



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Efeitos das Dimensões Extras em Sistemas Atômicos e o Problema do Raio do Próton

Adiel da Silva Lêmos

Tese de Doutorado

JOÃO PESSOA

- 2018 -



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Efeitos das Dimensões Extras em Sistemas Atômicos e o Problema do Raio do Próton

Adiel da Silva Lêmos

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba em complementação aos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

JOÃO PESSOA

- 2018 -

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L557e Lêmos, Adiel da Silva.

Efeitos das dimensões extras em sistemas atômicos e o problema do raio do Próton / Adiel da Silva Lêmos. - João Pessoa, 2018.

109 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Dimensões extras espaciais. 3. Brana Espessa. 4. Espectroscopia. 5. Raio do próton. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Adiel da Silva Lemos**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

1 Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Adiel da Silva Lemos**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), orientador e
7 presidente da banca examinadora, *Fernando Jorge Sampaio Moraes* (UFPB), *Valdir*
8 *Barbosa Bezerra* (UFPB), *Victor Ignacio Afonso* (UFCG) e *Geusa de Araújo Marques*
9 (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Leal de Melo Dahia comunicou aos
10 presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o
11 mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Efeitos das*
12 *dimensões extras em sistemas atômicos e o problema do raio do próton*”. Concluída a
13 exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte
14 parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o
15 respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo
16 Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da
17 Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **26 de fevereiro de 2018**.

18

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Orientador – PPGF/UFPB

Fábio Leal de Melo Dahia

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
PPGF/UFPB

Fernando Moraes

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
PPGF/UFPB

Valdir B Bezerra

Prof. Dr. Victor Ignacio Afonso
UFCG

Victor Ignacio Afonso

CCEN Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
UFCG

Geusa de A. Marques



Dedico à Raiane Lêmos.

Agradecimentos

Ao meu orientador Fábio Dahia, por sua orientação e pelos longos anos de agradável convívio e aprendizado. Agradeço-o não apenas por ter contribuído para a minha formação como Físico desde a iniciação científica, mas também por permitir-me, em um ambiente de livre pensar e discussões frutuosas, desenvolver a confiança necessária a todo pesquisador.

À minha esposa Raiane, por ter me acompanhado durante esse longo caminho, sempre me presenteando com amor e compreensão; ingredientes sem os quais os meus dias teriam sido mais difíceis.

À minha família, por sempre acreditar no meu sonho.

A um querido professor e hoje colega de profissão, Patrício Félix, por ter sido o gatilho que me fez despertar e entender que a fonte de minha eterna admiração – aquilo que me atraía “mais que gravitacionalmente” – chamava-se Física.

Aos amigos da pós-graduação pelos momentos de discussão e descontração.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Teorias de Unificação que incluem a gravitação, como a teoria de *Kaluza-Klein* e a teoria de cordas, preveem a existência de um espaço suplementar. Motivados pelas teorias de dimensões extras de larga escala, examinamos explicitamente a influência da postulada extra-dimensionalidade do espaço-tempo sobre sistemas atômicos onde os efeitos gravitacionais quadrimensionais usuais são desprezíveis. Inicialmente, apresentamos um método complementar de vincular os modelos extra-dimensionais através da espectroscopia de átomos do tipo hidrogênio. Admitindo que a energia potencial gravitacional, modificada pela existência de dimensões extras, pode ser tratada como uma perturbação em relação à Hamiltoniana atômica, encontramos vínculos sobre o raio das dimensões extras – ou alternativamente sobre a massa de *Planck* do espaço de dimensão superior – mais restritivos do que àqueles obtidos através do *Large Hadron Collider (LHC)*, em determinados regimes. Posteriormente, abordamos o *problema do raio do próton* que versa sobre a incompatibilidade entre as previsões teóricas derivadas da *Eletrodinâmica Quântica (QED)* e medidas experimentais envolvendo transições em átomos de hidrogênio eletrônico e muônico. Esse enigma apresenta-se como um excesso de energia na medida do *Lamb Shift* do hidrogênio muônico comparado com a previsão teórica calculada com o valor do raio do próton recomendado pelo *CODATA*. Mostramos que esse excesso de energia pode ser explicado, no cenário de branas com espessura, por meio da interação gravitacional amplificada pelas dimensões extras. Assim sendo, essa seria a primeira evidência das supostas dimensões extras espaciais.

Palavras-chave: dimensões extras, brana, espectroscopia, problema do raio do próton.

Abstract

Unification theories that include gravitation, such as the *Kaluza-Klein* theory and string theory, predict the existence of the supplementary space. Motivated by large extra dimensions theory, we explicitly examined the influence of the postulates extra-dimensionality of spacetime on atomic systems where the usual four-dimensional gravitational effects are negligible. Initially, we present a complementary method to constrain the extra-dimensional models through the spectroscopy of hydrogen-like atoms. Assuming that the gravitational potential energy, modified by the existence of extra dimensions, can be treated as a small perturbation in comparison to the atomic Hamiltonian, we found empirical bounds on the radius of the extra dimensions – or, alternatively, on the higher-dimensional *Planck* mass – more stringent than those obtained through the *Large Hadron Collider (LHC)*. Subsequently, we addressed the *proton radius puzzle* that deals with the incompatibility between the theoretical predictions derived from *Quantum Electrodynamics (QED)* and experimental measurements involving transitions in electronic and muonic hydrogen atoms. This puzzle presents itself as an energy excess in the measurement of the *Lamb Shift* in muonic hydrogen compared to the theoretical prediction calculated with the proton radius value recommended by *CODATA*. We show that this energy excess, in the thick brane scenario, can be explained by the gravitational interaction amplified by the extra dimensions. Thus, this would be the first evidence of the supposed spatial extra dimensions.

Keywords: extra dimensions, braneworld, spectroscopy, proton radius puzzle.

Lista de Figuras

2.1	Representação pictórica da dimensão extra no <i>modelo Kaluza-Klein</i>	8
2.2	Potencial escalar que fornece a solução do tipo parede de domínio.	12
2.3	Solução do tipo parede de domínio.	13
2.4	A distribuição da densidade de energia da brana tem um máximo em torno de $z = 0$	14
2.5	Modelo de dimensão extra de larga escala <i>ADD</i> . Nesse cenário, os campos do <i>Modelo Padrão</i> são localizados sobre uma subvariedade 4-dimensional com uma espessura $\sigma = \xi^{-1}$. O "bulk" é o espaço ambiente (hiperespaço) onde a superfície \mathcal{M} está imersa.	16
2.6	Perfil da função de onda dos férmions localizados em diferentes pontos r_j . Os campos do <i>Modelo Padrão</i> estão livres para se propagar em $3 + 1$ dimensões, embora encontrem-se aprisionados em diferentes posições r_j na coordenada extra (z).	18
2.7	Representação de uma dimensão extra compacta no modelo <i>ADD</i> . Devido a topologia circular, as linhas de força da massa m dão voltas na dimensão extra. Sob a perspectiva de um espaço não-compacto (figura à direita), o potencial gravitacional terá a contribuição de inúmeras "massas imagens". Sendo assim, nesse cenário teremos uma amplificação do potencial gravitacional.	19
2.8	A balança de torção é composta por um pêndulo de torção e uma base atratora girante. Este aparato foi desenvolvido pelo grupo <i>Eöt-Wash</i> (Fig. 1 da Ref. [39]).	27

2.9	Com um nível de confiança de 95% encontramos que o raio da dimensão extra deve ser $R < 44 \mu\text{m}$. A região acima das curvas (linhas sólidas) apresenta limites sobre violações do <i>tipo-Yukawa</i> para o potencial gravitacional e descarta quaisquer desvios na lei do inverso do quadrado (Fig. 6 da Ref. [38]).	28
2.10	A seção de choque total do processo jato + energia faltante versus M_D , integrada para $E_{T,\text{jato}} > 1 \text{ TeV}$. A linha horizontal representa o background do <i>Modelo Padrão</i> (Fig. 4 da Ref. [9]).	39
3.1	Limite inferior sobre a massa de <i>Planck</i> M_D em função de σ . As áreas abaixo das curvas são excluídas.	48
3.2	Limite superior sobre o raio das dimensões extras em termos de σ . As regiões acima das linhas são excluídas.	49
3.3	Relação entre o comprimento de <i>Planck</i> do espaço de dimensão maior (l_D) e a distância efetiva (d_{eff}). Esse fator representa o termo de expansão das correções quânticas à energia potencial gravitacional no cenário de dimensões extras	51
3.4	Contribuição da interação gravitacional em altas dimensões à transição $2S - 1S$ no átomo de hidrogênio, assumindo os vínculos do <i>LHC</i> sobre M_D . As linhas horizontais, δE_{exp} e δE_{th} , são os valores das incertezas experimental e teórica, respectivamente para a transição $2S - 1S$	52
4.1	As curvas representam os valores exigidos sobre a massa de <i>Planck</i> , M_D , em função do parâmetro de confinamento σ que explicam o <i>problema do raio do próton</i> . Regiões abaixo da linha 2 TeV são excluídas pelos eventos de <i>monophoton</i> em colisão próton-próton no <i>LHC</i> . Por outro lado, os sinais + representam os limites inferiores sobre M_D vinculados pelos eventos de <i>monojets</i> no <i>LHC</i>	62

4.2	Limites sobre o raio ($\mathcal{R} = \ell/2\pi$) das dimensões extras em função do parâmetro de confinamento σ	64
4.3	Relação entre a distância efetiva e o comprimento de <i>Planck</i> do espaço de dimensão maior. Encontramos o valor do comprimento de <i>Planck</i> através dos vínculos obtidos para o hidrogênio muônico [Eq. (4.6)].	66

*

Lista de Publicações

- DAHIA, F.; LEMOS, A. S. Is the proton radius puzzle evidence of extra dimensions? *Eur. Phys. J. C.* **76**, no. 8, 435 (2016).
- DAHIA, F.; LEMOS, A. S. Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy. *Phys. Rev. D.* **94**, no. 8, 084033 (2016).
- DAHIA, F.; MACIEL, E.; LEMOS, A. S. Rydberg states of hydrogen-like ions in braneworld. arXiv:1709.03863 [gr-qc] (Submetido).

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Publicações

1	Introdução	1
2	Teorias de Dimensões Extras: Modelos e Vínculos	5
2.1	Teorias de Dimensões Extras	6
2.1.1	Teoria de Kaluza-Klein	6
2.1.1.1	Mecanismo de Compactação	8
2.1.1.2	Os Modos Kaluza-Klein	9
2.1.2	Modelo Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (<i>ADD</i>)	10
2.1.2.1	Confinamento de Matéria: uma Abordagem Clássica	11
2.1.2.2	O Confinamento de Férmions	13
2.1.2.3	Localização de Vários Férmions	16
2.1.2.4	Potencial Gravitacional no Cenário de Dimensões Extras Compactas de Larga Escala	18
2.1.2.5	Escala de Compactação	21
2.2	Vínculos Sobre os Modelos de Dimensões Extras	25
2.2.1	Balança de Torção: Teste Gravitacional Submilimétrico	26
2.2.2	Vínculos Astrofísicos	29
2.2.2.1	SN1987A	31

2.2.3	Vínculos Cosmológicos	34
2.2.4	Vínculos de Colisores de Partículas	36
3	Vínculos Espectroscópicos sobre as Dimensões Extras	41
3.1	Um Átomo em uma Brana Espessa	43
3.2	A Interação Gravitacional no Cenário de Branas Espessas	45
3.3	Contribuição Gravitacional aos Níveis de Energia	46
3.4	Vínculos Espectroscópicos sobre M_D e R	47
3.5	Correções Quânticas e a Escala Fundamental	50
3.6	Comparações com Outros Limites	52
3.7	Vínculos Alternativos: $\sigma > l_D$ e $\rho > \rho_D$	53
3.8	Considerações Finais	55
4	O Problema do Raio do Próton: Uma Evidência de Dimensões Extras?	57
4.1	O Problema do Raio do Próton	57
4.2	A Energia Gravitacional de um Átomo em uma Brana Espessa	59
4.3	A Contribuição Gravitacional ao Lamb Shift	61
4.4	Comparações com Outros Vínculos	62
4.5	Correções Quânticas à Energia Potencial Gravitacional	65
4.6	Considerações Finais	66
5	Conclusões	69
	Apêndice A	72

A.1 Energia Gravitacional: Contribuição aos Níveis de Energia	72
Integração com Respeito às Coordenadas Extras	73
A integral em Z	74
A integral com respeito a $\vec{\xi}$	74
A integral com respeito a \vec{r}'	75
Exemplo: O caso $\delta = 4$	76
A integral externa ($r > R_p$)	77
A integral interna ($r < R_p$)	77
A integral com respeito a \vec{r}	78
Estado 1S	78
Apêndice B	84
Função de Onda Extra-Dimensional	84

1 Introdução

“ I call our world Flatland, not because we call it so, but to make its nature clearer to you, my happy readers, who are privileged to live in Space. ”

Edwin A. Abbot, *Flatland: A romance of many dimensions*, 1884

As pesquisas em Física de altas energias têm dedicado grande atenção ao estudo da dimensionalidade do espaço-tempo. Apesar da renovada e efervescente busca atual, esse interesse vem sendo demonstrado recorrentemente ao longo da história. Para *J. Kepler*, por exemplo, a geometria se manifestava como o arquétipo da beleza do mundo e a tridimensionalidade da esfera refletia a mais bela imagem, por espelhar, em simbolismo, a *Santíssima Trindade* [1].

No início do século passado, *T. Kaluza* e *O. Klein* propuseram uma teoria da Gravitação em cinco dimensões que unificava, geometricamente, as forças gravitacional e eletromagnética, supondo a existência de uma dimensão extra acrescida ao espaço-tempo quadridimensional. Neste caso, a dimensão espacial extra seria compacta e teria a topologia de um círculo (S^1), cujo tamanho estaria compreendido na escala do ínfimo comprimento de *Planck*, que, por sua vez, garantiria a não observação de efeitos diretos da postulada dimensão adicional sobre as leis da Física quadridimensional [2, 3].

Recentemente, as teorias de dimensões extras ressurgiram com os conhecidos modelos de branas. Inicialmente, motivadas pela possibilidade de explicar o *problema da hierarquia*. Posto resumidamente, este problema refere-se à discrepante razão entre as escalas gravitacional e eletrofraca. A existência de um espaço suplementar justificaria fisicamente a fraqueza da interação gravitacional ante às outras interações fundamentais da natureza. Contrariamente ao predecessor modelo de dimensão extra, no cenário de branas, as dimensões extras podem ter comprimentos muito superiores ao comprimento de *Planck* – inclusive serem infinitas – sem apresentar quaisquer conflitos com

os dados empíricos [4, 5, 6, 7, 8]. No modelo de brana, a gravidade tem acesso ao espaço extra-dimensional, embora as partículas e os campos do *Modelo Padrão* estejam aprisionados à hipersuperfície quadrimensional (3-brana), contanto que não sejam excitados a uma escala de energia maior do que TeV [9, 10]. Para distâncias muito maiores do que a escala característica do espaço suplementar (ℓ), o comportamento quadrimensional da força gravitacional é recuperado, devido à existência de um modo zero localizado sobre a brana. Por sua vez, os campos do *Modelo Padrão* sentirão os efeitos das dimensões extras numa escala L_m que pode ser muito menor do que a escala do espaço extra-dimensional ℓ . Esta escala, L_m , irá regular a penetração da função de onda das partículas do *Modelo Padrão* na direção transversal à brana.

Embora, sob a perspectiva fenomenológica, as teorias de branas sejam riquíssimas, por ora, não há sinais de detecção dos efeitos extra-dimensionais, ao menos na escala de energia dos atuais experimentos [10]. Em consequência disso podemos estabelecer vínculos experimentais sobre os parâmetros das teorias, como a massa de *Planck* do espaço de dimensão maior ou, equivalentemente, sobre o raio da dimensão extra. No caso em que o número de dimensões extras (δ) é maior que 3, os mais fortes vínculos são obtidos pelo colisor de partículas, *LHC* [9, 10], enquanto que, para $\delta = 2$ e $\delta = 3$, os vínculos *Astrofísicos* e *Cosmológicos* nos fornecem as mais fortes restrições sobre o raio das dimensões extras [11, 12, 13, 14]. Por sua vez, na escala submilimétrica, os experimentos recentes utilizando balança de torção, buscando testar o número e a topologia das dimensões do espaço-tempo através de desvios na *lei do inverso do quadrado*, têm encontrado os limites mais restritivos para $\delta = 1$ [para uma revisão ver a Ref. [15]]. Outras propostas procuram encontrar vínculos para os modelos de dimensões extras através da espectroscopia. Neste contexto, calcula-se a contribuição da energia potencial gravitacional aos níveis de energia de átomos ou moléculas via teoria de perturbação [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Diante do exposto, podemos afirmar que a crescente busca pelas supostas dimensões ocultas do espaço-tempo surge como uma questão relevante que pode ser investigada empiricamente. Entretanto, a resposta à indagação se o nosso universo possui um es-

paço suplementar tem sido elusiva.

Neste contexto, esta tese está inserida no seguimento de propostas alternativas de vinculação das teorias extra-dimensionais. Considerando o cenário de branas com espessura, obteremos limites para a massa de *Planck* do espaço de dimensão maior através da análise dos efeitos da interação gravitacional sobre sistemas atômicos.

No capítulo 2, iniciamos apresentando uma revisão acerca das teorias extra-dimensionais de *Kaluza-Klein* e *Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)* [2, 3, 4, 5, 6]. Também exploramos algumas características clássicas de ambos os modelos, como, por exemplo, o mecanismo de aprisionamento de matéria à brana no modelo *ADD*. Na segunda parte do capítulo, apresentamos os vínculos mais recentes encontrados para os modelos de dimensões extras, oriundos de diferentes sistemas físicos, e discutimos sua obtenção.

Em seguida, no capítulo 3, mostraremos como os níveis de energia do átomo de hidrogênio são afetados pela energia potencial gravitacional modificada pela existência de um espaço suplementar. No regime de curtas distâncias, i.e., para distâncias da ordem do raio da dimensão extra, a interação gravitacional entre o próton e o elétron será amplificada, no cenário de brana. Deste modo, se considerarmos a interação gravitacional como um termo pequeno da Hamiltoniana atômica, podemos encontrar a contribuição gravitacional aos níveis de energia atômica, via teoria de perturbação. Como a função de onda das partículas tem uma penetração na direção transversal à brana, então, considerando a transição $2S - 1S$ no átomo de hidrogênio, encontramos vínculos independentes para o número e o tamanho do espaço suplementar em função do parâmetro de confinamento σ dos campos [16].

No capítulo 4, abordaremos o *problema do raio do próton* sob a perspectiva de branas espessas. Este problema refere-se à incompatibilidade entre as medidas do *Lamb shift* no hidrogênio muônico e seu valor teórico predito pela *QED* calculado com o valor do raio do próton recomendado pelo *CODATA* [23, 24]. O resultado inferido por meio desta medida mostra um excesso de energia de 0.3 meV. Assim, considerando o cenário de branas espessas, mostraremos como a interação gravitacional entre o múon e o próton,

modificada pelas dimensões extras, pode fornecer essa separação adicional entre os estados $2S$ e $2P$ no hidrogênio muônico. Por fim, analisando a energia gravitacional com respeito ao parâmetro de confinamento σ em limites realísticos, apresentamos os vínculos sobre a massa de *Planck* fundamental que resolvem o *problema do raio do próton* e são consistentes com os resultados empíricos atuais [25].

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as conclusões.

2 *Teorias de Dimensões Extras: Modelos e Vínculos*

“ Yet I exist in the hope that these memoirs [...] may find their way to the minds of humanity in Some Dimension, and may stir up a race of rebels who shall refuse to be confined to limited Dimensionality. ”

Edwin A. Abbot, *Flatland: A romance of many dimensions*, 1884

Esse capítulo será dividido em duas partes correlatas. Na primeira, focamos no estudo de alguns modelos de dimensões extras. Inicialmente, tratamos do modelo de *Kaluza-Klein* e em seguida estudamos o modelo teórico de dimensões extras de larga escala conhecido como *ADD* (abreviatura para *Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali*). Apesar de ambas tratarem-se de teorias de dimensões extras compactas, o segundo modelo, inserido no cenário de branas, tem um poder preditivo excitante do ponto de vista experimental; com isso tem ganhado crescente atenção nos últimos anos. Esse fato é justificado pela possibilidade de medirmos efeitos das dimensões extras em uma escala de energia acessível aos patamares de resolução dos experimentos em atividade atualmente (\sim TeV).

Na parte final do capítulo, apresentamos uma revisão acerca do estado recente dos vínculos experimentais sobre os modelos extra-dimensionais dentro do cenário de branas e que são obtidos por meio de diferentes sistemas físicos. Dentre vários métodos de obtenção de vínculos, dedicamos especial atenção aos vínculos oriundos de experimentos envolvendo balança de torção que tem por objetivo buscar desvios à lei do inverso do quadrado, os vínculos cosmológicos e astrofísicos, e por fim os vínculos que são produzidos e/ou inferidos através dos colisores de partículas.

2.1 Teorias de Dimensões Extras

Nesta seção, vamos dar início ao estudo dos modelos de dimensões extras. Inicialmente, partimos da teoria de *Kaluza-Klein* e abordamos alguns aspectos clássicos relevantes deste modelo. Apresentamos o mecanismo de ocultação da dimensão extra e discutimos brevemente os possíveis traços que a dimensão extra fornece à Física quadridimensional através dos *modos Kaluza-Klein* que devem se manifestar em experimentos de colisão no regime de altas energias.

Ao final da seção, vamos analisar o modelo de *Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali*. Ainda estudamos um mecanismo de aprisionamento de matéria à brana que assegura a aparente quadridimensionalidade das leis da Física. Posteriormente, estendemos esse estudo para o caso da localização de vários férmions em uma brana espessa. Por fim, verificamos as modificações que as dimensões extras impõem ao potencial gravitacional e os limites encontrados sobre o raio da dimensão extra, admitindo que a massa de Planck fundamental é da ordem de TeV.

2.1.1 Teoria de Kaluza-Klein

A busca por teorias de unificação tem motivado o recente e renovado interesse pela dimensionalidade do espaço-tempo. A nossa experiência sensorial, por sua vez, nos lança diante de um questionamento: por que o universo observável nos parece ser quadridimensional, ou dito de outro modo, por que não observamos uma quinta dimensão na natureza? No início da década de 1920, *Theodor Kaluza* defrontou-se com essa indagação e a explicou com a atualmente conhecida *teoria de Kaluza-Klein*.

Através de um *ansatz* matemático, *Kaluza* propôs um modelo teórico que unificava as únicas, até então conhecidas, forças fundamentais da natureza [2]. Sua teoria tratava-se de uma extensão puramente clássica da *Teoria Geral da Relatividade* de *Einstein* e pode ser entendida como uma *teoria de unificação geométrica*. Sua proposta baseava-se

na simples ideia de acrescentarmos uma dimensão espacial extra à teoria da gravitação de *Einstein*. Desse modo, o espaço-tempo passaria a ser uma variedade 5-dimensional com as coordenadas denotadas como $x^A = (x^\mu, x^4 = z)$ ¹.

De um modo direto, podemos parametrizar a métrica do espaço-tempo na seguinte forma [2]:

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo quadrimensional usual, ϕ é um campo escalar, A_μ é o potencial eletromagnético e κ é uma constante.

Entretanto, *Kaluza* necessitava justificar a aparente quadrimensionalidade do espaço-tempo. Através de um artifício puramente matemático, conhecido como *condição cilíndrica*, ele conseguiu fundamentar a não-observada existência da quinta dimensão. Isso foi obtido admitindo-se que os campos não dependem da coordenada extra, i.e.,

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Se partimos da métrica (2.1) e admitirmos que o tensor de *Ricci* e os símbolos de *Christoffel* no espaço de dimensão maior tem a mesma forma que os seus correspondentes quadrimensionais, podemos mostrar que [26],

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\phi^2 T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.3)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

Os resultados (2.3) e (2.4) foram obtidos assumindo que o campo escalar é cons-

¹Os índices latinos maiúsculos assumem os valores 0, 1, 2, 3 ou 4, enquanto que os índices gregos assumem os valores 0, 1, 2 ou 3.

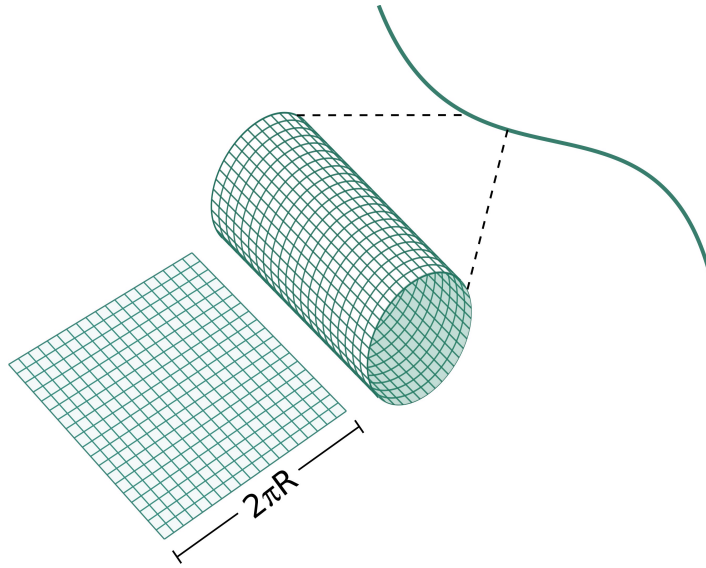


Figura 2.1: Representação pictórica da dimensão extra no *modelo Kaluza-Klein*.

tante por todo o espaço-tempo. Desse modo, a *Teoria Geral da Relatividade* em cinco dimensões no vácuo contém a *Relatividade Geral* quadrimensional acrescida do eletromagnetismo de *Maxwell*.

