

Horácio Santana Vieira

**Alguns resultados acerca de campos escalares
em buracos negros, cosmologia quântica e
flutuações quânticas da geometria**

João Pessoa, PB, Brasil

27 de fevereiro de 2018

Horácio Santana Vieira

Alguns resultados acerca de campos escalares em buracos negros, cosmologia quântica e flutuações quânticas da geometria

Tese apresentada a Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Física, na Área de Concentração em Gravitação e Cosmologia.

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa, PB, Brasil

27 de fevereiro de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V658a Vieira, Horácio Santana.

Alguns resultados acerca de campos escalares em buracos negros, cosmologia quântica e flutuações quânticas da geometria / Horácio Santana Vieira. - João Pessoa, 2018.

225 f. : il.

Orientação: Valdir Barbosa Bezerra.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física. 2. Campos em Espaços - curvos. 3. Buracos negros - Corda cósmica. 4. Cosmologia quântica. 5. Flutuações quânticas - Geometria. I. Bezerra, Valdir Barbosa. II. Título.

UFPB/BC

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Horácio Santana Vieira**,
candidato ao Título de Doutor em Física na
Área de Concentração Gravitação e
Cosmologia.

1 Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito, às 14:00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Horácio Santana Vieira**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), orientador e
7 presidente da banca examinadora, *Carlos Augusto Romero Filho* (UFPB), *Eugênio*
8 *Ramos Bezerra de Mello* (UFPB), *Everaldo Souto de Medeiros* (DM/UFPB) e *Marcelo*
9 *José Rebouças* (CBPF). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra
10 comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao
11 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
12 intitulado "*Alguns resultados sobre campos escalares em buracos negros, cosmologia*
13 *quântica e flutuações quânticas da geometria*". Concluída a exposição, o candidato foi
14 arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim
15 sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor
16 em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi
17 esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João
18 Pessoa, Paraíba, **27 de fevereiro de 2018**.
19

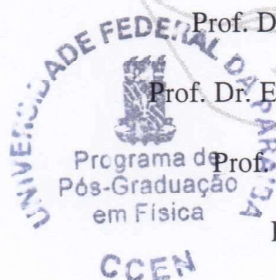
Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
DM/UFPB

Prof. Dr. Marcelo José Rebouças
CBPF



Valdir B Bezerra
Carlos Augusto Romero Filho
Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Everaldo Souto de Medeiros
Marcelo José Rebouças

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus pais, por todo esforço que fizeram para que um dia eu pudesse chegar a esse momento, assim como meus irmãos pelo incentivo. Em especial, à minha amada esposa Joelma, por toda sua compreensão e companheirismo em todas as situações pela qual passamos. Aos nossos familiares e amigos que sempre estiveram ao meu lado dando todo o apoio possível, em destaque o médico especialista Helton Andrade.

Outra pessoa à qual serei eternamente grato é a professora Flávia (DM/UFPB), pois toda essa minha jornada teve início devido a sua orientação e incentivo constante.

Contudo, tudo isso somente foi possível graças a singular sorte e privilégio de ter conhecido o professor Valdir. Já se passaram oito anos desde nossa primeira conversa sobre me aceitar como seu aluno de iniciação científica. Hoje, tenho absoluta gratidão por tudo que ele fez por mim e pelo que se tornou em minha vida, o que extrapola a função de orientador.

Agradeço a todos os integrantes do Grupo de Gravitação e Cosmologia da UFPB, aos amigos Moises, Cesar Soares, Herondy, João Paulo, Thais, Marco Maciel, Rodolfo e Erick. Além, é claro, aos queridos amigos, companheiros em todos os momentos, Matheus e Clarissa.

Ao professor Larry Ford por ter me orientado durante o doutorado sanduíche na Tufts University e pelos valorosos ensinamentos, tanto no campo profissional quanto no pessoal. Aos amigos que fiz na Tufts University, Vladyslav Syrotenko, Hyungsuk Son e Enrico Schiappacasse por toda a presteza durante minha estadia na grande Boston, além de todos os momentos divertidos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante os três primeiros anos de meu doutorado, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante meu último ano de doutorado, período no qual estive na Tufts University.

Ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba (DF/UFPB) pela acolhida e suporte para a realização deste trabalho, bem como ao Tufts Institute of Cosmology (Department of Physics and Astronomy/Tufts University).

A todos os funcionários do Departamento de Física, em especial dona Virgínia, por toda sua dedicação e amizade.

Por fim, a todos os outros que de alguma forma contribuíram na elaboração deste trabalho.

Resumo

Consideramos campos escalares massivos carregados em campos gravitacionais e eletromagnéticos produzidos por diferentes tipos de buracos negros, a saber, com e sem uma corda cósmica, circundados por um campo magnético, e na teoria de gravidade $f(R)$. Os casos especiais de partículas sem massa e sem carga são também examinados. Soluções exatas das partes angular e radial da equação covariante de Klein-Gordon, nestes cenários, são obtidas em termos das funções de Heun. A partir das soluções radiais, obtemos as soluções exatas das ondas nas proximidades dos horizontes de eventos dos buracos negros e discutimos o espectro da radiação Hawking. Aplicamos as propriedades das funções de Heun para estudar as frequências ressonantes (quasi-espectro) e o processo de espalhamento de ondas escalares, em uma classe de espaços-tempos. Na abordagem da gravidade análoga, a saber, no espaço-tempo de ambos os buracos negros acústicos, o tridimensional com rotação e o quadrimensional canônico, obtemos as soluções analíticas da parte radial da equação de Klein-Gordon, sem massa. A partir dessas soluções, obtemos as ondas escalares nas proximidades do horizonte de eventos acústico e discutimos a radiação Hawking análoga. Na cosmologia newtoniana quântica, obtemos a solução exata da equação de Schrödinger para uma partícula (galáxia) que se move neste universo. As funções de onda são dadas em termos das funções de Heun e os níveis de energia dependem da constante cosmológica. As soluções da equação de Wheeler-DeWitt em um universo homogêneo e isotrópico são também dadas em termos das funções de Heun para geometrias espacialmente fechada, plana e aberta do universo de Friedmann-Robertson-Walker constituído de diferentes formas de energia. Discutimos as flutuações quânticas da equação do desvio geodésico no espaço-tempo de Minkowski para três diferentes fontes de flutuações do tensor de Riemann, a saber, banho térmico de grávitons, grávitons no estado *squeezed* e no estado de vácuo.

Palavras-chaves: equação de Klein-Gordon, funções de Heun, defeitos topológicos, termodinâmica de buracos negros, cordas cósmicas, gravidade $f(R)$, radiação de buraco negro, fluxo de energia, níveis de energia, horizonte de eventos acústico, fônons, onda parcial, cosmologia newtoniana, cosmologia relativística, densidade de energia, função de onda, espectro de energia, dispersão, função de correlação do tensor de Riemann, gráviton, ondas gravitacionais.

Abstract

We consider charged massive scalar fields in the gravitational and electromagnetic fields produced by different kinds of black holes, namely, the ones with and without a cosmic string, surrounded by a magnetic field, and in the $f(R)$ theory of gravity. The special cases of massless and uncharged particles are also examined. Exact solutions of both angular and radial parts of the covariant Klein-Gordon equation in these backgrounds are obtained in terms of the Heun functions. From the radial solutions, we obtain the exact wave solutions near the event horizons of the black holes and discuss the Hawking radiation spectrum. We apply the Heun functions properties to study the resonant frequencies (quasispectrum) and the scattering process of scalar waves, in a class of spacetimes. In the analogue gravity approach, namely, the spacetime of both three dimensional rotating and four dimensional canonical acoustic black holes, we obtain the analytic solutions of the radial part of the massless Klein-Gordon equation. From these solutions, we obtain the scalar waves near the acoustic event horizon and discuss the analogue Hawking radiation. In the quantum Newtonian cosmology, we obtain the exact solution of the Schrödinger equation for a particle (galaxy) moving in this universe. The wave functions are given in terms of the Heun functions, and the energy levels depend on the cosmological constant. The solutions of the Wheeler-DeWitt equation in a homogeneous and isotropic universe are also obtained and given in terms of the Heun functions for the spatially closed, flat, and open geometries of the Friedmann-Robertson-Walker universe filled with different forms of energy. We discuss the quantum fluctuations of the geodesic deviation equation in Minkowski spacetime for three different sources of the Riemann tensor fluctuations, namely, thermal bath of gravitons, gravitons in a squeezed state, and graviton vacuum state.

Keywords: Klein-Gordon equation, Heun functions, topological defects, black hole thermodynamics, cosmic strings, $f(R)$ gravity, black hole radiation, energy flux, energy levels, acoustic event horizon, phonons, partial wave, Newtonian cosmology, relativistic cosmology, energy density, wave function, energy spectrum, dispersion, Riemann tensor correlation function, graviton, gravitational waves.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Frequências ressonantes escalares para $\mu_0 = 0.1$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	108
Figura 2	– Frequências ressonantes escalares para $n = 1$, $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	108
Figura 3	– Frequências ressonantes escalares para $l = 1$, $\mu_0 = 0.4$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	109
Figura 4	– Frequências ressonantes escalares para $\mu_0 = 0.1$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	109
Figura 5	– Frequências ressonantes escalares para $n = 1$, $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	110
Figura 6	– Frequências ressonantes escalares para $l = 1$, and $\mu_0 = 0.4$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	110
Figura 7	– Valores das frequências ressonantes para o modo $n = 3$, $l = 2$, $\mu_0 = 0.3$, $\psi_0 = 0.02$, $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ para diferentes valores da singularidade a . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	111
Figura 8	– Valores das frequências ressonantes para o modo $n = 3$, $l = 2$, $\mu_0 = 0.3$, $\psi_0 = 0.02$, $8\pi\eta^2 = 0.02$ para diferentes valores da singularidade a . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .	111
Figura 9	– Comparação da característica complexa da frequência ressonante do modo fundamental ($n = 0$). Focamos nos números azimutais $m = 0, 1, 2, 3$ e circulação $B = 1.5$. A unidade $c \equiv 1$ foi escolhida.	134
Figura 10	– A energia potencial efetiva do universo newtoniano $U_{eff}(R) = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{6} \Lambda mR^2$ e os cinco primeiros níveis de energia são mostrados.	146
Figura 11	– As seis primeiras funções de onda do universo newtoniano.	147
Figura 12	– A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 0$ e $\Lambda > 0$.	152
Figura 13	– A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 0$ e $\Lambda = - \Lambda $.	152
Figura 14	– A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 0$ e $\Lambda = - \Lambda $. Os três primeiros níveis de densidade de energia também são mostrados.	155
Figura 15	– As três primeiras funções de onda para $k = -1$, $\omega = 0$ e $\Lambda = - \Lambda $.	155
Figura 16	– As três primeiras funções de onda para $k = 0$, $\omega = 0$ e $\Lambda = - \Lambda $. Note que não existe Ψ_2 porque $\alpha \sim k^2$ e devemos ter $\alpha \in \mathbb{C}^*$.	156
Figura 17	– As três primeiras funções de onda para $k = 1$, $\omega = 0$ e $\Lambda = - \Lambda $.	156
Figura 18	– A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 1/3$ e $\Lambda > 0$.	158
Figura 19	– A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 1/3$ e $\Lambda = - \Lambda $.	158

Figura 20	–A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = -1$ e $\Lambda > 0$	160
Figura 21	–A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = -1$ e $\Lambda = - \Lambda $	160
Figura 22	–Geodésicas tipo-tempo para duas partículas teste vizinhas, com quadri- velocidade u^μ e separação ϵn^μ	164
Figura 23	–Distância e velocidade entre duas geodésicas tipo-tempo vizinhas após a interação com o banho térmico de grávitons.	170
Figura 24	–A variância da velocidade para o caso da média ponderada com com- primento espacial variável é ilustrada como uma função do parâmetro c	185
Figura 25	–A forma completa de $K(t_d)$ versus t_d , para uma função de lorentziana adimensional. As unidades estão dadas em múltiplos do comprimento a	187
Figura 26	–O único pico de máximo. As unidades estão dadas em múltiplos do comprimento a	188
Figura 27	–O mínimo final é revelado neste gráfico em escala pequena. As unidades estão dadas em múltiplos do comprimento a	188

Lista de tabelas

Tabela 1	– Valores das frequências ressonantes para $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ com diferentes valores da massa μ_0 e do número quântico principal n . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M	107
Tabela 2	– Valores das frequências ressonantes para $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$ com diferentes valores da massa μ_0 e do número quântico principal n . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M	107
Tabela 3	– Frequências ressonantes dos modos $n = 0, 1, 2$ para $m = 0, 1, 2, 3$ e circulação $B = 0.5$. A unidade $c \equiv 1$ foi escolhida.	133
Tabela 4	– Parâmetros das funções confluentes de Heun para um campo escalar não massivo e sem carga ($Q_e = Q_m = e = \mu_0 = 0$) na métrica cônica de Kerr, onde $m_{(b)} = m/b$	136

Sumário

Introdução	15
I Teoria de campos em espaço-tempo curvo, mecânica estatística e física matemática	23
1 Relatividade geral, mecânica quântica e movimento browniano	24
1.1 As equações de campo de Einstein	24
1.2 A equação do desvio geodésico	27
1.3 A equação covariante de Klein-Gordon	28
1.4 A equação de Langevin	30
2 Equações de Heun	33
2.1 Equação diferencial geral de Heun	33
2.1.1 Forma canônica	33
2.1.2 Tipos de soluções	34
2.1.3 Expansão em série de potências	35
2.1.4 Soluções polinomiais	36
2.1.5 Os casos confluentes da equação de Heun	36
2.2 Equação diferencial confluyente de Heun	37
2.2.1 Forma canônica	37
2.2.2 Forma normal	38
2.2.3 Expansão em série de potências	40
2.2.4 Séries assintóticas em $z \rightarrow \infty$	41
2.2.5 Soluções polinomiais	41
2.3 Equação diferencial duplamente confluyente de Heun	42
2.3.1 Forma canônica	43
2.3.2 Forma normal	43
2.3.3 Expansão em série de potências	44
2.4 Equação diferencial biconfluyente de Heun	45
2.4.1 Forma canônica e expansão em série de potências	45
2.4.2 Soluções polinomiais	47
2.5 Equação diferencial triconfluyente de Heun	48
2.5.1 Forma canônica e expansão em série de potências	48
2.5.2 Soluções polinomiais	50

II Buracos negros com corda cósmica

52

3	Campos escalares na métrica de Lense-Thirring com corda cósmica	53
3.1	Espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica	53
3.1.1	Termodinâmica	54
3.2	Equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica	55
3.2.1	Equação angular	56
3.2.2	Equação radial	57
3.2.3	Caso 1	58
3.2.4	Caso 2	59
3.3	Radiação Hawking e extensão analítica	59
3.4	Espectro da radiação	61
3.5	Conclusões parciais	62
4	Soluções analíticas em um buraco negro <i>dyon</i> com corda cósmica	63
4.1	O espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya com corda cósmica	63
4.1.1	Termodinâmica	64
4.2	Separação da equação de Klein-Gordon	65
4.2.1	Caso 1: $\tilde{\xi} = \xi$ e considerar a substituição $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$	67
4.2.2	Caso 2: $\tilde{\xi} = 0$ e manter $\sin^2 \theta$	67
4.3	Soluções exatas da equação de Klein-Gordon	68
4.3.1	Caso 1	68
4.3.1.1	Equação angular	68
4.3.1.2	Equação radial	70
4.3.2	Caso 2	72
4.3.2.1	Equação angular	72
4.3.2.2	Equação radial	74
4.4	Radiação do buraco negro e continuação analítica	76
4.5	A entropia de Bekenstein-Hawking, espectro de corpo negro e fluxo de Hawking	78
4.6	Campos escalares massivos carregados no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya	80
4.6.1	Frequências ressonantes	82
4.6.2	Espalhamento	83
4.6.3	Radiação Hawking	84
4.6.4	Casos especiais	85
4.6.4.1	O espaço-tempo de Kerr	85
4.6.4.2	O espaço-tempo de Schwarzschild	86
4.7	Conclusões parciais	87

III Buracos negros astrofísicos 89

5 Campos escalares sem massa nos espaços-tempos de Ernst 90

5.1	Equação de movimento na métrica de Reissner-Nordström em um campo magnético externo	90
5.1.1	A equação angular	91
5.1.2	A equação radial	93
5.2	Frequências ressonantes	95
5.3	Espalhamento	95
5.4	Radiação Hawking	96
5.5	Caso especial: espaço-tempo de Schwarzschild em um campo magnético externo	97
5.6	Conclusões parciais	99

6 Frequências ressonantes e efeito Hawking de um monopolo global em $f(R)$ 100

6.1	Buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global na gravidade $f(R)$	100
6.2	Solução exata da equação de Klein-Gordon	101
6.2.1	Equação radial	102
6.3	Radiação Hawking	104
6.4	Frequências ressonantes	106
6.5	Conclusões parciais	112

IV Buracos negros acústicos 113

7 Modelos análogos e a radiação Hawking-Unruh 114

7.1	Buraco negro acústico com rotação	114
7.1.1	Soluções analíticas da equação de Klein-Gordon sem massa	116
7.1.2	Radiação Hawking análoga	118
7.1.3	Extensão analítica e espectro da radiação	120
7.2	Buraco negro acústico canônico	121
7.2.1	Soluções analíticas da equação de Klein-Gordon sem massa	122
7.2.2	Radiação Hawking análoga	125
7.2.3	Extensão analítica e espectro da radiação	127
7.3	Conclusões parciais	128

8 Frequências ressonantes do vórtice hidrodinâmico 129

8.1	Espaço-tempo de vórtice hidrodinâmico	129
8.2	Soluções exatas da equação covariante de Klein-Gordon	130
8.2.1	Equação radial	130
8.3	Frequências ressonantes	132

8.4	Conclusões parciais	134
9	Soluções analíticas no buraco negro acústico análogo da métrica cônica de Kerr	135
9.1	Espaço-tempo de Kerr com uma corda cósmica	135
9.2	Buraco negro acústico com rotação e disclinação	136
9.3	Equação do campo escalar sem massa	136
9.3.1	A equação radial	137
9.4	Radiação Hawking-Unruh	139
9.5	Conclusões parciais	140
V	Cosmologia quântica	141
10	Cosmologia newtoniana quântica	142
10.1	Operador hamiltoniano	142
10.2	Equação de Schrödinger	143
10.3	Soluções analíticas	144
10.4	Níveis de energia	145
10.5	A função de onda para a cosmologia newtoniana	146
10.6	Conclusões parciais	148
11	Equação de Wheeler-DeWitt no universo de Friedmann-Robertson-Walker .	149
11.1	Classe de soluções da equação de Wheeler-DeWitt	149
11.2	Solução da equação de WDW para $\omega = 0$	151
11.2.1	Espectro da densidade de energia	154
11.3	Solução da equação de WDW para $\omega = 1/3$	157
11.4	Solução da equação de WDW para $\omega = -1$	159
11.5	Conclusões parciais	161
VI	Flutuações quânticas da geometria	163
12	As flutuações da geometria do espaço-tempo e o desvio geodésico	164
12.1	Flutuações da equação do desvio geodésico	164
12.2	Estado térmico de grávitons	166
12.2.1	Caso 1: $t_0 \ll \beta$ (curto tempo de voo ou baixa temperatura)	169
12.2.2	Caso 2: $t_0 \gg \beta$ (longo tempo de voo ou alta temperatura)	169
12.2.3	Flutuação da posição	170
12.3	Grávitons em um estado quântico <i>squeezed</i>	171
12.3.1	Dependência clássica no tempo	173
12.3.2	Caso especial: onda gravitacional transversa	174

12.3.3	Estimando $\langle(\Delta v)^2\rangle$ a partir do valor do tensor energia-momento . .	175
12.3.4	Flutuação da posição	176
12.4	Estado de vácuo de grávitons	177
12.4.1	Integração temporal direta	179
12.4.1.1	Flutuação da velocidade	179
12.4.1.2	Flutuação da posição	180
12.4.2	Integração temporal lorentziana	181
12.4.3	Média ao longo de um mundo tubular de largura crescente	183
12.4.4	Integrando ao longo de uma linha de universo: função de correlação da velocidade	185
12.5	Conclusões parciais	189
Conclusões e perspectivas		191
Referências		193
 Apêndices		 214
APÊNDICE A Notações, definições e convenções		215
A.1	Vetores, tensores e operadores	215
A.2	Notação de Dirac	216
APÊNDICE B Funções especiais		217
B.1	Função degrau de Heaviside	217
B.2	Função polilogarítmica	218
B.3	Função dilogarítmica	218
APÊNDICE C Função de correlação do tensor de Riemann		220
C.1	Estado térmico de grávitons	220
C.2	Grávitons em um estado quântico <i>squeezed</i>	222
C.2.1	Dependência clássica no tempo	223
 Anexos		 224
ANEXO A Outras publicações		225

Introdução

Astral engines in reverse
I'm falling through the universe again ...

O entendimento do comportamento de diferentes campos que interagem com o campo gravitacional de buracos negros pode nos dar, em princípio, algumas informações relevantes sobre a física destes objetos. Em particular, o campo escalar constitui um desses campos, cujo comportamento foi estudado nesta tese levando em consideração os espaços-tempos de fundo gerados por diferentes tipos de buracos negros. Nesta linha de pesquisa, a separabilidade da equação de Klein-Gordon tem sido estudada em diferentes cenários com buracos negros [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Outros estudos relativos ao comportamento de campos escalares em diferentes cenários de buracos negros, bem como suas consequências, podem ser encontrados na literatura [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

O defeito topológico chamado corda cósmica é previsto em algumas teorias de campos de calibre (*gauge*) [16] como o resultado de transições de fases. Ela pode tanto formar laços fechados (*closed loops*) ou se estender para o infinito, e é caracterizada por sua tensão, $G\mu$, onde G é constante gravitacional de Newton e μ é a massa por unidade de comprimento da corda. A geometria do espaço-tempo associado a uma corda cósmica infinitamente reta e fina possui uma estrutura cônica, o que significa que ela é plana localmente, mas não globalmente, devido ao fato de que na localização da corda o tensor de curvatura possui a forma de uma função delta. A planicidade local do espaço-tempo em torno da corda cósmica significa que não existe força gravitacional local. A seção perpendicular à corda cósmica possui um déficit angular azimutal dado por $\Delta\phi = 8\pi G\mu$ [17]. Entretanto, existem alguns efeitos gravitacionais associados com as propriedades globais do espaço-tempo gerado pela corda cósmica. Dentre esses efeitos, a corda cósmica pode induzir uma autoforça eletrostática finita sobre uma partícula carregada eletricamente, pode induzir a emissão de radiação de uma partícula que se move livremente, pode atuar como uma lente gravitacional, entre outros [18].

Uma corda cósmica não precisa aparecer, necessariamente, como um único objeto no espaço vazio. De fato, ela pode aparecer como parte de um sistema gravitacional, como por exemplo, um buraco negro. Neste caso, a corda cósmica é incluída, formalmente, removendo-se uma fatia da região perpendicular à corda, isto é, requerendo que o ângulo azimutal ao redor do eixo de simetria varie ao longo do intervalo $0 < \phi < 2\pi b$, com $b = 1 - 4\mu$. Então, colando-se as arestas resultantes, obtemos o espaço-tempo correspondente a um buraco negro com uma corda cósmica passando através dele. Como exemplos de tais generalizações, podemos mencionar o espaço-tempo de Schwarzschild com uma corda cósmica [19] e o

espaço-tempo de Kerr com uma corda cósmica [20].

Um interessante fenômeno que corresponde à emissão espontânea da radiação de corpo negro por buracos negros é o chamado efeito Hawking, que foi previsto a partir do estudo da radiação térmica emitida por um buraco negro esfericamente simétrico [21]. Os estudos relativos a este fenômeno foram realizados usando diferentes métodos [22, 23, 24, 25, 26, 27], nos quais não é necessária a solução completa da equação do campo de radiação.

Um outro fenômeno interessante, que também desempenha um importante papel na física de buracos negros, são os modos quasinormais (*Quasinormal Modes* – QNMs) [28]. De fato, este é um problema de valor limite para equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com singularidades nos pontos finais do intervalo em consideração [29]. Nos anos recentes, grande atenção tem sido dada aos QNMs porque acredita-se que essas grandezas podem lançar luz sobre a compreensão dos problemas fundamentais da gravidade quântica no contexto da *loop quantum gravity* [30].

Nossa contribuição a estes estudos foi obter as soluções exatas da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado, e seus casos particulares, nos seguintes espaços-tempos: Lense-Thirring e Kerr-Newman-Kasuya (ambos com uma corda cósmica passando através de seus eixos de simetria), Ernst e monopolo global na gravidade $f(R)$. Estas soluções são dadas em termos das funções de Heun [31] e são válidas na região entre o horizonte de eventos exterior (interior, no caso do monopolo global em gravidade $f(R)$) e o infinito, que corresponde a todo o espaço. Usando as soluções obtidas para a parte radial da equação de Klein-Gordon estudamos a radiação Hawking. O cálculo analítico da taxa de decaimento (ou taxa de emissão) da onda que se afasta (*outgoing*), para partículas escalares massivas carregadas nos espaços-tempos em consideração, são apresentados, bem como de seus casos particulares. Os espectros resultantes são integrados para fornecer a energia total emitida (ou fluxo de energia) nos vários modos.

Neste século 21, as funções de Heun tem ganhado mais e mais importância devido ao grande número de aplicações em diferentes áreas da física (veja [32] e as referências nele citadas) e, em especial, nas soluções de problemas relativos aos campos escalares na presença de campos gravitacionais. O uso das funções de Heun nos permite, como será visto ao longo desta tese, encontrar as soluções exatas da equação de Klein-Gordon nos espaços-tempos de diversos buracos negros. De outra forma, sem o uso dessas funções, as soluções escalares, para campos com e sem massa, serão possíveis apenas para algumas regiões específicas, a saber, muito próximas e afastadas dos horizontes de eventos do buraco negro. Dentre outros estudos teóricos a respeito de processos físicos que ocorrem no espaço-tempo em torno de buracos negros, podemos mencionar os correspondentes às frequências ressonantes [33, 34, 35] e ao espalhamento de partículas e campos de diferentes *spins* [36, 37, 38, 39, 40]. Nesta tese, as soluções da equação de Klein-Gordon nos diferentes

campos gravitacionais são dadas em termos das funções de Heun. Assim, fazendo uso das propriedades das funções de Heun, apresentamos um novo método para obter as frequências ressonantes (*resonant frequencies* – RFs). Além disso, examinamos o processo de espalhamento de ondas escalares.

Em um trabalho seminal, Unruh [41] mostrou que, sob certas condições, a equação de movimento que descreve a propagação de modos sonoros (fônons) em um campo que corresponde a um fluxo hidrodinâmico, que sofre uma transição subsônico-supersônico, pode ser escrita na mesma forma algébrica dada pela equação de Klein-Gordon para um campo escalar, sem massa, minimamente acoplado a uma geometria efetiva lorentziana, contendo um horizonte de eventos sônico. Isto significa que este sistema físico pode ser considerado análogo aos buracos negros astrofísicos e, como consequência, podem ser usados, em princípio, para entender a física dos buracos negros. Adicionalmente, podem ser realizados experimentos em laboratório para testar algumas de suas propriedades [42].

A existência de um horizonte de eventos no análogo hidrodinâmico de um buraco negro astrofísico sugere que um interessante fenômeno pode ser produzido, o qual consiste na emissão de um fluxo térmico de fônons, cuja temperatura é proporcional ao gradiente do campo de velocidades no horizonte de eventos acústico, chamado radiação Hawking análoga, que é similar à radiação emitida por buracos negros astrofísicos, a bem conhecida radiação Hawking [43, 44, 45]. Assim, usando esta analogia, é possível, em princípio, verificar experimentalmente a radiação Hawking análoga emitida pelos buracos negros acústicos e, admitindo que a física que leva à radiação Hawking deva ser a mesma para esse análogo, podemos obter algumas informações sobre o fenômeno que se origina da combinação de mecânica quântica e relatividade geral, mas agora em um nível puramente clássico.

De fato, é difícil observar a radiação Hawking emitida por buracos negros astrofísicos, devido ao fato de que a temperatura Hawking é sete ordens de grandeza menor do que a temperatura da radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background* – CMB), isto para um buraco negro de Schwarzschild com massa equivalente a massa solar. Assim, a verificação observacional da radiação Hawking emitida por buracos negros astrofísicos pode ser possível apenas se esses objetos tivessem massa muito menor que a massa solar. Por outro lado, para buracos negros acústicos em matéria condensada, a temperatura Hawking análoga pode estar em torno de 10^{-6} K a 10^{-7} K (para uma revisão, veja [46] e as referências nele citadas), que é tão pequena para ser medida em um laboratório, mas certamente esses valores serão medidos em um futuro próximo. O fato de que a radiação Hawking de buracos negros astrofísicos possui um análogo em sistemas hidrodinâmicos tem estimulado a realização de vários experimentos [47, 48] e sugerido novos experimentos envolvendo ondas de água [49].

A radiação Hawking é um efeito de origem cinemática que aparece no escopo da

relatividade geral conectada com a existência de horizontes de eventos e, portanto, não possui relação com os aspectos dinâmicos das equações de Einstein. A fim de estudar a radiação Hawking, diferentes abordagens foram utilizadas [50, 51, 52]. Assim, se temos um sistema análogo que exibe um horizonte de eventos, esperamos a existência de um análogo da radiação Hawking, como indicado anteriormente. Isto significa que essa radiação é um fenômeno mais geral que ocorre sempre que um horizonte de eventos existe e, portanto, em diferentes sistemas gravitacionais análogos. O fato de a temperatura envolvida nos modelos análogos ser muito baixa sugere a realização de experimentos envolvendo sistemas ultra frios, tais como condensados de Bose-Einstein [53, 54, 55, 56], superfluidos de Hélio [57], supercondutores [58, 59], superfluidos *polariton* [60] e gás de Fermi degenerado [61]. Assim, devido ao caráter geral da radiação Hawking e a possibilidade real de detectar seu análogo, muitos outros sistemas tem sido investigados [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71].

Os buracos negros astrofísicos e os correspondentes modelos de gravidade análoga possuem muitas propriedades em comum, mesmo possuindo diferentes dinâmicas. Por exemplo, a dinâmica dos buracos negros acústicos é governada pelas equações da mecânica dos fluidos, enquanto a dinâmica dos buracos negros astrofísicos é obtida a partir das equações de Einstein. O fato que essas diferentes formas de buracos negros possuam algumas propriedades fundamentais em comum, associada com a possibilidade de detectar e estudar os buracos negros acústicos no laboratório, o que pode nos ajudar a melhor entender a física de um buraco negro gravitacional, motivou uma série de investigações no que concerne à física dos buracos negros acústicos [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86].

Uma solução particular da equação de Klein-Gordon, sem massa, em um espaço-tempo acústico com rotação foi obtida usando as coordenadas *tortoise*, em duas regiões distintas, a saber, próxima ao horizonte de eventos e muito distante dele, com a proposta de examinar o fenômeno de superressonância [87]. A fim de investigar o espalhamento superressonante de perturbações acústicas, a partir de um buraco negro acústico com rotação, foi encontrada uma solução aproximada [88], no limite de baixa frequência, que é dado em termos das funções hipergeométricas. Essa solução, com as condições de contorno apropriadas, foi também usada para computar os QNMs [89] associados com um buraco negro acústico com rotação.

Nesta tese, obtemos as soluções analíticas da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa, em ambos os buracos negros acústicos, o com rotação e o canônico, válidas em todo o intervalo do espaço, o que significa entre o horizonte de eventos acústico e o infinito. Além disso, essas soluções são válidas para todas as frequências. Elas são dadas em termos de soluções das equações de Heun. Usando a solução radial, que é dada em termos das funções confluentes de Heun e levando em conta suas propriedades, estudamos a radiação Hawking análoga de partículas escalares sem massa.

No caso particular do espaço-tempo de um vórtice hidrodinâmico, que corresponde a uma geometria efetiva sem um horizonte de eventos, mas com ergoregião, as soluções da equação de Klein-Gordon são dadas em termos das funções duplamente confluentes de Heun e são válidas em todo o intervalo do espaço. Ainda neste espaço-tempo, obtemos as frequências ressonantes para partículas escalares sem massa utilizando um dos métodos conhecidos na literatura [90].

Existe outra área da física na qual podemos fazer uso das equações de Heun, ela é a cosmologia quântica. Nossa contribuição a esta área foi analisar ambos os modelos de cosmologia quântica: newtoniano e einsteiniano (ou relativístico).

As equações da cosmologia einsteiniana são derivadas da relatividade geral, com o uso do princípio cosmológico. Esta formulação é geométrica, de modo que as descrições dos efeitos cosmológicos estão associadas à geometria do espaço-tempo, que é quantificada por sua curvatura [91]. Neste caso, a geometria diferencial desempenha um papel fundamental em conjunto com uma extensa gama de ferramentas analíticas que surgem da geometria. Nesta abordagem métrica, os modelos do universo são, então, classificados de acordo com as propriedades do tensor de curvatura. Por outro lado, na cosmologia newtoniana, a equação que descreve a evolução do universo é obtida a partir das equações de movimento e de energia para partículas (galáxias) submetidas a forças gravitacionais, e também considerando o princípio cosmológico [92]. Isto nos sugere que podemos utilizar o formalismo desenvolvido por Lagrange e Hamilton, escrevendo a lagrangiana e a hamiltoniana do sistema, a fim de obter a equação e a integral do movimento.

A cosmologia newtoniana, um modelo do universo baseado na mecânica newtoniana, foi bem estabelecida na terceira década do século passado [93, 94]. Neste contexto, as equações cosmológicas que descrevem a evolução temporal do universo são obtidas considerando o princípio cosmológico, usando a dinâmica e a gravitação newtoniana, e admitindo algumas hipóteses advindas da relatividade geral. Os resultados obtidos neste caso mostram que o universo não pode ser estático, obedecendo uma equação que é algebricamente análoga à equação de Friedmann da relatividade geral, mas obviamente com diferentes interpretações. Este modelo baseado no tratamento newtoniano fornece uma boa descrição do universo em expansão, quando a pressão é considerada igual a zero [95]. Quando a pressão é levada em conta se faz necessário modificar as equações básicas do caso sem pressão [96] e adotar algumas hipóteses [97] a fim de garantir a analogia entre as abordagens newtoniana e einsteiniana da cosmologia.

É importante chamar a atenção para o fato de que para se obter a equivalência entre as cosmologias newtoniana e einsteiniana é necessário combinar as equações da mecânica clássica e o princípio cosmológico, que hoje é fortemente apoiada pela suavidade da CMB, cujo espectro é isotrópico e uniforme [98, 99], dentro de $(\Delta T/T) \leq 10^{-5}$. Assim, o fato de que esta anisotropia concorda muito bem com aquela do universo inicialmente

homogêneo e isotrópico indica que o princípio cosmológico deve ser válido pelo menos para escalas com comprimento muito maior do que centenas de Megaparsecs.

Cosmologia newtoniana quântica é o quadro teórico dentro do qual é possível encontrar a função de onda que prevê o comportamento do universo newtoniano. Esta função de onda para a cosmologia newtoniana é obtida em mecânica quântica não relativística e, assim, tudo que precisamos é resolver a equação de Schrödinger para o sistema em consideração [100, 101, 102, 103, 104]. Neste caso, nossa contribuição foi obter a solução geral exata, dada em termos das funções biconfluentes de Heun. Novamente, fazendo uso das propriedades da função biconfluente de Heun, obtemos os níveis de energia, bem como as funções de onda, para uma partícula (galáxia) se movendo em um universo newtoniano.

A primeira abordagem baseada na aplicação da teoria quântica para descrever o universo foi apresentada na década de 1960 por Wheeler [105] e DeWitt [106]. Naquela época, eles propuseram uma equação para descrever a gravidade quântica, que permitiria obter a função de onda do universo e sua evolução, que é conhecida como equação de Wheeler-DeWitt (WDW) [107]. Essa equação é análoga à equação de Schrödinger para energia zero, cujo hamiltoniano pode conter o campo gravitacional bem como campos não gravitacionais, como por exemplo, campos escalares. Se esses campos estão presentes no hamiltoniano, as variáveis dinâmicas são o fator de escala e o campo escalar, bem como seus respectivos momentos conjugados.

No caso em que apenas o campo gravitacional está presente, as soluções da equação WDW definida no minisuperespaço dependem apenas de um único parâmetro, a saber, o fator de escala, e assim as propriedades das funções de onda serão caracterizadas exclusivamente por esse parâmetro. É importante chamar a atenção para o fato de que a equação WDW nos leva a funções de onda estacionárias, devido ao fato de que ela não contém nenhum parâmetro clássico que pode ser identificado com esta quantidade.

Daquela época até hoje, essa equação tem inspirado investigações em cosmologia quântica [108]. Neste contexto, a evolução do universo é determinada pelos estados quânticos que obedecem a equação WDW [109, 110, 111, 112, 113], de tal forma que no limite clássico apropriado as soluções de Friedmann são recuperadas. Ao longo desta linha de pesquisa, alguns resultados, usando diferentes abordagens, foram obtidos [114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121]. Especialmente, enfatizamos a linha de pesquisa que usa a equação WDW como uma ferramenta fundamental para formular a *loop quantum gravity* [122].

Apesar de todos os problemas presentes na formulação original da equação WDW, tal como a quebra da covariância relativística, a ausência da variável temporal e outros [123], hoje em dia ela é considerada uma ferramenta fundamental para elaborar alguns modelos que buscam explicar as propriedades quânticas do fenômeno gravitacional, tomando em conjunto mecânica quântica e relatividade geral [124], e por esta razão as investigações em cosmologia quântica, baseadas na equação WDW, tem continuado. A equação WDW não

fornece a melhor forma de descrever o cenário da gravidade quântica, mas ela tem aberto um caminho para tentar entender e construir uma teoria da gravidade quântica, e por esta razão constitui um poderoso elemento conceitual para construir um arcabouço teórico no qual a dinâmica quântica do fenômeno gravitacional pode ser explicado consistentemente. Assim, é certamente importante encontrar soluções para esta equação e usá-las na elaboração de uma teoria consistente que leve em conta as propriedades quânticas do nosso Universo.

Nossa contribuição foi obter as soluções exatas da equação WDW nas três possíveis geometrias, todas em um universo preenchido com energia de vácuo dependente da constante cosmológica. Essas soluções são dadas em termos das funções triconfluentes de Heun e, fazendo uso das suas propriedades, obtemos os níveis de densidade de energia para o caso de dominância de matéria.

Outra linha de pesquisa que busca explicar as propriedades quânticas dos campos gravitacionais é a que trata das flutuações quânticas da geometria do espaço-tempo, as quais podem ser de dois tipos: passiva ou ativa. O caso passivo é gerado por flutuações dos campos quânticos de matéria, ou seja, a partir das flutuações na fonte do campo gravitacional, as quais são descritas em termos da função de correlação do tensor de energia-momento ou do tensor de Ricci [125, 126, 127, 128, 129, 130, 131]. O caso ativo é devido à natureza quântica da gravidade, ou seja, a partir das flutuações dos graus de liberdade dinâmicos da gravidade em si, as quais são dadas em termos da função de correlação do tensor de Riemann [132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139].

No espaço plano, linhas paralelas mantem-se separadas para sempre. Entretanto, no espaço-tempo curvo, geodésicas paralelas não permanecem paralelas quando são extendidas. A declaração matemática deste fenômeno físico é dada pela equação do desvio geodésico, a qual mostra que a força de maré (*tidal*) do campo gravitacional causa modificação nas trajetórias de partículas vizinhas [140]. Vários estudos acerca do comportamento da equação do desvio geodésico em diversos campos gravitacionais, assim como suas consequências, podem ser encontrados na literatura [141, 142, 143, 144, 145]. Na teoria da relatividade geral, um importante efeito desempenhado pela curvatura é como ela modifica a separação relativa entre duas partículas geodésicas. Esta é uma manifestação do campo gravitacional e, portanto, a aceleração do vetor de desvio entre duas geodésicas vizinhas contém informações a cerca da curvatura do espaço-tempo [146, 147, 148, 149].

As propriedades do espaço-tempo curvo que são refletidas pela física em um campo gravitacional podem ser avaliadas analisando o comportamento de um conjunto de geodésicas vizinhas, representando, por exemplo, um feixe de fótons ou uma distribuição de partículas teste massivas [150]. A fim de estudar este fenômeno, várias abordagens diferentes tem sido propostas [151, 152, 153, 154].

Por outro lado, a investigação do movimento browniano, o qual pode ser descrito pela equação de Langevin, desempenhou um papel muito importante para o estabelecimento da

estrutura atômica da matéria. O caráter discreto da matéria (característica microscópica) causa flutuações na densidade da matéria, que, por sua vez, causa efeitos observáveis no movimento das partículas brownianas (característica macroscópica). Recentemente, as soluções de equações do tipo de Lagenvin em alguns cenários astrofísicos foram discutidas na literatura [155, 156, 157, 158, 159, 160, 161].

O conhecimento do comportamento de uma partícula browniana imersa em um fluido de átomos muito menores, pode nos fornecer, em princípio, algumas informações relevantes sobre a física destes objetos [162]. O movimento browniano de partículas teste acopladas a campos quânticos foi estudada nas Refs. [163, 164, 165]. Similarmente, podemos estudar o movimento browniano de partículas teste em um campo gravitacional flutuante para procurar indicações de gravidade quântica [166]. Neste sentido, nossa contribuição foi usar a equação do desvio geodésico como uma equação de Lagevin, na qual o tensor de Riemann flutua. Estas flutuações quânticas da curvatura modificam o movimento de partículas teste e pode ser medido pela dispersão na velocidade relativa após uma interação.

Esta tese de doutoramento está organizada como segue. Na parte I, apresentamos as equações básicas da relatividade geral, a covariantização da equação de Klein-Gordon para espaços-tempos curvos, a equação do movimento browniano e, em seguida, é feita uma revisão das funções de Heun. Na parte II, estudamos a influência de campos gravitacionais de buracos negros com corda cósmica sobre partículas escalares. Na parte III, campos escalares sem massa são analisados nos espaços-tempos de buracos negros cercados por campos magnéticos e campos escalares massivos no espaço-tempo do monopolo global em gravidade $f(R)$. Na parte IV, obtemos as soluções exatas para a propagação de modos sonoros em buracos negros acústicos. Na parte V, aplicamos as equações de Heun para resolver problemas relativos à cosmologia quântica. Na parte VI, analisamos as flutuações quânticas da equação do desvio geodésico para grávitons em três diferentes estados. E por fim, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Parte I

Teoria de campos em espaço-tempo curvo,
mecânica estatística e física matemática

1 Relatividade geral, mecânica quântica e movimento browniano

Down among a deadmen's vision ...

Neste capítulo faremos uma brevíssima revisão da teoria da relatividade geral, da covariantização da mecânica quântica relativística e da equação que descreve o movimento browniano. A importância da generalização da mecânica quântica para os espaços-tempos curvos se deve principalmente a dois motivos: primeiro, é imprescindível no estudo dos problemas relativos à influência de campos gravitacionais externos sobre sistemas quânticos e, segundo, pode ser útil para um melhor entendimento da estrutura geométrica e topológica da mecânica quântica. Antes de tudo, é importante chamar atenção para o fato que essa generalização da mecânica quântica não apresenta elementos conflitantes, visto que o caráter local da descrição geométrica da relatividade geral é compatível com a natureza global da mecânica quântica descrita no espaço de Hilbert. Durante o desenvolvimento da mecânica quântica, as investigações do movimento browniano desempenharam um importante papel no estabelecimento da estrutura corpuscular da matéria. Neste mesmo sentido, a fim de construir uma teoria de unificação, podemos realizar uma analogia deste fenômeno para entender o comportamento quântico da gravitação. Os textos básicos utilizados nesse capítulo foram as Refs. [167, 168, 169, 170, 171, 162].

1.1 As equações de campo de Einstein

O objetivo principal da relatividade geral é generalizar o princípio fundamental da relatividade restrita, o qual afirma que as leis físicas são invariantes, isto é, covariantes sob transformações de coordenadas entre dois referenciais inerciais.

As equações de movimento são deduzidas, geralmente, com base em axiomas acerca do tipo de equações que desejamos obter, sendo esses axiomas baseados em princípios físicos. Para deduzir as equações do campo gravitacional, vamos estabelecer os axiomas a seguir:

- (i) A gravitação é descrita por uma métrica lorentziana, $g_{\mu\nu}$, definida sobre uma dada variedade, M ;
- (ii) As equações de campo para $g_{\mu\nu}$ devem depender apenas do conteúdo de matéria;
- (iii) As equações de movimento devem ser covariantes gerais (equações tensoriais), ou seja, $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ quando $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \equiv 0$;

- (iv) O tensor $T^{\mu\nu}$ é tal que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$;
- (v) Localmente, todos os sinais ou quadri-velocidades estão no interior ou sobre o cone de luz;
- (vi) A gravitação de Newton deve ser recobrada ou apenas valer no limite de campos fracos;
- (vii) As equações de campo devem ser, no máximo, de segunda ordem nas derivadas;
- (viii) As equações de campo devem ser deriváveis de um princípio de ação mínima, na forma covariante.

Podemos determinar a dinâmica de $g_{\mu\nu}$ usando apenas a condição (viii), onde a equação de Euler-Lagrange resultante deve ser, no máximo, de segunda ordem nas derivadas. Além disso, a lagrangeana deve ser um escalar, o que justifica utilizar o escalar de Ricci e uma constante na construção da densidade lagrangeana.

Considere a seguinte integral da Ação S

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g}, \quad (1.1)$$

onde κ é a constante de acoplamento mínimo, $\mathcal{L}_G = (R - 2\Lambda)/2\kappa$ é a lagrangeana do campo gravitacional, $\mathcal{L}_M$ é a lagrangeana dos campos de matéria, Λ é a constante cosmológica e $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$.

A variação do termo envolvendo a constante cosmológica fornece

$$\delta \int d^4x \Lambda \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \int d^4x \Lambda g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

A variação do termo envolvendo o escalar de Ricci fornece

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x R \sqrt{-g} &= - \int d^4x R^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4x R g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Podemos verificar que $\int d^4x g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} = 0$:

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \quad (1.5)$$

$\therefore$

$$\delta R^\rho_{\mu\sigma\nu} = \nabla_\sigma (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\sigma\mu}) \quad (1.6)$$

$\therefore$

$$g^{\mu\nu} \delta R^\rho_{\mu\rho\nu} = g^{\mu\nu} [\nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\mu})] = \nabla_\rho [g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - g^{\mu\rho} (\delta \Gamma^\sigma_{\sigma\mu})]. \quad (1.7)$$

A partir da Eq. (1.7), vemos que o integrando de $\int d^4x g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}$ é uma divergência covariante de um tensor e, portanto, $\int d^4x g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} = 0$, como anunciamos.

A variação do termo correspondente aos campos de matéria fornece

$$\delta \int d^4x \mathcal{L}_M \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \int d^4x T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

no qual o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.9)$$

Logo, substituindo as Eqs. (1.2), (1.3) e (1.8) na variação δS , obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left[\left(\frac{1}{2} R g^{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \right) - \Lambda g^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Agora, visto que $\delta S = 0$ para variações arbitrárias $\delta g_{\mu\nu}$, temos que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

onde $\kappa = 8\pi G/c^4$ é uma constante universal. Assim, podemos escrever as equações de campo de Einstein, com constante cosmológica, na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Portanto, as equações de campo podem ser obtidas a partir do princípio variacional para a integral da ação (em unidades naturais)

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g}. \quad (1.13)$$

Esta é a chamada Ação de Einstein-Hilbert. O termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ foi introduzido por Einstein por razões cosmológicas, a fim de obter uma solução cosmológica homogênea, isotrópica e estática. A constante cosmológica, Λ , é um parâmetro da teoria e deve ser medido. Em alguns modelos do universo primordial (inflacionário) é conveniente começar com $\Lambda > 0$ e, então, por alguma dinâmica, fazer $\Lambda = 0$ em tempos posteriores.

Retornando à Eq. (1.12), note que $T_{\mu\nu}$ é o conteúdo material da fonte da geometria. No vácuo, temos que $T = T_{\mu\nu} = 0$, de modo que as equações de campo de Einstein se reduzem para

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.14)$$

onde tomamos $\Lambda = 0$. No caso em que $\Lambda \neq 0$, a Eq. (1.14) fica

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.15)$$

Observe que da aproximação linear, podemos concluir que a constante cosmológica possui a interpretação física de energia de vácuo ou energia de ponto zero, isto é, uma simples constante aditiva na densidade de energia. No caso da gravitação, a dinâmica muda consideravelmente com a presença de Λ .

1.2 A equação do desvio geodésico

A aceleração de maré produzida pela gravidade é o mais importante efeito da curvatura, isto é, como ela atua como uma manifestação da gravidade real modificando a separação relativa entre geodésicas vizinhas.

Como é conhecido, símbolos de Christoffel diferentes de zero podem surgir devido tanto às coordenadas curvilíneas quanto à curvatura do espaço-tempo. No entanto, símbolos de Christoffel diferentes de zero, isoladamente, não podem implicar a existência de efeitos gravitacionais genuínos. Desse modo, para provar efeitos gravitacionais genuínos, precisamos proceder à próxima ordem.

Em relatividade geral, as trajetórias de partículas livres são geodésicas e, portanto, a aceleração do vetor de desvio entre duas geodésicas vizinhas pode conter informações sobre a curvatura do espaço-tempo. Neste sentido, vamos obter a relação entre o desvio geodésico e a curvatura. Esperamos que o tensor de curvatura determine a taxa com a qual a separação entre as geodésicas vizinhas se modifica.

Considere um grupo de partículas teste livres, que se movem ao longo de geodésicas tipo-tempo em um espaço-tempo relativístico. Vamos denotar a família de geodésicas por

$$x^\mu = x^\mu(\tau, v), \quad (1.16)$$

onde τ representa um parâmetro afim ao longo das geodesicas e v representa um geodésica particular. Dada duas geodésicas vizinhas parametrizadas pelos valores v e $v + dv$, o vetor de desvio é definido como

$$n^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial v} \right) \delta v \equiv v^\mu \delta v. \quad (1.17)$$

Este nome vem da noção informal de que n^μ aponta de uma geodésica em direção as geodésicas vizinhas.

O vetor tangente à geodésica é dado por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.18)$$

do qual segue que

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial v} \right) = \frac{\partial v^\mu}{\partial \tau}. \quad (1.19)$$

A partir da definição de derivada covariante, a saber,

$$\nabla_\alpha u^\mu = \partial_\alpha u^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu u^\nu, \quad (1.20)$$

onde $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$ é o símbolo de Christoffel de segunda espécie, definido por

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (-\partial_\rho g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\alpha}), \quad (1.21)$$

segue que

$$v^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = u^\lambda \nabla_\lambda v^\mu. \quad (1.22)$$

Consideremos, agora, a variação do vetor separação, n^μ , entre duas geodésicas vizinhas, tal que

$$\begin{aligned} \frac{D^2 v^\mu}{d\tau^2} &= u^\nu \nabla_\nu (u^\lambda \nabla_\lambda v^\mu) \\ &= u^\nu \nabla_\nu (v^\lambda \nabla_\lambda u^\mu) \\ &= u^\nu v^\lambda \nabla_\nu \nabla_\lambda u^\mu + u^\nu \nabla_\nu v^\lambda \nabla_\lambda u^\mu. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Usando a Eq. (1.22) no segundo termo e mudando a ordem das derivadas covariantes no primeiro termo, temos que

$$\frac{D^2 v^\mu}{d\tau^2} = v^\lambda \nabla_\lambda (u^\nu \nabla_\nu u^\mu) + u^\alpha R_{\alpha\lambda\nu}^\mu u^\lambda v^\nu, \quad (1.24)$$

onde $R_{\alpha\lambda\nu}^\mu$ é o tensor de curvatura de Riemann. O primeiro termo desaparece visto que $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ ao longo da geodésica. Assim, obtemos

$$\frac{D^2 v^\mu}{d\tau^2} = R_{\alpha\lambda\nu}^\mu u^\alpha u^\lambda v^\nu. \quad (1.25)$$

Este resultado mostra como a curvatura é responsável pelo desvio geodésico e é chamado de equação do desvio geodésico. Ele expressa aquilo que já esperávamos, de que a aceleração relativa entre duas geodésicas vizinhas é proporcional à curvatura.

1.3 A equação covariante de Klein-Gordon

Uma dada equação que descreve um fenômeno físico é válida na presença de um campo gravitacional, segundo o princípio da covariância, se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) A equação é válida na ausência de campo gravitacional, isto é, $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{ab}$ quando $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \equiv 0$;
- ii) A equação é covariante, ou seja, preserva sua forma sob transformação geral de coordenadas.

Agora, vamos utilizar essas duas condições para covariantizar a equação de Klein-Gordon. No caso de uma partícula relativística, o hamiltoniano, H , é dado por

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + \mu^2 c^4}, \quad (1.26)$$

onde μ é massa da partícula e $\mathbf{p}$ é o momento. Escrevendo a forma usual do operador momento canonicamente conjugado, a saber,

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla, \quad (1.27)$$

é imediato escrever uma equação que descreva a evolução quântica de uma partícula relativística

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + \mu^2c^4}\Psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.28)$$

Esta equação apresenta uma propriedade inconveniente, qual seja: o operador sob a raiz quadrada. Podemos resolver isso aplicando o operador hamiltoniano em ambos os lados da expressão acima. Como $\partial H/\partial t = 0$, temos

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{r}, t) = (-\hbar^2c^2\nabla^2 + \mu^2c^4)\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.29)$$

ou, equivalentemente,

$$\left[\square - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0, \quad (1.30)$$

onde $\square \equiv \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$.

Esta é a conhecida equação de Klein-Gordon. Visto que $\Psi(\mathbf{r}, t)$ é uma grandeza escalar, é imediato a covariância da Eq. (1.30). Podemos também reescrever esta equação na forma

$$\left[\eta^{ab}\partial_a\partial_b - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0. \quad (1.31)$$

A generalização desta equação para o espaço-tempo curvo é feita simplesmente pelas substituições de η^{ab} por $g^{\sigma\tau}$ e da derivada ∂_a pela derivada covariante ∇_σ . Logo, a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo pode ser escrita na forma

$$\left[g^{\sigma\tau}\nabla_\sigma\nabla_\tau - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0. \quad (1.32)$$

Fazendo uso da covariantização do operador d'alembertiano, a saber,

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau), \quad (1.33)$$

podemos, finalmente, escrever a equação covariante de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo como

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau) - \mu_0^2\right]\Psi(x) = 0, \quad (1.34)$$

onde $\mu_0 \equiv \mu c/\hbar$. No caso de acoplarmos uma interação escalar a Eq. (1.34), por exemplo, $V(\mathbf{r})$, devemos fazer a substituição $\mu c^2 \rightarrow \mu c^2 + V(\mathbf{r})$.

A equação covariante de Klein-Gordon associada a um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo curvo na presença de um quadri vetor potencial externo A_σ

(campo de *gauge*), pode ser obtida substituindo a derivada parcial ∂_σ por uma derivada estendida $D_\sigma = \partial_\sigma - ieA_\sigma$:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (g^{\sigma\tau} \sqrt{-g} \partial_\tau) - \frac{ie}{\sqrt{-g}} A^\sigma (\partial_\sigma \sqrt{-g}) - \frac{ie}{\hbar c^2} (\partial_\sigma A^\sigma) - 2 \frac{ie}{\hbar c^2} A^\sigma \partial_\sigma - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} A^\sigma A_\sigma - \mu_0^2 \right] \Psi(x) = 0. \quad (1.35)$$

Esta equação descreve a interação de uma partícula relativística de spin-0, isto é, uma partícula escalar massiva carregada, tratada do ponto de vista quântico, com os campos eletromagnético e gravitacional, que são tratados classicamente.

1.4 A equação de Langevin

Em 1905, Einstein publicou um trabalho no qual aplica as ideias atomísticas da teoria cinética dos gases para descrever o movimento irregular de grãos de pólen imersos em um fluido, movimento este descoberto e investigado pelo cientista Robert Brown em 1827.

O movimento browniano fornece uma das mais importantes evidências, em escala macroscópica, da natureza discreta (ou quântica) da matéria em escala microscópica. Essa discreção da matéria causa flutuações na densidade de matéria, que, por sua vez, causa efeitos observáveis no movimento de partículas brownianas.

Nesta seção revisitamos a derivação da teoria do movimento browniano a partir da equação de Langevin para uma partícula browniana, isto é, uma partícula grande, imersa em um fluido de átomos muito menores. Visto que as escalas de tempo do movimento browniano e do movimento atômico são bem diferentes, podemos separá-las e destacar o comportamento da partícula browniana.

A teoria de Langevin do movimento browniano fornece uma teoria padrão para tratar sistemas de vários corpos, no qual uma separação das escalas temporais pode ser identificada entre alguns dos graus de liberdade. Por simplicidade, vamos considerar o movimento em uma dimensão, mas os resultados podem ser facilmente generalizados para três dimensões. Além disso, podemos generalizar ainda mais, geometrizando a fonte das flutuações.

Se assumirmos que o movimento browniano é produzido pelas colisões entre partículas microscópicas de massa m e as moléculas de um fluido de temperatura T , podemos escrever a equação de Langevin como

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F} - \alpha \mathbf{v} + \mathbf{F}_a(t), \quad (1.36)$$

onde $\mathbf{v}(t)$ é a velocidade de uma partícula, $\mathbf{F}$ é a força externa, α é o coeficiente de viscosidade do fluido e $\mathbf{F}_a(t)$ denota a parte flutuante da força estocástica exercida pelas moléculas do fluido sobre as partículas.

