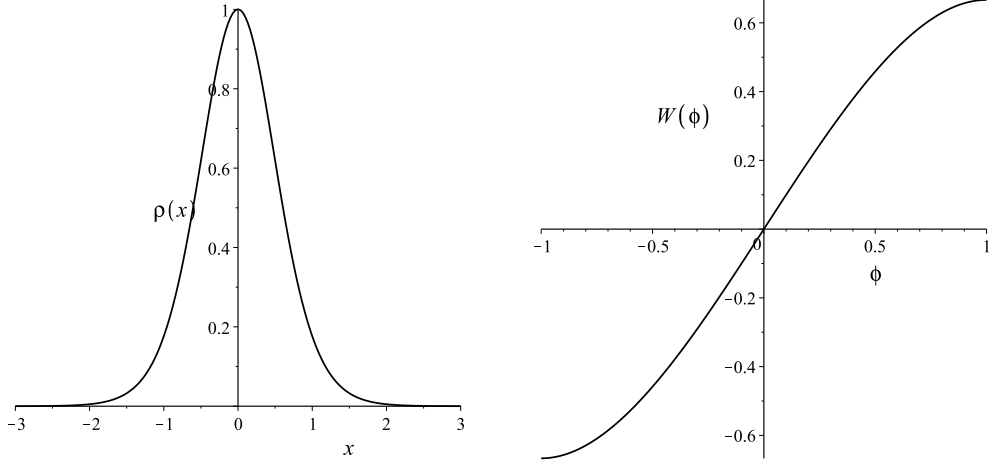
ilustrado na Figura 2.3(b). Com energia mínima dada pela equação (2.32):

$$E_B = |W(\phi = \pm 1) - W(\phi = \mp 1)| = \frac{4}{3} \quad (2.67)$$

para o kink e o antikink.

Podemos ainda estudar a estabilidade linear das soluções, onde o potencial de estabilidade da equação (2.47) será dado por:

$$U^+(x) = 4 - 6\text{sech}^2(x) \quad (2.68)$$



(a) Densidade de energia dada pela equação (2.65). Observe que ela é simétrica em  $x$ . (b) Superpotencial da equação (2.66), para  $\phi$  de  $-1$  a  $+1$ .

Figura 2.3: Densidade de energia e superpotencial  $W(\phi)$ , respectivamente, para o modelo  $\phi^4$ .

que é o potencial Pöschl-Teller modificado [43, 44], é um exemplo famoso na mecânica quântica, conhecido como potencial sem reflexão. Com espectro de energia para os estados ligados dado por  $\omega_n^2 = 4n - n^2$ . Nesse caso, temos dois estados ligados, com autovalores  $\omega_0^2 = 0$  e  $\omega_1^2 = 3$ . O modo zero e seu estado excitado são respectivamente:

$$\eta_0^+(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sech}^2(x) \quad \text{e} \quad \eta_1^+(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{sech}(x) \tanh(x) \quad (2.69)$$

podemos concluir que as soluções do modelo  $\phi^4$  são estáveis sob pequenas perturbações, pois seus autovalores são não negativos,  $\omega_n^2 \geq 0$ .

O potencial parceiro supersimétrico de  $U^+(x)$  é dado por:

$$U^-(x) = 4 - 2 \text{sech}^2(x) \quad (2.70)$$

contendo apenas um estado ligado, com autovalor  $\omega_0^2 = 3$ :

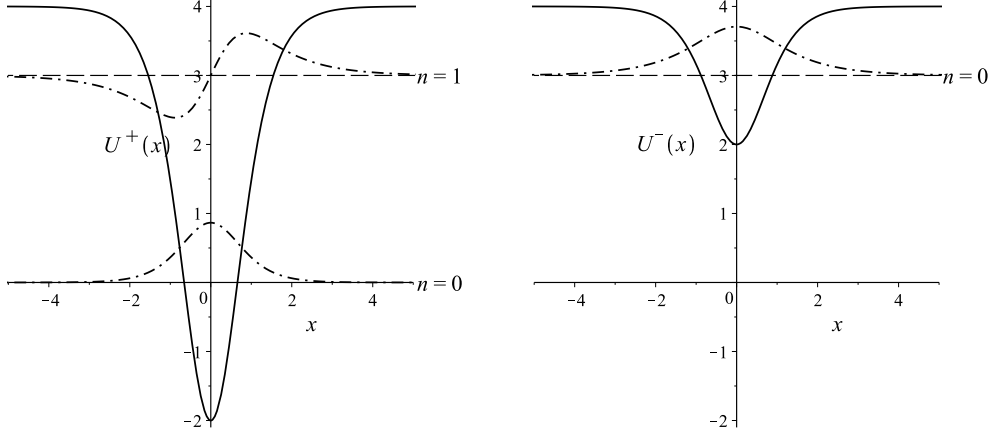
$$\eta_0^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sech}(x) \quad (2.71)$$

os potenciais  $U^+(x)$  e  $U^-(x)$ , juntamente com seus respectivos estados ligados podem ser visualizados na Figura 2.4.

### 2.6.2 Modelo $\phi^6$

Um outro exemplo que suporta soluções topológicas é o modelo  $\phi^6$ , onde o potencial é dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 (1 - \phi^2)^2 \quad (2.72)$$



(a) Potencial de estabilidade (linha sólida) dado pela equação (2.68), juntamente com seu modo zero e estado excitado (linhas com traços e pontos) dados na equação (2.69).

(b) Potencial de estabilidade (linha sólida) dado pela equação (2.70), juntamente com seu modo zero (linha com traços e pontos) dado na equação (2.71).

Figura 2.4: Potencial de estabilidade e seu parceiro supersimétrico, respectivamente, para o modelo  $\phi^4$ .

diferentemente do modelo  $\phi^4$ , vamos ter três mínimos,  $\phi = \pm 1$  e  $\phi = 0$ , com máximos locais em  $\phi = \pm 1/\sqrt{3}$ , veja na Figura 2.5(a). Teremos dois setores topológicos, um entre  $-1$  e  $0$  e outro entre  $0$  e  $+1$ . As massas clássicas nos mínimos serão:

$$m_{\pm}^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pm 1} = 4 \quad \text{e} \quad m_0^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = 1 \quad (2.73)$$

veja que as massas nos mínimos  $\phi = \pm 1$  é maior do que em  $\phi = 0$ , fazendo com que o potencial seja mais côncavo em  $\phi = \pm 1$ .

A equação de movimento (2.18) para esse modelo será:

$$\phi'' = \phi(\phi^2 - 1)(1 - 3\phi^2) \quad (2.74)$$

com soluções uniformes de energia nula  $\bar{\phi}_0 = 0$  e  $\bar{\phi}_{\pm} = \pm 1$ .

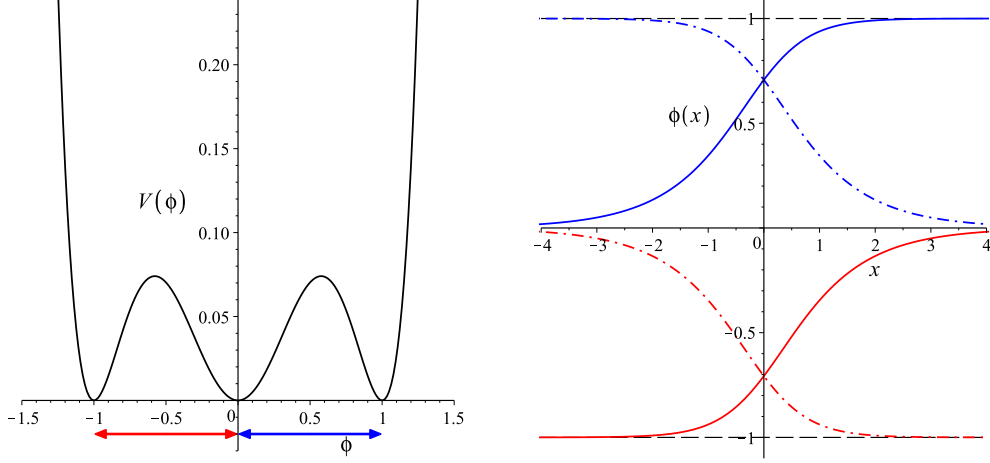
Como existem dois setores topológicos, teremos quatro soluções, dois kinks e dois antikinks:

$$\phi_{(-1,0)}(x) = -\sqrt{\frac{1 - \tanh(x)}{2}} \quad \text{e} \quad \phi_{(0,-1)}(x) = -\sqrt{\frac{1 + \tanh(x)}{2}} \quad (2.75a)$$

$$\phi_{(0,+1)}(x) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(x)}{2}} \quad \text{e} \quad \phi_{(+1,0)}(x) = \sqrt{\frac{1 - \tanh(x)}{2}} \quad (2.75b)$$

na equação (2.75a), temos o kink e o antikink, respectivamente, do primeiro setor topológico e na equação (2.75b), o kink e o antikink, respectivamente, do segundo setor topológico. As soluções não são simétricas em relação ao centro por causa das massas dos

mínimos que cada setor topológico liga, veja que na Figura 2.5(b) as soluções crescem (decrecem) mais rápido perto dos mínimos  $\phi = \pm 1$ . Uma maneira de se observar essa assimetria da solução pode ser feita na análise da estabilidade linear das soluções, que será mostrada mais adiante.



(a) Potencial da equação (2.72), com os mínimos em  $\phi = \pm 1$  e  $\phi = 0$ . A seta vermelha indica o primeiro setor topológico e a seta azul o segundo.

(b) Soluções (2.75). As linhas sólidas representam os kinks e as linhas com traços e pontos os antikinks, a cor vermelha é para o primeiro setor topológico e a azul para o segundo.

Figura 2.5: Potencial e suas soluções do modelo  $\phi^6$ .

Pela equação (2.19a) vamos ter duas densidades de energia:

$$\rho(x) = \frac{1}{8} (1 \pm \tanh(x)) \operatorname{sech}^2(x) \quad (2.76)$$

onde o sinal positivo são para o kink do primeiro setor e o antikink do segundo setor, já o negativo para o antikink do primeiro setor e o kink do segundo setor. Observe na Figura 2.6 que as densidades de energia não estão centradas na origem, com picos em  $x = \pm \ln(2)/2$ .

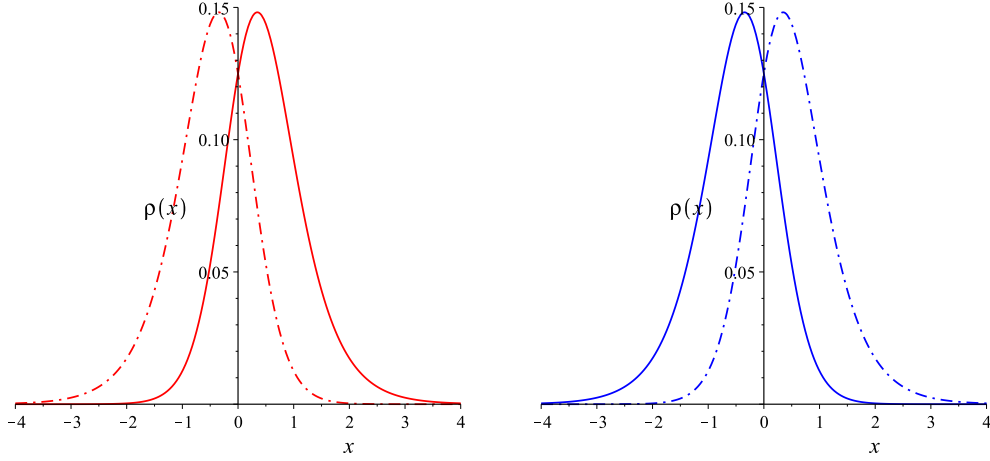
O superpotencial  $W(\phi)$  para cada setor pode ser visualizado na Figura 2.7 e tem forma geral:

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4 \quad (2.77)$$

com energia mínima  $E = 1/4$ , para todas as soluções.

Fazendo uma análise da estabilidade linear das soluções para esse modelo, com uso da equação (2.47), teremos dois potenciais de estabilidade:

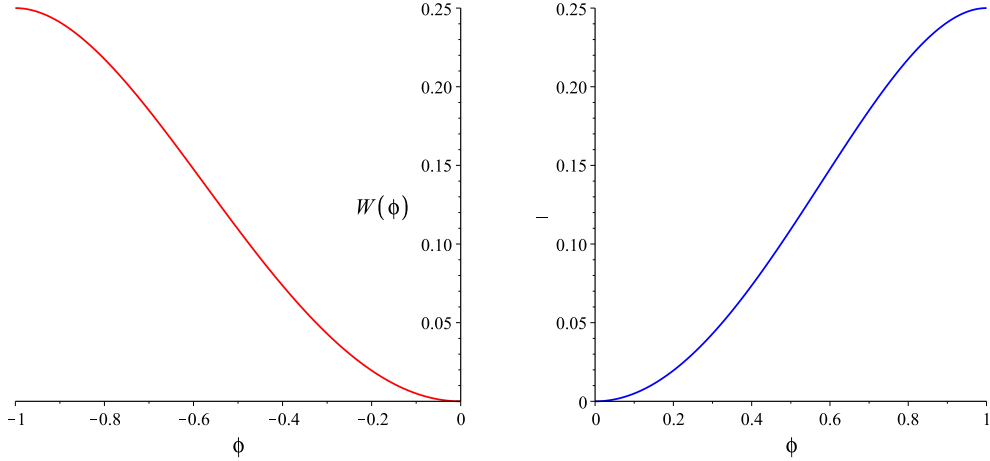
$$U(x) = \frac{5}{2} \mp \frac{3}{2} \tanh(x) - \frac{15}{4} \operatorname{sech}^2(x) \quad (2.78)$$



(a) De linha sólida para o kink e de linha com traços e pontos o antikink, para o primeiro setor topológico.

(b) De linha sólida para o kink e de linha com traços e pontos o antikink, para o segundo setor topológico.

Figura 2.6: Densidades de energia para as soluções do primeiro e segundo setor topológico, respectivamente, do modelo  $\phi^6$ , dado pela equação (2.76).



(a) Superpotencial  $W(\phi)$  para o primeiro setor topológico, com  $\phi$  de  $-1$  a  $0$ .

(b) Superpotencial  $W(\phi)$  para o segundo setor topológico, com  $\phi$  de  $0$  a  $+1$ .

Figura 2.7: Superpotencial  $W(\phi)$  para o modelo  $\phi^6$ , dado pela equação (2.77).

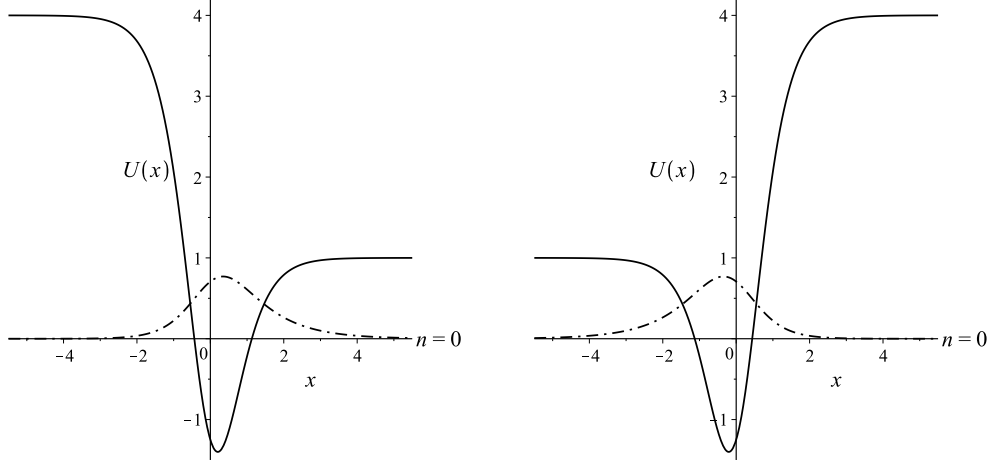
o primeiro potencial é para as soluções do tipo kink do primeiro setor e do antikink do segundo setor, já o segundo potencial é para o kink do segundo setor e o antikink do primeiro setor.

Observe na Figura 2.8 que os potenciais de estabilidade possuem uma assimetria, essa assimetria é causada pelos diferentes valores da massa clássica dos mínimos que as soluções conectam. Por causa dessa assimetria no potencial, admi-ti-se estados de reflexão para  $\omega^2$  entre 1 e 4. Teremos apenas um estado ligado para ambos potencial, os seus

respectivos modos zeros:

$$\eta_0(x) = \frac{\text{sech}^2(x)}{\sqrt{2 \mp 2 \tanh(x)}} \quad (2.79)$$

Concluimos que todas as soluções são estáveis para o modelo  $\phi^6$ . Os parceiros supersimétrico dos potenciais da equação (2.78) não possuem estados ligados.



(a) Potencial de estabilidades (linha sólida) da equação (2.78) com sinal negativo e seu respectivo modo zero (traços e pontos). (b) Potencial de estabilidades (linha sólida) da equação (2.78) com sinal positivo e seu respectivo modo zero (traços e pontos).

Figura 2.8: Potenciais de estabilidade (2.78) e seus únicos estados ligados, dado pela equação (2.79), para o modelo  $\phi^6$ .

Como vimos nesses dois exemplos, as soluções topológicas são estáveis sob pequenas perturbações.

### 2.6.3 Outros modelos

Existem diversos outros modelos que suportam soluções topológicas [45, 46], um modelo bastante interessante e bem conhecido na literatura é o seno-Gordon e pode ser descrito pelo potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sin^2(\phi) \quad (2.80)$$

distintamente dos dois modelos anteriores, esse modelo possui uma infinidade de mínimos, em  $\phi = k\pi$ , onde  $k$  pode ser qualquer número inteiro. Com máximos em  $\phi = (2k-1)\pi/2$  e massa nos mínimos  $m^2 = 1$ , veja sua forma na Figura 2.9(a).