2.1.1.1 Mecanismo de Compactação

A teoria de *Kaluza*, embora bem fundamentada do ponto de vista matemático, exigia uma explicação física para a aparente ocultação da dimensão extra. Nesse sentido, *Oskar Klein* forneceu à teoria de *Kaluza* o componente que faltava; ele dotou o modelo com um mecanismo de compactação da dimensão extra. Segundo *Klein*, a quinta dimensão teria a topologia circular (S^1) e, sendo assim, seria identificada periodicamente como [3] (ver Fig. 2.1),

$$z \rightarrow z + 2\pi R, \quad (2.5)$$

onde R é o raio da dimensão extra.

Como uma consequência direta da topologia da dimensão extra, todos os campos serão periódicos com respeito à quinta dimensão e podem ser expandidos em modos de

Fourier [27]:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x^\mu, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R}, \\
\phi(x^\mu, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R}, \\
A_\mu(x^\mu, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde o índice (n) refere-se ao n -ésimo *modo de Fourier*.

2.1.1.2 Os Modos Kaluza-Klein

Passaremos a examinar algumas características clássicas desse modelo. Para tanto, considere o caso simples de um campo escalar sem massa $\Phi = \Phi(x^\mu, z)$ definido em um espaço 5-dimensional. Como foi mencionado anteriormente, a periodicidade da dimensão extra nos permite expandir o campo em séries de *Fourier*

$$\Phi(x^\mu, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R}, \tag{2.7}$$

onde cada função $\phi^{(n)}(x^\mu)$ é um campo sobre o espaço 4-dimensional e é denominado *modo Kaluza-Klein (modo KK)*. Admitiremos que a métrica do espaço-tempo é plana e o campo $\Phi(x^\mu, z)$ satisfaz à equação de *Klein-Gordon* em $5D$ [28]

$$\Box_{(5)} \Phi(x^\mu, z) = 0, \tag{2.8}$$

onde $\Box_{(5)}$ é o operador d'Alembertiano em $5D$ definido por $\Box_{(5)} = \Box + \partial_z^2$. Impondo a condição periódica da dimensão extra ao campo, como dado em (2.7), e substituindo na equação (2.8), temos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Box - \frac{n^2}{R^2} \right) \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/R} = 0. \tag{2.9}$$

Desse modo, a Eq. (2.9) descreve um conjunto infinito de equações de *Klein-Gordon*

4-dimensional desacopladas para os campos massivos $\phi^{(n)}(x^\mu)$ denominados *modos KK*, com massas $m^2 = \frac{n^2}{R^2}$:

$$\left(\square - \frac{n^2}{R^2}\right)\phi^{(n)}(x^\mu) = 0. \quad (2.10)$$

Note que, de acordo com a Eq. (2.10) temos apenas um campo escalar real sem massa para $n = 0$, conhecido como *modo zero*, que corresponde à partícula quadridimensional. Cada *modo KK*, por sua vez, satisfaz à equação de *Klein-Gordon* e carrega consigo uma energia de repouso da ordem de n/R . Se a escala de compactação for da ordem do ínfimo *comprimento de Planck*², os *modos KK* serão tão energéticos que não se manifestarão na Física de baixas energias. Assim, todos os modos excitados, exceto o modo zero, fornecerão uma contribuição negligenciável aos resultados em um regime de baixas energias se comparada à escala de compactação ($1/R$). Consequentemente, os experimentos envolvendo aceleradores de partículas, por exemplo, terão acesso às dimensões extras quando atingirem um nível de energia da ordem do inverso da escala de compactação ($E \sim 1/R$).

Se admitirmos que as dimensões extras sejam compactadas na ordem do *comprimento de Planck* ($l_{Pl} \sim 10^{-35}\text{m}$), as massas dos estados excitados serão da ordem da *massa de Planck* ($M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{(4)}}} \approx 10^{19}\text{GeV}$). Sendo assim, a não-detecção das dimensões extras estaria assegurada, mesmo com os atuais aceleradores de partículas sendo executados em escalas de energias ($E \sim \mathcal{O}(\text{TeV})$) [10]. Nesse contexto, a aparente quadridimensionalidade do nosso universo observável foi explicada e a condição cilíndrica, denotada pela equação (2.2), foi justificada fisicamente.

2.1.2 Modelo Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD)

No final dos anos 90 as teorias de dimensões extras foram alvo de um revigorado interesse. Parte dessa motivação se dá em virtude dos denominados *modelos de branas*

²O comprimento de Planck é definido como $l_{Pl} \equiv (\hbar G_{(4)}/c^2)^{1/2}$.

lançarem novos olhares sobre problemas antigos. Além disso, essas teorias são dotadas de uma gama de interessantes implicações fenomenológicas [4, 5, 6, 7, 8]. O cenário de branas conhecido como *ADD* surge como uma nova estrutura na tentativa de resolver o *problema da hierarquia*. Enunciado de modo pragmático, o *problema da hierarquia* consiste na descomunal razão entre as duas escalas fundamentais da Natureza; eletrofraca e gravitacional ³.

Devemos enfatizar que, a despeito de medidas envolvendo os campos do *Modelo Padrão* serem realizadas com uma alta precisão na escala de distância eletrofraca, a gravidade apenas recentemente vem sendo sondada numa escala submilimétrica [15]. Nesse contexto, o modelo *ADD* admite que a única escala fundamental seja a eletrofraca. Desse modo, a unificação entre as forças fundamentais da Natureza ocorreria numa escala de energia da ordem de TeV, contrariamente ao postulado pelos modelos supersimétricos que predizem a unificação numa escala de energia após 10^{16} GeV [29].

De acordo com o modelo *ADD* o nosso espaço-tempo quadrimensional seria uma hipersuperfície imersa num espaço ambiente de dimensão superior, denominado “*bulk*”, que contém δ dimensões extras compactas de larga escala. Todos os campos, excetuando-se o gravitacional, estariam presos à brana e não teriam acesso às dimensões extras. Como apenas a gravidade se diluiria pelo o espaço suplementar, a aparente fraqueza da força gravitacional, ante a força eletrofraca, por exemplo, se daria pela diluição das linhas de campo gravitacional no espaço de dimensão maior [5]. Veremos adiante um meio de confinamento clássico dos campos do *Modelo Padrão*.

2.1.2.1 Confinamento de Matéria: uma Abordagem Clássica

Na perspectiva da teoria de campo, o mecanismo de aprisionamento de matéria à hipersuperfície quadrimensional, denominada brana, pode ser entendido como o confinamento de matéria em uma parede de domínio. Nesse contexto, considere um campo

³A escala de unificação eletrofraca é $m_{EW} \sim 10^3$ GeV, enquanto a escala gravitacional $M_{Pl} \equiv G_{(4)}^{-1/2} \sim 10^{19}$ GeV. Assim, $M_{Pl}/m_{EW} \sim 10^{16}$.

escalar real em um espaço com $(4 + 1)$ dimensões, i.e., o espaço-tempo possui uma dimensão espacial extra. A ação será dada por [30],

$$S = \int d^4x dy \left[\frac{1}{2} (\partial_A \varphi)^2 - V(\varphi) \right], \quad (2.11)$$

onde $V(\varphi)$ é o potencial escalar e $A = 0, 1, 2, 3$ ou 4 .

Para ilustrar esse modelo vamos considerar um potencial que descreve soluções do tipo parede de domínio

$$V(\varphi) = \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.12)$$

Este potencial tem a forma de poço duplo com dois vácuos definidos em $\varphi = \pm\nu$, como pode ser visto na Fig. 2.2.

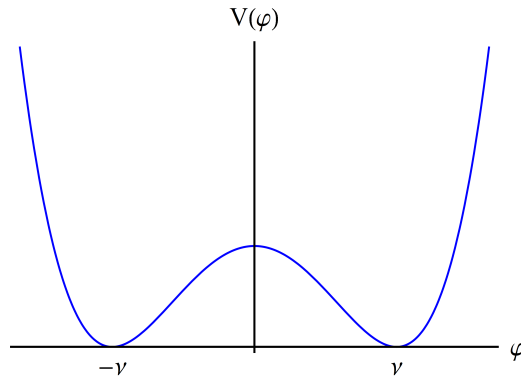


Figura 2.2: Potencial escalar que fornece a solução do tipo parede de domínio.

A dinâmica do campo é obtida através das equações de *Euler-Lagrange* e por meio destas encontramos uma solução para o campo. Este resultado clássico é independente das coordenadas do espaço-tempo quadridimensional usual [30]. Assim sendo, temos

$$\varphi_0 = \nu \tanh\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right). \quad (2.13)$$

Para obtermos a Eq. (2.13) admitimos que a solução é estacionária e o campo apre-

senta dependência apenas com a coordenada extra. Essa solução clássica descreve uma parede de domínio que conecta dois vácuos do modelo.

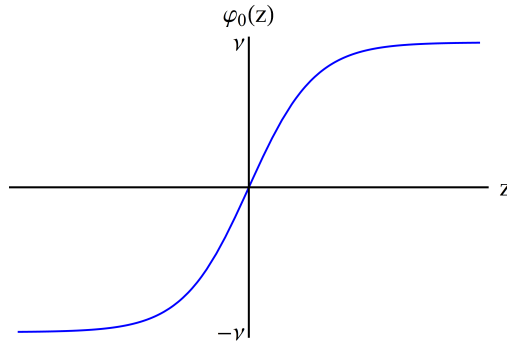


Figura 2.3: Solução do tipo parede de domínio.

Ainda, associada ao campo escalar (φ) temos uma densidade de Hamiltoniana $\mathcal{H}_0 = \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}$, onde $\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$ é o momento canonicamente conjugado. Dessa forma, para a solução (2.13) encontramos

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\lambda^2\nu^4}{4} \operatorname{sech}^4\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right). \quad (2.14)$$

Integrando a densidade Hamiltoniana com respeito à coordenada extra, obtemos a energia por unidade de 3-volume da brana conhecida como a tensão da parede

$$\Sigma = \frac{2}{3}\lambda\nu^3. \quad (2.15)$$

Como podemos observar na Fig. 2.4, a energia está confinada em torno de $z = 0$. Enfatizo ainda que o parâmetro λ tem unidade de inverso de comprimento, e assim pode ser interpretado como a espessura da brana.

2.1.2.2 O Confinamento de Férmions

Uma discussão natural de nossa descrição clássica para o confinamento é o estudo do aprisionamento de férmions à parede de domínio. Para tanto, admitiremos que o

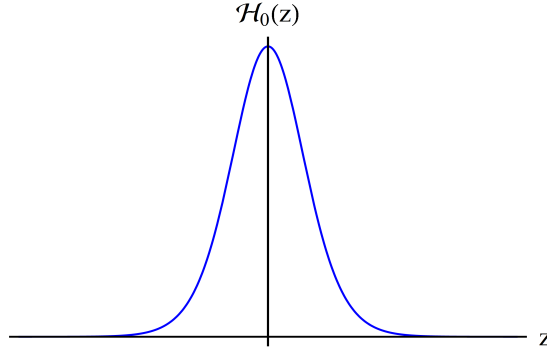


Figura 2.4: A distribuição da densidade de energia da brana tem um máximo em torno de $z = 0$.

campo escalar (φ) interage com o férmion por meio de uma interação do tipo *Yukawa*. A lagrangiana que descreve esse sistema é:

$$\mathcal{L}_\Psi = \mathcal{L}_{1/2} + \mathcal{L}_{int} = (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi + m\bar{\Psi}\Psi) - h\bar{\Psi}\Psi\varphi, \quad (2.16)$$

onde Ψ é o espinor em $(4 + 1)$ -dimensões, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ ($\mu = 0, \dots, 3$), $\Gamma^z = -i\gamma^5$ e $\gamma^\mu, \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ são as matrizes de Dirac [30].

Admitiremos o caso mais simples, i.e., que os férmions não têm massa ($m = 0$). Desse modo, a lagrangiana (2.16) assume a forma:

$$\mathcal{L}_\Psi = i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - h\bar{\Psi}\Psi\varphi. \quad (2.17)$$

Partindo da Eq. (2.17) obtemos a equação de *Dirac* em 5-dimensões para o férmion acoplado ao campo de fundo φ_0 ,

$$i\Gamma^A\partial_A\Psi - h\varphi_0\Psi = 0. \quad (2.18)$$

Podemos expressar a Eq. (2.18) explicitamente como:

$$i\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\Gamma^z\partial_z\Psi - h\varphi_0\Psi = 0. \quad (2.19)$$

Aplicando o método da separação de variáveis ($\Psi = \psi(x)\chi(z)$) à expressão anterior, e, após alguma manipulação, encontramos:

$$i\Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \gamma^5 \psi(x) \frac{1}{\chi(z)} \partial_z \chi(z) - h\varphi_0 \psi(x) = 0. \quad (2.20)$$

Se admitirmos que $\gamma^5 \psi(x) = -\psi(x)$ ⁴, a Eq. (2.20) se reduz a:

$$i\Gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \tilde{m} \psi(x) = 0, \quad (2.21)$$

onde $\tilde{m} = \frac{1}{\chi(z)} \partial_z \chi(z) + h\varphi_0$ é a massa do espinor em quatro dimensões.

Como estamos interessados no modo zero, assim $\tilde{m} = 0$ e logo:

$$\partial_z \chi(z) = -h\varphi_0 \chi(z). \quad (2.22)$$

É trivial verificar que a solução para o espinor tem a seguinte forma [30],

$$\Psi = \exp\left(-h \int_0^z \varphi_0(z') dz'\right) \psi(x). \quad (2.23)$$

Nesse caso, $\psi(x)$ descreve o espinor *Dirac* e obedece à equação de *Dirac* quadrimensional. Podemos ainda observar que o confinamento dos férmions à parede de domínio está assegurado, pois para z muito grande, a função de onda é suprimida exponencialmente. Sendo assim, garantimos a localização do modo zero fermiônico sobre a brana e reproduzimos a Física quadrimensional usual.

⁴Essa condição está relacionada à quiralidade. Entretanto, tal exigência não representa nenhuma restrição física, uma vez que partículas de massa nula têm quiralidade bem definida.

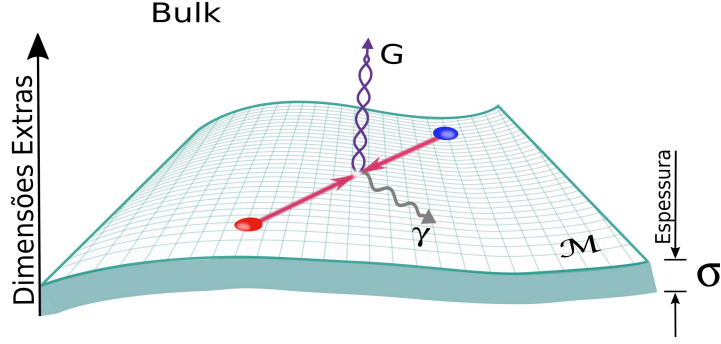


Figura 2.5: Modelo de dimensão extra de larga escala *ADD*. Nesse cenário, os campos do *Modelo Padrão* são localizados sobre uma subvariedade 4-dimensional com uma espessura $\sigma = \xi^{-1}$. O "bulk" é o espaço ambiente (hiperespaço) onde a superfície \mathcal{M} está imersa.

2.1.2.3 Localização de Vários Férmions

Na seção anterior, considerando o cenário de branas *ADD*, mostramos que, se admitirmos a existência de uma interação entre o campo escalar φ e o campo de *Dirac* Ψ , o confinamento da matéria na parede de domínio está assegurado. A *Lagrangiana* que descreve este sistema é dada por (2.16). Uma generalização desse problema pode ser compreendida como o estudo da localização de vários férmions com diferentes massas. Assim, a *Lagrangiana* (2.16) assume a forma [6]:

$$\mathcal{L}_{\Psi_{j,k}} = \sum_{j,k} (i\bar{\Psi}_j \Gamma^A \partial_A \Psi_k + m_{jk} \bar{\Psi}_j \Psi_k) - h_{jk} \bar{\Psi}_j \Psi_k \varphi, \quad (2.24)$$

onde h_{jk} é a constante de acoplamento de *Yukawa* e m_{jk} são as massas dos campos fermiônicos. Por simplicidade, admitiremos que $h_{jk} = \delta_{jk} h$ e m_{jk} é diagonalizável e possui autovalores m_j [6].

A equação de movimento, por sua vez, tem a forma

$$\sum_j i\Gamma^A \partial_A \Psi_j - h\tilde{\varphi}_{0,j} \Psi_j = 0, \quad (2.25)$$

onde $\tilde{\varphi}_{0,j} = \varphi_0 - m_j/h$.

Semelhantemente ao caso anterior, vamos tentar encontrar uma solução por meio do método da separação de variáveis ($\Psi_j = \psi_j(x) \chi_j(z)$). Assim, é fácil mostrar que

$$\chi_j(z) = \exp\left(-h \int_0^z \tilde{\varphi}_{0,j}(z') dz'\right). \quad (2.26)$$

Considere o caso em que o campo escalar (φ_0) tem a forma (2.13). Assim, para valores muito pequenos de z , ou seja, $z \ll 1$, podemos expandir φ_0 em torno de $z = 0$. Deste modo, encontramos:

$$\varphi_0 \simeq 2\xi^2 z + \mathcal{O}(z^3), \quad (2.27)$$

onde $\xi^2 = \frac{1}{4}\lambda\nu^2$.

Através da Eq. (2.27) encontramos $\tilde{\varphi}_{0,j} \simeq 2\xi^2 z - m_j/h$ ($z \ll 1$). Sendo assim, a Eq. (2.26) assume a forma:

$$\chi_j(z) = \exp\left(-2h\xi^2 \int_0^z \left(z' - m_j/2h\xi^2\right) dz'\right). \quad (2.28)$$

Integrando a expressão (2.28), obtemos:

$$\chi_j(z) = C_j \exp\left(-h\xi^2 (z - r_j)^2\right), \quad (2.29)$$

onde a constante de integração $C_j = N \exp(m_j^2/4h\xi^2)$, N é uma constante de normalização e $r_j = m_j/2h\xi^2$.

Note que a função de onda tem o perfil *Gaussiano* com o máximo localizado em torno de r_j e se anula para pontos afastados da brana. A constante r_j apresenta uma dependência explícita com a massa do férmion m_j e nos fornecerá a posição dos férmions relativamente à brana. A constante ξ , por sua vez, é relacionada à largura do pacote de onda *Gaussiano* e pode ser entendida como a região acessível para a função de onda na

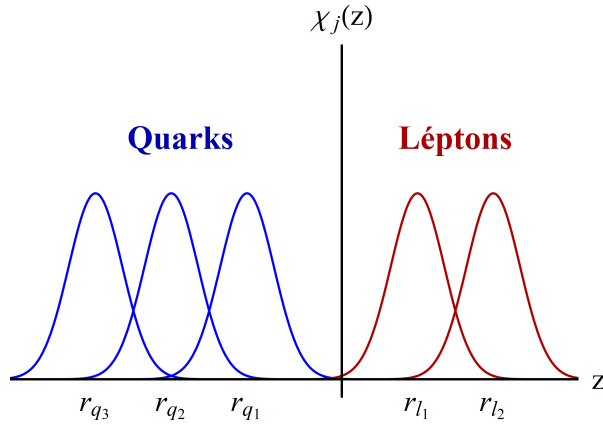


Figura 2.6: Perfil da função de onda dos férmions localizados em diferentes pontos r_j . Os campos do *Modelo Padrão* estão livres para se propagar em $3 + 1$ dimensões, embora encontrem-se aprisionados em diferentes posições r_j na coordenada extra (z).

direção transversal à brana (ver Fig. 2.5).

A espessura da brana age efetivamente como o tamanho da dimensão extra para os campos do *Modelo Padrão*, i.e., é a distância transversa à brana a qual os *campos de calibre* têm acesso [6]. Por fim, do ponto de vista $4D$ a Lagrangiana (2.24) descreve uma série de férmions quadrimensionais não-interagentes localizados em diferentes “fatias” da brana (ver Fig. 2.6).

2.1.2.4 Potencial Gravitacional no Cenário de Dimensões Extras Compactas de Larga Escala

No modelo *ADD* a gravidade “vaza” através das dimensões extras e tem acesso ao espaço ambiente. Como resultado direto, do ponto de vista quadrimensional, a gravitação é a mais fraca das quatro interações fundamentais da Natureza [4, 5, 6, 29]. Nesse cenário, a fraqueza da força gravitacional seria justificada pelo grande volume da escala de compactação (eV^{-1}) que dilui a intensidade da interação gravitacional.

Para estudar essa característica da gravitação, analisaremos o comportamento do potencial gravitacional produzido por uma massa m num cenário com δ dimensões extras compactas. Nesse contexto, devido a periodicidade da dimensão extra, podemos impor a identificação $z \rightarrow z + 2\pi R$. Por simplicidade, suponha que a massa m encontra-

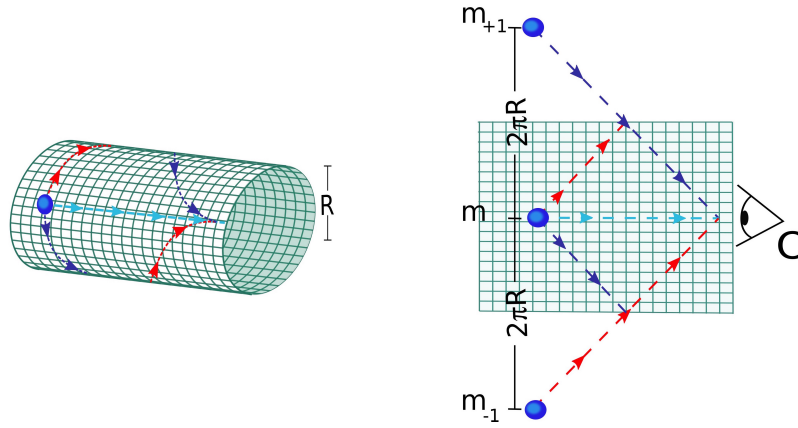


Figura 2.7: Representação de uma dimensão extra compacta no modelo *ADD*. Devido a topologia circular, as linhas de força da massa m dão voltas na dimensão extra. Sob a perspectiva de um espaço não-compacto (figura à direita), o potencial gravitacional terá a contribuição de inúmeras “massas imagens”. Sendo assim, nesse cenário teremos uma amplificação do potencial gravitacional.

se na origem e o nosso espaço possui apenas uma dimensão extra.

No espaço de recobrimento \mathbb{R}^5 , a identificação topológica na direção extra resultará no surgimento de inúmeras massas denominadas *imagens topológicas* (ver Fig. 2.7). Para regiões muito afastadas da fonte ($r \gg 2\pi R$), a distância entre as *imagens topológicas* deixará de ser percebida como discreta e passaremos a observar uma linha contínua com densidade de massa uniforme que será composta pelas inúmeras *massas imagens*. Podemos determinar a força gravitacional gerada pelo contínuo de massas utilizando a *lei de Gauss* e valendo-nos da simetria cilíndrica envolvida no problema. Nesse caso, a base do cilindro é uma esfera $3D$, pois estamos num espaço com quatro dimensões espaciais [31].

A *lei de Gauss* nos fornece

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -S_{(3+1)} G_{(4+1)} M_C, \quad (2.30)$$

onde $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ é a área da superfície de uma esfera de raio unitário em D dimensões, $G_{(4+1)}$ é a constante gravitacional do espaço de dimensão maior, $M_C = Lm/2\pi R$ é a massa da linha composta pelas imagens topológicas encerrada pela super-

fície *Gaussiana* e L é o comprimento do cilindro *Gaussiano*. Assim, obtemos:

$$g = - \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{G_{(4+1)} m}{2\pi R r^2}. \quad (2.31)$$

Note que, fazendo a identificação $G_{(4+1)} = \frac{(2\pi R)}{\pi/2} G_{(4)}$, podemos inferir que

$$g = - \frac{G_{(4)} m}{r^2}. \quad (2.32)$$

Deste modo, o resultado quadrimensional usual é recuperado para longas distâncias ($r \gg 2\pi R$).

Procederemos de modo análogo e generalizaremos para o caso em que o espaço possui δ dimensões extras. Nesse caso, o hiper-cilindro C de comprimento L está centrado em torno da linha de massas imagens δ -dimensional e a base do cilindro é uma esfera 3-dimensional. A *lei de Gauss* em $(\delta + 4)$ -dimensões será [5],

$$\int_{\text{Superfície } C} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -S_{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} M_C, \quad (2.33)$$

Desse modo, devido à simetria radial, encontramos

$$g \times (4\pi r^2) \times L^\delta = -S_{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} \frac{L^\delta}{(2\pi R)^\delta} m \quad (2.34)$$

Finalmente, podemos escrever

$$g = - \frac{S_{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} m}{4\pi V_\delta r^2}, \quad (2.35)$$

onde $V_\delta = (2\pi R)^\delta$ é o volume do espaço suplementar.

Para recuperar a *lei do inverso do quadrado de Newton* para a força gravitacional, basta-nos fazer a identificação

$$G_{(4)} = \frac{S_{(3+\delta)} G_{(4+\delta)}}{4\pi V_\delta}. \quad (2.36)$$

Até o momento, lançamos atenção sobre o estudo do potencial gravitacional gerado por uma massa m em um espaço com δ dimensões extras em uma região afastada da fonte. Nesse caso, vimos que a conhecida *lei do inverso do quadrado* é reproduzida. De outro modo, se estamos interessados no potencial gerado pela massa m para pontos próximos a fonte, teremos aproximadamente:

$$g = -G_{(4+\delta)} \frac{m}{r^{\delta+2}}. \quad (2.37)$$

Isto é fácil de verificar, uma vez que o lado esquerdo da *lei de Gauss* nos dá $g \times S_{(\delta+3)} r^{2+\delta}$, enquanto o lado direito será simplesmente $S_{(\delta+3)} G_{(\delta+4)} m$. Para esse cálculo devemos fazer uso da simetria esférica ao invés da cilíndrica.