Para o caso unidimensional, com força externa nula, podemos escrever a Eq. (1.36) na forma

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F_a(t), \quad (1.37)$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + A(t), \quad (1.38)$$

onde $\gamma = \alpha/m > 0$ e $A = F_a/m$. Esta é uma equação diferencial estocástica para $v(t)$.

A parte homogênea da Eq. (1.38) é dada por

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = 0, \quad (1.39)$$

de modo que

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = -\gamma \int_0^t dt'. \quad (1.40)$$

Logo, a solução homogênea $v_h(t)$ é

$$v_h(t) = v_0 e^{-\gamma t}. \quad (1.41)$$

Para a parte não-homogênea da Eq. (1.38), o fator integrante é dado por

$$I(t, v) = e^{\int p(t) dt}, \quad (1.42)$$

onde

$$\int p(t) dt = \int \gamma dt = \gamma t, \quad (1.43)$$

de modo que

$$\frac{dv}{dt} e^{\gamma t} + \gamma v e^{\gamma t} = A e^{\gamma t}. \quad (1.44)$$

Logo, a solução particular $v_p(t)$ é

$$v_p(t) = e^{-\gamma t} \int_0^t A(t') e^{\gamma t'} dt'. \quad (1.45)$$

Temos, portanto, que a solução geral da Eq. (1.38) é tal que

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} A(t') dt'. \quad (1.46)$$

Agora, considerando um *ensemble* de partículas, podemos calcular o valor esperado da velocidade como

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \langle A(t') \rangle dt'. \quad (1.47)$$

Assim, o desvio médio da velocidade é dado por

$$\Delta v = v(t) - \langle v(t) \rangle = e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} [A(t') - \langle A(t') \rangle] dt', \quad (1.48)$$

de modo que o valor esperado do desvio quadrático médio (ou variância) fica

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2 = e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{\gamma t' + \gamma t''} C(t', t'') dt' dt'', \quad (1.49)$$

onde $C(t', t'')$ é a função de correlação temporal dada por

$$C(t', t'') = \langle A(t') A(t'') \rangle - \langle A(t') \rangle \langle A(t'') \rangle. \quad (1.50)$$

Portanto, para estimar a Eq. (1.49), precisamos estabelecer a forma de $C(t', t'')$.

No caso do movimento browniano, podemos admitir que o valor médio (ou valor esperado) das forças aleatórias é nulo, isto é, $\langle A(t') \rangle = 0$, de modo que temos um decaimento exponencial da velocidade inicial, a saber,

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t}. \quad (1.51)$$

Isto significa que para um tempo suficientemente longo, isto é, quando $t \rightarrow \infty$, deve-se recuperar a distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann (equilíbrio térmico), não importando a velocidade inicial v_0 . Então, admitindo também que as forças aleatórias são tais que $C(t', t'')$ é uma função par de $t'' - t'$ e apreciável apenas nas vizinhanças de $t'' = t'$, podemos escrever

$$C(t', t'') = \langle A(t') A(t'') \rangle = \tau \delta(t'' - t'), \quad (1.52)$$

onde τ é um parâmetro de tempo a ser determinado e fizemos uso da função- δ de Dirac. Logo, substituindo a Eq. (1.52) na Eq. (1.49), obtemos o valor esperado do desvio quadrático como sendo

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{\tau}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (1.53)$$

Para determinar a expressão de τ , vamos impor o limite $t \rightarrow \infty$ na Eq. (1.53), afim de recuperar a distribuição de velocidades no equilíbrio térmico, de modo que obtemos

$$\frac{k_B T}{m} = \frac{\tau}{2\gamma}. \quad (1.54)$$

Portanto, finalmente escrevemos o desvio quadrático médio como

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (1.55)$$

De fato, esta expressão retoma a distribuição de probabilidade de Maxwell-Boltzmann no limite de tempo suficiente para alcançar o equilíbrio térmico.

2 Equações de Heun

Faded dreams and nuclear fission spent ...

Neste capítulo apresentamos algumas propriedades básicas e detalhes pertinentes à equação diferencial geral de Heun, bem como de seus casos confluentes, sendo todas essas equações de extremo interesse no estudo da física de buracos negros, tanto dos astrofísicos quanto de seus análogos acústicos em matéria condensada, e também em cosmologia quântica. Sabemos que grande parte do conhecimento em física teórica é descrito usando equações diferenciais. Para sistemas lineares, por exemplo, diferentes formas das equações hipergeométricas são suficientes para descrever o sistema estudado. Em problemas não lineares, pode-se utilizar as equações de Painlevé. Entretanto, existem vários exemplos importantes onde temos que utilizar equações de ordem superior, como as equações de Heun, as quais, recentemente, são encontradas em problemas na relatividade geral e em astrofísica, além de em várias outras áreas da física. Os textos básicos utilizados nesse capítulo foram as Refs. [172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185].

2.1 Equação diferencial geral de Heun

A forma generalizada da equação diferencial geral de Heun ou, simplesmente, equação de Heun, é dada por

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{z - z_i} \frac{dy}{dz} + \left[\sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{z - z_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{B_i}{(z - z_i)^2} \right] y = 0, \quad (2.1)$$

onde as quantidades z_i , com $i = \{1, 2, 3\}$, fixam as singularidades regulares e a condição

$$\sum_{i=1}^3 C_i = 0, \quad (2.2)$$

assegura que a Eq. (2.1) possui uma singularidade regular no infinito.

2.1.1 Forma canônica

A forma canônica da equação de Heun, devida a Erdélyi, é a seguinte

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z - 1} + \frac{\epsilon}{z - a} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z - 1)(z - a)} y = 0, \quad (2.3)$$

onde y e z são variáveis complexas, e os parâmetros α , β , γ , δ , ϵ , q e a são geralmente números complexos e arbitrários, exceto que $a \neq \{0, 1\}$. Estes parâmetros estão relacionados por

$$\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1. \quad (2.4)$$

A equação de Heun é dita do tipo fuchsiana, com singularidades regulares em $z = \{0, 1, a, \infty\}$, cujos expoentes são $\{0, 1-\gamma\}$, $\{0, 1-\delta\}$, $\{0, 1-\epsilon\}$, $\{\alpha, \beta\}$, respectivamente. A soma destes expoentes deve ser igual a 2, de acordo com a teoria geral das equações de Fuchs; condição esta que leva à Eq. (2.4).

O parâmetro a , o qual localiza a terceira singularidade regular, é chamado de parâmetro de singularidade, enquanto os parâmetros α , β , γ , δ e ϵ são chamados de parâmetros de expoentes, pois determinam os expoentes nas quatro singularidades. O parâmetro q é chamado de parâmetro acessório e, em algumas aplicações, desempenha o papel de um autoparâmetro da autofunção.

É inevitável que, para uma equação tão geral e com tamanha possibilidade de aplicações, ocorram discrepâncias em relação a melhor forma canônica a ser adotada, visto que cada forma possível tem suas vantagens e desvantagens. De fato, a forma dada pela Eq. (2.3) é conveniente do ponto de vista de que ela se reduz a equação hipergeométrica em certos casos degenerados. Tal degenerescência não deve ser confundida com o processo de confluência, onde este último ocorre quando, simultaneamente, o parâmetro a assume valores máximos possíveis e um processo de limite atua sobre os parâmetros da equação, resultando em uma das formas confluentes da equação diferencial de Heun.

2.1.2 Tipos de soluções

As soluções da equação de Heun podem ser classificadas em quatro categorias, como segue.

- (1) Soluções locais: São as duas soluções de Frobenius nas vizinhanças de cada uma das singularidades regulares. Existem duas soluções deste tipo em cada singularidade, fornecendo um total de oito soluções locais.
- (2) Funções de Heun: São soluções de Frobenius em torno, simultaneamente, de duas diferentes singularidades.
- (3) Polinômios de Heun: São, simultaneamente, soluções de Frobenius nas três singularidades e, portanto, analíticas em um domínio contendo essas singularidades.
- (4) Soluções de caminho multiplicativo: Seja Γ um caminho fechado ao redor de duas, e somente duas, singularidades da equação. Quando continuada analiticamente ao redor de Γ , a solução retorna ao ponto inicial meramente multiplicada por uma constante.

Estas quatro categorias de soluções são análogas, algebricamente, as categorias conhecidas na teoria das equações diferenciais duplamente periódicas, tais como as funções de Lamé. As funções de Heun correspondem às soluções periódicas, os polinômios de Heun

às soluções duplamente periódicas e as solução de caminho multiplicativo às soluções quasiperiódicas.

A solução geral da Eq. (2.3) pode ser escrita como

$$y(z) = C_1 \text{HeunG}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z) + C_2 z^{1-\gamma} \text{HeunG}(a, q_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta; z), \quad (2.5)$$

onde $\text{HeunG}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$ denota as funções gerais de Heun e os parâmetros q_1 , α_1 , β_1 e γ_1 são dados por

$$q_1 = q + (\alpha\delta + \epsilon)(1 - \gamma), \quad (2.6)$$

$$\alpha_1 = \alpha + 1 - \gamma, \quad (2.7)$$

$$\beta_1 = \beta + 1 - \gamma, \quad (2.8)$$

$$\gamma_1 = 2 - \gamma. \quad (2.9)$$

2.1.3 Expansão em série de potências

Vamos, agora, considerar a expansão em série de potências das funções de Heun, com respeito à variável independente z , em torno de $z = 0$.

Se $\gamma \neq \{0, -1, -2, \dots\}$, então, a partir da teoria de Fuchs-Frobenius, segue que $\text{HeunG}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$ existe e é analítica no disco $|z| < 1$, correspondendo ao expoente zero. Logo, sua expansão em série de Maclaurin é dada por

$$\text{HeunG}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j, \quad (2.10)$$

onde Heun adotou a normalização $b_0 = 1$ e

$$\begin{aligned} a\gamma b_1 - qb_0 &= 0, \\ X_j b_{j+1} - (Q_j + q)b_j + P_j b_{j-1} &= 0, \quad j \geq 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

com

$$\begin{aligned} P_j &= (j - 1 + \alpha)(j - 1 + \beta), \\ Q_j &= j[(j - 1 + \gamma)(1 + a) + a\delta + \epsilon], \\ X_j &= a(j + 1)(j + \gamma). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nesta tese, salvo indicação em contrário, iremos utilizar apenas o primeiro termo desta série de potências (≈ 1).

2.1.4 Soluções polinomiais

A partir da definição dos polinômios de Heun, dada anteriormente, pode ser mostrado que tal solução deve ter a seguinte forma

$$Hp(z) = z^{\sigma_1}(z-1)^{\sigma_2}(z-a)^{\sigma_3}P_n(z), \quad (2.13)$$

onde $P_n(z)$ é um polinômio de grau n em z e os parâmetros σ_1 , σ_2 e σ_3 são cada um dos dois possíveis expoentes nas singularidades correspondentes. Podemos ver que quando $z \rightarrow \infty$, a função $Hp(z)$ se comporta como z^σ , onde $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + n$. Logo, um dos expoentes no infinito deve ser $-\sigma$. Vamos admitir, então, que α é esse expoente.

Portanto, os polinômios de Heun podem ser classificados em oito classes, especificadas pelos símbolos I-VIII, onde a Classe I é tal que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e

$$\alpha = -n, \quad (2.14)$$

com $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. A partir de agora, vamos chamar esta primeira condição polinomial para as funções de Heun, de condição- α .

2.1.5 Os casos confluentes da equação de Heun

O processo geral de confluência, em resumo, é um processo por meio do qual duas singularidades de uma equação diferencial são levadas a coincidência. Ao mesmo tempo, um processo de limite ocorre entre os parâmetros da equação, de modo que as duas singularidades são substituídas por uma única singularidade que, geralmente, é de natureza mais complicada.

Existem quatro importantes casos confluentes da equação de Heun, descritos a seguir.

- (1) A equação diferencial confluyente de Heun: É obtida quando as singularidades em $z = a$ e $z = \infty$ são fundidas, resultando em uma equação com singularidades regulares em $z = 0$ e $z = 1$, e uma singularidade irregular no ∞ , de ordem 1.
- (2) A equação diferencial duplamente confluyente de Heun: A singularidade em $z = 1$ é deslocada para o ponto $z = b$. Então, simultaneamente, temos os limites $a \rightarrow \infty$ e $b \rightarrow 0$, de modo que a equação resultante possui singularidades irregulares em 0 e ∞ , ambas de ordem 1.
- (3) A equação diferencial biconfluyente de Heun: Havendo deslocado a singularidade em $z = 1$ para $z = b$, tomamos os limites $a \rightarrow \infty$ e $b \rightarrow \infty$, de modo que a singularidade no ∞ se torna irregular e de ordem 2.

- (4) A equação diferencial triconfluente de Heun: Esta não pode ser derivada diretamente por confluência da equação de Heun. Entretanto, tomando o limite no qual todas as singularidades tendem para ∞ , obtemos uma equação com uma singularidade irregular no ∞ , de ordem 3.

2.2 Equação diferencial confluyente de Heun

A forma generalizada da equação diferencial confluyente de Heun, ou simplesmente equação confluyente de Heun, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(E_0 + \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z + z_2} \right) \frac{dy}{dz} \\ + \left[D_0 + \frac{C_1}{z - z_1} + \frac{C_2}{z + z_2} + \frac{B_1}{(z - z_1)^2} + \frac{B_2}{(z + z_2)^2} \right] y = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde os pontos z_i são pontos singulares regulares finitos e $z = \infty$ é um ponto singular irregular. A forma da equação confluyente de Heun é dita simétrica se $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$. Se $z_1 = i$ e $z_2 = -i$, temos a forma modificada da equação confluyente de Heun.

2.2.1 Forma canônica

A forma canônica da equação confluyente de Heun, que mais aparece na literatura, é dada por

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z - 1} \right) y = 0, \quad (2.16)$$

a qual possui dois pontos singulares regulares em $z = \{0, 1\}$ e um irregular em $z = \infty$. A única solução particular desta equação, regular na vizinhança do ponto $z = 0$ e normalizada a unidade neste ponto, isto é,

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; 0) = 1, \quad (2.17)$$

é chamada de função confluyente (padrão) de Heun e denotada por $y(z) = \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z)$, onde os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e η estão relacionados com μ e ν por

$$\mu = \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta - \beta\gamma) - \eta, \quad (2.18)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \delta + \eta, \quad (2.19)$$

de acordo com o pacote padrão do **Maple**TM17.

2.2.2 Forma normal

Considere uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem na forma padrão

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z) \frac{dy}{dz} + q(z)y = 0. \quad (2.20)$$

Vamos mostrar que por uma mudança da variável dependente, esta equação pode ser escrita na sua forma normal como

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + Q(z)u = 0. \quad (2.21)$$

Neste sentido, considere uma transformação tal que $y(z) = u(z)v(z)$. Substituindo esta transformação na Eq. (2.20), obtemos

$$v \frac{d^2 u}{dz^2} + \left[2 \frac{dv}{dz} + p(z)v \right] \frac{du}{dz} + \left[\frac{d^2 v}{dz^2} + p(z) \frac{dv}{dz} + q(z)v \right] u = 0. \quad (2.22)$$

Definindo o coeficiente de du/dz como sendo zero, obtemos

$$2 \frac{dv}{dz} + p(z)v = 0 \Rightarrow v = e^{-\frac{1}{2} \int p(z) dz}, \quad (2.23)$$

de modo que o coeficiente de u se torna

$$\left\{ q(z) - \frac{1}{2} \frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4} [p(z)]^2 \right\} v = Q(z)v. \quad (2.24)$$

Visto que v é não nulo, simplificando v , obtemos a expressão para $Q(z)$. De fato, visto que v nunca se anula, u é nulo se e somente se y for nulo. Portanto, a transformação acima não afeta os zeros da solução e a função $Q(z)$ é dada por

$$Q(z) = q(z) - \frac{1}{2} \frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4} [p(z)]^2. \quad (2.25)$$

Utilizando as Eqs. (2.20)-(2.25), podemos escrever a forma normal da equação confluyente de Heun como

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left[A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{(z-1)^2} \right] u = 0, \quad (2.26)$$

onde

$$u(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = e^{\frac{1}{2} \int (\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1}) dz} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \quad (2.27)$$

e os coeficientes A , B , C , D e E são dados por

$$A \equiv -\frac{1}{4} \alpha^2, \quad (2.28)$$

$$B \equiv \frac{1}{2} (1 - 2\eta), \quad (2.29)$$

$$C \equiv \frac{1}{2}(-1 + 2\delta + 2\eta), \quad (2.30)$$

$$D \equiv \frac{1}{4}(1 - \beta^2), \quad (2.31)$$

$$E \equiv \frac{1}{4}(1 - \gamma^2). \quad (2.32)$$

A partir das Eqs. (2.28)-(2.32), obtemos as seguintes expressões para os parâmetros α , β , γ , δ e η :

$$\alpha = 2\sqrt{-A}; \quad (2.33)$$

$$\beta = \sqrt{1 - 4D}; \quad (2.34)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - 4E}; \quad (2.35)$$

$$\delta = B + C; \quad (2.36)$$

$$\eta = \frac{1}{2} - B. \quad (2.37)$$

Portanto, utilizando a Eq. (2.27), a solução geral da Eq. (2.26), válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, é classificada da seguinte forma.

- Se $\beta \neq$ inteiro:

$$\begin{aligned} u(z) = & e^{\frac{1}{2}\alpha z} (z-1)^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} z^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\ & + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

- Se $\beta =$ inteiro:

$$\begin{aligned} u(z) = & e^{\frac{1}{2}\alpha z} (z-1)^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} z^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \{C_1 \text{HeunC}(-\alpha, \gamma, \beta, -\delta, \eta + \delta; 1-z) \\ & + C_2 (z-1)^{-\gamma} \text{HeunC}(-\alpha, -\gamma, \beta, -\delta, \eta + \delta; 1-z)\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nestas expressões, temos que C_1 e C_2 são constantes. Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun.

Usando transformações do tipo *s-homotópicas*, as quais conservam a forma canônica da equação confluyente de Heun, obtem-se 16 classes de soluções locais exatas do tipo de Frobenius na forma

$$y = e^{\sigma_\alpha \frac{\alpha_\pm z_\pm}{2}} z_\pm^{\sigma_\beta \frac{\beta_\pm}{2}} z_\mp^{\sigma_\gamma \frac{\gamma_\mp}{2}} \text{HeunC}(\sigma_\alpha \alpha_\pm, \sigma_\beta \beta_\pm, \sigma_\gamma \gamma_\pm, \delta_\pm, \eta_\pm; z_\pm), \quad (2.40)$$

onde $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma = \pm 1$ e os parâmetros mudam de tal forma que $\alpha_+, \beta_+, \gamma_+, \delta_+, \eta_+ \rightarrow \alpha_-, \beta_-, \gamma_-, \delta_-, \eta_-$, assim como $z_+ \rightarrow z_-$.

2.2.3 Expansão em série de potências

Vamos, agora, considerar a expansão em série de potências das funções confluentes de Heun, com respeito à variável independente z , em torno das singularidades regulares $z = \{0, 1\}$.

Na esfera unitária $|z| < 1$, a função confluyente de Heun é avaliada usando o método da série de potências ampliado (ou método de Frobenius), dado por

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}. \quad (2.41)$$

Substituindo a Eq. (2.41) na Eq. (2.16), obtemos a seguinte relação de recorrência de 3-termos

$$\rho(\rho + \beta) = 0, \quad (2.42)$$

$$c_1(\rho + 1)(\beta + \rho + 1) - c_0[\rho(\rho + 1 + \beta + \gamma - \alpha) - \mu] = 0, \quad (2.43)$$

$$c_{k+2}C_2 - c_{k+1}C_1 + c_kC_0 = 0, \quad k \geq 0, \quad (2.44)$$

onde

$$C_0 = (\rho + k)\alpha + \delta + \frac{1}{2}\alpha(\beta + \gamma + 2), \quad (2.45)$$

$$C_1 = \eta + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)(\beta + 1) + (\rho + k + 1)(\rho + k + 2 + \beta + \gamma - \alpha), \quad (2.46)$$

$$C_2 = (\rho + k)(\rho + k + \beta). \quad (2.47)$$

Se β é não inteiro, então, denotamos por $\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z)$ a solução correspondente a $\rho = 0$, para a qual $c_0 = 1$. Para $\rho = -\beta$, obtemos a outra solução linearmente independente, a saber, $z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)$. Usando estas duas soluções, recuperamos a solução geral da equação confluyente de Heun, dada pelas Eqs. (2.38) e (2.39).

Na vizinhança do ponto singular regular $z = 0$, podemos escrever a seguinte expansão em série de potências para a função confluyente de Heun

$$\begin{aligned} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) = & 1 + \frac{1}{2} \frac{(-\alpha\beta + \beta\gamma + 2\eta - \alpha + \beta + \gamma)}{(\beta + 1)} z \\ & + \frac{1}{8} \frac{1}{(\beta + 1)(\beta + 2)} (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^2\gamma + \beta^2\gamma^2 - 4\eta\alpha\beta + 4\eta\beta\gamma \\ & + 4\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta\gamma + 4\beta^2\gamma + 4\beta\gamma^2 + 4\eta^2 - 8\eta\alpha + 8\eta\beta \\ & + 8\eta\gamma + 3\alpha^2 - 4\alpha\beta - 4\alpha\gamma + 3\beta^2 + 4\beta\delta + 10\beta\gamma + 3\gamma^2 + 8\eta \\ & + 4\beta + 4\delta + 4\gamma) z^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nesta tese, iremos utilizar apenas o primeiro termo desta série de potências (≈ 1), salvo indicação em contrário.

2.2.4 Séries assintóticas em $z \rightarrow \infty$

O comportamento assintótico no infinito é importante para impor as condições de contorno que definem a física do problema. Assim, na vizinhança do ponto singular irregular no infinito, as duas soluções da Eq. (2.16) existem e, em geral, podem ser expandidas (em um setor) nas seguintes séries assintóticas

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \sim \begin{cases} z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2} + \frac{\delta}{\alpha}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\alpha)}{z^k}, \\ z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2} - \frac{\delta}{\alpha}\right)} e^{-\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k(\alpha)}{z^k}, \end{cases} \quad (2.49)$$

as quais são válidas no domínio $-\pi - \arg(\alpha + \eta) \leq \arg(z) \leq \pi - \arg(\alpha - \eta)$. O coeficiente $a_k(\alpha)$ é dado pela seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} & -\alpha(k+2)a_{k+2} + \left[m(\alpha) + (k+1) \left(k+2 + \alpha + \frac{2\delta}{\alpha} \right) \right] a_{k+1} \\ & + \left[\frac{\beta^2}{4} - \left(\frac{\gamma+2}{2} + \frac{\delta}{\alpha} \right)^2 + k(k+1) - k \left(\frac{2\delta}{\alpha} + \gamma + 1 \right) \right] a_k = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

com

$$a_0 = 1, \quad (2.51)$$

$$-\alpha a_1 + m(\alpha) a_0 = 0, \quad (2.52)$$

$$m(\alpha) = \eta - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha}{2}(\gamma+1) + \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\delta}{\alpha} + 1 + \alpha \right), \quad (2.53)$$

onde $e_k(\alpha) = a_k(-\alpha)$ e $k \geq 0$.

2.2.5 Soluções polinomiais

Para certos valores dos parâmetros α , β , γ , δ e η , a função confluyente de Heun se reduz a um polinômio. Visto que isto simplifica, significativamente, a avaliação da função e também impõe condições de fronteira específicas, correspondendo na maioria das vezes à uma situação física, este caso é de particular importância para os nossos estudos.

Considere a forma auto-adjunta da equação confluyente de Heun, dada por

$$e^{-\alpha z} z^{-\beta} (z-1)^{-\gamma} \frac{d}{dz} \left[e^{\alpha z} z^{1+\beta} (z-1)^{1+\gamma} \frac{dy}{dz} \right] + z \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta+\gamma}{2} + 1 \right) \alpha y = \mu y, \quad (2.54)$$

onde μ é chamado de parâmetro espectral natural. Logo, pode-se mostrar que existem duas condições polinomiais para a função confluyente de Heun, a saber,

$$\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta + \gamma}{2} + n + 1 = 0, \quad (2.55)$$

$$\Delta_{n+1}(\mu) = 0, \quad (2.56)$$

onde o inteiro $n \geq 0$ é o grau do polinômio e $\Delta_{n+1}(\mu)$ é o determinante tridiagonal dado por

$$\begin{vmatrix} \mu - q_1 & 1(1 + \beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n\alpha & \mu - q_2 + 1\alpha & 2(2 + \beta) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)\alpha & \mu - q_3 + 2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu - q_{n-1} + (n-2)\alpha & (n-1)(n-1 + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\alpha & \mu - q_n + (n-1)\alpha & n(n + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\alpha & \mu - q_{n+1} + n\alpha \end{vmatrix} \quad (2.57)$$

com $q_n = (n-1)(n + \beta + \gamma)$.

A Eq. (2.55) é chamada de condição- δ e é equivalente a impor $C_0 = 0$ na Eq. (2.45), com $\rho = 0$ e $k = n$. Esta condição pode ser entendida como sendo a responsável pela restrição de valores que a combinação dos parâmetros α , β , γ e δ pode assumir.

A segunda condição polinomial, dada pela Eq. (2.56), é equivalente a impor $c_{k+1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta) = 0$ na Eq. (2.44). Esta condição fornece os coeficientes da série de potências.

Considerando ambas as condições, isto significa que a expansão em série de potências será truncada após o n -ésimo termo (todos os termos com $N > n$ são zero) e assim obtemos um polinômio de grau n .

2.3 Equação diferencial duplamente confluyente de Heun

A equação diferencial duplamente confluyente de Heun, ou simplesmente equação duplamente confluyente de Heun, possui a seguinte forma generalizada

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dz^2} + \left[A_0 + \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{(z - z_1)^2} \right] \frac{dy}{dz} \\ & + \left[B_0 + \frac{B_1}{z - z_1} + \frac{B_2}{(z - z_1)^2} + \frac{B_3}{(z - z_1)^3} + \frac{B_4}{(z - z_1)^4} \right] y = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.3.1 Forma canônica

A forma canônica da equação duplamente confluyente de Heun, mais recorrente na literatura, é dada por

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{2z^5 - \alpha z^4 - 4z^3 + 2z + \alpha}{(z-1)^3(z+1)^3} \right] \frac{dy}{dz} + \left[\frac{\beta z^2 - (-\gamma - 2\alpha)z + \delta}{(z-1)^3(z+1)^3} \right] y = 0, \quad (2.59)$$

a qual possui um ponto regular na origem, dois pontos singulares irregulares em $z = \{-1, 1\}$ e suas soluções são as funções duplamente confluentes de Heun, denotadas por $y(z) = \text{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$. Os parâmetros α, β, γ e δ estão de acordo com o pacote padrão do **Maple**TM17.

2.3.2 Forma normal

Procedendo de forma análoga à seção anterior, utilizando as Eqs.(2.20)-(2.24), podemos escrever a equação duplamente confluyente de Heun, dada pela Eq.(2.59), na forma normal como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} + \left[\frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+1)} + \frac{C}{(z-1)^2} + \frac{D}{(z+1)^2} \right. \\ \left. + \frac{F}{(z-1)^3} + \frac{G}{(z+1)^3} + \frac{J}{(z-1)^4} + \frac{K}{(z+1)^4} \right] u = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

com

$$u(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = \exp \left[\frac{1}{2} \int \frac{2z^5 - \alpha z^4 - 4z^3 + 2z + \alpha}{(z-1)^3(z+1)^3} dz \right] \text{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z), \quad (2.61)$$

onde temos dois grupos de coeficientes que fornecem equivalentemente os parâmetros da função duplamente confluyente de Heun.

- Primeiro grupo: Os coeficientes A, C, F e J são dados por

$$A \equiv \frac{1}{32}(-8 + \alpha^2 - 2\beta + 6\delta), \quad (2.62)$$

$$C \equiv \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta - 2\gamma - 6\delta), \quad (2.63)$$

$$F \equiv \frac{1}{8}(\beta + \gamma + \delta), \quad (2.64)$$

$$J \equiv -\frac{1}{16}(-\alpha^2). \quad (2.65)$$

Assim, obtemos as seguintes expressões para os parâmetros α, β, γ e δ

$$\alpha = 4\sqrt{-J}, \quad (2.66a)$$

$$\beta = -1 + 8A + 12C + 6F - 2J, \quad (2.66b)$$

$$\gamma = -16(A + C), \quad (2.66c)$$

$$\delta = 1 + 8A + 4C + 2F + 2J. \quad (2.66d)$$

- Segundo grupo: Os coeficientes B , D , G e K são dados por

$$B \equiv \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta - 6\delta), \quad (2.67)$$

$$D \equiv \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta + 2\gamma - 6\delta), \quad (2.68)$$

$$G \equiv \frac{1}{8}(-\beta + \gamma - \delta), \quad (2.69)$$

$$K \equiv -\frac{1}{16}(-\alpha^2). \quad (2.70)$$

Neste caso, as expressões para os parâmetros α , β , γ e δ são as seguintes

$$\alpha = 4\sqrt{-K}, \quad (2.71a)$$

$$\beta = -1 - 8B + 12D - 6G - 2K, \quad (2.71b)$$

$$\gamma = -16(B - D), \quad (2.71c)$$

$$\delta = 1 - 8B + 4D - 2G + 2K. \quad (2.71d)$$

Portanto, utilizando a Eq.(2.61), a solução geral da Eq.(2.60), analítica no disco $|z| < 1$, é dada por

$$\begin{aligned} u(z) = & e^{\frac{1}{2} \frac{\alpha z}{(z-1)(z+1)}} [(z-1)(z+1)]^{\frac{1}{2}} \left\{ C_1 \operatorname{HeunD} \left(-\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z} \right) \right. \\ & \left. + C_2 e^{-\frac{\alpha z}{(z-1)(z+1)}} \operatorname{HeunD} \left(\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Uma continuação analítica da função duplamente confluyente de Heun, fora do círculo unitário, é obtida usando a seguinte identidade

$$\operatorname{HeunD} \left(-\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z} \right) = \operatorname{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z). \quad (2.73)$$

2.3.3 Expansão em série de potências

Se considerarmos uma série de potências em torno da origem, com raio de convergência $|z| < 1$, podemos escrever a seguinte expansão para a função duplamente confluyente de Heun

$$\operatorname{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z) = 1 + \frac{1}{2}\delta z^2 + \left(\frac{1}{6}\delta\alpha + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{6}\gamma \right) z^3 + \dots \quad (2.74)$$

2.4 Equação diferencial biconfluente de Heun

A equação diferencial biconfluente de Heun, ou simplesmente equação biconfluente de Heun, possui forma generalizada dada por

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(E_0 + E_1 x + \frac{A}{x - x_1} \right) \frac{dy}{dx} + \left[D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \frac{C}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} \right] y = 0. \quad (2.75)$$

2.4.1 Forma canônica e expansão em série de potências

Adotaremos a seguinte forma canônica para a equação biconfluente de Heun

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1 + \alpha}{x} - \beta - 2x \right) \frac{dy}{dx} + \left\{ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha)\beta] \frac{1}{x} \right\} y = 0, \quad (2.76)$$

onde $y(x) = \text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ são as funções biconfluentes de Heun.

Vamos admitir que as soluções da Eq. (2.76) podem ser escritas como

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s, \quad (2.77)$$

e assim, temos

$$\frac{d}{dx} y(x) = \sum_{s=1}^{\infty} s c_s x^{s-1}, \quad (2.78)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) c_s x^{s-2}. \quad (2.79)$$

Substituindo as Eqs. (2.77)-(2.79) na Eq. (2.76), chegamos em

$$\begin{aligned} & \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) c_s x^{s-2} + \left(\frac{1 + \alpha}{x} - \beta - 2x \right) \sum_{s=1}^{\infty} s c_s x^{s-1} \\ & + \left\{ (\gamma - \alpha - 2) - \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha)\beta] \frac{1}{x} \right\} \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s = 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

a partir do qual segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) c_s x^{s-2} + \sum_{s=1}^{\infty} (1 + \alpha) s c_s x^{s-2} - \sum_{s=1}^{\infty} \beta s c_s x^{s-1} \\ & - \sum_{s=1}^{\infty} 2s c_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma - \alpha - 2) c_s x^s - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha)\beta] c_s x^{s-1} = 0, \end{aligned} \quad (2.81)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \sum_{S=0}^{\infty} (S+2)(S+1) c_{S+2} x^S + \sum_{S=-1}^{\infty} (1 + \alpha)(S+2) c_{S+2} x^S \\ & - \sum_{S=0}^{\infty} \beta(S+1) c_{S+1} x^S - \sum_{S=1}^{\infty} 2S c_S x^S + \sum_{S=0}^{\infty} (\gamma - \alpha - 2) c_S x^S \\ & - \sum_{S=-1}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta + (1 + \alpha)\beta] c_{S+1} x^S = 0, \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde $S = s - 2$. Colecionando todos os termos de mesma ordem em x , obtemos

$$\begin{aligned}
& \left\{ (1 + \alpha)c_1 - \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta]c_0 \right\} x^{-1} \\
& + \left\{ 2(2 + \alpha)c_2 - \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + \beta \right\} c_1 + (\gamma - \alpha - 2)c_0 \right\} \\
& + \sum_{S=1}^{\infty} \left\{ (S + 2)(S + 2 + \alpha)c_{S+2} - \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + (S + 1)\beta \right\} c_{S+1} \right. \\
& \left. + (\gamma - \alpha - 2 - 2S)c_S \right\} x^S = 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Logo, a Eq. (2.83) fornece a seguinte relação de recorrência para os coeficientes da expansão

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha)c_1 &= \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta]c_0, \\
2(2 + \alpha)c_2 &= \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + \beta \right\} c_1 - (\gamma - \alpha - 2)c_0, \\
(S + 2)(S + 2 + \alpha)c_{S+2} &= \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + (S + 1)\beta \right\} c_{S+1} \\
&\quad - (\gamma - \alpha - 2 - 2S)c_S, \quad S \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Considerando uma escolha apropriada de c_0 , a saber $c_0 = 1$, as relações dadas pela Eq. (2.84) se tornam

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1, \\
(1 + \alpha)c_1 &= \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta], \\
2(1 + \alpha)(2 + \alpha)c_2 &= \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + \beta \right\} \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] \\
&\quad - (1 + \alpha)(\gamma - \alpha - 2), \\
6(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha)c_3 &= \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + 2\beta \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] + \beta \right\} \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] - (1 + \alpha)(\gamma - \alpha - 2) \\
&\quad - 2(2 + \alpha)(\gamma - \alpha - 4) \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta].
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Assim, levando em conta uma conveniente mudança na notação, temos

$$\begin{aligned}
A_0 &= c_0 = 1, \\
A_1 &= (1 + \alpha)c_1 = \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta], \\
A_2 &= 2(1 + \alpha)(2 + \alpha)c_2, \\
A_3 &= 6(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha)c_3, \\
&\quad \vdots \\
A_s &= s!(1 + \alpha)_s c_s, \quad s \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.86}$$

onde

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)_s &= \frac{\Gamma(s + 1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)} \\ &= \begin{cases} (1 + \alpha)(2 + \alpha) \dots (s + \alpha) & \text{para } s = \{1, 2, 3, \dots\}, \\ 1 & \text{para } s = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Agora, se admitirmos que α não é um inteiro negativo, as funções biconfluentes de Heun podem ser escritas como

$$\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{s \geq 0} \frac{A_s}{(1 + \alpha)_s} \frac{x^s}{s!}, \quad (2.88)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{s+2} &= \left\{ (s + 1)\beta + \frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta] \right\} A_{s+1} \\ &\quad - (s + 1)(s + 1 + \alpha)(\gamma - \alpha - 2 - 2s)A_s, \quad s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

2.4.2 Soluções polinomiais

A partir da relação de recorrência dada pela Eq. (2.89), a função $\text{HeunB}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ se torna um polinômio de grau n se e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \gamma - \alpha - 2 = 2n, \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \text{(ii)} \quad & A_{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.90)$$

onde A_{n+1} é um polinômio de grau $n + 1$ em δ . Note que existem pelo menos $n + 1$ valores adequados de δ , denotados por

$$\delta_\mu^n, \quad 0 \leq \mu \leq n. \quad (2.91)$$

O polinômio A_{n+1} , que possui $n + 1$ raízes quando $1 + \alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, é o determinante de dimensão $n + 1$ dado por

$$\begin{vmatrix} \delta' & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2(1 + \alpha)n & \delta' - \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 4(2 + \alpha)(n - 1) & \delta' - 2\beta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \delta' - 3\beta & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \gamma_{s-1} & \delta'_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_s & \delta'_s \end{vmatrix}, \quad (2.92)$$

onde

$$\delta' \equiv -\frac{1}{2}[\delta + (1 + \alpha)\beta], \quad (2.93)$$

$$\delta'_s = \delta' - (s + 1)\beta, \quad (2.94)$$

$$\gamma_s = 2(s + 1)(s + 1 + \alpha)(n - s). \quad (2.95)$$

As funções $P_{n,\mu}(\alpha, \beta; x)$ são polinômios de grau n satisfazendo a equação biconfluente de Heun, com $\gamma = \alpha + 2(n + 1)$, $A_{n+1} = 0$ e $0 \leq \mu \leq n$, a saber:

$$\frac{d^2 P_{n,\mu}}{dx^2} + \left(\frac{1 + \alpha}{x} - \beta - 2x \right) \frac{dP_{n,\mu}}{dx} + \left\{ 2n - \frac{1}{2}[\delta'_\mu + (1 + \alpha)\beta] \frac{1}{x} \right\} P_{n,\mu} = 0. \quad (2.96)$$

Os polinômios $P_{n,\mu}(\alpha, \beta; x) = \text{HeunB}(\alpha, \beta, \alpha + 2(n + 1), \delta'_\mu; x)$ são chamados polinômios de Heun do caso biconfluente. A partir da discussão anterior, conclui-se que eles são definidos univocamente, exceto por uma constante multiplicativa arbitrária. Seus termos de ordem superior são dados por

$$\begin{aligned} & x^n + \frac{1}{(1 + \alpha)_1} \delta' \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{1}{(1 + \alpha)_2} [\delta'(\delta' - \beta) - 2(1 + \alpha)n] \frac{x^{n-2}}{2!} \\ & + \frac{1}{(1 + \alpha)_3} [\delta'(\delta' - \beta)(\delta' - 2\beta) - 4\delta'(2 + \alpha)(n - 1) \\ & - 2(\delta' - 2\beta)(1 + \alpha)n] \frac{x^{n-3}}{3!} + Q(x), \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde $Q(x)$ é um polinômio com grau $\leq n - 4$.

2.5 Equação diferencial triconfluente de Heun

A forma generalizada da equação triconfluente de Heun é dada por

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (A_0 + A_1 x + A_2 x^2) \frac{dy}{dx} + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4) y = 0. \quad (2.98)$$

2.5.1 Forma canônica e expansão em série de potências

A forma canônica da equação triconfluente de Heun (também referida como THE_1) é dada por

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (\gamma + 3x^2) \frac{dy}{dx} + [\alpha + (\beta - 3)x] y = 0, \quad (2.99)$$

onde $y(x) = \text{HeunT}(\alpha, \beta, \gamma; x)$ são as funções triconfluentes de Heun.

Assim como foi feito na seção anterior, vamos admitir que as soluções da Eq. (2.99) podem ser escritas como

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} u_s x^s. \quad (2.100)$$

Portanto, substituindo a Eq. (2.100) na Eq. (2.99), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)u_s x^{s-2} - \sum_{s=1}^{\infty} \gamma s u_s x^{s-1} - \sum_{s=1}^{\infty} 3s u_s x^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} \alpha u_s x^s \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} (\beta - 3)u_s x^{s+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.101)$$

a partir da qual obtemos a seguinte relação de recorrência de ordem 3:

$$\begin{aligned} & \sum_{S=-1}^{\infty} (S+3)(S+3)u_{S+3}x^{S+1} - \sum_{S=-1}^{\infty} \gamma(S+2)u_{S+2}x^{S+1} - \sum_{S=1}^{\infty} 3S u_S x^{S+1} \\ & + \sum_{S=-1}^{\infty} \alpha u_{S+1}x^{S+1} + \sum_{S=0}^{\infty} (\beta - 3)u_S x^{S+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Colecionando todos os termos de mesma ordem em x , temos

$$\begin{aligned} & [\alpha u_0 - \gamma u_1 + 2u_2] \\ & + [(\beta - 3)u_0 + \alpha u_1 - 2\gamma u_2 + 6u_3]x \\ & + \sum_{S=1}^{\infty} [(\beta - 3 - 3S)u_S + \alpha u_{S+1} - \gamma(S+2)u_{S+2} \\ & + (S+3)(S+2)u_{S+3}]x^{S+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Logo, a Eq. (2.103) fornece as seguintes relações de recorrência para os coeficientes da expansão:

$$\begin{aligned} 2u_2 &= \gamma u_1 - \alpha u_0, \\ 6u_3 &= 2\gamma u_2 + \alpha u_1 - (\beta - 3)u_0, \\ (S+3)(S+2)u_{S+3} &= \gamma(S+2)u_{S+2} + \alpha u_{S+1} - (\beta - 3 - 3S)u_S, \quad S \geq 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Considerando escolhas apropriadas de u_0 e u_1 , e levando em conta uma conveniente mudança na notação, temos

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= 0, \\ u_2 &= -\frac{\alpha}{2}, \\ u_3 &= -\frac{1}{6}[\alpha\gamma + (\beta - 3)], \\ u_s &= \frac{\gamma(s-1)u_{s-1} + \alpha u_{s-2} - (\beta + 6 - 3s)u_{s-3}}{s(s-1)}, \quad s \geq 3, \end{aligned} \quad (2.105)$$

onde $u_{-1} = 0$.

Admitindo que $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$, então, as funções triconfluentes de Heun podem ser escritas como

$$\text{HeunT}(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{s \geq 0} u_s(\alpha, \beta, \gamma) x^s, \quad (2.106)$$

onde $u_s(\alpha, \beta, \gamma)$, dado pela Eq. (2.105), é um polinômio nas três variáveis α, β, γ .

2.5.2 Soluções polinomiais

A partir da relação de recorrência dada pela Eq. (2.104), a função $\text{HeunT}(\alpha, \beta, \gamma; x)$ se torna um polinômio de grau n se e somente se as duas condições seguintes foram totalmente satisfeitas:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \beta = 3(n+1), \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \text{(ii)} \quad & \Pi_{n+1}(\alpha, \gamma) = 0, \end{aligned} \quad (2.107)$$

onde Π_{n+1} é um polinômio em α e γ , com grau $n+1$ em α .

O polinômio $\Pi_{n+1}(\alpha, \gamma)$ é o determinante de dimensão $n+1$ dado por

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma & 2 \cdot 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 3n & \alpha & -2\gamma & 3 \cdot 2 & \dots & & \\ 0 & 3(n-1) & \alpha & -3\gamma & \dots & & \\ 0 & 0 & 3(n-2) & \alpha & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & 3 \cdot 3 & \alpha & -(n-1)\gamma & n(n-1) \\ & & & 0 & 3 \cdot 2 & \alpha & -n\gamma \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 3 \cdot 1 & \alpha \end{vmatrix}. \quad (2.108)$$

As funções $P_n(\alpha, \gamma; x)$ são polinômios de grau n que satisfazem a Eq. (2.99), com $\beta = 3(n+1)$, $\Pi_{n+1} = 0$ e $0 \leq s \leq n$, a saber,

$$\frac{d^2 P_n}{dx^2} - (\gamma + 3x^2) \frac{dP_n}{dx} + (\alpha + 3nx) P_n = 0. \quad (2.109)$$

Os polinômios $P_n(\alpha, \gamma; x) = \text{HeunT}(\alpha, 3(n+1), \gamma; x)$ são chamados de polinômios de Heun do caso triconfluyente e são dados por

$$P_n(\alpha, \gamma; x) = \sum_{s=0}^n u_s(\alpha, 3(n+1), \gamma) x^s. \quad (2.110)$$

Acreditamos que ficará claro a partir da discussão anterior que estes polinômios são univocamente definidos, exceto por uma constante multiplicativa arbitrária.

Agora, vamos substituir a Eq. (2.110) na Eq. (2.109) a fim de obter a seguinte relação de recorrência de ordem 2

$$3u_{n-1} + \alpha u_n - \gamma(n+1)u_{n+1} + (n+1)(n+2)u_{n+2} = 0, \quad (2.111)$$

onde $u_{-1} = 0$. Note que a relação dada pela Eq. (2.111) com $n = 0$ fornece $u_{-1} = 0$ se e somente se $\Pi_{n+1}(\alpha, \gamma) = 0$. Se este é o caso, computando recursivamente os u_s , em ordem

decrecente, começando com $u_n = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 u_{n-1} &= -\frac{\alpha}{2} = \frac{(-1)^1}{1!3^1} \Pi_1(\alpha, \gamma), \\
 u_{n-2} &= \frac{1}{18}(\alpha^2 + 3n\gamma) = \frac{(-1)^2}{2!3^2} \Pi_2(\alpha, \gamma), \\
 u_{n-3} &= -\frac{1}{162}[\alpha^3 + 3n\alpha\gamma + 6(n-1)\alpha\gamma + 18n(n-1)] = \frac{(-1)^3}{3!3^3} \Pi_3(\alpha, \gamma), \\
 &\vdots \\
 u_{n-s} &= \frac{(-1)^s}{s!3^s} \Pi_s(\alpha, \gamma), \quad 0 \leq s \leq n, \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

onde $\Pi_0(\alpha, \gamma) = 1$.

Agora, podemos reescrever a Eq. (2.110) como

$$P_n(\alpha, \gamma; x) = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!3^s} \Pi_s(\alpha, \gamma) x^{n-s}. \quad (2.113)$$

Os termos de ordem mais alta neste polinômio são dados por

$$\begin{aligned}
 x^n - \frac{1}{1!3^1} \alpha x^{n-1} + \frac{1}{2!3^2} (\alpha^2 + 3n\gamma) x^{n-2} - \frac{1}{3!3^3} [\alpha^3 + 3(3n-2)\alpha\gamma \\
 + 18n(n-1)] x^{n-3} + Q(x), \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

onde $Q(x)$ é um polinômio com grau $\leq n-4$.

Parte II

Buracos negros com corda cósmica

3 Campos escalares na métrica de Lense-Thirring com corda cósmica

The strings of theory are holding up the race ...

Neste capítulo analisamos a influência do campo gravitacional produzido por um buraco negro com baixa rotação e com uma corda cósmica ao longo do seu eixo de simetria, sobre campos escalares massivos. Soluções exatas de ambas as partes, angular e radial, da equação de Klein-Gordon neste espaço-tempo são obtidas, as quais são dadas em termos das funções confluentes de Heun. Enfatizamos o papel da presença da corda cósmica nestas soluções. Investigamos também as soluções nas regiões próxima e distante do horizonte de eventos. A partir da solução radial, obtemos as soluções de ondas próximas do horizonte de eventos exterior do buraco negro e discutimos a radiação Hawking de partículas escalares massivas. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [186].

3.1 Espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica

A métrica gerada por um buraco negro com momento angular por massa, $a = J/M$, e massa (energia), M , no limite de baixa rotação, isto é, $a^2 \approx 0$, corresponde à métrica de Lense-Thirring [187], cujo elemento de linha, nas coordenadas de Boyer-Lindquist, é dada por

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{4aM \sin^2 \theta}{r} dt d\phi, \quad (3.1)$$

onde $\Delta = r^2 - 2Mr$. O elemento de linha acima é a primeira aproximação da solução de Kerr, válida até primeira ordem em a/r . A ordem de aproximação considerada simplifica nosso resultado e ao mesmo tempo é suficiente para os nossos objetivos, porque o que queremos é examinar o efeito da rotação combinado com o produzido pela corda cósmica.

Agora, vamos introduzir uma corda cósmica no espaço-tempo de Lense-Thirring. Isto pode ser feito simplesmente redefinindo o ângulo azimutal ϕ de tal forma que $\phi \rightarrow b\phi$. Fazendo isto, obtemos a métrica correspondente a um espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica passando através dele, que pode ser reescrita como [20]

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 d\theta^2 - b^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{4aMb \sin^2 \theta}{r} dt d\phi, \quad (3.2)$$

onde o parâmetro b , que codifica a presença da corda cósmica, é tal que $0 < b < 1$. Este parâmetro está relacionado com a densidade linear de massa da corda, μ , através da expressão $b = 1 - 4\mu$.

Nos modelos de partículas que predizem soluções do tipo corda cósmica, estes defeitos topológicos aparecem, de fato, como o conjunto de infinitas cordas, assim como *loops* de cordas. Nesta tese vamos considerar apenas uma corda cósmica estática, infinita e retilínea, e como consequência não iremos levar em conta o fenômeno relativo à acreção gravitacional e nem o da formação de cordas *wiggly*. Portanto, podemos admitir a massa total do sistema em consideração como sendo constante.

A partir da Eq. (3.2), temos que a equação da superfície do horizonte de eventos é obtida a partir da condição

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0. \quad (3.3)$$

As soluções da Eq. (3.3) são

$$r_+ = 2M \text{ e } r_- = 0, \quad (3.4)$$

que correspondem aos horizontes de eventos e de Cauchy, respectivamente, do espaço-tempo em consideração.

A aceleração gravitacional, κ_+ , na superfície do horizonte de eventos r_+ desse espaço-tempo, é dada por

$$\kappa_+ \equiv \frac{1}{2r_+^2} \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r=r_+} = \frac{1}{2r_+} = \frac{1}{4M}. \quad (3.5)$$

3.1.1 Termodinâmica

Vamos derivar as quantidades termodinâmicas associadas com o buraco negro de Lense-Thirring com uma corda cósmica ao longo do eixo de rotação.

A temperatura da radiação Hawking em unidades geométricas, T_+ , e a área da superfície do horizonte de eventos na presença da corda cósmica, $\mathcal{A}_{+,b}$, são dadas, respectivamente, por

$$T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad (3.6)$$

e

$$\mathcal{A}_{+,b} = \int \int \sqrt{-g} \, d\theta \, d\phi \Big|_{r=r_+} = 4\pi r_+^2 b, \quad (3.7)$$

onde $g \equiv \det(g_{\sigma\tau}) = -b^2 r^4 \sin^2 \theta$. Consequentemente, a entropia no horizonte de eventos na presença da corda cósmica, $S_{+,b}$, é dada por

$$S_{+,b} = \frac{\mathcal{A}_{+,b}}{4} = \pi r_+^2 b = 4\pi M^2 b. \quad (3.8)$$

A partir da Eq. (3.2), a velocidade angular de arrasto no horizonte de eventos exterior na presença da corda cósmica, $\Omega_{+,b}$, é dada por

$$\Omega_{+,b} = - \left. \frac{g_{03}}{g_{33}} \right|_{r=r_+} = \frac{a}{r_+^2 b} = \frac{a}{4M^2 b}. \quad (3.9)$$

A massa e o momento angular de Komar são

$$M_{phys} = Mb \text{ e } J_{phys} = Jb, \quad (3.10)$$

de modo que a razão $a = J/M = J_{phys}/M_{phys}$ permanece inalterada. A partir da Eq. (3.10), obtemos

$$Eb = E_{phys}, \quad (3.11)$$

que significa que a energia física do espaço-tempo de Lense-Thirring é diminuída devido à presença da corda cósmica.

Estas quantidades dadas pelas Eqs. (3.6)-(3.11), para o horizonte de eventos do buraco negro com uma corda cósmica, satisfazem a primeira lei da termodinâmica, a saber,

$$dE_{phys} = T_+ dS_{+,b} + \Omega_{+,b} dJ_{phys}. \quad (3.12)$$

3.2 Equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica

Queremos estudar o comportamento de campos escalares no espaço-tempo curvo gerado por um buraco negro com baixa rotação contendo uma corda cósmica ao longo do eixo de simetria. Para fazer isso, devemos resolver a equação de Klein-Gordon (1.34), que na métrica dada pela Eq. (3.2), pode ser escrita como

$$\left[\frac{r^4}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{b^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{4aMr}{b\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} + \mu_0^2 r^2 \right] \Psi = 0. \quad (3.13)$$

Devido à independência temporal e a simetria do espaço-tempo em relação à rotação, a solução da Eq. (1.34) pode ser escrita como

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = R(r)S(\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t}, \quad (3.14)$$

onde $m = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ é o número quântico azimutal. Substituindo a Eq. (3.14) na Eq. (3.13), esta pode ser separada em duas equações para $S(\theta)$ e $R(r)$, a saber,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{b^2 \sin^2 \theta} \right) S = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2 r^4}{\Delta} - \frac{4Ma\omega mr}{b\Delta} - (\mu_0^2 r^2 + \lambda) \right] R = 0, \quad (3.16)$$

onde μ_0 é a massa da partícula escalar, λ é uma constante de separação e as unidades $c \equiv \hbar \equiv G \equiv 1$ foram escolhidas. No que segue, vamos resolver exatamente as partes angular e radial da equação de Klein-Gordon, dadas pelas Eqs. (3.15) e (3.16), respectivamente.

3.2.1 Equação angular

Note que a presença da corda cósmica modifica ligeiramente a parte angular da equação de Klein-Gordon em relação ao caso sem a corda cósmica, que pode ser obtida simplesmente tomando $b = 1$. Esta modificação é refletida na constante m , que passa a ser $m_{(b)} \equiv m/b$. No caso específico em que $b = 1$, a Eq. (3.15) possui soluções que correspondem aos polinômios associados de Legendre, $P_l^m(\cos \theta)$, com autovalores $\lambda_{lm} = l(l+1)$, onde l, m são inteiros tais que $|m| \leq l$. Pode ser demonstrado que a função $S = S(\theta)$, que resolve a Eq. (3.15) para $b \neq 1$, possui soluções que podem ser expressas em termos das funções confluentes de Heun.

Podemos reescrever a Eq. (3.15) em uma forma que se assemelha a uma equação de Heun, definindo uma nova coordenada angular $x = \cos^2 \theta$, como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 S}{dx^2} + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dS}{dx} \\ & + \left\{ \frac{\lambda - m_{(b)}^2}{4} \frac{1}{x} + \frac{m_{(b)}^2 - \lambda}{4} \frac{1}{x-1} - \left[\frac{m_{(b)}}{2} \right]^2 \frac{1}{(x-1)^2} \right\} S = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$, o que implica que $0 \leq x \leq 1$.

Agora, vamos realizar uma transformação com o objetivo de reduzir a potência do termo proporcional a $1/(x-1)^2$. Esta é uma *transformação s-homotópica* da variável dependente, $S(x) = (x-1)^{A_1} U(x)$, onde $A_1 = m_{(b)}/2$. A função $U(x)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{2A_1 + 1}{x-1} \right) \frac{dU}{dx} \\ & + \left\{ \frac{[-2A_1 + \lambda - m_{(b)}^2]/4}{x} + \frac{[2A_1 - \lambda + m_{(b)}^2]/4}{x-1} \right\} U = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

que é análoga à equação confluyente de Heun, dada por (2.16).

Assim, a solução geral da parte angular da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar massivo, no espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica, na região exterior ao horizonte de eventos, dada pela Eq. (3.17), pode ser escrita como

$$S(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) + C_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; x) \}, \quad (3.19)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= -\frac{1}{2}, \\ \gamma &= m_{(b)}, \\ \delta &= 0, \\ \eta &= \frac{1 + m_{(b)}^2 - \lambda}{4}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun, dado que β é não inteiro. Note a dependência da solução angular com o parâmetro b , associado com a presença da corda cósmica.

3.2.2 Equação radial

A fim de resolver a parte radial da equação de Klein-Gordon, vamos usar a Eq. (3.3) e definir uma nova coordenada, x , tal que

$$Mx = r - r_+ = r - 2M. \quad (3.21)$$

A nova coordenada é tal que quando $r \rightarrow r_+$ implica que $x \rightarrow 0$, e quando $r \rightarrow \infty$ implica que $x \rightarrow \infty$. Estamos interessados em estudar o comportamento de campos escalares apenas na região exterior ao horizonte de eventos, a saber, para $r > r_+$, que corresponde à $0 \leq x < \infty$, em termos da nova coordenada.

Agora, definindo uma nova função por $R(x) = Z(x)[x(x+2)]^{-1/2}$ e mudando a variável de x para z , através da relação

$$z = -\frac{x}{2}, \quad (3.22)$$

a Eq. (3.16) pode ser escrita como

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[4M^2(\omega^2 - \mu_0^2) + \frac{A}{M^2 z^2} + \frac{-2B}{M^2 z} + \frac{C}{M^2(z-1)^2} + \frac{-2D}{M^2(z-1)} \right] Z = 0, \quad (3.23)$$

onde os coeficientes A , B , C e D são dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}[M^2 - 8m_{(b)}a\omega M^2 + 16\omega^2 M^4], \\ B &= \frac{1}{4}[-M^2 - 2M^2\lambda - 8\mu_0^2 M^4 + 4am_{(b)}\omega M^2 + 16\omega^2 M^4], \\ C &= \frac{M^2}{4}, \\ D &= \frac{1}{4}[M^2 + 2M^2\lambda - 4am_{(b)}\omega M^2]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, levando em consideração a forma normal da equação confluyente de Heun, dada por (2.26), a solução geral da parte radial da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar massivo, no espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica, na região exterior ao horizonte de eventos, dada pela Eq. (3.23) ao longo de todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R(z) &= \Delta^{-\frac{1}{2}} M e^{\frac{1}{2}\alpha z} (z-1)^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} z^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\ &\quad + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z) \}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados, agora, por

$$\begin{aligned}\alpha &= 4M(\mu_0^2 - \omega^2)^{1/2}, \\ \beta &= i4M\left[\omega - \frac{am_{(b)}}{4M^2}\right], \\ \gamma &= 0, \\ \delta &= 4M^2(\mu_0^2 - 2\omega^2), \\ \eta &= -4M^2(\mu_0^2 - 2\omega^2) + 2am_{(b)}\omega - \lambda.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun, dado que β é não inteiro, o que é consistente com o fato de que não há nenhuma razão física específica para impor que β deva ser um inteiro.