Com soluções estáticas simétricas:

$$\phi(x) = 2 \operatorname{arctanh}(\exp(\pm x)) + k\pi \quad (2.81a)$$

$$\phi(x) = -2 \operatorname{arctanh}(\exp(\mp x)) - k\pi \quad (2.81b)$$

as soluções da equação (2.81a) são respectivamente os kinks e antikinks, dos setores topológicos do lado direito e as da equação (2.81b) dos setores do lado esquerdo, veja na Figura 2.9(b).

As soluções têm densidade de energia centrada na origem, mostrada na Figura 2.9(c), e sua forma pela equação (2.19a) é dada por:

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x) \quad (2.82)$$

com energia  $E = 2$ .

Podemos fazer a análise da estabilidade linear de maneira análoga aos modelos anteriores e verificaremos que as soluções estáticas para esse modelo são estáveis. Com potencial de estabilidade e seu único estado ligado, o modo zero, dados por:

$$U(x) = 1 - 2\text{sech}^2(x) \quad \text{e} \quad \eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sech}(x) \quad (2.83)$$

e ilustrados na Figura 2.9(d).

Um modelo particularmente interessante é o *vacuumless* [47, 48], cujo potencial tem forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\text{sech}^2(\phi) \quad (2.84)$$

com máximo em  $\phi = 0$ , o gráfico do potencial é mostrado na Figura 2.10(a). O que torna esse potencial especial é o fato de não conter mínimos, porém suportar soluções topológicas de energia finita.

As soluções estáticas são dadas por:

$$\phi(x) = \pm \text{arcsinh}(x) \quad (2.85)$$

o kink e o antikink. Veja na Figura 2.10(b) que essas soluções apresentam amplitudes infinitas.

Com densidade de energia bastante difusa:

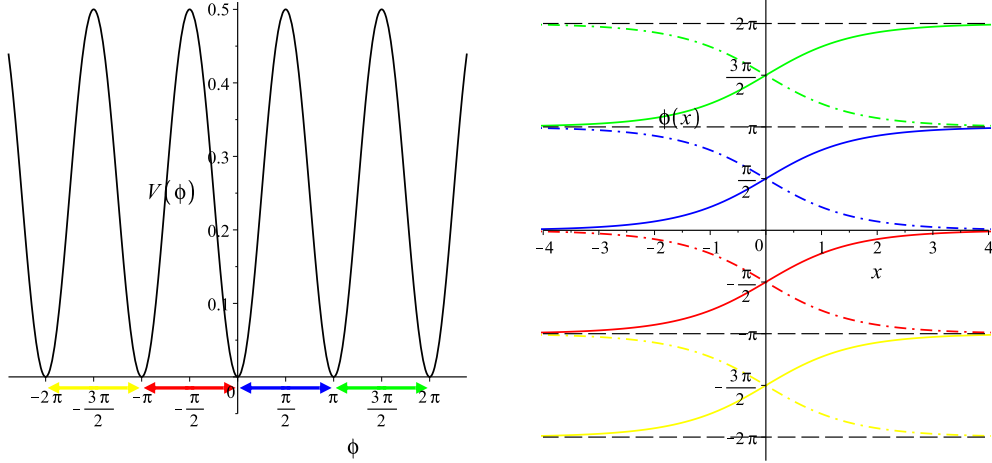
$$\rho(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (2.86)$$

observe na Figura 2.10(c) como a densidade de energia demora a decrescer. Entretanto, as soluções possuem energia finita  $E = \pi$ .

O potencial de estabilidade e modo zero são dados por:

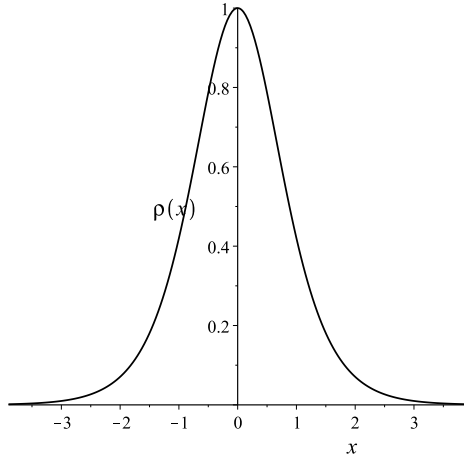
$$U(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{e} \quad \eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (2.87)$$

e mostrados na figura 2.10(d). Esse potencial é conhecido como potencial vulcão [49]. Ele não apresenta lacuna entre o estado ligado e o contínuo, já que ele tende assintoticamente a zero nos extremos, com picos em  $x = \pm\sqrt{2}$ .

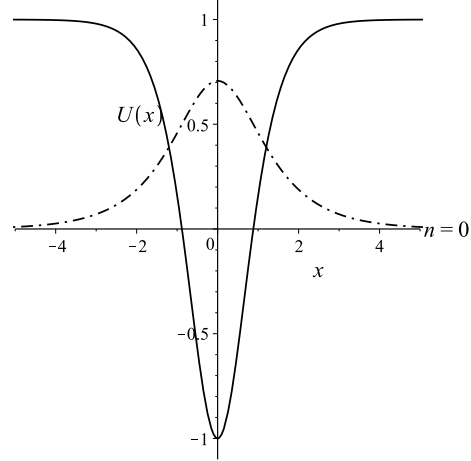


(a) Potencial dado pela equação (2.80) com mínimos em  $\phi = k\pi$ , com alguns de seus setores topológicos, representados pelas setas amarela, vermelha azul e verde.

(b) Gráficos das soluções (2.81), as do tipo kink com linhas sólidas e antikink com linhas de pontos e traços, para seus respectivos setores topológicos, dado pelas cores.



(c) Densidade de energia (2.82).



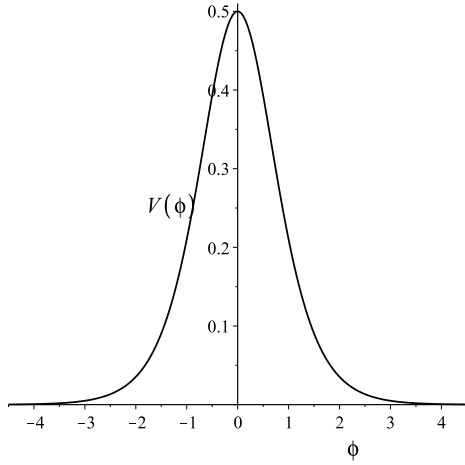
(d) Potencial de estabilidade com linha sólida e seu modo zero com linha de pontos e traços, dados pela equação (2.83).

Figura 2.9: Potencial, soluções, densidade de energia e potencial de estabilidade com seu modo zero para o modelo seno-Gordon.

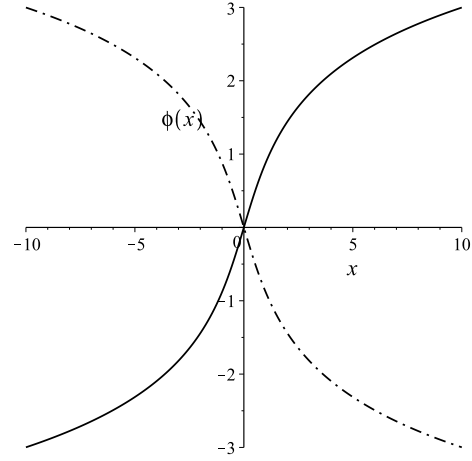
Teremos problema em calcular a carga topológica pela definição usual da corrente topológica dada na equação (2.23), entretanto a definição de corrente topológica não é única [15], podemos escrever de maneira geral como:

$$j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi) \quad (2.88)$$

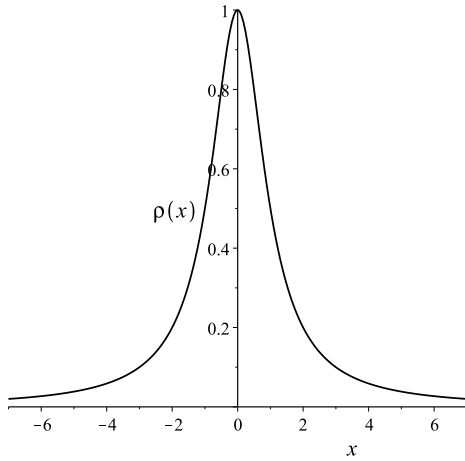
notamos que essa corrente é conservada por construção. Com carga topológica  $Q_T$ , diretamente relacionada com  $\Delta W$ , da equação (2.32). De maneira análoga a (2.24), quando  $Q_T \neq 0$  dizemos que as soluções são topológicas, como todos os exemplos dessa



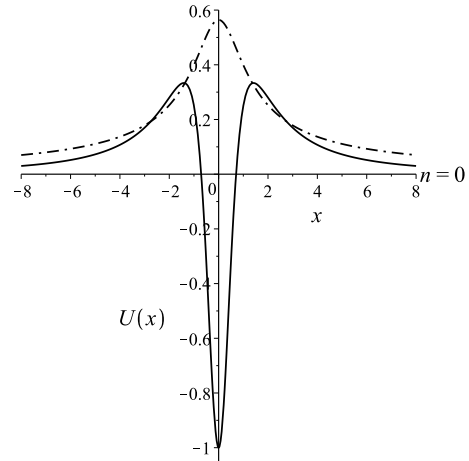
(a) Potencial sem vácuo da equação (2.84).



(b) Soluções topológicas do modelo (2.84), dado pela equação (2.85). A linha sólida representa a solução tipo kink e a linha com traços e pontos o antikink.



(c) Densidade de energia (2.86) para as soluções (2.85)



(d) Potencial de estabilidade com a linha sólida e seu modo zero com linha de pontos e traços, descritos pela equação (2.87).

Figura 2.10: Potencial, soluções, densidade de energia e potencial de estabilidade com seu modo zero para o modelo sem vácuo.

seção, inclusive para o *vacuumless* e quando  $Q_T = 0$ , temos as soluções não-topológicas.

Um outro exemplo de potencial que não contém estados de vácuo está sendo desenvolvido [50] e é dado por:

$$V(\phi) = \frac{b^2}{2a^2}(|\phi| + 1)^{2(1-a)} \quad (2.89)$$

com máximo em  $\phi = 0$  igual a  $b^2/2a^2$  e com soluções tipo kink dada por:

$$\phi(x) = \text{sgn}(x) \left[ (b|x| + 1)^{\frac{1}{a}} - 1 \right] \quad (2.90)$$

lembrando que esse modelo também apresentam as soluções anti-kink.

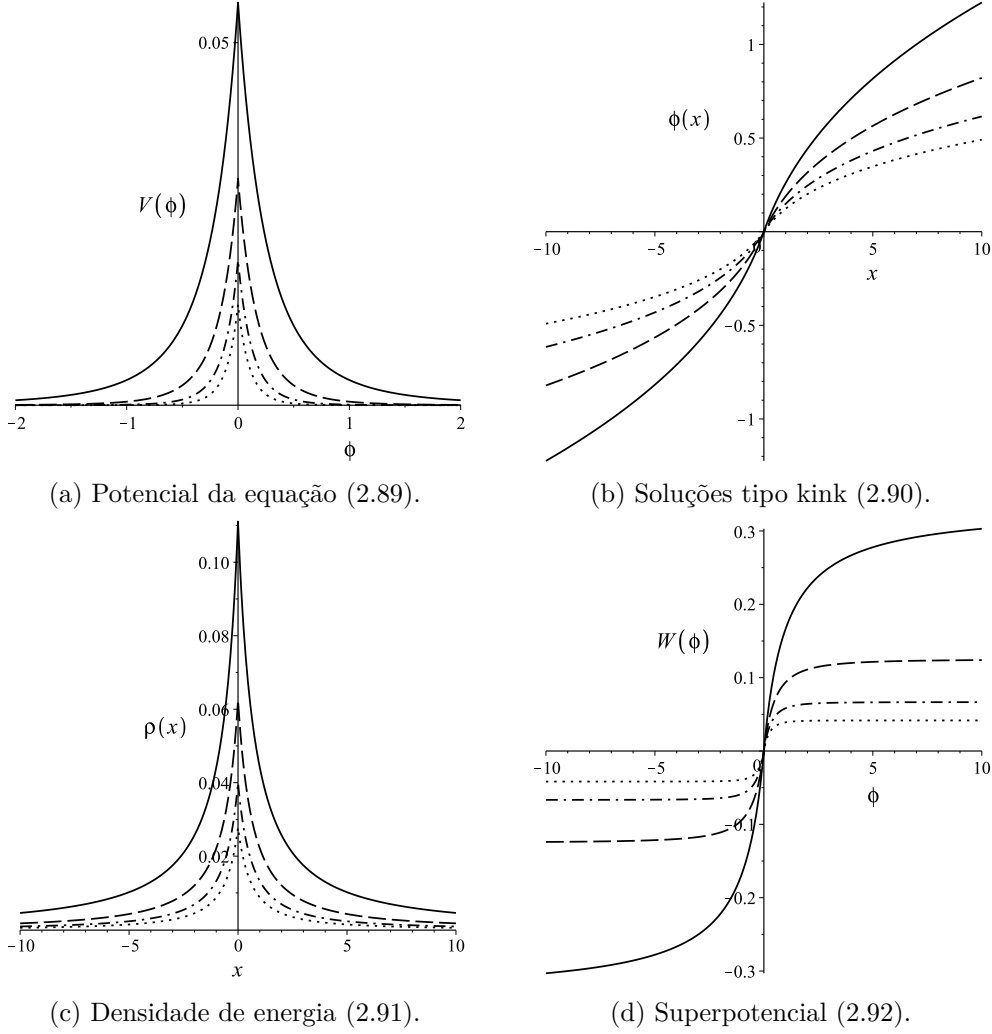


Figura 2.11: Potenciais, soluções, densidade de energia e superpotencial do modelo (2.88). Para  $b = 1$ ,  $a = 3$  para a linha sólida,  $a = 4$  para a linha tracejada,  $a = 5$  para a linha com traços e pontos e  $a = 6$  para a linha pontilhada.

A densidade de energia terá forma:

$$\rho(x) = \frac{b^2}{a^2} (b|x| + 1)^{\frac{2(1-a)}{a}} \quad (2.91)$$

simétrica em relação a origem com pico igual a  $b^2/a^2$ . Só teremos energia finita para  $a > 2$  e fazemos  $b > 0$  para que a energia seja positiva definida. A energia para essas soluções é dada por:

$$E = \frac{2b}{a(a-2)} \quad (2.92)$$

para  $b = 1$  e  $a = 3, 4, 5$  e  $6$ , teremos energias  $E_3 = 2/3, E_4 = 1/4, E_5 = 2/15, E_6 = 1/12$ , respectivamente.

O superpotencial para esse modelo será:

$$W(\phi) = \text{sgn}(\phi) \left[ \frac{b(|\phi| + 1)^{2-a}}{a(2-a)} + \frac{b}{a(a-2)} \right] \quad (2.93)$$

os gráficos dos potenciais, soluções, densidade de energia e superpotencial podem ser vistos na Figura 2.11 para alguns valores de  $a$  e  $b$ . Note que para o limite  $a \rightarrow \infty$ , o potencial, a solução o superpotencial e a energia serão nulos.

O potencial de estabilidade nesse caso é:

$$U(x) = \frac{b^2(a-1)(2a-1)}{a^2(b|x|+1)^2} - \frac{2b(a-1)\delta(x)}{a(b|x|+1)^{\frac{2a-1}{a}}} \quad (2.94)$$

com modo zero:

$$\eta_0(x) = \sqrt{\frac{b(a-2)}{2a}} (b|x|+1)^{\frac{1-a}{a}} \quad (2.95)$$

veja a Figura 2.12.

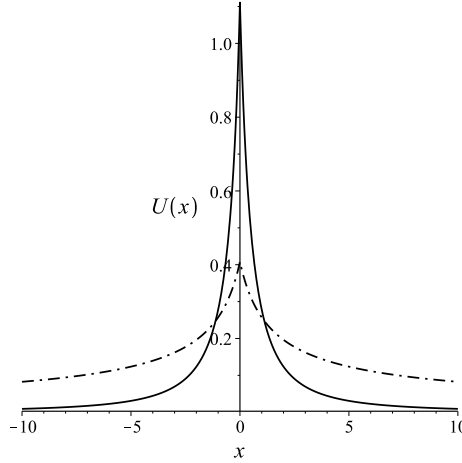


Figura 2.12: Potencial de estabilidade (2.94) de linha sólida e seu respectivo modo zero (2.95) de linha com traços e pontos, para  $b = 1$  e  $a = 3$ . Aparentemente esse potencial não parece suportar estados ligados, mas devido a sua descontinuidade na origem com a presença de um delta com sinal negativo, teremos apenas o estado fundamental.

## 2.7 Exemplos de Soluções Não-Topológicas

Soluções não-topológicas ou simplesmente lumps, possuem carga topológica nula, pois seus limites tendem assintoticamente a um mesmo valor. Logo, não são funções monotônicas, pois terá uma hora que sua derivada primeira irá inverter de sinal. Essas soluções trocam de sinal no centro da solução, que tomamos como  $x_0 = 0$ . No caso de lumps, não faz sentido falar de antilump, pois o antilump é o próprio lump.

Potenciais que suportam soluções do tipo lump, são potenciais que têm valores negativos. Entretanto, a solução existe apenas na parte positiva desse potencial, com isso, não teremos problemas em introduzir o superpotencial  $W = W(\phi)$ , para soluções não-topológicas. Diferentemente dos kinks não podemos escrever da mesma maneira que (2.58), ainda assim, escrevemos:

$$\phi' = W_\phi \quad \text{e} \quad \phi' = -W_\phi \quad (2.96)$$

utilizamos a primeira equação para obter o lump na região quando  $\phi'$  for positivo e a segunda quando  $\phi'$  for negativo. Teremos:

$$x = \begin{cases} \int \frac{d\phi}{W_\phi} = G(\phi), & \text{para } \phi' > 0 \\ -\int \frac{d\phi}{W_\phi} = -G(\phi), & \text{para } \phi' < 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

com centro na origem e sendo  $G(\phi)$  uma função inversível, obtemos:

$$\phi(x) = \begin{cases} G^{-1}(x), & \text{para } \phi' > 0 \\ G^{-1}(-x), & \text{para } \phi' < 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

para lumps,  $G^{-1}$  é sempre uma função par, compactificamos as equações (2.98) numa só:

$$\phi(x) = G^{-1}(x) \quad (2.99)$$

Nesse caso, a energia associada a soluções tipo lump [51], será:

$$\begin{aligned} E_B &= |W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(0))| + |W(\phi(0)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))| \\ &= 2|W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(0))| \\ &= 2|W(\phi(0)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))| \end{aligned} \quad (2.100)$$

seguiremos com um exemplo ilustrativo.