Finalmente, podemos escrever em termos do potencial gravitacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = -G_{(4)} \frac{m}{r} \quad (r \gg R) \\ V = -G_{(4+\delta)} \frac{m}{r^{\delta+1}} \quad (r \ll R) \end{array} \right. . \quad (2.38)$$

No regime de curtas distâncias ($r \ll R$) encontramos um novo quadro; o potencial gravitacional produzido por uma massa m sofre uma amplificação no cenário de branas *ADD*. Este resultado representa um desvio à *lei do inverso do quadrado de Newton*. Sendo assim, nesse regime ($r \ll R$), esperamos detectar efeitos mensuráveis das dimensões extras sobre os experimentos que buscam desvios na força gravitacional.

2.1.2.5 Escala de Compactação

A teoria *ADD* reproduz a gravidade quadrimensional sobre a brana por meio da combinação da ideia de *mundo-brana* com a compactação das dimensões extras a *la*

Kaluza-Klein. Esse cenário nos permite resolver o *problema da hierarquia*, além de fazer previsões que podem ser testadas com experimentos de colisões em aceleradores de partículas, por exemplo. De acordo com esse modelo, a escala fundamental da gravidade quântica é $M_D \sim \text{TeV}$. Sendo assim, de modo pragmático, o *problema da hierarquia* é resolvido.

Na seção anterior mostramos como a constante gravitacional quadrimensional se relaciona com a constante gravitacional de um espaço-tempo com δ dimensões extras compactas. Equivalentemente, podemos estabelecer a relação entre a *massa de Planck* do espaço de dimensão superior e a *massa de Planck* do espaço quadrimensional. Com esse intuito, vamos partir da ação para o modelo ADD com δ dimensões extras compactas de mesmo raio R [32]

$$S_{ADD} = \frac{\hat{M}_D^{2+\delta}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi R} d^\delta z \sqrt{g_{(4+\delta)}} \mathcal{R} + \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}_{MP}, \quad (2.39)$$

onde $g_{(4+\delta)}$ e \mathcal{R} são respectivamente o determinante da métrica e o escalar de curvatura em $(\delta + 4)$ -dimensões, \mathcal{L}_{MP} é a Lagrangiana que descreve os campos do *Modelo Padrão*.

Como objetivamos relacionar as *massas de Planck*, compactaremos nossa teoria de $(\delta + 4)$ para 4 dimensões. Deste modo, no regime de baixas energias, a ação 4-dimensional do modo zero, após realizarmos as integrais com respeito às coordenadas extras, assume a forma [32]:

$$\frac{\hat{M}_D^{2+\delta}}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi R} d^\delta z \sqrt{g_{(4+\delta)}} \mathcal{R} \rightarrow \frac{\hat{M}_D^{2+\delta} (2\pi R)^\delta}{2} \int d^4x \sqrt{g} R_{(4)}, \quad (2.40)$$

onde g é o determinante da métrica e $R_{(4)}$ escalar de curvatura, ambos em $4D$. Para recuperar o limite *Newtoniano* correto é necessário que algum mecanismo estabilize o raio das dimensões extras [33]. O lado direito da Eq. (2.40) descreve a gravidade quadrimensional, portanto podemos exprimir a relação entre a massa de *Planck* quadrimensional e a massa de *Planck* fundamental em D -dimensões:

$$M_{Pl}^2 = V_\delta \hat{M}_D^{2+\delta}, \quad (2.41)$$

onde $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G_{(4)}}^5$ é a *massa de Planck* quadrimensional, $V_\delta = (2\pi R)^\delta$ é o volume das dimensões compactas e $\hat{M}_D^{2+\delta} = M_D^{2+\delta}/(2\pi)^\delta = G_{(4+\delta)}^{-1}/S_{(3+\delta)}$ é a *massa de Planck* reduzida do espaço de D -dimensões ($D = \delta + 4$) [5].

Deste modo, a escala de *Planck* é determinada pela escala fundamental M_D e pelo volume do espaço compacto (V_δ). Vamos admitir que a escala fundamental da gravidade $M_D \sim \text{TeV}$, então

$$\begin{aligned} M_{Pl}^2 &= (2\pi R)^\delta \hat{M}_D^{2+\delta} \rightarrow R = \frac{1}{M_{Pl}} \left(\frac{M_{Pl}}{M_D} \right)^{2/\delta+1} \simeq \frac{1}{10^{28} \text{ eV}} \left(\frac{10^{16} \text{ TeV}}{M_D} \right)^{2/\delta+1} \\ R &\simeq 10^{32/\delta-12} (\text{eV})^{-1} \left(\frac{1 \text{ TeV}}{M_D} \right)^{2/\delta+1} \\ R &\simeq 10^{32/\delta-19} \text{ m}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

Podemos, por fim, estimar o raio das dimensões extras de posse da Eq. (2.42). Como fixamos a escala fundamental M_D , o raio dependerá apenas do número de dimensões extras (δ).

Número de dimensões extras	R
$\delta = 1$	$\sim 10^{13} \text{ m}$
$\delta = 2$	$\sim 10^{-3} \text{ m}$
$\delta = 3$	$\sim 10^{-9} \text{ m}$
$\delta = 4$	$\sim 10^{-11} \text{ m}$

Tabela 2.1: Estimativa para o raio da dimensão extra assumindo diferentes valores de δ e $M_D \sim 1 \text{ TeV}$.

Para $\delta = 1$, de acordo com a tabela (2.1), já deveríamos ter observado a dimensão extra, devido o seu grande raio de compactação. Como não há observações de

⁵ $M_{Pl} = 1.22 \times 10^{16} \text{ TeV}$.

dimensões extras nessa escala, então, para o modelo de branas *ADD*, admite-se que existem no mínimo duas dimensões extras. De fato, esse modelo mantém-se em acordo com os resultados empíricos apenas se $\delta \geq 2$ [4, 5, 6]. Para $\delta = 2$ temos o caso mais interessante, pois apenas recentemente a gravitação vem sendo testada na escala sub-milimétrica e, nesse caso, são previstos desvios à lei da gravitação quadridimensional na escala de milímetros [32].

2.2 Vínculos Sobre os Modelos de Dimensões Extras

Após revisarmos os modelos de dimensões extras podemos discutir algumas implicações fenomenológicas resultantes da existência de um espaço suplementar. Estamos interessados no modelo de brana *ADD*, onde temos δ dimensões extras compactas com um raio de compactação R idêntico para todas as dimensões. Nesse cenário, todos os campos do *Modelo Padrão* estão presos à brana por meio de um mecanismo de aprisionamento e apenas a gravidade tem acesso ao espaço ambiente.

Nesse contexto, vamos apresentar os vínculos obtidos para o raio das dimensões extras, ou equivalentemente para a *massa de Planck*, M_D , encontrados por meio de diferentes sistemas físicos. Inicialmente tratamos dos testes da *lei do inverso do quadrado* que procuram por desvios da *gravidade Newtoniana* na escala submilimétrica. Detemos nossa atenção aos experimentos envolvendo balança de torção e apresentamos os vínculos mais recentes encontrados na literatura.

Posteriormente, discutimos os vínculos originados de dados de *Astrofísica*. Nesse caso, o teste experimental é proveniente da supernova do tipo-II *SN1987A*. Os vínculos são extraídos considerando o excesso na taxa de resfriamento da supernova como um fator limitante para a produção e fuga de grávitons para as dimensões extras. Ao final da seção mostramos os limites impostos sobre a *massa de Planck* do espaço $(\delta + 4)$ -dimensional.

Os vínculos de origem *Cosmológica* serão tratados em seguida. Analogamente aos limites de origem astrofísica, os vínculos cosmológicos são extraídos pelo estudo do resfriamento de um grande sistema físico. Desta feita, consideramos a taxa de resfriamento do universo e admitimos que a mesma é dominada pela *expansão Hubble*. Desse modo, limitamos o excesso de “evaporação” da densidade de energia para o espaço ambiente na forma de grávitons e apresentamos as restrições sobre a *massa de Planck* do espaço de dimensão elevada.

Finalmente, analisamos os vínculos que são encontrados pelos aceleradores de partículas através da colisão de hádrons. Nesse caso, os vínculos tem sua origem, principalmente, em processos de produção de grávitons que resultam em *jatos + energia faltante* ou $\gamma + \text{energia faltante}$. Em ambos os casos há uma “violação” na lei de conservação da energia no final do processo, devido os grávitons que são emitidos da brana para o espaço ambiente. Ao final, apresentamos os vínculos encontrados pelo *Large Hadron Collider (LHC)*.

2.2.1 Balança de Torção: Teste Gravitacional Submilimétrico

O cenário de dimensões extras *ADD* induz uma modificação no potencial gravitacional. No regime de curtas distâncias, vimos que a interação gravitacional é amplificada, enquanto para distâncias afastadas da fonte o comportamento quadridimensional esperado para a força gravitacional é recuperado. Então, a atração gravitacional entre dois corpos de massas m_1 e m_2 , por exemplo, pode ser descrita em termos do potencial como segue [4, 5]:

$$\begin{cases} V = -G_{(4)} \frac{m_1 m_2}{r} & (r \gg R) \\ V = -G_{(4+\delta)} \frac{m_1 m_2}{r^{\delta+1}} & (r \ll R) \end{cases}, \quad (2.43)$$

onde R é o raio de compactação da dimensão extra, $G_{(4)}$ é a constante gravitacional quadridimensional e $G_{(4+\delta)}$ é a constante de *Newton* em $(\delta + 4)$ dimensões.

A existência de uma *quinta força* ou até mesmo de *partículas escalares leves* previstas pelas teorias de cordas propõem, em seus fundamentos, modificações do *tipo Yukawa* ao potencial gravitacional. No cenário de dimensões extras compactas, os desvios à *lei do inverso do quadrado de Newton* para longas distâncias também podem ser parametrizados através do potencial [34, 35]

$$V = -G_{(4)} \frac{m_1 m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}), \quad (2.44)$$

onde $\alpha = \frac{4}{3}(2\delta)$ é um parâmetro que mede a intensidade da “nova interação” e está

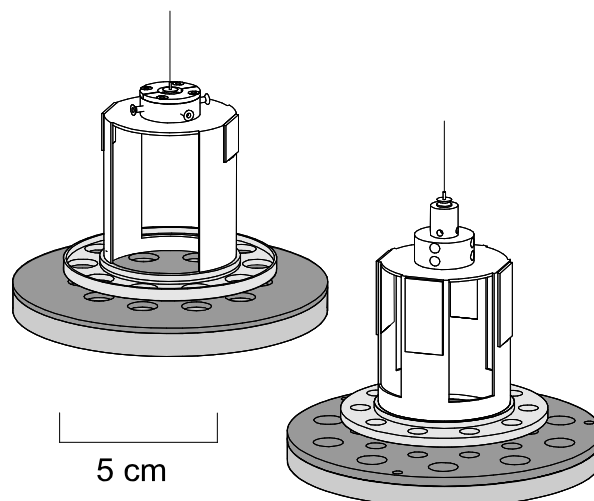


Figura 2.8: A balança de torção é composta por um pêndulo de torção e uma base atrator girante. Este aparato foi desenvolvido pelo grupo *Eöt-Wash* (Fig. 1 da Ref. [39]).

relacionado com o número de dimensões extras do espaço-tempo e λ é a escala de compactação da dimensão extra.

Motivado pela possibilidade de medir desvios na *lei do inverso do quadrado* em escalas submilimétricas, o grupo *Eöt-Wash* da universidade de Washington desenvolveu um experimento com balanças de torção (ver Fig. 2.8) [36, 37, 38]. O aparato consiste de um pêndulo de torção contendo um anel com 10 furos igualmente espaçados e um disco atrator girante que tem idênticos 10 furos em sua estrutura. Os furos em ambos os componentes desempenham um papel fundamental para o instrumento. Caso não houvesse os orifícios, o disco simplesmente atrairia gravitacionalmente o pêndulo para baixo. Entretanto, em virtude da presença dos corpos de prova, i.e., as “massas faltantes” (furos), o pêndulo irá provar um torque proporcional à frequência de rotação do atrator (ω). Por sua vez, esse torque faz o pêndulo girar e assim é medido por um sistema autocolimador; um feixe de laser é refletido por um espelho plano sobre o pêndulo e a variação angular é detectada/medida pelo autocolimador [39].

A Fig. 2.9 mostra os resultados de 5 experimentos que buscam desvios na *lei do inverso do quadrado* em diversas escalas de comprimento e intensidade de força. As curvas *Eöt-Wash 2004* e *Eöt-Wash 2006* são traçadas a partir de dados da balança de

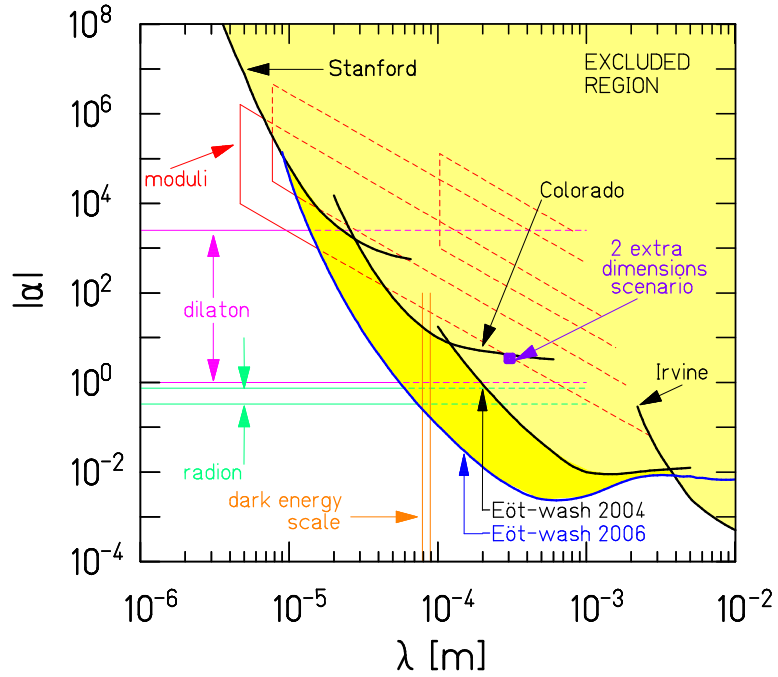


Figura 2.9: Com um nível de confiança de 95% encontramos que o raio da dimensão extra deve ser $R < 44 \mu\text{m}$. A região acima das curvas (linhas sólidas) apresenta limites sobre violações do *tipo-Yukawa* para o potencial gravitacional e descarta quaisquer desvios na lei do inverso do quadrado (Fig. 6 da Ref. [38]).

torção. O resultado do *Eöt-Wash 2006* nos mostra que, para $|\alpha| = 1$, qualquer nova interação do *tipo-Yukawa* deve ter uma escala $\lambda \leq 56 \mu\text{m}$. E ainda, admitindo que a modificação no potencial seja de origem geométrica devido a existência de um espaço suplementar, encontramos que, no cenário com uma dimensão extra, sua escala de compactação deve ser $\lambda \leq 44 \mu\text{m}$ [38]. Para $\delta > 1$ o vínculo imposto sobre λ irá variar pouco, se comparado ao caso $\delta = 1$, em virtude da pequena variação de $|\alpha|$. Embora a Fig. 2.9 apresente fortes vínculos na escala submilimétrica, devemos notar que a gravitação foi amplamente testada apenas em largas escalas de comprimento ($\lambda \gg \text{mm}$) e de intensidade ($|\alpha| > 10^{-3}$).

Caso sejam detectadas, em experimentos vindouros, violações da *gravitação Newtoniana* em escalas submilimétricas, uma questão surgirá naturalmente: Esse é um sinal de um efeito geométrico das dimensões extras ou trata-se da evidência da troca de novos bósons? A resposta virá testando se a interação, em curtas distâncias, viola o *princípio*

da equivalência. Efeitos geométricos, *a priori*, respeitam esse princípio. Todavia, a troca de bósons poderia violar o *princípio da equivalência*, uma vez que o seu acoplamento à matéria não ocorre de uma maneira universal [39].

2.2.2 Vínculos Astrofísicos

Os vínculos encontrados pelos colisores de partículas, para o cenário de dimensões extras de larga escala, são obtidos através da integração sobre um grande número de modos dos grávitons massivos. Nesse caso, se aumentamos a energia da colisão, ou a luminosidade, os vínculos tornam-se mais fortes [40].

Por outro lado, a possibilidade de produção de grávitons KK leves e fracamente interagentes tem se mostrado como um caminho alternativo para testar a física além do *Modelo Padrão*.

Nesse contexto, estamos interessados em sistemas astrofísicos que são (i) quentes, de modo que permitam a produção de *modos* KK (grávitons KK), e (ii) grandes o suficiente para produzir efeitos mensuráveis. Sendo assim, vamos considerar sistemas que satisfaçam a condição

$$T \gg R^{-1} \sim m_{KK}, \quad (2.45)$$

onde T é a temperatura do sistema, R é a escala de compactação e m_{KK} é a massa do modo KK . A condição (2.45) está expressa em unidades naturais: $c = 1$, $k_B = 1$ e $\hbar = 1$. Por sua vez, os modos massivos KK tem uma massa $|n|/R$, logo a separação entre as massas de modos adjacentes é

$$\Delta m \sim \frac{1}{R} = M_D \left(\frac{M_D}{M_{Pl}} \right)^{2/\delta} \sim \left(\frac{M_D}{\text{TeV}} \right)^{\frac{\delta+2}{\delta}} 10^{\frac{12\delta-31}{\delta}} \text{ eV}, \quad (2.46)$$

Usamos a relação (2.40) para exprimir o raio de compactação em função da massa de *Planck* fundamental M_D . Admitindo que $M_D \sim 1$ TeV podemos estimar esta separação:

$$\Delta m \sim \begin{cases} 10^{-4} \text{ eV}, \delta = 2 \\ \vdots \\ 7 \text{ MeV}, \delta = 6 \end{cases} . \quad (2.47)$$

Esta pequena escala de energia predita para a separação entre os estados KK , fixando $M_D \sim 1 \text{ TeV}$, nos permite admitir que, para $\delta \lesssim 6$, o espectro de grávitons KK é praticamente contínuo. Conseqüentemente, esperamos que, em processos de colisão em altas energias, exista um grande número de modos KK acessíveis.

Suponha que um objeto astrofísico tenha uma temperatura $T < R^{-1}$, onde R é o raio de compactação das dimensões extras. Nesse regime não haverá produção de estados excitados KK . Por outro lado, se a temperatura é $T \gg R^{-1}$, um grande número de modos KK podem ser produzidos. Neste regime, $T \gg R^{-1}$, podemos estimar a taxa de produção de grávitons multiplicando a intensidade de acoplamento, $\sim 1/M_{Pl}^2$, de um único gráviton pelo número de estados acessíveis KK , $(T/\Delta m)^\delta$, com massas abaixo de T [5, 41]:

$$\frac{dN}{dt} \propto \frac{1}{M_{Pl}^2} \left(\frac{T}{\Delta m} \right)^\delta \sim \frac{T^\delta}{M_D^{2+\delta}}, \quad (2.48)$$

onde δ é o número de dimensões extras, Δm é obtido pela Eq. (2.46) e M_D é a massa de Planck do espaço de dimensão maior. Embora o acoplamento de cada gráviton seja pequeno, $\sim 1/M_{Pl}^2$, a multiplicidade de estados acessíveis é muito grande, $\sim M_{Pl}^2$, e assim compensa a fraqueza do acoplamento. Através da Eq. (2.48), podemos concluir que, se a energia acessível é comparável à escala fundamental da gravidade M_D , devemos observar efeitos diretos da produção de grávitons. Note ainda que, à medida que a temperatura aumenta, esperamos que os efeitos se tornem maiores. Por esse motivo há um grande interesse em fenômenos de altas temperaturas em sistemas astrofísicos.

2.2.2.1 SN1987A

Um sistema astrofísico que possui os dois ingredientes fundamentais citados anteriormente [condições (i) e (ii)], além de ser bem compreendido do ponto de vista da física do *Modelo Padrão*, são as supernovas; em especial, focaremos nossa análise nos vínculos obtidos através da supernova do tipo-II *SN1987A*.

Durante o colapso de uma supernova, a energia gravitacional de ligação ($\sim 10^{53}$ erg)⁶ é liberada através do fluxo de neutrinos. Tais medidas podem ser utilizadas para vincular teorias além do *Modelo Padrão*, analisando o excesso de esfriamento da supernova. Após o colapso, uma vasta gama de processos podem produzir grávitons leves que escapam para as dimensões extras. Todavia, a reação dominante para produção de grávitons é [11],

$$N + N \rightarrow N + N + G, \quad (2.49)$$

onde N são os núcleons (nêutrons ou prótons) envolvidos na reação e G é o gráviton produzido.

Estamos interessados em encontrar a taxa de energia perdida pela supernova para os grávitons que escapam para o espaço suplementar. Assim, vamos definir a quantidade $\dot{\epsilon}_{a+b \rightarrow c+G}$, que é taxa com que a energia – por unidade de tempo por unidade de massa – é perdida para os grávitons através do processo $a + b \rightarrow c + G$ como [5]:

$$\dot{\epsilon}_{a+b \rightarrow c+G} = n_a n_b \frac{\langle \sigma_{a+b \rightarrow c+G} v_{rel} E_G \rangle}{\rho}, \quad (2.50)$$

onde o símbolo $\langle \rangle$ indica a média térmica, n_x é a densidade de número do núcleon x , σ é a seção de choque, ρ é a densidade de massa, v_{rel} é a velocidade relativa das partículas, E_G é a energia do gráviton. Por sua vez, a luminosidade está relacionada a $\dot{\epsilon}$ por [42]:

⁶1 eV = 1.602192×10^{-12} erg.

$$\mathcal{L} = \int_{estrela} \dot{\epsilon} dM \quad (2.51)$$

A seção de choque média para o processo, $N + N \rightarrow N + N + G$, pode ser estimada⁷ [5, 40, 41]:

$$\sigma v \sim (30 \text{ millibarn}) \left(\frac{T}{M_D} \right)^{2+\delta}. \quad (2.52)$$

Como mencionamos, durante o colapso de uma supernova, 10^{53} erg de energia é liberado em poucos segundos e isto concorda com as previsões do *Modelo Padrão* para a evolução estelar. Assim, devemos exigir que a luminosidade do gráviton seja menor do que 10^{53} erg/s (10^{16} GeV)². De fato, como estamos admitindo a existência de um canal alternativo para a perda de energia da supernova, a luminosidade desse canal deve ser tal que a concordância das observações dos neutrinos com a teoria seja assegurada. Finalmente, a estimativa para a luminosidade do gráviton no processo núcleon-núcleon é [40],

$$\mathcal{L}_G \sim M_{SN} \frac{n_N^2}{\rho} (30 \text{ millibarn}) \left(\frac{T}{M_D} \right)^{2+\delta} T, \quad (2.53)$$

onde M_{SN} é a massa da supernova, n_N é a densidade de número dos núcleons e ρ é a densidade de massa.

Utilizando a Eq. (2.53) podemos fazer uma estimativa para a massa de *Planck* fundamental M_D que satisfaz à condição $\mathcal{L}_G < 10^{53} \text{ erg/s}$. Deste modo, considerando a massa da supernova $M_{SN} \sim 1.6 M_\odot \sim 10^{57} \text{ GeV}$, a densidade de número do núcleon $n_N = 10^{-3} \text{ GeV}^3$ e a densidade de massa $\rho \sim 10^{-3} \text{ GeV}^4$, obtemos:

$$M_D \sim 10^{\frac{(15-4.5\delta)}{\delta+2}} \text{ TeV} \quad (2.54)$$

⁷1 barn = $10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2$.

O estudo detalhado dos limites envolvendo os dados da supernova *SN1987A* é discutido na Ref. [11] e, na sequência, apresentamos tais vínculos obtidos sobre M_D :

$$M_D \gtrsim \begin{cases} 50 \text{ TeV}, & \delta = 2 \\ 4 \text{ TeV}, & \delta = 3 \\ 1 \text{ TeV}, & \delta = 4 \end{cases} . \quad (2.55)$$

Equivalentemente, temos os vínculos em termos do raio das dimensões extras,

$$R \lesssim \begin{cases} 3 \times 10^{-4} \text{ mm}, & \delta = 2 \\ 4 \times 10^{-7} \text{ mm}, & \delta = 3 \\ 2 \times 10^{-8} \text{ mm}, & \delta = 4 \end{cases} . \quad (2.56)$$

Quando o número de dimensões extras é grande ($\delta > 5$), a separação das massas dos grávitons aumentará, tornando-se comparável à temperatura no interior do núcleo. Assim, apenas os primeiros grávitons da *torre KK* serão produzidos [11]. Devemos enfatizar que, os limites impostos sobre o raio das dimensões extras mostrados na expressão (2.56) são mais fortes, para $\delta > 1$, do que os resultados encontrados em estudos que buscam por desvios na *lei do inverso do quadrado* [36, 37, 38]. Desse modo, esse se constitui um importante e independente resultado.