Agora, vamos analisar o comportamento assintótico da solução geral dada pela Eq.(3.25), ao longo de todo o intervalo $0 \leq x < \infty$. Primeiro, vamos considerar uma região muito próxima ao horizonte de eventos, o que significa $r \rightarrow r_+$, isto é, $x \rightarrow 0$. Segundo, vamos considerar uma região muito afastada do buraco negro, isto é, $r \rightarrow \infty$, ou equivalentemente, $x \rightarrow \infty$.

É importante levar em consideração esses limites, a fim de obter as soluções apropriadas para estudar a radiação do buraco negro, que neste caso precisamos conhecer a onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos $r = r_+$.

3.2.3 Caso 1

Quando $z \rightarrow 0$, temos que $x \rightarrow 0$ e $r \rightarrow r_+$. Assim, vamos usar a expansão em série de potências das funções confluentes de Heun em relação a variável independente z , na vizinhança do ponto singular regular $z = 0$, dada pela Eq. (2.48). Logo, as soluções da Eq. (3.23), neste limite, são dadas por

$$Z(x) \sim C_1 \left(-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\bar{m}} + C_2 \left(-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\bar{m}},\tag{3.27}$$

onde $\bar{m}^2 = 1/4 - A/M^2$.

Neste ponto, podemos comparar o resultado obtido com os dados em [188]. Note que existe uma diferença entre a forma funcional do comportamento assintótico da solução geral da equação radial obtida analiticamente, dada pela Eq.(3.27) e a solução aproximada obtida em [188], que é dada por

$$Z(x) \sim C_1 e^{-\sqrt{F}x} (2\sqrt{F}x)^{\frac{1}{2}+\bar{m}} + C_2 e^{-\sqrt{F}x} (2\sqrt{F}x)^{\frac{1}{2}-\bar{m}},\tag{3.28}$$

onde $F = M^2(\mu_0^2 - \omega^2) - C/4M^2 - D/2M^2$. Vale a pena notar que expandindo a Eq. (3.28) até a primeira ordem em termos de $x = (r - r_+)/M$, concluimos que os resultados dados pelas Eqs. (3.27) e (3.28) estão de acordo. De fato, a diferença formal diz respeito a uma constante multiplicativa, que pode ser ajustada adequadamente.

3.2.4 Caso 2

Quando $|z| \rightarrow \infty$, temos que $|x| \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow \infty$. Assim, vamos usar o fato de que na vizinhança do ponto singular regular no infinito, as duas soluções da equação confluyente de Heun existem e em geral podem ser expandidas (em um setor) na série assintótica dada pela Eq. (2.49). Logo, as soluções da Eq. (3.23), neste limite, são dadas por

$$Z(x) \sim C_1 e^{-M[(\mu_0^2 - \omega^2)^{1/2}x]} \left(-\frac{x}{2}\right)^\kappa + C_2 e^{+M[(\mu_0^2 - \omega^2)^{1/2}x]} \left(-\frac{x}{2}\right)^{-\kappa}, \quad (3.29)$$

onde $\kappa = (B + D)/2M^3(\mu_0^2 - \omega^2)^{1/2}$.

Portanto, no infinito, temos formas assintóticas que são consistentes com o fato de que muito afastado do buraco negro, o espaço-tempo de Lense-Thirring com uma corda cósmica tende ao espaço-tempo de Minkowski menos um setor.

Neste caso, existe também uma diferença entre a Eq.(3.29) e a obtida em [188], que é dada por

$$Z(x) \sim C_1 e^{-\sqrt{G}x} (2\sqrt{G}x)^\kappa + C_2 e^{+\sqrt{G}x} (2\sqrt{G}x)^{-\kappa}, \quad (3.30)$$

onde $G = M^2(\mu_0^2 - \omega^2)$, dado $\mu_0^2 - \omega^2 \neq 0$. Mais uma vez, os dois resultados são equivalentes, exceto por uma constante multiplicativa.

Assim, podemos concluir que todas as soluções da equação de Klein-Gordon apresentadas aqui, ambas as partes, radial e angular, dependem do parâmetro b que define a conicidade do espaço-tempo de Lense-Thirring devido a presença da corda cósmica. Isto significa que o aspecto global deste espaço-tempo, associado com a corda cósmica, é codificado nestas soluções.

3.3 Radiação Hawking e extensão analítica

A partir das Eqs. (3.21), (3.22) e (2.48) podemos ver que a solução radial dada pela Eq. (3.25), nas proximidades do horizonte de eventos exterior, isto é, quando $r \rightarrow r_+$, o que implica $x \rightarrow 0$, se comporta assintoticamente como

$$R(r) \sim C_1 (r - r_+)^{\beta/2} + C_2 (r - r_+)^{-\beta/2}, \quad (3.31)$$

onde estamos considerando contribuições apenas do primeiro termo na expansão e todas as constantes estão incluídas em C_1 e C_2 . Assim, considerando dependência temporal, nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro r_+ , esta solução é dada por

$$\Psi = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{\pm\beta/2}. \quad (3.32)$$

Substituindo as Eqs. (3.5) e (3.9) na Eq. (3.26), para o parâmetro β , obtemos

$$\frac{\beta}{2} = \frac{i}{2\kappa_+} (\omega - \omega_{0,b}), \quad (3.33)$$

onde $\omega_{0,b} = m\Omega_{+,b}$.

Portanto, na superfície do horizonte de eventos exterior do buraco negro, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \quad (3.34)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (3.35)$$

Estas soluções dependem do parâmetro b , de tal forma que a energia total das partículas radiadas é diminuída devido à presença da corda cósmica. É importante chamar a atenção para o fato de que estamos usando a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo em consideração, diferentemente dos cálculos usualmente feitos na literatura, como por exemplo em [189, 190].

Usando as definições das coordenadas *tortoise* e Eddington-Finkelstein, e levando em consideração que $a^2 \approx 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} dr_* &= \frac{r^2}{\Delta} dr; \\ \ln(r - r_+) &= \frac{1}{r_+^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} r_* = 2\kappa_+ r_*; \\ \hat{r} &= \frac{\omega - \omega_{0,b}}{\omega} r_*; \\ v &= t + \hat{r}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nestas novas coordenadas, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega v} \quad (3.37)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega v} (r - r_+)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (3.38)$$

As soluções (3.37) e (3.38), no caso $b = 1$, são exatamente as soluções obtidas em nosso artigo [191] (tomando $Q = 0$ e $a^2 \approx 0$ nas suas Eqs.(96) e (97)).

A partir da Eq. (3.38), vemos que esta solução não é analítica no horizonte de eventos exterior $r = r_+$. Por continuação analítica, rotacionando $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r , obtemos $(r - r_+) \rightarrow |r - r_+| e^{-i\pi} = (r_+ - r) e^{-i\pi}$. Assim, a solução da onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos r_+ pode ser escrita como

$$\Psi_{out}(r < r_+) = e^{-i\omega v} (r_+ - r)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} e^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (3.39)$$

As equações (3.38) e (3.39) descrevem as ondas que se afastam (*outgoing*), fora e dentro, do buraco negro, respectivamente. Portanto, para uma onda de uma partícula que se afasta

(*outgoing*) com energia ω e momento angular m , a taxa de decaimento (ou probabilidade de espalhamento) na superfície do horizonte de eventos $r = r_+$ é dada por

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (3.40)$$

3.4 Espectro da radiação

Após o horizonte de eventos do buraco negro radiar partículas com energia ω e momento angular m , a fim de considerar a reação da radiação da partícula ao espaço-tempo, devemos substituir M_{phys} e J_{phys} por $M_{phys} - \omega$ e $J_{phys} - m$, respectivamente, no elemento de linha do espaço-tempo em consideração. Fazendo estas mudanças, devemos garantir que a energia total e o momento angular total do espaço-tempo são ambos conservados, isto é,

$$-\omega = \Delta E_{phys} \text{ e } -m = \Delta J_{phys}, \quad (3.41)$$

onde ΔE_{phys} e ΔJ_{phys} são as variações da energia física e do momento angular de Komar do horizonte de eventos do buraco negro, antes e depois da emissão de radiação, respectivamente. Substituindo as Eqs. (3.12) e (3.41) na Eq.(3.40), obtemos a taxa de decaimento da onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos $r = r_+$:

$$\Gamma_+ = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E_{phys} - m\Omega_{+,b})} = e^{\Delta S_{+,b}}, \quad (3.42)$$

onde $\Delta S_{+,b}$ é a mudança na entropia de Bekenstein-Hawking na presença da corda cósmica, se compararmos as situações antes e depois da emissão da radiação, sendo dada por

$$\Delta S_{+,b} = -4\pi\omega(2M - \omega)b. \quad (3.43)$$

Agora, vamos considerar o método de Damour-Ruffini-Sannan [192, 193], que é válido para calcular a radiação Hawking para buracos negros estáticos, assim como para estacionários e, portanto, para um espaço-tempo que não é globalmente hiperbólico. Assim, obtemos o seguinte espectro da radiação Hawking de partículas escalares

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar(\omega - \omega_{0,b})}{k_B T_+}} - 1}. \quad (3.44)$$

Portanto, podemos ver que o espectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares possui um caráter térmico, análogo ao espectro de corpo negro. É importante notar que a energia total das partículas escalares radiadas é diminuída devido à presença da corda cósmica, mais precisamente, a velocidade angular de arrasto do horizonte de eventos exterior, $\Omega_{+,b}$, é amplificada em comparação com o cenário sem a corda cósmica [191].

3.5 Conclusões parciais

Obtivemos soluções analíticas para a equação de Klein-Gordon, válidas em todo o espaço-tempo, isto é, na região entre o horizonte de eventos e o infinito, diferentemente dos resultados obtidos em [188], que são válidos apenas em regiões assintóticas, a saber, muito próximo dos horizontes de eventos e muito longe do buraco negro. A solução radial é dada em termos das funções confluentes de Heun e é válida ao longo de todo o intervalo $0 \leq z < \infty$. Em relação a solução da parte angular, ela também é dada em termos das funções confluentes de Heun.

Aqui também foram obtidas as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) das proximidades do horizonte de eventos exterior de um buraco negro de Lense-Thirring com uma corda cósmica. Usamos estes resultados para discutir a radiação Hawking, na qual consideramos as propriedades das funções confluentes de Heun para obter os resultados. Esta abordagem possui a vantagem de que não é necessário introduzir nenhum sistema de coordenadas, como por exemplo, o particular [189] ou as coordenadas *tortoise* (ou Eddington-Finkelstein) [190]. Como a velocidade angular de arrasto do horizonte de eventos exterior, $\Omega_{+,b}$, depende apenas da conicidade, esta quantidade codifica a presença da corda cósmica e, de fato, é amplificada pela presença deste defeito topológico.

A partir de um ponto de vista local, o campo gravitacional associado com o buraco negro de Lense-Thirring com uma corda cósmica permanece axialmente simétrico. Mas, globalmente, esta simetria é quebrada e este fato produz algumas modificações nos estados físicos das partículas. A solução de onda depende do parâmetro b , que codifica a presença da corda, e como consequência todas as outras quantidades físicas são também influenciadas pela presença da corda cósmica.

4 Soluções analíticas em um buraco negro *dyon* com corda cósmica

The puppets falling to the ground ...

Neste capítulo, campos escalares massivos carregados são considerados nos campos gravitacional e eletromagnético produzidos por um buraco negro *dyon* com uma corda cósmica ao longo do seu eixo de simetria. Soluções exatas de ambas as partes, angular e radial, da equação covariante de Klein-Gordon neste espaço-tempo são obtidas e dadas em termos das funções confluentes de Heun. O papel da presença da corda cósmica nestas soluções é mostrado. A partir da solução radial, obtemos as soluções de ondas nas proximidades do horizonte de eventos exterior do buraco negro e discutimos o espectro da radiação Hawking e o fluxo de energia. Aplicamos as funções confluentes de Heun para estudar as frequências ressonantes (quasi-espectro) e o processo de espalhamento de ondas escalares no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya (buraco negro *dyon*). Os casos especiais dos buracos negros de Kerr e Schwarzschild são analisados e as soluções obtidas. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados nas Refs. [194, 195].

4.1 O espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya com corda cósmica

A métrica gerada por um buraco negro com momento angular por unidade de massa $a = J/M$, carga elétrica Q_e , carga magnética Q_m e massa (energia) M , corresponde à métrica de Kerr-Newman-Kasuya [196], cujo elemento de linha, nas coordenadas de Boyer-Lindquist, é dado por

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2, \quad (4.1)$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_e^2 + Q_m^2, \quad (4.2)$$

e

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (4.3)$$

Agora, vamos introduzir uma corda cósmica no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya. Isto pode ser feito, como foi visto no capítulo anterior, por um procedimento geométrico, simplesmente redefinindo o ângulo azimutal ϕ de tal forma que $\phi \rightarrow b\phi$, e identificando as bordas resultantes. Fazendo isto, obtemos a métrica correspondente ao

espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya com uma corda cósmica passando através dele, que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau \\ &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} b^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &\quad - 2 \frac{(r^2 + a^2) - \Delta}{\rho^2} ab \sin^2 \theta dt d\phi, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde o parâmetro b , que codifica a presença da corda cósmica, assume valores no intervalo $0 < b < 1$.

A partir da Eq. (4.4), temos que a equação da superfície do horizonte de eventos exterior é obtida da seguinte condição

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0, \quad (4.5)$$

cujas soluções são

$$r_+ = M + [M^2 - (a^2 + Q_e^2 + Q_m^2)]^{1/2}, \quad (4.6)$$

$$r_- = M - [M^2 - (a^2 + Q_e^2 + Q_m^2)]^{1/2}, \quad (4.7)$$

e correspondem aos horizontes de eventos e de Cauchy.

A gravidade da superfície do buraco negro (ou aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos r_+) é definida por

$$\kappa_+ \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{r_+^2 + a^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} = \frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2}. \quad (4.8)$$

4.1.1 Termodinâmica

Agora, vamos derivar as quantidades termodinâmicas de interesse. Primeiro, vamos levar em consideração a temperatura da radiação Hawking em unidades geométricas, T_+ , e a área da superfície do horizonte de eventos na presença da corda cósmica, $\mathcal{A}_{+,b}$, que são dadas, respectivamente, por

$$T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} \quad (4.9)$$

e

$$\mathcal{A}_{+,b} = \int \int \sqrt{-g} d\theta d\phi \Big|_{r=r_+} = 4\pi(r_+^2 + a^2)b, \quad (4.10)$$

onde $g \equiv \det(g_{\sigma\tau}) = -b^2 \rho^4 \sin^2 \theta$. Consequentemente, a entropia no horizonte de eventos, $S_{+,b}$, é dada por

$$S_{+,b} = \frac{\mathcal{A}_{+,b}}{4} = \pi(r_+^2 + a^2)b, \quad (4.11)$$

onde o subscrito “ b ” codifica a presença da corda cósmica.

A partir da Eq. (4.4), a velocidade angular de arrasto do horizonte de eventos exterior, $\Omega_{+,b}$, é dada por

$$\Omega_{+,b} = -\frac{g_{03}}{g_{33}}\Big|_{r=r_+} = \frac{a}{(r_+^2 + a^2)b}. \quad (4.12)$$

O potencial elétrico, Φ_+ , muito próximo do horizonte de eventos, r_+ , é dado por

$$\Phi_+ = \frac{Q_e r_+ - \xi Q_m a}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.13)$$

onde $\xi = \pm 1$. Estes dois sinais correspondem aos dois *gauges* que iremos utilizar: o positivo (superior) que indica que a “corda de Dirac” (*Dirac string*) será inserida ao longo da parte negativa do eixo- z ($\theta = \pi$), enquanto o negativo (inferior) corresponde a inserção da “corda de Dirac” ao longo da parte positiva do eixo- z ($\theta = 0$).

A massa e o momento angular de Komar são expressos, respectivamente, como

$$M_{phys} = Mb \quad (4.14)$$

e

$$J_{phys} = Jb, \quad (4.15)$$

de modo que a relação $a = J/M = J_{phys}/M_{phys}$ permanece inalterada. A partir da Eq. (4.14), obtemos

$$Eb = E_{phys}, \quad (4.16)$$

o que significa que a energia física do buraco negro decresce devido à presença da corda cósmica.

Estas quantidades dadas pelas Eqs. (4.9)-(4.16), para o horizonte de eventos r_+ , satisfazem a primeira lei da termodinâmica, a saber,

$$dE_{phys} = T_+ dS_{+,b} + \Omega_{+,b} dJ_{phys} + \Phi_+ dQ_e. \quad (4.17)$$

4.2 Separação da equação de Klein-Gordon

A equação covariante de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado, dada pela Eq. (1.35), no espaço-tempo em consideração, dado pela Eq. (4.4), pode ser

escrita como

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right. \\
& + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{b^2 \Delta \rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{2a[(r^2 + a^2) - \Delta]}{b \Delta \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} \\
& - 2ie \frac{1}{\Delta \rho^2} \{ Q_e r(r^2 + a^2) - Q_m a [\Delta \cos \theta - \xi \Delta + \xi(r^2 + a^2)] \} \frac{\partial}{\partial t} \\
& - 2ie \frac{1}{b \Delta \rho^2} \left[Q_e r a - Q_m \left(\frac{\Delta \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \xi \frac{\Delta}{\sin^2 \theta} + \xi a^2 \right) \right] \frac{\partial}{\partial \phi} \\
& \left. - e^2 \frac{1}{\Delta \rho^2} \left\{ -Q_m^2 \Delta \left[1 - \frac{2(1 - \xi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right] - (Q_e r - \xi Q_m a)^2 \right\} - \mu_0^2 \right\} \Psi = 0, \quad (4.18)
\end{aligned}$$

onde μ_0 e e são a massa e a carga elétrica da partícula escalar, respectivamente. O quadrvetor potencial eletromagnético é dado por [197]

$$\begin{aligned}
A_\sigma dx^\sigma &= - \left(Q_e \frac{r}{\rho^2} - Q_m \frac{a \cos \theta}{\rho^2} \right) dt \\
&+ b \left[Q_e \frac{ar \sin^2 \theta}{\rho^2} + Q_m \left(\xi - \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \cos \theta \right) \right] d\phi. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Note que as unidades $G \equiv c \equiv \hbar \equiv k_B \equiv 1$ foram escolhidas.

Devido a independência temporal e as simetrias do espaço-tempo, a solução da Eq. (4.18) pode ser separada da seguinte forma

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = R(r)S(\theta)e^{i(m+\tilde{\xi}eQ_m)\phi}e^{-i\omega t}, \quad (4.20)$$

onde $\tilde{\xi} = \{\xi, 0\}$, $m = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ é o número quântico azimutal e a energia (frequência), ω , é tomada como sendo positiva ($\omega > 0$), correspondendo ao fluxo de partículas para o infinito.

Substituindo a Eq. (4.20) na Eq. (4.18), encontramos que

$$\begin{aligned}
& \frac{(r^2 + a^2)^2 \omega^2}{\Delta} - a^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{S \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) \\
& - \frac{(m + \tilde{\xi}eQ_m)^2}{b^2 \sin^2 \theta} + \frac{a^2(m + \tilde{\xi}eQ_m)^2}{b^2 \Delta} - \frac{2a\omega(r^2 + a^2)(m + \tilde{\xi}eQ_m)}{b \Delta} \\
& + \frac{2a\omega(m + \tilde{\xi}eQ_m)}{b} - \frac{2e\omega(r^2 + a^2)(Q_e r - \xi Q_m a)}{\Delta} + 2e\omega Q_m a (\cos \theta - \xi) \\
& + \frac{2e(Q_e r - \xi Q_m a)a(m + \tilde{\xi}eQ_m)}{b \Delta} - \frac{2eQ_m(\cos \theta - \xi)(m + \tilde{\xi}eQ_m)}{b \sin^2 \theta} \\
& + \frac{e^2(Q_e r - \xi Q_m a)^2}{\Delta} + e^2 Q_m^2 - \frac{2e^2 Q_m^2(1 - \xi \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\
& - \mu_0^2 r^2 - \mu_0^2 a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

No que segue, vamos separar as partes angular e radial da Eq. (4.21), em dois casos, a saber, $\tilde{\xi} = \xi$ e $\tilde{\xi} = 0$. Ao fazê-lo, podemos discutir, mais apropriadamente, qual é a separação de variáveis mais adequada para estudar a radiação Hawking.

4.2.1 Caso 1: $\tilde{\xi} = \xi$ e considerar a substituição $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

Neste caso, a Eq.(4.21) pode ser separada nas seguintes equações para $S(\theta)$ e $R(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left\{ -\frac{1}{\sin^2 \theta} [m_{(b)} + eQ_m \cos \theta + eQ_m \xi f(b)]^2 \right. \\ \left. + c_0^2 \cos^2 \theta + 2a\omega eQ_m [\cos \theta + \xi f(b)] + \lambda \right\} S = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\omega - am_{(b)} - eQ_e r - aeQ_m \xi f(b)]^2 \right. \\ \left. - \mu_0^2 r^2 + 2a\omega m_{(b)} - a^2 \omega^2 - \lambda \right\} R = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde λ é uma constante de separação, $c_0^2 = a^2(\omega^2 - \mu_0^2)$, $m_{(b)} = m/b$ e $f(b) = 1/b - 1$.

Note que no caso $e = 0$, as Eqs. (4.22) e (4.23) se reduzem às Eqs. (7) e (8), respectivamente, da Ref. [198], se tomarmos $b = 1$. Nesta separação, usamos a identidade $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ no segundo termo da Eq. (4.21). Entretanto, como podemos ver em [198], esta separação nos fornece soluções da equação radial em termos das funções confluentes de Heun, nas quais seus parâmetros contém termos proporcionais a M , a massa do buraco negro, que é um resultado não apropriado para estudar a radiação Hawking.

No limite no qual $b = 1$ e $e \rightarrow -q$, as Eqs. (4.22) e (4.23) se reduzem às Eqs. (9) e (10), respectivamente, apresentadas no artigo do Semiz [199].

4.2.2 Caso 2: $\tilde{\xi} = 0$ e manter $\sin^2 \theta$

Neste caso, vamos manter $\sin^2 \theta$ no segundo termo da Eq. (4.21), ao invés de substituir por $1 - \cos^2 \theta$. Assim, podemos separar esta equação de acordo com

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left\{ -\left[\omega a \sin \theta - \frac{m_{(b)} + eQ_m (\cos \theta - \xi)}{\sin \theta} \right]^2 \right. \\ \left. - \mu_0^2 a^2 \cos^2 \theta + \lambda \right\} S = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\omega - am_{(b)} - e(Q_e r - \xi Q_m a)]^2 \right. \\ \left. - (\mu_0^2 r^2 + \lambda) \right\} R = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note que no caso $Q_m = 0$, as Eqs. (4.24) e (4.25) se reduzem às Eqs. (24) e (25), respectivamente, da Ref. [191], se tomarmos $b = 1$. Agora, como pode ser visto em [191], esta separação nos fornece soluções da equação radial em termos das funções confluentes de Heun em uma forma adequada para estudar a radiação Hawking.

4.3 Soluções exatas da equação de Klein-Gordon

No que segue, vamos resolver as partes angular e radial da equação de Klein-Gordon, para ambos os casos discutidos anteriormente.

4.3.1 Caso 1

4.3.1.1 Equação angular

A fim de obter a solução da parte angular dada pela Eq. (4.22), vamos realizar uma mudança de variáveis, definindo uma nova coordenada angular, z , tal que

$$z = \frac{\cos \theta + 1}{2}, \quad (4.26)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$, o que implica que $0 \leq z \leq 1$. Com esta transformação, a Eq. (4.22) torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 S}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{dS}{dz} + \left\{ -(2c_0)^2 \right. \\ & + \frac{4aeQ_m \omega [\xi f(b) - 1] + 2c_0^2 + e^2 Q_m^2 - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]^2 + 2\lambda}{2} \frac{1}{z} \\ & + \frac{-4aeQ_m \omega [\xi f(b) + 1] - 2c_0^2 - e^2 Q_m^2 + [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]^2 - 2\lambda}{2} \frac{1}{z-1} \\ & - \left[\frac{e\xi Q_m f(b) - eQ_m + m_{(b)}}{2} \right]^2 \frac{1}{z^2} \\ & \left. - \left[\frac{e\xi Q_m f(b) + eQ_m + m_{(b)}}{2} \right]^2 \frac{1}{(z-1)^2} \right\} S = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Agora, vamos realizar uma transformação com o objetivo de eliminar o termo constante e reduzir a potência dos termos proporcionais a $1/z^2$ e $1/(z-1)^2$. Esta transformação é um caso especial da *transformação s-homotópica* da variável dependente, $S(z) \mapsto U(z)$, tal que

$$S(z) = e^{A_1 z} z^{A_2} (z-1)^{A_3} U(z), \quad (4.28)$$

onde os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são dados por

$$A_1 = 2c_0, \quad (4.29)$$

$$A_2 = \frac{e\xi Q_m f(b) - eQ_m + m_{(b)}}{2}, \quad (4.30)$$

$$A_3 = \frac{e\xi Q_m f(b) + eQ_m + m_{(b)}}{2}. \quad (4.31)$$

A função $U(z)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dz^2} + \left(2A_1 + \frac{2A_2 + 1}{z} + \frac{2A_3 + 1}{z-1} \right) \frac{dU}{dz} \\ + \left(\frac{2A_1 A_2 + A_1 - 2A_2 A_3 - A_2 - A_3 + A_4}{z} \right. \\ \left. + \frac{2A_1 A_3 + A_1 + 2A_2 A_3 + A_2 + A_3 + A_5}{z-1} \right) U = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde os coeficientes A_4 e A_5 são dados por

$$A_4 = \frac{4aeQ_m\omega[\xi f(b) - 1] + 2c_0^2 + e^2 Q_m^2 - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]^2 + 2\lambda}{2}, \quad (4.33)$$

$$A_5 = \frac{-4aeQ_m\omega[\xi f(b) + 1] - 2c_0^2 - e^2 Q_m^2 + [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]^2 - 2\lambda}{2}. \quad (4.34)$$

A Eq. (4.32) é análoga à equação confluyente de Heun, dada por (2.16).

Assim, a solução geral da parte angular da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar massivo carregado, no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya com corda cósmica, na região exterior ao horizonte de eventos, dada pela Eq. (4.27), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S(z) = & e^{\frac{1}{2}\alpha z} z^{\frac{1}{2}\beta} (z-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\ & + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z) \}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\alpha = 4a(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.36)$$

$$\beta = m_{(b)} + eQ_m[\xi f(b) - 1], \quad (4.37)$$

$$\gamma = m_{(b)} + eQ_m[\xi f(b) + 1], \quad (4.38)$$

$$\delta = -4a\omega eQ_m, \quad (4.39)$$

$$\eta = -\frac{4aeQ_m\omega[\xi f(b) - 1] + 2c_0^2 + e^2 Q_m^2 - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]^2 + 2\lambda}{2}. \quad (4.40)$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação confluyente de Heun, dado que β é não inteiro.

4.3.1.2 Equação radial

Agora, a fim de obter a solução da parte radial dada pela Eq. (4.23), vamos usar a Eq. (4.5). Com esta definição, a Eq. (4.23) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{1}{r - r_+} + \frac{1}{r - r_-} \right) \frac{dR}{dr} \\ & + \frac{1}{(r - r_+)(r - r_-)} \left\{ -(\mu_0^2 - \omega^2)r^2 - \omega[2eQ_e - \omega(r_+ + r_-)]r \right. \\ & + \omega^2(a^2 + r_+^2 + r_+r_- + r_-^2) - 2\omega e[\xi Q_m a f(b) + Q_e(r_+ + r_-)] + e^2 Q_e^2 - \lambda \\ & + \frac{\{\omega(r_+^2 + a^2) - am_{(b)} - e[Q_e r_+ + \xi Q_m a f(b)]\}^2}{(r_+ - r_-)(r - r_+)} \\ & \left. + \frac{\{\omega(r_-^2 + a^2) - am_{(b)} - e[Q_e r_- + \xi Q_m a f(b)]\}^2}{(r_- - r_+)(r - r_-)} \right\} R = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Esta equação possui singularidades em $r = \{a_1, a_2\} = \{r_+, r_-\}$ e em $r = \infty$. A transformação da Eq. (4.41) para uma equação do tipo de Heun é conseguida definindo-se

$$x = \frac{r - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{r - r_+}{r_- - r_+}. \quad (4.42)$$

Assim, podemos escrever a Eq. (4.41) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} \right) \frac{dR}{dx} \\ & + \left\{ -[(\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}(r_+ - r_-)]^2 \right. \\ & + \frac{2a^2\{a\omega - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]\}^2 + a^2\{\omega^2(r_+ + r_-)^2 - 2\omega eQ_e(r_+ + r_-)\}}{(r_+ - r_-)^2 x} \\ & + \frac{(r_+ - r_-)^2(\lambda + \mu_0^2 r_+^2) - 2a\omega[2e\xi Q_m f(b)r_+r_- + m_{(b)}(r_+^2 + r_-^2)]}{(r_+ - r_-)^2 x} \\ & + \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_+^2 \omega(r_+ - 3r_-) - 2r_+^3 \omega^2(r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2 x} \\ & + \frac{2aeQ_e(r_+ + r_-)[e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]}{(r_+ - r_-)^2 x} \\ & - \frac{2a^2\{a\omega - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]\}^2 + a^2\{\omega^2(r_+ + r_-)^2 - 2\omega eQ_e(r_+ + r_-)\}}{(r_+ - r_-)^2 (x - 1)} \\ & - \frac{(r_+ - r_-)^2(\lambda + \mu_0^2 r_-^2) - 2a\omega[2e\xi Q_m f(b)r_+r_- + m_{(b)}(r_+^2 + r_-^2)]}{(r_+ - r_-)^2 (x - 1)} \\ & - \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_-^2 \omega(r_- - 3r_+) - 2r_-^3 \omega^2(r_- - 2r_+)}{(r_+ - r_-)^2 (x - 1)} \\ & - \frac{2aeQ_e(r_+ + r_-)[e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]}{(r_+ - r_-)^2 (x - 1)} \\ & - \left\{ i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - am_{(b)} - e[Q_e r_+ + \xi Q_m a f(b)]}{r_+ - r_-} \right\}^2 \frac{1}{x^2} \\ & - \left\{ i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - am_{(b)} - e[Q_e r_- + \xi Q_m a f(b)]}{r_+ - r_-} \right\}^2 \frac{1}{(x - 1)^2} \Big\} R = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Agora, vamos realizar uma transformação a fim de eliminar o termo constante e reduzir a potência dos termos proporcionais a $1/x^2$ e $1/(x-1)^2$. Analogamente à situação anterior, esta transformação é um caso especial da *transformação s-homotópica* da variável dependente, $R(x) \mapsto U(x)$, tal que

$$R(x) = e^{B_1 x} x^{B_2} (x-1)^{B_3} U(x), \quad (4.44)$$

onde os coeficientes B_1 , B_2 e B_3 são dados por

$$B_1 = (\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} (r_+ - r_-), \quad (4.45)$$

$$B_2 = i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - a m_{(b)} - e[Q_e r_+ + \xi Q_m a f(b)]}{r_+ - r_-}, \quad (4.46)$$

$$B_3 = i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - a m_{(b)} - e[Q_e r_- + \xi Q_m a f(b)]}{r_+ - r_-}. \quad (4.47)$$

A função $U(x)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(2B_1 + \frac{2B_2 + 1}{x} + \frac{2B_3 + 1}{x-1} \right) \frac{dU}{dx} \\ & + \left(\frac{2B_1 B_2 + B_1 - 2B_2 B_3 - B_2 - B_3 + B_4}{x} \right. \\ & \left. + \frac{2B_1 B_3 + B_1 + 2B_2 B_3 + B_2 + B_3 + B_5}{x-1} \right) U = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde os coeficientes B_4 e B_5 são dados por

$$\begin{aligned} B_4 = & \frac{2a^2 \{a\omega - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]\}^2 + a^2 \omega^2 (r_+ + r_-)^2}{(r_+ - r_-)^2} \\ & + \frac{(r_+ - r_-)^2 (\lambda + \mu_0^2 r_+^2) - 2a\omega [2e\xi Q_m f(b) r_+ r_- + m_{(b)} (r_+^2 + r_-^2)]}{(r_+ - r_-)^2} \\ & + \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_+^2 \omega (r_+ - 3r_-) - 2r_+^3 \omega^2 (r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & + \frac{2aeQ_e (r_+ + r_-) [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]}{(r_+ - r_-)^2} \\ & + \frac{-2a^2 \omega e Q_e (r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} B_5 = & - \frac{2a^2 \{a\omega - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]\}^2 + a^2 \omega^2 (r_+ + r_-)^2}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{(r_+ - r_-)^2 (\lambda + \mu_0^2 r_-^2) - 2a\omega [2e\xi Q_m f(b) r_+ r_- + m_{(b)} (r_+^2 + r_-^2)]}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_-^2 \omega (r_- - 3r_+) - 2r_-^3 \omega^2 (r_- - 2r_+)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{2aeQ_e (r_+ + r_-) [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{-2a^2 \omega e Q_e (r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A Eq. (4.48) é análoga à equação confluyente de Heun, dada por (2.16). Assim, sua solução geral, na região exterior do horizonte de eventos, ao longo de todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, pode ser escrita como

$$R(x) = e^{\frac{1}{2}\alpha x} x^{\frac{1}{2}\beta} (x-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) + C_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; x)\}, \quad (4.51)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\alpha = 2(\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}(r_+ - r_-), \quad (4.52)$$

$$\beta = 2i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - am_{(b)} - e[Q_e r_+ + \xi Q_m a f(b)]}{r_+ - r_-}, \quad (4.53)$$

$$\gamma = 2i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - am_{(b)} - e[Q_e r_- + \xi Q_m a f(b)]}{r_+ - r_-}, \quad (4.54)$$

$$\delta = [2\omega e Q_e + (\mu_0^2 - 2\omega^2)(r_+ + r_-)](r_+ - r_-), \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \eta = & - \frac{2a^2 \{a\omega - [e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]\}^2 + a^2 \{\omega^2(r_+ + r_-)^2\}}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{(r_+ - r_-)^2 (\lambda + \mu_0^2 r_+^2) - 2a\omega [2e\xi Q_m f(b)r_+ r_- + m_{(b)}(r_+^2 + r_-^2)]}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_+^2 \omega(r_+ - 3r_-) - 2r_+^3 \omega^2(r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{2aeQ_e(r_+ + r_-)[e\xi Q_m f(b) + m_{(b)}]}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{-2\omega e Q_e(r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun, tendo em vista que β é não inteiro. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que não há razão física específica para impor que β deva ser inteiro.

Note a dependência de ambas as soluções, angular e radial, em relação ao parâmetro b , associado com a presença da corda cósmica. Se tomarmos $b = 1$, isto implica que $f(b) = 0$, de modo que a dependência dos parâmetros α , β , γ , δ e η relativa aos sinais que correspondem aos dois *gauges*, ξ , é eliminada. Assim, neste limite, e tomando $e \rightarrow -q$, as Eqs. (4.35) e (4.51) são as soluções exatas gerais para as Eqs. (9) e (10), respectivamente, apresentadas no artigo do Semiz [199].

4.3.2 Caso 2

4.3.2.1 Equação angular

Este caso generaliza os resultados obtidos no Capítulo 3 e no trabalho de Fernandes *et al.* [200].

Seguindo o mesmo procedimento da Seção 4.3.1.1, a Eq. (4.24) pode ser reescrita em uma forma mais conveniente, através da definição de uma nova coordenada angular, z , tal que

$$z = \frac{\cos \theta + 1}{2}, \quad (4.57)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ implica que $0 \leq z \leq 1$, e realizando uma transformação a fim de eliminar o termo constante e reduzir a potência dos termos proporcionais à $1/z^2$ e $1/(z-1)^2$. Esta transformação é também um caso especial da *transformação s-homotópica* da variável dependente, $S(z) \mapsto U(z)$, tal que

$$S(z) = e^{A_1 z} z^{A_2} (z-1)^{A_3} U(z), \quad (4.58)$$

onde os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são dados por

$$A_1 = 2a(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.59)$$

$$A_2 = \frac{m_{(b)} - eQ_m(\xi + 1)}{2}, \quad (4.60)$$

$$A_3 = \frac{m_{(b)} - eQ_m(\xi - 1)}{2}. \quad (4.61)$$

A função $U(z)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dz^2} + \left(2A_1 + \frac{2A_2 + 1}{z} + \frac{2A_3 + 1}{z-1} \right) \frac{dU}{dz} \\ & + \left(\frac{2A_1 A_2 + A_1 - 2A_2 A_3 - A_2 - A_3 + A_4}{z} \right. \\ & \left. + \frac{2A_1 A_3 + A_1 + 2A_2 A_3 + A_2 + A_3 + A_5}{z-1} \right) U = 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde os coeficientes A_4 e A_5 são dados por

$$A_4 = \frac{-2a^2 \mu_0^2 + 4a\omega[m_{(b)} - eQ_m(\xi + 1)] + e^2 Q_m^2 - (m_{(b)} - e\xi Q_m)^2 + 2\lambda}{2}, \quad (4.63)$$

$$A_5 = \frac{2a^2 \mu_0^2 - 4a\omega[m_{(b)} - eQ_m(\xi - 1)] - e^2 Q_m^2 + (m_{(b)} - e\xi Q_m)^2 - 2\lambda}{2}. \quad (4.64)$$

Note que a Eq. (4.62) é análoga à equação confluyente de Heun (2.16).

Assim, a solução geral da parte angular da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar massivo carregado, no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya com corda cósmica, na região exterior ao horizonte de eventos, dada pela Eq. (4.24), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S(z) = & e^{\frac{1}{2}\alpha z} z^{\frac{1}{2}\beta} (z-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\ & + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z) \}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são, agora, dados por

$$\alpha = 4a(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.66)$$

$$\beta = m_{(b)} - eQ_m(\xi + 1), \quad (4.67)$$

$$\gamma = m_{(b)} - eQ_m(\xi - 1), \quad (4.68)$$

$$\delta = -4a\omega eQ_m, \quad (4.69)$$

$$\eta = -\frac{-2a^2\mu_0^2 + 4a\omega[m_{(b)} - eQ_m(\xi + 1)] + e^2Q_m^2 - (m_{(b)} - e\xi Q_m)^2 + 2\lambda}{2}. \quad (4.70)$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun, o que pode ser associado ao fato de que β é não inteiro.

4.3.2.2 Equação radial

Agora, vamos obter a solução exata e geral para a parte radial dada pela Eq. (4.25). Seguindo o mesmo procedimento da Seção 4.3.1.2 e usando a Eq. (4.5), a transformação da Eq. (4.25) em uma equação do tipo de Heun é obtida fazendo

$$x = \frac{r - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{r - r_+}{r_- - r_+}, \quad (4.71)$$

e realizando uma transformação a fim de eliminar o termo constante e reduzir a potência dos termos proporcionais a $1/x^2$ e $1/(x-1)^2$. Esta transformação é também um caso especial da *transformação s-homotópica* da variável dependente, $R(x) \mapsto U(x)$, tal que

$$R(x) = e^{B_1 x} x^{B_2} (x-1)^{B_3} U(x), \quad (4.72)$$

onde os coeficientes B_1 , B_2 e B_3 são dados por

$$B_1 = (\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}(r_+ - r_-), \quad (4.73)$$

$$B_2 = i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - am_{(b)} - e(Q_e r_+ - \xi Q_m a)}{r_+ - r_-}, \quad (4.74)$$

$$B_3 = i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - am_{(b)} - e(Q_e r_- - \xi Q_m a)}{r_+ - r_-}. \quad (4.75)$$

A função $U(z)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(2B_1 + \frac{2B_2 + 1}{x} + \frac{2B_3 + 1}{x-1} \right) \frac{dU}{dx} \\ & + \left(\frac{2B_1 B_2 + B_1 - 2B_2 B_3 - B_2 - B_3 + B_4}{x} \right. \\ & \left. + \frac{2B_1 B_3 + B_1 + 2B_2 B_3 + B_2 + B_3 + B_5}{x-1} \right) U = 0, \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde os coeficientes B_4 e B_5 são dados por

$$\begin{aligned}
 B_4 = & \frac{2a^2[a\omega - (m_{(b)} - e\xi Q_m)]^2 + 4a^2\omega^2 r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & + \frac{(r_+ - r_-)^2(\lambda + \mu_0^2 r_+^2) - 4a\omega(m_{(b)} - e\xi Q_m)r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & + \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_+^2 \omega(r_+ - 3r_-) - 2r_+^3 \omega^2(r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & + \frac{2aeQ_e(r_+ + r_-)(m_{(b)} - e\xi Q_m)}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & + \frac{-2a^2\omega eQ_e(r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}, \tag{4.77}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_5 = & -\frac{2a^2[a\omega - (m_{(b)} - e\xi Q_m)]^2 + 4a^2\omega^2 r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & - \frac{(r_+ - r_-)^2(\lambda + \mu_0^2 r_-^2) - 4a\omega(m_{(b)} - e\xi Q_m)r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & - \frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_-^2 \omega(r_- - 3r_+) - 2r_-^3 \omega^2(r_- - 2r_+)}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & - \frac{2aeQ_e(r_+ + r_-)(m_{(b)} - e\xi Q_m)}{(r_+ - r_-)^2} \\
 & - \frac{-2a^2\omega eQ_e(r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}. \tag{4.78}
 \end{aligned}$$

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que a Eq. (4.76) é análoga à equação confluyente de Heun, dada por (2.16). Assim, a solução geral da Eq. (4.25), na região exterior do horizonte de eventos, ao longo de todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, é dada por

$$\begin{aligned}
 R(x) = & e^{\frac{1}{2}\alpha x} x^{\frac{1}{2}\beta} (x-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) \\
 & + C_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; x)\}, \tag{4.79}
 \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são, agora, dados por

$$\alpha = 2(\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}(r_+ - r_-), \tag{4.80}$$

$$\beta = 2i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - am_{(b)} - e(Q_e r_+ - \xi Q_m a)}{r_+ - r_-}, \tag{4.81}$$

$$\gamma = 2i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - am_{(b)} - e(Q_e r_- - \xi Q_m a)}{r_+ - r_-}, \tag{4.82}$$

$$\delta = [2\omega eQ_e + (\mu_0^2 - 2\omega^2)(r_+ + r_-)](r_+ - r_-), \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
\eta = & -\frac{2a^2[a\omega - (m_{(b)} - e\xi Q_m)]^2 + 4a^2\omega^2 r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\
& -\frac{(r_+ - r_-)^2(\lambda + \mu_0^2 r_+^2) - 4a\omega(m_{(b)} - e\xi Q_m)r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\
& -\frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2eQ_e r_+^2 \omega(r_+ - 3r_-) - 2r_+^3 \omega^2(r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \\
& -\frac{2aeQ_e(r_+ + r_-)(m_{(b)} - e\xi Q_m)}{(r_+ - r_-)^2} \\
& -\frac{-2a^2\omega eQ_e(r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun, dado que β não é inteiro. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que não há razão física específica para impor que β deva ser inteiro.

Note, novamente, a dependência de ambas as soluções, angular e radial, em relação ao parâmetro b , que codifica a presença da corda cósmica.

4.4 Radiação do buraco negro e continuação analítica

Vamos considerar o campo escalar massivo carregado nas proximidades do horizonte de eventos, a fim de discutir a radiação Hawking.

A partir das Eqs. (4.71) e (2.48), podemos ver que a solução radial, dada pela Eq. (4.79), nas proximidades do horizonte de eventos exterior, isto é, quando $r \rightarrow r_+$ implica que $x \rightarrow 0$, se comporta assintoticamente como

$$R(r) \sim C_1 (r - r_+)^{\beta/2} + C_2 (r - r_+)^{-\beta/2}, \tag{4.85}$$

onde estamos considerando apenas as contribuições do primeiro termo na expansão e todas as constantes estão incluídas em C_1 e C_2 . Assim, considerando a dependência temporal, nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro r_+ , esta solução é dada por

$$\Psi = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{\pm\beta/2}. \tag{4.86}$$

A partir da Eq. (4.81), obtemos

$$\frac{\beta}{2} = i \left[\omega \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} - \left(m \frac{a}{(r_+ - r_-)b} + e \frac{Q_e r_+ - \xi Q_m a}{r_+ - r_-} \right) \right], \tag{4.87}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\beta}{2} = \frac{i}{2\kappa_+} [\omega - (m\Omega_{+,b} + e\Phi_+)] = \frac{i}{2\kappa_+} (\omega - \omega_{0,b}), \tag{4.88}$$

através do uso das Eqs. (4.8), (4.12) e (4.13), onde $\omega_{0,b} = m\Omega_{+,b} + e\Phi_+$.

Portanto, na superfície do horizonte de eventos exterior do buraco negro, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \quad (4.89)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (4.90)$$

Estas soluções dependem do parâmetro b , de tal forma que a energia total das partículas radiadas é diminuída devida à presença da corda cósmica. Estas soluções para os campos escalares nas proximidades do horizonte de eventos serão úteis para investigar a radiação Hawking de partículas escalares massivas carregadas. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que estamos usando a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo em consideração, diferentemente dos cálculos usualmente realizados na literatura, como por exemplo em [201, 202, 203].

Usando as definições das coordenadas *tortoise* e Eddington-Finkelstein, obtemos:

$$\ln(r - r_+) = \frac{1}{r_+^2 + a^2} \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r=r_+} \quad r_* = 2\kappa_+ r_*; \quad (4.91)$$

$$\hat{r} = \frac{\omega - \omega_{0,b}}{\omega} r_*; \quad (4.92)$$

$$v = t + \hat{r}. \quad (4.93)$$

Nestas novas coordenadas, obtemos as seguintes soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*):

$$\begin{aligned} \Psi_{in} &= e^{-i\omega v} e^{i\omega \hat{r}} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \\ &= e^{-i\omega v} e^{i(\omega - \omega_{0,b})r_*} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \\ &= e^{-i\omega v}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{out}(r > r_+) &= e^{-i\omega v} e^{i\omega \hat{r}} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \\ &= e^{-i\omega v} e^{i(\omega - \omega_{0,b})r_*} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_+)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

As soluções (4.94) e (4.95), no caso $b = 1$ e $Q_m = 0$, são exatamente as soluções obtidas na Ref. [191]. No caso $Q_e = Q_m = e = 0$ e $a^2 \approx 0$, as soluções (4.94) e (4.95) são exatamente as obtidas anteriormente no Capítulo 3.

Agora, vamos obter, por continuação analítica, a parte real amortecida (*damped*) da solução de onda que se afasta (*outgoing*), e que será utilizada para construir uma expressão explícita da taxa de decaimento Γ . Esta parte real amortecida (*damped*) corresponde (pelo menos parcialmente) à contribuição temporal para a taxa de decaimento encontrada pelo método de tunelamento [202] usado para investigar a radiação Hawking.

A partir da Eq. (4.95), vemos que esta solução não é analítica no horizonte de eventos exterior, $r = r_+$. De acordo com o método de Damour-Ruffini [192], por continuação analítica, rotacionando $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r , obtemos

$$(r - r_+) \rightarrow |r - r_+| e^{-i\pi} = (r_+ - r) e^{-i\pi}. \quad (4.96)$$

Assim, a solução de onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos r_+ é dada por

$$\Psi_{out}(r < r_+) = e^{-i\omega v} (r_+ - r)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})} e^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (4.97)$$

As Eqs. (4.95) e (4.97) descrevem as ondas que se afastam (*outgoing*), fora e dentro, do buraco negro, respectivamente. Portanto, para a onda de uma partícula escalar que se afasta (*outgoing*) com energia ω , carga e e momento angular m , a taxa de decaimento (ou probabilidade relativa de espalhamento) na superfície do horizonte de eventos $r = r_+$ é dada por

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_{0,b})}. \quad (4.98)$$

Esta é a probabilidade relativa de criar um par de partícula-antipartícula do lado de fora do horizonte de eventos.

4.5 A entropia de Bekenstein-Hawking, espectro de corpo negro e fluxo de Hawking

Após o horizonte de eventos do buraco negro radiar partículas com energia ω , carga e e momento angular m , a fim de considerar a reação da radiação da partícula ao espaço-tempo, devemos substituir M_{phys} , Q_e e J_{phys} por $M_{phys} - \omega$, $Q_e - e$ e $J_{phys} - m$, respectivamente, no elemento de linha do espaço-tempo em consideração. Fazendo estas mudanças, devemos garantir que a energia, a carga e o momento angular totais do espaço-tempo são todos conservados, isto é,

$$\begin{aligned} -\omega &= \Delta E_{phys}, \\ -e &= \Delta Q_e, \\ -m &= \Delta J_{phys}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

onde ΔE_{phys} , ΔQ_e e ΔJ_{phys} são as variações da energia física, da carga elétrica e do momento angular de Komar do horizonte de eventos do buraco negro, antes e depois da

emissão de radiação, respectivamente. Substituindo as Eqs. (4.17) e (4.99) na Eq.(4.98), obtemos a taxa de decaimento da onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos $r = r_+$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_+ &= e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E_{phys} - m\Omega_{+,b} - e\Phi_+)} \\
 &= e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E_{phys} + \Omega_{+,b}\Delta J_{phys} + \Phi_+\Delta Q_e)} \\
 &= e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-T_+\Delta S_{+,b})} \\
 &= e^{\Delta S_{+,b}},
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

onde utilizamos a Eq. (4.9). A quantidade $\Delta S_{+,b}$ é a mudança na entropia de Bekenstein-Hawking na presença da corda cósmica, se compararmos as situações antes e depois da emissão de partículas. Isto é obtido a partir das expressões para o horizonte de eventos exterior e para a entropia, dadas pelas Eq. (4.6) e (4.11), respectivamente, como segue:

$$\begin{aligned}
 \Delta S_{+,b} &= S_{+,b}(M_{phys} - \omega, Q_e - e, J_{phys} - m) - S_{+,b}(M_{phys}, Q_e, J_{phys}) \\
 &= \pi[r_+^2(M - \omega, Q_e - e, J - m) + a^2(M - \omega, J - m)]b \\
 &\quad - \pi[r_+^2(M, Q_e, J) + a^2(M, J)]b \\
 &= \pi[2(M - \omega)^2 - (Q_e - e)^2 - Q_m^2 \\
 &\quad + 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - a_\omega^2 - (Q_e - e)^2 - Q_m^2} \\
 &\quad - 2M^2 + Q_e^2 + Q_m^2 - 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q_e^2 - Q_m^2}]b,
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

onde $a = a(M, J) = J/M$ e

$$a_\omega^2 = \left(\frac{J - m}{M - \omega}\right)^2. \tag{4.102}$$

De acordo com a derivação heurística de Sannan [193], o número médio de partículas emitidas, $\bar{N}_\omega$, em um dado modo pode ser obtido a partir da expressão para a probabilidade relativa de espalhamento, Γ_+ , como segue:

$$\bar{N}_\omega = \frac{\Gamma_+}{1 - \Gamma_+} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar(\omega - \omega_{0,b})}{k_B T_+}} - 1}. \tag{4.103}$$

Este é exatamente o espectro resultante da radiação Hawking para partículas escalares sendo radiadas a partir de um buraco negro de Kerr-Newman-Kasuya com uma corda cósmica, onde as constantes de Boltzmann e Planck foram reintroduzidas.

Portanto, podemos ver que o espectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares possui um caráter térmico, análogo ao espectro de corpo negro, onde $k_B T_+ = \hbar\kappa_+/2\pi$, com k_B sendo a constante de Boltzmann. Vale a pena notar que a energia total das partículas escalares radiadas diminui devido à presença da corda cósmica, mais precisamente, a velocidade angular de arrasto do horizonte de eventos exterior, $\Omega_{+,b}$, é amplificada em comparação com o cenário sem a corda cósmica [191].

Ao integrar o espectro (ou função distribuição) anterior sobre todos os ω 's, obtemos o fluxo de Hawking para partículas massivas escalares. Ele é dado por

$$\begin{aligned}
 \text{Flux} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{N}_\omega \omega d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_{0,b})} - 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa_+}{2\pi} \right)^2 \text{Li}_2(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_{0,b}}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa_+}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \log(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_{0,b}}) - \log(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_{0,b}}) \log[-\log(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_{0,b}})] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=2}^\infty \frac{\log^j(e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\omega_{0,b}}) \zeta(2-j)}{j!} \right\}, \tag{4.104}
 \end{aligned}$$

onde $\zeta(z)$ é a função zeta de Riemann e $\text{Li}_n(z)$ é a função polilogarítmica com n variando de 1 a ∞ (ver Apêndice B.2). Este é o resultado exato para o fluxo de energia no caso geral. Em particular, para o buraco negro de Schwarzschild, $\omega_{0,b} = 0$, então, temos

$$\text{Flux} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa_+}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{\kappa_+^2}{48\pi}, \tag{4.105}$$

que é um resultado já obtido na literatura [204, 205].

4.6 Campos escalares massivos carregados no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya

Agora, vamos focar nossas atenções no Caso 2 analisado anteriormente, mas sem a presença da corda cósmica, ou seja, vamos tomar $b = 1$, de modo que estaremos lidando com um buraco negro *dyon* em sua forma original, dado pela métrica (4.1).

Assim, a solução exata da parte angular da equação de Klein-Gordon, $S(\theta)$, para um campos escalar massivo carregado no espaço-tempo do buraco negro *dyon*, é dada por

$$\begin{aligned}
 S(z) &= e^{\frac{1}{2}\alpha z} z^{\frac{1}{2}\beta} (z-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\
 &\quad + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z) \}, \tag{4.106}
 \end{aligned}$$

com

$$z = \frac{\cos \theta + 1}{2}, \tag{4.107}$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são expressos como

$$\alpha = 4a(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.108}$$

$$\beta = m - eQ_m(\xi + 1), \tag{4.109}$$

$$\gamma = m - eQ_m(\xi - 1), \quad (4.110)$$

$$\delta = -4a\omega eQ_m, \quad (4.111)$$

$$\eta = -\frac{-2a^2\mu_0^2 + 4a\omega[m - eQ_m(\xi + 1)] + e^2Q_m^2 - (m - e\xi Q_m)^2 + 2\lambda}{2}. \quad (4.112)$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação confluyente de Heun, pois β é não inteiro.

Para a parte radial da equação de Klein-Gordon, $R(r)$, a solução exata, ao longo do intervalo $0 \leq x < \infty$, é dada por

$$\begin{aligned} R(x) = & e^{\frac{1}{2}\alpha x} x^{\frac{1}{2}\beta} (x - 1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) \\ & + C_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; x)\}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

com

$$x = \frac{r - r_+}{r_- - r_+}, \quad (4.114)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são expressos como

$$\alpha = 2(\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}(r_+ - r_-), \quad (4.115)$$

$$\beta = 2i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - am - e(Q_e r_+ - \xi Q_m a)}{r_+ - r_-}, \quad (4.116)$$

$$\gamma = 2i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - am - e(Q_e r_- - \xi Q_m a)}{r_+ - r_-}, \quad (4.117)$$

$$\delta = [2\omega e Q_e + (\mu_0^2 - 2\omega^2)(r_+ + r_-)](r_+ - r_-), \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{2a^2[a\omega - (m - e\xi Q_m)]^2 + 4a^2\omega^2 r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\ & -\frac{(r_+ - r_-)^2(\lambda + \mu_0^2 r_+^2) - 4a\omega(m - e\xi Q_m)r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2} \\ & -\frac{2e^2 Q_e^2 r_+ r_- + 2e Q_e r_+^2 \omega(r_+ - 3r_-) - 2r_+^3 \omega^2(r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & -\frac{2ae Q_e(r_+ + r_-)(m - e\xi Q_m)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & +\frac{2a^2\omega e Q_e(r_+ + r_-)}{(r_+ - r_-)^2}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Como no caso que corresponde a solução angular, na presente situação não há nenhuma razão física específica para impor que β deva ser inteiro.

Após esse breve estabelecimento das soluções da equação de Klein-Gordon, vamos agora levar em consideração as propriedades das funções confluentes de Heun para discutir as frequências ressonantes (quasi-espectro), o processo de espalhamento e a radiação Hawking de ondas escalares por um buraco negro *dyon*.

4.6.1 Frequências ressonantes

Nesta seção apresentamos uma nova técnica simples para investigar as frequências ressonantes (quasi-espectro) para um campo escalar massivo carregado no espaço-tempo de um buraco negro *dyon*, usando diretamente as soluções exatas da equação de Klein-Gordon.

Muitos autores consideraram o quasi-espectro de campos massivos em vários espaços-tempos de buracos negros. A terminologia modos quasinormais tem sido usada por Simone *et al.* [206] e Fiziev [207], e estados ligados por Dolan *et al.* [208]. Aqui, usamos quasi-espectro genericamente, o qual não tem nenhuma implicação com a simetria de reversão temporal. Quasi-espectro não pode ser confundido com modos quasinormais ou estados ligados. Mais precisamente, modos quasinormais representam as ressonâncias do espalhamento dos campos no espaço-tempo do buraco negro, onde estas ressonâncias características (dependentes da frequência) correspondem aos pólos das amplitudes de transmissão e reflexão (ou estão associadas a um ponto de máximo do potencial efetivo), enquanto para computar o espectro discreto dos estados ligados, a solução radial deve ser finita no horizonte de eventos e decair exponencialmente em direção ao infinito.