### 2.7.1 Modelo $\phi^4$ Invertido

Vamos considerar agora o potencial da forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2) \quad (2.101)$$

com um mínimo local em  $\phi = 0$  e máximos em  $\phi = \pm 1/\sqrt{2}$ , como pode-se ver na Figura 2.13(a). Com massa clássica  $m^2 = 1$ .

A equação de movimento (2.18) para soluções estáticas será:

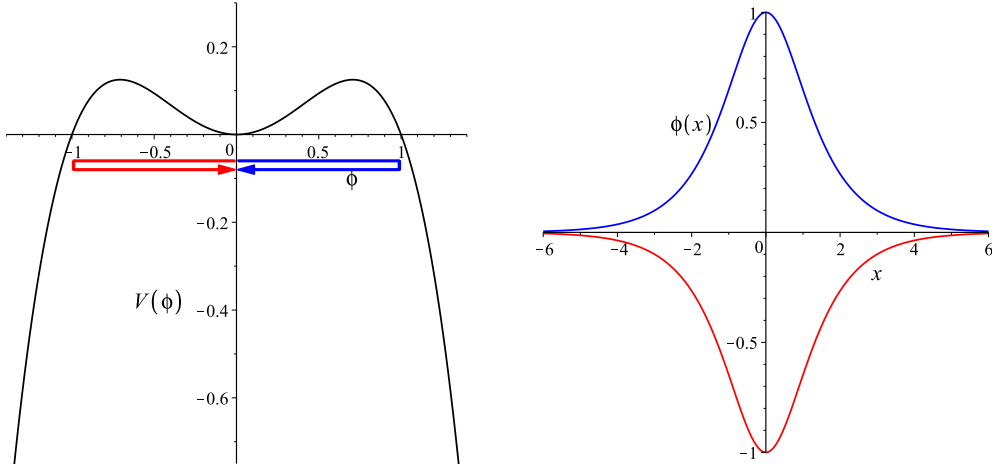
$$\phi'' = \phi(1 - 2\phi^2) \quad (2.102)$$

com solução estática e uniforme  $\bar{\phi}_0 = 0$ , que é um ponto de mínimo e raiz do potencial.

Vamos ter duas soluções estáticas:

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x) \quad (2.103)$$

veja na Figura 2.13(b) que essas soluções se iniciam no mínimo do potencial  $\phi = 0$  e crescem/decrescem até  $\phi = \pm 1$  e depois retornam para o mínimo.



(a) Potencial da equação (2.101), com um mínimo local em  $\phi = 0$ , que suporta duas soluções do tipo lump.

(b) Soluções estáticas dada pela equação (2.103), de vermelho a solução do lado esquerdo do potencial e de azul a do lado direito.

Figura 2.13: Potencial e soluções para o modelo  $\phi^4$  invertido.

Com densidade de energia (2.19a) dada por:

$$\rho(x) = \tanh^2(x) \operatorname{sech}^2(x) \quad (2.104)$$

a densidade de energia é nula na origem e possui dois picos simétricos, em  $x = \pm \operatorname{arcsech}(1/\sqrt{2})$ , mostrada na Figura 2.14.

O superpotencial  $W(\phi)$  é dado por:

$$W(\phi) = -\frac{1}{3} (1 - \phi^2)^{\frac{3}{2}} \quad (2.105)$$

a Figura 2.15, mostra o comportamento dela em cada região. A energia de cada solução será  $E = 2/3$ .

O potencial de estabilidade segundo a equação (2.47) é:

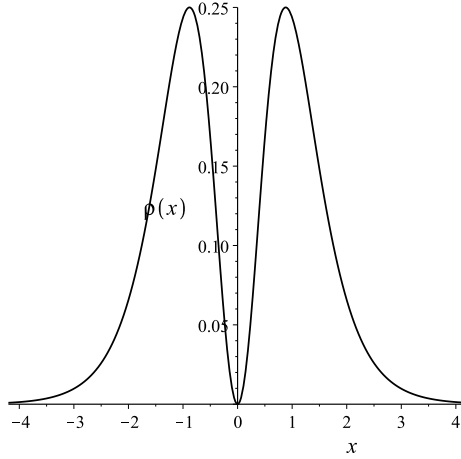


Figura 2.14: Densidade de energia para o modelo  $\phi^4$  invertido, dada pela equação (2.104), com picos em  $x = \pm \operatorname{arcsech}(1/\sqrt{2})$ .

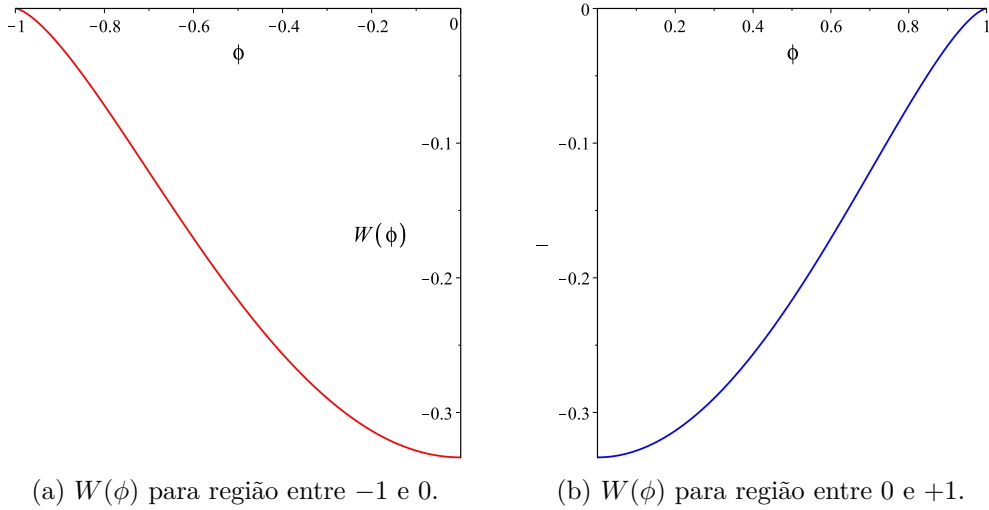


Figura 2.15: Superpotencial  $W(\phi)$  para o modelo  $\phi^4$  invertido dado pela equação (2.105).

$$U(x) = 1 - 6\operatorname{sech}^2(x) \quad (2.106)$$

esse pontencial tem a mesma forma do potencial de estabilidade (2.68) do modelo  $\phi^4$ , porém com uma altura menor em 3. Logo, seu espectro dos estados ligados é dado por  $\omega_n^2 = -3 + 4n - n^2$ . Teremos dois estados ligados, com autovalores  $\omega_0^2 = -3$  e  $\omega_1^2 = 0$ . Seus estado ligados são respectivamente:

$$\eta_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(x) \quad \text{e} \quad \eta_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) \quad (2.107)$$

podemos concluir que as soluções do modelo  $\phi^4$  invertido não são estáveis sob pequenas perturbações, pois possui autovalor negativo.

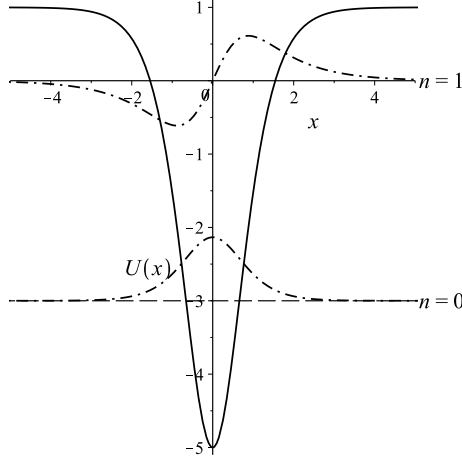


Figura 2.16: Potencial de estabilidade (linha sólida) do modelo  $\phi^4$  invertido, dado pela equação (2.106). E seus estados ligados (linhas com traços e pontos), escritos na equação (2.107).

Existem vários outros modelos que suportem soluções tipo lump, alguns exemplos podem ser vistos nas referências [51, 52].

## 2.8 Método da Deformação

Difícilmente encontramos modelos com soluções analíticas, muitas vezes precisamos fazer uso do cálculo numérico para analisarmos os comportamentos de tais soluções. O método da deformação [53] permite gerarmos novos modelos com suas respectivas soluções analíticas a partir de modelos já conhecidos [54]. Mediante uma função inversível do campo,  $f = f(\phi)$ , denominada de função deformadora.

Consideraremos dois modelos distintos,  $V(\phi)$  e  $\tilde{V}(\chi)$ , podemos determinar as soluções estáticas resolvendo as equações de primeira ordem (2.25) associadas a cada modelo, que são respectivamente:

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi)} \quad (2.108a)$$

$$\chi' = \pm \sqrt{2\tilde{V}(\chi)} \quad (2.108b)$$

essas duas equações podem ser relacionadas a partir da função deformadora, fazendo  $\phi = f(\chi)$ , temos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} \Rightarrow \sqrt{2V(\phi)} = \pm \frac{df}{d\chi} \sqrt{2\tilde{V}(\chi)} \quad (2.109)$$

elevando ambos lados ao quadrado, obtemos a relação:

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{V(\phi = f(\chi))}{(df/d\chi)^2} \quad (2.110)$$

Supondo que o primeiro modelo,  $V(\phi)$ , seja um modelo com soluções  $\phi = \phi(x)$  já conhecidas, conseguimos gerar um novo modelo descrito pelo potencial da equação (2.110), com suas respectivas soluções estáticas:

$$\chi(x) = f^{-1}(\phi(x)) \quad (2.111)$$

onde  $f^{-1}$  é a inversa da função deformadora.

Para modelos que admitem soluções BPS, podemos relacionar os dois modelos de maneira ainda mais simples. Usando as equações (2.33) e fazendo o mesmo procedimento feito (2.109), temos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\chi} \frac{d\chi}{dx} \Rightarrow W_\phi = \pm \frac{df}{d\chi} \tilde{W}_\chi \Rightarrow \tilde{W}_\chi = \pm \frac{W_\phi(\phi = f(\chi))}{df/d\chi} \quad (2.112)$$

Podemos fazer esse processo consecutivamente e ir gerando novos modelos a cada redefinição realizada. Além disso, ainda pode-se fazer a deformação no sentido contrário, usando a inversa da função deformadora,  $f^{-1}$ , no modelo deformado, recuperamos o modelo original não deformado.

### 2.8.1 Exemplo

Como ilustração desse método, consideremos o modelo  $\phi^4$  dado pela equação (2.61) com soluções  $\phi(x) = \pm \tanh(x)$  e uma função deformadora  $f(\chi) = 1 - 2\chi^2$ . A equação (2.112) torna-se:

$$\tilde{W}_\chi = \pm \frac{1 - f^2(\chi)}{df/d\chi} = \mp \chi(1 - \chi^2) \quad (2.113)$$

com potencial deformado:

$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2} \tilde{W}_\chi^2 = \frac{1}{2} \chi^2 (1 - \chi^2)^2 \quad (2.114)$$

é o potencial do modelo  $\phi^6$ , já mencionado anteriormente na equação (2.72). Pegando a inversa da função deformadora teremos as seguintes soluções:

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - (f = \phi(x))}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}} \quad (2.115)$$

obtemos as soluções do modelo  $\phi^6$  de maneira muito simples sem resolver qualquer equação diferencial. Aplicando a mesma função deformadora no modelo  $\phi^6$ , equação (2.72), geramos um novo potencial, conhecido como modelo  $\phi^{10}$  [55]:

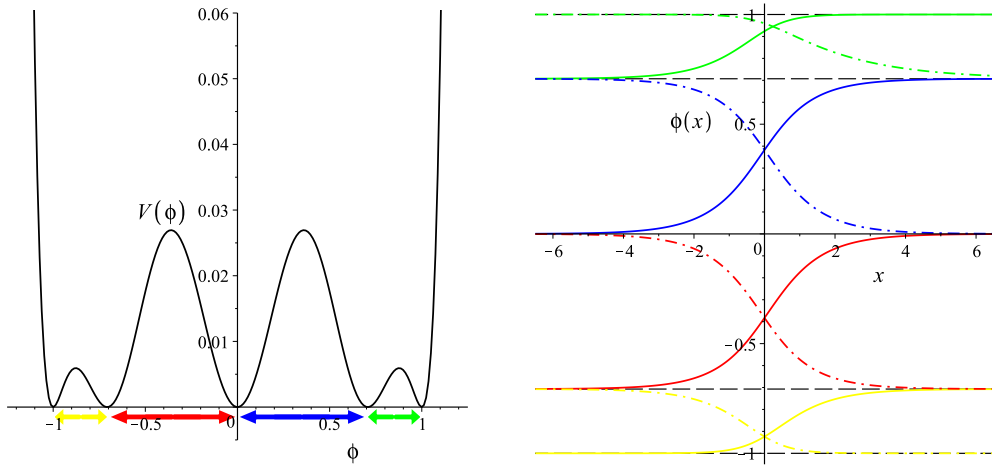
$$\tilde{V}(\chi) = \frac{1}{2} \chi^2 (1 - 2\chi^2)^2 (1 - \chi^2)^2 \quad (2.116)$$

esse modelo possui quatro setores topológicos, com mínimos em  $\phi = \pm 1$ ,  $\phi = \pm 1/\sqrt{2}$  e  $\phi = 0$ , gráfico na Figura 2.17(a). Consequentemente, teremos oito soluções, dadas por:

$$\phi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}}}{2}} \quad (2.117)$$

e mostradas na Figura 2.17(b).

Se deformarmos o potencial  $\phi^{10}$  acima, com uma função deformadora  $f^{-1}$ , ou seja,  $g(\phi) = \pm \sqrt{\frac{1-\phi}{2}}$ . Recuperamos o potencial  $\phi^6$  e aplicando novamente, o potencial  $\phi^4$ .



(a) Potencial da equação (2.116), com os mínimos em  $\phi = \pm 1$ ,  $\phi = \pm 1/\sqrt{2}$  e  $\phi = 0$ , juntamente com seus setores topológicos, nas cores amarelo, vermelho, azul e verde.

(b) Soluções (2.117), onde os kinks são representados pelas linhas sólidas e os anti-kinks pelas linhas com traços e pontos para cada setor indicado pelas cores.

Figura 2.17: Potencial e suas soluções do modelo  $\phi^{10}$ .

Como pode-se ver, o método da deformação é um método muito poderoso, com ele, obtemos uma classe de modelos com suas respectivas soluções. Vale ressaltar que esse método não é restrito apenas para modelos que suportam soluções topológicas.

# Dinâmica Generalizada

Em Teoria de Campos podemos escrever a densidade lagrangiana do modelo usual como  $\mathcal{L} = X - V(\phi)$ , onde  $X$  é o termo da canônico,  $X = (1/2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ . A motivação de escrevermos dessa forma, é com finalidade de generalizarmos essa teoria para modelos com densidade lagrangiana de dinâmica modificada. Descreveremos o formalismo para dinâmicas onde a densidade lagrangiana tem a forma geral  $\mathcal{L}(\phi, X)$ . Teoria com dinâmica generalizada também suportam defeitos topológicos e vários exemplos podem ser encontrados nas referências [23, 24, 52, 56].

Generalizações como essas não é novidade. Em mecânica clássica [57, 58], para sistemas conservativos a lagrangiana é dada matematicamente pela subtração da energia cinética pela energia potencial  $L = K - V$ . Para uma partícula de massa  $m$  sujeita a um potencial  $V = V(\vec{r})$  que depende apenas da posição, a energia cinética é  $K = (1/2)mv^2$ , onde  $v$  é a velocidade da partícula, determinamos sua trajetória resolvendo a equação de Euler-Lagrange. Entretanto, para uma partícula relativística a lagrangiana não é mais escrita de forma usual, existe uma modificação em seu termo cinético. A lagrangiana relativística é dada por:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(\vec{r}) \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}) \quad (3.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Veja na aproximação acima, que no limite de baixas velocidades  $v \ll c$ , recupera-se a dinâmica usual.

Podemos ressaltar que existem diversas maneiras de fazermos uma generalização. Normalmente, teorias com densidade lagrangiana da forma  $\mathcal{L}(\phi, X)$ , levam a equações diferenciais com derivadas de segunda ordem. Enquanto modelos cuja ação tem derivadas de ordem superiores, as equações diferenciais, em geral, tem ordem maior que dois. O mais importante é lembrar que existem modelos específicos que apesar de terem derivadas superiores na ação preservam a segunda ordem nas equações do campo [59].

## 3.1 Formalismo Generalizado

Consideraremos a densidade lagrangiana generalizada  $\mathcal{L}(\phi, X)$  em (1,1) dimensões, com ação dada por:

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, X) \quad (3.2)$$

assumiremos que a densidade lagrangiana não dependa explicitamente das coordenadas no espaço-tempo, para que essa representação tenha simetria de Poincaré.

Escreveremos a equação de movimento (2.2) como:

$$\partial_\mu(\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_\phi \quad (3.3)$$

onde  $\mathcal{L}_X = \partial\mathcal{L}/\partial X$  e  $\mathcal{L}_\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\phi$ . Expandindo essa equação, obtemos:

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_X \partial_\mu \partial^\mu \phi = \mathcal{L}_\phi \quad (3.4)$$

ou então de forma compacta:

$$G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + 2X \mathcal{L}_{X\phi} = \mathcal{L}_\phi \quad (3.5)$$

onde definimos  $G^{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_X$ . Essa generalização deve nos fornecer todos os resultados conhecidos do modelo usual (2.4), onde  $\mathcal{L} = X - V(\phi)$ . Temos que  $\mathcal{L}_X = 1$  e  $\mathcal{L}_\phi = -V_\phi$ , recuperando a equação de movimento (2.5).