Por fim, podemos mencionar ainda outro meio de vincular as teorias extra-dimensionais utilizando supernovas. Na realidade, após a explosão, a supernova dará origem a uma estrela de nêutrons que pode, em princípio, aprisionar gravitacionalmente uma grande quantidade dos grávitons *KK*. Se admitirmos que a estrela de nêutrons não tenha um aquecimento excessivo em virtude do decaimento de modos *KK* em fótons, encontramos os vínculos sobre a massa de *Planck* do espaço de dimensão maior $M_D > 1700$ TeV para $\delta = 2$ e $M_D > 76$ TeV para $\delta = 3$ [12, 43]. Embora esses limites sejam altos, eles podem ser atenuados se considerarmos que os modos *KK* decaem principalmente em estados que não são previstos pelo *Modelo Padrão*.

2.2.3 Vínculos Cosmológicos

Um caminho para a obtenção de limites sobre as teorias de dimensões extras, no contexto cosmológico, é o estudo do resfriamento adicional do universo [40]. No modelo *ADD*, além do resfriamento gerado pela expansão cosmológica do universo, a emissão de grávitons para o espaço ambiente – analogamente ao caso das supernovas – origina um resfriamento adicional. Dito de outro modo, o efeito do resfriamento excessivo é resultante da “evaporação” da densidade de energia da radiação no universo primordial sobre a brana, na forma de *modos KK*, para o espaço de dimensão maior (bulk) [5].

Estamos interessados em analisar as duas contribuições para a taxa de resfriamento do universo: o resfriamento pela *expansão Hubble* e pela “evaporação” de grávitons para as dimensões extras. Com esse objetivo, partiremos da equação fundamental que descreve a evolução cósmica, conhecida como equação de *Friedmann*, que é obtida aplicando a métrica de *Robertson-Walker* às equações de *Einstein* [44]:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_{(4)}}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.57)$$

onde H é a convencionalmente conhecida constante de *Hubble*, $G_{(4)}$ é a constante gravitacional *Newtoniana*, ρ é a densidade de energia cósmica – que inclui matéria, radiação e vácuo –, e Λ é a *constante cosmológica*. A partir da métrica de *Robertson-Walker* também podemos encontrar a taxa de aceleração cósmica [44]:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_{(4)}}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.58)$$

onde P é a pressão. Combinando as equações (2.57) e (2.58) encontramos a Eq. de conservação da energia:

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \dot{\rho} = -3H(\rho + P) \quad (2.59)$$

A densidade de energia, no regime relativístico, $\rho \sim T^4$ [41]. Assim, a contribuição da expansão do universo para o resfriamento da densidade de energia sobre a brana é dada por:

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\text{expansão}} \sim -3H\rho \sim -\frac{T^6}{M_{Pl}}. \quad (2.60)$$

Todavia, como vimos na Eq. (2.48), se o espaço-tempo é uma variedade $(4 + \delta)$ -dimensional, a taxa de produção de grávitons é proporcional a $1/M_D^{2+\delta}$. Por sua vez, a taxa de resfriamento pela evaporação de grávitons pode ser obtida por uma análise dimensional:

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\text{evaporação}} \sim -\frac{T^{\delta+7}}{M_D^{2+\delta}}. \quad (2.61)$$

A igualdade entre as expressões (2.60) e (2.61) vai nos fornecer a “temperatura de normalidade”, T_* . Se a taxa de expansão do universo for dominada pela taxa de evaporação, isto poderia modificar a evolução cosmológica do universo [13]. Por outro lado, se a expansão do universo for tal que o resfriamento pela *expansão de Hubble* domine, o universo se expande como o conhecemos e assim é dito normal. Deste modo, podemos impor um limite superior sobre a temperatura, T_* , para a qual o universo é normal [5]:

$$T_* \lesssim \left(\frac{M_D^{2+\delta}}{M_{Pl}^2} \right)^{1/(1+\delta)} \sim 10^{(6\delta-9)/(\delta+1)} \text{ MeV} \times \left(\frac{M_D}{1\text{TeV}} \right)^{(2+\delta)/(1+\delta)} \\ \lesssim \begin{cases} 10 \text{ MeV}, & \delta = 2 \\ \vdots & \vdots \\ 10 \text{ GeV}, & \delta = 6 \end{cases}, \quad (2.62)$$

onde admitimos que $M_D \sim 1 \text{ TeV}$.

Note que, como $T_* \gg 1 \text{ MeV}$ para $\delta \geq 2$, a *nucleossíntese do Big Bang (BBN)*⁸ não irá

⁸A abundância dos elementos leves observados no universo é descrita precisa e detalhadamente pela

sofrer alteração e nenhuma predição sua deverá ser modificada.

Nesse contexto, na Ref. [14] são encontrados fortes limites sobre a massa de *Planck* do espaço de dimensão maior considerando a produção de modos *KK* no final da transição de fase da *Cromodinâmica Quântica (QCD)*⁹. Neste caso, os vínculos cosmológicos são obtidos admitindo que a temperatura na qual ocorre a produção de *modos KK* deve ser inferior à temperatura da transição de fase da *QCD* (170 MeV). Se a temperatura T_* for muito grande, pode haver uma superprodução de grávitons pelas partículas do *Modelo Padrão* e isto alteraria a evolução cosmológica do universo [13].

Considerando apenas os *modos KK* que são produzidos em temperaturas abaixo de T_{QCD} , encontramos os vínculos:

Número de dimensões extras	$T_{QCD} = 170 \text{ MeV}$	$T_{QCD} = 135 \text{ MeV}$	$T_{QCD} = 100 \text{ MeV}$
$\delta = 2$	1,000 TeV	390 TeV	86 TeV
$\delta = 3$	59 TeV	26 TeV	7.4 TeV
$\delta = 4$	9.0 TeV	4.4 TeV	1.5 TeV

Tabela 2.2: Limites sobre a *massa de Planck* (M_D) para diferentes valores de δ e T_{QCD} [14].

Se permitirmos que a produção de grávitons ocorra para uma temperatura superior à $T_{QCD} = 170 \text{ MeV}$, para o caso $\delta = 2$, por exemplo, a *massa de Planck* $M_D > 10^3 \text{ TeV}$ e o *problema da hierarquia* seria reintroduzido de uma forma moderada. Nesse cenário, necessitaríamos de outro mecanismo para explicar a disparidade entre as escalas eletrofraca e gravitacional [14].

2.2.4 Vínculos de Colisores de Partículas

Uma miríade de processos é estudada nos colisores de partículas buscando por traços de física além do *Modelo Padrão*, que incluem desde a detecção de partículas super-
Nucleossíntese do Big Bang ($T_{\text{BBN}} \sim 1 \text{ MeV}$).

⁹A transição de fase da *Cromodinâmica Quântica* ocorre num tempo $t \simeq 10^{-6} \text{ s}$ após o *Big Bang*. Nesse momento os quarks ficam confinados nos hádrons.

simétricas até sinais de dimensões extras. O cenário de branas *ADD* prevê a produção de grávitons, que teriam acesso ao espaço ambiente, em processos de colisão de hádrons e sua detecção ocorreria apenas se $M_D \sim \text{TeV}$ [43]. Partindo de uma teoria da gravitação em $(\delta + 4)$ dimensões, pode-se descrever e analisar esses eventos através de uma teoria efetiva válida para energias menores que M_D [9].

Como mostramos anteriormente [ver Eq. (2.46)], no cenário de dimensões extras de larga escala *ADD*, para $\delta < 6$, a separação na massa entre estados *KK* adjacentes é muito pequena, se comparada à resolução experimental do *LHC*, por exemplo [10]. Deste modo, esperamos que uma grande quantidade de grávitons seja produzida em processos de colisão em altas energias. Em virtude disso, podemos substituir a soma sobre todos os estados *KK* pela integral sobre a densidade de estados. O número dN de modos *KK* com momento entre $|n|$ e $|n| + dn$ é:

$$dN = S_{\delta-1} |n|^{\delta-1} dn, \quad (2.63)$$

onde $S_{\delta-1} = 2\pi^{\delta/2}/\Gamma(\delta/2)$ é área de uma δ -esfera de raio unitário. Fazendo uma mudança de variáveis $m = |n|/R$, a Eq. (2.63) assume a forma:

$$dN = S_{\delta-1} m^{\delta-1} R^\delta dm. \quad (2.64)$$

Podemos expressar o raio de compactação em função da massa de *Planck* M_D do espaço de dimensão maior por meio da Eq. (2.40). Assim, encontramos o número de modos:

$$dN = S_{\delta-1} \frac{M_{Pl}^2}{M_D^{2+\delta}} m^{\delta-1} dm. \quad (2.65)$$

Finalmente, a seção de choque diferencial inclusiva para a produção de grávitons será dada por:

$$\frac{d^2\sigma}{dt dm} = S_{\delta-1} \frac{M_{Pl}^2}{M_D^{2+\delta}} m^{\delta-1} \frac{d\sigma_m}{dt}, \quad (2.66)$$

onde $d\sigma_m/dt$ é a seção de choque diferencial de um único gráviton KK de massa m e $t = (p_q - p_G)^2$ é a variável de *Mandelstam*, onde $dt \propto d\Omega_{CM}$. A Eq. (2.66) é uma expressão genérica e assim pode ser aplicada à qualquer processo específico envolvendo produção de grávitons.

Como exemplo, vamos considerar o subprocesso dominante, $qg \rightarrow qG$, do processo de produção de grávitons $pp \rightarrow jet + \cancel{E}_T$. A energia faltante \cancel{E}_T é uma consequência direta da violação da conservação da energia devido à emissão dos grávitons na direção transversal à brana; com isso os grávitons escapam à detecção. Por sua vez, a seção de choque diferencial para a produção de um único gráviton de massa m é [9]:

$$\frac{d\sigma_m}{dt}(qg \rightarrow qG) = \frac{\alpha_s}{96} \frac{1}{s M_{Pl}^2} F_2 \left(\frac{t}{s}, \frac{m^2}{s} \right), \quad (2.67)$$

onde α_s é a constante de acoplamento da interação forte, s é a energia do centro de massa e F_2 é uma função polinomial que é dada no apêndice da Ref. [9]. Embora a seção de choque para um único gráviton tenha uma grande supressão, M_{Pl}^{-2} , a multiplicidade de estados na seção de choque inclusiva compensa esse fator, possibilitando assim a detecção de grávitons em processos de colisão se $M_D \sim \text{TeV}$.

Antes de prosseguirmos com a análise do processo (2.67), devemos verificar o regime de validade para os cálculos da teoria efetiva. Isto pode ser feito analisando o parâmetro de expansão nas correções de loop em D -dimensões. Sendo assim, segundo a Ref. [9], o parâmetro de expansão é:

$$\frac{S_{(D-1)}}{2(2\pi)^D} \left(\frac{E}{M_D} \right)^{D-2} \ll 1, \quad (2.68)$$

onde $S_{D-1} = 2\pi^{(D-1)/2}/\Gamma((D-1)/2)$ é a área da superfície de uma esfera de raio unitário em $(D-1)$ dimensões.

Então, a energia máxima permitida no estudo perturbativo é,

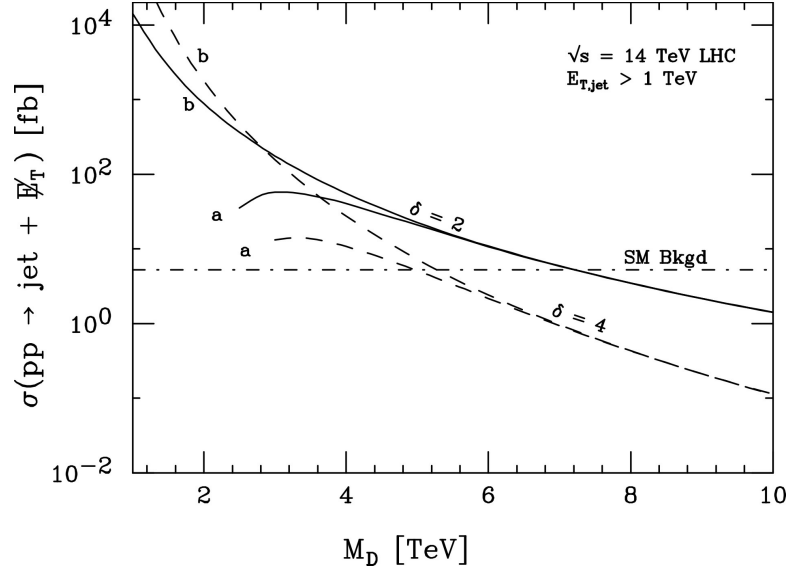


Figura 2.10: A seção de choque total do processo jato + energia faltante versus M_D , integrada para $E_{T,\text{jato}} > 1$ TeV. A linha horizontal representa o background do *Modelo Padrão* (Fig. 4 da Ref. [9]).

$$E_{\text{máx}} = \Gamma(2 + \delta/2)^{\frac{1}{2+\delta}} (4\pi)^{\frac{4+\delta}{4+2\delta}} M_D > 7.2M_D. \quad (2.69)$$

Para valores acima de $E_{\text{máx}}$, os efeitos da gravidade-quântica podem surgir e nesse caso essa análise perde sua validade.

O resultado dos limites sobre M_D , encontrados pelo estudo da produção direta de grávitons, considerando o processo $pp \rightarrow \text{jeto} + \cancel{E}_T$, são mostrados na Fig. 2.10. A região de confiança para análise perturbativa ocorre quando as curvas do tipo “a” interceptam as curvas “b” para um determinado δ , enquanto que, na região onde as curvas “a” e “b” se separam, as contribuições desconhecidas da física do ultravioleta serão importantes e, sendo assim, essa análise perde sua validade. As curvas “a” são construídas integrando a seção de choque sobre $\hat{s} < M_D^2$. Por outro lado, as curvas “b” são obtidas integrando sobre todos os valores de \hat{s} . Sendo assim, as curvas “a” são previsões conservadoras.

Podemos observar que, para $\delta \geq 5$, não existe nenhuma região para M_D em que podemos confiar simultaneamente na teoria perturbativa e obter um sinal “visível” no *LHC*. Enquanto que, para $\delta < 5$, o *LHC* pode provar uma região multi-TeV em regime

perturbativo. Por outro lado, a análise do processo $pp \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T$ nos fornece vínculos mais fracos – bem como uma região perturbativa reduzida – se comparados aos limites obtidos no processo anterior. Isso se dá em virtude do pequeno acoplamento eletromagnético e da menor luminosidade desse processo [9].

Os vínculos recentes obtidos pelo *LHC* sobre a *massa de Planck* do espaço D -dimensional ($D = \delta + 4$) através da colisão próton-próton, cujo produto final é $jato + \cancel{E}_T$, são apresentados na Tab. 2.3.

Número de dimensões extras	$M_D >$
$\delta = 2$	5.61 TeV
$\delta = 3$	4.38 TeV
$\delta = 4$	3.86 TeV
$\delta = 5$	3.55 TeV
$\delta = 6$	3.26 TeV

Tabela 2.3: Limite inferior sobre a escala fundamental de *Planck* (M_D) para $\sqrt{s} = 8$ TeV [10, 45].

Os limites encontrados pelo estudo do processo $pp \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T$ são mais fracos do que os mostrados na Tab. 2.3, então, não reportaremos aqui tais vínculos. Os limites impostos sobre a produção de seção de choque do modelo *ADD*, nos permite traduzir os resultados em exclusões sobre o espaço de parâmetros do modelo (δ e M_D), como encontra-se resumido na Tab. 2.3. Note que, embora os vínculos sobre M_D também decresçam com o aumento da dimensionalidade do espaço-tempo, essa redução é menos acentuada do que os limites encontrados nos cenários astrofísico e cosmológico, por exemplo. Por fim, os resultados encontrados pelos colisores nos fornecem os vínculos mais fortes para $\delta > 4$, se comparados aos limites oriundos de dados de *Astrofísica*, *Cosmologia* ou *desvios na lei do inverso do quadrado*.

3 Vínculos Espectroscópicos sobre as Dimensões Extras

“ Distress not yourself if you cannot at first understand the deeper mysteries of Spaceland. By degrees they will dawn upon you. ”

Edwin A. Abbot, *Flatland: A romance of many dimensions*, 1884

Nos cenários de branas, a gravidade vaza para as dimensões extras, enquanto que as partículas e os campos do *Modelo Padrão* estão confinados à subvariedade, denominada 3-brana, desde que não sejam excitados a uma escala de energia maior do que TeV [10]. A existência de um modo zero localizado sobre a brana assegura que o comportamento quadridimensional da força gravitacional seja recuperado para distâncias muito maiores do que a escala característica do espaço suplementar (ℓ). Nos modelos com dimensões compactas, a escala ℓ corresponde ao tamanho da dimensão extra, enquanto em modelos de dimensões extras não-compactas, ℓ está relacionado ao raio de curvatura do espaço ambiente. A força gravitacional sentirá os efeitos das dimensões extras apenas abaixo dessa escala de comprimento. Por outro lado, os campos confinados à brana sofrerão influências das dimensões extras numa escala, L_m , que pode ser muito menor do que ℓ . Nesse caso, a escala L_m age efetivamente como a região acessível, na direção transversal à brana, para os campos do *Modelo Padrão*. No modelo ADD, $L_m < 10^{-19}$ m [4], enquanto, para branas inspiradas em teorias de cordas, L_m é muito menor [5].

Neste capítulo, inspirados pela possibilidade de procurar por sinais de dimensões extras na espectroscopia de átomos de hidrogênio, analisaremos os efeitos da existência de um espaço de codimensão elevada sobre este sistema ligado. Assim, pretendemos encontrar limites independentes para o número e o raio das dimensões extras. No

cenário de dimensões extras é razoável esperar que o comportamento da gravidade seja modificado em distâncias inferiores a ℓ . Como vimos anteriormente (ver Seção 2.1.2.4), se o campo gravitacional, no limite de campo fraco, obedece à lei de *Gauss*, então o potencial gravitacional de uma massa m tem o comportamento descrito em (2.43):

$$\begin{cases} V = -G_{(4)} \frac{m}{r}, \text{ para } r \gg \ell \\ V = -G_{(4+\delta)} \frac{m}{r^{\delta+1}}, \text{ para } r \ll \ell \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $G_{(4+\delta)} \sim G_{(4)} \ell^\delta$ é a constante de *Newton* no espaço de dimensão superior. A relação entre $G_{(4+\delta)}$ e a constante *Newtoniana* quadrimensional $G_{(4)}$ depende do volume do espaço extra-dimensional; e este, por sua vez, depende da topologia e curvatura do espaço suplementar.

É notório que a interação gravitacional usual quadrimensional é desprezível em sistemas atômicos. Por exemplo, para um átomo de hidrogênio no estado fundamental a energia potencial gravitacional média é da ordem de $G_{(4)} m_p m_e / a_0 \sim 10^{-38}$ eV, onde a_0 é o *raio de Bohr*. Entretanto, devido aos efeitos das dimensões extras, no regime de curtas distâncias ($r < \ell$), a energia potencial será amplificada por um fator da ordem de $(\ell/r)^\delta$. Assim, ao menos em princípio, a energia gravitacional poderia distorcer o espectro de energia do hidrogênio. Portanto, a utilização das medidas altamente precisas de transições atômicas pode ser um caminho para impor vínculos empíricos sobre os modelos de dimensões extras.

Podemos calcular o desvio, por efeito da contribuição gravitacional, na energia de um determinado estado ψ no átomo de hidrogênio, admitindo que a energia potencial gravitacional é uma perturbação da Hamiltoniana do átomo. Essa perturbação na energia é proporcional a $\langle r^{-(\delta+1)} \rangle$, ou seja, a média de $r^{-(\delta+1)}$ naquele estado. Entretanto, para os estados S essa média diverge se $\delta \geq 2$. Como foi apontado na Ref. [9], esse problema tem relação com o fato de que o comportamento do propagador do gráviton, em curtas distâncias, não é computável no modelo *ADD* original, mesmo no nível de árvore, sugerindo que ele pode depender dos detalhes ultravioletas de uma teoria

quântica da gravitação.

As primeiras tentativas de vincular os parâmetros extra-dimensionais usando espectroscopia atômica se depararam com essa divergência dos estados S e para contornar estabeleceram um raio de corte [17, 18, 19, 20, 21]. No entanto, nesse caso, as restrições tornam-se dependentes deste parâmetro arbitrário. De outro modo, se considerarmos os efeitos extra-dimensionais aplicados à espectroscopia molecular [22], i.e., se estudarmos o desvio que a modificação do potencial gravitacional, no cenário de dimensões extras, fornece aos níveis de energia molecular, também conseguiremos evitar esse problema. Todavia, essa abordagem nos proporciona vínculos muito mais fracos.

Esse problema da divergência, no nível clássico, surge porque a distribuição de matéria confinada na brana é singular da perspectiva do espaço ambiente. Sendo assim, o confinamento do tipo-delta é apenas uma idealização que omite a estrutura interna da brana. A subestrutura da brana tem fundamental relevância para regular as divergências de uma teoria efetiva no cenário de brana fina, como foi apontado por [46, 47]. Na Ref. [46], por exemplo, essas divergências são tratadas através da introdução de um esquema de renormalização. Na nossa abordagem, por outro lado, seguimos um procedimento diferente que depende do fato de que, no cenário da branas espessas, a função de onda das partículas localizadas sobre a hipersuperfície quadridimensional tem certa largura σ no espaço extra-dimensional. Mostraremos que, quando consideramos essa largura, a média $\langle r^{-(\delta+1)} \rangle$ é finita e depende de σ . Deste modo, nossa análise fornece uma restrição conjunta para a massa *Planck* do espaço de dimensão maior e para a espessura da brana, uma vez que o valor da largura é delimitado pela espessura da brana.

3.1 Um Átomo em uma Brana Espessa

De acordo com as teorias de cordas, a brana é uma hipersuperfície quadridimensional infinitamente fina. Todavia, do ponto de vista da teoria de campos, como vimos na

Seção 2.1.2.3, ela pode ter uma espessura. Nesse caso, se consideramos um espaço ambiente de $(4 + 1)$ -dimensões, uma 3-brana pode ser representada como uma solução de parede de domínio de algum campo escalar [30]. O confinamento de matéria no interior da parede de domínio é assegurado através de uma interação do *tipo-Yukawa* entre os campos espinoriais de *Dirac* e o campo escalar. Encontramos que, devido a esta interação, o modo-zero do campo espinorial será dado pela seguinte função de onda:

$$\Psi(\mathbf{x}, z) = \exp\left[-h \int_0^z \varphi_0(z') dz'\right] \psi(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

onde h é a constante de acoplamento, $\psi(\mathbf{x})$ representa um espinor $(3 + 1)$ -dimensões, $\varphi_0 = \nu \tanh(z/\varepsilon)$ é a solução do tipo parede de domínio que conecta dois vácuos, $\pm\nu$, do campo escalar. A parte extra-dimensional da função de onda tem um pico em $z = 0$ e cai abruptamente quando nos afastamos do centro da parede de domínio. A espessura da brana é definida pela quantidade ε que, de acordo com os atuais limites experimentais, deve ser menor do que 10^{-19} m [4, 10].

Considerando um espaço de $(4 + \delta)$ -dimensões, pode-se idealizar um mecanismo de confinamento para a matéria em defeitos topológicos de codimensões elevadas. Ao generalizar o resultado acima para um espaço com δ dimensões extras, podemos considerar que, do ponto de vista fenomenológico, a função de onda das partículas localizadas pode ser escrita como $\Psi(x, z) = \chi(z) \psi(x)$. Por uma questão de simplicidade, assumiremos que a parte extra-dimensional $\chi(z)$ é uma função gaussiana localizada em torno do centro da brana com um desvio padrão σ :

$$\chi(z) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\delta} \frac{z_i^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.3)$$

Devemos enfatizar que o comprimento da função de onda nas direções transversas deve satisfazer a condição $\sigma < \varepsilon < \ell$. E, embora tenhamos escolhido o perfil *Gaussiano* na direção transversa, a função de onda extra-dimensional, χ , pode ser qualquer função normalizada de z , como mostraremos [ver *Apêndice B*].

3.2 A Interação Gravitacional no Cenário de Branas Espessas

Vamos agora descrever a interação gravitacional entre o próton e o elétron no cenário de branas espessas. No regime de campo fraco, existe um sistema de coordenadas em que o potencial gravitacional satisfaz a equação de *Laplace* no vácuo [48]. Assim, em primeira ordem de $G_{(4+\delta)}$, o potencial exato produzido por uma massa puntiforme em um espaço de dimensão superior pode ser obtido para qualquer topologia compacta [34]. Por exemplo, se o espaço suplementar tem uma topologia de um δ -dimensional toro com tamanho $\ell (= 2\pi R)$, então, o potencial gravitacional de uma massa m no ponto $\mathbf{R} = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ do espaço ambiente é dado por [16]:

$$V(\mathbf{R}) = -\frac{G_{(4+\delta)}m}{R^{\delta+1}} - \sum_i \frac{G_{(4+\delta)}m}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'_i|^{\delta+1}}, \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{R}'_i = \ell(0, 0, 0, k_1, \dots, k_\delta)$ e $[k_1, k_2, \dots, k_\delta]$ são inteiros. O potencial (3.4) é uma solução da equação de *Laplace* em $(3 + \delta)$ -dimensões com as condições de contorno apropriadas. Na verdade, a forma do vetor \mathbf{R}_i garante que $V(\mathbf{R})$ é periódico em relação às direções extra-dimensionais, conforme exigido pela topologia do espaço suplementar. Note ainda que, da perspectiva do espaço $\mathbb{R}^{3+\delta}$, $V(\mathbf{R})$ pode ser visto como uma superposição de potenciais gerados pela massa real m , na origem, e por inúmeras cópias (imagens topológicas) da massa localizadas pelos vetores \mathbf{R}'_i [25]. Note que este resultado trata-se de uma generalização do caso analisado na Seção 2.1.2.4, onde tínhamos $\delta = 1$.