Formularemos, agora, um método prático para computar o quasi-espectro discreto de níveis de energia, cuja frequência, ω_{QS} , chamada frequência ressonante, pode ser decomposta em suas partes real, ω_R , e imaginária, ω_I , e portanto, $\omega_{QS} = \omega_n = \omega_R + i\omega_I$.

A fim de computar estas energias do campo, precisamos impor condições de fronteira sobre a solução na região assintótica (infinito), que neste caso, corresponde a condição necessária para termos uma forma polinomial de $R(x)$, de modo que a solução seja finita no horizonte de eventos e bem comportada muito longe do buraco negro, o que é obtido impondo-se a condição- δ dada pela Eq. (2.55).

Assim, obtemos a seguinte expressão que envolve as frequências ressonantes:

$$\frac{\omega e Q_e + M\mu_0^2 - 2M\omega^2}{(\mu_0^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{i}{2} \left[\left(\frac{\omega}{\kappa_+} + \frac{\omega}{\kappa_-} \right) - \left(\frac{\omega_+}{\kappa_+} + \frac{\omega_-}{\kappa_-} \right) \right] = -(n+1), \quad (4.120)$$

onde

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad (4.121)$$

$$\omega_{\pm} = m\Omega_{\pm} + e\Phi_{\pm}, \quad (4.122)$$

$$\Omega_{\pm} = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad (4.123)$$

$$\Phi_{\pm} = \frac{Q_e r_{\pm} - \xi Q_m a}{r_{\pm}^2 + a^2}. \quad (4.124)$$

Não conseguimos obter uma expressão analítica para ω_n a partir da Eq. (4.120), entretanto, existem vários métodos numéricos que podem ser usados para obter expressões aproximadas para cada nível de energia [209].

Se considerarmos campos escalares sem massa, $\mu_0 = 0$, as partes real, ω_R , e imaginária, ω_I , da frequência ressonante são dados por

$$\omega_R = \frac{2\kappa_+\kappa_-}{4M\kappa_+\kappa_- + \kappa_+ + \kappa_-} \left[eQ_e + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+}{\kappa_+} + \frac{\omega_-}{\kappa_-} \right) \right] \quad (4.125)$$

e

$$\omega_I = \frac{2\kappa_+\kappa_-}{4M\kappa_+\kappa_- + \kappa_+ + \kappa_-} (n+1), \quad (4.126)$$

com $n \geq 0$.

4.6.2 Espalhamento

Considerando a expansão das funções confluentes de Heun em séries assintóticas quando $x \rightarrow \infty$, dadas pela Eq. (2.49), podemos escrever

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) \sim C_1 x^{-(\frac{\beta+\gamma+2}{2}+\frac{\delta}{\alpha})} + C_2 e^{-\alpha x} x^{-(\frac{\beta+\gamma+2}{2}-\frac{\delta}{\alpha})}, \quad (4.127)$$

onde estamos mantendo apenas o primeiro termo das séries de potências.

Assim, a partir das Eqs. (4.114) e (4.127), podemos ver que a solução radial dada pela Eq. (4.113), muito longe do buraco negro, isto é, quando $|r| \rightarrow \infty$, que equivale a $|x| \rightarrow \infty$, se comporta assintoticamente como

$$R(x) \sim \frac{1}{x} (C_1 e^{\frac{1}{2}\alpha x} x^{-\frac{\delta}{\alpha}} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\alpha x} x^{\frac{\delta}{\alpha}}), \quad (4.128)$$

onde todas as constantes estão incluídas em C_1 e C_2 . Assim, a função de onda radial pode ser escrita como

$$R_{\lambda}(x) \sim C_{\lambda} \frac{1}{x} \sin \left[-i\frac{1}{2}\alpha x + i\frac{\delta}{\alpha} \ln x + \sigma_{\lambda}(\omega) \right], \quad (4.129)$$

onde $\sigma_{\lambda}(\omega)$ é o deslocamento de fase (*phase shift*).

A partir das Eqs. (4.115) e (4.118), obtemos

$$-i\frac{1}{2}\alpha = (\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}(r_+ - r_-) = k_0(r_+ - r_-), \quad (4.130)$$

$$i\frac{\delta}{\alpha} = \frac{2\omega e Q_e + (\mu_0^2 - 2\omega^2)(r_+ + r_-)}{2(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}} = \gamma_0, \quad (4.131)$$

onde $k_0^2 \equiv \omega^2 - \mu_0^2$ e $\gamma_0 \equiv (\omega e Q_e + M \mu_0^2 - 2M\omega^2)/(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$.

Portanto, a solução de onda parcial regular possui a seguinte forma assintótica

$$R_\lambda(r) \sim C_\lambda \frac{1}{r} \sin[k_0 r - \gamma_0 \ln r + \sigma_\lambda(\omega)]. \quad (4.132)$$

Estas soluções para campos escalares muito longe do buraco negro serão úteis para investigar o espalhamento de partículas escalares massivas carregadas. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que estamos usando a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo em consideração.

De fato, o deslocamento de fase, σ_λ , não é uma função simples de l e, portanto, a expressão exata para a amplitude de espalhamento não pode ser obtida, mas apenas a aproximada, como apresentado, por exemplo, no artigo do Abramov *et al.* [210].

4.6.3 Radiação Hawking

A solução exata do efeito Hawking para partículas escalares massivas carregadas no buraco negro *dyon* foi obtida nas Seções 4.4 e 4.5 (se tomarmos $b = 1$ nas Eqs. (4.89), (4.90), (4.98) and (4.103)). Nesta subseção vamos apresentar brevemente os resultados relativos a radiação Hawking, por questão de completeza, em vista do fato de que iremos apresentar novos resultados neste sentido, na próxima subseção.

As soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos exterior do buraco negro, são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \quad (4.133)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)}. \quad (4.134)$$

A probabilidade relativa de criar um par de partícula-antipartícula do lado de fora do horizonte de eventos é dada por

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)}, \quad (4.135)$$

e o espectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares, sendo radiadas a partir do buraco negro de Kerr-Newman-Kasuya, é dado por

$$|N_\omega|^2 = \frac{\Gamma_+}{1 - \Gamma_+} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{k_B T_+}} - 1}, \quad (4.136)$$

onde $\omega_0 = m\Omega_+ + e\Phi_+$.

4.6.4 Casos especiais

Na seção anterior usamos as formas convencionais das expansões em séries e a forma assintótica das funções confluentes de Heun para obter a solução radial.

Agora, a partir desta solução geral dada pela Eq. (4.132), podemos escrever alguns resultados particulares para os espaços-tempos de Kerr e Schwarzschild.

4.6.4.1 O espaço-tempo de Kerr

No caso especial de $Q_e = Q_m = 0$, a métrica dada pela Eq. (4.1) se reduz à forma de Kerr. Consequentemente, temos

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (4.137)$$

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2}. \quad (4.138)$$

Então, a partir das Eqs. (4.115) e (4.118), obtemos

$$-i\frac{1}{2}\alpha = k_0(r_+ - r_-), \quad (4.139)$$

$$i\frac{\delta}{\alpha} = \gamma_0, \quad (4.140)$$

onde $k_0^2 \equiv \omega^2 - \mu_0^2$ e $\gamma_0 \equiv (M\mu_0^2 - 2M\omega^2)/(\omega^2 - \mu_0^2)^{1/2}$.

Portanto, a solução analítica para a onda parcial regular, neste caso, é dada por

$$R_l(r) \sim C_l \frac{1}{r} \sin[k_0 r - \gamma_0 \ln r + \sigma_l(\omega)], \quad (4.141)$$

onde os autovalores $\lambda = \lambda_{lm}$ (l, m são inteiros tais que $|m| \leq l$) não puderam ser expressos de forma analítica em termos de l e m .

Se particularizarmos este resultado para o caso sem massa, isto é, $\mu_0 = 0$, temos

$$k_0 = \omega, \quad (4.142)$$

$$\gamma_0 = -2M\omega. \quad (4.143)$$

Agora, usando a definição da coordenada *tortoise*, r_* , a saber,

$$\frac{dr}{dr_*} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2}, \quad (4.144)$$

onde $r \rightarrow \infty$, obtemos

$$r_* = r + 2M \ln r. \quad (4.145)$$

Nesta nova coordenada, obtemos a seguinte solução de onda espalhada para partículas escalares, sem massa, no espaço-tempo de Kerr

$$R_\lambda(r) \sim \frac{1}{r}(A e^{i\omega r_*} + B e^{-i\omega r_*}), \quad (4.146)$$

onde A e B são constantes e descrevem os coeficientes de onda incidente e refletida, respectivamente. A solução dada pela Eq. (4.146) é exatamente a solução obtida por Starobinsky [211], Handler e Matzner [212], e Glampedakis e Andersson [213].

Além disso, a partir da Eq. (4.120), podemos escrever a expressão das frequências ressonantes para campos escalares, sem massa, no espaço-tempo de Kerr, da seguinte forma

$$\omega_R = \frac{\omega_+ \kappa_- + \omega_- \kappa_+}{4M\kappa_+ \kappa_- + \kappa_+ + \kappa_-}, \quad (4.147)$$

$$\omega_I = \frac{2\kappa_+ \kappa_- (n+1)}{4M\kappa_+ \kappa_- + \kappa_+ + \kappa_-}, \quad (4.148)$$

onde $n \geq 0$. As soluções dadas pelas Eqs. (4.147) e (4.148) generalizam as obtidas por Felice [214], no sentido de que temos uma solução analítica válida em todo o intervalo $0 < \omega < \infty$ e $|m| \leq l$, contrariamente aos resultados apresentados na literatura [214], que foram obtidos para alto momento angular e baixa energia (frequência).

4.6.4.2 O espaço-tempo de Schwarzschild

Neste caso, a métrica dada pela Eq. (4.1) se reduz a forma de Schwarzschild quando tomamos $a = Q_e = Q_m = 0$:

$$\Delta = r^2 - 2Mr, \quad (4.149)$$

$$r_h = 2M. \quad (4.150)$$

Assim, temos

$$k_0^2 = \omega^2 - \mu_0^2, \quad (4.151)$$

$$\gamma_0 = \frac{M\mu_0^2 - 2M\omega^2}{(\omega^2 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.152)$$

Portanto, a solução analítica para a onda parcial regular possui a seguinte forma assintótica

$$R_l(r) \sim C_l \frac{1}{r} \sin \left[k_0 r - \gamma_0 \ln r - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l(\omega) \right], \quad (4.153)$$

onde $\lambda = l(l+1)$ e o deslocamento de fase, σ_l , é dado por

$$\sigma_l(\omega) = \arg \Gamma(l+1 + i\gamma_0). \quad (4.154)$$

A solução dada pela Eq. (4.153) é exatamente a solução obtida por Kofinti [215].

Mais uma vez, considerando um campo escalar sem massa, temos

$$k_0 = \omega, \quad (4.155)$$

$$\gamma_0 = -2M\omega, \quad (4.156)$$

$$R_l(r) \sim C_l \frac{1}{r} \sin \left[\omega r + 2M\omega \ln r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(\omega) \right]. \quad (4.157)$$

Esta é exatamente a solução obtida por Sanchez [216], onde o deslocamento de fase $\delta_l(\omega)$ foi obtido pela aproximação JWKB.

Finalmente, a partir da Eq. (4.120), as frequências ressonantes para campos escalares, sem massa, no espaço-tempo de Schwarzschild são dadas por

$$\omega_n = \frac{i}{4M}(n+1), \quad (4.158)$$

com $n \geq 0$.

4.7 Conclusões parciais

Apresentamos soluções exatas e gerais para ambas as partes, angular e radial, da equação covariante de Klein-Gordon, para um campo escalar massivo carregado no espaço-tempo de Kerr-Newman-Kasuya (buraco negro *dyon*) com uma corda cósmica passando através dele e situada ao longo do seu eixo de simetria.

Obtemos soluções analíticas válidas em todo o espaço-tempo, isto é, na região entre o horizonte de eventos e o infinito, diferentemente dos resultados obtidos em [200] (se tomarmos $Q_m = 0$) que são válidos apenas em regiões assintóticas, a saber, muito próximo do horizonte de eventos e muito longe do buraco negro. A solução radial é dada em termos das funções confluentes de Heun e são válidas em de todo o intervalo $0 \leq x < \infty$. Em relação a solução da parte angular, ela também é dada em termos das funções confluentes de Heun.

A partir dessas soluções analíticas, correspondentes a parte radial, obtemos as soluções de ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) das proximidades do horizonte de eventos exterior do espaço-tempo em consideração, e usamos estes resultados para discutir o efeito da radiação Hawking, levando em consideração as propriedades das funções confluentes de Heun. Esta abordagem possui a vantagem que não é necessário introduzir nenhum sistema de coordenadas, como por exemplo, o particular usado em [201, 202, 203]. Como a velocidade angular de arrasto no horizonte de eventos exterior, $\Omega_{+,b}$, depende da conicidade, esta quantidade codifica a presença da corda cósmica e, de fato, é amplificada pela presença desse defeito topológico.

Aqui também foi obtida a expressão geral para o fluxo de energia de partículas escalares massivas carregadas, que é dada em termos da função polilogarítmica.

Do ponto de vista local, o campo gravitacional associado com o buraco negro de Kerr-Newman-Kasuya com uma corda cósmica permanece axialmente simétrico. Mas, globalmente, esta simetria foi quebrada e este fato produz algumas modificações nos estados físicos das partículas. A função de onda depende do parâmetro b , que codifica a presença da corda, e como consequência todas as outras quantidades físicas são também influenciadas pela presença da corda cósmica.

Usamos as funções confluentes de Heun para investigar alguns processos associados com campos escalares, como a existência de frequências ressonantes e o fenômeno do espalhamento. Devido as dificuldades em obter expressões analíticas no espaço-tempo em consideração, particularizamos para casos especiais, a saber, os buracos negros de Kerr e Schwarzschild, para campos escalares sem massa, e nestes casos obtivemos resultados analíticos que recuperam os bem conhecidos resultados da literatura [211, 212, 213, 214, 215, 216].

Parte III

Buracos negros astrofísicos

5 Campos escalares sem massa nos espaços-tempos de Ernst

The love I feel as I fly endlessly through space ...

Neste capítulo aplicamos as funções confluentes de Heun para estudar as frequências ressonantes (quasi-espectro), a radiação Hawking e o processo de espalhamento de ondas escalares no espaço-tempo gerado por um buraco negro de Reissner-Nordström em um campo magnético externo (espaço-tempo de Ernst). As soluções para as partes angular e radial da equação de Klein-Gordon são obtidas exatamente, para campos sem massa. O caso especial do buraco negro de Schwarzschild em um campo magnético externo é analisado e as soluções obtidas. Neste caso especial, as frequências ressonantes, a radiação Hawking e o espalhamento são estudados. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [195].

5.1 Equação de movimento na métrica de Reissner-Nordström em um campo magnético externo

O espaço-tempo gerado por um buraco negro com carga elétrica Q em um campo magnético externo, que corresponde efetivamente ao buraco negro de Reissner-Nordström em um campo magnético externo, é dado pela métrica de Ernst [217], cujo elemento de linha possui a seguinte forma

$$ds^2 = |\Lambda|^2 \left(-\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\theta^2 \right) + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{|\Lambda|^2} (d\phi - \omega' dt)^2, \quad (5.1)$$

com

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad (5.2)$$

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{4} B_0^2 (r^2 \sin^2 \theta + Q^2 \cos^2 \theta) - i B_0 Q \cos \theta, \quad (5.3)$$

$$\omega' = -\frac{2B_0 Q}{r} + B_0^3 \left[Qr + \frac{1}{2} \frac{Q^3}{r} - \frac{1}{2} \frac{Q}{r} (r^2 - 2Mr + Q^2) \sin^2 \theta \right], \quad (5.4)$$

onde o campo magnético externo é determinado pelo parâmetro B_0 .

A equação da superfície do horizonte de eventos é obtida a partir da condição $\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0$, cujas soluções correspondem aos horizontes de eventos (e de Cauchy) e são dadas por

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Além disso, a área da superfície do horizonte de eventos na presença do campo magnético externo, $\mathcal{A}_{+,B_0}$, é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{+,B_0} &= \int \int \sqrt{-g} \, d\theta \, d\phi \Big|_{r=r_+} \\ &= 4\pi r_+^2 \left[1 + B_0^2 \left(\frac{Q}{2} + \frac{r_+^2}{3} \right) \right] + \mathcal{O}(B_0^4),\end{aligned}\quad (5.6)$$

onde $g \equiv \det(g_{\sigma\tau}) = -r^4 |\Lambda|^4 \sin^2 \theta$.

A fim de resolver a equação de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa e que não interage com um campo eletromagnético no espaço-tempo em consideração, vamos primeiro imaginar uma situação física real, que corresponde à combinar a solução de Ernst com a solução de Schwarzschild para r grande, o que é feito desprezando termos maiores que B_0^2 . Estes termos são crescentes em regiões muito longe do buraco negro, o que significa que na região assintoticamente longe, o campo gravitacional é divergente. Assim, a equação de Klein-Gordon, dada por (1.34), com $\mu_0 = 0$, pode ser escrita no espaço-tempo dado pela Eq. (5.1) como

$$\begin{aligned}& \left\{ \frac{4B_0 Q r^3}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} - \frac{r^4}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4B_0^2 Q^2 r^2}{\Delta} + B_0^2 (3Q^2 \cot^2 \theta + r^2) \right] \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \Psi = 0.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Consideremos, mais uma vez, pelas mesmas razões apresentadas anteriormente, a solução da Eq. (5.7) como tendo a seguinte forma

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = R(r)S(\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t}, \quad (5.8)$$

onde $m = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ é o número quântico do momento angular e a frequência é tomada positiva, isto é, $\omega > 0$. Substituindo a Eq. (5.8) na Eq. (5.7), encontramos que as funções $S(\theta)$ e $R(r)$ satisfazem as seguintes equações

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 3B_0^2 Q^2 m^2 \cot^2 \theta \right) S = 0 \quad (5.9)$$

e

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{1}{\Delta} (2B_0 Q m r + \omega r^2)^2 - (\lambda + B_0^2 m^2 r^2) \right] R = 0, \quad (5.10)$$

onde λ é uma constante de separação.

5.1.1 A equação angular

A fim de obter a solução analítica da equação angular de Klein-Gordon, vamos realizar uma mudança de variáveis tal que

$$z = \cos^2 \theta, \quad (5.11)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ implica que $0 \leq z \leq 1$. Com esta transformação, a Eq. (5.9) pode ser escrita como

$$\frac{d^2 S(z)}{dz^2} + \left(\frac{1/2}{z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{dS(z)}{dz} + \left[\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} - \frac{(A_3)^2}{(z-1)^2} \right] S(z) = 0, \quad (5.12)$$

onde os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são dados por

$$A_1 = \frac{m^2 - \lambda}{4}, \quad (5.13)$$

$$A_2 = \frac{\lambda - m^2}{4}, \quad (5.14)$$

$$A_3 = i \frac{(3B_0^2 m^2 Q^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}}{2}. \quad (5.15)$$

Esta equação para a variável dependente $S(z)$ é convertida em uma equação do tipo de Heun para U , por uma *transformação F-homotópica* do tipo

$$S(z) = (z-1)^{A_3} U(z). \quad (5.16)$$

Explicitamente, o resultado da aplicação da Eq. (5.16) à equação angular escrita na forma dada pela Eq. (5.12) é a obtenção da seguinte equação para $U(z)$

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \left(\frac{1/2}{z} + \frac{2A_3+1}{z-1} \right) \frac{dU(z)}{dz} + \left(\frac{A_1 - A_3/2}{z} + \frac{A_2 + A_3/2}{z-1} \right) U(z) = 0. \quad (5.17)$$

Assim, a solução geral exata, linearmente independente, da equação angular de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa no buraco negro de Reissner-Nordström em um campo magnético externo (espaço-tempo de Ernst), pode ser escrita como

$$S(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z) \}, \quad (5.18)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\alpha = 0, \quad (5.19)$$

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad (5.20)$$

$$\gamma = im(3B_0^2 Q^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.21)$$

$$\delta = 0, \quad (5.22)$$

$$\eta = \frac{1}{4}(1 - m^2 + \lambda). \quad (5.23)$$

5.1.2 A equação radial

Agora, a fim de obter a solução analítica da equação radial de Klein-Gordon, vamos usar a Eq. (5.5) para escrever a Eq. (5.10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r-r_+} + \frac{1}{r-r_-} \right) \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{(r-r_+)(r-r_-)} \\ & \times \left\{ r(4B_0mQ + r_+\omega + r_-\omega)\omega - r^2(B_0^2m^2 - \omega^2) + 4 \left[B_0mQ - \frac{\omega}{2}(r_+ + r_-) \right]^2 \right. \\ & \left. - \omega^2 r_+ r_- - \lambda + \frac{(2B_0mQr_+ + \omega r_+^2)^2}{(r-r_+)(r_+ - r_-)} + \frac{(2B_0mQr_- + \omega r_-^2)^2}{(r-r_-)(r_- - r_+)} \right\} R(r) = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Visto que esta equação possui singularidades em $r = \{r_+, r_-, \infty\}$, pela substituição homográfica

$$x = \frac{r - r_+}{r_- - r_+}, \quad (5.25)$$

trazemos a Eq. (5.24) para a forma de uma equação de Heun, a saber,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dR(x)}{dx} \\ & + \left[-(D_1)^2 + \frac{D_2}{x} + \frac{D_3}{x-1} - \frac{(D_4)^2}{x^2} - \frac{(D_5)^2}{(x-1)^2} \right] R(x) = 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde os coeficientes D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5 são expressos como

$$D_1 = i(r_+ - r_-)(\omega^2 - B_0^2m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} D_2 = & -\frac{2r_+^2\omega(2B_0mQr_+ - 6B_0mQr_- + r_+^2\omega)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & + \frac{B_0^2m^2r_+(8Q^2r_- + r_+^3 - 2r_+^2r_- + r_+r_-^2)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & + \frac{4r_+^3r_-\omega^2 + \lambda(r_+ - r_-)^2}{(r_+ - r_-)^2}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} D_3 = & -\frac{2r_-^2\omega(6B_0mQr_+ - 2B_0mQr_- - r_-^2\omega)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{B_0^2m^2r_-(8Q^2r_+ + r_+^2r_- - 2r_+r_-^2 + r_-^3)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{4r_-^3r_+\omega^2 + \lambda(r_+ - r_-)^2}{(r_+ - r_-)^2}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$D_4 = i \frac{(2B_0mQr_+ + \omega r_+^2)}{r_+ - r_-}, \quad (5.30)$$

$$D_5 = i \frac{(2B_0mQr_- + \omega r_-^2)}{r_+ - r_-}. \quad (5.31)$$

Tendo, então, movido as singularidades para os pontos $x = \{0, 1\}$, agora aplicamos a forma especializada da *transformação s-homotópica* da variável dependente $R(x) \mapsto U(x)$, a saber,

$$R(x) = e^{D_1 x} x^{D_4} (x - 1)^{D_5} U(x). \quad (5.32)$$

Usando esta transformação, a Eq. (5.26) se torna uma equação para $U(x)$, que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \left(2D_1 + \frac{2D_4 + 1}{x} + \frac{2D_5 + 1}{x - 1} \right) \frac{dU(x)}{dx} \\ & + \left[\frac{D_2(r_- - r_+) + (2D_4 + 1)(-D_5 + D_1) - D_4}{x} \right. \\ & \left. + \frac{D_3(r_- - r_+) + (2D_5 + 1)(D_4 + D_1)}{x - 1} + \frac{D_5}{x - 1} \right] U(x) = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Assim, a solução geral exata, linearmente independente, da equação radial de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Ernst, em todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R(x) = & e^{\frac{1}{2}\alpha x} x^{\frac{1}{2}\beta} (x - 1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{ C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) \\ & + C_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; x) \}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\alpha = 2i(r_+ - r_-)(\omega^2 - B_0^2 m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.35)$$

$$\beta = 2i \frac{(2B_0 m Q r_+ + \omega r_+^2)}{r_+ - r_-}, \quad (5.36)$$

$$\gamma = 2i \frac{(2B_0 m Q r_- + \omega r_-^2)}{r_+ - r_-}, \quad (5.37)$$

$$\delta = (r_+ - r_-)(r_+ + r_-)(B_0^2 m^2 - 4B_0 m Q \omega - 2\omega^2), \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{2r_+^2 \omega (2B_0 m Q r_+ - 6B_0 m Q r_- + r_+^2 \omega)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{B_0^2 m^2 r_+ (8Q^2 r_- + r_+^3 - 2r_+^2 r_- + r_+ r_-^2)}{(r_+ - r_-)^2} \\ & - \frac{4r_+^3 r_- \omega^2 + \lambda(r_+ - r_-)^2}{(r_+ - r_-)^2}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Note a dependência de ambas as soluções, angular e radial, em relação ao parâmetro B_0 , associado com o campo magnético externo.

5.2 Frequências ressonantes

Impondo a assim chamada condição- δ , dada pela Eq. (2.55), à parte radial $R(r)$ da Eq. (5.8), obtemos a seguinte expressão para as frequências ressonantes

$$\frac{M(B_0^2 m^2 - 4B_0 m Q \omega - 2\omega^2)}{(B_0^2 m^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{i}{2} \left[\left(\frac{\omega}{\kappa_+} + \frac{\omega}{\kappa_-} \right) + \left(\frac{\omega_{+,B_0}}{\kappa_+} + \frac{\omega_{-,B_0}}{\kappa_-} \right) \right] = -(n+1), \quad (5.40)$$

onde

$$\kappa_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{r_{\pm}^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_{\pm}} = \frac{1}{2} \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{r_{\pm}^2}, \quad (5.41)$$

$$\omega_{\pm, B_0} = m \tilde{\Omega}_{\pm, B_0}, \quad (5.42)$$

$$\tilde{\Omega}_{\pm, B_0} = - \frac{g_{03}}{g_{33}} \Big|_{r=r_{\pm}} = \frac{2B_0 Q}{r_{\pm}} + \mathcal{O}(B_0^3). \quad (5.43)$$

Não conseguimos obter uma expressão analítica para ω_n a partir da Eq. (5.40), entretanto, existem vários métodos numéricos que podem ser usados para obter expressões aproximadas para cada nível de energia [209].

5.3 Espalhamento

Se considerarmos as séries assintóticas dadas pela Eq. (4.127), a função de onda radial pode ser escrita como

$$R_{\lambda}(x) \sim C_{\lambda} \frac{1}{x} \sin \left[-i \frac{1}{2} \alpha x + i \frac{\delta}{\alpha} \ln x + \sigma_{\lambda}(\omega) \right], \quad (5.44)$$

onde $\sigma_{\lambda}(\omega)$ é o deslocamento de fase.

A partir das Eqs. (5.35) e (5.38), obtemos

$$-i \frac{\alpha}{2} = k_{0, B_0} (r_+ - r_-), \quad (5.45)$$

$$i \frac{\delta}{\alpha} = \gamma_{0, B_0}, \quad (5.46)$$

onde

$$k_{0, B_0}^2 \equiv \omega^2 - B_0^2 m^2, \quad (5.47)$$

$$\gamma_{0, B_0} \equiv \frac{M B_0^2 m^2 - 4M B_0 m Q \omega - 2M \omega^2}{(\omega^2 - B_0^2 m^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.48)$$

Portanto, a solução de onda parcial possui a seguinte forma assintótica

$$R_{\lambda}(r) \sim C_{\lambda} \frac{1}{r} \sin [k_{0, B_0} r - \gamma_{0, B_0} \ln r + \sigma_{\lambda}(\omega)]. \quad (5.49)$$

Estas soluções, para campos escalares em regiões muito afastadas do buraco negro, são úteis para investigar o espalhamento de partículas escalares, sem massa. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que estamos usando a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon, no espaço-tempo em consideração.

De fato, o deslocamento de fase, σ_λ , não é uma função simples de λ e, assim, a expressão exata para a amplitude de espalhamento não pode ser obtida. Entretanto, uma forma aproximada é mostrada, por exemplo, por Abramov *et al.* [210].

5.4 Radiação Hawking

A solução radial dada pela Eq. (5.34) possui o seguinte comportamento assintótico no horizonte de eventos exterior r_+ :

$$R(r) \sim C_1 (r - r_+)^{\frac{\beta}{2}} + C_2 (r - r_+)^{-\frac{\beta}{2}}, \quad (5.50)$$

onde todas as constantes envolvidas estão incluídas em C_1 e C_2 .

A partir da Eq. (5.36), o parâmetro β pode ser escrito como

$$\frac{\beta}{2} = \frac{i}{2\kappa_+}(\omega + \omega_{0,B_0}) = \frac{i}{2\kappa_+}\tilde{\omega}, \quad (5.51)$$

onde $\omega_{0,B_0} = m\tilde{\Omega}_{+,B_0}$, sendo a superfície de gravidade no horizonte de eventos, κ_+ , e a ‘velocidade angular de arrasto no horizonte de eventos exterior’, $\tilde{\Omega}_{+,B_0}$, dadas pelas Eqs. (5.41) e (5.43), respectivamente.

Portanto, considerando a dependência temporal, na superfície do horizonte de eventos exterior do buraco negro, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são descritas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}\tilde{\omega}} \quad (5.52)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega t} (r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}\tilde{\omega}}. \quad (5.53)$$

Estas soluções dependem do parâmetro B_0 , de tal forma que a energia total das partículas radiadas é diminuída devido à presença do campo magnético externo.

Seguindo o mesmo procedimento desenvolvido nos capítulos anteriores, a probabilidade relativa de espalhamento da onda escalar na superfície do horizonte de eventos, Γ_+ , e o espectro da radiação Hawking de partículas escalares, $|N_\omega|^2$, são dados, respectivamente, por

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}\tilde{\omega}} \quad (5.54)$$

e

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_+}\tilde{\omega}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar}{k_B T_+}(\omega + \omega_{0,B_0})} - 1}, \quad (5.55)$$

com $T_+ = \hbar\kappa_+/2\pi k_B$ sendo a temperatura da radiação Hawking.

Portanto, podemos ver que o espectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares possui um caráter térmico. Vale a pena notar que a energia total das partículas escalares radiadas é diminuída devido à presença do campo magnético externo, mais precisamente, isto dá origem a uma espécie de ‘velocidade angular de arrasto no horizonte de eventos exterior’, $\tilde{\Omega}_{+,B_0}$, em comparação com o cenário sem um campo magnético externo, examinado no Capítulo 4.

5.5 Caso especial: espaço-tempo de Schwarzschild em um campo magnético externo

Examinemos, agora, o caso especial de um buraco negro sem carga $Q = 0$. Assim, a métrica dada pela Eq. (5.1) se reduz a forma de Schwarzschild permeada por um campo magnético. Consequentemente, temos que

$$\Delta = r^2 - 2Mr, \quad (5.56)$$

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{4}B_0^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (5.57)$$

$$\omega' = 0, \quad (5.58)$$

$$r_+ = 2M, \quad (5.59)$$

$$r_- = 0. \quad (5.60)$$

Então, a partir das Eqs.(5.9)-(5.10), obtemos

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(\lambda_{lm} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) S = 0, \quad (5.61)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2 r^4}{\Delta} - (\lambda_{lm} + B_0^2 m^2 r^2) \right] R = 0. \quad (5.62)$$

Portanto, a solução geral exata para a equação angular, $S = S(\theta)$, é dada por

$$S(\theta) = C_1 P_l^m(\cos \theta) + C_2 Q_l^m(\cos \theta), \quad (5.63)$$

onde $P_l^m(\cos \theta)$ e $Q_l^m(\cos \theta)$ são as funções associadas de Legendre, com $\lambda_{lm} = l(l+1)$. De fato, visto que $Q_l^m(\pm 1) = \infty$, devemos tomar C_2 de forma que tenhamos apenas a solução regular para o caso angular.

Para a equação radial, a solução geral exata pode ser escrita como segue

$$R(x) = e^{\frac{1}{2}\alpha x} x^{\frac{1}{2}\beta} (x-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) + C_2 x^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; x)\}, \quad (5.64)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\alpha = 4iM(\omega^2 - B_0^2 m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.65)$$

$$\beta = 4iM\omega, \quad (5.66)$$

$$\gamma = 0, \quad (5.67)$$

$$\delta = 4M^2(B_0^2 m^2 - 2\omega^2), \quad (5.68)$$

$$\eta = -(\delta + \lambda_{lm}). \quad (5.69)$$

Assim, as frequências ressonantes e a expressão da onda parcial regular para campos escalares sem massa, neste espaço-tempo, são dadas por

$$\omega - \frac{2\omega^2 - B_0^2 m^2}{2(\omega^2 - B_0^2 m^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{2M}(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.70)$$

$$R_\lambda(r) \sim C_l \frac{1}{r} \sin[k_{0,B_0} r - \gamma_{0,B_0} \ln r + \delta_l(\omega)], \quad (5.71)$$

com

$$k_{0,B_0}^2 \equiv \omega^2 - B_0^2 m^2, \quad (5.72)$$

$$\gamma_{0,B_0} \equiv \frac{MB_0^2 m^2 - 2M\omega^2}{(\omega^2 - B_0^2 m^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.73)$$

onde o deslocamento de fase $\delta_l(\omega)$ pode ser obtido por métodos numéricos, como é mostrado, por exemplo, por Chen *et al.* [218].

A probabilidade relativa de espalhamento e o espectro da radiação Hawking, neste caso, são dados, respectivamente, por

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_+} \omega} \quad (5.74)$$

e

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T_+}} - 1}. \quad (5.75)$$

Portanto, para um buraco negro de Schwarzschild em um campo magnético externo, o espectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares também possui um caráter térmico. Uma característica interessante deste caso é que a energia total das partículas escalares radiadas não é afetada pelo campo magnético externo.

5.6 Conclusões parciais

Usamos as funções confluentes de Heun para investigar alguns processos físicos associados com campos escalares, sem massa, no caso de um buraco negro de Reissner-Nordström em um campo magnético externo (espaço-tempo de Ernst).

Novamente, como no Capítulo 4, a radiação Hawking, as frequências ressonantes e o processo de espalhamento foram investigados. Para estes dois últimos fenômenos, os resultados obtidos não nos permite encontrar expressões analíticas. A fim de contornar esta dificuldade, consideramos o caso especial correspondente ao buraco negro de Schwarzschild em um campo magnético externo, para o qual obtemos uma expressão analítica para a onda parcial regular, o que está de acordo com o resultado encontrado na literatura [218].

6 Frequências ressonantes e efeito Hawking de um monopolo global em $f(R)$

Lost in time, I wonder will my ship be found
On this sinking ship I travel ...

Neste capítulo, campos escalares são analisados no campo gravitacional produzido pelo buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global, na gravidade $f(R)$. A solução exata da parte radial da equação de Klein-Gordon neste espaço-tempo é obtida e dada em termos das funções gerais de Heun. Aplicamos as propriedades das funções gerais de Heun para estudar a radiação Hawking e as frequências ressonantes de partículas escalares. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [219].

6.1 Buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global na gravidade $f(R)$

A ação associada com uma teoria de gravidade $f(R)$ acoplada com campos de matéria pode ser escrita, a partir da Eq. (1.1), como

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} f(R) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g}, \quad (6.1)$$

onde $f(R)$ é uma função analítica do escalar de Ricci. Variando esta ação em relação à métrica, as equações de campo são dadas por

$$R_{\mu\nu} \frac{df(R)}{dR} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \frac{df(R)}{dR} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento devido aos campos de matéria. Para um monopolo global, bem distante de seu núcleo, este tensor pode ser aproximado por

$$T_\mu^\nu \approx \text{diag} \frac{\eta^2}{r^2} (1, 1, 0, 0), \quad (6.3)$$

onde o parâmetro η está relacionado com o valor esperado do vácuo assumido pelo campo escalar sob uma transição de fase. No que segue, vamos admitir que $\eta^2 \ll 1$.

Assim, a métrica gerada por um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico na gravidade $f(R)$ corresponde ao buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global, cujo elemento de linha é dado por [220]

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.4)$$

com

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - 8\pi\eta^2 - \psi_0 r, \quad (6.5)$$

onde M é a massa total do monopolo. O desvio da relatividade geral é indicado pela constante ψ_0 , que admitimos possuir valores tais que $|\psi_0 r| \ll 1$, na equação de vínculo da aproximação de campo fraco $df(R)/dR = 1 + \psi_0 r$.

A equação da superfície do horizonte de eventos é obtida a partir da Eq. (6.5), a saber, sob a condição

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0. \quad (6.6)$$

As soluções da Eq. (6.6) são dadas por

$$r_{\pm} = \frac{1 - 8\pi\eta^2 \pm \sqrt{(1 - 8\pi\eta^2)^2 - 8M\psi_0}}{2\psi_0}, \quad (6.7)$$

e correspondem aos horizontes de eventos do espaço-tempo em consideração; r_- é o horizonte de eventos interior e r_+ é o horizonte de eventos cosmológico.

6.2 Solução exata da equação de Klein-Gordon

Agora, vamos considerar a equação covariante de Klein-Gordon para um campo escalar massivo em um espaço-tempo curvo, dada por (1.34). Assim, substituindo a Eq. (6.4) na Eq. (1.34), obtemos

$$\left[-\frac{r^2}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) - \mathbf{L}^2 - \mu_0^2 r^2 \right] \Psi = 0, \quad (6.8)$$

onde $\mathbf{L}^2$ é o operador momento angular, a saber,

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (6.9)$$

e as unidades $G \equiv c \equiv \hbar \equiv k_B \equiv 1$ foram escolhidas. Devido à independência temporal e simetria do espaço-tempo em consideração em relação à rotação, a solução da Eq. (6.8) pode ser escrita na forma

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (6.10)$$

onde $Y_l^m(\theta, \phi)$ são os conhecidos harmônicos esféricos, com $l = \{0, 1, 2, \dots\}$ sendo o número quântico orbital e $|m| \leq l$ é o número quântico azimutal. A energia (frequência) é tomada como sendo positiva, $\omega > 0$, o que corresponde a um fluxo de partículas para o infinito.

Substituindo a Eq. (6.10) na Eq. (6.8), encontramos que

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{r^2 \omega^2}{\Delta} - \lambda_{lm} - \mu_0^2 r^2 \right) R = 0, \quad (6.11)$$

onde $\lambda_{lm} = l(l+1)$ é uma constante de separação.

6.2.1 Equação radial

Agora, vamos obter a solução geral e exata da parte radial da equação de Klein-Gordon (6.11). Para fazer isso, vamos usar a Eq. (6.6) e escrever a Eq. (6.11) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r-r_+} + \frac{1}{r-r_-} \right) \frac{dR}{dr} \\ & + \frac{1}{r(r-r_+)(r-r_-)} \left[-\mu_0^2 r - \frac{\lambda_{lm}}{r} + \frac{r_+ \omega^2}{(r_+ - r_-)} \frac{1}{r-r_+} - \frac{r_- \omega^2}{(r_+ - r_-)} \frac{1}{r-r_-} \right] R = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Esta equação possui singularidades em $r = \{a_1, a_2, a_3, a_\infty\} = \{r_-, r_+, 0, \infty\}$. A transformação da Eq. (6.12) para uma equação do tipo de Heun é obtida fazendo

$$x = \frac{r - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{r - r_-}{r_+ - r_-}, \quad (6.13)$$

que transforma $\{a_1, a_2\} \mapsto \{0, 1\}$ e a singularidade remanescente é transformada para $x = a$, onde

$$a \equiv \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{-r_-}{r_+ - r_-}. \quad (6.14)$$

Esta é uma substituição homográfica que possui o seguinte regime assintótico: $x \rightarrow 0 \Rightarrow r \rightarrow r_-$ e $x \rightarrow \infty \Rightarrow r \rightarrow \infty$. Então, podemos ver que esta transformação cobre toda a região do espaço-tempo do buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global, na gravidade $f(R)$.

Assim, podemos escrever a Eq. (6.12) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-a} \right) \frac{dR}{dx} \\ & + \left\{ \frac{2a^2 \omega^2 + \mu_0^2 r_-^2 + \lambda_{lm}}{r_-^2} \frac{1}{x} + \frac{-(2a^2 \omega^2 + \mu_0^2 r_-^2)(a-1)^2 - a^2 \lambda_{lm}}{(a-1)^2 r_-^2} \frac{1}{x-1} \right. \\ & \left. + \frac{(2a-1)\lambda_{lm}}{(a-1)^2 r_-^2} \frac{1}{x-a} + \frac{a^2 \omega^2}{r_-^2} \frac{1}{x^2} + \frac{a^2 \omega^2}{r_-^2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{a \lambda_{lm}}{(a-1)r_-^2} \frac{1}{(x-a)^2} \right\} R = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Agora, vamos realizar uma transformação a fim de reduzir as potências dos termos proporcionais a $1/x^2$, $1/(x-1)^2$ e $1/(x-a)^2$. Esta transformação é a *transformação F-homotópica* da variável dependente, $R(x) \mapsto U(x)$, tal que

$$R(x) = x^{A_1} (x-1)^{A_2} (x-a)^{A_3} U(x), \quad (6.16)$$

onde os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são dados por

$$A_1 = \frac{ia\omega}{r_-}, \quad (6.17)$$

$$A_2 = \frac{ia\omega}{r_-}, \quad (6.18)$$

$$A_3 = \frac{\{(a-1)r_-^2[4a\lambda_{lm} + (a-1)r_-^2]\}^{1/2} - r_-^2(a-1)}{2(a-1)r_-^2}. \quad (6.19)$$

A função $U(x)$ satisfaz a seguinte equação

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \left[\frac{2A_1+1}{x} + \frac{2A_2+1}{x-1} + \frac{2(A_3+1)}{x-a} \right] \frac{dU}{dx} + \frac{A_4x - A_5}{x(x-1)(x-a)} U = 0, \quad (6.20)$$

onde os coeficientes A_4 e A_5 são dados por

$$A_4 = \frac{(a-1)[r_-^2 A_2(2A_3+3) + 2r_-^2 A_3 - \mu_0^2 r_-^2] + a\lambda_{lm}}{(a-1)r_-^2} + \frac{(a-1)[r_-^2 A_1(2A_2+2A_3+3) - 2a^2\omega^2]}{(a-1)r_-^2}, \quad (6.21)$$

$$A_5 = A_3 + A_1(2aA_2 + a + 2A_3 + 2) + a \left(A_2 - \mu_0^2 - \frac{\lambda_{lm}}{r_-^2} \right) - \frac{2a^3\omega^2}{r_-^2}. \quad (6.22)$$

A Eq. (6.20) é análoga à equação geral de Heun, dada por (2.3). Assim, a solução geral da parte radial da equação de Klein-Gordon, para uma partícula escalar massiva, no espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild com monopolo global, na gravidade $f(R)$, dada pela Eq. (6.15), válida na região exterior do horizonte de eventos r_- , pode ser escrita como

$$R(x) = x^{\frac{1}{2}(\gamma-1)}(x-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)}(x-a)^{\frac{1}{2}(\epsilon-2)} \{C_1 \text{HeunG}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x) + C_2 x^{1-\gamma} \text{HeunG}(a, q_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta; x)\}, \quad (6.23)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ , ϵ e q são, agora, dados por

$$\alpha = \frac{[4a\lambda_{lm}(a-1) + (a-1)^2 r_-^2]^{1/2} + [(4\mu_0^2 + 9)(a-1)^2 r_-^2]^{1/2}}{2(a-1)r_-} + \frac{4ia\omega(a-1) + 2(a-1)r_-}{2(a-1)r_-}, \quad (6.24)$$

$$\beta = \frac{[4a\lambda_{lm}(a-1) + (a-1)^2 r_-^2]^{1/2} - [(4\mu_0^2 + 9)(a-1)^2 r_-^2]^{1/2}}{2(a-1)r_-} + \frac{4ia\omega(a-1) + 2(a-1)r_-}{2(a-1)r_-}, \quad (6.25)$$

$$\gamma = 1 + \frac{2ia\omega}{r_-}, \quad (6.26)$$

$$\delta = 1 + \frac{2ia\omega}{r_-}, \quad (6.27)$$

$$\epsilon = \frac{[4a\lambda_{lm}(a-1) + (a-1)^2 r_-^2]^{1/2} + (a-1)r_-}{(a-1)r_-}, \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
q = & \frac{2a\{\omega\{-4a^2\omega(a-1) + i[4a\lambda_{lm}(a-1) + (a-1)^2r_-^2]^{1/2}\} + \lambda_{lm}(1-a)\}}{2(a-1)r_-^2} \\
& + \frac{r_-\{4ia^3\omega - 2ia\omega(a+1) + [4a\lambda_{lm}(a-1) + (a-1)^2r_-^2]^{1/2}\}}{2(a-1)r_-^2} \\
& + \frac{r_-^2(1-a)(2a\mu_0^2 - 1)}{2(a-1)r_-^2}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Os parâmetros α_1 , β_1 , γ_1 e q_1 são dados por

$$\alpha_1 = \alpha + 1 - \gamma, \tag{6.30}$$

$$\beta_1 = \beta + 1 - \gamma, \tag{6.31}$$

$$\gamma_1 = 2 - \gamma, \tag{6.32}$$

$$q_1 = q + (\alpha\delta + \epsilon)(1 - \gamma). \tag{6.33}$$

Neste ponto, podemos comparar o resultado aqui obtido com aqueles que obtivemos nas Refs. [191, 198]. Primeiro, é importante prestar atenção à diferença entre a forma funcional da solução geral da equação radial obtida analiticamente, dada pela Eq. (6.23) em termos das funções gerais de Heun, e as soluções obtidas, também analiticamente, em [191, 198], dadas pelas suas Eqs. (31) e (78) (ambas no caso $a = Q = e = 0$), respectivamente, em termos das funções confluentes de Heun. É sempre possível reduzir a função geral de Heun a uma função confluyente de Heun por um processo geral de confluência, mas o processo limitador geralmente altera a solução qualitativamente. Então, os resultados nesta tese podem recuperar apenas a forma funcional dos resultados que apresentamos nas Refs. [191, 198].

No que segue, vamos usar esta solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon e as propriedades apresentadas da função geral de Heun para estudar o efeito Hawking e as frequências ressonantes.

6.3 Radiação Hawking

Vamos considerar o campo escalar massivo nas proximidades do horizonte de eventos interior, a fim de discutir a radiação Hawking.

A partir das Eqs. (6.13) e (2.10), podemos ver que a solução radial dada pela Eq. (6.23), próxima do horizonte de eventos interior, isto é, quando $r \rightarrow r_-$ (o que implica que $x \rightarrow 0$), se comporta assintoticamente como

$$R(r) \sim C_1 (r - r_-)^{\frac{1}{2}(\gamma-1)} + C_2 (r - r_-)^{-\frac{1}{2}(\gamma-1)}, \tag{6.34}$$

onde estamos considerando contribuições apenas do primeiro termo na expansão e todas as constantes estão incluídas em C_1 e C_2 . Assim, considerando a dependência temporal, próximo ao horizonte de eventos do buraco negro r_- , esta solução é dada por

$$\Psi = e^{-i\omega t} (r - r_-)^{\pm \frac{1}{2}(\gamma-1)}. \quad (6.35)$$

A partir da Eq. (6.26), obtemos

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{i}{2\kappa_-} \omega, \quad (6.36)$$

onde κ_- é a gravidade na superfície do buraco negro (ou a aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos r_-), dada por

$$\kappa_- \equiv \frac{1}{2r_-^2} \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r=r_-} = \frac{r_- - r_+}{2r_-^2}. \quad (6.37)$$

Portanto, na superfície do horizonte de eventos interior do buraco negro, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são descritas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_-)^{-\frac{i}{2\kappa_-} \omega} \quad (6.38)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_-) = e^{-i\omega t} (r - r_-)^{\frac{i}{2\kappa_-} \omega}. \quad (6.39)$$

Usando a definição das coordenadas *tortoise* e Eddington-Finkelstein (3.36), podemos reescrever Ψ_{out} , nas proximidades do horizonte de eventos interior r_- , como

$$\Psi_{out}(r > r_-) = e^{-i\omega v} (r - r_-)^{\frac{i}{\kappa_-} \omega}. \quad (6.40)$$

Esta solução não é analítica no horizonte de eventos interior r_- . De acordo com o método de Damour-Ruffini [192], por continuação analítica, rotacionando de $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r , a saber,

$$(r - r_-) \rightarrow |r - r_-| e^{-i\pi} = (r_- - r) e^{-i\pi}, \quad (6.41)$$

podemos estender Ψ_{out} de fora para dentro do buraco negro, e obter a taxa de decaimento (ou probabilidade relativa de espalhamento) da onda escalar na superfície do horizonte de eventos interior $r = r_-$:

$$\Gamma_- = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_-)}{\Psi_{out}(r < r_-)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_-} \omega}. \quad (6.42)$$

Esta é a probabilidade relativa de criar um par de partícula-antipartícula do lado de fora do horizonte de eventos interior.

De acordo com a derivação heurística de Sannan [193], o número médio de partículas emitidas em um dado modo, $\bar{N}_\omega$, pode ser obtido a partir da expressão para a probabilidade relativa de espalhamento, Γ_- , como segue:

$$\bar{N}_\omega = \frac{\Gamma_-}{1 - \Gamma_-} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T_-}} - 1}, \quad (6.43)$$

onde

$$T_- = \frac{\kappa_-}{2\pi} = \frac{r_- - r_+}{4\pi r_-^2} \quad (6.44)$$

é a temperatura da radiação Hawking em unidades geométricas. A Eq. (6.43) é exatamente o espectro resultante da radiação Hawking para partículas escalares sendo irradiadas a partir do buraco negro com um monopolo global, na gravidade $f(R)$. Note que as constantes de Boltzmann e Planck foram reintroduzidas.

Portanto, podemos ver que o espectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares possui um caráter térmico, análogo ao espectro de corpo negro, onde $k_B T_- = \hbar\kappa_-/2\pi$.

Integrando o espectro resultante (ou função de distribuição) dado pela Eq. (6.43), sobre todos os valores de ω , podemos obter o fluxo Hawking para partículas escalares massivas. Ele é dado por

$$\text{Flux} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{N}_\omega \omega d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_-} \omega} - 1} = \frac{\kappa_-^2}{48\pi}. \quad (6.45)$$

Novamente, podemos comparar os resultados aqui obtidos com aqueles apresentados na Ref. [191]. A gravidade na superfície do buraco negro, κ_- , e a temperatura da radiação Hawking, T_- , dadas pelas Eqs. (6.37) e (6.44), respectivamente, possuem magnitudes maiores que aquelas obtidas na Ref. [191], dadas pelas suas Eqs. (10) e (110). Então, o número médio de partículas emitidas em um dado modo, $\bar{N}_\omega$, para partículas escalares sendo irradiadas a partir do buraco negro em consideração, é maior do que aquele para um buraco negro de Schwarzschild na relatividade geral. Além disso, estas duas quantidades são negativas no espaço-tempo em que estamos considerando.

6.4 Frequências ressonantes

Seguiremos, agora, a técnica desenvolvida na Seção 4.6.1 para calcular as RFs, neste caso para ondas escalares massivas que se propagam a partir de um buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global, na gravidade $f(R)$.

As RFs estão associadas com a solução dada pela Eq. (6.23) sob certas condições de fronteira, a saber, a solução radial deve ser finita no horizonte de eventos interior e bem comportada assintoticamente no infinito. Esta última condição exige que $R(x)$ deva ter

uma forma polinomial, o que é obtido impondo às funções de Heun a condição- α dada pela Eq. (2.14).

Assim, usando a Eq. (6.24), encontramos que as RFs de uma partícula escalar massiva no espaço-tempo em consideração são dadas por

$$\omega_n = i \left\{ \frac{[4a\lambda_{lm}(a-1) + (a-1)^2 r_-^2]^{1/2} + [(a-1)^2(4\mu_0^2 + 9)r_-^2]^{1/2}}{4(a-1)a} + \frac{2(a-1)(n+1)r_-}{4(a-1)a} \right\}, \quad (6.46)$$

onde o número quântico principal n é um inteiro positivo ou zero.

Esta é uma lei de quantização não-trivial, porque ela fornece um número complexo. Observamos que os autovalores de energia, dados pela Eq. (6.46), são degenerados, visto que existe uma dependência em relação ao autovalor λ_{lm} .

As frequências ressonantes para $n = \{0, 1, 2, 3\}$, $0 \leq l \leq n$, $\psi_0 = 0.02$, $M = 1$ e $\mu_0 = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$ são mostradas nas Tabelas 1 e 2, para dois valores diferentes do parâmetro η , a saber, $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$, respectivamente. Estes são os mesmos conjuntos de valores que foram usados em um recente trabalho nosso para os QNMs (Ver Anexo A).

$a = -0.04554$	$\mu_0 = 0.0$	$\mu_0 = 0.1$	$\mu_0 = 0.2$	$\mu_0 = 0.3$
n	$\Im(\omega_n)$	$\Im(\omega_n)$	$\Im(\omega_n)$	$\Im(\omega_n)$
0	22.9126	22.9888	23.2167	23.5932
1	1.049e-8	0.07629	0.30415	0.68063
2	-22.9126	-22.8363	-22.6084	-22.2319
3	-45.8252	-45.7489	-45.5210	-45.1445

Tabela 1 – Valores das frequências ressonantes para $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ com diferentes valores da massa μ_0 e do número quântico principal n . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

$a = -0.04769$	$\mu_0 = 0.0$	$\mu_0 = 0.1$	$\mu_0 = 0.2$	$\mu_0 = 0.3$
n	$\Im(\omega_n)$	$\Im(\omega_n)$	$\Im(\omega_n)$	$\Im(\omega_n)$
0	22.3662	22.4407	22.6631	23.0306
1	2.501e-8	0.07447	0.29690	0.66440
2	-22.3662	-22.2917	-22.0693	-21.7018
3	-44.7325	-44.6580	-44.4356	-44.0681

Tabela 2 – Valores das frequências ressonantes para $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$ com diferentes valores da massa μ_0 e do número quântico principal n . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

Neste ponto, podemos comparar os resultados aqui obtidos com aqueles vistos no Capítulo 4. As RFs, ω_n , dadas pela Eq. (6.46), decrescem com o número quântico principal, n , para campos escalares sem massa. Por outro lado, as RFs a partir de um buraco negro de Schwarzschild na relatividade geral, dadas pela Eq. (4.158), aumentam com o número

quântico principal n . Além disso, esta quantidade se torna negativa no espaço-tempo em que estamos considerando.

Nas Figuras 1, 2 e 3, apresentamos as frequências ressonantes como funções de l , μ_0 e n , respectivamente, para $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$.

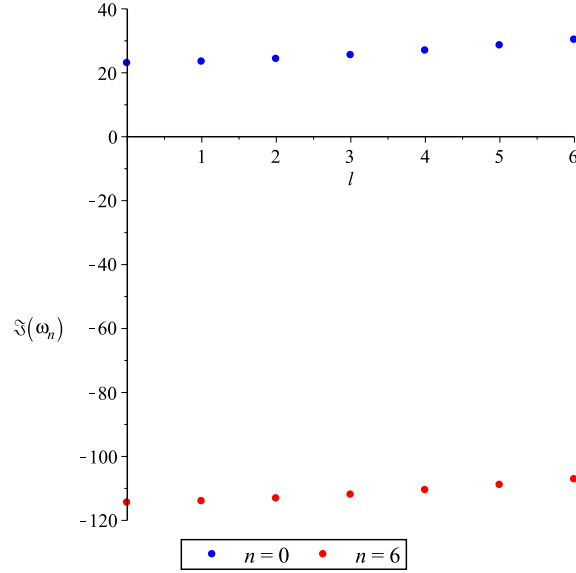


Figura 1 – Frequências ressonantes escalares para $\mu_0 = 0.1$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

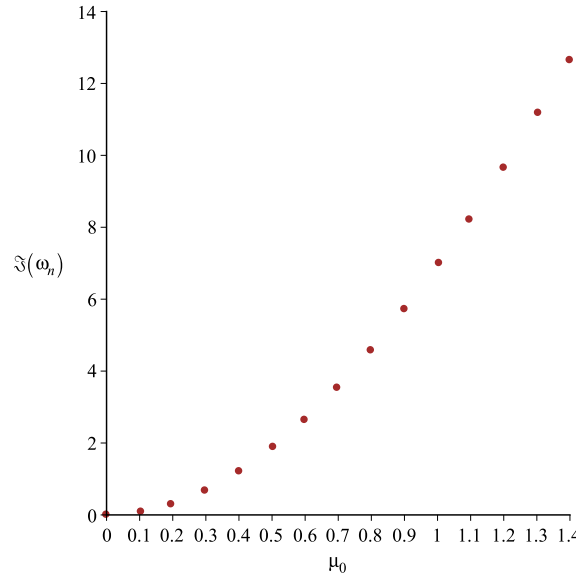


Figura 2 – Frequências ressonantes escalares para $n = 1$, $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

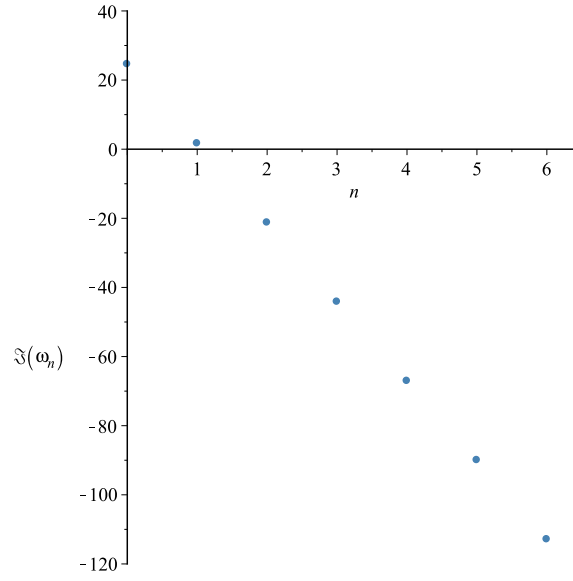


Figura 3 – Frequências ressonantes escalares para $l = 1$, $\mu_0 = 0.4$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

Nas Figuras 4, 5 e 6, apresentamos as frequências ressonantes como funções de l , μ_0 e n , respectivamente, para $8\pi\eta^2 = 0.02$. Este é o mesmo conjunto de variáveis que foi usado na Refs. [221, 222] para os QNMs.