O tensor energia-momento (2.3) terá forma:

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.6)$$

ou escritas por componentes em (1+1) dimensões:

$$T^{00} = \rho = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L} \quad (3.7a)$$

$$T^{01} = T^{10} = -\mathcal{L}_X \dot{\phi} \phi' \quad (3.7b)$$

$$T^{11} = p = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L} \quad (3.7c)$$

onde  $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$  e  $\phi' = \partial\phi/\partial x$ . É de suma importância termos em mente que essas quantidades devem ser calculadas para um  $\phi = \phi(x, t)$ , que resolva a equação de movimento (3.3). Poderíamos escrever,  $\mathcal{L}_X|_{\phi=\phi(x,t)}$ , porém, abriremos mão da simbologia  $|_{\phi=\phi(x,t)}$ , para simplificar a notação. Na situação de dinâmica usual (2.4), é fácil ver que o tensor energia-momento da equação (3.6) recai em (2.6).

Como estamos trabalhando com modelos generalizado, faremos uso da condição de energia nula como guia [60]. Impõe-se que  $T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \geq 0$ , onde  $n_\mu$  é um vetor nulo e que  $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0$ . Restringindo nosso modelo a obedecer:

$$\mathcal{L}_X \geq 0 \quad (3.8)$$

Como estamos procurando defeitos topológicos, estamos interessados apenas nas soluções estáticas,  $\phi = \phi(x)$ , a equação de movimento (3.3) toma forma:

$$-(\mathcal{L}_{X_s} \phi')' = \mathcal{L}_\phi \quad (3.9)$$

expandindo:

$$(2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s}) \phi'' = 2\mathcal{L}_{X_s \phi} X_s - \mathcal{L}_\phi \quad (3.10)$$

onde  $X_s$  é o  $X$  para campos estáticos, ou seja,  $X_s = -\phi'^2/2 \leq 0$ .

Podemos reduzir a equação de movimento (3.10) para uma equação de primeira ordem pelo método da quadratura e obter:

$$\mathcal{L}_s - 2\mathcal{L}_{X_s}X_s = C \quad (3.11)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Comparando a equação (3.11) com a equação (3.7c), verificamos que a constante  $C$  corresponde ao estresse da solução estática, ou seja, a solução estática tem estresse constante.

A energia para essas soluções é dada pela integração da densidade de energia (2.7a):

$$E = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}(\phi, X_s) \quad (3.12)$$

se usarmos a equação (3.11) para calcular a energia, verificaremos que a constante  $C$  tem que ser nulo para que se tenha energia bem definida.

Podemos também obter essa restrição de estresse nulo, a partir do estudo que garante a estabilidade das soluções estáticas, sob contração ou dilatação espacial. Para isso, generalizaremos o teorema de Derrick [13], definindo  $\phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x)$ , teremos  $E_\lambda$ :

$$E_\lambda = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L} \left( \phi_\lambda, -\frac{1}{2} \left( \frac{\phi_\lambda}{dx} \right)^2 \right) \quad (3.13)$$

onde  $E_\lambda|_{\lambda=1} = E$ . Fazendo:

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \lambda^{-2} \mathcal{L}_s - 2X_s \mathcal{L}_{X_s} \Big|_{X_\lambda = \lambda^2 X_s} \right) \quad (3.14)$$

minimizamos essa expressão para  $\lambda = 1$  e obtemos:

$$\mathcal{L}_s - 2X_s \mathcal{L}_{X_s} = 0 \quad (3.15)$$

que é equivalente a equação (3.11), com  $C = 0$ . Concluimos que para garantir a condição de estabilidade de  $\phi(x)$ , teremos que ter estresse nulo. Além disso, a equação (3.15) depende apenas do campo escalar e de sua derivada primeira, obtemos uma equação de primeira ordem a partir do teorema de Derrick.

Podemos ainda introduzir um formalismo de primeira ordem usando uma função  $W = W(\phi)$ . Escrevendo a densidade de energia (3.7a) com uso da equação (3.15):

$$\rho = -\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{X_s} \phi'^2 \quad (3.16)$$

de modo que a função  $W(\phi)$  seja:

$$\mathcal{L}_{X_s} \phi' = W_\phi \quad (3.17)$$

onde  $W_\phi = dW/d\phi$ . Para reescrevemos a densidade de energia como:

$$\rho = W_\phi \phi' = W' \quad (3.18)$$

onde  $W' = dW/dx$ . A energia será dada pela variação de  $W$ :

$$E = \Delta W = |W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))| \quad (3.19)$$

repare que a energia não depende da forma explícita da solução, mas sim, em termos de  $W$ , calculado nos limites assintóticos do campo.

Substituindo a equação (3.17) na equação de movimento (3.9), obtemos:

$$W_{\phi\phi}\phi' = -\mathcal{L}_\phi \quad (3.20)$$

que também é uma equação de primeira ordem que resolve a equação de movimento. Para o modelo usual, a função  $W(\phi)$  será o superpotencial.

### 3.1.1 Estabilidade Linear

Introduzimos perturbações nas soluções da mesma maneira de como já foi feito anteriormente em (2.43). Expandindo a densidade lagrangiana em torno da solução estática e considerando os termos quadráticos de  $\eta$ . Fazendo algumas integrações por parte, a ação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \int d^2x \mathcal{L}^{(2)} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x \left\{ \mathcal{L}_X \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} (\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \eta)^2 + [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi_0)] \eta^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

A equação de movimento para  $\eta$  é dada por:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial (\partial_\mu \eta)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial \eta} \quad (3.22)$$

teremos:

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \eta + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi_0 \partial^\alpha \phi_0 \partial_\alpha \eta) = [\mathcal{L}_{\phi\phi} - \partial_\mu (\mathcal{L}_{\phi X} \partial^\mu \phi_0)] \eta \quad (3.23)$$

como  $\phi_0 = \phi_0(x)$  é uma solução estática, ficamos com:

$$\mathcal{L}_{X_s} \ddot{\eta} - [(2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s}) \eta']' = [\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X_s} \phi_0')'] \eta \quad (3.24)$$

Fazendo  $\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t)$  e substituindo na equação (3.24), obtemos:

$$-[(2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s}) \eta_n']' = [\mathcal{L}_{\phi\phi} + (\mathcal{L}_{\phi X_s} \phi_0')' + \omega_n^2 \mathcal{L}_{X_s}] \eta_n \quad (3.25)$$

no caso do modelo usual (2.4), temos que  $\mathcal{L}_{X_s X_s} = \mathcal{L}_{\phi X_s} = 0$  e  $\mathcal{L}_{\phi\phi} = -V_{\phi\phi}$ , recuperando a equação de Schrödinger (2.46). Para que as soluções  $\eta_n(x)$ , da equação (3.25), não cresça exponencialmente, temos que assegurar a hiperbolicidade da equação [22, 61], estabelecendo que:

$$A^2 \equiv \frac{(2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s})}{\mathcal{L}_{X_s}} \geq 0 \quad (3.26)$$

iremos chamar a quantidade  $A^2$  de hiperbolicidade, para o modelo usual, temos que  $A^2 = 1$ .

Podemos reescrever a equação (3.25) de maneira compacta:

$$-\left[a(x)\eta'_n\right]' = b(x)\eta_n \quad (3.27)$$

com:

$$a(x) = 2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s} \quad (3.28a)$$

$$b(x) = \mathcal{L}_{\phi\phi} + \left(\mathcal{L}_{\phi X_s} \phi'_0\right)' + \omega_n^2 \mathcal{L}_{X_s} \quad (3.28b)$$

funções da posição. A equação (3.27) é uma equação de Sturm-Liouville. Porém, podemos transforma-lá numa equação tipo Schrödinger fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$dx = Adz \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{u_n}{\sqrt{\mathcal{L}_{X_s} A}} \quad (3.29)$$

substituindo em (3.25) obtemos:

$$-u_{nzz} + U(z)u_n = \omega_n^2 u_n \quad (3.30)$$

onde o subíndice  $z$ , representa uma derivada na nova variável  $z$  e a função  $U(z)$  será:

$$U(z) = \frac{\left(\sqrt{A\mathcal{L}_{X_s}}\right)_{zz}}{\sqrt{A\mathcal{L}_{X_s}}} - \frac{1}{\mathcal{L}_{X_s}} \left[ \mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left( \mathcal{L}_{\phi X_s} \frac{\phi_{0z}}{A} \right)_z \right] \quad (3.31)$$

representando o novo potencial quântico que precisamos resolver. Para o modelo usual esse potencial se reduz a  $U(z) = V_{\phi\phi}$ .

Novamente teremos que ter  $\omega_n^2$  não-negativo para que nossas soluções sejam estáveis e para  $\omega_n^2 = 0$  teremos o autovalor correspondente ao modo zero. O modo zero não tem custo energético, já que corresponde ao modo translacional. Verificamos isso com uso do integrando equação (3.21) e reorganizando para obter:

$$\frac{1}{2} \left\{ \left[ (2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s}) \eta_0' \right]' + \left[ \mathcal{L}_{\phi\phi} + \left( \mathcal{L}_{\phi X_s} \phi'_0 \right)' \right] \eta_0 \right\} \eta_0 \quad (3.32)$$

que pode ser integrado para adquirir a contribuição na energia. Esse termo desaparece se fizermos uso da equação (3.25) com  $\omega_n^2 = 0$ , mostrando que de fato o modo zero não contribui para a energia.

O modo zero da equação (3.30) é dado por:

$$u_0(z) = \mathcal{N} \sqrt{\frac{\mathcal{L}_{X_s}}{A}} \phi_{0z} \quad (3.33)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização. O potencial  $U(z)$  da equação (3.31), pode ser escrito em termos do modo zero como:

$$U(z) = \frac{u_{0zz}}{u_0} \quad (3.34)$$

se o modo zero for o estado de menor autovalor, ou seja, uma função sem nó. Podemos fatorar a equação (3.30) da seguinte maneira:

$$\left[ -\frac{d}{dz} + g(z) \right] \left[ \frac{d}{dz} + g(z) \right] u = \omega_n^2 u \quad (3.35)$$

onde:

$$g(z) = \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{\mathcal{L}_{X_s}}{A}} \phi_{0z} \right) \right]_z \quad (3.36)$$

o potencial quântico (3.31) pode ser escrito como  $U^+(z) = g^2 + g_z$ , com parceiro supersimétrico dado por  $U^-(z) = g^2 - g_z$ .

### 3.2 Modelo Monomial

Como primeira exemplo de dinâmica generalizada, vamos considerar uma teoria com potencias superiores no termo canônico  $X$ , estudada em [24]. Dada pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{X}{N} |2X|^{N-1} - V(\phi) \quad (3.37)$$

onde  $V(\phi)$  é o potencial e  $N$  um número inteiro positivo. Para  $N = 1$  recuperamos o modelo usual (2.4).

A equação de movimento (3.3) para esse modelo é dado por:

$$\partial_\mu (|2X|^{N-1} \partial^\mu \phi) + V_\phi = 0 \quad (3.38)$$

expandindo:

$$G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + V_\phi = 0 \quad (3.39)$$

com  $G^{\mu\nu} = |2X|^{N-1} [(N-1)X^{-1} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu}]$ .

O tensor energia-momento, pela equação (3.6) será:

$$T^{\mu\nu} = |2X|^{N-1} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.40)$$

em (1,1) dimensões, suas componentes serão:

$$T^{00} = |2X|^{N-1} \left( \dot{\phi}^2 - \frac{X}{N} \right) + V(\phi) \quad (3.41a)$$

$$T^{01} = T^{10} = -|2X|^{N-1} \dot{\phi} \phi' \quad (3.41b)$$

$$T^{11} = |2X|^{N-1} \left( \phi'^2 + \frac{X}{N} \right) - V(\phi) \quad (3.41c)$$

para soluções estáticas e uniformes  $\bar{\phi}_i$ , temos que  $V_\phi(\bar{\phi}_i) = 0$  para satisfazer a equação de movimento (3.38) e para que a energia seja nula, impomos que  $V(\bar{\phi}_i) = 0$ , assim como no caso de dinâmica usual.

Pela condição de energia nula temos que  $|2X|^{N-1} \geq 0$ , restringindo nosso modelo a obedecer essa desigualdade, para um  $\phi = \phi(t, x)$  que satisfaça a equação de movimento (3.38). Essa condição implica que  $N \geq 1$ .

Para o caso estático  $\phi = \phi(x)$ , a equação de movimento (3.38) torna-se:

$$(2N - 1)\phi'^{2(N-1)}\phi'' = V_\phi \quad (3.42)$$

e as componentes não-nula do tensor energia-momento (3.41), serão:

$$T^{00} = -\frac{X_s}{N}|2X_s|^{N-1} + V(\phi) = \frac{1}{2N}\phi'^{2N} + V(\phi) \quad (3.43a)$$

$$T^{11} = |2X_s|^{N-1}\left(\phi'^2 + \frac{X_s}{N}\right) - V(\phi) = \frac{2N-1}{2N}\phi'^{2N} - V(\phi) \quad (3.43b)$$

para que essas soluções estáticas  $\phi = \phi(x)$  tenham energia bem definidas, impomos que  $\phi'(x) \rightarrow 0$  e que  $\phi(x) \rightarrow v_i$ , onde  $v_i$  é um mínimo do potencial, quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Pela condição de estresse nulo, podemos escrever o potencial  $V(\phi)$  pela equação (3.43b), como:

$$V(\phi) = \frac{2N-1}{2N}\phi'^{2N} \quad (3.44)$$

que é uma equação de primeira ordem que resolve a equação de movimento (3.42). Substituindo a expressão acima na densidade de energia (3.43a), teremos:

$$\rho = \phi'^{2N} = \frac{2N}{2N-1}V(\phi) \quad (3.45)$$

Também podemos escrever uma equação de primeira ordem usando a definição da função  $W(\phi)$ , dada pela equação (3.17):

$$\phi' = W_\phi^{\frac{1}{2N-1}} \quad (3.46)$$

o potencial da equação (3.44) pode ser reescrito como:

$$V(\phi) = \frac{2N-1}{2N}W_\phi^{\frac{2N}{2N-1}} \quad (3.47)$$

e a densidade de energia (3.45) como:

$$\rho = W_\phi^{\frac{2N}{2N-1}} \quad (3.48)$$

Afim de fazer um estudo na estabilidade linear das soluções, usamos a equação (3.25) para obter a equação de Sturm-Liouville:

$$-\left[\phi'^{2(N-1)}\eta'_n\right]' + \frac{V_{\phi\phi}}{A^2}\eta_n = \frac{\omega_n^2}{A^2}\phi'^{2(N-1)}\eta_n \quad (3.49)$$

com  $A^2$  sendo hiperbolicidade dada pela equação (3.26) e tem forma:

$$A^2 = 2N - 1 \quad (3.50)$$

a hiperbolicidade é constante e sempre será satisfeita, já que nosso modelo deve ter  $N \geq 1$  pela condição de energia nula.

Fazendo uma mudança de variável do tipo:

$$x = \sqrt{2N-1} z \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{W_\phi^{-\frac{N-1}{2N-1}}}{(2N-1)^{\frac{1}{4}}} u_n \quad (3.51)$$

obtemos uma equação do tipo Schrödinger dada pela equação (3.30) com potencial quântico:

$$U(z) = NW_\phi^{-\frac{2N-3}{2N-1}} W_{\phi\phi\phi} - \frac{N(N-2)}{2N-1} W_\phi^{-\frac{4(N-1)}{2N-1}} W_{\phi\phi}^2 \quad (3.52)$$

e modo zero normalizado:

$$u_0(z) = \sqrt{\frac{A}{E}} W_\phi^{\frac{N}{2N-1}} \quad (3.53)$$

onde  $E$  é a energia da solução.

Podemos assumir que esta teoria tenha as mesmas soluções do modelo da equação (2.89), ou seja, soluções tipo kink da forma  $\phi(x) = \text{sgn}(x) \left[ (b|x|+1)^{\frac{1}{a}} - 1 \right]$ . Com isso, construímos uma classe de ponteciais a partir da equação (3.44), que satisfaz a equação de movimento (3.42):

$$V(\phi) = \frac{2N-1}{2N} \left[ \frac{b}{a} (|\phi|+1)^{1-a} \right]^{2N} \quad (3.54)$$

para  $N=1$ , recuperamos o modelo da equação (2.89).

A densidade de energia (3.45) terá forma:

$$\rho(x) = \left[ \frac{b}{a} (b|x|+1)^{\frac{1-a}{a}} \right]^{2N} \quad (3.55)$$

com energia finita apenas para  $a > 2N/(2N-1)$  e será dada por:

$$E = \frac{2b}{a[(2N-1)a-2N]} \quad (3.56)$$

desde que  $b > 0$ .

Fazendo um estudo da estabilidade linear das soluções, obtemos a equação de Sturm-Liouville (3.49), que podemos transformar numa equação tipo Schrödinger pela segunda mudança de variáveis:

$$x = Az \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{1}{\sqrt{E}} \left[ \frac{b}{a} (bA|z| + 1)^{\frac{1-a}{a}} \right]^{1-N} u_n \quad (3.57)$$

onde  $A$  é a hiperbolicidade (3.50). Com potencial quântico:

$$U(z) = \frac{ND^2(a-1)[(N+1)a-N]}{(bA|z|+1)^2} - \frac{2ND(a-1)\delta(z)}{(bA|z|+1)^{\frac{2a-1}{a}}} \quad (3.58)$$

onde  $D = Ab/a$  e seu modo zero segundo a equação (3.53) será:

$$u_0(z) = \sqrt{\frac{A}{E}} \left[ \frac{b}{a} (bA|z| + 1)^{\frac{1-a}{a}} \right]^N \quad (3.59)$$

com  $E$  dado pela equação (3.56).