Para pontos afastados da fonte, isto é, para $|\mathbf{x}| \gg \ell$, (3.4) reproduz o potencial *Newtoniano* usual. As correções sobre o potencial gravitacional devido às dimensões extras também podem ser escritas como $1/r (1 + \alpha e^{-r/\lambda})$ [34]. Embora essa correção do *tipo-Yukawa* seja utilizada em experimentos com balança de torção [15], em sistemas ligados, como o átomo, a principal contribuição vem do primeiro termo de (3.4),

ao menos se o átomo se encontra em estados mais baixos. As primeiras correções resultam das imagens topológicas próximas de m . O potencial de cada um desses 2δ primeiros vizinhos é desprezível ($G_{(4+\delta)}m/\ell^{\delta+1} \sim G_{(4)}m/\ell$) em comparação ao primeiro termo [16].

3.3 Contribuição Gravitacional aos Níveis de Energia

Considerando uma fonte puntiforme, o potencial gravitacional será simplesmente $-G_{(4+\delta)}m/R^{\delta+1}$, que é proporcional à função de *Green* do operador *Laplaciano* no espaço plano de dimensão maior ($\mathbb{R}^{\delta+3}$). Finalmente, nesta aproximação, admitindo que a massa do próton m_p é distribuída uniformemente pelo núcleo, o potencial produzido pelo próton será [16]:

$$\phi(\mathbf{R}) = -G_{(4+\delta)} \int \cdots \int \frac{\rho(\mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^{\delta+1}} d^{3+\delta}\mathbf{R}', \quad (3.5)$$

onde a densidade de massa é $\rho = |\Psi_p|^2 m_p$ e $\Psi_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \chi(\mathbf{z}) \psi_p(\mathbf{x})$ é função de onda do próton no espaço de dimensão maior. Em virtude da uniformidade na distribuição de massa no interior do núcleo, a função de onda tridimensional, $\psi_p(\mathbf{x})$, é constante na parte interna e zero no exterior do núcleo.

A energia cinética média do elétron, no átomo de hidrogênio, representa uma pequena fração de sua energia de repouso. Deste modo, é razoável considerar a versão não-relativística do sistema atômico, ao menos em uma primeira aproximação. A interação gravitacional entre o elétron e o próton, no cenário clássico, é governada simplesmente pela Hamiltoniana $H_G = m_e \phi$. Agora, supondo que H_G é um termo pequeno da Hamiltoniana do átomo hidrogênio, podemos encontrar o desvio na energia de um determinado estado atômico a partir da teoria de perturbação. Assim, esse desvio será dado por:

$$\delta E_\psi^g = \int \cdots \int |\Psi_e|^2 m_e \phi(\mathbf{R}) d^{3+n}\mathbf{R}, \quad (3.6)$$

onde $\Psi_e(\mathbf{x}, z)$ é a função de onda do elétron no espaço de dimensão maior que é constituída de uma parte extra-dimensional $\chi(z)$ e outra, $\psi_e(\mathbf{x})$, descrita pelas soluções usuais da equação de *Schrödinger* para o átomo de hidrogênio.

Desta forma, a interação gravitacional entre o elétron e o próton, modificada pela existência de um espaço suplementar, altera o espectro de energia do hidrogênio. De posse das funções de onda dos estados $1S$ e $2S$ ($\psi_{1S} = 1/\sqrt{\pi a_0^3} \exp(-r/a_0)$ e $\psi_{2S} = 1/\sqrt{8\pi a_0^3} (1 - r/2a_0) \exp(-r/2a_0)$, respectivamente), podemos calcular a contribuição gravitacional à transição $2S - 1S$. Devemos enfatizar que a integral na região interna do núcleo fornece a contribuição dominante para Eq. (3.6). Assim, para a transição $2S - 1S$, obtemos:

$$|\delta E_{2S}^g - \delta E_{1S}^g| = \frac{7\gamma_\delta G_{(4+\delta)} m_p m_e}{8\pi a_0^3 \sigma^{\delta-2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r_p}{a_0} + \mathcal{O}(r_p^2/a_0^2) \right] [1 + \mathcal{O}(\sigma/r_p)], \quad (3.7)$$

onde a_0 é o raio de *Bohr* do hidrogênio e γ_δ é um fator que depende do número de dimensões extras. Por exemplo, $\gamma_3 = 2\pi^{3/2}$, $\gamma_4 = 4\pi/3$, $\gamma_5 = \pi^{3/2}/3$ e $\gamma_6 = 4\pi/15$. Por fim, podemos calcular o desvio na frequência da transição $2S - 1S$, $\Delta\nu_G = |\delta E_{2S} - \delta E_{1S}|/h$ por meio de (3.7) e comparar com os dados experimentais. Para mais detalhes sobre a obtenção da Eq. (3.7) ver o *Apêndice A*.

3.4 Vínculos Espectroscópicos sobre M_D e R

A frequência da transição $2S - 1S$, medida com uma altíssima precisão, no átomo de hidrogênio é $f_{\text{exp}} = 2466061413187035(10)$ Hz [49]. Por sua vez, a predição teórica – baseada sobre física quadridimensional – está em acordo com o valor experimental até a ordem do erro teórico, $\delta\nu_{th} = 32$ kHz, que é relacionado, principalmente, à incerteza na medida do raio do próton [50]. Por consistência, é natural que o efeito resultante das dimensões extras deva ser menor que a soma quadrática dos erros experimental e

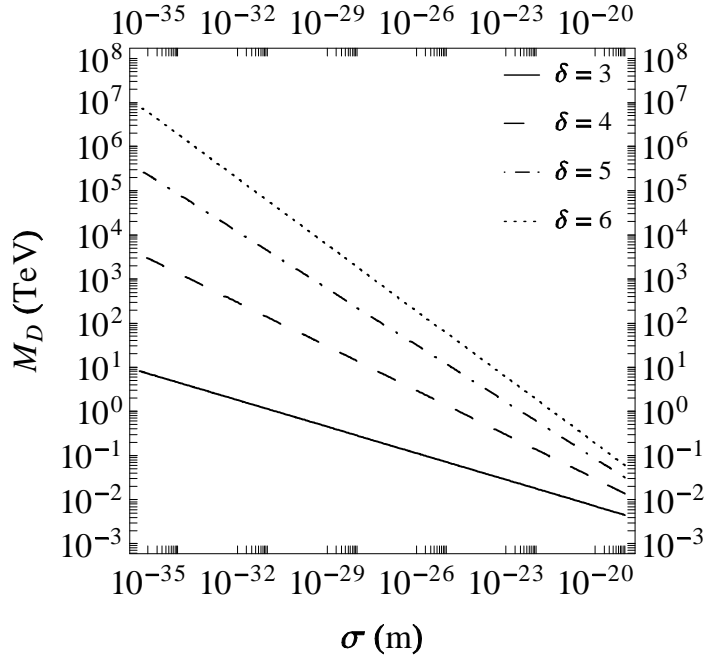


Figura 3.1: Limite inferior sobre a massa de *Planck* M_D em função de σ . As áreas abaixo das curvas são excluídas.

teórico. Assim, os limites sobre os parâmetros extra-dimensionais são obtidos impondo a condição $\Delta\nu_G < \sqrt{\delta\nu_{th}^2 + \delta\nu_{exp}^2}$.

A Figura 3.1 apresenta a análise numérica desta condição. O gráfico estabelece limites inferiores para a massa de *Planck* do espaço de dimensão maior, M_D , em termos de σ . A região de exclusão encontra-se abaixo das curvas. De acordo com as Refs. [9, 48], a massa de *Planck* fundamental é relacionada a $G_{(4+\delta)}$ por meio da fórmula

$$M_{(4+\delta)}^{2+\delta} \equiv M_D^{2+\delta} = \Omega_\delta (\hbar/c)^\delta \hbar c / G_{(4+\delta)}, \quad (3.8)$$

onde $\Omega_\delta = (2\pi)^\delta \Gamma(\frac{\delta+3}{2}) / [(\delta+2)2\pi^{(\delta+3)/2}]$.

Devemos enfatizar que o comprimento da função de onda das partículas nas direções transversas, σ , é menor do que a espessura da brana (ε). Sendo assim, esta análise mostra que os vínculos tornam-se mais restritivos para branas finas.

Os casos $\delta = 1$ e $\delta = 2$ não são mostrados porque os respectivos vínculos são muito fracos. No cenário de branas realísticas ($\varepsilon < 10^{-19}$ m), a principal contribuição da ener-

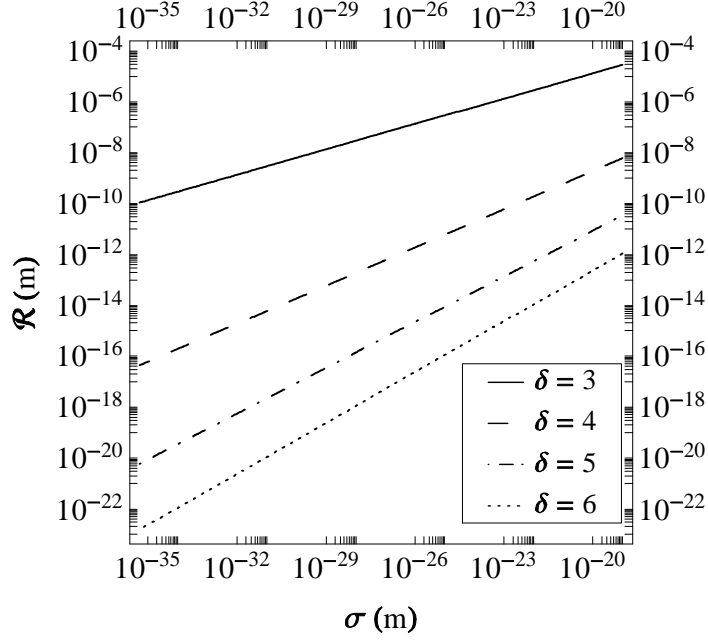


Figura 3.2: Limite superior sobre o raio das dimensões extras em termos de σ . As regiões acima das linhas são excluídas.

gia gravitacional para $\delta \geq 3$ vem da integral no interior do núcleo e o termo principal é da ordem de $G_{(4+\delta)} m_p m_e / a_0^3 \sigma^{\delta-2}$. Esta dependência explícita de σ explica por que as branas finas fornecem limites muito fortes à massa de *Planck* M_D .

No modelo *ADD* original, o espaço suplementar é um δ -toro plano com raio R . Alternativamente, podemos apresentar os vínculos sobre R . Neste caso, a relação entre R e a massa de *Planck* M_D (dada por $G_{(4)}^{-1} = 8\pi R^\delta \mathcal{M}_D^{2+\delta}$, onde $\mathcal{M}_D^{2+\delta} = M_D^{2+\delta} / [(\hbar/c)^\delta \hbar c]$, ver [9]) pode ser usada para restringir o raio da dimensão extra. A Figura 3.2 mostra os limites superiores sobre o raio de dimensão extra para $\delta = 3, 4, 5$ e 6 . A área compreendida acima das curvas representa a região de exclusão. Através deste resultado [Fig. 3.2] podemos observar que, para uma longa faixa do eixo σ , os vínculos obtidos por este estudo são mais fortes que os limites encontrados pelos experimentos que buscam desvios à *lei do inverso do quadrado*, por exemplo.

Por simplicidade, admitimos que a função de onda do espaço de dimensão maior tem o perfil *Gaussiano* (3.3). Entretanto, é importante enfatizar que essa suposição não desempenha um papel essencial em nossa análise. Na verdade, se considerarmos outros perfis, nossos resultados não mudam, desde que o parâmetro σ seja definido por [ver

Apêndice B]:

$$\frac{1}{\sigma^m} \equiv \frac{\Gamma(\delta/2)}{\Gamma(\frac{\delta-m}{2})} \int \frac{|\chi_p(z_1)|^2 |\chi_e(z_2)|^2}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^m} d^\delta z_1 d^\delta z_2, \quad (3.9)$$

onde m é um inteiro positivo que deve satisfazer a condição $m \leq (\delta - 1)$ e Γ é a função gama. Quando o perfil é *Gaussiano*, então o parâmetro σ corresponde à largura da função *Gaussiana*.

3.5 Correções Quânticas e a Escala Fundamental

Como mencionado anteriormente, os vínculos encontrados aqui, foram obtidos com base no regime clássico da interação gravitacional. No entanto, como foi enfatizado na Ref. [9], os efeitos da gravidade quântica podem tornar-se relevantes em uma escala de comprimento da ordem de l_D^1 ou mesmo em uma escala maior, dependendo da teoria da gravidade quântica. Isto poderia, em princípio, dar origem a efeitos inesperados que distorceriam ou até mesmo suprimiriam os resultados clássicos que investigamos neste estudo.

Como não conhecemos uma teoria da gravidade quântica, vamos analisar algumas possibilidades. Segundo [51], as correções quânticas à energia potencial gravitacional podem ser estimadas se tratarmos a *Relatividade Geral* como uma teoria efetiva. A energia potencial clássica tridimensional, é dada pelo termo *Newtoniano* GMm/d , onde d é a distância entre as partículas com massas M e m . Nesta abordagem, as contribuições quânticas são suprimidas por um fator da ordem de $(l_{Pl}/d)^2$, onde l_{Pl} é o comprimento de *Planck* do espaço tridimensional [51]. Por outro lado, no cenário de dimensões extras, o potencial clássico assume a forma $G_{(4+\delta)}Mm/d^{\delta+1}$ e, por meio de uma análise dimensional, as correções quânticas serão da ordem de $(l_D/d)^{\delta+2}$. Embora não possamos considerar o próton e o elétron como partículas puntiformes no átomo de hidrogênio,

¹O comprimento de *Planck* do espaço de dimensão maior, dado por $l_D = (\hbar/c) M_D^{-1}$.

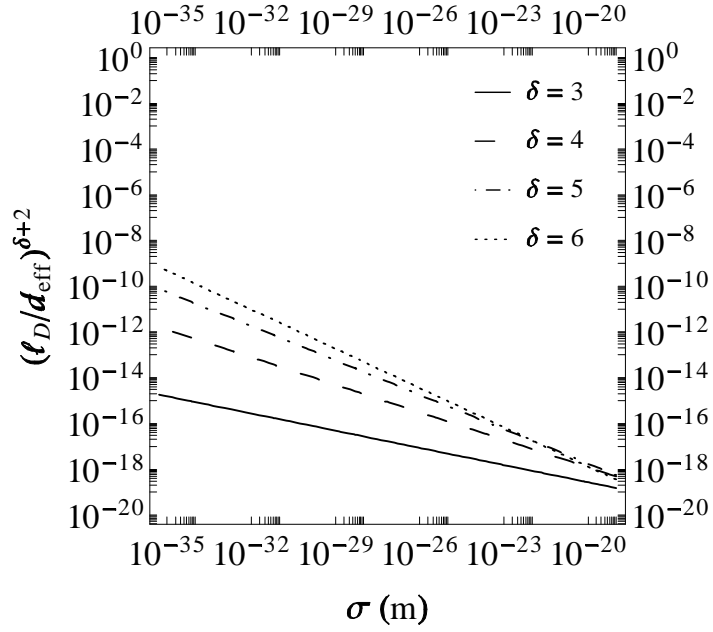


Figura 3.3: Relação entre o comprimento de *Planck* do espaço de dimensão maior (l_D) e a distância efetiva (d_{eff}). Esse fator representa o termo de expansão das correções quânticas à energia potencial gravitacional no cenário de dimensões extras

definiremos uma distância extra-dimensional efetiva, d_{eff} , entre tais partículas nesse sistema ligado. Se escrevermos a energia gravitacional atômica como $G_{(4+\delta)}m_p m_e / d_{eff}^{\delta+1}$, temos que $d_{eff}^{\delta+1} \sim \sigma^{\delta-2} a_0^3$, no estado fundamental. A escala de comprimento efetiva, d_{eff} , nesse caso, pode ser interpretada como uma média geométrica da largura dos pacotes de onda nas direções transversal e paralela à brana.

A Figura 3.3 mostra a análise numérica da relação $(l_D/d_{eff})^{\delta+2}$. Para obter essa análise numérica, partimos dos limites inferiores sobre M_D , obtidos através dos nossos vínculos espectroscópicos, e assim estimamos limites superiores para l_D como uma função de σ . A relação $(l_D/d_{eff})^{\delta+2}$ depende explicitamente de δ e σ . Entretanto, para quaisquer valores de δ e σ analisados aqui, teremos $(l_D/d_{eff})^{\delta+2} < 10^{-8}$ [ver Fig. 3.3]. Se admitirmos que d_{eff} é a escala de comprimento que regula o comportamento da gravidade neste sistema, podemos esperar que a contribuição clássica seja a principal influência gravitacional.

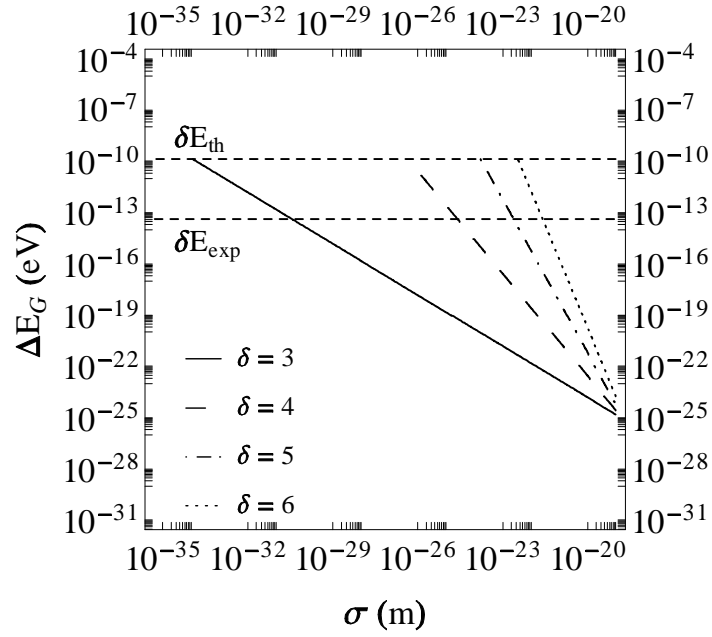


Figura 3.4: Contribuição da interação gravitacional em altas dimensões à transição $2S - 1S$ no átomo de hidrogênio, assumindo os vínculos do LHC sobre M_D . As linhas horizontais, δE_{exp} e δE_{th} , são os valores das incertezas experimental e teórica, respectivamente para a transição $2S - 1S$.

3.6 Comparações com Outros Limites

No contexto de dimensões extras de larga escala (ver capítulo 2), os limites experimentais sobre a massa fundamental de *Planck* podem ser determinados a partir de diferentes sistemas físicos. Quando o número de dimensões extras $\delta > 2$, alguns dos limites mais fortes sobre M_D são obtidos pelas colisões de partículas no regime de altas energias (TeV). A análise de dados de eventos de *monojet* em colisões de próton-próton no LHC fornece os seguintes limites inferiores para M_D em TeV/c^2 : 4.38 ($\delta = 3$), 3.86 ($\delta = 4$), 3.55 ($\delta = 5$) e 3.26 ($\delta = 6$) [45, 52]. Examinando a Figura 3.1 podemos dizer que, neste cenário de brana espessa, a espectroscopia nos fornece vínculos mais fortes, desde que o parâmetro de confinamento, σ , seja pequeno e os efeitos inesperados da gravidade quântica não suprimam o resultado clássico.

Em virtude de desconhecermos o valor de σ , estimaremos a influência máxima da energia gravitacional para o espectro do hidrogênio, considerando as restrições atu-

ais sobre M_D fornecidas pelo *LHC*. Assim procedendo, encontramos a Figura 3.4 onde mostramos a contribuição gravitacional para a transição ($2S - 1S$) no hidrogênio, ΔE_G , como função do parâmetro de confinamento, σ .

Deste modo, a energia gravitacional, ΔE_G , é comparada com a atual incerteza teórica δE_{th} e o erro experimental atual δE_{exp} encontrado para essa medida. Para qualquer valor de δ que consideramos, existe um intervalo no eixo σ em que ΔE_G é menor do que a incerteza teórica. No entanto, mesmo nessa faixa, as dimensões extras induzem uma enorme amplificação da energia gravitacional atômica em comparação com o caso tridimensional usual, que é da ordem de 10^{-38} eV. Dentro destas faixas específicas de σ , a Fig. 3.4 indica o quanto a precisão experimental deve ser melhorada para que a espectroscopia do hidrogênio torne-se capaz de revelar vestígios das supostas dimensões extras. Por fim, devemos enfatizar dois pontos. O primeiro é concernente ao fato de que essa previsão só é válida se nenhum efeito da gravidade quântica suprimir o resultado clássico. O segundo ponto que merece destaque refere-se ao fato de que, se os efeitos da gravidade quântica vierem a reforçar a contribuição clássica, então, os sinais das dimensões extras, embora imprevisíveis, serão observados antecipadamente.

3.7 Vínculos Alternativos: $\sigma > l_D$ e $\rho > \rho_D$

Se admitirmos que σ e l_D se relacionam de algum modo específico, podemos obter novos vínculos. Vamos considerar que l_D é menor que σ por um fator x , isto é, $l_D = x\sigma$, com $x < 1$. Nesse caso, a condição de que o desvio da energia da transição $2S - 1S$, devido à interação gravitacional, seja menor que a incerteza δE produz a seguinte restrição:

$$c^2 M_D > \left[\alpha_\delta \left(\frac{\hbar c}{a_0} \right)^3 \frac{m_p c^2 m_e c^2}{\delta E} \right]^{1/4} x^{(\delta-2)/4}, \quad (3.10)$$

onde $\alpha_\delta = 7\gamma_\delta \Omega_\delta / 8\pi$ e os coeficientes γ_δ tem os seguintes valores: $\gamma_3 = 2\pi^{3/2}$, $\gamma_4 = 4\pi/3$, $\gamma_5 = \pi^{3/2}/3$ e $\gamma_6 = 4\pi/15$. Por exemplo, se $x \equiv l_D/\sigma = 10^{-1}$, então os limites

inferiores para M_D , assumindo que $\delta E = 10^{-10}$ eV, devem ser da ordem de GeV, desta forma, 10^3 mais fracos que os vínculos encontrados pelo *LHC*, como podemos observar adiante.

$$c^2 M_D > \begin{cases} 0.59 \text{ GeV}, \delta = 3 \\ 0.39 \text{ GeV}, \delta = 4 \\ 0.27 \text{ GeV}, \delta = 5 \\ 0.20 \text{ GeV}, \delta = 6 \end{cases} . \quad (3.11)$$

A Eq. (3.10) explicita uma fraca sensibilidade de M_D com relação a precisão experimental. Efetivamente, se δE for reduzido por um fator de 10^4 , então, M_D deve ser vinculado mais fortemente apenas 10 vezes. Podemos também comparar esses vínculos com os limites obtidos em colisores de léptons. A Ref. [9] determinou a sensibilidade máxima de M_D que podemos alcançar em processos de colisão elétron-pósitron, cujo estado final resulte na produção de fótons ou energia faltante. Considerando $\sqrt{s} = 1$ TeV e a luminosidade integrada $\mathcal{L} = 200 \text{ fb}^{-1}$, os limites encontrados para $M_D c^2$ in TeV são: 4.0 ($\delta = 3$), 3.0 ($\delta = 4$), 2.4 ($\delta = 5$), quando a polarização do feixe é de 90%. Esses limites ainda são muito maiores do que aqueles obtidos em nossa análise anterior por meio da Eq. (3.10).

De outro modo, podemos obter novos vínculos, exigindo que a densidade de energia do espaço extra-dimensional, ρ , seja menor do que a densidade crítica, $\rho_D = M_D c^2 / l_D^{\delta+3}$, por algum fator y . Por simplicidade, vamos admitir um perfil *Gaussiano* na direção transversal e, desse modo, podemos estimar a densidade do próton no centro da brana espessa, $\rho \sim m_p c^2 / \sigma^\delta R_p^3$. Utilizando a condição $\rho / \rho_D = y$, podemos expressar σ em termos de y . E, desta forma, encontramos os limites sobre a massa fundamental de *Planck* em termos de y :

$$c^2 M_D > \beta_\delta \left(\frac{m_p c^2}{(R_p^3 / \hbar^3 c^3)} \right)^{1/4} \left(\frac{R_p^3 m_e c^2}{a_0^3 \delta E} \right)^{\delta/8} y^{(\delta-2)/8}, \quad (3.12)$$

onde $\beta_\delta = \alpha_\delta^{\delta/8} \left[(4\pi/3) (\pi/2)^{\delta/2} \right]^{(\delta-2)/8}$. Desse modo, fazendo $y = 0.1$ e considerando a atual incerteza teórica δE_{th} para a medida da transição $2S-1S$ no hidrogênio eletrônico, obtemos:

$$c^2 M_D > \begin{cases} 1.68 \text{ GeV}, \delta = 3 \\ 4.12 \text{ GeV}, \delta = 4 \\ 14.79 \text{ GeV}, \delta = 5 \\ 76.31 \text{ GeV}, \delta = 6 \end{cases} . \quad (3.13)$$

Esses limites são muito mais sensíveis, em relação a precisão δE , do que os vínculos encontrados anteriormente (3.11). De fato, se a condição (3.12) for calculada com a incerteza experimental atual, δE_{exp} , os limites serão no mínimo $10^{3\delta/8}$ vezes mais fortes. Assim, para $\delta = 6$, devemos ter $M_D > 32 \text{ TeV}/c^2$, que é mais forte do que os vínculos dos colisores.