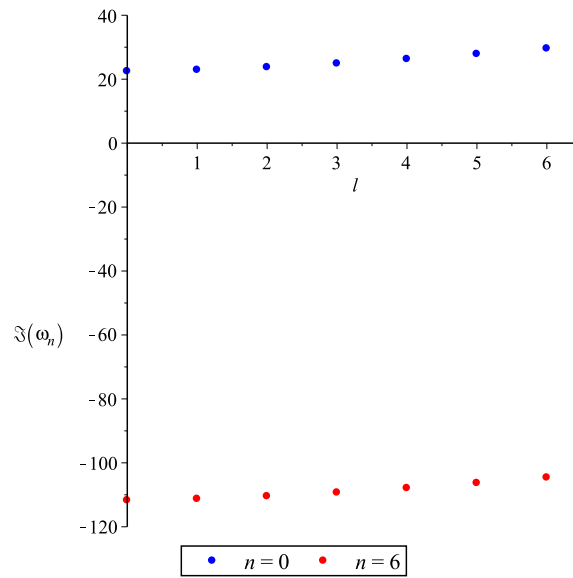


Figura 4 – Frequências ressonantes escalares para $\mu_0 = 0.1$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

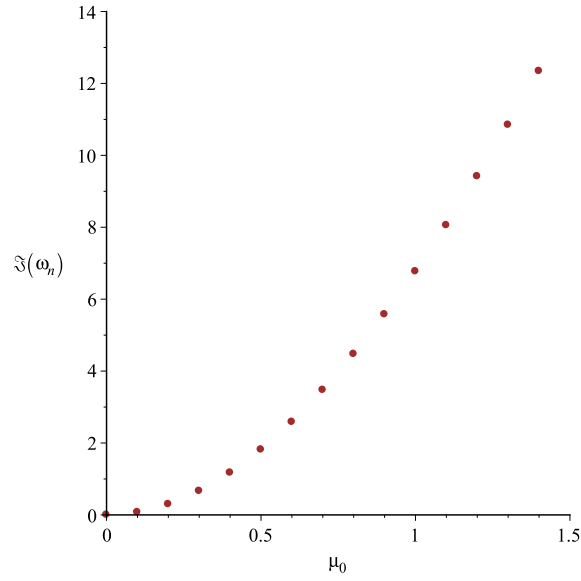


Figura 5 – Frequências ressonantes escalares para $n = 1$, $l = 0$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

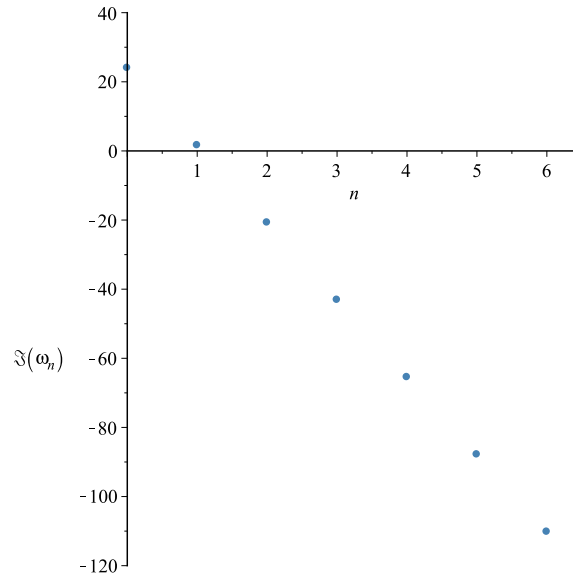


Figura 6 – Frequências ressonantes escalares para $l = 1$, and $\mu_0 = 0.4$, $\psi_0 = 0.02$ e $8\pi\eta^2 = 0.02$. As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

De fato, visto que a singularidade a é uma constante, dada pela Eq. (6.14), as frequências ressonantes, dadas pela Eq. (6.46), não são funções de a . Entretanto, por completeza, vamos analisar o comportamento de $\omega_n(a)$. Isto é mostrado nas Figuras 7 e 8.

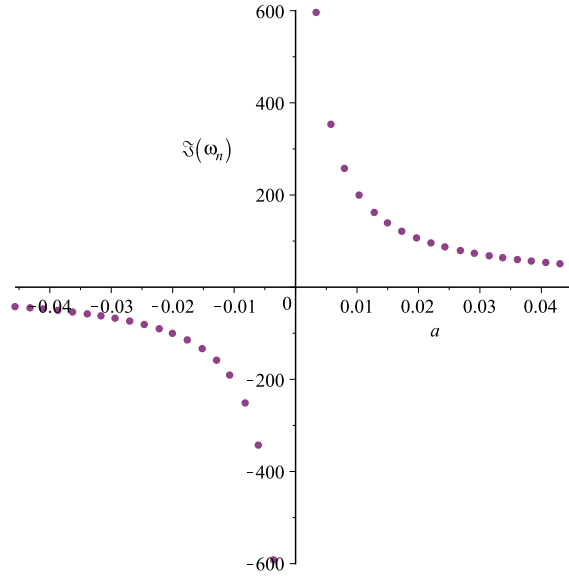


Figura 7 – Valores das frequências ressonantes para o modo $n = 3$, $l = 2$, $\mu_0 = 0.3$, $\psi_0 = 0.02$, $8\pi\eta^2 = 10^{-5}$ para diferentes valores da singularidade a . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

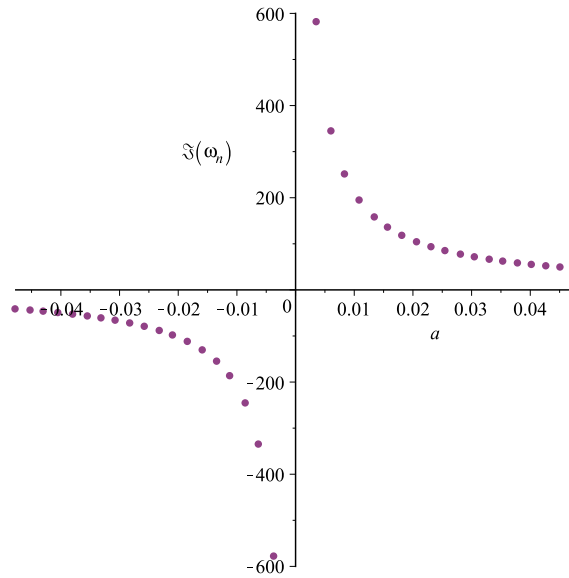


Figura 8 – Valores das frequências ressonantes para o modo $n = 3$, $l = 2$, $\mu_0 = 0.3$, $\psi_0 = 0.02$, $8\pi\eta^2 = 0.02$ para diferentes valores da singularidade a . As unidades são dadas em múltiplos da massa total M .

A partir das Figuras 1-8, podemos concluir que não existe nenhuma diferença relevante nos valores das frequências ressonantes em relação às duas escolhas do parâmetro η .

6.5 Conclusões parciais

Apresentamos a solução exata da parte radial da equação covariante de Klein-Gordon, para um campo escalar massivo, no buraco negro de Schwarzschild com um monopolo global, na gravidade $f(R)$. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles obtidos em nossos trabalhos anteriores.

Usamos as propriedades das funções gerais de Heun para investigar alguns processos associados com campos escalares no espaço-tempo em consideração, tais como a existência de frequências ressonantes e a radiação Hawking.

A partir desta solução analítica, correspondente a parte radial, obtivemos as soluções das ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) das proximidades do horizonte de eventos interior, e usamos estes resultados para discutir o efeito da radiação Hawking. Obtivemos também uma expressão geral para o fluxo de energia de partículas escalares massivas.

E por fim, obtivemos as frequências ressonantes, as quais são um número complexo e nos diz o quão rapidamente a oscilação irá desaparecer. Portanto, usando estes resultados, é possível, em princípio, obter alguma informação sobre a física deste buraco negro.

Parte IV

Buracos negros acústicos

7 Modelos análogos e a radiação Hawking-Unruh

Faster than the speed of light
Not so supernova burns ...

Neste capítulo obtemos soluções analíticas da parte radial da equação de Klein-Gordon, sem massa, no espaço-tempo de ambos os buracos negros acústicos, o tridimensional com rotação e o quadridimensional canônico. Estas soluções são dadas em termos das funções confluentes de Heun. A partir destas, obtemos as ondas escalares nas proximidades do horizonte de eventos acústico. Discutimos a radiação Hawking análoga de partículas escalares sem massa e as propriedades do espectro associado com a radiação emitida por estes buracos negros acústicos. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [223].

7.1 Buraco negro acústico com rotação

A solução que descreve um buraco negro acústico com rotação, em (2+1)-dimensões, foi obtida por Visser [224] e corresponde ao modelo análogo associado com um fluxo de fluido drenado suavemente, com um sumidouro na origem. Note que este fluxo de fluido é constante no tempo e cilindricamente simétrico, e, portanto, representa uma linha de vórtice alinhada ao longo do eixo- z , sem vorticidade e sendo barotrópico e invíscido. A métrica acústica apropriada para representar a geometria efetiva lorentziana deste modelo idealizado de dreno de banheira é dada por [224]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left(dr - \frac{A}{r}dt\right)^2 + \left(r d\phi - \frac{B}{r}dt\right)^2, \quad (7.1)$$

onde A e B são coeficientes relacionados à velocidade do fluxo nas direções radial e angular, respectivamente, e c é a velocidade do som, que é constante ao longo do fluxo de fluido. As propriedades desta métrica se tornam evidentes após uma mudança de coordenadas, definida por

$$dt \rightarrow dt + \frac{|A|r}{c^2 r^2 - A^2} dr, \quad (7.2)$$

$$d\phi \rightarrow d\phi + \frac{B|A|r}{r(c^2 r^2 - A^2)} dr. \quad (7.3)$$

Usando estas novas coordenadas e reescalando a coordenada temporal por c , o elemento de linha que descreve um buraco acústico com rotação pode ser escrito na seguinte forma

$$ds^2 = -\frac{1}{r^2} \left(\Delta - \frac{B^2}{c^2}\right) dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\phi^2 - 2\frac{B}{c} d\phi dt, \quad (7.4)$$

onde

$$\Delta = r^2 - \frac{A^2}{c^2}. \quad (7.5)$$

Tomando g_{00} na Eq. (7.4) igual a zero, obtemos o raio da ergosfera, que é dado por

$$r_e = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{c}. \quad (7.6)$$

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que o sinal de A é irrelevante na definição da ergoesfera e da ergo-região, visto que não importa se o núcleo do vórtice é uma fonte ou um sumidouro. A métrica possui uma singularidade (coordenada), isto é, o horizonte de eventos acústico se forma uma vez que a componente radial da velocidade do fluido excede a velocidade do som, que ocorre em

$$r_h = \frac{|A|}{c}. \quad (7.7)$$

Aqui, o sinal de A deve ser levado em consideração. Para $A < 0$ estamos lidando com um horizonte de eventos acústico futuro, isto é, um buraco negro acústico, enquanto para $A > 0$ estamos lidando com um horizonte de eventos passado, isto é, um buraco branco acústico.

Consequentemente, a partir da Eq. (7.5), temos que a superfície do horizonte de eventos acústico do buraco negro com rotação é obtida da condição

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0, \quad (7.8)$$

cujas soluções são

$$r_+ = r_h, \quad (7.9)$$

$$r_- = -r_h, \quad (7.10)$$

onde r_h é dada pela Eq. (7.7) e $r_{\pm}$ correspondem aos horizontes de eventos acústico (ou de Cauchy) do buraco negro em consideração.

A aceleração gravitacional, κ_h , na superfície do horizonte de eventos do buraco negro acústico, $r_+ = r_h$, é dada por

$$\kappa_h \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{r_h^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_h} = \frac{1}{r_h} = \frac{c}{|A|}. \quad (7.11)$$

Então, um horizonte de eventos acústico emitirá uma radiação Hawking análoga, correspondente a um banho térmico de fônons, na temperatura

$$T_h = \frac{\kappa_h}{2\pi}. \quad (7.12)$$

7.1.1 Soluções analíticas da equação de Klein-Gordon sem massa

No que segue, vamos considerar a equação covariante de Klein-Gordon, dada por (1.34), que descreve o comportamento de campos escalares em um espaço-curvo, neste caso com $\mu_0 = 0$.

Assim, a equação covariante de Klein-Gordon, sem massa, no espaço-tempo de um buraco negro acústico com rotação, dado pelo elemento de linha (7.4), pode ser escrita como

$$\left[-\frac{r^3}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{B^2}{c^2 r \Delta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{2Br}{c\Delta} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial t} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (7.13)$$

De acordo com a presunção de que o espaço-tempo em consideração é estacionário [41] devido ao fato de que o fluxo de fluido é tomado como sendo constante, a dependência temporal que resolve a Eq. (7.13) pode ser separada como $e^{-i\omega t}$, onde ω é a energia das partículas nas unidades escolhidas e estamos considerando que $\omega > 0$. Além disso, sua simetria axial nos permite separar a solução em ϕ como $e^{im\phi}$, onde m é uma constante real. Assim, podemos fazer o seguinte *ansatz*

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = R(r) e^{im\phi} e^{-i\omega t}. \quad (7.14)$$

Substituindo a Eq. (7.14) na Eq. (7.13), encontramos que

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2 r^3}{\Delta} - \frac{m^2}{r} + \frac{m^2 B^2}{c^2 r \Delta} - \frac{2mB\omega r}{c\Delta} \right) R = 0. \quad (7.15)$$

Agora, vamos obter a solução geral e analítica para a parte radial da equação de Klein-Gordon dada pela Eq. (7.15). Para fazer isso, não iremos tomar limites assintóticos, nem assumir qualquer condição sobre a frequência. Pelo contrário, vamos considerar todo o espaço-tempo, assim como todo o intervalo de frequências (ou energias em unidades naturais), isto é, $0 < \omega \leq \infty$. A partir da nossa solução, podemos encontrar a solução em regime de baixas frequências obtida por Lepe *et al.* [89], como um caso particular.

A Eq. (7.15) possui uma singularidade indesejável na origem, o que dificulta consideravelmente sua transformação em uma equação do tipo de Heun. Entretanto, introduzindo uma nova coordenada radial, x , tal que

$$x = \frac{r^2}{2}, \quad (7.16)$$

e usando esta nova coordenada, a Eq. (7.5) se torna

$$\Delta = 2x - \frac{A^2}{c^2}. \quad (7.17)$$

Assim, a partir da Eq. (7.17), temos que a nova superfície do horizonte de eventos do buraco negro acústico é obtida a partir da condição

$$\Delta = 2(x - x_h) = 0, \quad (7.18)$$

onde

$$x_h = \frac{1}{2}r_h^2 \quad (7.19)$$

é a raiz de Δ e corresponde ao novo horizonte de eventos acústico do buraco negro em consideração. Consequentemente, usando a Eq. (7.18), podemos escrever a Eq. (7.15) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x - x_h} \right) \frac{dR}{dx} \\ & + \left[\frac{m^2(B^2 + 2c^2 x_h)}{8c^2 x_h^2} \frac{1}{x} + \frac{-B^2 m^2 - 2c^2 m^2 x_h + 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h^2} \frac{1}{x - x_h} \right. \\ & \left. + \frac{B^2 m^2 - 4Bcmx_h \omega + 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h} \frac{1}{(x - x_h)^2} \right] R = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Esta equação possui singularidades em $x = \{x_1, x_2\} = \{x_h, 0\}$. A transformação da Eq. (7.20) em uma equação do tipo de Heun é conseguida perfazendo a seguinte substituição homográfica

$$z = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{x - x_h}{0 - x_h}. \quad (7.21)$$

Assim, podemos escrever a Eq. (7.20) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR}{dz} \\ & + \left\{ \frac{B^2 m^2 + 2c^2 m^2 x_h - 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h} \frac{1}{z} + \frac{-m^2(B^2 + 2c^2 x_h)}{8c^2 x_h} \frac{1}{z - 1} \right. \\ & \left. - \left[i \left(\frac{2cx_h \omega - mB}{2c\sqrt{2x_h}} \right) \right]^2 \frac{1}{z^2} \right\} R = 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

No que se segue, vamos realizar uma transformação apropriada a fim de reduzir a potência do termo proporcional a $1/z^2$ e colocar os coeficientes que aparecem na equação para a nova função em uma forma apropriada e conveniente. Esta transformação é a *transformação F-homotópica* da variável dependente, $R(z) \mapsto U(z)$, tal que

$$R(z) = z^{A_1} U(z), \quad (7.23)$$

onde o coeficiente A_1 é dado por

$$A_1 = i \left(\frac{2cx_h \omega - mB}{2c\sqrt{2x_h}} \right). \quad (7.24)$$

Neste caso, a função $U(z)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dz^2} + \left(\frac{2A_1 + 1}{z} \right) \frac{dU}{dz} \\ & + \left[\frac{B^2 m^2 + 2c^2 m^2 x_h - 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h} \frac{1}{z} - \frac{m^2(B^2 + 2c^2 x_h)}{8c^2 x_h} \frac{1}{z - 1} \right] U = 0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

que é análoga à equação confluyente de Heun, dada por (2.16).

Assim, a solução geral da parte radial da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa, no espaço-tempo de um buraco negro acústico com rotação, na região exterior ao horizonte de eventos acústico, dada pela Eq. (7.22), no intervalo $0 \leq z < \infty$, pode ser escrita como

$$R(z) = z^{\frac{\beta}{2}} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)\}, \quad (7.26)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são dados por

$$\alpha = 0, \quad (7.27)$$

$$\beta = i \left(\frac{2cx_h\omega - mB}{c\sqrt{2x_h}} \right), \quad (7.28)$$

$$\gamma = -1, \quad (7.29)$$

$$\delta = -\frac{x_h\omega^2}{2}, \quad (7.30)$$

$$\eta = \frac{1}{8} \left[m^2 \left(-\frac{B^2}{c^2 x_h} - 2 \right) + 4x_h\omega^2 + 4 \right]. \quad (7.31)$$

Estas funções formam soluções linearmente independentes da equação confluyente de Heun, devido ao fato de que β não é necessariamente um inteiro.

No que se segue, vamos considerar a expansão da solução dada pela Eq. (7.26), que é regular em $z = 0$ e apropriada para estudar o problema relativo à radiação Hawking análoga.

7.1.2 Radiação Hawking análoga

Vamos considerar o campo escalar sem massa nas proximidades do horizonte de eventos acústico, a fim de discutir a radiação Hawking análoga. A partir das Eqs. (2.48), (7.16), (7.19) e (7.21), podemos ver que a solução radial dada pela Eq. (7.26), próxima do horizonte de eventos acústico, isto é, quando $r \rightarrow r_h \Rightarrow x \rightarrow x_h \Rightarrow z \rightarrow 0$, se comporta assintoticamente como

$$R(z) \sim z^{\frac{\beta}{2}} \{C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot z^{-\beta} \cdot 1\} = C_1 z^{\frac{\beta}{2}} + C_2 z^{-\frac{\beta}{2}}, \quad (7.32)$$

ou

$$R(r) \sim \frac{C_1}{-r_h^{\frac{\beta}{2}}} (r - r_h)^{\frac{\beta}{2}} + \frac{C_2}{-r_h^{-\frac{\beta}{2}}} (r - r_h)^{-\frac{\beta}{2}}. \quad (7.33)$$

Portanto, podemos escrever

$$R(r) \sim C_1(r - r_h)^{\frac{\beta}{2}} + C_2(r - r_h)^{-\frac{\beta}{2}}, \quad (7.34)$$

onde estamos considerando contribuições apenas do primeiro termo na expansão e todas as constantes estão incluídas em C_1 e C_2 . Assim, levando em conta a dependência temporal, próximo ao horizonte de eventos acústico r_h , podemos escrever

$$\Psi = e^{-i\omega t}(r - r_h)^{\pm\frac{\beta}{2}}. \quad (7.35)$$

A partir da Eq. (7.28), para o parâmetro β , obtemos

$$\beta = ir_h \left(\omega - m \frac{B}{cr_h^2} \right). \quad (7.36)$$

Assim, substituindo as Eqs. (7.7) e (7.11) na Eq. (7.36), temos

$$\beta = \frac{i}{\kappa_h}(\omega - \omega_h), \quad (7.37)$$

onde

$$\omega_h = m\Omega_h, \quad (7.38)$$

com

$$\Omega_h = \frac{Bc}{A^2} \quad (7.39)$$

sendo a velocidade angular de arrasto do horizonte de eventos acústico.

Portanto, na superfície do horizonte de eventos do buraco negro acústico com rotação, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t}(r - r_h)^{-\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \quad (7.40)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_h) = e^{-i\omega t}(r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)}. \quad (7.41)$$

Estas soluções para campos escalares nas proximidades do horizonte de eventos acústico serão úteis para investigar a radiação Hawking de partículas escalares sem massa. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que estamos usando a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo em consideração, diferentemente dos cálculos usualmente realizados na literatura [87, 89].

Usando as definições das coordenadas *tortoise* e Eddington-Finkelstein, dadas por

$$dr_* = \frac{r^2}{\Delta} dr, \quad (7.42)$$

temos

$$\ln(r - r_h) = \frac{1}{r_h^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_h} r_* = 2\kappa_h r_*, \quad (7.43)$$

$$\hat{r} = \frac{\omega - \omega_h}{\omega} r_*, \quad (7.44)$$

$$v = t + \hat{r}. \quad (7.45)$$

Assim, a seguinte solução de onda que se aproxima (*ingoing*) é obtida

$$\begin{aligned} \Psi_{in} &= e^{-i\omega v} e^{i\omega \hat{r}} (r - r_h)^{-\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \\ &= e^{-i\omega v} e^{i(\omega - \omega_h)r_*} (r - r_h)^{-\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} (r - r_h)^{-\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \\ &= e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

A solução de onda que se afasta (*outgoing*) é dada por

$$\begin{aligned} \Psi_{out}(r > r_h) &= e^{-i\omega v} e^{i\omega \hat{r}} (r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \\ &= e^{-i\omega v} e^{i(\omega - \omega_h)r_*} (r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} (r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_h)^{\frac{i}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Note que, se tomarmos $Q = 0$ nas Eqs. (96) e (97) do nosso artigo [191], as soluções resultantes são analiticamente análogas às soluções dadas pelas Eqs. (7.46) e (7.47), respectivamente.

7.1.3 Extensão analítica e espectro da radiação

Agora, vamos obter, por continuação analítica, a parte real amortecida (*damped*) da solução de onda que se afasta (*outgoing*), para o campo escalar sem massa, que será utilizada para construir uma expressão explícita para a taxa de decaimento, Γ_h . Esta parte real amortecida (*damped*) corresponde (pelo menos parcialmente) à contribuição temporal para a taxa de decaimento encontrada pelo método de tunelamento usado para investigar a radiação Hawking análoga [225].

A partir da Eq. (7.47), vemos que esta solução não é analítica no horizonte de eventos acústico $r = r_h$. Por continuação analítica, rotacionando por um ângulo de $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r , obtemos

$$(r - r_h) \rightarrow |r - r_h| e^{-i\pi} = (r_h - r) e^{-i\pi}. \quad (7.48)$$

Assim, a solução de onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos acústico r_h é dada por

$$\Psi_{out}(r < r_h) = e^{-i\omega v} (r_h - r)^{\frac{i}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)} e^{\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)}. \quad (7.49)$$

As Eqs. (7.47) e (7.49) descrevem as ondas que se afastam (*outgoing*), fora e dentro, do horizonte de eventos do buraco negro acústico com rotação, respectivamente. Portanto, para uma onda de uma partícula que se afasta (*outgoing*) com energia $\omega > 0$, a taxa de decaimento (ou probabilidade relativa de espalhamento) na superfície do horizonte de eventos acústico, $r = r_h$, é dada por

$$\Gamma_h = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_h)}{\Psi_{out}(r < r_h)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)}. \quad (7.50)$$

Este resultado já foi obtido formalmente na literatura [225] em diferentes contextos e é análogo ao obtido no nosso artigo [191] para um buraco negro astrofísico.

De acordo com o método de Damour-Ruffini-Sannan [192, 193] para buracos negros astrofísicos, a solução de onda correta, que descreve uma partícula se evadindo do buraco negro acústico com rotação, é dada por

$$\Psi_\omega(r) = N_\omega \left[H(r - r_h) \Psi_\omega^{out}(r - r_h) + H(r_h - r) \Psi_\omega^{out}(r_h - r) e^{\frac{\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)} \right], \quad (7.51)$$

onde N_ω é a constante de normalização, tal que

$$\langle \Psi_{\omega_1}(r) | \Psi_{\omega_2}(r) \rangle = -\delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (7.52)$$

com $H(x)$ sendo a função de Heaviside (ver Apêndice B.1) e $\Psi_\omega^{out}(x)$ as funções de onda normalizadas dadas, a partir da Eq. (7.47), por

$$\Psi_\omega^{out}(x) = e^{-i\omega v} x^{\frac{i}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)}. \quad (7.53)$$

Assim, a partir da condição de normalização, a saber,

$$\langle \Psi_\omega(r) | \Psi_\omega(r) \rangle = 1 = |N_\omega|^2 \left[e^{\frac{2\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)} - 1 \right], \quad (7.54)$$

obtemos o espectro resultante da radiação Hawking análoga de partículas escalares, que é dado por

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_h)} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar(\omega - \omega_h)}{k_B T_h}} - 1}, \quad (7.55)$$

onde as constantes de Boltzmann e Planck foram reintroduzidas.

Portanto, podemos ver que o espectro resultante da radiação Hawking análoga de partículas escalares sem massa possui um caráter térmico, análogo ao espectro de corpo negro, onde $k_B T_h = \hbar \kappa_h / 2\pi$.

7.2 Buraco negro acústico canônico

Uma solução para um fluxo esfericamente simétrico de um fluido incompressível, chamado de buraco negro acústico canônico, foi encontrada por Visser [224]. A métrica

acústica que descreve apropriadamente esta situação é dada por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left(dr \pm c \frac{r_0^2}{r^2} dt \right)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (7.56)$$

onde c é a velocidade do som, sendo constante ao longo do fluxo e definida em termos da velocidade v , da seguinte forma

$$v = c \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (7.57)$$

Usando a coordenada temporal de Schwarzschild, τ , ao invés do tempo do laboratório, t , e realizando uma transformação de coordenadas, a saber,

$$d\tau = dt \pm \frac{r_0^2/r^2}{c[1 - (r_0^4/r^4)]} dr, \quad (7.58)$$

o elemento de linha que descreve um buraco negro acústico canônico pode ser reescrito como

$$ds^2 = -\frac{c^2}{r^4} \Delta d\tau^2 + \frac{r^4}{\Delta} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (7.59)$$

onde

$$\Delta = r^4 - r_0^4. \quad (7.60)$$

Obviamente, a forma desta métrica é diferente daquelas geometrias usualmente consideradas na relatividade geral.

A partir da Eq. (7.59), concluímos que o raio do horizonte de eventos acústico é dado por

$$r_h = r_0, \quad (7.61)$$

onde r_0 é obtido a partir da Eq. (7.57) e corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro acústico canônico.

A aceleração gravitacional, κ_0 , na superfície do horizonte de eventos do buraco negro acústico, r_0 , é dada por [226]

$$\kappa_0 \equiv \left| \frac{\partial v^r}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{2c}{r_0}. \quad (7.62)$$

Então, um horizonte de eventos acústico emitirá radiação Hawking análoga na forma de um banho térmico de fónons a uma temperatura

$$T_0 = \frac{\kappa_0}{2\pi c} = \frac{1}{\pi r_0}. \quad (7.63)$$

7.2.1 Soluções analíticas da equação de Klein-Gordon sem massa

A equação covariante de Klein-Gordon no espaço-tempo de um buraco negro acústico canônico, cujo elemento de linha é dado pela Eq. (7.59), pode ser escrita como

$$\left[-\frac{r^6}{c^2 \Delta} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Psi(\mathbf{r}, \tau) = 0. \quad (7.64)$$

O espaço-tempo em consideração é estático, de modo que a dependência temporal que resolve a Eq. (7.64) pode ser separada como $e^{-i\omega\tau}$, onde ω é a energia das partículas nas unidades escolhidas. Além disso, a invariância rotacional em relação à ϕ implica que a solução em ϕ é $e^{im\phi}$, onde $m = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ é o número quântico azimutal. Então, a solução geral angular é dada em termos das funções harmônicas esféricas $Y_m^l(\theta, \phi) = P_m^l(\cos \theta)e^{im\phi}$, onde l é um inteiro tal que $|m| \leq l$ [227]. Portanto, $\Psi(\mathbf{r}, \tau)$ pode ser escrita como

$$\Psi(\mathbf{r}, \tau) = R(r)Y_m^l(\theta, \phi)e^{-i\omega\tau}. \quad (7.65)$$

Substituindo a Eq. (7.65) na (7.64), encontramos que

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r^2} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2 r^6}{c^2 \Delta} - \lambda_{lm} \right) R = 0, \quad (7.66)$$

onde $\lambda_{lm} = l(l+1)$.

Agora, vamos obter a solução geral analítica para a parte radial da equação de Klein-Gordon dada pela Eq. (7.66). Esta equação possui quatro singularidades, o que dificulta consideravelmente sua transformação em um equação do tipo de Heun. Então, definimos uma nova coordenada radial, x , tal que

$$x = \frac{r^2}{2}. \quad (7.67)$$

Usando esta nova coordenada, a Eq. (7.60) pode ser reescrita como

$$\Delta = 4(x^2 - x_0), \quad (7.68)$$

onde

$$x_0 = \frac{1}{4}r_0^4. \quad (7.69)$$

Assim, a partir da Eq. (7.68), temos que a nova equação da superfície do horizonte de eventos acústico do buraco negro negro acústico canônico é obtida a partir da condição

$$\Delta = 4(x - x_+)(x - x_-) = 0, \quad (7.70)$$

cujas soluções são

$$x_+ = x_0, \quad (7.71)$$

$$x_- = -x_0, \quad (7.72)$$

e correspondem aos horizonte de eventos do buraco negro acústico canônico. Consequentemente, usando a Eq. (7.70), podemos escrever a Eq. (7.66) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x - x_+} + \frac{1}{x - x_-} \right) \frac{dR}{dx} \\ & + \frac{1}{(x - x_+)(x - x_-)} \left[\frac{\omega^2}{2c^2} x - \frac{c^2 \lambda_{lm} - 2x_+ \omega^2 - 2x_- \omega^2}{4c^2} \right. \\ & \left. + \frac{x_+^3 \omega^2}{2c^2(x_+ - x_-)} \frac{1}{x - x_+} - \frac{x_-^3 \omega^2}{2c^2(x_+ - x_-)} \frac{1}{x - x_-} \right] R = 0. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Esta equação possui singularidades em $x = \{a_1, a_2\} = \{x_+, x_-\}$ e em $x = \infty$. A transformação da Eq. (7.73) para uma equação do tipo de Heun é conseguida pela seguinte substituição homográfica

$$z = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{x - x_+}{x_- - x_+}. \quad (7.74)$$

Assim, podemos escrever a Eq. (7.73) como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{dR}{dz} \\ & + \left\{ \frac{c^2 \lambda_{lm} x_+^2 - 2c^2 \lambda_{lm} x_+ x_- + c^2 \lambda_{lm} x_-^2 - 2x_+^3 \omega^2 + 6x_+^2 x_- \omega^2}{4c^2 (x_+ - x_-)^2} \frac{1}{z} \right. \\ & + \frac{-c^2 \lambda_{lm} x_+^2 + 2c^2 \lambda_{lm} x_+ x_- - c^2 \lambda_{lm} x_-^2 - 6x_+ x_-^2 \omega^2 + 2x_-^3 \omega^2}{4c^2 (x_+ - x_-)^2} \frac{1}{z-1} \\ & \left. - \left[i \frac{x_+^{3/2} \omega}{\sqrt{2c}(x_+ - x_-)} \right]^2 \frac{1}{z^2} + \left[i \frac{x_-^{3/2} \omega}{\sqrt{2c}(x_+ - x_-)} \right]^2 \frac{1}{(z-1)^2} \right\} R = 0. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Agora, vamos realizar uma transformação a fim de reduzir a potência dos termos proporcionais a $1/z^2$ e $1/(z-1)^2$, e escrever os coeficientes que aparecem na equação para a nova função em uma forma útil. Esta transformação é a *transformação F-homotópica* da variável dependente, $R(z) \mapsto U(z)$, tal que

$$R(z) = z^{A_1} (z-1)^{A_2} U(z), \quad (7.76)$$

onde os coeficientes A_1 e A_2 são dados por

$$A_1 = i \frac{x_+^{3/2} \omega}{\sqrt{2c}(x_+ - x_-)}, \quad (7.77)$$

$$A_2 = i \frac{x_-^{3/2} \omega}{\sqrt{2c}(x_+ - x_-)}. \quad (7.78)$$

Neste caso, a função $U(z)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dz^2} + \left(\frac{2A_1 + 1}{z} + \frac{2A_2 + 1}{z-1} \right) \frac{dU}{dz} \\ & + \left[\frac{-A_1 - A_2 - 2A_1 A_2 + A_3}{z} + \frac{A_1 + A_2 + 2A_1 A_2 + A_4}{z-1} \right] U = 0, \end{aligned} \quad (7.79)$$

onde os coeficientes A_3 e A_4 são dados por

$$A_3 = \frac{c^2 \lambda_{lm} x_+^2 - 2c^2 \lambda_{lm} x_+ x_- + c^2 \lambda_{lm} x_-^2 - 2x_+^3 \omega^2 + 6x_+^2 x_- \omega^2}{4c^2 (x_+ - x_-)^2}, \quad (7.80)$$

$$A_4 = \frac{-c^2 \lambda_{lm} x_+^2 + 2c^2 \lambda_{lm} x_+ x_- - c^2 \lambda_{lm} x_-^2 - 6x_+ x_-^2 \omega^2 + 2x_-^3 \omega^2}{4c^2 (x_+ - x_-)^2}. \quad (7.81)$$

Note que a Eq. (7.79) é análoga à equação confluyente de Heun, dada por (2.16). Assim, a solução geral da parte radial da equação de Klein-Gordon, para uma partícula escalar

sem massa, no espaço-tempo em consideração, na região exterior do horizonte de eventos acústico, dada pela Eq. (7.75), em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, pode ser escrita como

$$R(z) = z^{\frac{1}{2}\beta}(z-1)^{\frac{1}{2}\gamma}\{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)\}, \quad (7.82)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, e os parâmetros α , β , γ , δ e η são, agora, dados por

$$\alpha = 0, \quad (7.83)$$

$$\beta = i\sqrt{2} \frac{x_+^{3/2}\omega}{c(x_+ - x_-)}, \quad (7.84)$$

$$\gamma = i\sqrt{2} \frac{x_-^{3/2}\omega}{c(x_+ - x_-)}, \quad (7.85)$$

$$\delta = -\frac{\omega^2(x_+ - x_-)}{2c^2}, \quad (7.86)$$

$$\eta = \frac{2x_+^2\omega^2(x_+ - 3x_-) - c^2\lambda(x_+ - x_-)^2}{4c^2(x_+ - x_-)^2}. \quad (7.87)$$

Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluyente de Heun, em virtude do fato de que β é não inteiro, que é a condição satisfeita por esse parâmetro, porque não há razão física para impor que β deva ser um inteiro.

7.2.2 Radiação Hawking análoga

Agora, vamos considerar o campo escalar sem massa nas proximidades do horizonte de eventos, a fim de discutir a radiação Hawking análoga. Para fazer isso, a partir das Eqs. (7.74) e (2.48), e seguindo o mesmo procedimento da Seção 7.1.2, podemos ver que a solução radial dada pela Eq. (7.82), próximo do horizonte de eventos acústico, isto é, quando $r \rightarrow r_0 \Rightarrow x \rightarrow x_+ \Rightarrow z \rightarrow 0$, se comporta assintoticamente como

$$R(r) \sim C_1 (r - r_0)^{\beta/2} + C_2 (r - r_0)^{-\beta/2}, \quad (7.88)$$

onde estamos considerando as contribuições que surgem apenas do primeiro termo na expansão e todas as constantes estão incluídas em C_1 e C_2 . Assim, levando em consideração a dependência temporal da solução, nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro acústico canônico r_0 , temos

$$\Psi = e^{-i\omega\tau}(r - r_0)^{\pm\beta/2}. \quad (7.89)$$

A partir da Eq. (7.84), para o parâmetro β , obtemos

$$\beta = i\frac{r_0}{2c}\omega. \quad (7.90)$$

Então, substituindo as Eqs. (7.61) e (7.62) na Eq. (7.90), temos

$$\beta = \frac{i}{\kappa_0} \omega. \quad (7.91)$$

Portanto, na superfície do horizonte de eventos do buraco negro acústico canônico, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega\tau} (r - r_0)^{-\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \quad (7.92)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_0) = e^{-i\omega\tau} (r - r_0)^{\frac{i}{2\kappa_0}\omega}. \quad (7.93)$$

Estas soluções para os campos escalares próximos do horizonte de eventos acústico foram obtidas a partir da solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo em consideração, e serão úteis para investigar a radiação Hawking análoga.

Usando as definições das coordenadas *tortoise* e Eddington-Finkelstein, dadas por

$$dr_* = \frac{r^4}{c} \frac{1}{\Delta} dr, \quad (7.94)$$

temos

$$\ln(r - r_0) = \frac{c}{r_0^4} \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r=r_0} r_* = 2\kappa_0 r_*, \quad (7.95)$$

$$\hat{r} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} r_*, \quad (7.96)$$

$$v = \tau + \hat{r}. \quad (7.97)$$

Assim, a seguinte solução de onda que se aproxima (*ingoing*) pode ser obtida

$$\begin{aligned} \Psi_{in} &= e^{-i\omega v} e^{i\omega\hat{r}} (r - r_0)^{-\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \\ &= e^{-i\omega v} e^{i\omega r_*} (r - r_0)^{-\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_0)^{\frac{i}{2\kappa_0}\omega} (r - r_0)^{-\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \\ &= e^{-i\omega v}. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Por outro lado, a solução de onda que se afasta (*outgoing*) é dada por

$$\begin{aligned} \Psi_{out}(r > r_0) &= e^{-i\omega v} e^{i\omega\hat{r}} (r - r_0)^{\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \\ &= e^{-i\omega v} e^{i\omega r_*} (r - r_0)^{\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_0)^{\frac{i}{2\kappa_0}\omega} (r - r_0)^{\frac{i}{2\kappa_0}\omega} \\ &= e^{-i\omega v} (r - r_0)^{\frac{i}{\kappa_0}\omega}. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Note que, se tomarmos $a = Q = 0$ nas Eqs. (96) e (97) do nosso artigo [191], as soluções resultantes são analiticamente análogas às soluções dadas pelas Eqs. (7.98) e (7.99), respectivamente.

7.2.3 Extensão analítica e espectro da radiação

Agora, vamos obter, por continuação analítica, a parte real amortecida (*damped*) da solução de onda que se afasta (*outgoing*), para o campo escalar sem massa, que será usada para construir uma expressão explícita para a taxa de decaimento, Γ_0 . Esta parte real amortecida (*damped*) corresponde (pelo menos parcialmente) à contribuição temporal para a taxa de decaimento encontrada pelo método de tunelamento usado para investigar a radiação Hawking análoga [228].

A partir da Eq. (7.99), vemos que esta solução não é analítica no horizonte de eventos acústico, $r = r_0$. Por continuação analítica, rotacionando por um ângulo de $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r , obtemos

$$(r - r_0) \rightarrow |r - r_0| e^{-i\pi} = (r_0 - r) e^{-i\pi}. \quad (7.100)$$

Assim, a solução de onda que se afasta (*outgoing*) da superfície do horizonte de eventos acústico r_0 é dada por

$$\Psi_{out}(r < r_0) = e^{-i\omega v} (r_0 - r)^{\frac{i}{\kappa_0}\omega} e^{\frac{\pi}{\kappa_0}\omega}. \quad (7.101)$$

As Eqs. (7.99) e (7.101) descrevem as ondas que se afastam (*outgoing*), fora e dentro, do horizonte de eventos do buraco negro acústico canônico, respectivamente. Portanto, para a onda de uma partícula escalar que se afasta (*outgoing*) com energia $\omega > 0$, a taxa de decaimento (ou probabilidade relativa de espalhamento) na superfície do horizonte de eventos acústico, $r = r_0$, é dada por

$$\Gamma_0 = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_0)}{\Psi_{out}(r < r_0)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}\omega}, \quad (7.102)$$

que é um resultado já obtido formalmente na literatura [228] em um contexto diferente e é análogo ao obtido no nosso trabalho [191] para um buraco negro astrofísico.

De acordo com o método de Damour-Ruffini-Sannan [192, 193] para buracos negros astrofísicos, a solução de onda correta, que descreve uma partícula se evadindo do buraco negro acústico canônico, é dada por

$$\Psi_\omega(r) = N_\omega [H(r - r_0) \Psi_\omega^{out}(r - r_0) + H(r_0 - r) \Psi_\omega^{out}(r_0 - r) e^{\frac{\pi}{\kappa_0}\omega}], \quad (7.103)$$

onde $\Psi_\omega^{out}(x)$ são as funções de onda normalizadas dadas, a partir da Eq. (7.99), por

$$\Psi_\omega^{out}(x) = e^{-i\omega v} x^{\frac{i}{\kappa_0}\omega}. \quad (7.104)$$

Assim, a partir da condição de normalização

$$\langle \Psi_\omega(r) | \Psi_\omega(r) \rangle = 1 = |N_\omega|^2 \left[e^{\frac{2\pi}{\kappa_0}\omega} - 1 \right], \quad (7.105)$$

obtemos o espectro resultante da radiação Hawking análoga de partículas escalares, que é dado por

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_0}\omega} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T_0}} - 1}. \quad (7.106)$$

7.3 Conclusões parciais

Neste capítulo apresentamos soluções analíticas para a parte radial da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa em ambos os buracos negros acústicos, com rotação e canônico. Estas soluções gerais são soluções analíticas para todo o espaço-tempo, o que significa, na região entre o horizonte de eventos acústico e o infinito. A solução radial é dada em termos das funções confluentes de Heun e são válidas ao longo de todo o intervalo $0 \leq z < \infty$.

Os resultados obtidos para um buraco negro acústico com rotação possuem a vantagem, quando comparados com os obtidos na literatura [88], de que as soluções são válidas do horizonte de eventos exterior ao infinito, ao invés de serem válidas apenas próximas do horizonte de eventos exterior ou do infinito. Por outro lado, nossos resultados são válidos para quaisquer frequências e não para um intervalo restrito de frequências, como apresentado na literatura [89].

A partir destas soluções analíticas, obtivemos as soluções de ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) do horizonte de eventos acústico de ambos os buracos negros acústicos em consideração, e usamos estes resultados para discutir o efeito da radiação Hawking, no qual consideramos as propriedades das funções confluentes de Heun para obter os resultados. Esta aproximação possui a vantagem de que não é necessário a introdução de quaisquer sistemas de coordenadas, como por exemplo, as coordenadas *tortoise* ou Eddington-Finkelstein [225, 228, 229].

Generalizando o clássico método de Damour-Ruffini, discutimos a radiação Hawking análoga de ambos os buracos negros acústicos analisados. As expressões para as taxas de decaimento, dadas pelas Eqs. (7.50) e (7.102), descrevem o fenômeno relacionado ao processo de radiação dos buracos negros acústicos, com rotação e canônico, respectivamente.

Como comentário final, enfatizamos que derivamos não apenas a temperatura Hawking, mas também o espectro de corpo negro de Hawking para ambos os buracos negros acústicos. Isto significa que ambos os buracos negros acústicos, com rotação e canônico, se comportam não meramente como corpos térmicos, mas também como corpos negros.

8 Frequências ressonantes do vórtice hidrodinâmico

The black holes turn and fade from sight
The strings of theory hide in the human race ...

Neste capítulo estudamos a perturbação sonora da geometria de um vórtice hidrodinâmico e apresentamos uma expressão exata para as frequências ressonantes (quasi-espectro) desta geometria. A solução exata para a parte radial da equação covariante de Klein-Gordon neste espaço-tempo é obtida, e é dada em termos das funções duplamente confluentes de Heun. Encontramos que as frequências ressonantes são números complexos. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [230].

8.1 Espaço-tempo de vórtice hidrodinâmico

A métrica acústica apropriada para o modelo de um fluxo de fluido drenado suavemente, o assim chamado buraco negro acústico com rotação, é dada pela Eq. (7.1) e foi discutida no Capítulo 7. Agora, quando nos restringimos a $A = 0$, isto é, nenhum fluxo radial e generalizamos para uma velocidade do som anisotrópica, a métrica para o modelo que descreve uma geometria acústica ao redor de vórtices físicos toma a forma [46]

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{B^2}{c^2 r^2} \right) dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 - 2B dt d\phi, \quad (8.1)$$

sendo B uma constante relacionada à circulação do fluido.

Podemos escrever o tensor métrico do espaço-tempo do vórtice hidrodinâmico como

$$g_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} -c^2 + \frac{B^2}{r^2} & 0 & -B \\ 0 & 1 & 0 \\ -B & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

do qual obtemos

$$g \equiv \det(g_{\sigma\tau}) = -c^2 r^2. \quad (8.3)$$

Assim, as componentes contravariantes de $g_{\sigma\tau}$ são dadas por

$$g^{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & -\frac{B}{c^2 r^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{B}{c^2 r^2} & 0 & -\frac{B^2}{c^2 r^4} + \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Como o buraco negro de Kerr na relatividade geral, quando a componente g_{00} se anula, obtemos o raio da ergosfera, r_e , dado por

$$r_e = \frac{|B|}{c}, \quad (8.5)$$

que coincide com o círculo no qual a (valor absoluto da) velocidade de fundo do fluxo se iguala à velocidade do som c . Note que este espaço-tempo não possui um horizonte de eventos.

8.2 Soluções exatas da equação covariante de Klein-Gordon

Para um fluido barotrópico e sem viscosidade com um fluxo irrotacional (embora possivelmente dependente do tempo), a equação de movimento para o potencial velocidade que descreve uma onda sonora é idêntica àquela para um campo escalar sem massa minimamente acoplado, isto é, à equação de Klein-Gordon, dada por (1.34), neste caso com $\mu_0 = 0$.

Então, a equação covariante de Klein-Gordon no espaço-tempo de um vórtice hidrodinâmico, dado pela Eq. (8.1), pode ser escrita como

$$\left[-\frac{r}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(cr \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{c}{r} - \frac{B^2}{cr^3} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{2B}{cr} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (8.6)$$

O espaço-tempo em consideração é independente do tempo, de modo que a dependência temporal que resolve a Eq. (8.6) pode ser separada como $e^{-i\omega t}$, onde ω é a energia das partículas nas unidades escolhidas e assumimos que $\omega > 0$. Além disso, a invariância rotacional em relação à ϕ nos permite usar a simetria cilíndrica da métrica efetiva para escrever a solução em ϕ como $e^{im\phi}$. Portanto, $\Psi(\mathbf{r}, t)$ pode ser escrito como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{m\omega}(r) e^{im\phi} e^{-i\omega t}. \quad (8.7)$$

Substituindo a Eq. (8.7) na Eq. (8.6), encontramos que

$$\left[\frac{d}{dr} \left(cr \frac{d}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2 r}{c} - \frac{cm^2}{r} + \frac{B^2 m^2}{cr^3} - \frac{2Bm\omega}{cr} \right) \right] R_{m\omega}(r) = 0. \quad (8.8)$$

No que se segue, vamos obter a solução geral exata para a equação radial dada por (8.8).

8.2.1 Equação radial

Podemos escrever a Eq. (8.8) como

$$\frac{d^2 R_{m\omega}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{m\omega}}{dr} + \frac{1}{r} \left[\frac{\omega^2}{c^2} r - \left(\frac{2Bm\omega}{c^2} + m^2 \right) \frac{1}{r} + \frac{B^2 m^2}{c^2} \frac{1}{r^3} \right] R_{m\omega} = 0. \quad (8.9)$$

Esta equação possui singularidades em $r = 0$ e $r = \infty$. A transformação da Eq. (8.9) para um equação do tipo de Heun é obtida fazendo

$$z = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1}, \quad (8.10)$$

onde $-1 \leq z \leq 1$. Assim, podemos escrever a Eq. (8.9) como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{m\omega}}{dz^2} + \left[\frac{2z^5 - 4z^3 + 2z}{(z+1)^3(z-1)^3} \right] \frac{dR_{m\omega}}{dz} \\ + \left[\frac{(A_1 + A_2 + A_3)z^2 + 2(A_1 - A_3)z + (A_1 - A_2 + A_3)}{(z+1)^3(z-1)^3} \right] R_{m\omega} = 0, \end{aligned} \quad (8.11)$$

onde os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são dados por

$$A_1 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (8.12)$$

$$A_2 = - \left(\frac{2Bm\omega}{c^2} + m^2 \right), \quad (8.13)$$

$$A_3 = \frac{B^2 m^2}{c^2}. \quad (8.14)$$

A Eq. (8.11) é um caso especial da equação duplamente confluyente de Heun, que possui forma canônica dada pela Eq. (2.59).

Logo, a solução geral da parte radial da equação de Klein-Gordon, para uma partícula escalar sem massa (fônons), no espaço-tempo de um vórtice hidrodinâmico, dado pela Eq. (8.11), pode ser escrita como

$$R_{m\omega}(z) = N_{m\omega} \text{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z), \quad (8.15)$$

onde $N_{m\omega}$ é uma constante de normalização a ser determinada e os parâmetros α , β , γ e δ são, agora, dados por

$$\alpha = 0, \quad (8.16)$$

$$\beta = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{B^2 m^2 - 2Bm\omega - c^2 m^2 + \omega^2}{c^2}, \quad (8.17)$$

$$\gamma = 2(A_1 - A_3) = \frac{2\omega^2 - 2B^2 m^2}{c^2}, \quad (8.18)$$

$$\delta = A_1 - A_2 + A_3 = \frac{B^2 m^2 + 2Bm\omega + c^2 m^2 + \omega^2}{c^2}. \quad (8.19)$$

8.3 Frequências ressonantes

A fim de calcular as frequências ressonantes, precisamos impor condições de contorno sobre as soluções na região assintótica (infinito), que neste caso, requer a condição necessária para uma forma polinomial de $R_{m\omega}(z)$ (para uma revisão, veja [231] e as referências nele citadas). A solução deve ser finita próxima do buraco negro e bem comportada muito longe do buraco negro.

O estudo assintótico e numérico dos problemas de contorno relacionados ao caso duplamente confluyente da equação diferencial de Heun foi feito por Lay *et al.* [232]. Contudo, para fazer isso, seguiremos o método desenvolvido por Gurappa e Panigrahi [90], porque este é mais adequado para a equação duplamente confluyente de Heun na forma canônica dada pela Eq. (2.59) [233]. Portanto, de forma geral, para uma equação diferencial de uma única variável, que pode ser escrita como

$$[F(D) + P(z, d/dz)]R_{m\omega}(z) = 0, \quad (8.20)$$

com

$$D \equiv z \frac{d}{dz}, \quad (8.21)$$

$$F(D) = \sum_n a_n D^n \quad (8.22)$$

onde $F(D)$ é um operador diagonal no espaço de monômios, a_n são os coeficientes da expansão e $P(z, d/dz)$ é uma função polinomial arbitrária de z e d/dz (exceto D), podemos impor a condição

$$F(D)z^n = 0. \quad (8.23)$$

Reescrevendo a Eq. (8.11) após multiplicá-la por $[(z+1)(z-1)]^3$, obtemos

$$\left[3D^2 - D + (A_1 - A_2 + A_3) + (A_1 + A_2 + A_3)z^2 + 2(A_1 - A_3)z \right. \\ \left. + (-1 - 3z^4 + z^6) \frac{d^2}{dz^2} + (-4z^3 + 2z^5) \frac{d}{dz} \right] R_{m\omega}(z) = 0. \quad (8.24)$$

Na equação acima, temos que o operador diagonal $F(D)$ e a função polinomial $P(z, d/dz)$ são dados, respectivamente, por

$$F(D) = 3D^2 - D + (A_1 - A_2 + A_3) \quad (8.25)$$

e

$$P(z, d/dz) = (A_1 + A_2 + A_3)z^2 + 2(A_1 - A_3)z \\ + (-1 - 3z^4 + z^6) \frac{d^2}{dz^2} + (-4z^3 + 2z^5) \frac{d}{dz}. \quad (8.26)$$

Agora, a condição dada pela Eq. (8.23) leva diretamente a determinação exata das frequências ressonantes, como segue:

$$\omega_n(m, B) = -Bm \pm ic\sqrt{m^2 + 3n^2 - n}, \quad (8.27)$$

onde $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. Esta é uma lei de quantização não-trivial, porque ela possui a propriedade de ser um número complexo e é independente do raio da ergosfera do vórtice hidrodinâmico (veja a Figura 9 e a Tabela 3).

É importante chamar a atenção para o fato de que, a partir da Eq. (8.27), as frequências ressonantes do vórtice hidrodinâmico possui as seguintes simetrias

$$\omega_n(m, B) = -\omega_n^*(-m, B) = -\omega_n^*(m, -B) = \omega_n(-m, -B), \quad (8.28)$$

onde o símbolo “ $*$ ” denota o complexo conjugado.

Seguindo a convenção padrão para ordenar as frequências ressonantes por suas partes imaginárias [234], temos que a maior componente imaginária $\text{Im}(\omega_n)$ corresponde ao modo fundamental. Assim, se $\text{Im}(\omega_n) > 0$ o modo é instável, de maneira que o modo fundamental corresponde a menor instabilidade na escala temporal. Por outro lado, se $\text{Im}(\omega_n) < 0$ o modo é estável, e o modo fundamental corresponde ao modo de maior tempo de vida.

	$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
m	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$	$\text{Re}(\omega)$	$\text{Im}(\omega)$
0	0.0	0.0	0.0	1.4	0.0	3.2
1	-0.5	1.0	-0.5	1.7	-0.5	3.3
2	-1.0	2.0	-1.0	2.4	-1.0	3.7
3	-1.5	3.0	-1.5	3.3	-1.5	4.4

Tabela 3 – Frequências ressonantes dos modos $n = 0, 1, 2$ para $m = 0, 1, 2, 3$ e circulação $B = 0.5$. A unidade $c \equiv 1$ foi escolhida.

No limite quando $n \rightarrow \infty$, isto é, no limite de amortecimento infinito, temos

$$\omega_\infty = -Bm \pm i \left(n - \frac{1}{6} \right) \sqrt{3c^2} \approx -Bm \pm inc\sqrt{3}. \quad (8.29)$$

Portanto, estes resultados mostram a instabilidade do vórtice hidrodinâmico sobre ambas as perturbações sonoras, no modo fundamental e no limite que o fluido excede suavemente a velocidade do som.

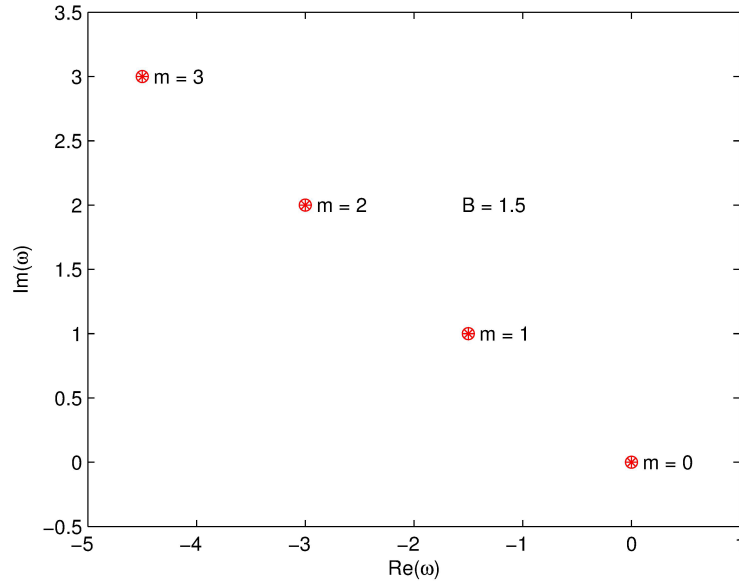


Figura 9 – Comparação da característica complexa da frequência ressonante do modo fundamental ($n = 0$). Focamos nos números azimutais $m = 0, 1, 2, 3$ e circulação $B = 1.5$. A unidade $c \equiv 1$ foi escolhida.

8.4 Conclusões parciais

Apresentamos a solução geral da parte radial da equação covariante de Klein-Gordon para fônons (partículas acústicas escalares sem massa) no espaço-tempo do vórtice hidrodinâmico.

Esta solução geral é analítica para todo o espaço-tempo, o que significa, na região entre a ergosfera e o infinito. A solução radial é dada em termos das funções duplamente confluentes de Heun e é válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$.