### 3.3 Modelo Gêmeos

Motivado pelo trabalho [25], que apresenta uma teoria com natureza gêmea ao modelo usual (2.4). Iremos apresentar uma teoria que possui uma família de modelos com natureza gêmea da teoria apresentada na equação (3.37), que inclui o modelo usual (2.4) quando  $N = 1$ . Vamos considerar a seguinte densidade lagrangiana [62]:

$$\mathcal{L} = -V(\phi)F(Y) \quad (3.60)$$

onde  $V(\phi)$  será o potencial que especifica o modelo e  $Y$  é função do campo  $\phi$  e de suas derivadas de primeira ordem, definida como:

$$Y \equiv -\frac{X}{N} \frac{|2X|^{N-1}}{V(\phi)} \quad (3.61)$$

a função  $F(Y) = 1 + Y$  recai no modelo (3.37). Para  $N = 1$  temos o modelo investigado em [26], que para um  $F(Y) = 1 + Y$  recuperamos o modelo usual (2.4).

A equação de movimento segundo a equação (3.3) é dada por:

$$N\partial_\mu \left( V(\phi) \frac{Y}{X} F_Y \partial^\mu \phi \right) + V_\phi (F_Y Y - F) = 0 \quad (3.62)$$

onde  $F_Y = dF/dY$ . O tensor energia-momento (3.6) terá forma:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} V(\phi) F - NV(\phi) F_Y \frac{Y}{X} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \quad (3.63)$$

e em (1,1) dimensões, suas componentes serão:

$$T^{00} = V(\phi) F - NV(\phi) F_Y \frac{Y}{X} \dot{\phi}^2 \quad (3.64a)$$

$$T^{01} = T^{10} = NV(\phi) F_Y \frac{Y}{X} \dot{\phi} \phi' \quad (3.64b)$$

$$T^{11} = -V(\phi) F - NV(\phi) F_Y \frac{Y}{X} \phi'^2 \quad (3.64c)$$

Fazendo uso da condição de energia nula, teremos a restrição  $F_Y \geq 0$ , para um campo geral  $\phi = \phi(x, t)$ , que satisfaça a equação de movimento (3.62).

Vamos agora nos restringir ao caso de soluções estáticas,  $\phi = \phi(x)$ , a equação de movimento (3.10) torna-se:

$$NV(\phi) \frac{Y}{X} [2NF_{YY}Y + (2N-1)F_Y] \phi'' + V_\phi(F - F_Y Y + 2NF_{YY}Y^2) = 0 \quad (3.65)$$

com  $Y = \phi'^{2N}/2NV(\phi)$ . As componentes do tensor energia-momento (3.64) não-nula serão:

$$T^{00} = V(\phi)F \quad (3.66a)$$

$$T^{11} = V(\phi)(2NF_Y Y - F) \quad (3.66b)$$

Usando a equação (3.11), temos a equação de primeira ordem para essa teoria:

$$(2NF_Y Y - F) = \frac{C}{V(\phi)} \quad (3.67)$$

onde  $C$  é o estresse. Note que o lado esquerdo dessa equação é função apenas de  $Y$ , que assumiremos ser uma função inversa  $H^{-1}(Y) = 2NF_Y Y - F$ , para que possamos escrever:

$$\phi'^{2N} = 2NH\left(\frac{C}{V(\phi)}\right)V(\phi) \quad (3.68)$$

No caso de estresse nulo,  $C = 0$ , a relação (3.67) torna-se uma equação algébrica  $F = 2NF_Y Y$ . Não sabemos a forma que a função  $H$  tem, mas assumiremos que  $H(0) = c$ , onde  $c$  seja uma constante real. A equação (3.68) fica:

$$\phi'^{2N} = 2NcV(\phi) \quad (3.69)$$

a solução  $\phi(x)$  dessa equação, corresponde a mesma solução da equação (3.44) reescalada, que denominarei de  $\phi_s(x)$ . Fazendo  $x \rightarrow \sqrt{m}x$ , onde  $m = [c(2N-1)]^{1/N}$ , temos que:

$$\phi(x) = \phi_s(\sqrt{m}x) \quad (3.70)$$

a espessura da solução é dada por  $\delta = \delta_s/\sqrt{m}$ , podendo assim a solução ser mais fina ou mais grossa, conforme o valor de  $c$ . Para que o campo seja real, a constante  $c$  não pode ser negativa e ressaltamos que a equação (3.69) tem essa forma apenas para teorias com estresse nulo.

A densidade de energia (3.66a), no caso de estresse nulo é:

$$\rho(x) = F(c)V(\phi) \quad (3.71)$$

com energia  $E = F(c) \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\phi(x))$ , ou melhor:

$$E = \frac{F(c)}{\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{\infty} dy V(\phi_s(y)) = \frac{(2N-1)F(c)}{2N\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(y) = \frac{(2N-1)F(c)}{2N\sqrt{m}} E_s \quad (3.72)$$

onde  $E_s$  é a energia para  $F = 1 + Y$ .

Usando a função  $W(\phi)$ , escrevemos a equação de primeira ordem (3.17) como:

$$\phi' = F_Y^{-\frac{1}{2N-1}} W_\phi^{\frac{1}{2N-1}} \quad (3.73)$$

com isso, podemos escrever o potencial como:

$$V(\phi) = \frac{F_Y^{-\frac{2N}{2N-1}}}{2Nc} W_\phi^{\frac{2N}{2N-1}} \quad (3.74)$$

e a densidade de energia como:

$$\rho = \frac{F F_Y^{-\frac{2N}{2N-1}}}{2Nc} W_\phi^{\frac{2N}{2N-1}} = F_Y^{-\frac{1}{2N-1}} W_\phi^{\frac{2N}{2N-1}} \quad (3.75)$$

Fazendo um estudo da estabilidade linear das soluções, a partir da equação (3.25), temos:

$$\begin{aligned} & N \left[ V(\phi) \frac{Y}{X} (2N F_{YY} Y + (2N-1) F_Y) \eta' \right]' \\ &= \left[ V_{\phi\phi} (F_Y Y - F) - \frac{V_\phi^2}{V(\phi)} F_{YY} Y^2 + N \left( V_\phi F_{YY} \frac{Y^2}{X} \phi_0' \right)' + \omega_n^2 N V(\phi) F_Y \frac{Y}{X} \right] \eta \end{aligned} \quad (3.76)$$

Na condição de estresse nulo,  $Y = c$  é uma constante e a equação (3.76) se reduz a:

$$- \left[ \phi'^{2(N-1)} \eta'(x) \right]' + c V_{\phi\phi} \eta(x) = \frac{\omega_n^2}{A^2} \phi'^{2(N-1)} \eta(x) \quad (3.77)$$

onde  $A^2$  é a hiperbolicidade definida em (3.26) e tem forma:

$$A^2 = \frac{2N F_{YY} Y + (2N-1) F_Y}{F_Y} \quad (3.78)$$

na condição de estresse nulo  $A^2$  é constante.

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$x = Az \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{F_Y^{-\frac{1}{2(2N-1)}}}{\sqrt{A} W_\phi^{\frac{N-1}{2N-1}}} u_n \quad (3.79)$$

recuperamos a equação (3.30), com potencial quântico:

$$U(z) = \frac{A^2 F_Y^{-\frac{2}{2N-1}}}{2N-1} \left( N \frac{W_{\phi\phi\phi}}{W_\phi^{\frac{2N-3}{2N-1}}} - \frac{N(N-2)}{2N-1} \frac{W_{\phi\phi}^2}{W_\phi^{\frac{4(N-1)}{2N-1}}} \right) \quad (3.80)$$

A natureza gêmea dessa teoria com o modelo (3.37) é evidente. Entretanto existem alguns condições para que essas teorias sejam verdadeiramente gêmeos. Exigi-se que:

- i)  $m = 1$ , para que tenham mesmas soluções (3.70), isso implica que  $c = (2N-1)^{-1}$ ; ii)

$F((2N-1)^{-1}) = 2N/(2N-1)$ , para que a energia (3.72) seja igual; iii)  $F_Y((2N-1)^{-1}) = 1$  para que a densidade de energia (3.64a) seja idêntica; iv)  $F_{YY}((2N-1)^{-1}) = 0$  para que a hiperbolicidade (3.78) mantenha-se inalterada, fazendo com que tenha os mesmos autovalores da equação (3.49). Essa última restrição é chamada de condição forte [26], pois existem modelos gêmeos que não satisfaz tal restrição.

Note que a função  $F(Y) = 1 + Y$  satisfaz todas as exigências, o que já era de se esperar, porém existem outros  $F(Y)$  que obedecem as mesmas [26, 27, 56, 62, 63].

### 3.4 Modelo do Tipo Born-Infeld

Iremos agora estudar um modelo que apresenta natureza gêmea com o modelo usual (2.4), controlada por dois parâmetros,  $M^2$  e  $a$ . Esse modelo é similar aos estudados no contexto de aceleração do universo [19, 20, 21], com alguns conceitos de Born-Infeld, que foi originalmente usado para descrever eletrodinâmica não-linear [64, 65]. Consideraremos a seguinte densidade lagrangiana [66]:

$$\mathcal{L}_a = \frac{M^2}{2(1-a)} \left( 1 - \left( 1 - \frac{2X}{M^2} \right)^a \left( 1 + \frac{2V(\phi)}{M^2} \right)^{1-a} \right) + \frac{1-2a}{1-a} X \quad (3.81)$$

onde  $X$  é o termo canônico e  $V(\phi)$  o potencial.  $M^2$  é uma escala de massa e  $a$  um parâmetro real positivo. Para  $a = 0$  recuperamos o modelo usual  $\mathcal{L}_0 = X - V(\phi)$  e para  $a = 1$ , o modelo torna-se:

$$\mathcal{L}_1 = 2X - \frac{1}{2} (M^2 - 2X) \ln(P) \quad (3.82)$$

onde  $P = (M^2 + 2V)/(M^2 - 2X)$ . Agora para  $a = 1/2$ , nossa lagrangiana terá forma:

$$\mathcal{L}_{1/2} = M^2 - M^2 \sqrt{\left( 1 + \frac{2V(\phi)}{M^2} \right) \left( 1 - \frac{2X}{M^2} \right)} \quad (3.83)$$

esse modelo foi estudado em [25] e é denominado de modelo ATLW em homenagem aos autores (Andrews, Trodden, Lewandowski e Wesley). Essa teoria também apresenta natureza gêmea com o modelo usual (2.4).

No limite de massa  $M^2$  grande, podemos fazer uma expansão na lagrangiana (3.81) e escrever:

$$\mathcal{L}_a = X - V + \frac{a}{M^2} (X - V)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^4}\right) \quad (3.84)$$

quando  $1/M^2 \rightarrow 0$ , a densidade lagrangiana recai no modelo usual (2.4).

A equação de movimento (3.3) tem forma:

$$\partial_\mu \left[ \left( \frac{1-2a+aP^{1-a}}{1-a} \right) \partial^\mu \phi \right] + P^{-a} V_\phi = 0 \quad (3.85)$$

essa equação pode ser reescrita como:

$$G^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \left(1 + \frac{4aX}{M^2 - 2X}\right)P^{-a}V_\phi = 0 \quad (3.86)$$

onde:

$$G^{\mu\nu} = \left(\frac{1 - 2a + aP^{1-a}}{1 - a}\right)g^{\mu\nu} + \frac{2aP^{1-a}}{M^2 + 2X}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \quad (3.87)$$

para  $a = 1$  a equação de movimento (3.85) fica:

$$\partial_\mu[(1 + \ln(P))\partial^\mu\phi] + P^{-1}V_\phi = 0 \quad (3.88)$$

O tensor energia-momento (3.6) é dado por:

$$T_a^{\mu\nu} = \left(\frac{1 - 2a + aP^{1-a}}{1 - a}\right)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_a \quad (3.89)$$

com componentes em (1,1) dimensões:

$$T_a^{00} = \left(\frac{1 - 2a + aP^{1-a}}{1 - a}\right)\dot{\phi}^2 - \mathcal{L}_a \quad (3.90a)$$

$$T_a^{01} = T_a^{10} = \left(\frac{1 - 2a + aP^{1-a}}{1 - a}\right)\dot{\phi}\phi' \quad (3.90b)$$

$$T_a^{11} = \left(\frac{1 - 2a + aP^{1-a}}{1 - a}\right)\phi'^2 + \mathcal{L}_a \quad (3.90c)$$

soluções estáticas e uniformes  $\bar{\phi}_i$ , serão mínimos do potencial  $V_\phi(\bar{\phi}_i) = 0$  e raízes do potencial  $V(\bar{\phi}_i) = 0$ .

Pela condição de energia nula, impomos esse modelo a obedecer:

$$\frac{a(1 - P^{1-a})}{1 - a} \leq 1 \quad (3.91)$$

para  $a \neq 1$ , quando  $a = 1$  temos que  $\ln(P) \geq -1$ .

Considerando o caso estático  $\phi = \phi(x)$ , temos que  $P = (M^2 + 2V)/(M^2 + \phi'^2)$ . A equação de movimento (3.85) torna-se:

$$\left[\left(\frac{1 - 2a + aP^{1-a}}{1 - a}\right)\phi'\right]' = P^{-a}V_\phi \quad (3.92)$$

com  $[(1 + \ln(P))\phi']' = P^{-1}V_\phi$  para  $a = 1$ .

As componentes não-nulas do tensor energia-momento (3.90) para as soluções estáticas serão:

$$T_a^{00} = \frac{(1-2a)\phi'^2 + (M^2 + \phi'^2)P^{1-a} - M^2}{2(1-a)} \quad (3.93a)$$

$$T_a^{11} = \frac{(M^2 + (1-2a)\phi'^2)(1 - P^{1-a})}{2(1-a)} \quad (3.93b)$$

em particular para  $a = 1$ , as componentes são  $T_1^{00} = \phi'^2 + (M^2 + \phi'^2)\ln(P)/2$  e  $T_1^{11} = (\phi'^2 - M^2)\ln(P)/2$ .

Pelo teorema de Derrick, para termos soluções estáveis temos que ter a condição de estresse nulo,  $T_a^{11} = 0$ . Podemos satisfazer essa condição fazendo  $P = 1$ . Nesse caso, a condição de energia nula é válida para qualquer valor de  $a$ . A equação de movimento (3.92) fica  $\phi'' = V_\phi$ , que é a equação de movimento para o modelo usual (2.18), que pode ser integrado para obtermos a equação de primeira ordem:

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = V(\phi) \quad (3.94)$$

a densidade lagrangiana (3.81) e o modelo usual (2.4) admitem as mesmas soluções para estresse nulo.

A densidade de energia (3.93a), fica:

$$\rho(x) = 2V(\phi(x)) \quad (3.95)$$

para qualquer valor de  $a$ . Além de termos as mesmas equações do movimento do modelo usual, também temos a mesma densidade de energia. Dizemos então que essa teoria generalizada é modelo gêmeo do modelo usual (2.4).

A função  $W(\phi)$  dada pela equação (3.17), tem forma:

$$W_\phi = \left( \frac{1-2a+aP^{1-a}}{1-a} \right) \phi' \quad (3.96)$$

e usando a condição de estresse nulo,  $P = 1$ , obtemos uma equação de primeira ordem:

$$\phi' = W_\phi \quad (3.97)$$

substituindo em (3.94) podemos escrever o potencial como:

$$V(\phi) = W_\phi^2 \quad (3.98)$$

e a densidade de energia (3.95) como:

$$\rho(x) = W'^2 \quad (3.99)$$

onde  $W' = dW/dx$ , com energia dada pelos limites assintóticos (3.21), da solução estática da equação de movimento (3.92).

Daremos continuidade ao estudo desse modelo fazendo uma análise na sua estabilidade linear. Pela equação (3.25) temos:

$$\begin{aligned} & - \left[ \left( 1 - \frac{4aV}{M^2 + 2V} \right) \eta_n' \right]' + \left( 1 - \frac{4aV}{M^2 + 2V} \right) \\ & \times \left( V_{\phi\phi} - \frac{4aM^2 V_{\phi}^2}{(M^2 + 2V)(M^2 - 2(2a - 1)V)} \right) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n \end{aligned} \quad (3.100)$$

uma equação de autovalores do tipo Sturm-Liouville. A hiperbolicidade (3.26) na condição de estresse nulo é dada por:

$$A^2 = 1 - \frac{4aV}{M^2 + 2V} \geq 0 \quad (3.101)$$

isso implica que  $M^2 \geq 2(2a - 1)V$ . Apesar de terem as mesmas soluções e a mesma densidade de energia, o estudo a estabilidade linear dessa teoria se diferencia do modelo usual (2.4), o que nos permite distingui-lás. Vamos fazer a transformação de variáveis:

$$dz = \frac{dx}{A} \quad \text{e} \quad u_n = \eta_n \sqrt{A} \quad (3.102)$$

para transformar a equação (3.100) numa equação de Schrödinger (3.30) com potencial quântico dado por:

$$\begin{aligned} U(z) = & \left( 1 - \frac{2a(3M^2 + 4V)V}{(M^2 + 2V)^2} \right) V_{\phi\phi} \\ & - \frac{aM^2(5M^4 - 6(3a - 2)M^2V - 4(2a - 1)V^2)}{(M^2 + 2V)^3(M^2 - 2(2a - 1)V)} V_{\phi}^2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

é fácil ver que para  $a = 0$  recuperamos o potencial de estabilidade usual (2.47). Com modo zero dado por:

$$u_0(z) = \mathcal{N} \left[ \frac{M^2 + 2V}{M^2 - 2(2a - 1)V} \right]^{\frac{1}{4}} \phi_{0z} \quad (3.104)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização.

Verificamos que essa teoria suporta as mesmas soluções do modelo usual e a mesma densidade de energia, se diferenciando apenas no estudo da estabilidade linear. Além disso, esse modelo é uma generalização do modelo ATLW [25].

## Modelo Usual com Termo de Cuscuton

Iremos apresentar uma nova classe de modelos com ação de dinâmica não usual. Essa teoria tem densidade lagrangiana da forma usual (2.4) com um termo extra, chamado de *Cuscuton* [67, 68]. Esse modelo pode ser usado para descrever a energia escura. Cuscuton as vezes é considerado uma teoria de evolução mínima para energia escura, por não conter dinâmica interna.