3.8 Considerações Finais

Neste capítulo, estudamos a contribuição que a energia potencial gravitacional, modificada pela existência de um espaço suplementar, fornece aos níveis de energia de um estado ligado. Assim, usando medidas precisas da frequência de transição $2S-1S$ do hidrogênio, encontramos novos vínculos para a massa de *Planck* em $(4 + \delta)$ -dimensões em termos de um parâmetro de confinamento da matéria dentro da brana, σ , que deve ser menor que a espessura da brana ε .

Quando o parâmetro σ decresce, i.e., no limite de branas finas, os vínculos encontrados em nossa análise tornam-se mais fortes. Na verdade, comparando nossos resultados com os vínculos atuais do *LHC*, que nos fornecem $M_D > 4.38 \text{ TeV}/c^2$ ($\delta = 3$) até $M_D > 3.26 \text{ TeV}/c^2$ ($\delta = 6$) [45, 52], podemos concluir que, para determinados valores de σ , a espectroscopia atômica impõe restrições muito rigorosas sobre a massa fundamental de *Planck* M_D .

Esperamos que os efeitos da gravidade quântica apareçam antecipadamente, em comparação com o cenário sem dimensões extras, uma vez que a massa de *Planck*, M_D , pode ser muito menor do que a massa de *Planck* quadrimensional usual [9]. Todavia, como a teoria fundamental da gravidade quântica é desconhecida, os supostos efeitos quânticos são imprevisíveis. Os vínculos encontrados em nossa análise dependem do comportamento clássico da gravidade, portanto, esses resultados são válidos somente se as contribuições clássicas não forem canceladas pelos efeitos da gravidade quântica.

4 O Problema do Raio do Próton: Uma Evidência de Dimensões Extras?

“ [...] learn this lesson, that to be self-contented is to be vile and ignorant, and that to aspire is better than to be blindly and impotently happy. ”

Edwin A. Abbot, *Flatland: A romance of many dimensions*, 1884

Neste capítulo, abordamos o conhecido *problema do raio do próton* que versa sobre a incompatibilidade na aferição do raio do próton extraído de medidas do *Lamb shift*, no hidrogênio muônico, em comparação ao raio encontrado através de transições atômicas e medidas do espalhamento elétron-próton, no hidrogênio eletrônico. Apresentamos a sua origem e mostramos como o cenário de branas espessas fornece uma satisfatória explicação ao problema. No capítulo anterior vimos que, no cenário de branas, os níveis de energia de estados ligados sofrem desvios significativos devido à contribuição gravitacional modificada pela existência das dimensões extras. Sendo assim, é razoável esperar que nesse contexto, o *Lamb shift* também seja influenciado pela interação gravitacional. Desse modo, encontramos limites sobre M_D que solucionam *problema do raio do próton* e, ao final do capítulo, apresentamos uma discussão sobre tais vínculos.

4.1 O Problema do Raio do Próton

As medidas do *Lamb shift* no hidrogênio muônico – átomo formado por um múon e um próton (μp) – têm sido utilizadas para obter o raio de carga do próton com uma precisão altíssima [23, 24]. Entretanto, o resultado encontrado para o raio $r_p = 0.84184(67)$ fm é 4% menor do que o valor recomendado pelo *CODATA-2010*, $r_p^{CD} = 0.8775(51)$ fm [53], que é extraído da espectroscopia de átomos eletrônicos, hidrogênio

e deutério, [49,54,55,56,57,58,59,60] e de medidas da seção de choque diferencial do espalhamento elástico entre elétron-próton [61,62,63]. Essa disparidade entre os resultados representa uma discrepância de 7 desvios padrões e é conhecida como o *problema do raio do próton*.

O raio de carga do próton é definido como $\langle r_p^2 \rangle = \int r^2 \rho_E(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$, onde ρ_E é a densidade de carga elétrica normalizada do próton. Os efeitos da estrutura interna do próton sobre o espectro de energia atômica são previstos pela *Eletrodinâmica Quântica (QED)*. Desse modo, no hidrogênio muônico, espera-se que a contribuição para o *Lamb shift* $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ seja dada por [24, 64]:

$$\Delta E_L^{th} = \left[206.0668(25) - 5.2275(10) \frac{r_p^2}{\text{fm}^2} \right] \text{meV} \quad (4.1)$$

onde r_p é o raio do próton expresso em femtômetros. Podemos utilizar essa equação (4.1) para estimar a energia do *Lamb shift* utilizando o raio do próton proposto pelo *CODATA-2010*, e assim encontramos $\Delta E_L^{th}(r_p^{CD}) = 202.0416(469) \text{meV}$. Por outro lado, as medidas das transições ($\nu_s = 2P_{3/2}^{F=1} - 2S_{1/2}^{F=0}$) e ($\nu_t = 2P_{3/2}^{F=2} - 2S_{1/2}^{F=1}$) nos fornecem o valor experimental, extraído da fórmula [24, 64]:

$$\Delta E_L^{\text{exp}} = \frac{1}{4}h\nu_s + \frac{3}{4}h\nu_t - 8.8123(2) \text{meV}, \quad (4.2)$$

onde o termo numérico é derivado do cálculo explícito das separações fina e hiperfina no estado $2P$. Desse modo, utilizando as frequências medidas, $\nu_s = 54611.16(1.05) \text{GHz}$ [24, 64] e $\nu_t = 49881.35(65) \text{GHz}$ [23, 24, 64], obtemos $\Delta E_L^{\text{exp}} = 202.3706(23) \text{meV}$. A comparação entre os resultados do *Lamb shift* medido e previsto, pela *QED*, nos fornece uma diferença de $0.3290(469) \text{meV}$ que não tem nenhuma explicação do ponto de vista da física usual. Esse excesso de energia nos sugere um indício da ausência de um termo na equação (4.1) que estaria associado com alguma interação desconhecida envolvendo múon-próton e que difere da interação elétron-próton. Uma vasta gama de propostas foram sugeridas para explicar esse excesso de energia por meio de uma nova interação

além do *Modelo Padrão* [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78].

Diante do exposto, propomos resolver esse aparente problema considerando a interação gravitacional entre o próton e o múon. Uma vez que a massa do múon equivale aproximadamente a 207 vezes a massa do elétron, nos parece razoável conjecturar que a gravidade é a parte faltante desse quebra-cabeça. Entretanto, do ponto de vista da física quadridimensional usual o potencial *Newtoniano* é desprezível em sistemas atômicos. Por outro lado, no cenário de dimensões extras de larga escala, o potencial gravitacional é amplificado em curtas distâncias. Assim, esperamos que os efeitos extra-dimensionais forneçam distorções significativas sobre os níveis de energia.

Desta forma, considerando o hidrogênio muônico no cenário de branas espessas, encontramos o desvio nos níveis de energia associado à interação gravitacional múon-próton. Por meio destes cálculos, mostramos que a contribuição gravitacional à energia do *Lamb shift* pode fornecer o excesso de energia medido; e deste modo, resolvemos o problema do *raio do próton*. Esta condição ainda impõe vínculos sobre a massa de *Planck* M_D , ou alternativamente sobre o raio das dimensões extras, que são consistentes com os limites experimentais atuais.

4.2 A Energia Gravitacional de um Átomo em uma Brana Espessa

No capítulo 3, considerando o contexto de branas, mostramos que os níveis de energia do átomo hidrogênio são afetados pela interação gravitacional entre o próton e o elétron. Agora, analisando a interação entre o próton e o múon, vamos calcular a contribuição gravitacional para os níveis de energia desse sistema ligado. No cenário de dimensões extras compactas, o potencial gravitacional gerado pelo próton, admitindo

que a massa do próton m_p é uniformemente distribuída no interior do núcleo, é:

$$\phi(\mathbf{R}) = -G_{(4+\delta)} \int \frac{\rho_M(\mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^{\delta+1}} d^{3+\delta}\mathbf{R}', \quad (4.3)$$

onde $\rho_M = |\Psi_p|^2 m_p$ é a densidade de massa do próton e $\Psi_p(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \chi_p(\mathbf{z}) \psi_p(\mathbf{r})$ é a função de onda do próton em $(\delta + 4)$ -dimensões.

A Hamiltoniana que descreve a interação múon-próton, $H_G = m_\mu \phi$, modifica o espectro do hidrogênio muônico. Considerando que H_G é um termo pequeno da Hamiltoniana atômica, podemos calcular o desvio de energia dos estados por meio da teoria de perturbação. A correção na energia – em primeira ordem – para um determinado estado Ψ é $\langle m_\mu \phi \rangle_\Psi$. Usando a Eq. (4.3), podemos escrever o desvio na energia como [25]:

$$\delta E_\psi^g = -G_{(4+\delta)} m_p m_\mu \int \frac{|\Psi_p|^2 |\Psi_\mu|^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^{\delta+1}} d^{3+\delta}\mathbf{R} d^{3+\delta}\mathbf{R}', \quad (4.4)$$

onde a função de onda do múon (partícula reduzida) $\Psi_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ é o produto da solução $\psi_\mu(\mathbf{r})$ da equação de Schrödinger para o hidrogênio muônico e a parte extra-dimensional $\chi_\mu(\mathbf{z})$.

Como assumimos que o próton tem sua massa distribuída uniformemente no núcleo, então, a função de onda tridimensional, $\psi_p(\mathbf{r})$, é constante no interior do núcleo e zero no exterior ($r > r_p$). A maior contribuição para Eq. (4.4) vem da integral na região interna do núcleo. Assim, para estados S , a Eq. (4.4) nos fornece [25]:

$$\delta E_{nS}^g = -\gamma_\delta \frac{G_{(4+\delta)} m_p m_\mu}{\sigma^{\delta-2}} |\psi_{nS}(0)|^2 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{r_p}{a_{0\mu}} + \mathcal{O}(r_p^2/a_{0\mu}^2) \right] [1 + \mathcal{O}(\sigma/r_p)], \quad (4.5)$$

onde $a_{0\mu}$ é o raio de *Bohr* do hidrogênio muônico, $\psi_{nS}(0)$ é a função de onda do múon no estado nS avaliado na origem e γ_δ é um fator numérico que depende do número de dimensões extras. Por exemplo, $\gamma_3 = 2\pi^{3/2}$, $\gamma_4 = 4\pi/3$, $\gamma_5 = \pi^{3/2}/3$ e $\gamma_6 = 4\pi/15$. A Eq. (4.5) é válida para $\delta > 2$. Note que a energia gravitacional dependerá de quão limitada

é a região extra-dimensional acessível à função de onda das partículas.

Considerando os casos $\delta = 1$ e $\delta = 2$, a contribuição da energia gravitacional não é forte o suficiente para explicar o *problema do raio do próton*. Então, não reportaremos aqui tais resultados. Por meio do cálculo da integral [Eq. (3.6)], podemos mostrar que a região externa é suprimida por um fator da ordem de σ/r_p . Assim, para branas realísticas, $\varepsilon \leq 10^{-20}$ m, a contribuição externa será no mínimo 10^{-5} vezes menor que a interna. Por sua vez, a contribuição gravitacional para o estado P será suprimida por um fator da ordem de $r_p^2/a_{0\mu}^2$.

4.3 A Contribuição Gravitacional ao Lamb Shift

A comparação direta entre os valores do Lamb shift predito $\Delta E_L^{th}(r_p^{CD})$ e medido ΔE_L^{exp} fornece um excesso de energia de 0.3290(469) meV. Uma vez que a interação gravitacional próton-múon é amplificada no cenário de dimensões extras, é razoável esperar que consigamos explicar esse problema por esse caminho. De fato, nesse cenário, o nível $2S$ decresce por uma quantidade $\delta E_{2S}^g = -\gamma_n G_{(4+\delta)} m_p m_\mu (1 - 3r_p/2a_0) / (8\pi a_0^3 \sigma^{n-2})$ [ver a Eq. (4.5)], enquanto o efeito gravitacional sobre o estado P é suprimido por um fator $\mathcal{O}(r_p^2/a_{0\mu}^2) \sim 10^{-5}$. Como a precisão experimental que envolve essas medidas no hidrogênio muônico é de 10^{-7} eV [64], logo, o efeito sobre o estado P é desprezível. Desse modo, a interação gravitacional fornecerá uma separação adicional, $|\delta E_{2S}^g|$, entre os níveis $2P - 2S$. Com isso, o *problema do raio do próton* é resolvido se $|\delta E_{2S}^g| = 0.3290(469)$ meV. Por sua vez, essa condição implica numa relação entre $G_{(4+\delta)}$ e σ , que pode ser redefinida em termos da massa de *Planck* do espaço de dimensão maior, M_D [9], como segue:

$$\left[\frac{(\hbar/c)^\delta \hbar c \Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right) (2\pi)^\delta}{(\delta+2) 2\pi^{(\delta+3)/2} M_D^{2+\delta}} \right] \frac{\gamma_\delta m_p m_\mu}{8\pi a_0^3 \sigma^{\delta-2}} \left(1 - \frac{3r_p}{2a_0}\right) = 0.3290(469) \text{ meV}, \quad (4.6)$$

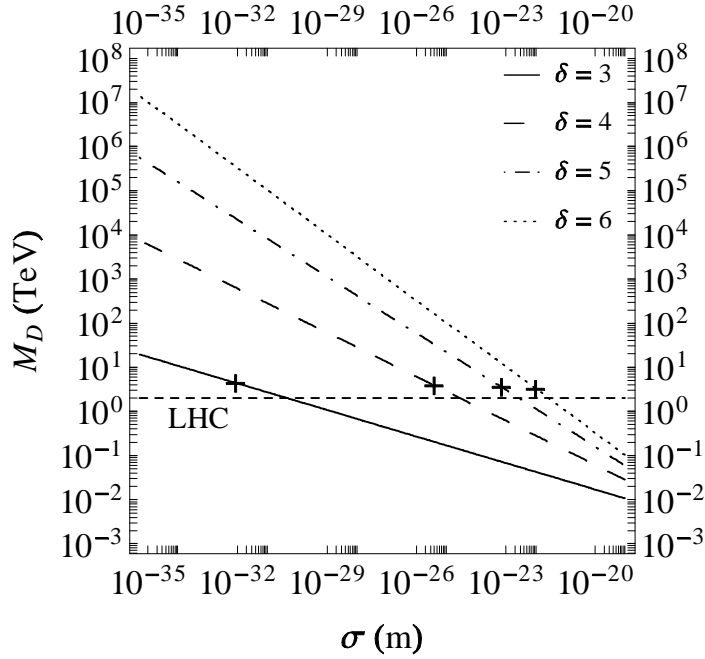


Figura 4.1: As curvas representam os valores exigidos sobre a massa de Planck, M_D , em função do parâmetro de confinamento σ que explicam o *problema do raio do próton*. Regiões abaixo da linha 2 TeV são excluídas pelos eventos de *monophoton* em colisão próton-próton no *LHC*. Por outro lado, os sinais + representam os limites inferiores sobre M_D vinculados pelos eventos de *monojet* no *LHC*.

onde $G_{(4+\delta)}$ é exatamente o termo entre colchetes. Considerando $\delta = 3, 4, 5$ e 6 , mostramos a análise numérica da Eq. (4.6) através da Fig. 4.1. Podemos encontrar os vínculos sobre M_D que solucionam o *problema do raio do próton* considerando que, no cenário de branas realísticas, o parâmetro de confinamento satisfaz à condição $10^{-35} \text{ m} \leq \sigma \leq 10^{-20} \text{ m}$. Note que, se o parâmetro de confinamento for muito pequeno, i.e., a função de onda das partículas está fortemente confinada à brana, os limites sobre M_D são muito altos. A incerteza sobre a massa de *Planck* fundamental, M_D , no nível de um desvio padrão é $\delta M_D / M_D = 0.1426 / (\delta + 2)$, para um determinado σ fixo. Assim, é muito estreito para ser observado na Figura 4.1.

4.4 Comparações com Outros Vínculos

Agora compararemos os vínculos obtidos por nossa análise com alguns limites experimentais atuais. Testes precisos que buscam desvios na *lei do inverso do quadrado* –

utilizando balanças de torção – têm sido usados para procurar por sinais da existência de um espaço suplementar. Esses experimentos apresentam vínculos sobre o modelo *ADD*. No Capítulo 2 vimos que, para esse modelo, a modificação do potencial gravitacional pode ser parametrizada como $G_{(4)}M/r (1 + \alpha e^{-r/\lambda})$, i.e., acrescentando um termo do tipo-*Yukawa*, onde $\alpha = 8\delta/3$ e $\lambda \equiv R$ (raio da dimensão extra) são os parâmetros a serem vinculados [4, 5, 15, 29]. Assim, para $\delta = 1$ ($\delta = 2$), os dados empíricos fornecem $R < 44 \mu\text{m}$ ($R < 37 \mu\text{m}$), que corresponde a $M_D > 3.6 \text{ TeV}$ ($\delta = 2$)¹ [38, 43]. Para $\delta > 2$, os limites experimentais estão abaixo da escala de TeV, assim, são compatíveis com os limites das Figuras 4.1 e 4.2. De outro modo, se a modificação gravitacional é uma consequência da troca de radion entre a matéria, ao invés de gráviton, os parâmetros α e λ têm uma interpretação diferente. Nesse contexto, $\alpha = \delta/(\delta + 2)$ e λ é o comprimento de onda de *Compton* do radion, que se relaciona com a escala de unificação [79], M_* , por meio da expressão $\lambda^2 \sim (\hbar^3/cGM_*^4)$ [33, 39, 79]. Como mostrado na Ref. [79], os limites encontrados nessa análise são: $M_* > 5.7 \text{ TeV}$ ($M_* > 6.4 \text{ TeV}$) para $\delta = 1$ ($\delta = 6$). Nesse ponto, devemos ressaltar que a relação entre λ e a massa fundamental de *Planck* depende do mecanismo de estabilização do radion [33]. Entretanto, para $\delta > 3$, há um grande espaço para acomodar esses limites [ver Figura 4.1].

Na Seção 2.2, vimos que os vínculos impostos pelos dados de *Astrofísica e Cosmologia* sobre os modelos extra-dimensionais – obtidos supondo a produção de grávitons *KK* nas estrelas – são mais fortes para $\delta \leq 4$. A análise dos processos de explosão de supernovas nos fornece os limites mais restritivos. Acontece que, de acordo com o modelo *ADD*, a estrela de nêutrons – produto da explosão de uma supernova – pode, ao menos em princípio, aprisionar gravitacionalmente grávitons *KK* que decairiam em fótons. Uma quantidade desses fótons pode ser absorvida pela estrela de nêutron, causando assim seu aquecimento. Visto que nenhum excesso de aquecimento da estrela de nêutrons é medido, os vínculos podem ser obtidos. Sendo assim, temos os limites sobre a massa de *Planck*, $M_D > 76 \text{ TeV}$ para $\delta = 3$. Esse resultado, aparentemente, exclui o nosso vínculo para $\delta = 3$ [ver Figura 4.1]. Entretanto, devemos destacar que os limites astrofísicos

¹ $G_{(4)}^{-1} = 8\pi R^n \mathcal{M}_D^{2+n}$, onde $\mathcal{M}_D^{2+n} = M_D^{2+n}/[(\hbar/c)^n \hbar c]$ [9].

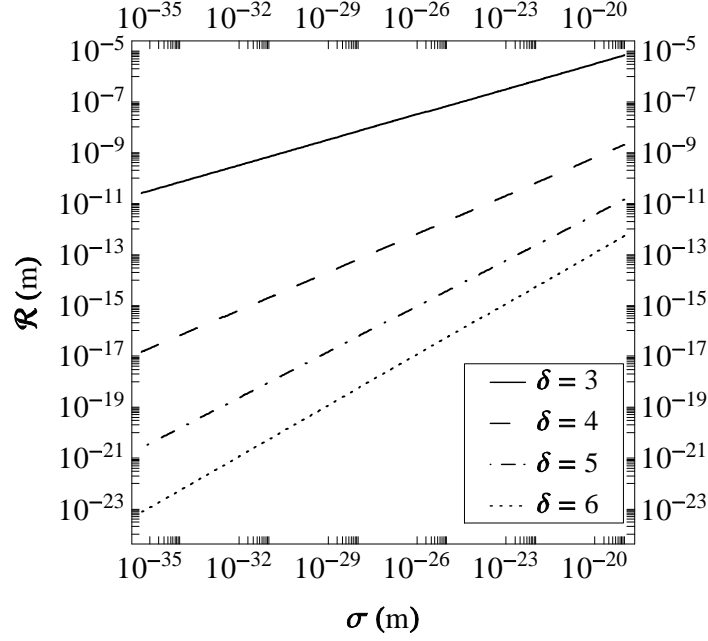


Figura 4.2: Limites sobre o raio ($\mathcal{R} = \ell/2\pi$) das dimensões extras em função do parâmetro de confinamento σ .

podem ser reduzidos drasticamente caso exista algum mecanismo que forneça massa aos grávitons KK [80, 81].

Para $\delta > 4$, os limites sobre a massa de *Planck*, M_D , obtidos pela análise de colisões em altas energias são os mais restritivos. A análise do processo de colisão $p\bar{p} \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T$ com uma energia de centro de massa $\sqrt{s} = 7$ TeV e $\sqrt{s} = 8$ TeV no *LHC* [10], impõe que $M_D > 2$ TeV, for $\delta = 3, \dots, 6$. Representamos essa condição por meio de um linha horizontal na Figura 4.1. O processo $p\bar{p} \rightarrow \text{monojet} + \cancel{E}_T$ com $\sqrt{s} = 8$ TeV, por sua vez, nos fornece vínculos mais fortes sobre M_D : 4.38 TeV ($\delta = 3$), 3.86 TeV ($\delta = 4$), 3.55 TeV ($\delta = 5$) e 3.26 TeV ($\delta = 6$) [45, 52]. Esses limites são representados pelo símbolo “+” na Figura 4.1. Para a região compreendida acima desses valores, os vínculos encontrados em nossa análise [Fig. 4.1] são compatíveis com os limites provenientes de colisores de partículas.

Por fim, vamos comparar nossos resultados com os limites encontrados previamente através da análise de dados da espectroscopia. Admitindo que o hidrogênio está aprisionado à brana espessa, impusemos vínculos sobre a massa de *Planck*, M_D , considerando a transição $(2S - 1S)$. Esses limites encontrados pela espectroscopia do hidrogê-

nio eletrônico são mais fracos do que os necessários para resolver o *problema do raio do próton*. Assim, se utilizarmos os vínculos sobre M_D – contidos na Figura 4.1 –, a energia gravitacional é capaz de explicar o excesso de energia medido na transição $(2S - 2P)$ no hidrogênio muônico, conquanto ainda permaneça oculto no espectro do hidrogênio eletrônico. Isto ocorre porque, como a energia é proporcional a m/a_0^3 [ver a Eq. (4.5)] e a_0 , por sua vez, é definido em termos da massa atômica reduzida, logo a energia gravitacional do hidrogênio eletrônico será aproximadamente $(200)^4$ vezes menor do que a energia gravitacional do hidrogênio muônico. Nesse caso, assumimos que $\sigma_H \simeq \sigma_{\mu p}$, i.e., o confinamento em ambos os átomos é similar. Desse modo, constatamos a compatibilidade entre os nossos vínculos do hidrogênio muônico – que resolvem o *problema do raio do próton* – e os vínculos espectroscópicos.

Diante exposto, podemos concluir que existem regiões na Figura 4.1 em que os valores de M_D resolvem o *problema do raio do próton* e ainda são consistentes com os limites experimentais conhecidos.

4.5 Correções Quânticas à Energia Potencial Gravitacional

Os nossos cálculos são feitos baseados no comportamento clássico da gravidade. Entretanto, de acordo com a Ref. [9], os efeitos da gravidade quântica podem surgir em uma escala de comprimento da ordem do comprimento de *Planck* em $(\delta + 4)$ dimensões, l_D . Dependendo da teoria fundamental da gravidade, ainda não conhecida, essa escala pode ser maior que l_D . Isto poderia distorcer os efeitos clássicos que consideramos em nosso estudo.

De modo direto, as correções quânticas à energia potencial gravitacional podem ser encontradas se assumirmos que a *teoria da Relatividade Geral* é uma teoria efetiva. Procedendo de modo análogo a Seção 3.5, temos que a correção quântica, em um espaço com δ dimensões extras, será da ordem de $(l_D/d_{eff})^{\delta+2}$. Nesse caso, d_{eff} é a distância

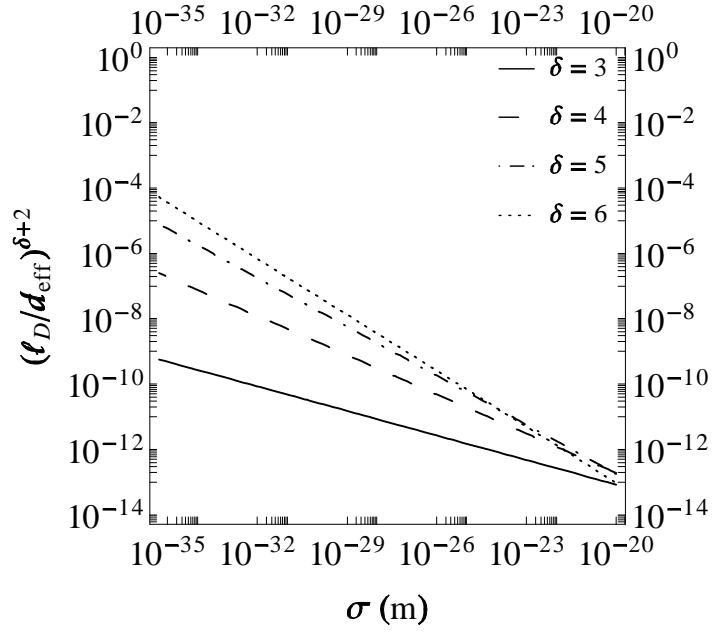


Figura 4.3: Relação entre a distância efetiva e o comprimento de *Planck* do espaço de dimensão maior. Encontramos o valor do comprimento de *Planck* através dos vínculos obtidos para o hidrogênio muônico [Eq. (4.6)].

extra-dimensional efetiva definida por meio da relação $d_{eff}^{\delta+1} \sim \sigma^{\delta-2} a_{0\mu}^3$, onde $a_{0\mu}$ é o raio de *Bohr* do múon. Por sua vez, utilizando os limites inferiores sobre M_D encontrados pela Eq. (4.6), estimamos os vínculos superiores para l_D como uma função de σ . A análise numérica da relação $(l_D/d_{eff})^{\delta+2}$ é mostrada na Figura 4.3. Observe que a razão $(l_D/d_{eff})^{\delta+2}$ será menor do que 10^{-4} , independentemente dos valores de σ e δ . Desse modo, se d_{eff} é a escala característica relevante para a interação gravitacional, no cenário de branas que estamos considerando, a contribuição clássica fornecerá a principal influência gravitacional.