Calculamos os valores exatos das frequências ressonantes do vórtice hidrodinâmico, que são números complexos. A expressão para as frequências ressonantes mostra a instabilidade do vórtice hidrodinâmico sobre ambas as perturbações sônicas, no modo fundamental e no limite que o fluido torna-se supersônico.

Notemos também que as frequências ressonantes não dependem do raio da ergosfera, porém dependem do momento angular da perturbação.

9 Soluções analíticas no buraco negro acústico análogo da métrica cônica de Kerr

The answers buried underground
The love I feel as I fly endlessly through space ...

Neste capítulo estudamos a perturbação sonora do buraco negro acústico com rotação na presença de uma disclinação. A parte radial da equação de Klein-Gordon sem massa é escrita na forma de Heun e sua solução analítica é obtida. Estas soluções possuem uma dependência explícita em relação ao parâmetro da disclinação. Obtemos o espectro resultante da radiação Hawking-Unruh. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [235].

9.1 Espaço-tempo de Kerr com uma corda cósmica

No Capítulo 4 analisamos a interação entre campos escalares e o campo gravitacional e eletromagnético produzido por um buraco negro de Kerr-Newman-Kasuya com uma corda cósmica ao longo de seu eixo de simetria. De fato, no caso especial quando $Q_e = 0 = Q_m$, a Eq. (4.4) torna-se o espaço-tempo estacionário contendo uma corda cósmica, isto é, a métrica cônica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist, obtida por Gal'tsov e Masár [20].

Portanto, neste caso, as soluções gerais e exatas para ambas as partes, angular e radial, da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar não massivo e sem carga, no espaço-tempo de Kerr com uma corda cósmica são obtidas tomando $Q_e = Q_m = 0$ e $e = 0$ nas Eqs. (4.65)-(4.70) e Eqs. (4.79)-(4.84), respectivamente. Elas podem ser escritas como

$$\begin{aligned} W(z) = & e^{\frac{1}{2}\alpha z} z^{\frac{1}{2}\beta} (z-1)^{\frac{1}{2}\gamma} \{C_1 \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\ & + C_2 z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

onde C_1 e C_2 são constantes, sendo os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ e a respectiva função $W(z)$ mostrados na Tabela 4.

No que segue, vamos estudar o buraco negro acústico análogo da métrica cônica de Kerr. Desde que Unruh [236] mostrou que o comportamento de sistemas quânticos em um campo gravitacional pode ser modelado pelo movimento de ondas sonoras em um fluxo de fluido convergente, análogos acústicos de buracos negros tem sido estudados na literatura como um concreto modelo laboratorial para testar vários aspectos da teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo [237, 238]. Neste sentido, podemos construir um modelo

Parâmetro	$W(z)$	
	Função angular $S(z)$	Função radial $R(z)$
α	$4a\omega$	$2i\omega(r_+ - r_-)$
β	$m_{(b)}$	$2i \frac{\omega(r_+^2 + a^2) - am_{(b)}}{r_+ - r_-}$
γ	$m_{(b)}$	$2i \frac{\omega(r_-^2 + a^2) - am_{(b)}}{r_+ - r_-}$
δ	0	$2\omega^2(r_+ + r_-)(r_- - r_+)$
η	$-\frac{4a\omega m_{(b)} - m_{(b)}^2 + 2\lambda}{2}$	$-\frac{2a^2[a\omega - m_{(b)}]^2 + 4a^2\omega^2 r_+ r_- + (r_+ - r_-)^2 \lambda + 4a\omega m_{(b)} r_+ r_-}{(r_+ - r_-)^2}$ $-\frac{2r_+^3 \omega^2 (r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2}$

Tabela 4 – Parâmetros das funções confluentes de Heun para um campo escalar não massivo e sem carga ($Q_e = Q_m = e = \mu_0 = 0$) na métrica cônica de Kerr, onde $m_{(b)} = m/b$.

análogo para o espaço-tempo de Kerr com uma corda cósmica, no qual a disclinação imita a corda cósmica. A disclinação pode amplificar ou reduzir a radiação Hawking-Unruh emitida de acordo com o valor do déficit angular.

9.2 Buraco negro acústico com rotação e disclinação

Podemos introduzir uma disclinação (defeito topológico) no modelo idealizado de dreno de banheira (geometria acústica efetiva) dado pela Eq. (7.4). Para fazer isto, vamos utilizar uma aproximação geométrica e simplesmente redefinir o ângulo azimutal ϕ de tal forma que $\phi \rightarrow b\phi$. Assim, obtemos o seguinte elemento de linha em coordenadas cilíndricas [239]

$$ds^2 = -\frac{1}{r^2} \left(\Delta - \frac{B^2}{c^2} \right) dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 b^2 d\phi^2 - 2\frac{B}{c} b d\phi dt. \quad (9.2)$$

Esta métrica possui um déficit angular, que corresponde a remover ($0 < b \leq 1$) ou inserir ($2\pi > b \geq 1$) um pedaço de material de ângulo diedro, $\lambda = 2\pi(b - 1)$, pelo processo Volterra de criação da disclinação [240].

9.3 Equação do campo escalar sem massa

A equação de Klein-Gordon dada por (1.34), para um campo escalar sem massa, isto é, com $\mu_0 = 0$, pode ser escrita no espaço-tempo dado pela Eq. (9.2) como

$$\left[-\frac{r^3}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{b^2 r} \left(1 - \frac{B^2}{c^2 \Delta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{2Br}{bc\Delta} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial t} \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (9.3)$$

Tomamos a solução da Eq. (9.3) como segue

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{m\omega}(r) e^{im\phi} e^{-i\omega t}, \quad (9.4)$$

com ω sendo a frequência (ou energia nas unidades naturais) das partículas, onde assumimos que $0 < \omega \leq \infty$.

Substituindo a Eq. (9.4) na Eq. (9.3), encontramos que a função $R_{m\omega,b}(r)$ satisfaz a seguinte equação

$$\left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{\Delta}{r} \frac{d}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2 r^3}{\Delta} - \frac{m_{(b)}^2}{r} \left(1 - \frac{B^2}{c^2 \Delta} \right) - \frac{2Bm_{(b)}\omega r}{c\Delta} \right] \right\} R_{m\omega,b}(r) = 0, \quad (9.5)$$

onde $m_{(b)} \equiv m/b$.

9.3.1 A equação radial

A fim de obter a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon, vamos realizar uma mudança de variáveis tal que

$$x = \frac{r^2}{2}. \quad (9.6)$$

Usando esta nova coordenada, a Eq. (7.5) pode ser reescrita como

$$\Delta = 2x - \frac{A^2}{c^2} = 2(x - x_h), \quad (9.7)$$

onde

$$x_h = \frac{1}{2} r_h^2 \quad (9.8)$$

é a raiz de Δ e corresponde ao novo horizonte de eventos acústico (e de Cauchy) do espaço-tempo em consideração.

Com esta transformação, a Eq. (9.5) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R_{m\omega,b}(x)}{dx^2} + \left(\frac{1}{x - x_h} \right) \frac{dR_{m\omega,b}(x)}{dx} \\ & + \left[\frac{m_{(b)}^2 (B^2 + 2c^2 x_h)}{8c^2 x_h^2} \frac{1}{x} + \frac{-B^2 m_{(b)}^2 - 2c^2 m_{(b)}^2 x_h + 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h^2} \frac{1}{x - x_h} \right. \\ & \left. + \frac{B^2 m_{(b)}^2 - 4Bcm_{(b)}x_h\omega + 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h} \frac{1}{(x - x_h)^2} \right] R_{m\omega,b}(x) = 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Visto que esta equação possui singularidades em $x = \{x_h, 0, \infty\}$, pela substituição homográfica

$$z = \frac{x - x_h}{0 - x_h}, \quad (9.10)$$

trazemos a Eq. (9.9) para a forma de Heun, como segue

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R_{m\omega,b}(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR_{m\omega,b}(z)}{dz} \\ & + \left\{ \frac{B^2 m_{(b)}^2 + 2c^2 m_{(b)}^2 x_h - 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h} \frac{1}{z} + \frac{-m_{(b)}^2 (B^2 + 2c^2 x_h)}{8c^2 x_h} \frac{1}{z-1} \right. \\ & \left. - \left[i \left(\frac{2cx_h \omega - m_{(b)} B}{2c\sqrt{2x_h}} \right) \right]^2 \frac{1}{z^2} \right\} R_{m\omega,b}(z) = 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Tendo, então, movido as singularidades para os pontos $z = \{0, 1\}$, agora, fazemos uma *transformação F-homotópica* da variável dependente, $R_{m\omega,b}(z) \mapsto U_{m\omega,b}(z)$, a saber,

$$R_{m\omega,b}(z) = z^{A_1} U_{m\omega,b}(z), \quad (9.12)$$

onde o coeficiente A_1 é dado por

$$A_1 = i \left(\frac{2cx_h \omega - m_{(b)} B}{2c\sqrt{2x_h}} \right). \quad (9.13)$$

Explicitamente, o resultado de aplicar a Eq. (9.12) na equação radial dada por (9.11) é

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U_{m\omega,b}(z)}{dz^2} + \left(\frac{2A_1 + 1}{z} \right) \frac{dU_{m\omega,b}(z)}{dz} + \left[\frac{B^2 m_{(b)}^2 + 2c^2 m_{(b)}^2 x_h - 4c^2 x_h^2 \omega^2}{8c^2 x_h} \frac{1}{z} \right. \\ & \left. - \frac{m_{(b)}^2 (B^2 + 2c^2 x_h)}{8c^2 x_h} \frac{1}{z-1} \right] U_{m\omega,b}(z) = 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Assim, a solução geral exata, linearmente independente, da parte radial da equação de Klein-Gordon, para um campo escalar sem massa no buraco negro acústico com rotação e disclinação, válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R_{m\omega,b}(z) &= z^{\frac{1}{2}\beta} \{ C_{1_{m\omega,b}} \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \\ &+ C_{2_{m\omega,b}} z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z) \}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

onde $C_{1_{m\omega,b}}$ e $C_{2_{m\omega,b}}$ são constantes a serem determinadas, e os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ são dados por

$$\alpha = 0, \quad (9.16)$$

$$\beta = i \left(\frac{2cx_h \omega - m_{(b)} B}{c\sqrt{2x_h}} \right), \quad (9.17)$$

$$\gamma = -1, \quad (9.18)$$

$$\delta = -\frac{x_h \omega^2}{2}, \quad (9.19)$$

$$\eta = \frac{1}{8} \left[m_{(b)}^2 \left(-\frac{B^2}{c^2 x_h} - 2 \right) + 4x_h \omega^2 + 4 \right]. \quad (9.20)$$

Note a dependência da solução radial com o parâmetro b , associado com a presença da disclinação.

9.4 Radiação Hawking-Unruh

A solução radial, dada pela Eq. (9.15), possui o seguinte comportamento assintótico no horizonte de eventos acústico exterior r_h :

$$R(r) \sim C_1 (r - r_h)^{\frac{1}{2}\beta} + C_2 (r - r_h)^{-\frac{1}{2}\beta}, \quad (9.21)$$

onde todas as constantes envolvidas estão incluídas em C_1 e C_2 .

A partir da Eq. (9.17), o parâmetro β pode ser escrito como

$$\beta = \frac{i}{\kappa_h}(\omega - \omega_{h,b}), \quad (9.22)$$

onde $\omega_{h,b} = m\Omega_{h,b}$. A aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos acústico, κ_h , e a velocidade angular no exterior do buraco negro em consideração, $\Omega_{h,b}$, são dadas, respectivamente, por

$$\kappa_h \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{r_h^2} \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r=r_h} = \frac{1}{r_h} = \frac{c}{|A|} \quad (9.23)$$

e

$$\Omega_{h,b} = \frac{Bc}{bA^2}. \quad (9.24)$$

Portanto, considerando a dependência temporal, na superfície do horizonte de eventos exterior, as soluções correspondentes às ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) são dadas, respectivamente, por

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega t} (r - r_h)^{-\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_{h,b})} \quad (9.25)$$

e

$$\Psi_{out}(r > r_h) = e^{-i\omega t} (r - r_h)^{\frac{i}{2\kappa_h}(\omega - \omega_{h,b})}. \quad (9.26)$$

Estas soluções dependem do parâmetro b , de tal forma que a energia total das partículas emitidas (os fônons) é diminuída devido a presença da disclinação.

Seguindo o mesmo procedimento desenvolvido nos capítulos anteriores, temos que a probabilidade relativa de espalhamento da onda escalar na superfície do horizonte de eventos acústico, Γ_h , e o espectro da radiação Hawking-Unruh de partículas escalares, $|N_\omega|^2$, são dados, respectivamente, por

$$\Gamma_h = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_h)}{\Psi_{out}(r < r_h)} \right|^2 = e^{-\frac{2\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_{h,b})} \quad (9.27)$$

e

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa_h}(\omega - \omega_{h,b})} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar}{k_B T_h}(\omega - \omega_{h,b})} - 1}, \quad (9.28)$$

onde $k_B T_h = \hbar \kappa_h / 2\pi$ é a temperatura da radiação Hawking-Unruh, sendo k_B a constante de Boltzmann.

Portanto, podemos ver que o espectro resultante da radiação Hawking-Unruh de partículas escalares, sem massa, possui um caráter térmico, análogo ao espectro de corpo negro. É importante notar que a energia total das partículas escalares radiadas é diminuída devido à presença da disclinação, mais precisamente, a velocidade angular do horizonte de eventos acústico exterior, $\Omega_{h,b}$, é amplificada em comparação com o cenário sem a disclinação, discutido no Capítulo 7.

9.5 Conclusões parciais

Obtivemos a solução geral exata para a parte radial da equação de Klein-Gordon, sem massa, no buraco negro acústico com rotação e disclinação. Este é o modelo análogo acústico para o espaço-tempo de Kerr com uma corda cósmica.

Esta solução é analítica para todo o espaço-tempo, isto é, na região entre a ergosfera e o infinito. Ela é dada em termos das funções confluentes de Heun e é válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$.

A partir da solução analítica correspondente a parte radial, obtivemos as soluções de ondas que se aproximam (*ingoing*) e que se afastam (*outgoing*) das proximidades do horizonte de eventos acústico exterior, e usamos estes resultados para discutir a radiação Hawking-Unruh. Como a velocidade angular no exterior do buraco negro em consideração, $\Omega_{h,b}$, depende do parâmetro b , esta quantidade codifica a influência da disclinação e, de fato, é amplificada pela presença deste defeito topológico.

A função de onda também depende do parâmetro b e, como consequência, todas as outras quantidades físicas também são influenciadas. Portanto, usando esta analogia, é possível, em princípio, verificar experimentalmente a radiação Hawking-Unruh emitida pelos buracos negros acústicos e, assumindo que a física que leva à radiação Hawking deve ser a mesma para seu análogo, podemos obter alguma informação sobre o defeito topológico.

Parte V

Cosmologia quântica

10 Cosmologia newtoniana quântica

Lost in time, I wonder will my ship be found
And very soon ...

Neste capítulo obtemos a solução exata da equação de Schrödinger para uma partícula (galáxia) se movendo em um universo newtoniano com constante cosmológica, que é dada em termos das funções biconfluentes de Heun. Os seis primeiros polinômios de Heun da função biconfluente são escritos explicitamente. O espectro de energia, que se assemelha ao correspondente para o oscilador harmônico isotrópico, é também obtido. As funções de onda, bem como os níveis de energia, codificam o papel desempenhado pela constante cosmológica. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [241].

10.1 Operador hamiltoniano

Em um trabalho anterior [242], usando algumas hipóteses acerca da estrutura do universo newtoniano, obtivemos a lagrangiana, L , para o movimento de uma partícula (galáxia) de massa m , que é escrita como

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{GMm}{R} + \frac{1}{6}\Lambda mR^2, \quad (10.1)$$

onde Λ é a constante cosmológica e o último termo na Eq. (10.1) é um tipo de força cosmológica. Usando esta lagrangiana, a equação para o fator de escala, $R(t)$, pode ser escrito como

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R + \frac{1}{3}\Lambda R, \quad (10.2)$$

onde $M = 4\pi R^3\rho/3$ é a massa da esfera (massa total do universo newtoniano). Vale a pena chamar a atenção para o fato de que estamos considerando o caso $p = 0$, isto é, um universo no qual a pressão é nula.

A lagrangiana dada pela Eq. (10.1) não depende explicitamente do tempo, porque o sistema está sobre a ação de um campo de força uniforme, de modo que a constante do movimento, H_{cl} , chamada de hamiltoniano clássico do sistema, pode ser definido como

$$H_{cl} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) \dot{R} - L. \quad (10.3)$$

A partir da Eq. (10.3), podemos obter uma equação para o fator de escalar, $R(t)$, que é análoga à equação de Friedmann, cuja forma é

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - k, \quad (10.4)$$

onde $C = 8\pi G\rho R^3/3$ e $k = -2E/m$ são constantes, e $E = H_{cl}$ é a energia total. Assim, a partir da Eq. (10.3), podemos escrever o hamiltoniano clássico como

$$H_{cl}(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{1}{6}\Lambda mR^2. \quad (10.5)$$

Agora, podemos construir um espaço de fase como (R, P_R) , onde R é a coordenada comóvel com

$$P_R = m\dot{R} \quad (10.6)$$

sendo o momento linear. Assim, substituindo a Eq. (10.6) na Eq. (10.5), o hamiltoniano clássico toma a forma

$$H_{cl}(R, P_R) = \frac{P_R^2}{2m} - \frac{GMm}{R} - \frac{1}{6}\Lambda mR^2. \quad (10.7)$$

Portanto, realizando a quantização canônica

$$P_R \rightarrow P_{R_{op}} = -i\hbar \frac{d}{dR}, \quad (10.8)$$

obtemos o operador hamiltoniano para uma partícula (galáxia) que se move em um universo newtoniano, o qual é dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dR^2} - \frac{GMm}{R} - \frac{1}{6}\Lambda mR^2. \quad (10.9)$$

10.2 Equação de Schrödinger

Nesta seção vamos resolver a equação de Schrödinger para um partícula (galáxia) em um universo newtoniano, dada por

$$H\psi(R) = E\psi(R), \quad (10.10)$$

onde é entendido que a autofunção $\psi(R)$ corresponde ao autovalor E , com $\Psi(R, t) = \psi(R)e^{-iEt/\hbar}$ sendo a função de onda geral da equação de Schrödinger dependente do tempo.

Substituindo a Eq. (10.9) na Eq. (10.10), obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(R)}{dR^2} + \left(-\frac{GMm}{R} - \frac{1}{6}\Lambda mR^2\right)\psi(R) = E\psi(R). \quad (10.11)$$

Note que todas as autofunções correspondem a estados ligados de energia positiva. É mais adequado reescrever a Eq. (10.11) em termos de quantidades adimensionais. Para fazer isso, primeiro introduzimos o parâmetro adimensional

$$\gamma = \frac{2E}{\hbar\Omega}, \quad (10.12)$$

onde

$$\Omega = \left(-\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}. \quad (10.13)$$

Vamos também usar a variável adimensional

$$x = \tau R, \quad (10.14)$$

onde o coeficiente τ é dado por

$$\tau = \left(\frac{m\Omega}{\hbar} \right)^{1/2}. \quad (10.15)$$

Então, a Eq. (10.11) se torna

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\gamma - x^2 - \frac{1}{2}\delta \frac{1}{x} \right) \psi(x) = 0, \quad (10.16)$$

onde o parâmetro δ é dado por

$$\delta = -\frac{4GMm^2}{\tau\hbar^2}. \quad (10.17)$$

Agora, vamos analisar o comportamento assintótico de ψ quando $|x| \rightarrow \infty$. Para qualquer valor finito da energia total E , a quantidade γ e o termo proporcional à x^{-1} se tornam desprezíveis em relação à x^2 , no limite $|x| \rightarrow \infty$, de modo que neste limite, a Eq. (10.16) se reduz a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right) \psi(x) = 0. \quad (10.18)$$

As funções que satisfazem esta equação, para $|x|$ suficientemente grande, são

$$\psi(x) = x^r e^{\pm x^2/2}. \quad (10.19)$$

A função de onda ψ deve ser limitada em toda parte, incluindo $x = \pm\infty$. Portanto, as soluções fisicamente aceitáveis devem conter apenas o sinal negativo no expoente. A análise do comportamento assintótico do sistema em consideração sugere que temos que olhar para soluções da Eq. (10.16) válidas para todo x e possuindo a forma

$$\psi(x) = x e^{-x^2/2} P(x), \quad (10.20)$$

onde $P(x)$ tem de ser determinado apropriadamente. Substituindo a Eq. (10.20) na Eq. (10.16), concluímos que $P(x)$ deve satisfazer a seguinte equação

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \left(\frac{2}{x} - 2x \right) \frac{dP}{dx} + \left[(\gamma - 3) - \frac{1}{2}\delta \frac{1}{x} \right] P = 0. \quad (10.21)$$

10.3 Soluções analíticas

A Eq. (10.21) é um caso particular da equação biconfluente de Heun, cuja forma canônica é dada pela Eq. (2.76). Usando a Eq. (10.20), vemos que as soluções fisicamente aceitáveis da Eq. (10.21) são dadas por

$$\psi_{n,\mu}(x) = x e^{-x^2/2} P_{n,\mu}(\alpha, \beta; x), \quad (10.22)$$

onde as funções $P_{n,\mu}(\alpha, \beta; x)$ são os polinômios de Heun do caso biconfluyente, que satisfazem a equação biconfluyente de Heun, dada por (2.96).

No nosso caso, os parâmetros α e β assumem os valores 1 e 0, respectivamente. Portanto, as formas explícitas dos polinômios de Heun $P_{n,\mu}(1, 0; x)$, para $n = \{0, 1, 2\}$, são dadas como segue.

- $n = 0, \gamma = 3, \delta_0^0 = 0$:

$$P_{0,0}(1, 0; x) = 1. \quad (10.23)$$

- $n = 1, \gamma = 5, (\delta_\mu^1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow \delta_0^1 = +4, \delta_1^1 = -4$:

$$P_{1,0}(1, 0; x) = x - \frac{1}{2} \frac{\delta_0^1}{2} = x - 1, \quad (10.24)$$

$$P_{1,1}(1, 0; x) = x - \frac{1}{2} \frac{\delta_1^1}{2} = x + 1. \quad (10.25)$$

- $n = 2, \gamma = 7, (\delta_\mu^2)^3 - 80\delta_\mu^2 = 0 \Rightarrow \delta_0^2 = +4\sqrt{5}, \delta_1^2 = 0, \delta_2^2 = -4\sqrt{5}$:

$$P_{2,0}(1, 0; x) = x^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta_0^2}{2} x + \frac{1}{6} \left[\frac{(\delta_0^2)^2}{4} - 8 \right] \frac{1}{2} = x^2 - \sqrt{5}x + 1, \quad (10.26)$$

$$P_{2,1}(1, 0; x) = x^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta_1^2}{2} x + \frac{1}{6} \left[\frac{(\delta_1^2)^2}{4} - 8 \right] \frac{1}{2} = x^2 - \frac{2}{3}, \quad (10.27)$$

$$P_{2,2}(1, 0; x) = x^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta_2^2}{2} x + \frac{1}{6} \left[\frac{(\delta_2^2)^2}{4} - 8 \right] \frac{1}{2} = x^2 + \sqrt{5}x + 1. \quad (10.28)$$

Vale a pena chamar a atenção para o fato de que para todos os valores de n , a saber, $n = \{0, 1, 2, \dots\}$, correspondem funções HeunB($\alpha, \beta, \gamma, \delta; x$), as quais são polinômios de grau n em x .

10.4 Níveis de energia

A fim de obter o espectro de energia, vamos usar as Eqs. (2.90) e (10.12), e levar em consideração que $\alpha = 1$. Assim, o espectro de energia para uma partícula (galáxia) no universo newtoniano é dado por

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \Omega = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \left(-\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (10.29)$$

Vemos, a partir da Eq. (10.29), que este espectro de energia mecânica quântica consiste de uma sequência infinita de níveis discretos (veja a Figura 10), o qual são

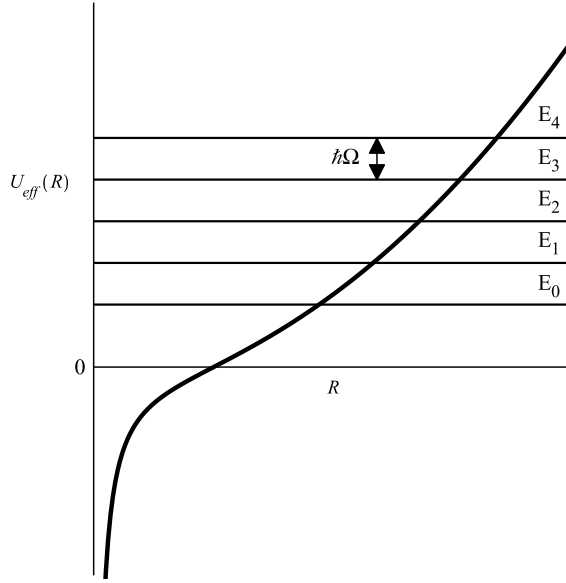


Figura 10 – A energia potencial efetiva do universo newtoniano $U_{eff}(R) = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{6}|\Lambda|mR^2$ e os cinco primeiros níveis de energia são mostrados.

igualmente espaçados e são análogos àqueles obtidos para o oscilador harmônico isotrópico tridimensional. Note que os autovalores dados pela Eq. (10.29) são degenerados.

Se considerarmos um cenário no qual a constante cosmológica é negativa, isto é, $\Lambda = -|\Lambda|$, podemos reescrever o espectro de energia como

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \left(\frac{|\Lambda|}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (10.30)$$

onde $(|\Lambda|/3)^{1/2}$ desempenha o papel da frequência se compararmos a Eq. (10.30) com a correspondente ao espectro de energia do oscilador harmônico isotrópico tridimensional.

10.5 A função de onda para a cosmologia newtoniana

Usando a Eq. (10.22), vemos que para cada valor discreto E_n , dado pela Eq. (10.29), corresponde uma autofunção fisicamente aceitável (veja a Figura 11), dada por

$$\begin{aligned} \psi_{n,\mu}(R) &= N_n \tau R e^{-\tau^2 R^2/2} P_{n,\mu}(\alpha, \beta; \tau R) \\ &= N_n \tau R e^{-\tau^2 R^2/2} \text{HeunB}(\alpha, \beta, \alpha + 2(n+1), \delta_\mu^n; \tau R), \end{aligned} \quad (10.31)$$

onde os parâmetros α , β , γ e δ são dados pelos seguintes valores e expressões:

$$\alpha = 1; \quad (10.32)$$

$$\beta = 0; \quad (10.33)$$

$$\gamma = \frac{2E}{\hbar} \left(-\frac{3}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (10.34)$$

$$\delta = -4GM \left(\frac{m}{\hbar} \right)^{3/2} \left(-\frac{3}{\Lambda} \right)^{1/4}. \quad (10.35)$$

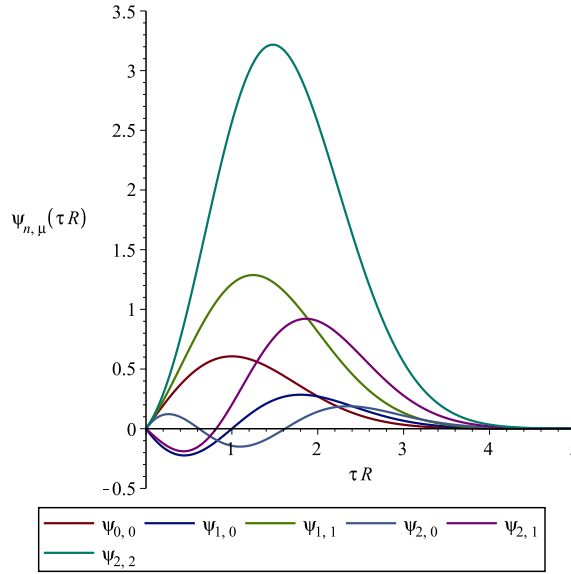


Figura 11 – As seis primeiras funções de onda do universo newtoniano.

A quantidade N_n na Eq. (10.31) é uma constante que (a menos de um fator de fase arbitrário) pode ser determinado exigindo que a função de onda, dada pela Eq. (10.31), obedeça a seguinte relação

$$\int_0^\infty |\psi_{n,\mu}(R)|^2 dR = \frac{|N_n|^2}{\tau} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} P_{n,\mu}^2(\alpha, \beta; x) dx = 1. \quad (10.36)$$

A fim de avaliar esta integral, consideremos a expansão em série de potências de $P_{n,\mu}(\alpha, \beta; x)$ em x , dada pela Eq. (2.88), bem como a segunda expansão em série de potências dada por

$$P_{m,\nu}(\alpha, \beta; x) = \sum_{l=0}^m \frac{A_l}{(1+\alpha)_l} \frac{x^l}{l!}. \quad (10.37)$$

Usando as Eqs. (2.88) e (10.37), obtemos o seguinte resultado

$$N_n = \left(\frac{\tau}{I} \right)^{1/2}, \quad (10.38)$$

onde

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} P_{n,\mu}(\alpha, \beta; x) P_{m,\nu}(\alpha, \beta; x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{A_k A_l}{(1+\alpha)_k (1+\alpha)_l} \frac{1}{k! l!} \int_0^\infty x^{2+k+l} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Para $n = m$, $\mu = \nu$ e $k = l$, temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} P_{n,\mu}^2(\alpha, \beta; x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{A_k^2}{[(1+\alpha)_k k!]^2} \int_0^\infty x^{2+2k} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Visto que

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{-\eta y^u} dy = \frac{1}{u} \eta^{-\lambda/u} \Gamma\left(\frac{\lambda}{u}\right), \quad (10.41)$$

a integral na Eq. (10.40) é simplesmente

$$I = \sum_{k=0}^n \frac{A_k^2}{[(1+\alpha)_k k!]^2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right). \quad (10.42)$$

A partir das Eqs. (10.38) e (10.42) vemos que, fora um fator multiplicativo complexo arbitrário de módulo unitário, a constante de normalização N_n é dada por

$$N_n = \left[\sum_{k=0}^n \frac{A_k^2}{[(1+\alpha)_k k!]^2} \frac{1}{2\tau} \Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right) \right]^{-1/2}. \quad (10.43)$$

Usando a Eq. (10.43), podemos escrever a solução normalizada da equação de Schrödinger em um universo newtoniano como

$$\begin{aligned} \psi_{n,\mu}(R) &= \left[\sum_{k=0}^n \frac{A_k^2}{[(1+\alpha)_k k!]^2} \frac{1}{2\tau} \Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right) \right]^{-1/2} \\ &\quad \times \tau R e^{-\tau^2 R^2/2} \text{HeunB}(\alpha, \beta, \alpha + 2(n+1), \delta_\mu^n; \tau R). \end{aligned} \quad (10.44)$$

10.6 Conclusões parciais

Apresentamos a solução exata e geral da equação de Schrödinger para uma partícula (galáxia) que se move em um universo newtoniano, levando em conta a constante cosmológica. O conjunto completo das soluções, dadas em termos das funções biconfluentes de Heun, satisfaz as condições de contorno apropriadas, a saber, $\psi(0) = 0$ e $\psi(\infty) = 0$, e é válido ao longo de todo o intervalo $0 \leq x < \infty$.

A fim de obter uma solução bem comportada, impusemos a condição polinomial nestas soluções analíticas e, assim, obtivemos os polinômios de Heun para o caso biconfluyente.

Uma expressão exata para o espectro de energia foi também obtida. Estes níveis de energia são análogos aos correspondentes ao oscilador harmônico isotrópico tridimensional, com uma frequência efetiva dada em termos da constante cosmológica.

Para concluir, podemos enfatizar que as funções de onda, bem como o espectro de energia, codifica a presença da força cosmológica que atua entre as partículas (galáxias) deste universo newtoniano.

11 Equação de Wheeler-DeWitt no universo de Friedmann-Robertson-Walker

The Bomber's moon ...

Neste capítulo mostramos que as soluções da equação de Wheeler-DeWitt, em um universo isotrópico e homogêneo, são dadas por funções triconfluentes de Heun, para as geometrias espacialmente fechada, plana e aberta do universo de Friedmann-Robertson-Walker, preenchido com diferentes formas de energia. Em um universo dominado por matéria, encontramos a solução polinomial e o espectro da densidade de energia. Nos casos de universos dominados por radiação e vácuo, não existem soluções polinomias, como será mostrado. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [243].

11.1 Classe de soluções da equação de Wheeler-DeWitt

A equação de WDW foi derivada originalmente na aproximação de minisuperespaço para universos fechados e vazios [244, 245]. Mas, é importante considerar diferentes geometrias, bem com a possibilidade de termos a presença de matéria e radiação [246], e outras formas de energia.

Vamos admitir que o universo é homogêneo e isotrópico, e, portanto, pode ser descrito usando o modelo de minisuperespaço [247] com um parâmetro fundamental, o fator de escala a ($0 \leq a < \infty$) do universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

No caso do universo de FRW, a lagrangeana toma a forma [248]

$$L = -\frac{3\pi c^2}{4G} a^3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho + \rho_{vac}) \right], \quad (11.1)$$

onde diferentes formas de energia são levadas em consideração, bem como as geometrias ($k = \{-1, 0, +1\}$, os quais correspondem aos universos aberto, plano e fechado, respectivamente).

Substituindo o momento conjugado a a , dado por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi c^2}{2G} a \dot{a}, \quad (11.2)$$

e a lagrangeana na equação de Euler-Lagrange $\dot{p} - \partial L / \partial a = 0$, obtemos o seguinte resultado:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho + \rho_{vac}) = 0. \quad (11.3)$$

A evolução clássica do universo, em diferentes estágios, pode ser obtida resolvendo essa equação, a qual pode ser usada para concluir que o hamiltoniano $H = p\dot{a} - L$, escrito em termos do momento, p ,

$$H(p, a) = \frac{3\pi c^2}{4G} a^3 \left[\frac{4G^2 p^2}{9\pi^2 c^4 a^4} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho + \rho_{vac}) \right] \equiv 0, \quad (11.4)$$

é identicamente zero.

Agora, a fim de obter a equação de WDW na aproximação de minisuperespaço, fazemos a substituição $p \rightarrow -i\hbar\partial/\partial a$ e impomos que $H\Psi = 0$. Assim, obtemos a equação de WDW em um minisuperespaço adequado pela substituição das variáveis dinâmicas e seus conjugados pelos correspondentes operadores. Explicitamente, no universo de FRW, a equação de WDW pode ser escrita na forma [248]

$$\left\{ \frac{d^2}{da^2} - \frac{9\pi c^4 a^2}{4\hbar^2 G^2} \left[kc^2 - \frac{8\pi G a^2}{3c^2} (\rho + \rho_{vac}) \right] \right\} \Psi(a) = 0, \quad (11.5)$$

onde estamos considerando que a função de onda depende apenas do fator de escala.

Vamos considerar a expressão geral para a densidade de energia na seguinte forma

$$\rho = A_\omega a^{-3(\omega+1)}, \quad (11.6)$$

onde $A_\omega = \rho_{\omega 0} a_0^{3(\omega+1)}$, com $\rho_{\omega 0}$ sendo o valor de ρ_ω no tempo atual, e ω sendo tal que

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{para poeira (predominância de matéria; } \rho_m), \\ \frac{1}{3} & \text{para radiação (predominância de radiação; } \rho_r), \\ -1 & \text{para de Sitter (falso vácuo; } \rho_v). \end{cases} \quad (11.7)$$

A densidade de energia do vácuo, ρ_{vac} , pode ser expressa, em termos da constante cosmológica, na seguinte forma:

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}. \quad (11.8)$$

Agora, substituindo as Eqs. (11.6)–(11.8) na Eq. (11.5), obtemos

$$-\hbar^2 \frac{d^2 \Psi(a)}{da^2} + V_{eff}(a) \Psi(a) = 0, \quad (11.9)$$

onde

$$V_{eff}(a) = \frac{9\pi^2 c^6 k}{4G^2} \left[a^2 - \frac{1}{k} \left(\frac{\Lambda}{3} a^4 + \frac{8\pi G A_\omega}{3c^4} a^{1-3\omega} \right) \right]. \quad (11.10)$$

A Eq. (11.9) é semelhante a equação de Schrödinger unidimensional dependente do tempo para energia zero e para uma partícula com $1/2$ de massa unitária, com um potencial efetivo, $V_{eff}(a)$, dado pela Eq. (11.10), a qual é válida para ω arbitrário.

A expressão para o potencial efetivo, V_{eff} , nos diz que o minisuperespaço pode ser dividido em regiões onde $V_{eff} > 0$ e $V_{eff} < 0$, cujos limites dependem do sinal da constante cosmológica, Λ .

Note que para pequenos valores de a , podemos desprezar os termos proporcionais a a^4 e, assim, em um cenário de de Sitter, o potencial efetivo é proporcional a a^2 , neste limite. Neste caso, a solução da equação de WDW é dada em termos das funções de Bessel [247] e a função de onda se aproxima de uma constante para $a \rightarrow 0$. Por outro lado, para valores arbitrários de a , o potencial não é tão simples e, como consequência, as soluções da equação de WDW são mais complicadas e dadas em termos das funções de Heun, como iremos mostrar na próxima seção, na qual vamos obter as soluções analíticas da Eq. (11.9) com um potencial efetivo dado pela Eq. (11.10), para quaisquer valores do fator de escala.

Note também que quando $a = 0$, o universo corresponde ao de FRW quântico, com raio nulo. Neste caso, a solução da equação de WDW se aproxima de uma constante e descreve um estado chamado “nada” (“*nothing*”) na literatura [249]. Este estado pode ser criado por um tunelamento de mecânica quântica através de uma barreira de potencial que aparece em $a = a_0 \neq 0$.

11.2 Solução da equação de WDW para $\omega = 0$

No que se segue, vamos encontrar as soluções da equação de WDW para um fator de escala arbitrário ($0 \leq a < \infty$), em termos das funções de Heun.

Primeiro, vamos considerar a solução da equação de WDW na era da matéria, em cujo caso $\omega = 0$. Assim, a Eq. (11.9) toma a forma

$$-\hbar^2 \frac{d^2 \Psi(a)}{da^2} + \left(\frac{9\pi^2 c^6 k}{4G^2} a^2 - \frac{6\pi^3 c^2 \rho_{m0} a_0^3}{G} a - \frac{3\pi^2 c^6 \Lambda}{4G^2} a^4 \right) \Psi(a) = 0. \quad (11.11)$$

O comportamento de $V_{eff}(a)$ para este caso é mostrado nas Figuras 12 e 13, para valores positivos e negativos da constante cosmológica, respectivamente.

Note que para $\Lambda > 0$, o potencial é não ligado (veja a Figura 12), diferentemente do caso de um universo vazio, onde $V_{eff}(a)$ contem dois termos, um proporcional a a^2 e outro proporcional a a^4 , de tal forma que existe a possibilidade de termos estados ligados, bem como estados quânticos criados pelo processo de tunelamento [246]. Para $\Lambda < 0$, podemos ter estados ligados (veja a Figura 13).

É mais adequado reescrever a Eq. (11.11) em termos de quantidades adimensionais. Para fazer isso, primeiro vamos introduzir o parâmetro adimensional

$$\beta = \frac{6\pi^2 \rho_{m0} a_0^3}{\hbar c \Omega}, \quad (11.12)$$

onde

$$\Omega = \left(-\frac{\Lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.13)$$

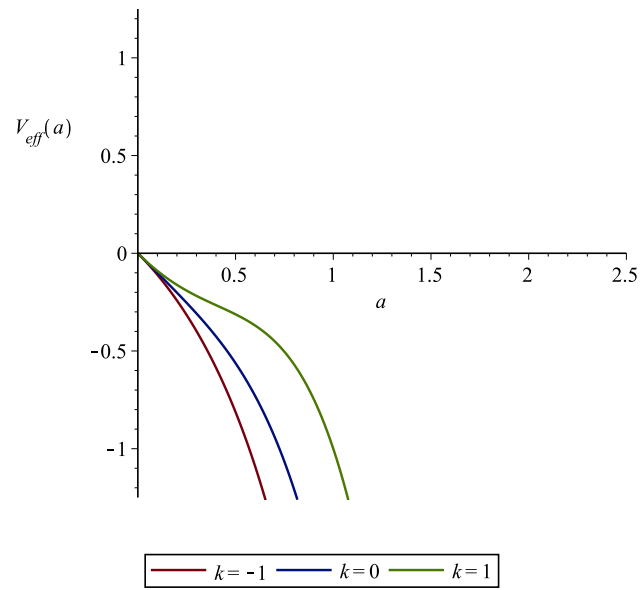


Figura 12 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 0$ e $\Lambda > 0$.

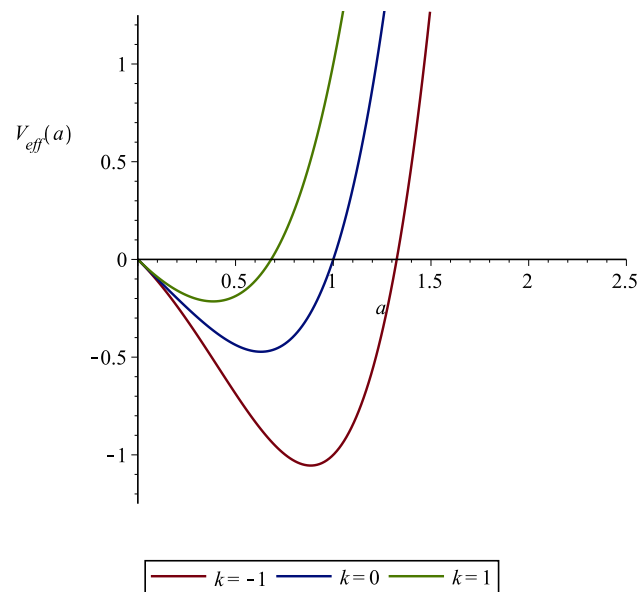


Figura 13 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 0$ e $\Lambda = -|\Lambda|$.

Vamos também usar a variável adimensional

$$x = \xi a, \quad (11.14)$$

onde o coeficiente ξ é dado por

$$\xi = c \left(\frac{\pi \Omega}{\hbar G} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (11.15)$$

Então, a Eq. (11.11) se torna

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \left(\beta x - \frac{3}{2} \gamma x^2 - \frac{9}{4} x^4 \right) \Psi(x) = 0, \quad (11.16)$$

onde o parâmetro γ é dado por

$$\gamma = \frac{3c^2 k}{2} \left(\frac{\pi}{\hbar G \Omega^2} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (11.17)$$

Agora, podemos reescrever a Eq. (11.16) em uma forma que se assemelha a uma equação de Heun. Vamos admitir que Ψ pode ser escrita na forma

$$\Psi(x) = e^{-\frac{1}{2}(x^3 + \gamma x)} P(x), \quad (11.18)$$

onde $P(x)$ tem de ser determinado apropriadamente. Substituindo a Eq. (11.18) na Eq. (11.16), concluímos que $P(x)$ deve satisfazer a seguinte equação

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - (\gamma + 3x^2) \frac{dP}{dx} + \left[\frac{\gamma^2}{4} + (\beta - 3)x \right] P = 0. \quad (11.19)$$

A Eq. (11.19) é um caso particular da equação triconfluente de Heun, cuja forma canônica é dada pela Eq. (2.99). Usando a Eq. (11.18), vemos que as soluções fisicamente aceitáveis da Eq. (11.19) são dadas por

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}(x^3 + \gamma x)} P_n(\alpha, \gamma; x), \quad (11.20)$$

onde as funções $P_n(\alpha, \gamma; x)$ são os polinômios de Heun do caso triconfluente, que satisfazem a equação triconfluente de Heun (2.109).

No nosso caso, o parâmetro α assume o valor $\gamma^2/4$ e o parâmetro γ é dado pela Eq. (11.17). Portanto, as expressões dos polinômios de Heun $P_n(\alpha, \gamma; x)$, para $n = \{0, 1, 2\}$, são dadas como segue.

- $n = 0, \beta = 3, \Pi_{0+1} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$:

$$P_0(\alpha, \gamma; x) = 1. \quad (11.21)$$

- $n = 1, \beta = 6, \Pi_{1+1} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 3\gamma = 0$:

$$P_1(\alpha, \gamma; x) = x - \frac{\alpha}{3}. \quad (11.22)$$

$$\bullet \quad n = 2, \beta = 9, \Pi_{2+1} = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 12\alpha\gamma + 36 = 0:$$

$$P_2(\alpha, \gamma; x) = x^2 - \frac{\alpha}{3}x + \frac{\alpha^2}{36} - \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*). \quad (11.23)$$

Vale a pena notar que para cada valor de n , a saber, $n = \{0, 1, 2, \dots\}$, corresponde uma função $\text{HeunT}(\alpha, \beta, \gamma; x)$, a qual é um polinômio de grau n em x .

11.2.1 Espectro da densidade de energia

Para obter o espectro da densidade de energia correspondente à solução da equação de WDW em um minisuperespaço, com $\omega = 0$, vamos usar as Eqs. (2.107) e (11.12). Assim, encontramos o seguinte resultado:

$$\rho_{m0,n} = (n+1) \frac{\hbar c \Omega}{2\pi^2 a_0^3} = (n+1) \frac{\hbar c}{2\pi^2 a_0^3} \left(-\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (11.24)$$

Se considerarmos um cenário no qual a constante cosmológica é negativa, isto é, $\Lambda = -|\Lambda|$, o espectro de energia pode ser reescrito como

$$\rho_{m0,n} = (n+1) \frac{\hbar c}{2\pi^2 a_0^3} \left(\frac{|\Lambda|}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (11.25)$$

Vemos, portanto, a partir da Eq. (11.25), que este espectro de energia consiste de uma sequência infinita de níveis discretos (veja a Figura 14), os quais são igualmente espaçados. Note que os autovalores dados pela Eq. (11.25) são não degenerados.

Vamos, agora, retornar a função de onda original. Usando a Eq. (11.20), vemos que para cada valor discreto de $\rho_{m0,n}$, expresso pela Eq. (11.24), corresponde n soluções fisicamente aceitáveis (veja a Figura 15), dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_n(\xi a) &= N_n e^{-\frac{1}{2}(\xi^3 a^3 + \gamma \xi a)} P_n(\alpha, \gamma; \xi a) \\ &= N_n e^{-\frac{1}{2}(\xi^3 a^3 + \gamma \xi a)} \text{HeunT}(\alpha, 3(n+1), \gamma; \xi a), \end{aligned} \quad (11.26)$$

onde a quantidade N_n é uma constante a ser determinada e os parâmetros α , β e γ são dados pelas seguintes expressões

$$\alpha = \frac{9c^4 k^2}{16} \left(\frac{3\pi}{\hbar G \Lambda}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{9c^4 k^2}{16} \left(\frac{3\pi}{\hbar G |\Lambda|}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad (11.27)$$

$$\beta = \frac{6\pi^2 \rho_{m0} a_0^3}{\hbar c} \left(-\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6\pi^2 \rho_{m0} a_0^3}{\hbar c} \left(\frac{3}{|\Lambda|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11.28)$$

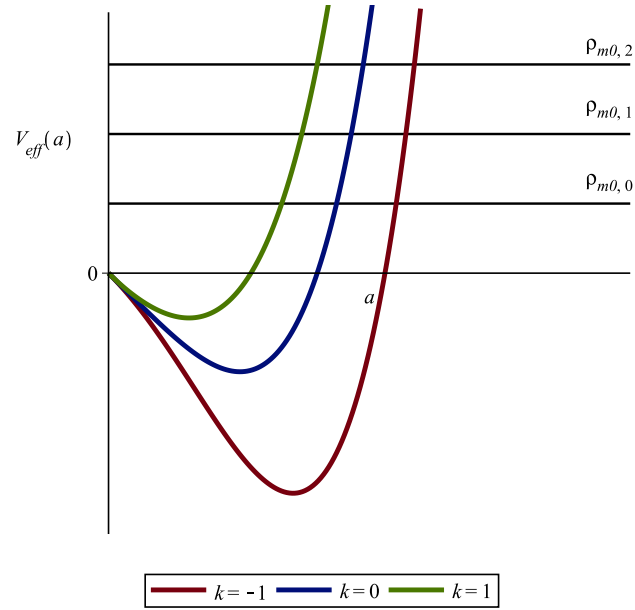


Figura 14 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 0$ e $\Lambda = -|\Lambda|$. Os três primeiros níveis de densidade de energia também são mostrados.

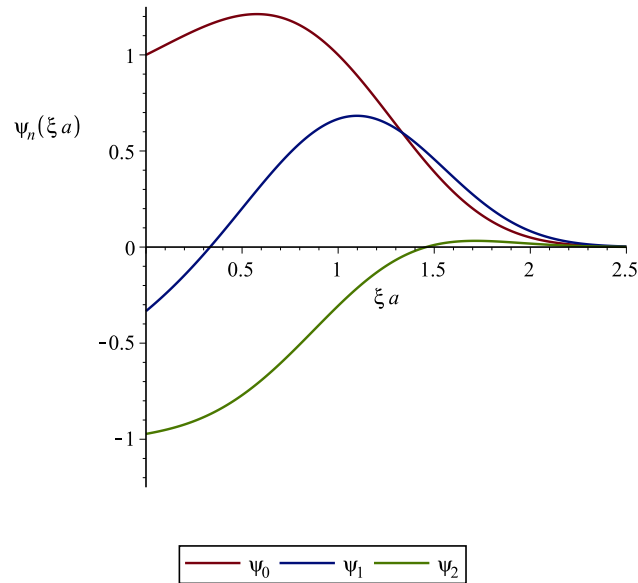


Figura 15 – As três primeiras funções de onda para $k = -1$, $\omega = 0$ e $\Lambda = -|\Lambda|$.

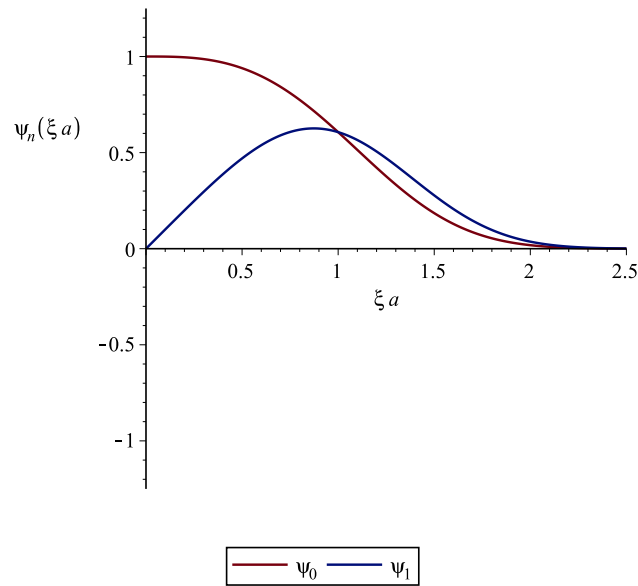


Figura 16 – As três primeiras funções de onda para $k = 0$, $\omega = 0$ e $\Lambda = -|\Lambda|$. Note que não existe Ψ_2 porque $\alpha \sim k^2$ e devemos ter $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

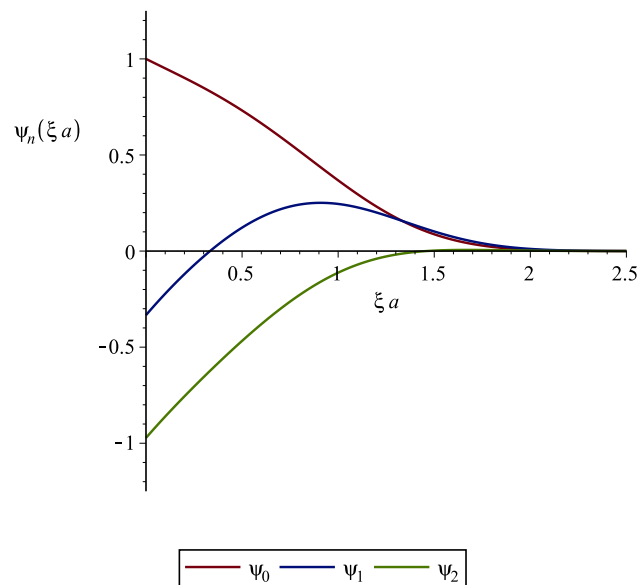


Figura 17 – As três primeiras funções de onda para $k = 1$, $\omega = 0$ e $\Lambda = -|\Lambda|$.

$$\gamma = \frac{3c^2k}{2} \left(-\frac{3\pi}{\hbar G\Lambda} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3c^2k}{2} \left(\frac{3\pi}{\hbar G|\Lambda|} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (11.29)$$

Note que para $\Lambda < 0$ temos estados ligados, como mostrado na Figura 14. A partir das Figuras 15, 16 e 17, vemos que as soluções são todas finitas no limite $a \rightarrow \infty$. Vale a pena chamar a atenção para o fato de que o comportamento obtido para as funções de onda em grandes valores de a garante que a correspondência com a teoria clássica é preservada neste regime.

11.3 Solução da equação de WDW para $\omega = 1/3$

Agora, vamos admitir que $\omega = 1/3$, em cujo caso a equação de WDW é reescrita como

$$-\hbar^2 \frac{d^2 \Psi(a)}{da^2} + V_{eff}(a) \Psi(a) = 0, \quad (11.30)$$

onde

$$V_{eff}(a) = \frac{9\pi^2 c^6 k}{4G^2} a^2 - \frac{6\pi^3 c^2 \rho_{r0} a_0^4}{G} - \frac{3\pi^2 c^6 \Lambda}{4G^2} a^4. \quad (11.31)$$

O comportamento do potencial efetivo é mostrado nas Figuras 18 e 19, para valores positivos e negativos da constante cosmológica, respectivamente.

É importante chamar a atenção para o fato de que para $\omega = 1/3$, $\Lambda > 0$ e $k = 1$ (universo fechado) um efeito de tunelamento pode ocorrer. Para $k = \{0, -1\}$ esta não é uma possibilidade. Por outro lado, para $\Lambda < 0$, não existe a possibilidade de criar um estado quântico por um processo de tunelamento.

Para resolver a Eq. (11.30), vamos introduzir a variável adimensional dada pela Eq. (11.14), juntamente com as definições dadas pelas Eqs. (11.12) e (11.13). Vamos também admitir que a função de onda Ψ é dada pela Eq. (11.18), com o parâmetro γ definido como na Eq. (11.17).

Assim, seguindo estritamente o que foi feito na seção anterior, chegamos em uma equação para $P(x)$, a qual é dada por

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - (\gamma + 3x^2) \frac{dP}{dx} + \left(\frac{6\pi^3 c^2 \rho_{r0} a_0^4}{\xi^2 \hbar^2 G} + \frac{\gamma^2}{4} - 3x \right) P = 0. \quad (11.32)$$

A Eq. (11.32) é um caso particular da equação triconfluente de Heun, dada por (2.99). Assim, sua solução geral pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= N e^{-\frac{1}{2}(\xi^3 a^3 + \gamma \xi a)} P(\xi a) \\ &= N e^{-\frac{1}{2}(\xi^3 a^3 + \gamma \xi a)} \text{HeunT}(\alpha, \beta, \gamma; \xi a), \end{aligned} \quad (11.33)$$

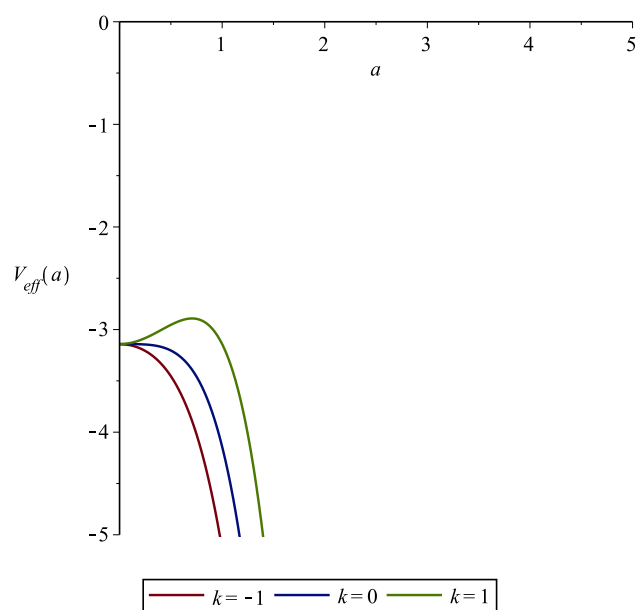


Figura 18 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 1/3$ e $\Lambda > 0$.

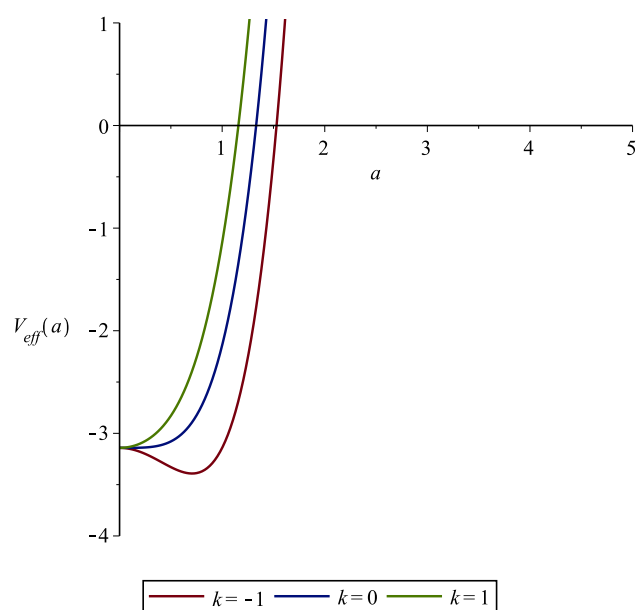


Figura 19 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = 1/3$ e $\Lambda = -|\Lambda|$.

onde a quantidade N é uma constante a ser determinada e os parâmetros α , β e γ são dados pelas seguintes expressões:

$$\alpha = \left(\frac{\hbar G}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{|\Lambda|} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{6\pi^3 \rho_{r0} a_0^4}{\hbar^2 G} + \frac{9c^4 k^2}{16} \left(\frac{3\pi}{\hbar G |\Lambda|} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (11.34)$$

$$\beta = 0, \quad (11.35)$$

$$\gamma = \frac{3c^2 k}{2} \left(\frac{3\pi}{\hbar G |\Lambda|} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (11.36)$$

Note que no presente caso, $\beta = 0$ e, assim, não existe solução polinomial.