Apresentaremos seu formalismo para campos escalar real em (1+1) dimensões no espaço-tempo na métrica de Minkowski. Em seguida faremos um estudo da estabilidade linear de suas soluções estáticas. Concluiremos com alguns exemplos ilustrativos com uso do potencial  $\phi^4$ .

### 4.1 O Modelo

Estamos trabalhando em um modelo [69], onde sua densidade lagrangiana é dada por :

$$\mathcal{L} = X + \frac{2f(\phi)X}{\sqrt{|2X|}} - V(\phi) \quad (4.1)$$

onde  $X$  é o termo de dinâmica usual,  $f(\phi)$  é uma função qualquer do campo escalar  $\phi$  e  $V(\phi)$  o potencial, geralmente  $f(\phi)$  e  $V(\phi)$  mostra como o campo escalar auto-interage. Para  $f(\phi) = 0$  recuperamos o modelo usual (2.4).

A equação de movimento (3.3) é dada:

$$\partial_\mu \left[ \left( 1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \right) \partial^\mu \phi \right] = \frac{2f_\phi X}{\sqrt{|2X|}} - V_\phi \quad (4.2)$$

expandindo, podemos escrever como:

$$\left[ \left( 1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \right) g^{\mu\nu} - \frac{f(\phi)}{2X\sqrt{|2X|}} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \right] \partial_\mu \partial_\nu \phi + V_\phi = 0 \quad (4.3)$$

Pela equação (3.6) o tensor energia-momento tem forma:

$$T^{\mu\nu} = \left( 1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \right) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.4)$$

com componentes em (1,1) dimensões:

$$T^{00} = \left(1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}}\right) \dot{\phi}^2 - X - \frac{2f(\phi)X}{\sqrt{|2X|}} + V(\phi) \quad (4.5a)$$

$$T^{01} = T^{10} = \left(1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}}\right) \dot{\phi}\phi' \quad (4.5b)$$

$$T^{11} = \left(1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}}\right) \phi'^2 + X + \frac{2f(\phi)X}{\sqrt{|2X|}} - V(\phi) \quad (4.5c)$$

soluções estáticas e uniformes  $\bar{\phi}_i$ , são mínimos do potencial  $V(\bar{\phi}_i) = 0$ . Além disso, impomos que essas soluções sejam raízes do potencial  $V(\bar{\phi}_i) = 0$  para que tenhamos energia nula.

Pela condição energia nula impomos nosso modelo a obdecer a restrição:

$$1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X|}} \geq 0 \quad (4.6)$$

para um  $\phi = \phi(x, t)$  que satisfaça a equação de movimento (4.2).

Para soluções estáticas  $\phi = \phi(x)$ , a equação de movimento (4.3) se reduz a:

$$\phi'' = V_\phi \quad (4.7)$$

veja que a equação de movimento não depende de  $f(\phi)$ , ou seja, para um determinado potencial  $V(\phi)$  teremos um conjunto de soluções para qualquer  $f(\phi)$ . Além disso, esse modelo generalizado suporta as mesmas soluções do modelo usual (2.4).

As componentes não-nula do tensor energia-momento (4.5) serão:

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2}\phi'^2 + f(\phi)|\phi'| + V(\phi) \quad (4.8a)$$

$$T^{11} = p = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \quad (4.8b)$$

que são respectivamente a densidade de energia e o estresse das soluções. Com energia dada pela integração em todo o espaço:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T^{00} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + f(\phi)|\phi'| + V(\phi) \right) \quad (4.9)$$

apesar desse modelo ter as mesmas soluções do modelo usual, a energia dessas soluções são diferentes e elas dependem de  $f(\phi)$ . Observe que para termos energia finita, as soluções estáticas devem satisfazer as mesmas condições do modelo usual (2.22), onde  $\phi'(x) \rightarrow 0$  e  $\phi(x) \rightarrow v_i$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , desde que  $v_i$  sejam mínimos do potencial.

Podemos integrar a equação de movimento (4.7) e obter uma equação de primeira ordem:

$$\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) = C \quad (4.10)$$

onde  $C$  é uma constante de integração e pode ser identificado como o estresse pela equação (4.8b). Pelo teorema de Derrick generalizado, temos a condição de estresse nulo para que tenhamos soluções estáveis (3.15). A equação (4.10) torna-se:

$$\phi'^2 = 2V(\phi) \quad (4.11)$$

Reescrevemos a densidade de energia (4.8a) como:

$$\rho = \sqrt{2V} \left( \sqrt{2V} + f(\phi) \right) \quad (4.12)$$

diferentemente da equação de movimento a densidade de energia depende explicitamente de  $f(\phi)$ .

Pela definição da função  $W(\phi)$  dada pela equação (3.17), temos que:

$$W_\phi = \sqrt{2V} + f(\phi) \quad (4.13)$$

e podemos obter a energia de maneira bastante simples, fazendo:

$$E = |W(v_i) - W(v_j)| \quad (4.14)$$

com  $v_i$  e  $v_j$  mínimos distintos do potencial, degenerados de energia. Para que a condição de energia nula seja válida, temos que  $W_\phi \geq 0$ , portanto a função  $W$  é monotônica na região em que a solução existe.

## 4.2 Estabilidade Linear

Fazendo pequenas perturbações na solução estática, podemos fazer um estudo de sua estabilidade linear. A partir da equação de estabilidade (3.25), temos que:

$$-\eta_n'' + V_{\phi\phi}\eta_n = \omega_n^2 A^{-2}\eta_n \quad (4.15)$$

onde  $A^2$  é a hiberbolicidade (3.26) e tem forma:

$$A^2 = \left( 1 + \frac{f(\phi)}{\sqrt{|2X_s|}} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

a equação (4.15) é uma equação de Sturm-Liouville e torna-se uma equação de Schrödinger para  $f(\phi) = 0$ . Apesar de não ser uma equação de Schrödinger, ainda teremos o modo zero da mesma maneira como no modelo usual:

$$\eta_0(x) = \mathcal{N}\phi'_0(x) \quad (4.17)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização e  $\phi'_0 = d\phi_0/dx$ , para  $\phi_0(x)$  solução da equação de movimento (4.7).

Transformamos a equação de Sturm-Liouville numa equação tipo Schrödinger (3.32), fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$dz = \frac{dx}{A} \quad \text{a} \quad u_n = \frac{\eta_n}{\sqrt{A}} \quad (4.18)$$

teremos:

$$-u_{nzz} + U(z)u_n = \omega_n^2 u_n \quad (4.19)$$

com potencial quântico  $U(z)$  dado por:

$$U(z) = \frac{\left(A^{-\frac{1}{2}}\right)_{zz}}{A^{-\frac{1}{2}}} + \frac{V_{\phi\phi}}{A^{-2}} \quad (4.20)$$

e modo zero:

$$u_0(z) = \mathcal{N} \sqrt{\frac{2V}{A}} \quad (4.21)$$

podemos reconstruir o potencial  $U(z)$  com uso do modo zero, a partir da equação (4.19) para  $\omega_0^2 = 0$ :

$$U(z) = \sqrt{\frac{A}{2V}} \left( \sqrt{\frac{2V}{A}} \right)_{zz} \quad (4.22)$$

que é equivalente a equação (4.20). Se o modo zero for o estado fundamental, podemos fatorar a equação (4.19) da seguinte maneira:

$$\left[ -\frac{d}{dz} + g(z) \right] \left[ \frac{d}{dz} + g(z) \right] u = \omega_n^2 u \quad (4.23)$$

onde:

$$g(z) = \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{2V}{A}} \right) \right]_z \quad (4.24)$$

o potencial (4.22) pode ser escrito como  $U^+(z) = g^2 + g_z$  com parceiro supersimétrico dado por  $U^-(z) = g^2 - g_z$ .

### 4.3 Exemplos

Seguiremos com alguns exemplos para essa teoria. Por questão de simplicidade, escolhemos o modelo  $\phi^4$ . Potencial da forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2 \quad (4.25)$$

com tem simetria  $Z_2$ , possuindo com dois mínimos degenerados de energia em  $\phi = \pm 1$  e um máximo local em  $\phi_0 = 0$ .

Resolvendo equação de movimento (4.7) dessa teoria, escolhemos a solução tipo kink dada por:

$$\phi(x) = \tanh(x) \quad (4.26)$$

Para  $f(\phi) = 0$ , recuperamos o modelo usual (2.4) e sua densidade de energia (4.8a) será:

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x) \quad (4.27)$$

com energia  $E = 4/3$  e potencial de estabilidade:

$$U(x) = 4 - 6\text{sech}^2(x) \quad (4.28)$$

potencial Pöschl-Teller modificado.

#### 4.3.1 Exemplo 1

Como primeiro exemplo, vamos pegar o caso em que a função  $f(\phi)$  é uma constante,  $f(\phi) = f_0$ . Pela condição de energia nula, a constante  $f_0$  tem que ser não negativo,  $f_0 \geq 0$ .

A densidade de energia (4.8a) para solução (4.26) será:

$$\rho = (1 - \phi^2)(1 - \phi^2 + f_0) = \text{sech}^2(x)(\text{sech}^2(x) + f_0) \quad (4.29)$$

com energia  $E = 4/3 + 2f_0$ .

A função  $W(\phi)$  é obtido pela integração da equação (4.13) e tem forma:

$$W(\phi) = (1 + f_0)\phi - \frac{1}{3}\phi^3 = (1 + f_0)\tanh(x) - \frac{1}{3}\tanh^3(x) \quad (4.30)$$

A hiperbolicidade (4.16) é satisfeita e é dada por:

$$A^2 = \left(1 + \frac{f_0}{|\phi'|}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + f_0 \cosh^2(x)} \quad (4.31)$$

com equação de estabilidade linear (4.15):

$$\eta'' + (4 - 6\text{sech}^2(x))\eta = (1 + f_0 \cosh^2(x))\omega^2\eta \quad (4.32)$$

sabemos que nossa solução é estável, pois o modo zero  $\eta_0 \propto \text{sech}^2(x)$ , é uma função sem nó.

### 4.3.2 Exemplo 2

Para não sobrecarregar a notação, a partir de agora irei definir que  $T \equiv \tanh(x)$  e  $S \equiv \text{sech}(x)$ . Introduziremos agora uma função  $f(\phi)$ , que depende de um parâmetro  $a$ :

$$f_a(\phi) = \frac{(a-1)\phi^2(1-\phi^2)}{a-(a-1)\phi^2} \quad (4.33)$$

na Figura 4.1(a) temos os gráficos da função  $f_a(\phi)$  para diversos valores de  $a$ . Pela condição de energia nula, temos que:

$$\frac{a}{a-(a-1)\phi^2} \geq 0 \quad (4.34)$$

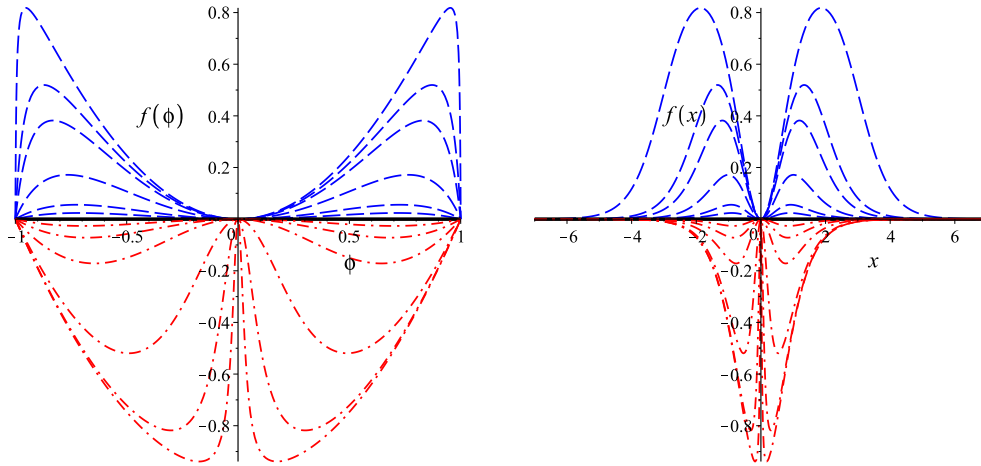
que so é válida para  $a > 0$ . Desconsideramos o caso de  $a = 0$ , pois a densidade de energia seria nula, mas é relevante avaliarmos pequenos valores de  $a$ , ou seja  $a \rightarrow 0^+$ , onde essa condição continua válida,  $a\phi^{-2} \geq 0$ .

Quando  $a = 1$ , temos que  $f_1(\phi) = 0$ , recuperando o modelo usual. Já para pequenos valores de  $a$ , a função aproxima-se de uma parábola,  $f_{0+} \approx \phi^2 - 1$ , e para valores muito alto de  $a$  também,  $a \rightarrow \infty$ , temos que  $f_\infty(\phi) = \phi^2$ .

Podemos ainda escrever  $f_a(x)$  para solução kink (4.26) como:

$$f_a(x) = \frac{(a-1)S^2(1-S^2)}{1+(a-1)S^2} \quad (4.35)$$

ilustrado na Figura 4.1(b).



(a) Gráfico da função  $f_a(\phi)$  dada pela equação (4.33) para  $\phi$  de -1 a 1.

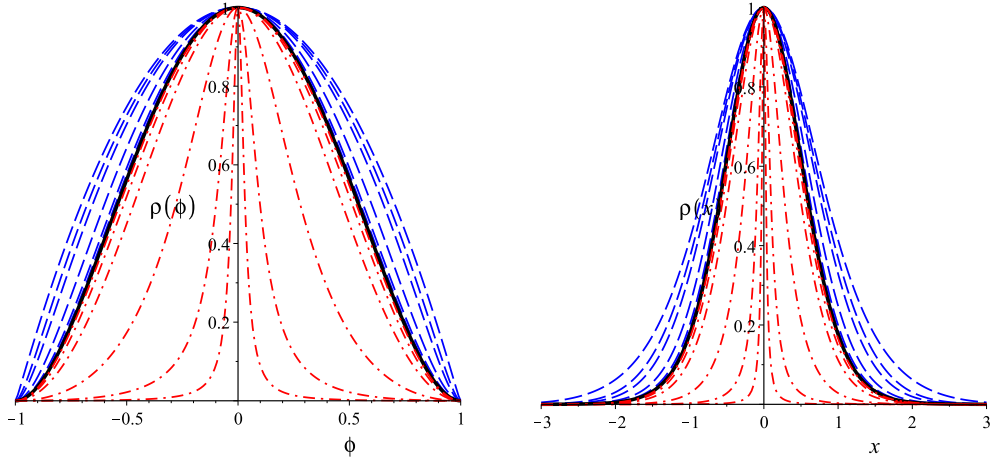
(b) Função  $f_a(x)$  da equação (4.35) para variável  $x$ .

Figura 4.1: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.1, 0.01$  e  $0.001$ .

A densidade de energia (4.8a) é dada por:

$$\rho_a = \frac{a(1 - \phi^2)^2}{a - (a - 1)\phi^2} = \frac{aS^4}{1 + (a - 1)S^2} \quad (4.36)$$

para  $a = 1$  a densidade de energia é  $\rho_1 = \text{sech}^4(x)$ , com energia  $E = 4/3$ . Para  $a \rightarrow 0^+$  a energia vai diminuindo até ser nula, a densidade de energia tende a zero  $\rho_{0+} \rightarrow 0$ . Já para  $a \rightarrow \infty$ , a energia vai aumentando, com densidade de energia  $\rho_\infty = \text{sech}^2(x)$  e energia máxima  $E = 2$ . Os gráficos da densidade de energia para alguns valores de  $a$  podem ser vistos na Figura 4.2.



(a) Densidade de energia (4.36) em função do campo  $\phi$ . Com pico centrado na origem e valor máximo igual a unidade. (b) Densidade de energia (4.36) para variável  $x$ .

Figura 4.2: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.1, 0.01$  e  $0.001$ .

Escrevemos a função  $W_a(\phi)$  como:

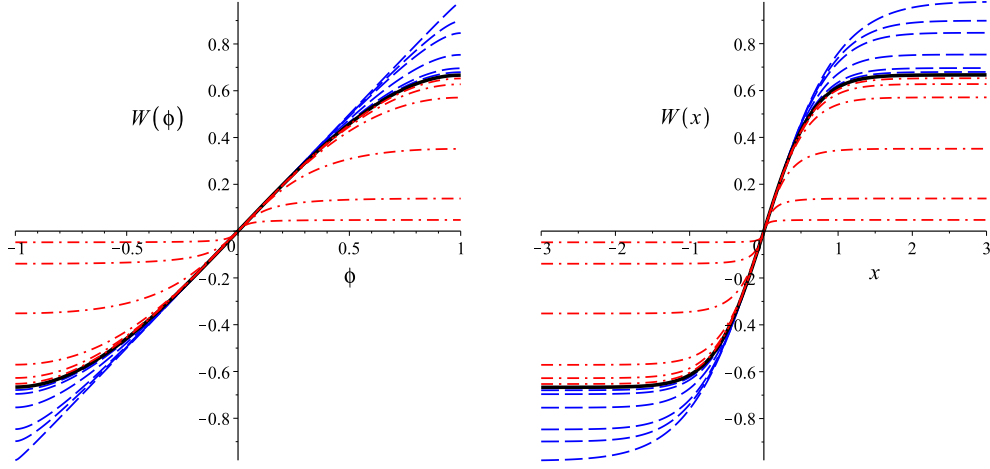
$$W_a(\phi) = \frac{a\phi}{a-1} + \frac{\sqrt{a}M(\phi)}{|a-1|^{\frac{3}{2}}} \quad (4.37)$$

onde:

$$M(\phi) = \begin{cases} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}\phi\right), & \text{para } a < 1 \\ -\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a}}\phi\right), & \text{para } a > 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

com  $W_1(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3$  para  $a = 1$ ,  $W_{0+}(\phi) \rightarrow 0$  para  $a$  próximo de zero  $a \rightarrow 0^+$  e  $W_\infty(\phi) = \phi$  para  $a \rightarrow \infty$ . Ilustrado na Figura 4.3.