4.6 Considerações Finais

No cenário de branas espessas, mostramos que a interação gravitacional entre o múon e o próton fornece o excesso de energia de 0.329 meV medido no *Lamb shift* do hidrogênio muônico. Na Fig. 4.1 encontramos os vínculos sobre M_D que resolvem o problema do raio do próton sem entrar em conflito com qualquer resultado experimental

prévio.

Diante disso, o problema do raio do próton pode ser a primeira evidência empírica da existência de um espaço suplementar. Entretanto, esse modelo deve ser testado por meio da predição teórica para outras transições. Por exemplo, esperamos que a interação gravitacional forneça uma contribuição de 2.1 meV à transição $2S - 1S$ no hidrogênio muônico. Se assumirmos que $\sigma_H \simeq \sigma_{\mu p}$, estimamos que a transição $2S - 1S$ do hidrogênio eletrônico sofra um desvio de 420 Hz, que é maior que o erro experimental de 10 Hz [49]. Todavia, os efeitos do espaço suplementar permanecerão ocultos devido às incertezas relacionadas com a medida do raio do próton, que é cerca de 32 kHz [50]. Desse modo, o aumento na precisão da medida do raio do próton poderá revelar os sinais das dimensões extras através da transição ($2S - 1S$) do hidrogênio.

A nossa proposta de solução do *problema do raio do próton* se distingue das demais por no mínimo uma característica: a universalidade dos efeitos, i.e., a modificação da interação gravitacional, devido a existência de um espaço suplementar, afeta todos os átomos. Os estados S terão um desvio na energia proporcional a $(Mm)^4 / (m + M)^3$, onde M é a massa do núcleo e m é a massa do lépton que orbita o núcleo. Esta proposta ainda nos permite estimar o desvio, causado pelas dimensões extras, na energia de um determinado estado para qualquer átomo exótico do tipo-hidrogênio. Para tanto, devemos supor que o confinamento é idêntico para todos os átomos. Desse modo, a confirmação experimental de uma predição teórica nos daria um indício da existência de dimensões extras.

Além disso, devemos ressaltar que o *problema do raio do próton* lança grande incerteza sobre as medidas de transições atômicas e, conseqüentemente, sobre a extração da constante de *Rydberg*. Por sua vez, em transições envolvendo estados com número quântico principal alto e elevado momento angular, as incertezas decorrentes da estrutura interna do núcleo atômico seriam praticamente desprezíveis. Desse modo, a constante de *Rydberg* poderia em princípio ser obtida, bem como a *QED* pode ser testada com maior acuidade, através de medidas precisas de frequências de transições ópticas entre

estados de *Rydberg* [82,83]. Motivados por essa perspectiva, na Ref. [84], analisamos a possibilidade de procurar por traços de dimensões extras através da espectroscopia de estados de *Rydberg*. Calculando a contribuição da interação gravitacional às transições entre estados de *Rydberg* para íons muônicos do tipo hidrogênio – fixando o valor da massa de *Planck* fundamental que resolve o *problema do raio do próton* –, encontramos que, devido à alta precisão predita para essas medidas, para uma longa faixa de transições, os efeitos da existência de um espaço suplementar podem ser detectáveis. Assim tais medidas poderiam, se comprovadas, nos fornecer indícios da possível existência de dimensões ocultas do espaço-tempo, bem como testar a hipótese segundo a qual o *problema do raio do próton* seria um efeito da interação gravitacional amplificada pelas dimensões extras.

5 Conclusões

“ In that blessed region of Four Dimensions, shall we linger on the threshold of the Fifth, and not enter therein? [...] Then, yielding to our intellectual onset, the gates of the Sixth Dimension shall fly open; after that a Seventh, and then an Eighth ... ”

Edwin A. Abbot, *Flatland: A romance of many dimensions*, 1884

Se admitirmos que o nosso universo observável seja uma variedade quadrimensional, denominada 3-brana, imersa num espaço de dimensão maior, o potencial gravitacional sofrerá uma modificação. No cenário de brana, enquanto a gravidade tem acesso ao espaço suplementar, os campos do *Modelo Padrão* estão confinados a 3-brana, contanto que não sejam excitados acima de uma determinada energia, que se postula ser da ordem de TeV. Conquanto a gravidade tenha esse “grau de liberdade”, a existência de um modo zero sobre a brana assegura a recuperação do comportamento quadrimensional do potencial gravitacional para distâncias muito maiores do que a escala de comprimento característico, ℓ , do espaço suplementar. Abaixo desta escala, o potencial gravitacional é amplificado e, conseqüentemente, a força gravitacional torna-se relevante. Os campos confinados, por sua vez, sentirão os efeitos das dimensões extras apenas abaixo da escala de confinamento $L_m < 10^{-19}$ m.

Nesta tese, considerando o cenário de branas, estudamos os efeitos que a interação gravitacional produz sobre sistemas atômicos. Se admitirmos que o potencial gravitacional é um termo pequeno da Hamiltoniana atômica, podemos encontrar o desvio da energia de certo estado, por meio do método de perturbação, e este, por sua vez, é proporcional a $\langle r^{-(\delta+1)} \rangle$. Acontece que, para $\delta > 2$, no limite em que a espessura da brana vai à zero, essa média diverge para um dado estado S . Isto acontece porque nesta aproximação estamos desconsiderando a subestrutura interna da brana. De fato,

no cenário de brana espessa as funções de onda das partículas localizadas sobre a brana terão certo comprimento σ nas direções transversais. Como vimos, quando consideramos isto, a média $\langle r^{-(\delta+1)} \rangle$ é finita e depende do parâmetro de confinamento σ .

Sendo assim, no capítulo 3 mostramos que as correções do potencial gravitacional, devido às dimensões extras, podem dar uma contribuição significativa à sistemas ligados. Utilizando medidas precisas da frequência de transição $2S - 1S$ do hidrogênio, encontramos fortes vínculos sobre a massa de *Planck*, M_D , do espaço de dimensão maior em função do parâmetro σ , que, por consistência, deve ser menor do que a espessura da brana. Os limites encontrados são mais fortes à proporção que a brana torna-se mais fina, de forma que, para certas faixas de σ , a espectroscopia atômica impõe vínculos mais restritivos do que os obtidos pelo *LHC* [ver Fig. 3.1]. Entretanto, para valores muito elevados de M_D , reintroduziremos o *problema da hierarquia*.

No capítulo seguinte, abordamos o conhecido *problema do raio do próton*, que se refere à incompatibilidade entre as medidas do *Lamb shift* do hidrogênio muônico e o seu valor predito pela *QED*, obtido utilizando o valor do raio do próton indicado pelo *CODATA*. A comparação direta entre a medida e a predição teórica fornece um excesso de energia de 0.3 meV. Mostramos que a interação gravitacional, no cenário de branas, dá uma explicação satisfatória à essa discrepância, e deste modo obtivemos vínculos sobre a massa de *Planck* fundamental do espaço de dimensão superior em função do parâmetro de confinamento $\sigma_{\mu p}$. Na Fig. 4.1 encontramos os limites sobre M_D que resolvem o *problema do raio do próton* sem apresentar quaisquer conflitos com dados empíricos anteriores. Assim sendo, como temos sugerido, o *problema do raio do próton* pode ser a primeira evidência da existência de dimensões ocultas. Diante da possibilidade de testar essa proposta, fizemos algumas previsões, como por exemplo:

- Assumindo que $\sigma_H \simeq \sigma_{\mu p}$, esperamos que a frequência da transição $2S - 1S$ no hidrogênio muônico exiba um excesso de energia de 2.1 meV;
- Para a transição $2S - 1S$ no hidrogênio eletrônico, considerando que $\sigma_H \simeq \sigma_{\mu p}$, estimamos que esta frequência deve apresentar um excesso de 420 Hz em sua

medida. Embora este excesso seja maior do que a incerteza experimental, que é de 10 Hz, ainda se manteria oculto devido à alta incerteza teórica, cuja principal fonte é a incerteza da medida do raio do próton, r_p^{CD} . Deste modo, para que os efeitos das dimensões extras se revelem, é necessário que a precisão na medida de r_p^{CD} seja melhorada.

Nossa proposta de resolução deste problema tem uma característica que se distingue das demais; a universalidade dos efeitos, i.e., todos os átomos são afetados pelas dimensões extras. No caso de átomos do tipo hidrogênio, o desvio na energia de certo estado, $\sim (Mm)^4 / (m + M)^3$, tem uma dependência com a massa das partículas atômicas. Assim, em princípio, podemos estimar o desvio na energia para qualquer átomo exótico do tipo hidrogênio.

Apêndice A

A.1 Energia Gravitacional: Contribuição aos Níveis de Energia

Nesta seção, vamos calcular explicitamente o desvio nos níveis de energia. Assim, partiremos da Eq. (3.6):

$$\delta E_\psi = -G_{(4+\delta)} m_e m_p \int \cdots \int |\Psi_e|^2 |\Psi_p|^2 \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|^{\delta+1}} d^{3+\delta} \vec{R}' d^{3+\delta} \vec{R}. \quad (\text{A-1})$$

Agora se escrevermos o vetor posição do espaço de dimensões elevadas em coordenadas cilíndricas adaptadas à brana, i.e., $\vec{R} = \vec{r} + \vec{z}$, temos:

$$\delta E_\psi = -G_{(4+\delta)} m_e m_p \int \cdots \int |\chi(\vec{z})|^2 |\chi(\vec{z}')|^2 |\psi_e(\vec{r})|^2 |\psi_p(\vec{r}')|^2 \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|^{\delta+1}} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r} d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}', \quad (\text{A-2})$$

onde

$$\begin{aligned} |\vec{R} - \vec{R}'|^2 &= (\vec{R} - \vec{R}') \cdot (\vec{R} - \vec{R}') = [\vec{r} - \vec{r}' + (\vec{z} - \vec{z}')] \cdot [\vec{r} - \vec{r}' + (\vec{z} - \vec{z}')], \\ |\vec{R} - \vec{R}'|^2 &= [|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + |\vec{z} - \vec{z}'|^2]. \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Então,

$$\delta E_\psi = -G_{(4+\delta)} m_e m_p \int \cdots \int \frac{|\chi(\vec{z})|^2 |\chi(\vec{z}')|^2 |\psi_e(\vec{r})|^2 |\psi_p(\vec{r}')|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + |\vec{z} - \vec{z}'|^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r} d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}'. \quad (\text{A-4})$$

Da normalização da função de onda do próton e admitindo que sua distribuição é uniforme, i.e., $|\psi_p(\vec{r}')|^2 = C^2$ para $r < r_p$, temos

$$\int |\psi_p(\vec{r}')|^2 d^3 \vec{r}' = 1,$$

$$C^2 \int_{r' \leq r_p} d^3 \vec{r}' = 1,$$

$$C^2 = \frac{3}{4\pi r_p}. \quad (\text{A-5})$$

Sendo assim,

$$\delta E_\psi = -\frac{3G_{(4+\delta)} m_e m_p}{4\pi r_p^3} \int_{r' \leq r_p} \dots \int \frac{|\chi(\vec{z})|^2 |\chi(\vec{z}')|^2 |\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + |\vec{z} - \vec{z}'|^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r} d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}'. \quad (\text{A-6})$$

Integração com Respeito às Coordenadas Extras

Por simplicidade, introduzimos novas coordenadas para descrever o espaço suplementar. Assim, vamos considerar a mudança de variáveis:

$$\vec{Z} = \vec{z} + \vec{z}', \quad (\text{A-7})$$

$$\vec{\xi} = \vec{z} - \vec{z}'. \quad (\text{A-8})$$

Portanto,

$$\vec{z} = (\vec{Z} + \vec{\xi}) / 2, \quad (\text{A-9})$$

$$\vec{z}' = (\vec{Z} - \vec{\xi}) / 2. \quad (\text{A-10})$$

Utilizando essas novas coordenadas, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\chi(\vec{z})|^2 |\chi(\vec{z}')|^2 d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}' &= \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^\delta \exp\left(-2\sum_{i=1}^{\delta} \frac{z_i^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-2\sum_{i=1}^{\delta} \frac{z_i'^2}{\sigma^2}\right) d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}' \\ &= \left[\left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^\delta \exp\left(-\frac{Z^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right)\right] J_\delta \times d^\delta \vec{Z} d^\delta \vec{\xi} \\ &= \left\{ \left[\left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/2} \exp\left(-\frac{Z^2}{\sigma^2}\right) d^\delta \vec{Z}\right] J_\delta \times \right. \end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) \xi^{\delta-1} d\xi dS_{\delta-1} \right] \}, \quad (\text{A-11})$$

onde J_δ é o *Jacobiano* da transformação. Podemos determinar J_δ explorando a condição de normalização da função de onda:

$$\begin{aligned} \int |\chi(\vec{z})|^2 |\chi(\vec{z}')|^2 d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}' &= 1 \\ \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^\delta \int \exp\left(-\frac{Z^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) J_\delta d^\delta \vec{Z} d^\delta \vec{\xi} &= 1 \\ \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^\delta J_\delta \left(\int \exp\left(-\frac{Z^2}{\sigma^2}\right) d^\delta \vec{Z} \right) \left(\int \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) d^\delta \vec{\xi} \right) &= 1 \\ \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^\delta J_n (\sigma\pi^{1/2})^\delta (\sigma\pi^{1/2})^\delta &= 1 \\ J_\delta &= \frac{1}{2^\delta}. \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

Sendo assim, a Eq. (A-6) assume a seguinte forma:

$$\delta E_\psi = -\frac{3G_{(4+\delta)}m_e m_p}{4\pi r_p^3} J_\delta \int \dots \int_{r' \leq r_p} \frac{|\chi(Z)|^2 |\chi(\xi)|^2 |\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r} d^\delta \vec{Z} d^\delta \vec{\xi}. \quad (\text{A-13})$$

A integral em Z

A integral com respeito a \vec{Z} desacopla e nos fornece:

$$\begin{aligned} \delta E_\psi &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_e m_p}{4\pi r_p^3} J_\delta \left[\left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} (\sigma\pi^{1/2})^\delta \right] \int \dots \int_{r' \leq r_p} \frac{|\chi(Z)|^2 |\chi(\xi)|^2 |\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r} d^\delta \vec{\xi} \\ \delta E_\psi &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_e m_p}{4\pi r_p^3} \frac{1}{2^{\delta/2}} \int \dots \int_{r' \leq r_p} \frac{|\chi(\xi)|^2 |\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r} d^\delta \vec{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

A integral com respeito a $\vec{\xi}$

Note que o integrando depende do módulo de $\vec{\xi}$. Desse modo, escreveremos o elemento de volume em coordenadas esféricas como $d^\delta \vec{\xi} = \xi^{\delta-1} d\xi dS_{\delta-1}$, onde $dS_{\delta-1}$ é o

elemento de área de uma hipersfera de raio unitário em $(\delta - 1)$ -dimensões. Então, integrando a parte angular encontramos:

$$\begin{aligned}\delta E_\psi &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi r_p^3} \frac{1}{2^{\delta/2}} \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/2} \int_{r' \leq r_p} \dots \int \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) \frac{|\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3\vec{r}' d^3\vec{r} (\xi^{\delta-1} d\xi) dS_{\delta-1} \\ \delta E_\psi &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi r_p^3} \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/2} S_{\delta-1} \int_{r' \leq r_p} \dots \int \left(e^{-\xi^2/\sigma^2} \xi^{\delta-1} d\xi\right) \frac{|\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3\vec{r}' d^3\vec{r},\end{aligned}\tag{A-15}$$

onde $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$. Podemos ainda escrever (A-15) como:

$$\delta E_\psi = -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi r_p^3} \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/2} S_{\delta-1} \int_0^\infty \left(e^{-\xi^2/\sigma^2} \xi^{\delta-1} d\xi\right) I_\psi(\xi, \delta),\tag{A-16}$$

onde

$$I_\psi(\xi, \delta) = \int_{r' \leq r_p} \dots \int \frac{|\psi_e(\vec{r})|^2}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3\vec{r}' d^3\vec{r}.\tag{A-17}$$

A integral com respeito a \vec{r}'

Agora vamos integrar a coordenada r' da Eq. (A-17). Com este objetivo, representaremos a coordenada \vec{r}' em coordenadas esféricas (r', θ', ϕ') escolhendo um vetor \vec{r} como o eixo z' , neste caso, θ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{r}' . Por sua vez, o elemento de volume é $d^3\vec{r}' = (r'^2 \sin \theta) dr' d\theta' d\phi'$ e

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'\tag{A-18}$$

Integrando com respeito aos ângulos, obtemos:

$$\begin{aligned}I'_r(\delta) &= \int_{r' \leq r_p} \dots \int \frac{1}{[|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + \xi^2]^{\frac{n+1}{2}}} d^3\vec{r}' \\ I'_r(\delta) &= \int_0^{r_p} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \theta'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta' + \xi^2]^{\frac{n+1}{2}}} dr' d\theta' d\phi'\end{aligned}$$

$$I'_r(\delta) = \frac{2\pi}{1-\delta} \int_0^{r_p} \frac{r'}{r} \left[\frac{1}{[(r+r')^2 + \xi^2]^{\frac{\delta-1}{2}}} - \frac{1}{[(r-r')^2 + \xi^2]^{\frac{\delta-1}{2}}} \right] dr' \quad (\text{A-19})$$

É conveniente, antes de prosseguir, separar a última integral em duas partes, $I'_r = I'_r(+)-I'_r(-)$, e definir uma nova variável u . Para o caso “+”, temos:

$$u = r + r' \rightarrow u = \begin{cases} r, & \text{para } r' = 0 \\ r + r_p, & \text{para } r' = r_p \end{cases}. \quad (\text{A-20})$$

Assim,

$$I'_r(+)=\frac{2\pi}{1-\delta} \int_r^{r+r_p} \frac{u-r}{r} \frac{1}{[u^2+\xi^2]^{\frac{\delta-1}{2}}} du. \quad (\text{A-21})$$

Por sua vez, para o caso “-”, temos:

$$u = r - r' \rightarrow u = \begin{cases} r, & \text{para } r' = 0 \\ r - r_p, & \text{para } r' = r_p \end{cases}. \quad (\text{A-22})$$

Então,

$$I'_r(-)= -\frac{2\pi}{1-\delta} \int_{r-r_p}^r \frac{u-r}{r} \frac{1}{[u^2+\xi^2]^{\frac{\delta-1}{2}}} du. \quad (\text{A-23})$$

Finalmente, $I'_r(\delta) = I'_r(+)-I'_r(-)$ produz:

$$I'_r(\delta) = \frac{2\pi}{1-\delta} \int_{r-r_p}^{r+r_p} \left(\frac{u}{r} - 1\right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du. \quad (\text{A-24})$$

Exemplo: O caso $\delta = 4$

Separaremos a integral em duas partes: exterior e interior.

A integral externa ($r > R_p$)

Com ajuda do Mathematica, encontramos:

$$I_r^{ext}(4) = -\frac{2\pi}{1-\delta} \frac{(\xi^2 + r(r+r_p)) \sqrt{(r-r_p)^2 + \xi^2} - \sqrt{(r+r_p)^2 + \xi^2} (\xi^2 + r(r-r_p))}{r\xi^2 \sqrt{(r-r_p)^2 + \xi^2} \sqrt{(r+r_p)^2 + \xi^2}}, \quad (\text{A-25})$$

onde $\xi^2 = |\vec{z} - \vec{z}'|^2$ e $\delta = 4$.

A integral interna ($r < R_p$)

Nesta região, como u assume valores negativos, é apropriado, por razões computacionais, reescrever a integral como segue:

$$I_r^{int}(4) = \frac{2\pi}{1-\delta} \left\{ \int_{r-r_p}^0 \left(\frac{u}{r} - 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du + \int_0^{r+r_p} \left(\frac{u}{r} - 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du \right\}. \quad (\text{A-26})$$

No primeiro termo, mudamos u por $-u$. Assim, obtemos:

$$I_r^{int}(4) = \frac{2\pi}{1-\delta} \left\{ - \int_0^{r_p-r} \left(\frac{u}{r} + 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du + \int_0^{r+r_p} \left(\frac{u}{r} - 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du \right\}. \quad (\text{A-27})$$

Então,

$$I_r^{int}(4) = \frac{2\pi}{1-\delta} \left\{ - \int_0^{r_p-r} \left(\frac{u}{r} + 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du + \int_0^{r_p-r} \left(\frac{u}{r} - 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du + \int_{r_p-r}^{r+r_p} \left(\frac{u}{r} - 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du \right\}. \quad (\text{A-28})$$

Logo:

$$I_r^{int}(4) = \frac{2\pi}{1-\delta} \left\{ -2 \int_0^{r_p-r} [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du + \int_{r_p-r}^{r_p+r} \left(\frac{u}{r} - 1 \right) [u^2 + \xi^2]^{\frac{1-\delta}{2}} du \right\}. \quad (\text{A-29})$$

De acordo com o Mathematica, temos:

$$I_r^{int}(4) = \frac{2\pi}{\delta-1} \frac{(\xi^2 + r(r+r_p)) \sqrt{(r-r_p)^2 + \xi^2} - \sqrt{(r+r_p)^2 + \xi^2} (\xi^2 + r(r-r_p))}{r\xi^2 \sqrt{(r-r_p)^2 + \xi^2} \sqrt{(r+r_p)^2 + \xi^2}}. \quad (\text{A-30})$$

Assim, concluímos que

$$I'_r(4) = \frac{4\pi}{4-1} \frac{(\xi^2 + r(r+r_p)) \sqrt{(r-r_p)^2 + \xi^2} - \sqrt{(r+r_p)^2 + \xi^2} (\xi^2 + r(r-r_p))}{r\xi^2 \sqrt{(r-r_p)^2 + \xi^2} \sqrt{(r+r_p)^2 + \xi^2}}. \quad (\text{A-31})$$

A integral com respeito a \vec{r}

Agora faremos a integração com respeito a \vec{r} . Então, vamos definir:

$$I_\psi(\delta) = \int \cdots \int |\psi_e(\vec{r})|^2 I'_r(\delta) d^3\vec{r}. \quad (\text{A-32})$$

O resultado dependerá do estado ψ . Deste modo, consideraremos o estado $1S$.