11.4 Solução da equação de WDW para $\omega = -1$

Para $\omega = -1$, a equação de WDW se torna

$$-\hbar^2 \frac{d^2 \Psi(a)}{da^2} + V_{eff}(a) \Psi(a) = 0, \quad (11.37)$$

onde

$$V_{eff}(a) = \frac{9\pi^2 c^6 k}{4G^2} a^2 - \left(\frac{6\pi^3 c^2 \rho_{v0}}{G} + \frac{3\pi^2 c^6 \Lambda}{4G^2} \right) a^4. \quad (11.38)$$

O comportamento do potencial efetivo é mostrado nas Figuras 20 e 21, para valores positivos e negativos da constante cosmológica, respectivamente.

No presente caso, para $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$, e levando em consideração um universo fechado, a probabilidade de ocorrer um tunelamento através da barreira é diferente de zero. Para os universos plano e aberto, não existe possibilidade de ocorrência de tal fenômeno.

Para resolver a Eq. (11.37), mais uma vez vamos introduzir uma variável adimensional, como foi feito em Eq. (11.14), onde agora o coeficiente ξ é dado por

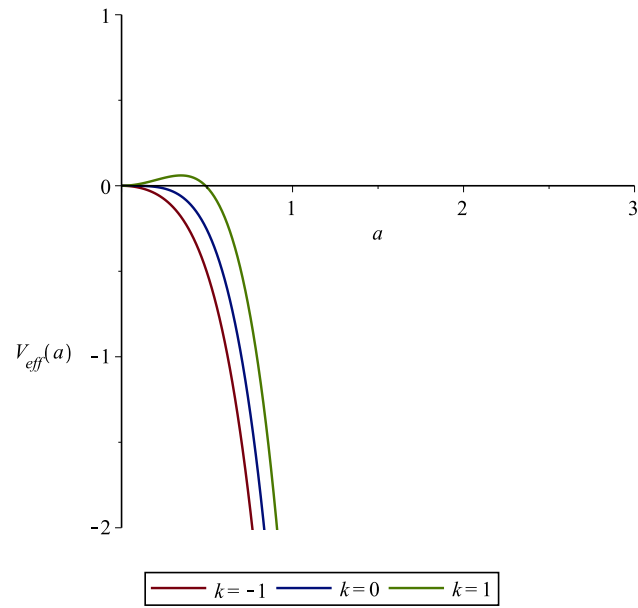
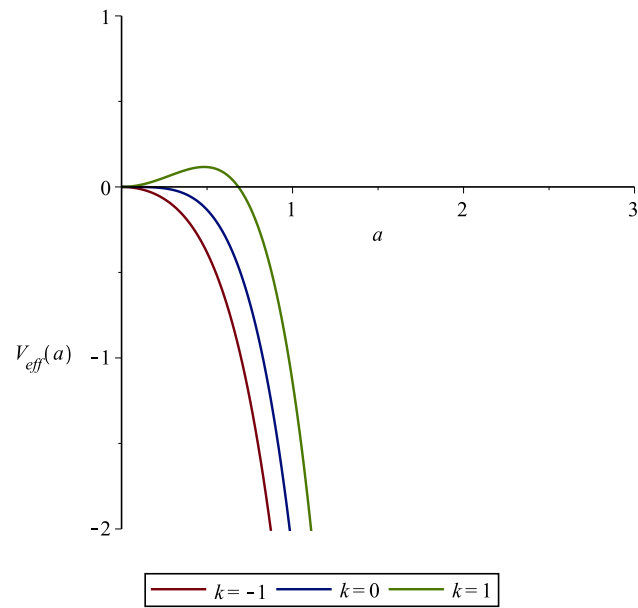
$$\xi = \left(-\frac{8\pi^3 c^2 \rho_{v0}}{3\hbar^2 G} + \frac{\pi^2 c^6 |\Lambda|}{3\hbar^2 G^2} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (11.39)$$

Vamos também admitir que a função de onda, Ψ , pode ser escrita de acordo com a Eq. (11.18), onde agora o parâmetro adimensional γ é dado por

$$\gamma = \frac{3\pi^2 c^6 k}{2\hbar^2 G^2} \left(-\frac{8\pi^3 c^2 \rho_{v0}}{3\hbar^2 G} + \frac{\pi^2 c^6 |\Lambda|}{3\hbar^2 G^2} \right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (11.40)$$

Então, a Eq. (11.37) se torna

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - (\gamma + 3x^2) \frac{dP}{dx} + \left(\frac{\gamma^2}{4} - 3x \right) P = 0, \quad (11.41)$$


 Figura 20 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = -1$ e $\Lambda > 0$.

 Figura 21 – A energia potencial efetiva, $V_{eff}(a)$, para $\omega = -1$ e $\Lambda = -|\Lambda|$.

que é um caso particular da equação triconfluente de Heun, dada por (2.99). Assim, como nos casos anteriores, sua solução geral pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= N e^{-\frac{1}{2}(\xi^3 a^3 + \gamma \xi a)} P(\xi a) \\ &= N e^{-\frac{1}{2}(\xi^3 a^3 + \gamma \xi a)} \text{HeunT}(\alpha, \beta, \gamma; \xi a),\end{aligned}\quad (11.42)$$

onde a quantidade N é uma constante a ser determinada e os parâmetros α , β e γ são dados pelas seguintes expressões:

$$\alpha = \frac{\gamma^2}{4}, \quad (11.43)$$

$$\beta = 0, \quad (11.44)$$

$$\gamma = \frac{3\pi^2 c^6 k}{2\hbar^2 G^2} \left(-\frac{8\pi^3 c^2 \rho_{v0}}{3\hbar^2 G} + \frac{\pi^2 c^6 |\Lambda|}{3\hbar^2 G^2} \right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (11.45)$$

Como no universo dominado por radiação, no presente caso, temos que $\beta = 0$, o que significa que não existe uma solução polinomial.

11.5 Conclusões parciais

Mostramos que no universo de Friedmann-Robertson-Walker, para as geometrias espacialmente fechada, plana e aberta, e levando em consideração o conteúdo de energia correspondente à matéria, radiação e vácuo, todas as soluções analíticas da equação de Wheeler-DeWitt são dadas em termos das funções triconfluentes de Heun. Em particular, para um universo dominado por matéria, a função de onda se reduz a polinômios em potências do fator de escala, multiplicados por uma exponencial que também depende do fator de escala.

Os gráficos das três primeiras funções de onda para $k = -1, 0$ e $+1$, em um universo dominado por matéria, são mostrados nas Figuras 15, 16 e 17, respectivamente. A partir dessas figuras, podemos ver o quão sensíveis as soluções são em relação à geometria. Para o espectro de energia, ele corresponde a uma sequência infinita de níveis discretos, igualmente espaçados, proporcionais a raiz quadrada da constante cosmológica.

Na literatura, algumas investigações a cerca do significado das soluções da equação de WDW [113], bem como das amplitudes de transição e condições de contorno que podem ser aplicadas [249], são baseadas no limite clássico ($a \gg 1$) e no universo primordial ($a \ll 1$). Com estas restrições, algum progresso foi feito no entendimento destes problemas.

Neste capítulo obtivemos as soluções analíticas da equação de WDW válida para todos os valores do fator de escala. Assim, em princípio, podemos usar estas soluções para entender o problema relativo a interpretação da função de onda, para encontrar a mais

apropriada condição de contorno, para investigar as amplitudes de transição e para prever a realização de diferentes estágios da evolução do universo, mas agora para todos os valores do fator de escala, e não apenas muito próximo do limite clássico e muito afastado deste regime.

Portanto, com as soluções da equação de WDW, obtidas sem as restrições em relação aos valores a serem assumidos pelo fator de escala, acreditamos que, em princípio, pode ser possível entender melhor os problemas que surgem quando comparado ao cenário no qual apenas valores assintóticos do fator de escala, a saber, $a \ll 1$ e $a \gg 1$, são levados em consideração. Neste sentido, esperamos que mais algum progresso no entendimento do papel desempenhado pela equação de WDW na cosmologia quântica possa ser feito.

Parte VI

Flutuações quânticas da geometria

12 As flutuações da geometria do espaço-tempo e o desvio geodésico

Will show us light
And as we crash ...

Neste capítulo, as flutuações quânticas da equação do desvio geodésico em um espaço-tempo plano são discutidas. Calculamos as flutuações médias quadráticas resultantes na velocidade relativa e na separação de partículas teste. O efeito destas flutuações quânticas da geometria do espaço-tempo é dado em termos da função de correlação do tensor de Riemann. Três diferentes fontes das flutuações do tensor de Riemann são consideradas: um banho térmico de grávitons, grávitons em um estado *squeezed* e o estado de vácuo de grávitons. Os resultados referentes a esse capítulo foram publicados na Ref. [250].

12.1 Flutuações da equação do desvio geodésico

Consideremos duas partículas teste cujas linhas de universo são geodésicas tipo-tempo infinitesimalmente separadas, como representado na Figura 22, onde $\epsilon \ll 1$.

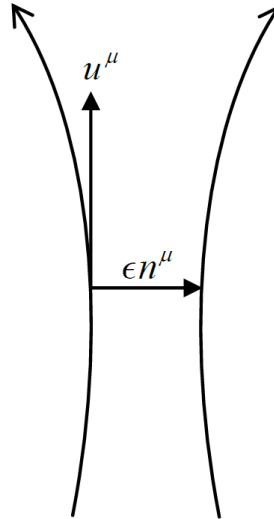


Figura 22 – Geodésicas tipo-tempo para duas partículas teste vizinhas, com quadrivelocidade u^μ e separação ϵn^μ .

Os quadri vetores de velocidade, u^μ , e de separação (unitário tipo-espaço), n^μ , são dados, respectivamente, por

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (12.1)$$

e

$$n^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dn} \quad \Leftrightarrow \quad n^\mu n_\mu = 1. \quad (12.2)$$

Note que estamos considerando a distância entre as partículas geodésicas como um múltiplo de n^μ .

A variação do vetor separação entre duas geodésicas vizinhas é descrita pela equação do desvio geodésico, que vamos escrever na forma

$$\frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\nu\lambda} u^\alpha n^\nu u^\lambda, \quad (12.3)$$

onde τ é o tempo próprio e $R^\mu_{\alpha\nu\lambda}$ é o tensor de Riemann. Para partículas na geodésica vizinha, a aceleração relativa por unidade de comprimento próprio é dada por [251]

$$\alpha \equiv n_\mu \frac{D^2 n^\mu}{d\tau^2} = -R_{\mu\alpha\nu\lambda} n^\mu u^\alpha n^\nu u^\lambda. \quad (12.4)$$

Assim, se a partícula parte do repouso no tempo próprio $\tau = 0$, então, no tempo próprio $\tau = \tau_0$ podemos definir a velocidade relativa por unidade de comprimento próprio como

$$v \equiv n_\mu \frac{Dn^\mu}{d\tau} = - \int_0^{\tau_0} d\tau \, R_{\mu\alpha\nu\lambda}(\tau) \, n^\mu u^\alpha n^\nu u^\lambda, \quad (12.5)$$

onde o tensor de Riemann depende do tempo próprio ao longo da geodésica. A Eq. (12.5) define a velocidade escalar em um referencial onde $n^\mu = (0, \vec{n})$. Note que v é estritamente uma velocidade por unidade de comprimento de separação e, portanto, possui dimensões do inverso de comprimento em unidades de $c = 1$.

Agora, vamos supor que a geometria do espaço-tempo é sujeita às flutuações quânticas. De fato, dado um *ensemble* de geodésicas, medidas da velocidade relativa ao longo da mesma linha fornecerão diferentes resultados. Portanto, devemos tomar o valor esperado dessas medidas, assim como o desvio padrão. Para fazer isso, vamos admitir que o tensor de Riemann está sujeito às flutuações quânticas, as quais podem ser, em princípio, ativa, passiva ou ambas. Temos que especificar como os quadri-vetores u^μ e n^μ se comportam sob a ação dessas flutuações. Na verdade, a hipótese mais simples é que ambos, u^μ e n^μ , não flutuam em perturbações de baixa ordem no espaço-tempo. Fisicamente, isto é equivalente a admitir que ambas, fonte e detector, estão localizadas em uma região plana, ou ambas estão rigidamente ligadas uma a outra por forças não-gravitacionais. Finalmente, vamos admitir que a perturbação é desprezível sobre ambas, fonte e detector.

A velocidade relativa média das partículas, $\langle v \rangle$, é agora obtida tomando a média da Eq. (12.5) como segue

$$\langle v \rangle = - \int_0^{\tau_0} d\tau \, \langle R_{\mu\alpha\nu\lambda}(\tau) \rangle \, n^\mu u^\alpha n^\nu u^\lambda, \quad (12.6)$$

As flutuações ao redor da trajetória média na direção de n^μ são descritas por

$$\begin{aligned}\Delta v &= v - \langle v \rangle \\ &= - \int_0^{\tau_0} d\tau R_{\mu\alpha\nu\lambda}(\tau) n^\mu u^\alpha n^\nu u^\lambda + \int_0^{\tau_0} d\tau \langle R_{\mu\alpha\nu\lambda}(\tau) \rangle n^\mu u^\alpha n^\nu u^\lambda \\ &= - \int_0^{\tau_0} d\tau [R_{\mu\alpha\nu\lambda}(\tau) - \langle R_{\mu\alpha\nu\lambda}(\tau) \rangle] n^\mu u^\alpha n^\nu u^\lambda.\end{aligned}\quad (12.7)$$

Em geral, caracterizamos a flutuação da velocidade relativa em função da variação do tempo próprio como advindo de um valor esperado não nulo do tensor de Riemann. Portanto, a variância da velocidade relativa, $\langle (\Delta v)^2 \rangle$, pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\langle (\Delta v)^2 \rangle &= \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 \\ &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x') n^\alpha u^\lambda n^\mu u^\nu n^\gamma u^\delta n^\rho u^\sigma,\end{aligned}\quad (12.8)$$

onde a função de correlação do tensor de Riemann, $C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x')$, é dada por

$$C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x') = \langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle - \langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle \langle R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle. \quad (12.9)$$

Esta expressão descreve as flutuações do tensor de Riemann. Aqui, os índices $\alpha\lambda\mu\nu$ se referem ao ponto no espaço-tempo x (o qual corresponde ao ponto τ), enquanto os índices $\gamma\delta\rho\sigma$ se referem ao ponto no espaço-tempo x' (o qual corresponde ao ponto τ'). A Eq. (12.8) é o resultado chave para as flutuações do desvio geodésico e ela se aplica às flutuações tanto ativa, quanto passiva da geometria do espaço-tempo. No que segue, vamos avaliar a dispersão na velocidade relativa, dada pela Eq. (12.8), para três diferentes fontes de flutuações ativas.

12.2 Estado térmico de grávitons

Nesta seção vamos analisar as flutuações produzidas por um banho térmico de grávitons, o qual pode ser criado, em princípio, pelo efeito Hawking ou pela produção cosmológica de partículas [252, 253]. Neste caso, vamos supor que a geometria do espaço-tempo flutua de tal forma que [254]

$$\langle \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \rangle = \langle R^\alpha_{\lambda\mu\nu} \rangle = 0, \quad (12.10)$$

mas

$$\langle R^\alpha_{\lambda\mu\nu} R^\gamma_{\delta\rho\sigma} \rangle \neq 0. \quad (12.11)$$

Essas duas suposições significam que estamos desprezando a curvatura média do espaço-tempo devido ao banho de grávitons. Portanto, a geometria média corresponde ao espaço-tempo de Minkowski. Além disso, visto que estamos lidando com um estado quântico térmico a temperatura T , a função de correlação do tensor de Riemann pode ser escrita como

$$C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma} = \langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle_\beta, \quad (12.12)$$

onde $\langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x)R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle_\beta$ é a função de dois pontos térmica normalmente ordenada do tensor de Riemann, com $\beta = 1/T$. Portanto, a Eq. (12.8) se reduz a

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' \langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x)R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle_\beta n^\alpha u^\lambda n^\mu u^\nu n^\gamma u^\delta n^\rho u^\sigma. \quad (12.13)$$

Vamos escolher o caso onde ambas, fonte e detector, estão inicialmente em repouso um em relação ao outro, e em relação ao banho térmico de grávitons. Esta escolha é tal que

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (12.14)$$

$$n^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad (12.15)$$

onde admitimos que as partículas se propagam na direção x . Assim, substituindo as Eqs. (12.14)-(12.15) na Eq. (12.13), obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v)^2 \rangle &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' \langle R_{xtxt}(x)R_{xtxt}(x') \rangle_\beta n^x u^t n^x u^t n^x u^t n^x u^t \\ &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' \langle R_{txtx}(x)R_{txtx}(x') \rangle_\beta, \end{aligned} \quad (12.16)$$

onde usamos as propriedades cíclica e de simetria do tensor de Riemann, a saber,

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\lambda\nu\mu}. \quad (12.17)$$

Agora, vamos introduzir a função de dois pontos térmica do tensor de Riemann (ver Apêndice C.1). Ela é dada por

$$\langle R_{txtx}(x)R_{txtx}(x') \rangle_\beta = \frac{1}{4}(\partial_t^4 - 2\partial_t^2\partial_x^2 + \partial_x^4)D_\beta, \quad (12.18)$$

com

$$D_\beta = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(\Delta \vec{x})^2 - (\Delta t + in\beta)^2}, \quad (12.19)$$

onde

$$\partial_t \partial_{t'} = -\partial_t^2, \quad (12.20)$$

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}', \quad (12.21)$$

$$\Delta t = t - t'. \quad (12.22)$$

Na soma anterior, o símbolo “ ’ ” denota que removemos o termo $n = 0$, que é a contribuição do vácuo.

A partir deste ponto, vamos examinar a dispersão na velocidade relativa em um espaço unidimensional (cone de luz em (1+1)-dimensões), ou seja, podemos escolher $\Delta y = \Delta z = 0$. Então, podemos escrever a Eq. (12.19) como

$$D_\beta = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(\Delta x)^2 - (\Delta t + in\beta)^2}. \quad (12.23)$$

Precisamos estabelecer, agora, o elemento de integração no tempo próprio. Vamos considerar que as duas partículas partem do repouso em nosso referencial, de modo que podemos usar

$$d\tau = dt(1 - v^2)^{1/2} = dt \quad \Leftrightarrow \quad v \equiv \frac{dx}{dt} = 0$$

na Eq. (12.16), que torna-se

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = I_t + I_{tx} + I_x, \quad (12.24)$$

com

$$I_t = \int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} dt' \left(\frac{1}{4} \partial_t^4 D_\beta \right), \quad (12.25)$$

$$I_{tx} = \int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} dt' \left(-\frac{1}{2} \partial_t^2 \partial_x^2 D_\beta \right), \quad (12.26)$$

$$I_x = \int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} dt' \left(\frac{1}{4} \partial_x^4 D_\beta \right), \quad (12.27)$$

onde t_0 é o tempo de voo, ou seja, o tempo de interação entre as partículas e o banho térmico.

Estamos interessados na parte real de D_β . Assim, podemos fazer a troca

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ' = 2 \sum_{n=1}^{+\infty}, \quad (12.28)$$

e tomar

$$\Re(D_\beta) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} G, \quad (12.29)$$

com

$$G = \Re \left[\frac{1}{(\Delta x)^2 - (\Delta t + in\beta)^2} \right], \quad (12.30)$$

onde $\Re$ denota a parte real. Após isso, podemos avaliar a Eq. (12.24) usando um programa de manipulação algébrica. Entretanto, a expressão final é tão longa que nenhuma compreensão é obtida escrevendo-a por completo.

A seguir, vamos admitir que Δx é pequeno comparado a Δt e/ou β , e, portanto, pode ser ignorado. Podemos calcular a velocidade relativa entre as duas partículas teste tomando o seguinte limite nas derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \partial_t^4 D_\beta \Big|_{x \rightarrow x'} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \partial_t^4 G \Big|_{x \rightarrow x'} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Re \left[-\frac{30}{(\Delta t + in\beta)^6} \right], \end{aligned} \quad (12.31)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \partial_t^2 \partial_x^2 D_\beta \Big|_{x \rightarrow x'} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \partial_t^2 \partial_x^2 G \Big|_{x \rightarrow x'} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Re \left[\frac{20}{(\Delta t + in\beta)^6} \right], \end{aligned} \quad (12.32)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \partial_x^4 D_\beta \Big|_{x \rightarrow x'} &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \partial_x^4 G \Big|_{x \rightarrow x'} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Re \left[-\frac{6}{(\Delta t + in\beta)^6} \right].
\end{aligned} \tag{12.33}$$

Assim, podemos escrever a função de dois pontos térmica normalmente ordenada do tensor de Riemann como

$$\langle R_{txtx}(x) R_{txtx}(x') \rangle_\beta = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Re \left[-\frac{16}{(\Delta t + in\beta)^6} \right]. \tag{12.34}$$

Portanto, substituindo as Eqs. (12.25)-(12.33) na Eq. (12.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v)^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{8}{5n^4\beta^4} - \frac{8}{5(t_0^2 + n^2\beta^2)^2} + \frac{64t_0^2}{5(t_0^2 + n^2\beta^2)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{64t_0^4}{5(t_0^2 + n^2\beta^2)^4} \right].
\end{aligned} \tag{12.35}$$

Neste ponto, podemos analisar os limites nos quais o tempo de observação t_0 é grande quando comparado ao parâmetro térmico β , e vice-versa.

12.2.1 Caso 1: $t_0 \ll \beta$ (curto tempo de voo ou baixa temperatura)

Se $t_0 \ll \beta$, temos

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \sim \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16t_0^2}{n^6\beta^6} = \frac{8\pi^4 t_0^2}{945\beta^6} = \frac{256\pi^5 t_0^2 \ell_{\text{Pl}}^2}{945\beta^6}, \tag{12.36}$$

onde ℓ_{Pl} é o comprimento de Planck. Aqui, o valor da raiz quadrática média (*rms*) da velocidade relativa é dado por

$$(\Delta v)_{\text{rms}} = \frac{16\pi^{5/2} t_0 \ell_{\text{Pl}}}{3\sqrt{105}\beta^3}, \tag{12.37}$$

o qual cresce linearmente com o tempo de voo. Note que, seguindo a convenção na Ref. [251], tomamos $32\pi\ell_{\text{Pl}} = 1$ nesta seção.

12.2.2 Caso 2: $t_0 \gg \beta$ (longo tempo de voo ou alta temperatura)

No limite quando $t_0 \gg \beta$, ou seja, no limite observacionalmente razoável onde o comprimento de onda das ondas gravitacionais é desprezível em relação ao tempo de voo das partículas após a interação com o banho térmico de grávitons, a expressão se reduz para

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \sim \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{5n^4\beta^4} = \frac{2\pi^2}{225\beta^4} = \frac{64\pi^3 \ell_{\text{Pl}}^2}{225\beta^4}, \tag{12.38}$$

Neste caso, o valor *rms* da dispersão na velocidade relativa aproxima-se de uma constante, a saber,

$$(\Delta v)_{\text{rms}} = \frac{8\pi^{3/2} \ell_{\text{Pl}}}{15\beta^2}. \tag{12.39}$$

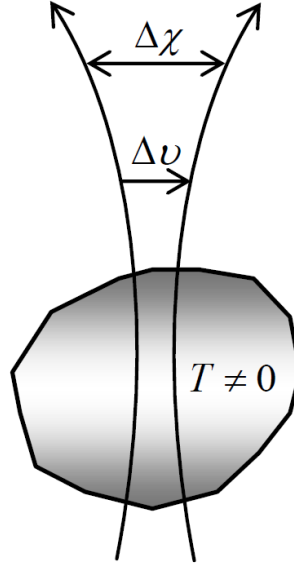


Figura 23 – Distância e velocidade entre duas geodésicas tipo-tempo vizinhas após a interação com o banho térmico de grávitons.

12.2.3 Flutuação da posição

A partir dos cálculos anteriores, notemos que a dispersão na velocidade relativa não é zero, ou seja, as geodésicas tipo-tempo vizinhas são afetadas pelos grávitons. Neste sentido, estamos agora interessados em calcular a dispersão na distância relativa entre as duas partículas teste após a interação com o banho térmico de grávitons. A média quadrática da flutuação na distância relativa na direção x , como representada na Figura 23, pode ser calculada como segue:

$$\langle (\Delta\chi)^2 \rangle = \int_0^{\mathcal{T}} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int_0^{\mathcal{T}} dt'_1 \int_0^{t'_1} dt' \langle R_{txtx}(x) R_{txtx}(x') \rangle_{\beta}. \quad (12.40)$$

Note que χ é uma distância fracionária e, portanto, é adimensional em unidades arbitrárias.

Seguindo o mesmo procedimento usado para obter a Eq. (12.35), a saber, tomando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \approx 0$ no denominador da função de correlação do tensor de Riemann, o que significa $\Delta \vec{x} \lesssim \Delta t$, a dispersão na distância relativa é dada por

$$\langle (\Delta\chi)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{4}{15n^2\beta^2} + \frac{4t^2}{5n^4\beta^4} + \frac{4(3t^4 - 6t^2n^2\beta^2 - n^4\beta^4)}{15(t^2 + n^2\beta^2)^3} \right], \quad (12.41)$$

onde fizemos $t = \mathcal{T} > t_0$, o que significa que t é o tempo de medida, isto é, o tempo total dado pela soma do tempo de voo e o tempo gasto após a interação.

No limite em que $t \ll \beta$, a dispersão na distância relativa e seu valor *rms* são dados,

respectivamente, por

$$\langle (\Delta\chi)^2 \rangle \sim \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4t^4}{n^6 \beta^6} = \frac{64\pi^5 t^4 \ell_{\text{Pl}}^2}{945 \beta^6}, \quad (12.42)$$

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} = \frac{8\pi^{5/2} t^2 \ell_{\text{Pl}}}{3\sqrt{105} \beta^3}. \quad (12.43)$$

Por outro lado, para o limite em que $t \gg \beta$, temos

$$\langle (\Delta\chi)^2 \rangle \sim \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4t^2}{5n^4 \beta^4} = \frac{32\pi^3 t^2 \ell_{\text{Pl}}^2}{225 \beta^4}, \quad (12.44)$$

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} = \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2} t \ell_{\text{Pl}}}{15\beta^2}. \quad (12.45)$$

A partir das Eqs. (12.45), (12.43), (12.39) e (12.37), temos

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} = \frac{(\Delta v)_{\text{rms}}}{2t_0} t^2 \quad (\text{for } t \ll \beta), \quad (12.46)$$

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} = \frac{(\Delta v)_{\text{rms}}}{\sqrt{2}} t \quad (\text{for } t \gg \beta). \quad (12.47)$$

Portanto, encontramos em ambos os casos uma forma do efeito de memória da onda gravitacional (veja [141] e as referências nele citadas), tal que

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} \sim (\Delta v)_{\text{rms}} t. \quad (12.48)$$

Isto significa que as geodésicas tipo-tempo são modificadas devido à presença do banho térmico de grávitons, como esperado. Esta modificação é refletida na distância entre o par de partículas e pode, em princípio, torna-se grande a medida que t cresce, apesar da pequenez do comprimento de Planck.

12.3 Grávitons em um estado quântico *squeezed*

Nesta seção vamos considerar uma região do espaço-tempo preenchida com grávitons em um estado *squeezed*, o que produz flutuações quânticas nas geodésicas das partículas teste. Em princípio, este estado *squeezed* pode ser devido à criação quântica de grávitons em um cenário de campo gravitacional, como por exemplo, no curso da expansão cosmológica ou no processo Hawking de evaporação de um buraco negro [255, 256, 257]. O estado *squeezed* é representado por $|\alpha, \zeta\rangle$, onde α e ζ são os parâmetros de deslocamento e de *squeeze*, respectivamente. Considere um modo de onda gravitacional plana. A função de correlação normalmente ordenada do tensor de Riemann pode ser expressa como (ver Apêndice C.2)

$$: C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x') : = 4(\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]})(\ell_{[\gamma} A_{\delta][\rho} \ell_{\sigma]}) F(x, x'), \quad (12.49)$$

com

$$F(x, x') = [\cosh(2r) - 1] \cos[\ell_\epsilon(x^\epsilon - x'^\epsilon)] - \sinh(2r) \cos[\ell_\epsilon(x^\epsilon + x'^\epsilon) + \theta], \quad (12.50)$$

onde $\ell^\epsilon = (\omega_g, \ell^x, \ell^y, \ell^z)$ é o vetor de onda específico do modo excitado, ω_g é a frequência, $A_{\mu\nu}$ é o tensor de polarização e os parâmetros r, θ são definidos tais que $\zeta = re^{i\theta}$. Usamos a seguinte convenção para o tensor antisimétrico,

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (12.51)$$

Nesta seção apenas, seguimos a convenção da Ref. [] e usamos unidades nas quais $\ell_{\text{Pl}} = 1$. Substituindo as Eqs. (12.49) e (12.50) na Eq. (12.8), a dispersão na velocidade relativa para partículas teste submetidas a ação de grávitons no estado *squeezed* é dada por

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = 4(\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]}) (\ell_{[\gamma} A_{\delta][\rho} \ell_{\sigma]}) n^\alpha u^\lambda n^\mu u^\nu n^\gamma u^\delta n^\rho u^\sigma f_1(\omega_g, t_0), \quad (12.52)$$

onde a função $f_1(\omega_g, t_0)$ é calculada a partir da Eq. (12.16), novamente com $d\tau = dt$, levando a

$$\begin{aligned} f_1(\omega_g, t_0) &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' F(x, x') \\ &= \int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} dt' \{ [\cosh(2r) - 1] \cos[\omega_g(t - t') + \ell_x(x - x')] \\ &\quad - \sinh(2r) \cos[\omega_g(t + t') + \ell_x(x + x') + \ell_y(y + y') + \ell_z(z + z') + \theta] \} \\ &= \frac{4}{\omega_g^2} \sin^2\left(\frac{\omega_g t_0}{2}\right) \{ 2 \sinh^2(r) \cos[\ell_x(x - x')] \\ &\quad - \sinh(2r) \cos[\omega_g t_0 + \ell_x(x + x') + \ell_y(y + y') + \ell_z(z + z') + \theta] \}. \end{aligned} \quad (12.53)$$

onde t_0 é o tempo de voo, o tempo de interação entre as partículas geodésicas e o estado quântico em consideração.

Neste último resultado, tomamos $\Delta y = \Delta z = 0$, ou seja, estamos novamente admitindo que Δy e Δz são pequenos. É importante chamar a atenção para o fato de que $f_1(\omega_g, t_0)$ e, portanto, $\langle (\Delta v)^2 \rangle$, são independentes do parâmetro de deslocamento α . Portanto, as flutuações dependem apenas do parâmetro de *squeeze* ζ , de tal forma que $\zeta = 0$ (um estado coerente) não induz flutuações:

$$r = 0 \Rightarrow \zeta = 0 \Rightarrow f_1 = 0 \Rightarrow \langle (\Delta v)^2 \rangle = 0 \quad (\text{onda clássica}).$$

Vamos admitir que o modo de onda gravitacional está no *gauge* transversal traço-livre (TT *gauge*), no qual as perturbações gravitacionais possuem apenas as componentes espaciais h_{ij} , satisfazendo $\partial^i h_{ij} = 0$ e $h^i_i = 0$. De fato, esta escolha é apenas matéria de conveniência, visto que nossos resultados foram obtidos a partir do tensor de Riemann, o

qual obedece à invariância de *gauge*. Assim, o primeiro produto vetorial da Eq. (12.52) é dado por

$$\begin{aligned}
 (\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]}) n^{\alpha} u^{\lambda} n^{\mu} u^{\nu} &= (\ell_{[x} A_{t][x} \ell_{t]}) n^x u^t n^x u^t \\
 &= \frac{1}{4} (\ell_x A_{tx} \ell_t - \ell_x A_{tt} \ell_x - \ell_t A_{xx} \ell_t + \ell_t A_{xt} \ell_x) \\
 &= -\frac{1}{4} (\ell_t)^2 A_{xx} \\
 &= -\frac{1}{4} \omega_g^2 A_+,
 \end{aligned} \tag{12.54}$$

onde o tensor de polarização $A_{\mu\nu}$ é dado por

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_{\times} & 0 \\ 0 & A_{\times} & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12.55}$$

o qual é obviamente sem traço e puramente espacial:

$$A_{0\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0, \quad A_{3\nu} = 0. \tag{12.56}$$

Portanto, existe um efeito não nulo na dispersão da velocidade relativa devido aos grávitons no estado *squeezed*, que depende da polarização (+), assim como da posição. Ele é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v)^2 \rangle &= 4 \left(-\frac{1}{4} \omega_g^2 A_+ \right) \left(-\frac{1}{4} \omega_g^2 A_+ \right) f_1(\omega_g, t_0) \\
 &= \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 f_1(\omega_g, t_0).
 \end{aligned} \tag{12.57}$$

No limite em que $t_0 \rightarrow 0$, podemos expandir a Eq. (12.57) para um r fixo, a fim de obter

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v)^2 \rangle &\sim \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 \{ 2 \sinh^2(r) \cos[\ell_x(x - x')] \\
 &\quad - \sinh(2r) \cos[\ell_x(x + x') + \ell_y(y + y') + \ell_z(z + z') + \theta] \} t_0^2.
 \end{aligned} \tag{12.58}$$

12.3.1 Dependência clássica no tempo

Nesta subseção vamos examinar o valor esperado da velocidade relativa, $\langle v \rangle$, que é dada em termos da contribuição em primeira ordem das flutuações do tensor de Riemann, $\langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle$. Esta quantidade fornece a variação clássica dependente no tempo visto que ela depende apenas do parâmetro de deslocamento, α . Se $\zeta = 0$ o estado *squeezed* torna-se um estado coerente, que pode ser descrito como uma onda clássica.

A fim de avaliar $\langle v \rangle$, podemos realizar apenas uma integração simples do valor esperado do tensor de Riemann em relação ao tempo próprio $d\tau$ utilizando a Eq. (12.6).

Entretanto, queremos calcular $\langle v \rangle^2$ diretamente da Eq. (12.8). Então, a variação quadrática na velocidade relativa pode ser escrita como

$$\langle v \rangle^2 = \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' \langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle \langle R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle n^\alpha u^\lambda n^\mu u^\nu n^\gamma u^\delta n^\rho u^\sigma. \quad (12.59)$$

No lado direito da expressão acima, a função de correlação do tensor de Riemann para grávitons em um estado *squeezed* é dada por (ver Apêndice C.2.1)

$$\langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle \langle R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle = 4 \sum_\ell (\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]}) (\ell_{[\gamma} A_{\delta][\rho} \ell_{\sigma]}) G(x, x'), \quad (12.60)$$

onde

$$G(x, x') = \alpha^2 e^{i\ell_\epsilon(x^\epsilon + x'^\epsilon)} + (\alpha^*)^2 e^{-i\ell_\epsilon(x^\epsilon + x'^\epsilon)} + 2|\alpha|^2 \cos[\ell_\epsilon(x^\epsilon - x'^\epsilon)]. \quad (12.61)$$

Assim, seguindo o mesmo procedimento usado para obter a Eq. (12.53) e realizando a integração de $G(x, x')$, obtemos

$$\begin{aligned} g_1(\omega_g, t_0) &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' G(x, x') \\ &= \int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} dt' \{ 2|\alpha|^2 \cos[\omega_g(t - t') + \ell_x(x - x')] \\ &\quad + (\alpha^*)^2 e^{-i[\omega_g(t+t') + \ell_x(x+x') + \ell_y(y+y') + \ell_z(z+z')]} \\ &\quad + \alpha^2 e^{i[\omega_g(t+t') + \ell_x(x+x') + \ell_y(y+y') + \ell_z(z+z')]} \} \\ &= - \frac{e^{-i[2\omega_g t_0 + \ell_x(x+x') + \ell_y(y+y') + \ell_z(z+z')]} (e^{i\omega_g t_0} - 1)^2}{\omega_g^2} \\ &\quad \times \{ (\alpha^*)^2 + \alpha^2 e^{2i[\omega_g t_0 + \ell_x(x+x') + \ell_y(y+y') + \ell_z(z+z')]} \\ &\quad + 2|\alpha|^2 e^{i[\omega_g t_0 + \ell_x(x+x') + \ell_y(y+y') + \ell_z(z+z')]} \cos[\ell_x(x - x')] \}. \end{aligned} \quad (12.62)$$

Portanto, a variação clássica dependente do tempo da velocidade relativa para um modo simples é caracterizada por

$$\begin{aligned} \langle v \rangle^2 &= 4(\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]}) (\ell_{[\gamma} A_{\delta][\rho} \ell_{\sigma]}) n^\alpha u^\lambda n^\mu u^\nu n^\gamma u^\delta n^\rho u^\sigma g_1(\omega_g, t_0) \\ &= 4 \left(-\frac{1}{4} \omega_g^2 A_+ \right) \left(-\frac{1}{4} \omega_g^2 A_+ \right) g_1(\omega_g, t_0) \\ &= \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 g_1(\omega_g, t_0). \end{aligned} \quad (12.63)$$

12.3.2 Caso especial: onda gravitacional transversa

Aqui, vamos analisar o caso especial de ondas gravitacionais propagando-se transversamente. Estas ondas propagam-se com um vetor de onda dado por $\ell^\mu = \omega_g(1, 0, 0, 1)$, enquanto as partículas teste continuam tendo quadrivetores dados por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e

$n^\mu = (0, 1, 0, 0)$. Então, para um onda gravitacional propagando-se na direção z , precisamos apenas tomar $\ell_x = \ell_y = 0$ na Eq. (12.53), a fim de definir a função $f_2(\omega_g, t_0)$ como

$$f_2(\omega_g, t_0) = \frac{4}{\omega_g^2} \sin^2\left(\frac{\omega_g t_0}{2}\right) \{2 \sinh^2(r) - \sinh(2r) \cos[\omega_g t_0 + \omega_g(z + z') + \theta]\}. \quad (12.64)$$

Portanto, no caso especial de ondas gravitacionais transversas, a dispersão na velocidade relativa é dada por

$$\langle(\Delta v)^2\rangle = \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 f_2(\omega_g, t_0). \quad (12.65)$$

A partir das Eqs. (12.57) e (12.65), concluímos que as flutuações na velocidade relativa dependem do grau de *squeeze*, medido pelo parâmetro ζ .

Por outro lado, a variação clássica dependente do tempo da velocidade relativa é dada por

$$\langle v \rangle^2 = \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 g_2(\omega_g, t_0), \quad (12.66)$$

onde a função $g_2(\omega_g, t_0)$ é definida de forma análoga como $g_1(\omega_g, t_0)$, quando $\ell_x = \ell_y = 0$, a saber,

$$g_2(\omega_g, t_0) = -\frac{e^{-i\omega_g[2t_0+(z+z')]}(e^{i\omega_g t_0} - 1)^2}{\omega_g^2} \times \{(\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 e^{i\omega_g[t_0+(z+z')]} + \alpha^2 e^{2i\omega_g[t_0+(z+z')]} \}. \quad (12.67)$$

Note que ambas as funções, $g_1(\omega_g, t_0)$ e $g_2(\omega_g, t_0)$, dependem do parâmetro de deslocamento, α , mas são independentes do parâmetro de *squeeze*, r . Portanto, podemos dizer o mesmo para as Eqs. (12.63) e (12.66). Além disso, no limite $\alpha = 0$, temos que $g_1(\omega_g, t_0) = g_2(\omega_g, t_0) = 0$, o que significa que um estado coerente ($r = 0$ e $\alpha \neq 0$) exibe variação regular no tempo, mas não flutua. De fato, a partir da Eq. (12.53), podemos ver que $\langle(\Delta v)^2\rangle = 0$ para $r = 0$.

12.3.3 Estimando $\langle(\Delta v)^2\rangle$ a partir do valor do tensor energia-momento

Nesta subseção vamos avaliar a ordem de magnitude de $\langle(\Delta v)^2\rangle$ no caso do estado de vácuo *squeezed* quando $\alpha = 0$ e $r \gg 1$. Para fazer isto, vamos admitir a polarização (+) para as ondas gravitacionais, o que implica $A_\times = 0$. Estas escolhas levam a $\langle v \rangle^2 = 0$ e, portanto, temos que $\langle(\Delta v)^2\rangle = \langle v^2 \rangle$. Assim, a partir das Eqs. (12.53) e (12.57), com a escolha adequada de θ , em uma situação onde muitos modos estão excitados, encontramos o seguinte regime assintótico para r grande:

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v)^2\rangle &\approx \frac{1}{4} \omega_g^4 \frac{8\pi}{\omega_g V} \frac{V}{(2\pi)^3} (\Delta \ell_x)(\Delta \ell_y)(\Delta \ell_z) \frac{2e^{2r}}{\omega_g^2} \\ &= \frac{\omega_g e^{2r}}{2\pi^2} (\Delta \ell_x)(\Delta \ell_y)(\Delta \ell_z), \end{aligned} \quad (12.68)$$

onde a contribuição da polarização (+) é dada por $A_+ = \sqrt{8\pi/\omega_g V}$. No resultado anterior, somamos os modos quando a densidade de estados é grande, a saber,

$$\sum_{\ell} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\ell = \frac{V}{(2\pi)^3} (\Delta\ell_x)(\Delta\ell_y)(\Delta\ell_z), \quad (12.69)$$

onde V é o volume da quantização. Agora, a partir do tensor energia-momento efetivo na teoria linearizada, a densidade de energia do vácuo para r grande é dada por [254]

$$:T_{00}: \approx \frac{\omega_g e^{2r}}{32\pi^3} (\Delta\ell_x)(\Delta\ell_y)(\Delta\ell_z). \quad (12.70)$$

Então, substituindo a Eq. (12.70) na Eq. (12.68), a dispersão na velocidade relativa pode ser expressa como

$$\langle(\Delta v)^2\rangle \approx \frac{\omega_g e^{2r}}{2\pi^2} \frac{32\pi^3}{\omega_g e^{2r}} :T_{00}: = 16\pi :T_{00}: \ell_{\text{Pl}}^4. \quad (12.71)$$

Neste caso, o valor *rms* da dispersão na velocidade relativa é dado por

$$(\Delta v)_{\text{rms}} \approx \ell_{\text{Pl}}^2 \sqrt{:T_{00}:}. \quad (12.72)$$

Para estimar este valor, vamos supor uma densidade de energia dada por $:T_{00}: = 10^8 \text{ cm}^{-4}$. Portanto, levando em consideração o comprimento de Planck, $\ell_{\text{Pl}} = 10^{-33} \text{ cm}$, obtemos uma estimativa da velocidade relativa fracionária

$$(\Delta v)_{\text{rms}} \approx 10^{-29} \text{ cm}^{-1}. \quad (12.73)$$

Isto implica que duas partículas teste separadas por uma distância de um ano-luz, ou 10^{18} cm , iria adquirir uma rapidez relativa em torno de $10^{-19}c = 0.3 \text{ cm/s}$, o que é bem pequeno. Entretanto, no universo primordial, onde a densidade de grávitons poderia ser muito maior, o efeito poderia aumentar.

12.3.4 Flutuação da posição

Para calcular a dispersão na distância relativa entre duas partículas geodésicas sujeitas à grávitons em um estado *squeezed*, vamos seguir o mesmo procedimento usado no caso térmico e realizar duas integrais a mais na função $F(x, x')$:

$$\langle(\Delta\chi)^2\rangle = 4(\ell_{[\alpha}A_{\lambda][\mu}\ell_{\nu]})(\ell_{[\gamma}A_{\delta][\rho}\ell_{\sigma]})n^{\alpha}u^{\lambda}n^{\mu}u^{\nu}n^{\gamma}u^{\delta}n^{\rho}u^{\sigma}f_3(\omega_g, t_0), \quad (12.74)$$

onde a função $f_3(\omega_g, t_0)$ é dada por

$$\begin{aligned} f_3(\omega_g, \mathcal{T}) &= \int_0^{\mathcal{T}} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau \int_0^{\tau} d\tau'_1 \int_0^{\tau'_1} d\tau' F(x, x') \\ &= \int_0^{\mathcal{T}} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int_0^{\tau} dt'_1 \int_0^{t'_1} dt' \{ [\cosh(2r) - 1] \cos[\omega_g(t - t')] \\ &\quad + \ell_x(x - x')] - \sinh(2r) \cos[\omega_g(t + t') + \ell_x(x + x') + \ell_y(y + y') \\ &\quad + \ell_z(z + z') + \theta] \}, \end{aligned} \quad (12.75)$$

tal que

$$\begin{aligned}
 f_3(\omega_g, t) = & \frac{1}{\omega_g^4} \{ 2 \sinh^2(r) \cos[l_x(x - x')] [t^2 \omega_g^2 - 2t\omega_g \sin(t\omega_g) - 2 \cos(t\omega_g) + 2] \\
 & + \sinh(2r) \{ t^2 \omega_g^2 \cos[\theta + l_y(y + y') + l_z(z + z') + l_x(x + x')] \\
 & + 2t\omega_g \sin[\theta + l_y(y + y') + l_z(z + z') + l_x(x + x')] \\
 & - 2t\omega_g \sin[\theta + l_y(y + y') + l_z(z + z') + l_x(x + x') + t\omega_g] \\
 & + 2 \cos[\theta + l_y(y + y') + l_z(z + z') + l_x(x + x') + t\omega_g] \\
 & - \cos[\theta + l_y(y + y') + l_z(z + z') + l_x(x + x') + 2t\omega_g] \\
 & - \cos[\theta + l_y(y + y') + l_z(z + z') + l_x(x + x')] \} \}, \quad (12.76)
 \end{aligned}$$

onde fizemos $t = \mathcal{T} > t_0$, o que significa que t é o tempo total.

Portanto, a dispersão na distância relativa é dada por

$$\langle (\Delta\chi)^2 \rangle = \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 f_3(\omega_g, t). \quad (12.77)$$

No limite quando $t \rightarrow 0$, podemos expandir a Eq. (12.77) para r fixo a fim de obter

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta\chi)^2 \rangle \sim & \frac{1}{4} \omega_g^4 A_+^2 \left\{ \frac{1}{2} \sinh^2(r) \cos[l_x(x - x')] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} \sinh(2r) \cos[l_x(x + x') + l_y(y + y') + l_z(z + z') + \theta] \right\} t^4. \quad (12.78)
 \end{aligned}$$

A partir das Eqs. (12.58) e (12.78), temos

$$\langle (\Delta\chi)^2 \rangle = \frac{\langle (\Delta v)^2 \rangle}{4} t^2. \quad (12.79)$$

Seu valor *rms* é dada por

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} = \frac{(\Delta v)_{\text{rms}}}{2} t. \quad (12.80)$$

Portanto, concluímos que

$$(\Delta\chi)_{\text{rms}} \sim (\Delta v)_{\text{rms}} t. \quad (12.81)$$

Este é o mesmo comportamento que para o caso térmico, dado pela Eq. (12.48).

12.4 Estado de vácuo de grávitons

Nesta seção vamos lidar com flutuações do tensor de Riemann em um estado de vácuo de grávitons na gravidade quântica linearizada. Estes estados devem aproximar-se dos correspondentes estados na gravidade quântica em um limite adequado e exibir efeitos de flutuação não-triviais. A partir da Eq. (12.8), a dispersão na velocidade relativa pode ser expressa como

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^{\tau_0} d\tau' C_{txtxtx}(x, x'), \quad (12.82)$$

onde a função de correlação do tensor de Riemann, $C_{txtxtx}(x, x')$, é dada em termos da função de dois pontos do vácuo como (ver Apêndice C.1)

$$C_{txtxtx}(x, x') = \langle R_{txtx}(x) R_{txtx}(x') \rangle = \frac{1}{4} (\partial_t^4 - 2\partial_t^2 \partial_x^2 + \partial_x^4) D, \quad (12.83)$$

com

$$D = \frac{1}{4\pi^2 [(\Delta \vec{x})^2 - (\Delta t)^2]}, \quad (12.84)$$

Substituindo as Eqs. (12.20)-(12.22) na Eq. (12.83), podemos escrever a expressão completa da função de correlação do tensor de Riemann no estado de vácuo de grávitons como

$$C_{txtxtx}(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{(\Delta x^2 - \Delta t^2)^2 + (\Delta y^2 + \Delta z^2)^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2)^5} - \frac{4(\Delta x^2 - \Delta t^2)(\Delta y^2 + \Delta z^2)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2)^5} \right], \quad (12.85)$$

onde $\Delta t = t - t'$, $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$ e $\Delta z = z - z'$.

Aqui, temos uma singularidade indesejável quando tentamos calcular o valor esperado de $(\Delta v)^2$. Então, precisamos adotar uma abordagem operacional que permita expressar as médias da função de correlação no espaço-tempo como integrais finitas. Escolhemos a abordagem desenvolvida na Ref. [258] para calcular as flutuações no foco de um pacote de geodésicas. Portanto, para obter um valor finito da integral dada pela Eq. (12.82), vamos considerar uma amostra em um volume do espaço-tempo (o interior de um mundo tubular) definido por um pacote de geodésicas. A história de um pacote de ondas é formada integrando ao longo do tempo e tirando a média no espaço. Para fazer isso, vamos trocar as integrações no tempo próprio da Eq. (12.82) por integrações quadridimensionais no espaço-tempo [259]

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' f(x') C_{txtxtx}(x, x'), \quad (12.86)$$

onde $f(x)$ é a função de amostragem. Esta é a expressão geral para o valor esperado da variância na velocidade relativa e, portanto, podemos escolher as funções de amostragem e em quais coordenadas elas podem atuar. Neste sentido, vamos estabelecer estas funções de amostragem como segue. Aqui vamos primeiro ponderar a média no espaço e, então, integrar no tempo.

Para a média espacial, vamos usar uma função de amostragem lorentziana de comprimento ϕ em cada uma das coordenadas retangulares x, y, z e x', y', z' ,

$$g_L(u, \phi) = \frac{\phi}{\pi(u^2 + \phi^2)}, \quad (12.87)$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du g_L(u, \phi) = 1. \quad (12.88)$$

Isto tem o efeito de ponderar a média ao longo de uma escala espacial da ordem de ϕ . Portanto, a função de correlação do tensor de Riemann, ponderada ao longo das direções espaciais, $\hat{C}(t - t', b)$, pode ser definida por

$$\begin{aligned}\hat{C}(t - t', b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' f(x') C_{txtxtxtx}(x, x') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx g_L(x, \phi) \int_{-\infty}^{+\infty} dy g_L(y, \phi) \int_{-\infty}^{+\infty} dz g_L(z, \phi) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g_L(x', \phi) \int_{-\infty}^{+\infty} dy' g_L(y', \phi) \int_{-\infty}^{+\infty} dz' g_L(z', \phi) \\ &\quad \times C_{txtxtxtx}(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ &= \frac{4[3b^4 + 6b^2(t - t')^2 - (t - t')^4]}{\pi^2[3b^2 + (t - t')^2]^5}.\end{aligned}\quad (12.89)$$

Aqui usamos a seguinte identidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx g_L(x, \phi) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g_L(x', \phi) F(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta x g_L(\Delta x, b) F(\Delta x), \quad (12.90)$$

com $b = 2\phi$. Note que a singularidade do cone de luz presente na Eq. (12.85) não está mais presente em $\hat{C}(t - t', b)$. Podemos interpretar a equação anterior como uma função de correlação da aceleração que foi ponderada no espaço, mas não no tempo.

12.4.1 Integração temporal direta

Visto que $\hat{C}(t - t', b)$ é finita para todos os valores de seus argumentos, desde que $b \neq 0$, uma opção parece ser integrar ela diretamente no tempo para encontrar as associadas flutuações da velocidade e posição.

12.4.1.1 Flutuação da velocidade

Definimos uma função de correlação da velocidade obtida pela integração direta no tempo por

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle_{\text{DTI}} = \int_0^{t_1} dt \int_0^{t_2} dt' \hat{C}(t - t', b). \quad (12.91)$$

onde o subscrito DTI significa Integração Temporal Direta (em inglês). Portanto, substituindo a Eq. (12.89) na Eq. (12.91), obtemos o seguinte resultado para a função de correlação velocidade-velocidade DTI

$$\begin{aligned}\langle v(t_1)v(t_2) \rangle_{\text{DTI}} &= \frac{1}{324\pi^2 b^5} \left\{ \frac{3b(9b^4 t_2^2 + 20b^2 t_2^4 + 3t_2^6)}{(3b^2 + t_2^2)^3} + 3b^3 \left\{ 30b^2 \left\{ \frac{1}{[3b^2 + (t_1 - t_2)^2]^2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(3b^2 + t_1^2)^2} \right\} - \frac{7}{3b^2 + t_1^2} + \frac{7}{3b^2 + (t_1 - t_2)^2} + 72b^4 \left\{ \frac{1}{(3b^2 + t_1^2)^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{[3b^2 + (t_1 - t_2)^2]^3} \right\} \right\} - 7\sqrt{3}(t_1 - t_2) \arctan\left(\frac{t_1 - t_2}{\sqrt{3}b}\right) \\ &\quad \left. + 7\sqrt{3}t_1 \arctan\left(\frac{t_1}{\sqrt{3}b}\right) + 7\sqrt{3}t_2 \arctan\left(\frac{t_2}{\sqrt{3}b}\right) \right\}.\end{aligned}\quad (12.92)$$

No caso especial quando tomamos $t_1 = t_2 = t_0$, temos que a associada variância da velocidade no tempo t_0 é dada por

$$\begin{aligned}\langle(\Delta v)^2\rangle_{\text{DTI}} &= \langle v(t_0)v(t_0)\rangle_{\text{DTI}} \\ &= \frac{16t_0\ell_{\text{Pl}}^2[27b^5t_0 + 60b^3t_0^3 + 9bt_0^5 + 7\sqrt{3}(3b^2 + t_0^2)^3 \arctan(t_0/\sqrt{3}b)]}{81\pi b^5(3b^2 + t_0^2)^3},\end{aligned}\quad (12.93)$$

onde t_0 é o tempo de voo. No limite onde $t_0 \rightarrow \infty$, ou seja, quando t_0 se torna grande para b fixo, encontramos

$$\langle(\Delta v)^2\rangle_{\text{DTI}} \sim \frac{56\sqrt{3}\ell_{\text{Pl}}^2}{81b^5}t_0 - \frac{64\ell_{\text{Pl}}^2}{27\pi b^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t_0}\right)^2. \quad (12.94)$$

Por outro lado, no limite quando $t_0 \rightarrow 0$, a Eq. (12.93) comporta-se como

$$\langle(\Delta v)^2\rangle_{\text{DTI}} \sim \frac{32\ell_{\text{Pl}}^2}{81\pi b^6}t_0^2, \quad (12.95)$$

cujo valor *rms* é dado por

$$(\Delta v)_{\text{DTI,rms}} = \frac{8\sqrt{2}\ell_{\text{Pl}}}{9\pi^{1/2}b^3}t_0 \quad (\text{para } t_0 \rightarrow 0). \quad (12.96)$$

12.4.1.2 Flutuação da posição

Vamos seguir o mesmo procedimento usado para obter um valor finito para a flutuação da velocidade relativa na subseção anterior e, portanto, integrar diretamente duas vezes no tempo a função de correlação do tensor de Riemann ponderada no espaço. Neste sentido, podemos também definir a associada flutuação da posição em um tempo t por

$$\langle(\Delta \chi)^2\rangle_{\text{DTI}} = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle v(t_1)v(t_2)\rangle_{\text{DTI}}. \quad (12.97)$$

Portanto, substituindo a Eq. (12.91) na (12.97), temos que a dispersão na distância relativa para as partículas geodésicas teste, no estado de vácuo de grávitons, é dada por

$$\langle(\Delta \chi)^2\rangle_{\text{DTI}} = \frac{t^3[3bt^3 - 9b^3t + 7\sqrt{3}(3b^2 + t^2)^2 \arctan(t/\sqrt{3}b)]}{486\pi^2b^5(3b^2 + t^2)^2}, \quad (12.98)$$

onde $t > t_0$, o que significa que t é o tempo total.