A hiperbolicidade (4.16) será:

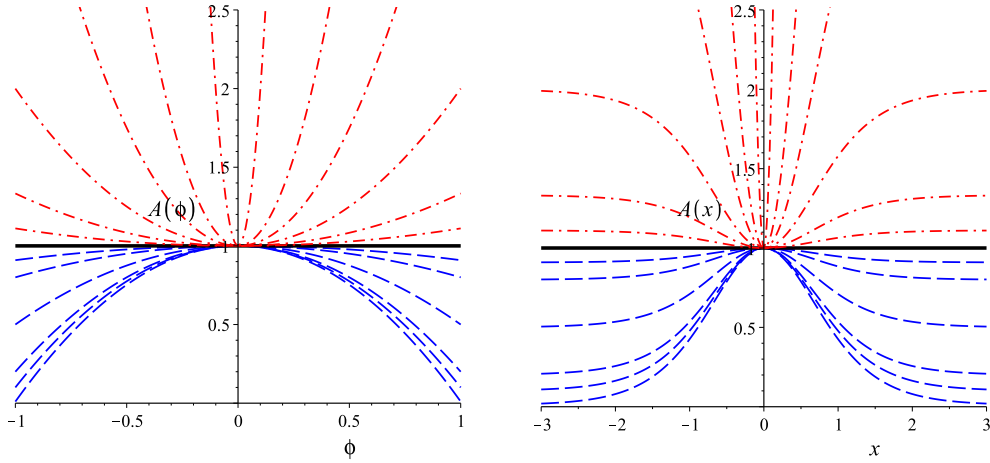


(a) Função  $W_a(\phi)$  dada pela equação (4.37). (b) Função  $W_a(x)$  para solução kink (4.26).

Figura 4.3: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.1, 0.01$  e  $0.001$ .

$$A_a^2 = 1 - \frac{a-1}{a} \phi^2 = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a} S^2 \quad (4.39)$$

onde  $A_1^2 = 1$  para  $a = 1$  e  $A_\infty^2 = \text{sech}^2(x)$  para  $a \rightarrow \infty$ . Mostrado na Figura 4.4.



(a) Hiperbolicidade (4.39) para  $\phi$  entre -1 e 1.

(b) Hiperbolicidade em função de  $x$ .

Figura 4.4: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1$  e  $0.01$ .

Sabemos que ao fazer estudo da estabilidade linear das soluções, obtemos uma equa-

ção do tipo Sturm-Liouville, que pode ser transformada numa equação de Schrödinger. Usando a equação (4.18), obtemos:

$$u_n(z) = \left( \frac{a}{1 + (a-1)S^2} \right)^{\frac{1}{4}} \eta_n(x) \quad (4.40a)$$

$$z = \sqrt{a} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{\sinh(x)}{\sqrt{a}} \right) \quad (4.40b)$$

Definiremos também que:

$$S_a \equiv \operatorname{sech} \left( \frac{z}{\sqrt{a}} \right) \quad \text{e} \quad T_a \equiv \tanh \left( \frac{z}{\sqrt{a}} \right) \quad (4.41)$$

com uso das equações (4.40) e (4.17) conseguimos determinar o modo zero do novo potencial de estabilidade sem sabermos a sua forma:

$$u_0^+(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} S_a^2 \left[ (1-a)S_a^2 + a \right]^{-\frac{3}{4}} \quad (4.42)$$

A partir da equação (4.24) obtemos  $g_a(z)$ :

$$g_a(z) = -\frac{1}{2} T_a \frac{((a-1)S_a^2 - 4a)}{\sqrt{a}((a-1)S_a^2 - a)} \quad (4.43)$$

note que para  $a = 1$ , temos  $g_1(z) = -2 \tanh(z)$  e para  $a \rightarrow \infty$ , temos  $g_\infty(z) = -3z/(2z^2 + 2)$ . Escrevemos o potencial de estabilidade da equação (4.20) como:

$$U_a^+(z) = -\frac{1}{4} \frac{3(a-1)^2 S_a^6 - (7a-1)(a-1)S_a^4 + 4a(5a+1)S_a^2 - 16a^2}{a((a-1)S_a^2 - a)^2} \quad (4.44)$$

e seu parceiro supersimétrico como:

$$U_a^-(z) = \frac{1}{4} \frac{(a-1)^2 S_a^6 + (11a-1)(a-1)S_a^4 - 4a(7a-5)S_a^2 + 16a^2}{a((a-1)S_a^2 - a)^2} \quad (4.45)$$

os gráficos do potencial (4.44) e de seu parceiro supersimétrico (4.45) podem ser visualizados na Figura 4.5.

Para  $a = 1$ , temos que  $u(z) = \eta(x)$  e  $z = x$  com potencial de estabilidade  $U(z) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(z)$ . Já para  $a \rightarrow \infty$ , a equação (4.40) torna-se:

$$u_n(z) = \sqrt{\cosh(x)} \eta_n(x) \quad (4.46a)$$

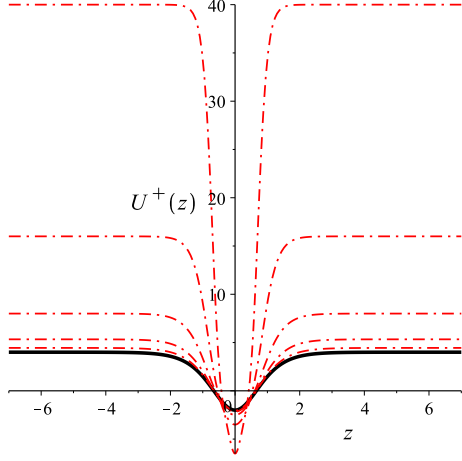
$$z = \sinh(x) \quad (4.46b)$$

com potencial de estabilidade:

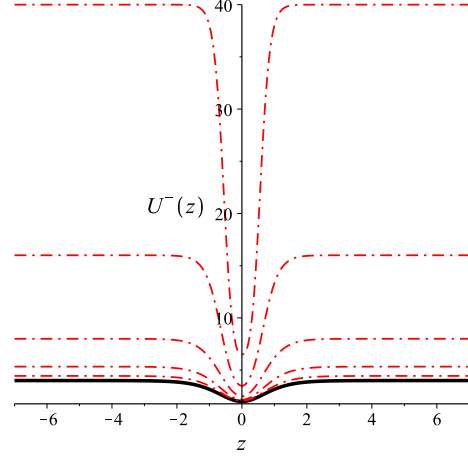
$$U(z) = \frac{3}{4} \frac{5z^2 - 2}{(z^2 + 1)^2} \quad (4.47)$$

obtemos o potencial vulcão, que apresenta apenas um estado ligado, o modo zero:

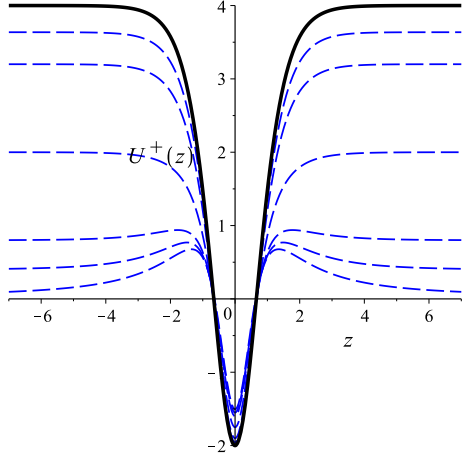
$$u_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2 + 1)^{\frac{3}{4}}} \quad (4.48)$$



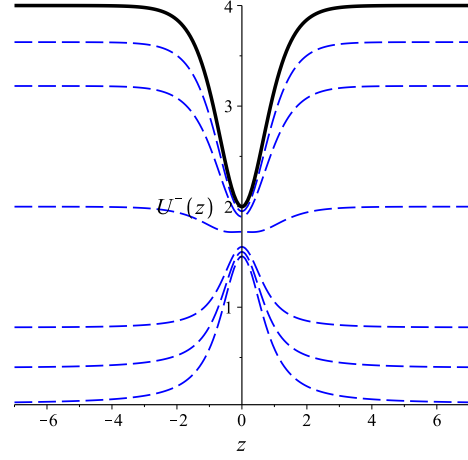
(a) Gráficos do potencial de estabilidade (4.44) para  $0 < a \leq 1$ .



(b) Parceiro supersimétrico (4.45) para  $a \leq 1$ .



(c) Gráficos do potencial de estabilidade (4.44) para  $a \geq 1$ .



(d) Parceiro supersimétrico (4.45) para  $a \geq 1$ .

Figura 4.5: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = 0.9, 0.75, 0.5, 0.25$  e  $0.1$ .

### 4.3.3 Exemplo 3

Um outro exemplo de função  $f(\phi)$  dependente de um parâmetro  $a$  é dada por:

$$f_a(\phi) = \frac{(a-1)\phi^2(1-\phi^2)((a+1)\phi^2-2a)}{(a-\phi^2)^2} \quad (4.49)$$

mostrado na Figura 4.6. Usando a condição de energia nula, impomos que:

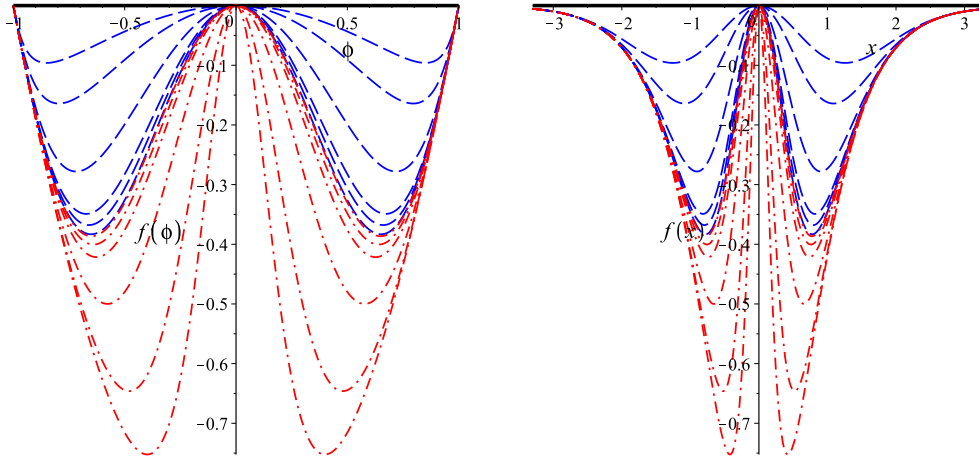
$$\frac{a^2(1-\phi^2)}{(a-\phi^2)^2} \geq 0 \quad (4.50)$$

sendo válida para qualquer valor de  $a$ . Porém descartaremos os valores de  $0 \leq a < 1$ , pois, para  $a = 0$  temos energia nula e para  $0 < a < 1$  a energia diverge. Recuperamos novamente o modelo usual para  $a = 1$ , já que  $f_1(\phi) = 0$ . Quando  $a \rightarrow \pm\infty$ , temos  $f_{\pm\infty}(\phi) = -\phi^2(1-\phi^2)(2-\phi^2)$ . Já para valores próximos de zero pelo lado esquerdo,  $a \rightarrow 0^-$ , a função aproxima-se de uma parábola  $f_{0^-}(\phi) \approx \phi^2 - 1$ .

Exprimimos  $f_a(x)$  para solução (4.26), como:

$$f_a(x) = \frac{(a^2-1)S^6 - 2(a-1)S^4 - (a-1)^2S^2}{(S^2 + (a-1))^2} \quad (4.51)$$

também pode ser visualizado na figura 4.6.



(a) Função  $f_a(\phi)$  para diversos valores de  $a$  dada pela equação (4.49). (b) Função  $f_a(x)$  dada pela equação (4.51).

Figura 4.6: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ .

Com densidade de energia (4.8a) da forma:

$$\rho_a = \frac{a^2(1-\phi^2)^4}{(a-\phi^2)^2} = \frac{a^2S^8}{(S^2 + (a-1))^2} \quad (4.52)$$

onde a densidade de energia será  $\rho_1 = \text{sech}^4(x)$  com energia máxima  $E = 4/3$ , para  $a = 1$ . A energia decresce quando o valor de  $a$  cresce até atingir uma energia  $E = 32/35$ , quando  $a \rightarrow \infty$ , com densidade de energia  $\rho_1 = \text{sech}^4(x)$ . Para altos valores negativos de  $a$ ,  $a \rightarrow -\infty$ , teremos a mesma densidade de energia que para  $a \rightarrow \infty$  e vai reduzindo quando  $a$  se aproxima de zero,  $a \rightarrow 0^-$ , onde a densidade de energia praticamente zera,  $\rho_{0-} \approx 0$ , sendo nula em  $a = 0$ . Os gráficos da densidade de energia podem ser vistos na Figura 4.7.

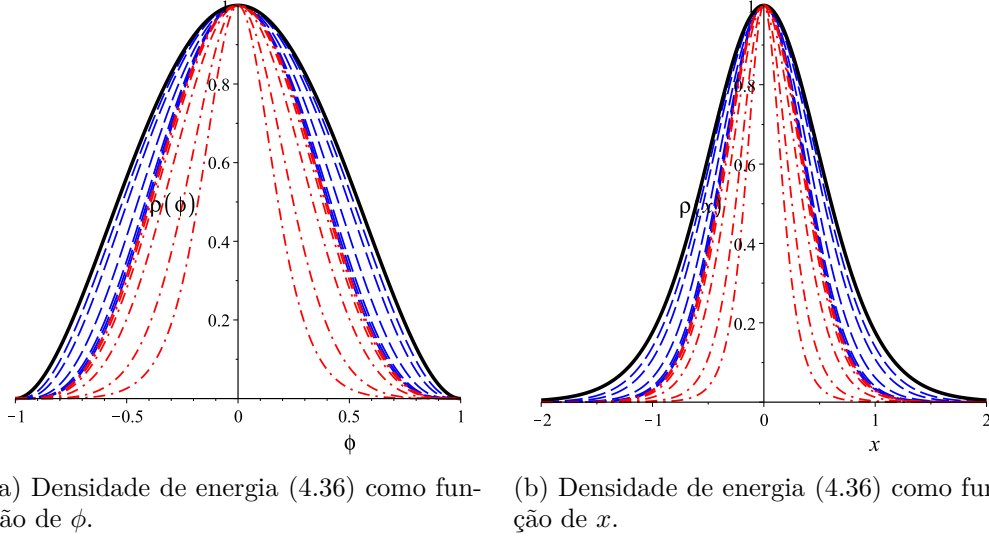


Figura 4.7: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ .

A função  $W_a(\phi)$  dessa modelo será:

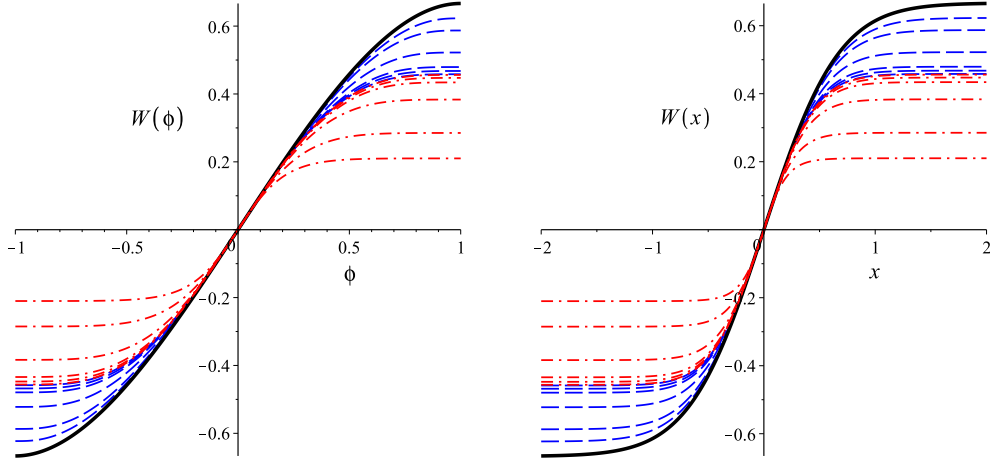
$$\begin{aligned}
 W_a(\phi) = & -\frac{a^2}{3}\phi^3 - a^2(2a-3)\phi + \frac{a(a-1)^3}{2(a-\phi^2)}\phi \\
 & + \frac{\sqrt{a}}{2}(a-1)^2(5a+1) \operatorname{arctanh}\left(\frac{\phi}{\sqrt{a}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

onde para  $a = 1$  a função torna-se  $W_1(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3$ , para  $a \rightarrow \pm\infty$  será  $W_{\pm\infty}(\phi) = -\frac{1}{7}\phi^7 + \frac{3}{5}\phi^5 - \phi^3 + \phi$  e para  $a \rightarrow 0^-$  temos  $W_{0-}(\phi) \approx 0$ . Ilustrado na Figura 4.8.

Com hiperbolicidade (4.16) dada por:

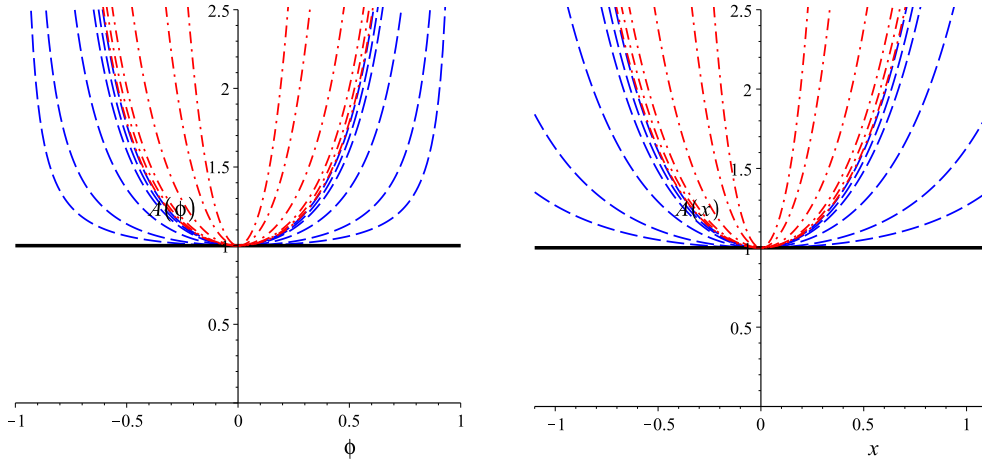
$$A^2 = \frac{(a-\phi^2)^2}{a^2(1-\phi^2)^2} = \frac{(S^2+a-1)^2}{a^2S^4} \tag{4.54}$$

onde  $A_1^2 = 1$  para  $a = 1$  e  $A_{\pm\infty}^2 = \text{sech}(x)^{-4}$  para  $a \rightarrow \pm\infty$ . Visualizamos seus gráficos na Figura 4.9.