Estado $1S$

Os estados S são esfericamente simétricos, então, a integral com respeito aos ângulos é obtida facilmente:

$$I_S(\delta) = 4\pi \int_0^\infty f(r) I'_r(\delta) r^2 dr, \quad (\text{A-33})$$

onde $f(r) = |\psi_e(\vec{r})|^2$. Separaremos a integração em três regiões:

$$I_S(\delta) = 4\pi \int_0^{r_p} f(r) I_r'(\delta) r^2 dr + 4\pi \int_{r_p}^{a_0} f(r) I_r'(\delta) r^2 dr + 4\pi \int_{a_0}^{\infty} f(r) I_r'(\delta) r^2 dr. \quad (\text{A-34})$$

Integral da zona próxima

A integral da zona próxima, $r \in [r_p, a_0]$:

$$I_{S, \text{near}}(\delta) = 4\pi \int_{r_p}^{a_0} f(r) I_r'(\delta) r^2 dr. \quad (\text{A-35})$$

Os estados S são proporcionais a e^{-r/na_0} , onde n é o número quântico principal. Por exemplo, $\psi_{1s} = 1/\sqrt{\pi a_0^3} \exp(-r/a_0)$. Como a exponencial é decrescente, então:

$$|I_{1S, \text{near}}(\delta)| < \frac{4e^{-2r_p/a_0}}{a_0^3} \left| \int_{r_p}^{a_0} I_r'(\delta) r^2 dr \right|. \quad (\text{A-36})$$

De acordo com o Mathematica, para $\delta = 4$:

$$\begin{aligned} & \int_{r_p}^{a_0} I_r'(4) r^2 dr \\ &= -\frac{1}{3\xi^2} \left((a_0^2 + r_p^2 + \xi^2 + r_p a_0) \sqrt{(a_0 - r_p)^2 + \xi^2} + \right. \\ & \left. (-a_0^2 - r_p^2 - \xi^2 + r_p a_0) \sqrt{(a_0 + r_p)^2 + \xi^2} + (\xi^2 + r_p^2) \sqrt{4r_p^2 + \xi^2} - 3\xi r_p^2 - \xi^3 \right). \end{aligned} \quad (\text{A-37})$$

Expandindo em séries de Taylor:

$$\begin{aligned} |I_{1S, \text{near}}(4)| &< \frac{4e^{-2r_p/a_0}}{a_0^3} \times \left(-\frac{r_p^2}{\xi} + 1/4 \frac{-r_p^5 - 2r_p^3 a_0^2 + 3a_0^4 r_p}{(r_p - a_0)^2 (r_p + a_0)^2} - 1/3 \xi \right. \\ & \left. + \frac{1}{64} \frac{(5a_0^8 - 50a_0^4 r_p^4 - 20a_0^6 r_p^2 + 76r_p^6 a_0^2 - 11r_p^8) \xi^2}{(r_p - a_0)^4 (r_p + a_0)^4 r_p} + \mathcal{O}(\xi^4) \right). \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

Então,

$$\left| \delta E_{1S, near}^{(\delta)} \right| < \frac{3G_{(4+\delta)} m_e m_p}{4\pi r_p^3} \int \dots \int |\chi(\vec{z})|^2 |\chi(\vec{z}')|^2 |I_{1S, near}(\delta)| d^\delta \vec{z} d^\delta \vec{z}'. \quad (\text{A-39})$$

Para $\delta = 4$:

$$\begin{aligned} \left| \delta E_{1S, near}^{(4)} \right| &< \frac{3G_{(4+\delta)} m_e m_p}{4\pi r_p^3} 4J_4 S_3 \left(\frac{2}{\pi \sigma^2} \right)^2 \frac{4e^{-2r_p/a_0}}{a_0^3} \int \dots \int \frac{r_p^2}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) (\xi)^3 d\xi \\ \left| \delta E_{1S, near}^{(4)} \right| &< \frac{3G_{(4+\delta)} m_e m_p}{4\pi r_p^3} 4J_4 S_3 \left(\frac{2}{\pi \sigma^2} \right)^2 \frac{4e^{-2r_p/a_0}}{a_0^3} \left(\frac{1}{4} \pi^{1/2} r_p^2 \sigma^3 \right) \\ \left| \delta E_{1S, near}^{(4)} \right| &< \frac{3G_{(4+\delta)} m_e m_p}{\pi^{5/2}} 4J_4 S_3 e^{-2r_p/a_0} \left(\frac{1}{a_0^3 r_p \sigma} \right) = \frac{3G_{(4+\delta)} m_e m_p}{\pi^{5/2} a_0^3 \sigma^2} 4J_4 S_3 e^{-2r_p/a_0} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right). \end{aligned} \quad (\text{A-40})$$

Integral da zona afastada

Temos a seguinte integral:

$$I_{S, far}(\delta) = 4\pi \int_{a_0}^{\infty} f(r) I'_r(\delta) r^2 dr. \quad (\text{A-41})$$

Considerando o estado $1S$ e $\delta = 4$, temos:

$$I_{S, far}(4) = \frac{4}{a_0^3} \int_{a_0}^{\infty} e^{-2r/a_0} I'_r(4) r^2 dr. \quad (\text{A-42})$$

Expandindo $I'_r(4)$ para pequenos valores de ξ , obtemos:

$$I'_r(4) = \frac{2\pi}{4-1} \left[\frac{2r^2 r_p^3 - 2r_p^5}{(r_p - r)^3 (r_p + r)^3 r} + \frac{(r_p^7 + 4r^2 r_p^5 - 5r^4 r_p^3) z^2}{(r_p + r)^5 (r_p - r)^5 r} + \mathcal{O}(z^4) \right]. \quad (\text{A-43})$$

Assim, integrando com respeito a r , encontramos em primeira aproximação:

$$I_{S, far}(4) = \frac{4}{a_0^3} \frac{2\pi}{4-1} \left[(e^{-2} - 4Ei(1, 2)) \frac{r_p^3}{a^2} + (1/3)(-8Ei(1, 2) + e^{-2}) \frac{r_p^5}{a^4} + \mathcal{O}(r_p^6) \right], \quad (\text{A-44})$$

onde $Ei(n, x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$. Como todos esses termos não dependem de z ou z' , a integral

nas coordenadas extras é trivial. Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\delta E_{1S, far}^{(4)} &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi r_p^3} \frac{4}{a_0^3} \frac{2\pi}{4-1} \left[(e^{-2} - 4Ei(1, 2)) \frac{r_p^3}{a^2} + (1/3)(-8Ei(1, 2) + e^{-2}) \frac{r_p^5}{a^4} + \mathcal{O}(r_p^6) \right] \\
\delta E_{1S, far}^{(4)} &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi} \frac{4}{a_0^5} \frac{2\pi}{3} \left[(e^{-2} - 4Ei(1, 2)) + \mathcal{O}\left(\frac{r_p^2}{a^2}\right) \right] \\
\delta E_{1S, far}^{(4)} &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi} \frac{4}{a_0^3 \sigma^2} \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\sigma}{a_0}\right)^2 \left[(e^{-2} - 4Ei(1, 2)) + \mathcal{O}\left(\frac{r_p^2}{a^2}\right) \right]. \tag{A-45}
\end{aligned}$$

Dentro do núcleo

Seguindo o mesmo procedimento, encontramos:

$$\begin{aligned}
\delta E_{1S, in}^{(4)} &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi r_p^3} (4\pi) \left[1/2 S_3 \left(4/9 \frac{r_p^3}{a^3} - 2/3 \frac{r_p^4}{a^4} + \frac{8}{15} \frac{r_p^5}{a^5} \right) \pi^{-2} \sigma^{-2} \right] \\
\delta E_{1S, in}^{(4)} &= -\frac{3G_{(4+\delta)}m_em_p}{4\pi^3 a_0^3 \sigma^2} \frac{S_3}{2} (4\pi) \left(4/9 - 2/3 \left(\frac{r_p}{a_0}\right) + \frac{8}{15} \left(\frac{r_p}{a_0}\right)^2 \right) \\
\delta E_{1S, in}^{(4)} &= -\frac{1}{3\pi} \frac{G_{(4+\delta)}m_em_p}{a_0^3 \sigma^2} (4\pi) \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0}\right) + \frac{18}{15} \left(\frac{r_p}{a_0}\right)^2 \right), \tag{A-46}
\end{aligned}$$

onde $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$.

Finalmente, a contribuição gravitacional ao nível $1S$ do átomo de hidrogênio para $\delta = 4$ será:

$$\delta E_{1S, in}^{(4)} = -\frac{4}{3} \frac{G_{(4+\delta)}m_em_p}{a_0^3 \sigma^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{r_p}{a_0}\right) \right). \tag{A-47}$$

A seguir apresentamos as contribuições interna (*in*) e externa (*out*) da energia gravitacional aos níveis de energia $-1S$, $2S$ e $2P$ – do átomo de hidrogênio.

3 Dimensões extras

$$\begin{aligned}
\delta E_{1s-in} &= -2\sqrt{\pi} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{1s-out} &= -\frac{3}{2} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 r_p} \left(\ln \left(\frac{16r_p^2}{\sigma^2} \right) + \gamma - 2 \right) \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{1s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\
\delta E_{2s-in} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{2s-out} &= -\frac{3}{16} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 r_p} \left(\ln \left(\frac{16r_p^2}{\sigma^2} \right) + \gamma - 2 \right) \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\
\delta E_{2p-in} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{80} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p^2}{a_0^5 \sigma} \left[1 - \frac{5}{6} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{2p-out} &= -\frac{1}{24e} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^4} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2p-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{a_0 \sigma}{r_p^2} \right) + \dots \right)
\end{aligned}$$

4 Dimensões extras

$$\begin{aligned}
\delta E_{1s-in} &= -\frac{4}{3} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{1s-out} &= -\sqrt{\pi} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma r_p} \left[1 - 2 \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{1s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\
\delta E_{2s-in} &= -\frac{1}{6} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{2s-out} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 r_p \sigma} \left[1 - 2 \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\
\delta E_{2p-in} &= -\frac{1}{120} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p^2}{a_0^5 \sigma^2} \left[1 - \frac{5}{6} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{2p-out} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{96} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p}{a_0^5 \sigma} \left[1 - \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2p-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right)
\end{aligned}$$

5 Dimensões extras

$$\begin{aligned}
\delta E_{1s-in} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{1s-out} &= -\frac{1}{2} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^2 r_p} \left[1 - \frac{2r_p}{a_0} + \dots \right] = \delta E_{1s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\
\delta E_{2s-in} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{24} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{2s-out} &= -\frac{1}{16} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^2 r_p} \left[1 - 2 \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\
\delta E_{2p-in} &= -\frac{1}{480} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p^2}{a_0^5 \sigma^3} \left[1 - \frac{5}{6} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\
\delta E_{2p-out} &= -\frac{1}{192} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p}{a_0^5 \sigma^2} \left[1 - \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2p-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right)
\end{aligned}$$

6 Dimensões extras

$$\begin{aligned} \delta E_{1s-in} &= -\frac{4}{15} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^4} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\ \delta E_{1s-out} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{10} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^3} \left[1 - 2 \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{1s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\ \delta E_{2s-in} &= -\frac{1}{30} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^4} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\ \delta E_{2s-out} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{80} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p}{a_0^3 \sigma^3 r_p} \left[1 - 2 \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2s-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \\ \delta E_{2p-in} &= -\frac{1}{600} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p^2}{a_0^5 \sigma^4} \left[1 - \frac{5}{6} \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] \\ \delta E_{2p-out} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{960} \frac{G_{(4+\delta)} m_e m_p r_p}{a_0^5 \sigma^3} \left[1 - \left(\frac{r_p}{a_0} \right) + \dots \right] = \delta E_{2p-in} \left(\mathcal{O} \left(\frac{\sigma}{r_p} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

Apêndice B

Função de Onda Extra-Dimensional: Outros Perfis

Como foi mencionado no capítulo 3, por simplicidade, admitimos que a função de onda do espaço suplementar tem um perfil *Gaussiano* (3.3). Todavia, é importante enfatizar que esta suposição não desempenha um papel fundamental em nossa análise. De fato, nossos resultados não mudam, mesmo se considerarmos outros perfis, desde que o parâmetro σ seja definido por:

$$\frac{1}{\sigma^m} \equiv \frac{1}{f(\delta, m)} \int \frac{|\chi_p(z_1)|^2 |\chi_e(z_2)|^2}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^m} d^\delta z_1 d^\delta z_2, \quad (\text{B-1})$$

onde o inteiro positivo m deve satisfazer a condição $m \leq (n - 1)$. Fazendo uma mudança de variáveis [equações (A-7) e (A-8)], obtemos:

$$\begin{aligned} f(\delta, m) &\equiv \sigma^m \left[\int \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} \exp\left(-\frac{Z^2}{\sigma^2}\right) d^\delta \vec{Z} \right] J_\delta \left[\int \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) (\xi)^{\delta-1-m} d\xi dS_{\delta-1} \right] \\ f(\delta, m) &= \sigma^m \left[\left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} (\pi\sigma^2)^{\delta/2} \right] \frac{1}{2^\delta} \left[\int \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) (\xi)^{\delta-1-m} d\xi dS_{\delta-1} \right] \\ f(\delta, m) &= \sigma^m \frac{2^{\delta/2}}{2^\delta} \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{\delta/2} S_{\delta-1} \int \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2}\right) (\xi)^{\delta-1-m} d\xi \\ f(\delta, m) &= \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\delta/2} S_{\delta-1} \int \exp(-\xi^2) (\xi)^{\delta-1-m} d\xi \\ f(\delta, m) &= \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\delta/2} S_{\delta-1} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\delta-m}{2}\right) \\ f(\delta, m) &= \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\delta/2} 2 \frac{\pi^{\delta/2}}{\Gamma(\delta/2)} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\delta-m}{2}\right) \\ f(\delta, m) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\delta-m}{2}\right)}{\Gamma(\delta/2)}. \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

onde J_δ é o Jacobiano da transformação. Assim,

$$\frac{1}{\sigma^m} \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{\delta-m}{2}\right)}{\Gamma(\delta/2)} \int \frac{|\chi_p(z_1)|^2 |\chi_e(z_2)|^2}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^m} d^\delta z_1 d^\delta z_2. \quad (\text{B-3})$$

Deste modo, quando o perfil é *Gaussiano*, então, o parâmetro σ corresponde à largura da função *Gaussiana*.

Bibliografia

- [1] KEPLER, J. *The Harmony of the World*. [S.l.]: American Philosophical Society, 1997. ISBN 0871692090,978-0871692092.
- [2] KALUZA, T. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- [3] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926. ISSN 0044-3328. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01397481>.
- [4] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429, p. 263–272, 1998.
- [5] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity. *Phys. Rev.*, D59, p. 086004, 1999.
- [6] ARKANI-HAMED, N.; SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. *Phys. Rev.*, D61, p. 033005, 2000.
- [7] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- [8] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999.
- [9] GIUDICE, G. F.; RATAZZI, R.; WELLS, J. D. Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders. *Nucl. Phys.*, B544, p. 3–38, 1999.
- [10] AAD, G. et al. Search for dark matter candidates and large extra dimensions in events with a photon and missing transverse momentum in pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector. *Phys. Rev. Lett.*, v. 110, n. 1, p. 011802, 2013. KHACHATRYAN, V. et al. Search for new phenomena in monophoton final

- states in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV. *Phys. Lett.*, B755, p. 102–124, 2016.
- [11] CULLEN, S.; PERELSTEIN, M. Sn 1987a constraints on large compact dimensions. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 2, p. 268, 1999.
- [12] HANNESTAD, S.; RAFFELT, G. G. Supernova and neutron-star limits on large extra dimensions reexamined. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 12, p. 125008, 2003.
- [13] HALL, L. J.; SMITH, D. Cosmological constraints on theories with large extra dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 8, p. 085008, 1999.
- [14] FAIRBAIRN, M. Cosmological constraints on large extra dimensions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 508, n. 3-4, p. 335–339, 2001.
- [15] MURATA, J.; TANAKA, S. A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Class. Quant. Grav.*, v. 32, n. 3, p. 033001, 2015.
- [16] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 8, p. 084033, 2016.
- [17] FENG, L.; HONG-YA, L. Exploring extra dimensions in spectroscopy experiments. *Chinese Physics Letters*, IOP Publishing, v. 23, n. 11, p. 2903, 2006. LUO, F.; LIU, H. Using muonic hydrogen in optical spectroscopy experiment to detect extra dimensions. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 46, n. 3, p. 606–613, 2007.
- [18] ZHI-GANG, L.; WEI-TOU, N.; PATÓN, A. P. Extra dimensions and atomic transition frequencies. *Chinese Physics B*, IOP Publishing, v. 17, n. 1, p. 70, 2008.
- [19] LI, Z.; CHEN, X. Can large extra dimensions solve the proton radius puzzle? *arXiv preprint arXiv:1303.5146*, 2013.
- [20] WANG, L.-B.; NI, W.-T. Proton radius puzzle and large extra dimensions. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 28, n. 20, p. 1350094, 2013.

- [21] ZHOU, W.-P.; ZHOU, P.; QIAO, H.-X. Detecting extra dimensions by Hydrogen-like atoms. *Open Phys.*, v. 13, n. 1, p. 96–99, 2015.
- [22] SALUMBIDES, E. J. et al. Constraints on extra dimensions from precision molecular spectroscopy. *New J. Phys.*, v. 17, n. 3, p. 033015, 2015.
- [23] POHL, R. et al. The size of the proton. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 466, n. 7303, p. 213, 2010.
- [24] ANTOGNINI, A. et al. Proton structure from the measurement of 2s-2p transition frequencies of muonic hydrogen. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 339, n. 6118, p. 417–420, 2013.
- [25] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. Is the proton radius puzzle evidence of extra dimensions? *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 8, p. 435, 2016.
- [26] SILVA, A. A. *Um Estudo Sobre Dimensões Extras*. 101 p. Dissertação (Mestrado em Física) — Departamento de Física, Universidade Federal de Campina Grande, 2009.
- [27] OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. Kaluza-Klein gravity. *Phys. Rept.*, v. 283, p. 303–380, 1997.
- [28] CHENG, T.-P. *Einstein's Physics: Atoms, Quanta, and Relativity - Derived, Explained, and Appraised*. 1. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. ISBN 9780199669912.
- [29] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. Large extra dimensions: A new arena for particle physics. *Physics Today*, American Institute of Physics, v. 55, n. 2, p. 35–41, 2002.
- [30] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do We Live Inside a Domain Wall? *Phys. Lett.*, v. 125B, p. 136–138, 1983.
- [31] LEMOS, A. S.; DAHIA, F. Um estudo sobre o mecanismo de ocultação de dimensões extras. PIBIC/CNPq/UFCG-2009.

- [32] GABADADZE, G. ICTP lectures on large extra dimensions. p. 77–120, 2003.
- [33] ANTONIADIS, I. et al. Brane to bulk supersymmetry breaking and radion force at micron distances. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 662, n. 1-2, p. 40–62, 2003.
- [34] KEHAGIAS, A.; SFETSOS, K. Deviations from the $1/r^{**2}$ Newton law due to extra dimensions. *Phys. Lett.*, B472, p. 39–44, 2000.
- [35] LEMOS, A. S.; DAHIA, F. Lei gravitacional do inverso do quadrado e dimensões extras de grande escala. PIBIC/CNPq/UFCG-2011.
- [36] HOYLE, C. et al. Submillimeter tests of the gravitational inverse square law: a search for 'large' extra dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 1418–1421, 2001.
- [37] HOYLE, C. et al. Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Phys. Rev.*, D70, p. 042004, 2004.
- [38] KAPNER, D. et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 021101, 2007.
- [39] ADELBERGER, E. G.; HECKEL, B. R.; NELSON, A. E. Tests of the gravitational inverse-square law. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 53, n. 1, p. 77–121, 2003.
- [40] TERNING, John; WAGNER, Carlos EM; ZEPPEFELD, Dieter. Physics in $D \geq 4$: Tasi 2004-Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics. *World Scientific Publishing Company*, 2006.
- [41] NAGASHIMA, Y. *Beyond the standard model of elementary particle physics*. Weinheim, Germany,: Wiley-VCH Verlag, 2014. ISBN 9783527411771.
- [42] KOLB, M. S. T. E. W. *The early universe*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1990. (Frontiers in Physics). ISBN 0201116030,9780201116038.
- [43] OLIVE, K. A.; GROUP, P. D. et al. Review of particle physics. *Chinese Physics C*, IOP Publishing, v. 38, n. 9, p. 090001, 2014 [Extra dimensions, Updated September 2015 by John Parsons and Alex Pomarol].

- [44] MISNER, C.; THORNE, K.; WHEELER, J. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. (Gravitation, pt. 3). ISBN 9780716703440.
- [45] LANDSBERG, G. Searches for Extra Spatial Dimensions with the CMS Detector at the LHC. *Mod. Phys. Lett.*, A30, n. 15, p. 1540017, 2015.
- [46] AGUILA, F. del; PEREZ-VICTORIA, M.; SANTIAGO, J. Effective description of brane terms in extra dimensions. *JHEP*, v. 10, p. 056, 2006.
- [47] SJODAHL, M.; GUSTAFSON, G. Gravitational Scattering in the ADD-model at High and Low Energies. *Eur. Phys. J.*, C53, p. 109–119, 2008.
- [48] MYERS, R. C.; PERRY, M. J. Black holes in higher dimensional space-times. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 172, n. 2, p. 304–347, 1986.
- [49] PARTHEY, C. G. et al. Improved measurement of the hydrogen 1s–2s transition frequency. *Physical Review Letters*, APS, v. 107, n. 20, p. 203001, 2011.
- [50] PACHUCKI, K.; JENTSCHURA, U. D. Two-loop bethe-logarithm correction in hydrogenlike atoms. *Physical Review Letters*, APS, v. 91, n. 11, p. 113005, 2003.
- [51] DONOGHUE, J. F. Introduction to the effective field theory description of gravity. In: *Advanced School on Effective Theories Almunecar, Spain, June 25-July 1, 1995*. [S.l.: s.n.], *arXiv preprint gr-qc/9512024*, 1995.
- [52] KHACHATRYAN, V. et al. Search for dark matter, extra dimensions, and unparticles in monojet events in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV. *Eur. Phys. J.*, C75, n. 5, p. 235, 2015.
- [53] MOHR, P. J.; TAYLOR, B. N.; NEWELL, D. B. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010. *Rev. Mod. Phys.*, v. 84, p. 1527–1605, 2012.
- [54] BEAUVOIR, B. D. et al. Metrology of the hydrogen and deuterium atoms: determination of the rydberg constant and lamb shifts. *The European Physical Journal*

D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, Springer, v. 12, n. 1, p. 61–93, 2000.

- [55] LUNDEEN, S.; PIPKIN, F. Measurement of the lamb shift in hydrogen, $n=2$. *Physical Review Letters*, APS, v. 46, n. 4, p. 232, 1981.
- [56] HAGLEY, E.; PIPKIN, F. Separated oscillatory field measurement of hydrogen $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$ fine structure interval. *Physical Review Letters*, APS, v. 72, n. 8, p. 1172, 1994.
- [57] SCHWOB, C. et al. Optical frequency measurement of the $2S-12D$ transitions in hydrogen and deuterium: Rydberg constant and lamb shift determinations. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 25, p. 4960, 1999.
- [58] FISCHER, M. et al. New limits on the drift of fundamental constants from laboratory measurements. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, n. 23, p. 230802, 2004.
- [59] PARTHEY, C. G. et al. Precision measurement of the hydrogen-deuterium $1S-2S$ isotope shift. *Physical Review Letters*, APS, v. 104, n. 23, p. 233001, 2010.
- [60] ARNOULT, O. et al. Optical frequency measurement of the $1S-3S$ two-photon transition in hydrogen. *The European Physical Journal D*, Springer, v. 60, n. 2, p. 243–256, 2010.
- [61] SICK, I. On the rms-radius of the proton. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 576, n. 1-2, p. 62–67, 2003.
- [62] BLUNDEN, P. G.; SICK, I. Proton radii and two-photon exchange. *Phys. Rev.*, C72, p. 057601, 2005.
- [63] BERNAUER, J. C. et al. High-precision determination of the electric and magnetic form factors of the proton. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 242001, 2010.
- [64] ANTOGNINI, A. et al. Theory of the $2S-2P$ Lamb shift and $2S$ hyperfine splitting in muonic hydrogen. *Annals of Physics*, v. 331, p. 127–145, 2013.

- [65] JENTSCHURA, U. D. Lamb shift in muonic hydrogen—ii. analysis of the discrepancy of theory and experiment. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 326, n. 2, p. 516–533, 2011.
- [66] BRAX, P; BURRAGE, C. Atomic Precision Tests and Light Scalar Couplings. *Phys. Rev.*, D83, p. 035020, 2011.
- [67] RIVAS, J. I.; CAMACHO, A.; GOEKLUE, E. Quantum spacetime fluctuations: Lamb Shift and hyperfine structure of the hydrogen atom. *Phys. Rev.*, D84, p. 055024, 2011.
- [68] KARSHENBOIM, S. G. Precision physics of simple atoms and constraints on a light boson with ultraweak coupling. *Phys. Rev. Lett.*, v. 104, p. 220406, 2010.
- [69] JAECKEL, J.; ROY, S. Spectroscopy as a test of Coulomb’s law: A Probe of the hidden sector. *Phys. Rev.*, D82, p. 125020, 2010.
- [70] BARGER, V et al. Proton size anomaly. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 153001, 2011.
- [71] TUCKER-SMITH, D.; YAVIN, I. Muonic hydrogen and MeV forces. *Phys. Rev.*, D83, p. 101702, 2011.
- [72] BATELL, B.; MCKEEN, D.; POSPELOV, M. New Parity-Violating Muonic Forces and the Proton Charge Radius. *Phys. Rev. Lett.*, v. 107, p. 011803, 2011.
- [73] BARGER, V. et al. Constraint on parity-violating muonic forces. *Phys. Rev. Lett.*, v. 108, p. 081802, 2012.
- [74] MCKEEN, D.; POSPELOV, M. Testing Parity with Atomic Radiative Capture of μ^- . *Phys. Rev. Lett.*, v. 108, p. 263401, 2012.
- [75] CARLSON, C. E.; RISLOW, B. C. New Physics and the Proton Radius Problem. *Phys. Rev.*, D86, p. 035013, 2012.
- [76] ONOFRIO, R. Proton radius puzzle and quantum gravity at the Fermi scale. *EPL*, v. 104, n. 2, p. 20002, 2013.

- [77] BRAX, P.; BURRAGE, C. Explaining the Proton Radius Puzzle with Disformal Scalars. *Phys. Rev.*, D91, n. 4, p. 043515, 2015.
- [78] LAMM, H. Can Galileons solve the muon problem? *Phys. Rev.*, D92, n. 5, p. 055007, 2015.
- [79] ADELBERGER, E. et al. Particle-physics implications of a recent test of the gravitational inverse-square law. *Physical Review Letters*, APS, v. 98, n. 13, p. 131104, 2007.
- [80] NAKAMURA, K.; GROUP, P. D. et al. Review of particle physics. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 37, n. 7A, p. 075021, 2010 [*Extra dimensions, Updated Sept. 2007 by G.F. Giudice and J.D. Wells*].
- [81] KALOOPER, N. et al. Compact hyperbolic extra dimensions: branes, kaluza-klein modes, and cosmology. *Physical Review Letters*, APS, v. 85, n. 5, p. 928, 2000. DIENES, K. R. Shape versus volume: Making large flat extra dimensions invisible. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 011601, 2002. GIUDICE, G. F.; PLEHN, T.; STRUMIA, A. Graviton collider effects in one and more large extra dimensions. *Nucl. Phys.*, B706, p. 455–483, 2005.
- [82] HANSCH, T. W. Passion for precision. *Annalen Phys.*, v. 15, p. 627–652, 2006. [Rev. Mod. Phys.78,1297(2006)].
- [83] MA, L.-S. et al. Optical frequency synthesis and comparison with uncertainty at the 10⁻¹⁹ level. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 303, n. 5665, p. 1843–1845, 2004. ISSN 0036-8075.
- [84] DAHIA, F.; MACIEL, E.; LEMOS, A. S. Rydberg states of hydrogen-like ions in braneworld. *arXiv preprint arXiv:1709.03863 [gr-qc]*, 2017.