(a) Função  $W_a(\phi)$  dada pela equação (4.53). (b) Função  $W_a(x)$  da equação (4.53) para a solução (4.26).

Figura 4.8: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ .



(a) Hiperbolicidade (4.54) como função de  $\phi$ . (b) Hiperbolicidade (4.54) como função de  $x$ .

Figura 4.9: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ .

Utilizando as equações (5.21), adquirimos:

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{aS^2}{S^2 + (a-1)}} \eta_n(x) \quad (4.55a)$$

$$z = \sqrt{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\tanh(x)}{\sqrt{a}}\right) \quad (4.55b)$$

a variável  $z$  é limitada entre  $z = \pm\sqrt{a} \operatorname{arctanh}(1/\sqrt{a})$  para  $a > 1$  e  $z = \pm\sqrt{|a|} \operatorname{arctan}(1/\sqrt{|a|})$  para  $a < 0$ . Apenas quando  $a = 1$  a variável  $z \rightarrow \pm\infty$ , que é o modelo usual. Como pode ser visto na Figura 4.10.

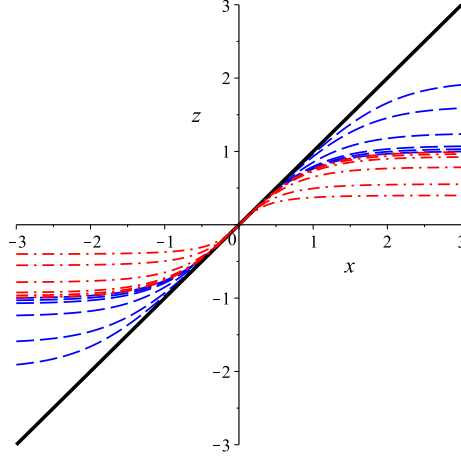


Figura 4.10: Variável  $z$  dada pela equação (4.55b). A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2, 5, 10$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -10, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ .

Com uso das equações (4.55a) para  $n = 0$  e (4.24), obtemos a função  $g_a(z)$  para esse exemplo:

$$g_a(z) = -T_a \frac{(2aS_a^2 + (a-1))}{\sqrt{a}(aS_a^2 - (a-1))} \quad (4.56)$$

onde  $g_1(z) = -2 \tanh(z)$  para  $a = 1$  e  $g_{\pm\infty}(z) = 3z/(z^2 - 1)$ . O potencial de estabilidade resultará em:

$$U_a^+(z) = -\frac{6a^2S_a^6 - a(7a-3)S_a^4 + 2a(a-1)S_a^2 - (a-1)^2}{a(aS_a^2 - (a-1))^2} \quad (4.57)$$

com modo zero:

$$u_0^+(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} S_a^2 [(1-a)S_a^{-2} + a]^{3/2} \quad (4.58)$$

e o parceiro supersimétrico será:

$$U_a^-(z) = -\frac{2a^2S_a^6 + a(7a-11)S_a^4 - 2(4a+1)(a-1)S_a^2 - (a-1)^2}{a(aS_a^2 - (a-1))^2} \quad (4.59)$$

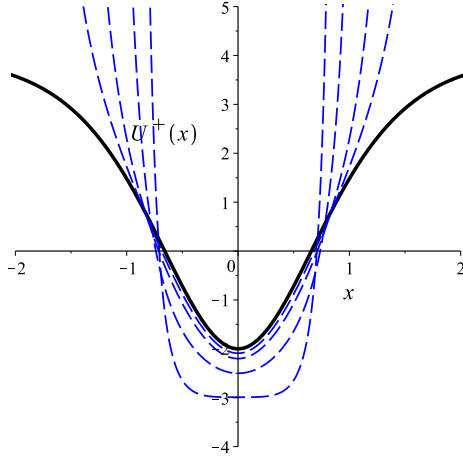
os potenciais (4.57) e (4.59) são mostrados na Figura 4.11 para diversos valores de  $a$ .

Para  $a = 1$ , o potencial de estabilidade será o Pöschl-Teller modificado (4.28). Já para  $a \rightarrow \pm\infty$ , temos o potencial da forma:

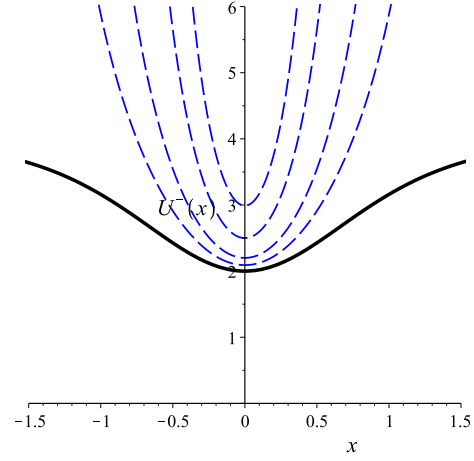
$$U(z) = \frac{3(2z^2 - 1)}{(z^2 - 1)^2} \quad (4.60)$$

e seu respectivo modo zero:

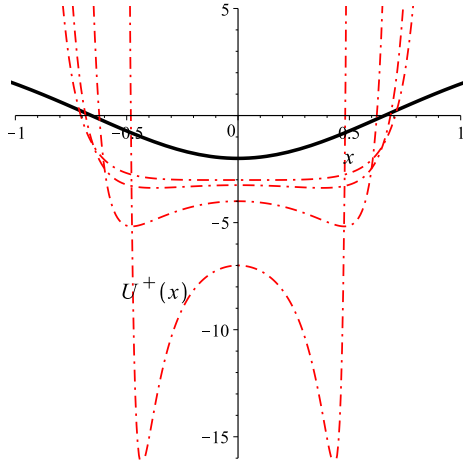
$$u_0(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.61)$$



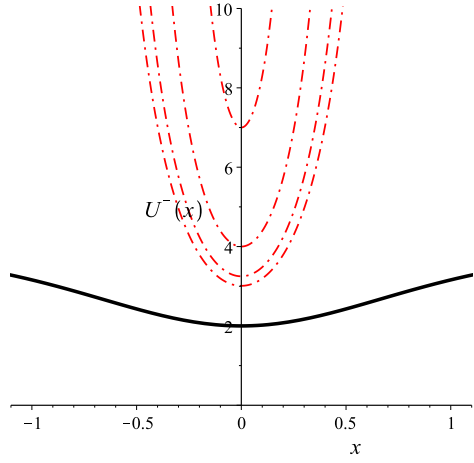
(a) Potencial de estabilidade (4.57) para  $a > 1$ .



(b) Parceiro supersimétrico do potencial (4.57), dado pela equação (4.59) para  $a > 1$ .



(c) Potencial de estabilidade (4.57) para  $a < 0$ .



(d) Parceiro supersimétrico do potencial (4.57), dado pela equação (4.59) para  $a < 0$ .

Figura 4.11: A linha preta sólida é para  $a = 1$ , as linhas azul com traços são para  $a = 1.1, 1.25, 2$  e  $100$  e as linhas vermelha com traços e pontos são para  $a = -100, -4, -1, -0.25$  e  $-0.1$ .

Os números de estados ligados podem ser encontrados numericamente para todos os exemplos estudados neste capítulo.

## Conclusões

Nessa dissertação expomos diversos modelos de campos escalares, tanto para teorias com dinâmica usual como também para teorias com dinâmica generalizada  $\mathcal{L}(\phi, X)$ . Apresentamos todo formalismo generalizado, onde vimos que as equações são muito mais complicadas, porém ainda é possível obtermos soluções analíticas e fisicamente aceitáveis. Apesar dos modelos generalizados apresentarem resultados distintos do usual, existem teorias que suportam a mesma estrutura de defeito. Tais teorias são denominadas gêmeas, pois apresentam mesmas soluções, densidades de energia e potencial de estabilidade, exceto para o Born-Infeld-Like, como vimos.

Finalizamos com um novo modelo, ainda em desenvolvimento, com termo de Cuscuton na densidade lagrangiana usual. Esse modelo apresenta a mesmas soluções do modelo usual e se diferem nas densidades de energia e no potencial de estabilidade. Com esse modelo obtemos uma classe de potenciais quânticos juntamente com seus respectivos modos zeros. Esses potenciais quânticos ainda podem ser melhor investigados, analisando seus estados ligados e de espalhamento com auxílio do seu parceiro supersimétrico.

Nossos estudos podem ser estendidos ao mundo brana, que são soluções de defeitos do tipo paredes de domínio imerso em dimensões extras. Ao fazer o estudo da estabilidade linear das soluções para modelos generalizados, obtemos uma equação de Sturm-Liouville, estamos interessados em fatorar essa equação de maneira análoga a fatorização da equação de Schrödinger.

# Referências Bibliográficas

- [1] RAJARAMAN, R. *Solitons and Instantons: A Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland, (1989).
- [2] VILENKIN, A.; SHELLARD E. P. S. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, (1994).
- [3] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological Solitons*, Cambridge University Press, (2004).
- [4] VACHASPATI, T. *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, (2006).
- [5] WALGRAEF, D. *Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics, Chemistry and Materials Science*, Springer, (1997).
- [6] KIBBLE, T. W. B. *Topology of Cosmic Domains and Strings*, J. Phys. A **9**, 1387, (1976).
- [7] ZELDOVICH, Y. B.; KOBZAREV, I. Y.; OKUN, L.B. *Cosmological Consequences of a Spontaneous Breakdown of a Discrete Symmetry*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67**, 3, (1974).
- [8] BRAY, A. J. *Theory of Phase-Ordering Kinetics*, Advances in Physics **51**, 481, (2002).
- [9] EMMERICH, H. *Advances of and by Phase-Field Modelling in Condensed-Matter Physics*, Advances in Physics **57**, 1, (2008).
- [10] GLAZIER, J. A.; WEAIRE, D. *The Kinetic of Cellular Patterns*, J. Phys.: Condens. Matter **4**, 1867, (1992).
- [11] WEAIRE, D.; HUTZLER, S. *The Physics of Foams*, Oxford University Press, (2000).
- [12] KIM, S. G.; KIM, D. I.; KIM, W. T.; PARK, Y. B. *Computer Simulations of Two-Dimensional and Three-Dimensional Ideal Grain Growth*, Physical Review E **74**, 061605, (2006).
- [13] DERRICK, G. H. *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, Journal of Mathematical Physics **5**, 1252, (1964).

- [14] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES R. *New Global Defect Structures*, Physical Review Letters **91**, 241601, (2003).
- [15] BAZEIA, D. *Topological Solitons in a Vacuumless System*, Physical Review D **60**, 067705, (1999).
- [16] PERLMUTTER, S. et al *Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe*, Letters to Nature **391**, 51, (1998).
- [17] RIESS, A. G. et al *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, The Astronomical Journal **116**, 1009, (1998).
- [18] COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. *Dynamics of Dark Energy*, International Journal of Modern Physics D **15**, 1753, (2006).
- [19] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. *Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological and Late-Time Cosmic Acceleration*, Physical Review Letters **85**, 4438, (2000).
- [20] ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. *k-inflation*, Physics Letters B **458**, 209, (1999).
- [21] ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. *Essentials of k-Essence*, Physical Review D **63**, 103510, (2001).
- [22] BABICHEV, E.; *Global Topological k-Defects*, Physical Review D **74**, 085004, (2006).
- [23] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R.; OLIVEIRA, J.C.R.E. *Generalized Global Defect Solutions*, Eur. Phys. J. C **51**, 953, (2007).
- [24] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *First-Order Framework and Generalized Global Defect Solutions*, Physics Letters B **668**, 246, (2008).
- [25] ANDREWS, M.; LEWANDOWSKI, M.; TRODDEN, M.; WESLEY, D. *Distinguishing k-Defects from Their Canonical Twins*, Physical Review D **82**, 105006, (2010).
- [26] BAZEIA, D.; MENEZES, R. *New Results on Twinlike Models: Different Field Theories Sharing the Same Extended Solutions*, Physical Review D **84**, 125018, (2011).
- [27] BAZEIA, D.; LOBÃO JR, A. D.; MENEZES, R. *First-Order Formalism for Twinlike Models with Several Real Scalar Fields*, Eur. Phys. J. C **74**, 2755, (2014).
- [28] BJORKEN, J. D.; DRELL S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, (1964).
- [29] RAMOND P. *Field Theory: A Modern Primer*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, (1981).

- [30] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*, Springer, (1996).
- [31] NOETHER, E. *Invariante Variationsprobleme*, Math-phys. Klasse, 235, (1918).
- [32] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity*, Physical Review **122**, 345, (1961).
- [33] GOLDSTONE, J. *Broken Symmetries*, Physical Review **127**, 965, (1962).
- [34] HIGGS, P. W. *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Physical Review **145**, 1156, (1966).
- [35] BOGOMOL'NYI, E. B. *The Stability of Classical Solutions*, Soc. J. Nucl. Phys. **24**, 449, (1976).
- [36] PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. *Exact Classical Solutions for the 't Hooft Monopole and Julia-Zee Dyon*, Physical Review Letters **35**, 760, (1975).
- [37] COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Physics Reports **251**, 267, (1995).
- [38] MORRIS, J. R.; BAZEIA, D. *Supersymmetry Breaking and Fermi Balls*, Physical Review D **54**, 5217, (1996).
- [39] EDELSTEIN, J. D.; TROBO, M. L.; BRITO, F. A.; BAZEIA, D. *Kinks Inside Supersymmetric Domain Ribbons*, Physical Review D **57**, 7561, (1998).
- [40] SHIFMAN, M.; VAINSHTAIN, A.; VOLOSHIN, M. *Anomaly and Quantum Corrections to Solitons in Two-Dimensional Theories with Minimal Supersymmetry*, Physical Review D **59**, 045016, (1999).
- [41] JACKIW, R. *Quantum Meaning of Classical Field Theory*, Reviews of Modern Physics **49**, 681, (1977).
- [42] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press, (1991).
- [43] MORSE, P. M.; HERMAN, F. *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, (1953).
- [44] FLÜGGE, S. *Practical Quantum Mechanics*, Springer, (1994).
- [45] DIONISIO BAZEIA, *Campos Escalares em Ação*, Tese Apresentada em Concurso para Professor Titular, Universidade Federal da Paraíba, (2004).
- [46] MATHEUS ARAÚJO MARQUES, *Soluções Localizadas em Diversas Dimensões*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, (2015).

- [47] CHO, I.; VILENKIN, A. *Vacuum Defects without a Vacuum*, Physical Review D **59**, 021701, (1998).
- [48] CHO, I.; VILENKIN, A. *Gravitational Field of Vacuumless Defects*, Physical Review D **59**, 063510, (1999).
- [49] GOMES, A. R.; MENEZES, R.; OLIVEIRA, J. C. R. E. *Highly Interactive Kink Solutions*, Physical Review D **86**, 025008, (2012).
- [50] MENEZES, R.; ANDRADE, I. Trabalho em Desenvolvimento.
- [51] AVELAR, A. T.; BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. *New Lump-Like Structures in Scalar-Field Models*, Eur. Phys. J. C **55**, 133, (2008).
- [52] ROBERTO MENEZES DA SILVA, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba, (2007).
- [53] BAZEIA, D; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M.C. *Deformed Defects*, Physical Review D **66**, 101701, (2002).
- [54] ALMEIDA, C.A.; BAZEIA, D; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M.C. *New Results for Deformed Defects*, Physical Review D **69**, 067702, (2004).
- [55] LOHE, M. A. *Soliton Structures in  $P(\phi)_2$* , Physical Review D **20**, 3120, (1979).
- [56] ALTEMAR LOBÃO DE SOUSA JÚNIOR, *Teorias de Campos com Dinâmica Generalizada*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba, (2014).
- [57] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*, Addison Wesley, (2001).
- [58] TAYLOR, J.R. *Classical Mechanics*, University Science Books, (2005).
- [59] BAZEIA, D.; LOBÃO JR, A. D.; MENEZES, R. *Stable Static Structures in Models with Hight-Order Derivatives*, Annals of Physics **360**, 194, (2015).
- [60] CARROLL, S. M. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, (2003).
- [61] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, (2013).
- [62] BAZEIA, D.; Lobão, A. S.; MENEZES, R. *Twinlike Models for Kinks and Compactons in Flat and Warped Spacetime*, Physical Review D **86**, 125021, (2012).
- [63] BAZEIA, D.; MARQUES, M. A.; MENEZES, R. *Twinlike Models for Kinks, Vortices and Monopoles*, Physical Review D **96**, 025010, (2017).

- [64] BORN, M.; INFELD, L. *Foundations of the New Fields Theory*, Proc. R. Soc. Lond. A **144**, 425, (1934).
- [65] BORN, M.; INFELD, L. *On the Quantization of the New Field Equations I*, Proc. R. Soc. Lond. A **147**, 522, (1934).
- [66] BAZEIA, D.; MARQUES, M. A.; MENEZES, R. *Generalized Born-Infeld-Like Models for Kinks and Branes*, EPL **118**, 11001, (2017).
- [67] AFSHORDI, N. *Casual Field Theory with an Infinite Speed of Sound*, Physical Review D **75**, 083513, (2017).
- [68] AFSHORDI, N. *Cuscuton Cosmology: Dark Energy Meets Modified Gravity*, Physical Review D **75**, 123509, (2017).
- [69] MENEZES, R.; ANDRADE, I. Trabalho em Desenvolvimento.