No limite onde $t \rightarrow \infty$, temos

$$\langle(\Delta \chi)^2\rangle_{\text{DTI}} \sim \frac{56\ell_{\text{Pl}}^2}{81\sqrt{3}b^5}t^3. \quad (12.99)$$

Por outro lado, no limite quando $t \rightarrow 0$, a dispersão na distância relativa e seu valor *rms* são dados, respectivamente, por

$$\langle(\Delta \chi)^2\rangle_{\text{DTI}} \sim \frac{t^4}{81\pi^2b^6} = \frac{32\ell_{\text{Pl}}^2}{81\pi b^6}t^4 \quad (12.100)$$

e

$$(\Delta\chi)_{\text{DTI,rms}} = \frac{4\sqrt{2}\ell_{\text{Pl}}}{9\pi^{1/2}b^3}t^2 \quad (\text{para } t \rightarrow 0). \quad (12.101)$$

Estes resultados são intrigantes, porque eles implicam que a velocidade quadrática média das partículas cresce linearmente no tempo. Isto é possível apenas se existir uma fonte externa de energia. Podemos entender este resultado da seguinte forma: uma certa quantidade de energia é adicionada ao sistema pelo procedimento de tirar a média no espaço e, então, as partículas teste viajam no interior do mundo tubular mais rápidas do que no caso térmico, cujo comportamento aproxima-se de uma constante. É útil examinar um limite um pouco diferente. Seja $b = ct_0$, onde $c > 0$ é uma constante. Agora, a Eq. (12.93) assume a forma

$$\langle(\Delta v)^2\rangle_{\text{DTI}} = \frac{K}{t_0^4}, \quad (12.102)$$

onde K é uma constante. Agora $\langle(\Delta v)^2\rangle_{\text{DTI}} \rightarrow 0$ quando $t_0 \rightarrow \infty$. Assim, se ambos, b e t_0 , se tornarem grande juntamente, então a variância da velocidade desaparece. Neste ponto, não é claro se o crescimento linear encontrado na Eq. (12.93) é devido a manter b fixo ou a agitação súbita (*switching*) do tempo usado na abordagem de integração direta no tempo.

Por fim, a partir das Eqs. (12.94), (12.95), (12.99) e (12.100), temos

$$(\Delta\chi)_{\text{DTI,rms}} = \frac{(\Delta v)_{\text{DTI,rms}}}{\sqrt{3}}t \quad (\text{para } t \rightarrow \infty), \quad (12.103)$$

$$(\Delta\chi)_{\text{DTI,rms}} = \frac{(\Delta v)_{\text{DTI,rms}}}{2}t \quad (\text{para } t \rightarrow 0). \quad (12.104)$$

Portanto, concluímos que

$$(\Delta\chi)_{\text{DTI,rms}} \sim (\Delta v)_{\text{DTI,rms}} t. \quad (12.105)$$

Este é o mesmo comportamento que para os casos térmico e *squeezed*, dados pelas Eqs. (12.48) e (12.81), respectivamente.

12.4.2 Integração temporal lorentziana

Adotamos em seguida uma forma indireta de integrar no tempo, que chamamos Integração Temporal Lorentziana (LTI em inglês). Ela envolve uma função lorentziana adimensional dada por

$$\bar{g}_L(u, \varphi) = \frac{\varphi^2}{\pi(u^2 + \varphi^2)}. \quad (12.106)$$

Esta função de amostragem possui a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \bar{g}_L(u, \varphi) = \varphi, \quad (12.107)$$

de modo que φ é o intervalo efetivo de integração. Isto é, $\int_{-\infty}^{+\infty} du \bar{g}_L(u, \varphi) F(u)$ é uma integral de $F(u)$ ao longo de um intervalo de ordem φ centrado em torno de $u = 0$. As

vantagens desta abordagem são tais que a integral pode ser finita mesmo se $F(u)$ possuir uma singularidade em algum lugar no intervalo de integração e ela evita a agitação súbita.

Nesta subseção vamos usar a integração temporal lorentziana para estudar a flutuação da velocidade. Assim, integramos $\hat{C}(t - t', b)$ usando duas funções da forma da Eq. (12.106) e definimos a dispersão na velocidade relativa como

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v)^2 \rangle_{\text{LTI}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{g}_L(t, \varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \bar{g}_L(t', \varphi) \hat{C}(t - t', b) \\ &= \frac{a}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \bar{g}_L(\tau, a) \hat{C}(\tau, b), \end{aligned} \quad (12.108)$$

onde $a = 2\varphi$ e $\tau = t - t'$. Neste último passo, usamos o fato de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{g}_L(t, \varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \bar{g}_L(t', \varphi) F(t - t') = \frac{a}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \bar{g}_L(\tau, a) F(\tau). \quad (12.109)$$

O integrando na segunda linha da Eq. (12.108) possui polos de primeira ordem em $\tau = \pm ia$ e polos de quinta ordem em $\tau = \pm i\sqrt{3}b$. A integral pode ser realizada por integração de contorno no plano complexo como segue.

Seja $f(\xi)$ uma função analítica dentro de um contorno simples fechado C e sobre C , exceto para alguns finitos pontos singulares $\xi_1, \dots, \xi_k$ dentro de C . Então, a integral de $f(\xi)$, tomada no sentido anti-horário em torno de C , é igual a $2\pi i$ multiplicado pela soma dos resíduos de $f(\xi)$ em $\xi_1, \dots, \xi_k$, podendo ser escrita como

$$\oint_C f(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{\xi=\xi_j} f(\xi), \quad (12.110)$$

onde o resíduo de $f(\xi)$ em um polo da m -ésima ordem em ξ_0 é dado por

$$\text{Res}_{\xi=\xi_0} f(\xi) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} [(\xi - \xi_0)^m f(\xi)] \right\}. \quad (12.111)$$

Neste caso, a função $f(\xi)$ possui a seguinte forma

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{[\xi^2 + a^2](\xi^2 + 3b^2)^5} \\ &= \frac{1}{(\xi - ia)(\xi + ia)[(\xi - i\sqrt{3}b)(\xi + i\sqrt{3}b)]^5}. \end{aligned} \quad (12.112)$$

O resultado é

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v)^2 \rangle_{\text{LTI}} &= \frac{2\ell_{\text{Pl}}^2 a^2}{81\pi b^5 (a^2 - 3b^2)^5} (7\sqrt{3}a^9 - 108\sqrt{3}a^7b^2 + 594\sqrt{3}a^5b^4 \\ &\quad + 1296a^4b^5 - 4860\sqrt{3}a^3b^6 + 7776a^2b^7 + 1215\sqrt{3}ab^8 \\ &\quad - 3888b^9). \end{aligned} \quad (12.113)$$

No limite que a se torna grande para b fixo, temos

$$\langle (\Delta v(t))^2 \rangle_{\text{LTI}} \sim \frac{14\sqrt{3}a\ell_{\text{Pl}}^2}{81b^5}. \quad (12.114)$$

Dado que a duração do tempo de integração é proporcional a a , este é essencialmente o mesmo resultado como na Eq. (12.94), com a variância da velocidade crescendo linearmente com o tempo de voo. De fato, se tomarmos $a = 4\pi t_0$, as duas formas assintóticas são idênticas. Podemos também considerar o limite onde a e b são proporcionais um em relação ao outro: tome $b = ca$, assim a Eq. (12.113) toma a forma

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle_{\text{LTI}} = \frac{K'}{a^4}, \quad (12.115)$$

para alguma constante K' . Agora $\langle (\Delta v(t))^2 \rangle_{\text{LTI}} \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow \infty$.

Ambas as Eqs. (12.114) e (12.115) estão em concordância qualitativa com os resultados correspondentes, Eqs. (12.94) e (12.102), encontrados usando integração temporal direta. Isto indica que o crescimento linear de $\langle (\Delta v(t))^2 \rangle$ no tempo não é um artefato da agitação súbita do tempo. Entretanto, a variância da velocidade não cresce quando ambos, o tempo de voo e a escala espacial, aumentam conjuntamente. Este resultado sugere que devemos examinar de forma mais geral as médias no espaço e no tempo.

12.4.3 Média ao longo de um mundo tubular de largura crescente

Em ambas das seções anteriores, a escala espacial b foi uma constante, o que significa que estamos ponderando a média ao longo da história de um feixe de raios com uma seção reta espacial fixa. Entretanto, feixes mais realistas tendem a esticar no comprimento a medida que propagam. Agora vamos explorar um método de ponderar a média que descreve este esticamento. Retornemos a função de correlação do tensor de Riemann, dada pela Eq. (12.85). Vamos ponderar a média com funções lorentzianas de comprimento b em (x, y, z) , mas de comprimento b' em (x', y', z') . Entretanto, isto é equivalente à ponderar a média com lorentzianas de comprimento $b + b'$ em cada uma das coordenadas Δx , Δy e Δz , devido a identidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, g_L(x, b) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, g_L(x', b') F(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta x \, g_L(\Delta x, b + b') F(\Delta x). \quad (12.116)$$

Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} \hat{C}(t - t', b, b') &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, g_L(x, b) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, g_L(y, b) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, g_L(z, b) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, g_L(x', b') \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \, g_L(y', b') \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \, g_L(z', b') \\ &\quad \times C_{txtxtx}(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta x \, g_L(\Delta x, b + b') \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta y \, g_L(\Delta y, b + b') \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta z \, g_L(\Delta z, b + b') C_{txtxtx}(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z). \end{aligned} \quad (12.117)$$

Isto pode ser calculado fornecendo o seguinte resultado

$$\hat{C}(t - t', b, b') = \frac{4[3(b + b')^4 + 6(b + b')^2(t - t')^2 - (t - t')^4]}{\pi^2[3(b + b')^2 + (t - t')^2]^5}. \quad (12.118)$$

Desde o início, b e b' tem sido constantes, mas eles podem ser funções do tempo sem mudança alguma nas análises anteriores. Sejam eles funções lineares dadas por

$$b = b(t) = ct + b_0 \quad \text{e} \quad b' = b'(t') = ct' + b_0, \quad (12.119)$$

onde $c > 0$ e $b_0 > 0$ são constantes. Estas funções descrevem um feixe de raios que partem com comprimento não nulo, que então cresce linearmente no tempo quando os raios se propagam. Agora a função de correlação da aceleração ponderada com comprimento variável torna-se

$$\begin{aligned} \hat{C}_{vw}(t, t') &= \hat{C}(t - t', b(t), b'(t')) \\ &= \frac{4\{3[c(t + t') + 2b_0]^4 + 6[c(t + t') + 2b_0]^2(t - t')^2 - (t - t')^4\}}{\pi^2\{3[c(t + t') + 2b_0]^2 + (t - t')^2\}^5}. \end{aligned} \quad (12.120)$$

A variância da velocidade é obtida a partir da integral em t e t' de $\hat{C}_{vw}(t, t')$. No limite de um longo tempo de voo, esta variância torna-se

$$\langle(\Delta v)^2\rangle = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \hat{C}_{vw}(t, t'). \quad (12.121)$$

Esta integral é finita desde que ambos, c e b_0 , sejam não nulos. Isto é mais fácil de ver transformando em coordenadas polares, definidas por $t = \tau \sin \theta$ e $t' = \tau \cos \theta$, de modo que

$$\langle(\Delta v)^2\rangle = \int_0^\infty d\tau \int_0^{\pi/2} d\theta \tau \hat{C}_{vw}(\tau, \theta). \quad (12.122)$$

O integrando é finito quando $\tau \rightarrow 0$ desde que $b_0 > 0$. Quando $\tau \rightarrow \infty$, o integrando cai como $1/\tau^5$ para todo θ se $c > 0$ e, portanto, a integral converge no limite superior. Podemos agora também entender por que encontramos nas duas últimas subseções que $\langle(\Delta v)^2\rangle$ cresce com o aumento do tempo de voo. Ambos os casos correspondem a $c = 0$ na notação atual. Se $c = 0$, o integrando na Eq. (12.122) cresce para τ grande se $\theta = \pi/4$, que é a linha $t = t'$. Note que em termos dimensionais, $\langle(\Delta v)^2\rangle \propto b_0^{-4}$. A integral na Eq. (12.121) pode ser avaliada numericamente como uma função do parâmetro c e o resultado é ilustrado na Figura 24.

Em resumo, encontramos que ponderar a média ao longo de um feixe de geodésicas com uma seção reta espacial fixa leva a uma velocidade quadrática média que cresce linearmente no tempo. Isto requer uma fonte externa de energia para fornecer a energia cinética adicional para as partículas. Entretanto, se a seção reta cresce linearmente no tempo, como deve ser o caso para um feixe divergente de partículas, então a velocidade

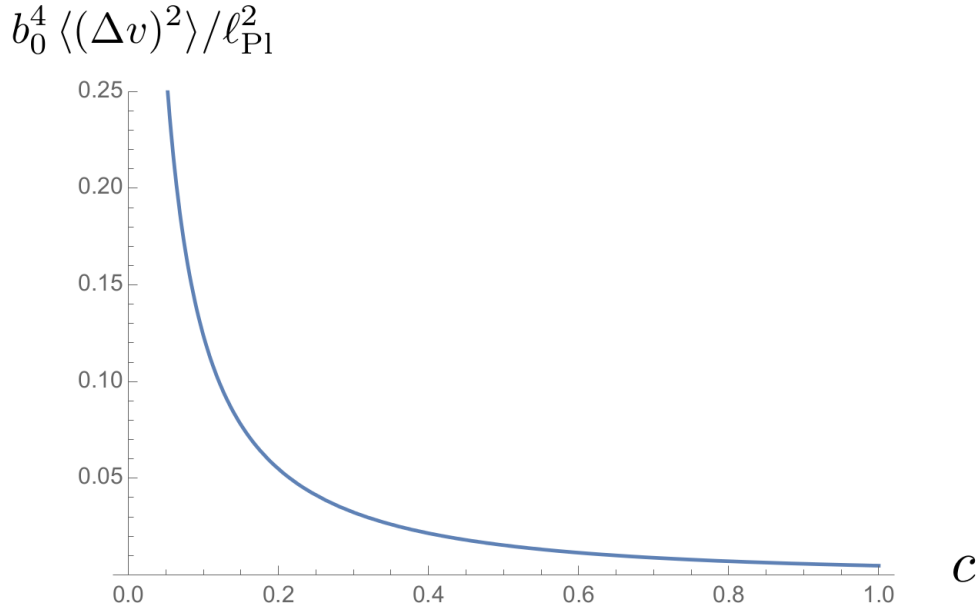


Figura 24 – A variância da velocidade para o caso da média ponderada com comprimento espacial variável é ilustrada como uma função do parâmetro c .

quadrática média tende a um valor constante. Além disso, este valor assintótico é muito pequeno ao menos que a seção reta inicial seja próxima à escala de Planck. Em outros contextos, a falta de crescimento secular dos efeitos da flutuação do vácuo pode estar conectada a anticorrelações [259]. É interessante explorar se também existem anticorrelações similares aqui. Este é o tópico da subseção a seguir.

12.4.4 Integrando ao longo de uma linha de universo: função de correlação da velocidade

Nas últimas seções, para ambos estados térmico e *squeezed*, encontramos que apenas a integração temporal foi suficiente para a dispersão na velocidade relativa ser finita. Portanto, agora vamos amostrar a função de correlação do tensor de Riemann apenas no tempo, onde vamos tomar o comprimento da função de amostragem espacial como sendo zero.

O caso que iremos lidar corresponde a duas regiões de velocidade relativa amostrada no tempo que são permitidas a inicialmente coincidir, mas que são então gradualmente separadas uma da outra. Assim, vamos examinar o comportamento da função de correlação do tensor de Riemann ao longo de todo o intervalo do tempo de deslocamento t_d (veja a Fig. 2 na Ref. [259]). Isto significa que vamos integrar ao longo de uma linha de universo.

Neste sentido, vamos considerar o limite no qual uma das duas funções de amostragem lorentziana adimensional no tempo é deslocada por t_d , mas ambas possuem o mesmo comprimento φ . De fato, este procedimento é tal que iremos construir uma função

de correlação da velocidade que conecta dois pontos separados no espaço-tempo. Assim, podemos rescrever a Eq. (12.86) como

$$\begin{aligned}\hat{C}(t_d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{g}_L(t + t_d, \varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \bar{g}_L(t', \varphi) \hat{C}(t - t', b) \\ &= \frac{a}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{g}_L(t - t_d, a) \hat{C}(t, b).\end{aligned}\quad (12.123)$$

onde $a = 2\varphi$ e escrevemos t para Δt . Esta é uma função de correlação entre medidas de velocidade realizadas no mesmo ponto do espaço, mas em tempos diferentes separados por t_d . Neste último passo, usamos a identidade dada pela Eq. (12.109).

Note que se ponderarmos a média no espaço e, depois, tomarmos o limite onde o comprimento da função de amostragem é pequeno comparada a a , o resultado será o mesmo que tomar o limite $b \rightarrow 0$ diretamente na equação anterior.

Este integrando possui polos de primeira ordem em $t = t_d \pm ia$ e polos de quinta ordem em $t = \pm iR$, onde $R^2 = 3b^2$. De fato, os polos de quinta ordem desaparecem quando tomamos o limite $b \rightarrow 0$. Assim, a integral pode ser realizada por integração de contorno no plano complexo.

Neste caso, onde as partículas teste estão sujeitas a flutuações do vácuo de grávitons, a função $f(\xi)$ possui a forma

$$\begin{aligned}f(\xi) &= \frac{1}{[(\xi - t_d)^2 + a^2](R^2 + \xi^2)^5} \\ &= \frac{1}{(\xi - t_d - ia)(\xi - t_d + ia)[(\xi - iR)(\xi + iR)]^5}.\end{aligned}\quad (12.124)$$

Aqui a resposta deve ser uma quantidade real, assim o resultado é finito e apenas a parte real do resíduo tanto no polo $t = t_d + ia$ quanto $t = t_d - ia$, a saber,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{g}_L(t - t_d, a) \hat{C}(t, b) = \Re \left[\frac{4a}{\pi^2(a - it_d)^6} \right]. \quad (12.125)$$

Portanto, a função de correlação do tensor de Riemann é dada por

$$\hat{C}(t_d) = \frac{a^2(a - t_d)(a + t_d)(a^2 - 4at_d + t_d^2)(a^2 + 4at_d + t_d^2)}{\pi^2(a^2 + t_d^2)^6}, \quad (12.126)$$

onde é fácil ver que $\hat{C}(t_d) = \hat{C}(-t_d)$. No limite em que $t_d \rightarrow 0$, este resultado é equivalente à integrar a dispersão na velocidade relativa no interior de um mundo tubular quadridimensional definido pelo feixe de geodésicas. Portanto, podemos escrever

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \hat{C}(0) = \frac{\ell_{\text{Pl}}^4}{\pi^2 a^4}, \quad (12.127)$$

$$(\Delta v)_{\text{rms}} = \frac{\ell_{\text{Pl}}^2}{\pi a^2}. \quad (12.128)$$

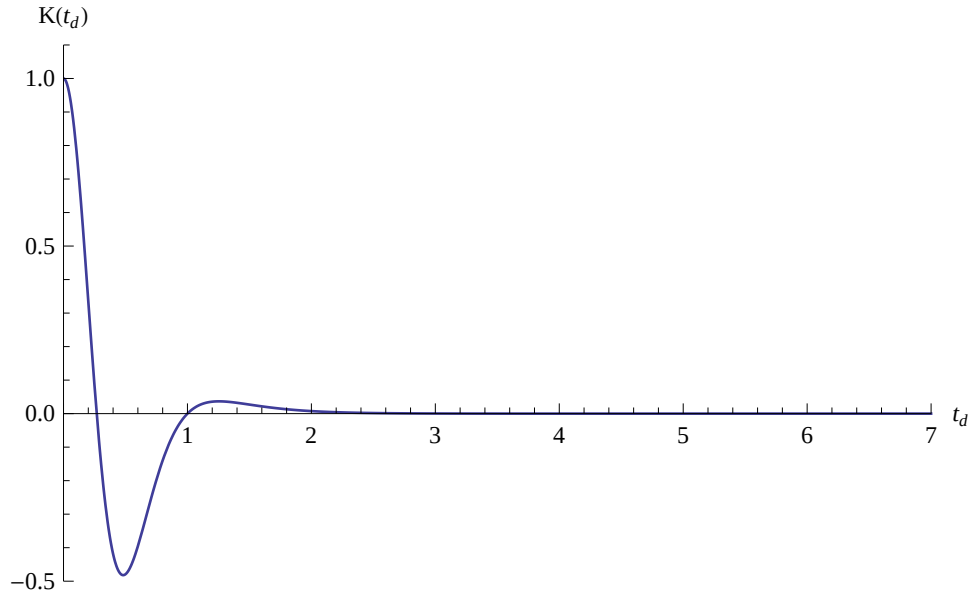


Figura 25 – A forma completa de $K(t_d)$ versus t_d , para uma função de lorentziana adimensional. As unidades estão dadas em múltiplos do comprimento a .

Agora, a partir da Eq. (12.126), podemos definir [259]

$$K(t_d, a) = \frac{\hat{C}(t_d)}{\hat{C}(0)} = \frac{a^6(a^6 - 15a^4t_d^2 + 15a^2t_d^4 - t_d^6)}{(a^2 + t_d^2)^6}, \quad (12.129)$$

que possui a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt_d K(t_d, a) = 2 \int_0^{+\infty} dt_d K(t_d, a) = 0. \quad (12.130)$$

A função $K(t_d, a)$ é uma distribuição normalizada que nos indica que regiões correlacionadas possuem $K(t_d, a) > 0$, enquanto regiões anticorrelacionadas possuem $K(t_d, a) < 0$.

Assim, se assumirmos $a = 1$ na Eq. (12.129), obtemos

$$K(t_d) = \frac{1 - 15t_d^2 + 15t_d^4 - t_d^6}{(1 + t_d^2)^6}. \quad (12.131)$$

A forma desta função está ilustrada na Figura 25. Note que $K(t_d)$ possui dois mínimos localizados em $K(0.481575) = -0.481913$ e $K(4.38129) = -0.0000270144$, e um máximo localizado em $K(1.25396) = 0.0366273$, onde este último aparece magnificado na Figura 26.

No limite quando $t_d \rightarrow 0$, temos que $K(t_d) \sim 1$, como esperado. Por outro lado, no limite onde $t_d \rightarrow \infty$, a função $K(t_d)$ comporta-se assintoticamente como

$$K(t_d) \sim -\frac{1}{t_d^6} \longrightarrow 0. \quad (12.132)$$

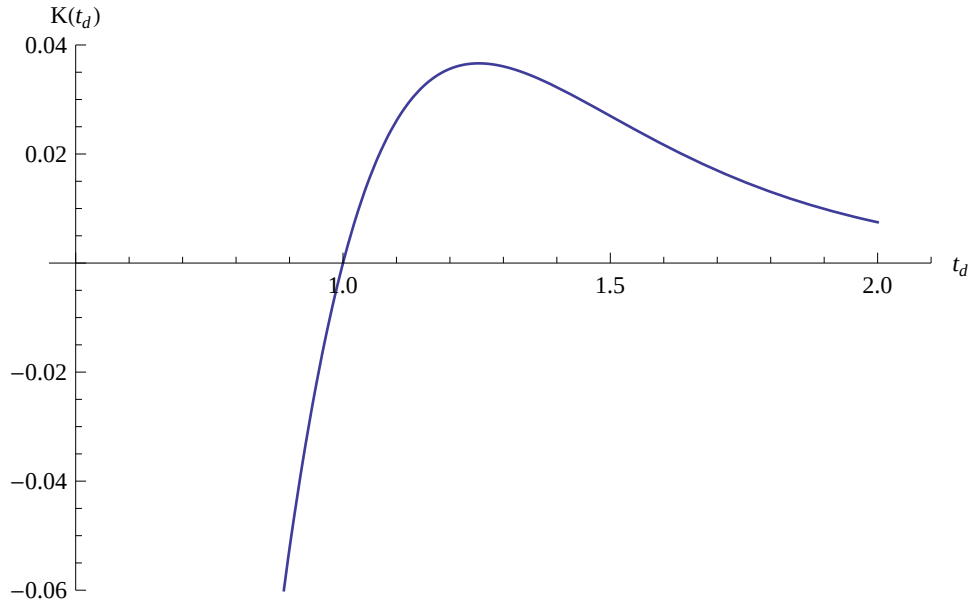


Figura 26 – O único pico de máximo. As unidades estão dadas em múltiplos do comprimento a .

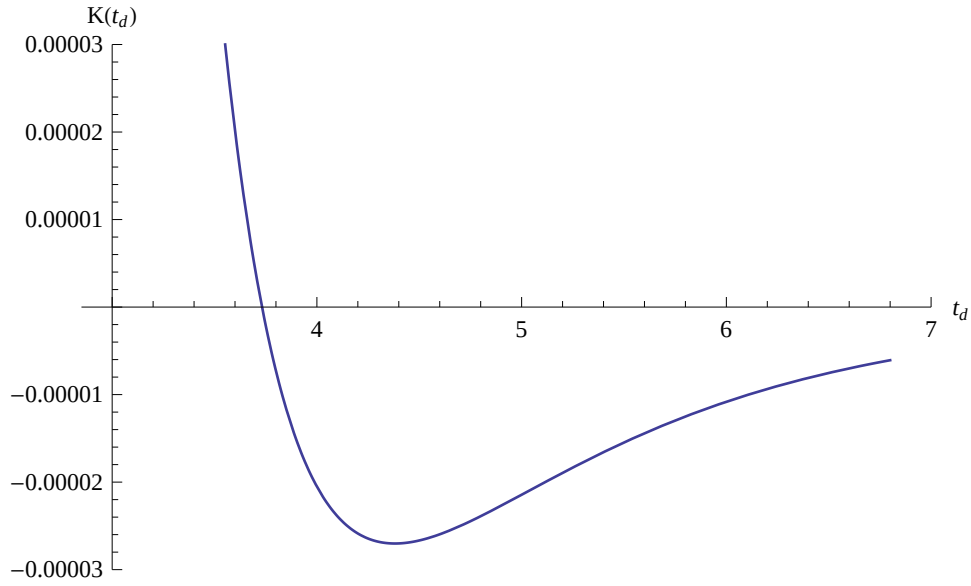


Figura 27 – O mínimo final é revelado neste gráfico em escala pequena. As unidades estão dadas em múltiplos do comprimento a .

Este resultado negativo pode ser entendido como segue. Na Figura 25, as regiões positivas de $K(t_d)$ estão relacionadas à função de correlação, assim como às medidas positivas de velocidade. No caso contrário, as negativas estão relacionadas à função de anticorrelação, o que significa que deve haver redução de velocidade nas proximidades das regiões positivas. De fato, como integramos através de pontos espaciais onde $x = x'$ (o que implica que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ ou $b \rightarrow 0$), portanto, $C_{txtxtxtx}(x, x')$ é definida apenas

como uma distribuição.

Na Figura 27, o pico negativo final mostra que a medida que t_d aumenta, as duas partículas se tornam suficientemente separadas uma da outra tal que se distanciam da fonte das flutuações e, portanto, a velocidade relativa tende a zero.

Em resumo, nosso resultado chave nesta subseção foi que a velocidade relativa entre duas partículas geodésicas teste é anticorrelacionada no estado de vácuo de grávitons. As velocidades coincidem para pequenos valores do tempo de deslocamento t_d , mas diferem quando t_d cresce, o que significa que o processo físico de amostragem fornece energia para as duas partículas e, então, a velocidade relativa é modificada.

Note que a resposta final para as dispersões de ambas velocidade e distância relativas irão depender da abordagem escolhida, mas a relação final entre essas duas quantidades físicas será a mesma. Portanto, abordagens diferentes fornecem resultados particulares diferentes, mas resultados finais iguais para a flutuação da equação do desvio geodésico.

Podemos concluir que o resultado final dependerá da questão perguntada, ou seja, a resposta depende da abordagem utilizada para amostrar a função de correlação do tensor de Riemann. Nestes cálculos, ficou claro que escolhendo diferentes maneiras de amostrar significa diferentes maneiras de interagir com o sistema em consideração, o que é esperado do ponto de vista físico, assim como do matemático.

12.5 Conclusões parciais

Analizamos os efeitos das flutuações da geometria do espaço-tempo sobre o movimento de partículas teste usando a equação do desvio geodésico. Justo como um campo gravitacional clássico leva a aceleração de maré e modificações nas velocidades relativas de partículas teste, um campo gravitacional flutuando leva a flutuações nestas velocidades relativas e, consequentemente, flutuações nas separações relativas das partículas. Tratamos a equação do desvio geodésico como uma equação de Langevin, a qual pode ser integrada para expressar as variâncias das velocidade e posição relativas como integrais da função de correlação do tensor de Riemann. Aqui consideramos flutuações em torno de um espaço-tempo plano produzido pelo efeitos da gravidade quântica linear. Assim, estamos lidando com flutuações ativas dos graus de liberdade dinâmicos da gravidade, em oposição as flutuações passivas devidas ao tensor de energia-momento da matéria. As fontes das flutuações da geometria do espaço-tempo podem ser tanto um banho de grávitons quanto flutuações do vácuo de grávitons. Consideramos um banho térmico de grávitons e um banho de grávitons em um estado de vácuo *squeezed*. Como esperado, as variâncias da velocidade e posição tendem a ser muito pequenas e são suprimidas pela raiz da relação do comprimento de Planck com o comprimento característico do sistema. No caso de um banho térmico de grávitons, a variância da velocidade relativa tende a uma constante no

final do tempo, mas a flutuação média quadrática da posição cresce linearmente no tempo. Isto pode ser interpretado como uma versão do efeito de memória gravitacional [141].

A discussão dos efeitos da flutuação do vácuo de grávitons, dada na Seção 12.4, requer ponderar a média em ambas as coordenadas, de espaço e de tempo, para produzir resultados finitos. Podemos interpretar isto como uma média ao longo de um mundo tubular que descreve a história de um conjunto de partículas teste. No caso onde o comprimento espacial do feixe de geodésicas é mantido constante, encontramos que a velocidade relativa quadrática média cresce linearmente com o tempo de voo. Isto parece requerer uma fonte externa de energia para manter o comprimento constante. Entretanto, isto também levanta a interessante possibilidade de efeitos de gravidade quântica aprimorados para longos tempos de voo. Além disso, também encontramos que se o comprimento espacial é permitido crescer, mesmo que muito devagar, a medida que as partículas se propagam, então a velocidade relativa quadrática média tende a uma constante.

Parece haver alguns efeitos sutis das flutuações da geometria do espaço-tempo em gravidade quântica linearizada, o que pode ser elucidar os efeitos esperados em uma teoria completa de gravidade quântica.

Conclusões e perspectivas

We'll pray and kiss
And say goodnight
Goodnight

(Black Sabbath. "Zeitgeist". 13. Universal Music, 2013. CD.)

Nesta tese de doutoramento, examinamos três linhas de pesquisa que tratam das interações entre campos quânticos e gravitacionais, assim como suas correspondentes abordagens em gravidade análoga. Em todas elas, os campos quânticos foram geometrizados, enquanto os campos gravitacionais foram tratados de forma clássica, ou seja, como são dados na teoria da relatividade geral. Assim, podemos dizer que nossa contribuição para o estabelecimento de uma teoria quântica da gravitação foi feita seguindo o caminho da geometrização da mecânica quântica, ao invés da quantização da relatividade geral.

Primeiramente, tratamos de campos quânticos escalares submetidos a campos gravitacionais de buracos negros. Até então, nenhuma solução exata, analítica em todo o espaço-tempo, era conhecida para a equação de movimento de tais partículas. Com o avanço na teoria das equações de Heun, conseguimos obter tais soluções e, usando as propriedades matemáticas das funções de Heun, examinar os fenômenos físicos relacionados a essa interação. A conclusão é que um parâmetro geométrico, relacionado ao campo gravitacional em consideração, aparece em todos os resultados obtidos, o que demonstra que existe sempre uma característica geométrica refletida no efeito quântico.

Em seguida, aplicamos toda essa abordagem aos modelos análogos da gravitação em mecânica estatística. Os buracos negros acústicos são, de fato, ótimos candidatos para a experimentação de testes quânticos da teoria da relatividade geral. Com o avanço cada vez mais rápido das tecnologias relacionadas à física experimental, temos a esperança de que, em um curto período de tempo, será possível obter dados em laboratório que validem toda a teoria de fenômenos quânticos em uma geometria efetiva, em especial, o efeito Hawking.

Como já foi dito anteriormente, todos esses resultados foram obtidos em termos das funções de Heun. Sendo assim, passamos a examinar outros problemas de interesse físico, bem como os que possam contribuir no desenvolvimento da física-matemática. Uma pergunta em aberto era sobre a função de onda do universo, e quais suas propriedades. Agora, sabemos que a resposta são os casos confluentes das funções de Heun, tanto para a cosmologia newtoniana quântica, quanto para a cosmologia relativística.

Por fim, uma proeminente área de pesquisa é a que trata das flutuações quânticas da geometria do espaço-tempo. Partindo do conhecido movimento browniano, estabelecemos a

analogia com a equação do desvio geodésico e analisamos a interação entre partículas teste e as flutuações geradas por estados quânticos com grávitons, isso através da geometrização de tais estados, especificamente em termos do tensor de Riemann. Concluimos que existe uma memória nas ondas gravitacionais, visto que elas carregam as informações referentes a essa interação. As ondas gravitacionais são um novo paradigma na física, o que impulsionará o avanço de uma nova forma de ver o Cosmos.

A partir de agora, temos bem estabelecida uma forma de abordar alguns problemas em gravitação e cosmologia. A perspectiva é de que podemos examinar os problemas relacionados a interação de campos quânticos escalares e espinoriais com o campo gravitacional de um buraco negro mais geral, assim como questões sobre as condições de contorno tanto do universo primordial, quanto do limite da expansão. Além disso, generalizar a análise das flutuações quânticas quando a geometria é não riemanniana e quando o espaço-tempo tem dimensões extras. Essas são tarefas a serem desenvolvidas no início de minha carreira como físico teórico.

Referências

- [1] HAAG, R.; KASTLER, D. An algebraic approach to quantum field theory. *J. Math. Phys.*, v. 5, p. 848–861, (1964). Citado na página 15.
- [2] CARTER, B. Hamilton-Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein's equations. *Commun. Math. Phys.*, v. 10, p. 280–310, (1968). Citado na página 15.
- [3] BRILL, D. R.; CHRZANOWSKI, P. L.; PEREIRA, C. M.; FACKERELL, E. D.; IPSER, J. R. Solution of the scalar wave equation in a Kerr background by separation of variables. *Phys. Rev. D*, v. 5, p. 1913–1915, (1972). Citado na página 15.
- [4] ROWAN, D. J.; STEPHENSON, G. Solutions of the time-dependent Klein-Gordon equation in a Schwarzschild background space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 9, p. 1631–1635, (1976). Citado na página 15.
- [5] FULLING, S. A. *Aspects of quantum field theory in curved space-time*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, (1989). Citado na página 15.
- [6] BIRRELL, N. D.; DAVIS, P. C. W. *Quantum fields in curved space*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, (1994). Citado na página 15.
- [7] JACOBSON, T. Introduction to quantum fields in curved spacetime and the Hawking effect. *arXiv:0308048 [gr-qc]*, (2003). Citado na página 15.
- [8] VASUDEVAN, M.; STEVENS, K. A.; PAGE, D. N. Separability of the Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon equations in Kerr-de Sitter metrics. *Class. Quantum Grav.*, v. 22, p. 339–352, (2005). Citado na página 15.
- [9] FORD, L. H. Quantization of a scalar field in the Kerr space-time. *Phys. Rev. D*, v. 12, p. 2963–2977, (1975). Citado na página 15.
- [10] COUCH, W. E. Solutions to wave equations on black hole geometries. *J. Math. Phys.*, v. 22, p. 1457–1462, (1981). Citado na página 15.
- [11] ELIZALDE, E. Series solutions for the Klein-Gordon equation in Schwarzschild space-time. *Phys. Rev. D*, v. 36, p. 1269–1272, (1987). Citado na página 15.
- [12] SEMIZ, I. The Klein-Gordon equation is separable on the dyon black hole metric. *Phys. Rev. D*, v. 45, p. 532–533, (1992). Citado na página 15.
- [13] SLATYER, T. R.; SAVAGE, C. M. Superradiant scattering from a hydrodynamic vortex. *Class. Quantum. Grav.*, v. 22, p. 3833–3839, (2005). Citado na página 15.

- [14] FEDERICI, F.; CHERUBINI, C.; SUCCI, S.; TOSI, M. P. Superradiance from hydrodynamic vortices: A numerical study. *Phys. Rev. A*, v. 73, p. 033604, (2006). Citado na página 15.
- [15] DOLAN, S. R. Instability of the massive Klein-Gordon field on the Kerr spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 0840001, (2007). Citado na página 15.
- [16] KIBBLE, T. W. B. Topology of cosmic domains and strings. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 9, p. 1387–1398, (1976). Citado na página 15.
- [17] VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, v. 23, p. 852–857, (1981). Citado na página 15.
- [18] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, (1994). Citado na página 15.
- [19] GERMANO, M. G.; BEZERRA, V. B.; DE MELLO, E. R. B. Gravitational effects due to a cosmic string in Schwarzschild space-time. *Class. Quantum Grav.*, v. 13, p. 2663–2673, (1996). Citado na página 15.
- [20] GAL'TSOV, D. V.; MASÁR, E. Geodesics in space-times containing cosmic strings. *Class. Quantum Grav.*, v. 6, p. 1313–1341, (1989). Citado 3 vezes nas páginas 16, 53 e 135.
- [21] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, v. 43, p. 199–220, (1975). Citado na página 16.
- [22] BOULWARE, D. G. Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces. *Phys. Rev. D*, v. 11, p. 1404–1423, (1975). Citado na página 16.
- [23] HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Path-integral derivation of black-hole radiance. *Phys. Rev. D*, v. 13, p. 2188–2203, (1976). Citado na página 16.
- [24] GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Phys. Rev. D*, v. 15, p. 2738–2751, (1977). Citado na página 16.
- [25] PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 5042–5045, (2000). Citado na página 16.
- [26] GANGOPADHYAY, D.; MANNA, G. The Hawking temperature in the context of dark energy. *Europhys. Lett.*, v. 100, p. 49001, (2013). Citado na página 16.
- [27] DA ROCHA, R.; DA SILVA, J. M. H. Hawking radiation from elko particles tunnelling across black strings horizon. *Europhys. Lett.*, v. 107, p. 50001, (2014). Citado na página 16.

- [28] BEYER, H. R. On the completeness of the quasinormal modes of the Pöschl-Teller potential. *Commun. Math. Phys.*, v. 204, p. 397–423, (1999). Citado na página 16.
- [29] LAY, W.; SLAVYANOV, S. Y. The central two-point connection problem for the Heun class of ODEs. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 31, p. 4249–4261, (1998). Citado na página 16.
- [30] DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, L. A.; CRISPINO, L. C. B. Quasinormal modes and Regge poles of the canonical acoustic hole. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 084037, (2010). Citado na página 16.
- [31] SLAVYANOV, S. Y.; LAY, W. *Special functions*. 1. ed. Oxford University Press, (2000). Citado na página 16.
- [32] HORTAÇSU, M. *Heun functions and their uses in physics*. Mathematical Physics: Proceedings of the 13th Regional Conference; e-print arXiv:1101.0471 [math-ph]. Singapore: World Scientific, (2013). edited by U. Camci and I. Semiz. Citado na página 16.
- [33] DAMOUR, T.; DERUELLE, N.; RUFFINI, R. On quantum resonances in stationary geometries. *Lett. Nuovo Cimento*, v. 15, p. 257–262, (1976). Citado na página 16.
- [34] DETWEILER, S. Klein-Gordon equation and rotating black holes. *Phys. Rev. D*, v. 22, p. 2323–2326, (1980). Citado na página 16.
- [35] GAINA, A. B.; KOCHORBÉ, F. G. S matrix and resonance states in the Kerr-Newman geometry. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 92, p. 369–378, (1987). Citado na página 16.
- [36] SÁNCHEZ, N. Wave scattering theory and the absorption problem for a black hole. *Phys. Rev. D*, v. 16, p. 937–945, (1977). Citado na página 16.
- [37] SÁNCHEZ, N. Absorption and emission spectra of a Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, v. 18, p. 1030–1036, (1978). Citado na página 16.
- [38] CRISPINO, L. C. B.; OLIVEIRA, E. S.; HIGUCHI, A.; MATSAS, G. E. A. Absorption cross section of electromagnetic waves for Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 104012, (2007). Citado na página 16.
- [39] LIAO, H.; CHEN, J.; WANG, Y. Scattering of scalar wave from black hole in Hořava-Lifshitz gravity. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 21, p. 1250045, (2012). Citado na página 16.
- [40] LIAO, H.; CHEN, J. H.; LIAO, P.; WANG, Y. J. Absorption/scattering of massless Dirac wave from black hole spacetimes with cosmic string. *Commun. Theor. Phys.*, v. 62, p. 227–234, (2014). Citado na página 16.

- [41] UNRUH, W. G. Experimental black hole evaporation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 46, p. 1351–1353, (1981). Citado 2 vezes nas páginas 17 e 116.
- [42] CARDOSO, V. M. S.; CRISPINO, L. C. B.; LIBERATI, S.; OLIVEIRA, E. S.; VISSER, M. *Analogue spacetimes: The first thirty years*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2013). Citado na página 17.
- [43] BANERJEE, R.; KIEFER, C.; MAJHI, B. R. Quantum gravitational correction to the Hawking temperature from the Lemaître-Tolman-Bondi model. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 044013, (2010). Citado na página 17.
- [44] UMETSU, K. Tunneling mechanism in Kerr-Newman black hole and dimensional reduction near the horizon. *Phys. Lett. B*, v. 692, p. 61–63, (2010). Citado na página 17.
- [45] YALE, A. Exact Hawking radiation of scalars, fermions, and bosons using the tunneling method without back-reaction. *Phys. Lett. B*, v. 697, p. 398–403, (2011). Citado na página 17.
- [46] BARCELÓ, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living Rev. Relativity*, v. 8, p. 12, (2005). Citado 2 vezes nas páginas 17 e 129.
- [47] ROUSSEAUX, G.; MATHIS, C.; MAÏSSA, P.; PHILBIN, T. G.; LEONHARDT, U. Observation of negative phase velocity waves in a water tank: A classical analogue to the Hawking effect? *New J. Phys.*, v. 10, p. 053015, (2008). Citado na página 17.
- [48] WEINFURTNER, S.; TEDFORD, E. W.; PENRICE, M. C. J.; UNRUH, W. G.; LAWRENCE, G. A. Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 021302, (2011). Citado na página 17.
- [49] MICHEL, F.; PARENTANI, R. Probing the thermal character of analogue Hawking radiation for shallow water waves? *Phys. Rev. D*, v. 90, p. 044033, (2014). Citado na página 17.
- [50] CHRISTENSEN, S. M.; FULLING, S. A. Trace anomalies and the Hawking effect. *Phys. Rev. D*, v. 15, p. 2088–2104, (1977). Citado na página 18.
- [51] ROBINSON, S. P.; WILCZEK, F. A relationship between Hawking radiation and gravitational anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 011303, (2005). Citado na página 18.
- [52] ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Acoustic black holes from Abelian Higgs model with Lorentz symmetry breaking. *Phys. Lett. B*, v. 694, p. 149–157, (2010). Citado na página 18.

- [53] GARAY, L. J.; ANGLIN, J. R.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Black holes in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 4643, (2000). Citado na página 18.
- [54] FEDICHEV, P. O.; FISCHER, U. R. Gibbons-Hawking effect in the sonic de Sitter space-time of an expanding Bose-Einstein-condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, p. 240407, (2003). Citado na página 18.
- [55] LAHAV, O.; ITAH, A.; BLUMKIN, A.; GORDON, C.; RINOTT, S.; ZAYATS, A.; STEINHAEUER, J. Realization of a sonic black hole analogue in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 240401, (2010). Citado na página 18.
- [56] ZAPATA, I.; ALBERT, M.; PARENTANI, R.; SOLS, F. Resonant Hawking radiation in Bose-Einstein condensates. *New J. Phys.*, v. 13, p. 063048, (2011). Citado na página 18.
- [57] JACOBSON, T. A.; VOLOVIK, G. E. Event horizons and ergoregions in He-3. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 064021, (1998). Citado na página 18.
- [58] GE, X. H.; SIN, S. J. Acoustic black holes for relativistic fluids. *J. High Energy Phys.*, v. 06, p. 087, (2010). Citado na página 18.
- [59] GE, X. H.; WU, S. F.; WANG, Y.; YANG, G. H.; SHEN, Y. G. Acoustic black holes from supercurrent tunneling. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 21, p. 1250038, (2012). Citado na página 18.
- [60] GERACE, D.; CARUSOTTO, I. Analog Hawking radiation from an acoustic black hole in a flowing polariton superfluid. *Phys. Rev. B*, v. 86, p. 144505, (2012). Citado na página 18.
- [61] GIOVANAZZI, S. Hawking radiation in sonic black holes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 94, p. 061302, (2005). Citado na página 18.
- [62] MARINO, F. Acoustic black holes in a two-dimensional ‘photon-fluid’. *Phys. Rev. A*, v. 78, p. 063804, (2008). Citado na página 18.
- [63] MARINO, F.; CISZAK, M.; ORTOLAN, A. Acoustic superradiance from optical vortices in self-defocusing cavities. *Phys. Rev. A*, v. 80, p. 065802, (2009). Citado na página 18.
- [64] FOUXON, I.; FARBEROVICH, O. V.; BAR-AD, S.; FLEUROV, V. Dynamics of fluctuations in an optical analogue of the laval nozzle. *Europhys. Lett.*, v. 92, p. 14002, (2010). Citado na página 18.

- [65] SOLNYSHKOV, D. D.; FLAYAC, H.; MALPUECH, G. Black holes and wormholes in spinor polariton condensates. *Phys. Rev. B*, v. 84, p. 233405, (2011). Citado na página 18.
- [66] RUBINO, E.; BELGIORNO, F.; CACCIATORI, S. L.; CLERICI, M.; GORINI, V.; ORTENZI, G.; RIZZI, L.; SALA, V. G.; KOLESIK, M.; FACCIO, D. Experimental evidence of analogue Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments. *New J. Phys.*, v. 13, p. 085005, (2011). Citado na página 18.
- [67] SCHÜTZHOLD, R.; UNRUH, W. G. Comment on: Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments. *Phys. Rev. Lett.*, v. 107, p. 149401, (2011). Citado na página 18.
- [68] BELGIORNO, F.; CACCIATORI, S. L.; CLERICI, M.; GORINI, V.; ORTENZI, G.; RIZZI, L.; RUBINO, E.; SALA, V. G.; FACCIO, D. Reply to comment on: Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments. *Phys. Rev. Lett.*, v. 107, p. 149402, (2011). Citado na página 18.
- [69] LIBERATI, S.; PRAIN, A.; VISSER, M. Quantum vacuum radiation in optical glass. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 084014, (2012). Citado na página 18.
- [70] FINAZZI, S.; CARUSOTTO, I. Kinematic study of the effect of dispersion in quantum vacuum emission from strong laser pulses. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 127, p. 78, (2012). Citado na página 18.
- [71] STEINHAEUER, J. Observation of self-amplifying Hawking radiation in an analog black hole laser. *Nature Phys.*, v. 10, p. 864, (2014). Citado na página 18.
- [72] JACOBSON, T. Black hole evaporation and ultrashort distances. *Phys. Rev. D*, v. 44, p. 1731–1739, (1991). Citado na página 18.
- [73] JACOBSON, T. Black hole radiation in the presence of a short distance cutoff. *Phys. Rev. D*, v. 48, p. 728–741, (1993). Citado na página 18.
- [74] BARCELÓ, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analog gravity from Bose-Einstein condensates. *Class. Quantum Grav.*, v. 18, p. 1137, (2001). Citado na página 18.
- [75] VISSER, M.; BARCELÓ, C.; LIBERATI, S. Analog models of and for gravity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 34, p. 1719–1734, (2002). Citado na página 18.
- [76] BERTI, E.; CARDOSO, V.; LEMOS, J. P. S. Quasinormal modes and classical wave propagation in analogue black holes. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 124006, (2004). Citado na página 18.

- [77] WÜSTER, S. Phonon background versus analogue Hawking radiation in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, v. 78, p. 021601(R), (2008). Citado na página 18.
- [78] DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, E. S.; CRISPINO, L. C. B. Scattering of sound waves by a canonical acoustic hole. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 064014, (2009). Citado na página 18.
- [79] OLIVEIRA, E. S.; DOLAN, S. R.; CRISPINO, L. C. B. Absorption of planar waves in a draining bathtub. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 124013, (2010). Citado na página 18.
- [80] DAS, S. R.; GHOSH, A.; OH, J. H.; SHAPER, A. D. On dumb holes and their gravity duals. *J. High Energy Phys.*, v. 04, p. 030, (2011). Citado na página 18.
- [81] FABBRI, A.; MAYORAL, C. Step-like discontinuities in Bose-Einstein condensates and Hawking radiation: the hydrodynamic limit. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 124016, (2011). Citado na página 18.
- [82] MAYORAL, C.; FABBRI, A.; RINALDI, M. Step-like discontinuities in Bose-Einstein condensates and Hawking radiation: dispersion effects. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 124047, (2011). Citado na página 18.
- [83] CARUSOTTO, I.; FAGNOCCHI, S.; RECATI, A.; BALBINOT, R.; FABBRI, A. Numerical observation of Hawking radiation from acoustic black holes in atomic becs. *New J. Phys.*, v. 10, p. 103001, (2011). Citado na página 18.
- [84] ROBERTSON, S. J. The theory of Hawking radiation in laboratory analogues. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, v. 45, p. 163001, (2012). Citado na página 18.
- [85] BELENCHIA, A.; LIBERATI, S.; MOHD, A. Emergent gravitational dynamics in a relativistic Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. D*, v. 90, p. 104015, (2014). Citado na página 18.
- [86] STEINHAEUER, J. Measuring the entanglement of analogue Hawking radiation by the density-density correlation function. *Phys. Rev. D*, v. 92, p. 024043, (2015). Citado na página 18.
- [87] BASAK, S.; MAJUMDAR, P. ‘Superresonance’ from a rotating acoustic black hole. *Class. Quantum Grav.*, v. 20, p. 3907–3914, (2003). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 119.
- [88] BASAK, S.; MAJUMDAR, P. Reflection coefficient for superresonant scattering. *Class. Quantum Grav.*, v. 20, p. 2929–2936, (2003). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 128.

- [89] LEPE, S.; SAAVEDRA, J. Quasinormal modes, superradiance and area spectrum for 2+1 acoustic black holes. *Phys. Lett. B*, v. 617, p. 174–181, (2005). Citado 4 vezes nas páginas 18, 116, 119 e 128.
- [90] GURAPPA, N.; PANIGRAHI, P. K. On polynomial solutions of the Heun equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 37, p. L605–L608, (2004). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 132.
- [91] SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, (2009). Citado na página 19.
- [92] BONDI, H. *Cosmology*. 1. ed. New York: Dover Publications, INC., (2010). Citado na página 19.
- [93] MILNE, E. A. A Newtonian expanding universe. *Q. J. Math.*, v. 5, p. 64–72, (1934). Citado na página 19.
- [94] MCCREA, W. H.; MILNE, E. A. Newtonian universes and the curvature of space. *Q. J. Math.*, v. 5, p. 73–80, (1934). Citado na página 19.
- [95] CALLAN, C.; DICKE, R. H.; PEEBLES, P. J. E. Cosmology and Newtonian mechanics. *Am. J. Phys.*, v. 33, p. 105–108, (1965). Citado na página 19.
- [96] MCCREA, W. H. Relativity theory and the creation of matter. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 206, p. 562–575, (1951). Citado na página 19.
- [97] WHITTAKER, E. T. On Gauss’ theorem and the concept of mass in general relativity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 149, p. 384–395, (1935). Citado na página 19.
- [98] CLIFTON, T.; CLARKSON, C.; BULL, P. Isotropic blackbody cosmic microwave background radiation as evidence for a homogeneous universe. *Phys. Rev. Lett.*, v. 109, p. 051303, (2012). Citado na página 19.
- [99] ADE, P. A. R.; ET AL. Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood. *Astron. Astrophys.*, v. 571, p. A15, (2014). Citado na página 19.
- [100] FREEDMAN, D. Z.; SCHNABL, M.; GIBBONS, G. W. Matrix cosmology. *AIP Conf. Proc.*, v. 743, p. 286–297, (2004). Citado na página 20.
- [101] ROMERO, J. M.; ZAMORA, A. Note on quantum Newtonian cosmology. *arXiv:0504072 [gr-qc]*, (2005). Citado na página 20.
- [102] BRAMSON, B. Newtonian quantum gravity: Axisymmetric, spinning systems. *Proc. R. Soc. A*, v. 463, p. 503–520, (2007). Citado na página 20.

- [103] ELZE, H. T. A relativistic gauge theory of nonlinear quantum mechanics and Newtonian gravity. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 47, p. 455–467, (2008). Citado na página 20.
- [104] KIEFER, C. Conceptual problems in quantum gravity and quantum cosmology. *ISRN Math. Phys.*, v. 2013, p. 509316, (2013). Citado na página 20.
- [105] WHEELER, J. A. On the nature of quantum geometrodynamics. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 2, p. 604–614, (1957). Citado na página 20.
- [106] DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. 1. The canonical theory. *Phys. Rev.*, v. 160, p. 1113–1148, (1967). Citado na página 20.
- [107] WHEELER, J. A. *Batelle rencontres*. 1. ed. New York: Benjamin, (1968). edited by B. S. DeWitt *et al.* Citado na página 20.
- [108] VILENKIN, A. Boundary conditions in quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 33, p. 3560–3569, (1986). Citado na página 20.
- [109] MAYDANYUK, S. P. Wave function of the Universe in the early stage of its evolution. *Eur. Phys. J. C*, v. 57, p. 769–784, (2008). Citado na página 20.
- [110] NELSON, W.; SAKELLARIADOU, M. On the possibility of dark energy from corrections to the Wheeler-DeWitt equation. *Phys. Lett. B*, v. 661, p. 37–41, (2008). Citado na página 20.
- [111] PINTO-NETO, N.; FALCIANO, F. T.; PEREIRA, R.; SANTINI, E. S. The Wheeler-DeWitt quantization can solve the singularity problem. *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 063504, (2012). Citado na página 20.
- [112] HAMBER, H. W.; TORIUMI, R.; WILLIAMS, R. M. Wheeler-DeWitt equation in 3+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 084012, (2013). Citado na página 20.
- [113] HE, D.; GAO, D.; CAI, Q. Y. Dynamical interpretation of the wavefunction of the Universe. *Phys. Lett. B*, v. 748, p. 361–365, (2015). Citado 2 vezes nas páginas 20 e 161.
- [114] LIFSCHYTZ, G.; PERIWAL, V. Schwinger-Dyson=Wheeler-DeWitt: Gauge theory observables as bulk operators. *J. High Energy Phys.*, v. 04, p. 026, (2000). Citado na página 20.
- [115] HENRIQUES, A. B. Loop quantum cosmology and the Wheeler-DeWitt equation. *General Relativ. Gravit.*, v. 38, p. 1645–1659, (2006). Citado na página 20.
- [116] GUSIN, P. Wheeler-DeWitt equation for brane gravity. *Phys. Rev. D*, v. 77, p. 066017, (2008). Citado na página 20.

- [117] CIANFRANI, F.; KOWALSKI-GLIKMAN, J. Wheeler-DeWitt equation and AdS/CFT correspondence for brane gravity. *Phys. Lett. B*, v. 725, p. 463–467, (2013). Citado na página 20.
- [118] BRANNLUND, J.; DEBENEDICTIS, A.; LAUMAN, A. Topology and volume effects in quantum gravity: Wheeler-DeWitt theory. *Class. Quantum Grav.*, v. 31, p. 095011, (2014). Citado na página 20.
- [119] LI, B. F.; WANG, A.; WU, Y.; WU, Z. C. Quantization of (1+1)-dimensional Hořava-Lifshitz theory of gravity. *Phys. Rev. D*, v. 90, p. 124076, (2014). Citado na página 20.
- [120] OKAZAKI, T. Whittaker vector, Wheeler-DeWitt equation, and the gravity dual of conformal quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, v. 92, p. 126010, (2015). Citado na página 20.
- [121] GARATTINI, R.; FAIZAL, M. Cosmological constant from a deformation of the Wheeler-DeWitt equation. *Nucl. Phys. B*, v. 905, p. 313–326, (2016). Citado na página 20.
- [122] ASHTEKAR, A. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 57, p. 2244–2247, (1986). Citado na página 20.
- [123] HAWKING, S. W.; PAGE, D. N. Operator ordering and the flatness of the Universe. *Nucl. Phys. B*, v. 264, p. 185–196, (1986). Citado na página 20.
- [124] ROVELLI, C. The strange equation of quantum gravity. *Class. Quantum Grav.*, v. 32, p. 124005, (2015). Citado na página 20.
- [125] DODONOV, V. V.; DODONOV, A. V. Quantum harmonic oscillator and nonstationary Casimir effect. *J. Russ. Laser Res.*, v. 26, p. 445–483, (2005). Citado na página 21.
- [126] HU, B.; ROURA, A. Metric fluctuations of an evaporating black hole from backreaction of stress tensor fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 124018, (2007). Citado na página 21.
- [127] DÉCANINI, Y.; FOLACCI, A. Hadamard renormalization of the stress-energy tensor for a quantized scalar field in a general spacetime of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 044025, (2008). Citado na página 21.
- [128] KHAVKINE, I. Quantum astrometric observables: Time delay in classical and quantum gravity. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 124014, (2012). Citado na página 21.
- [129] FRÖB, M. B. Fully renormalized stress tensor correlator in flat space. *Phys. Rev. D*, v. 88, p. 045011, (2013). Citado na página 21.

- [130] BUTERA, S.; PASSANTE, R. Field fluctuations in a one-dimensional cavity with a mobile wall. *Phys. Rev. Lett.*, v. 111, p. 060403, (2013). Citado na página [21](#).
- [131] MOHSENI, M. The Raychaudhuri equation for spinning test particles. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 47, p. 24, (2015). Citado na página [21](#).
- [132] HU, B. L. Emergent/quantum gravity: macro/micro structures of spacetime. *J. Phys.: Conf. Ser.*, v. 174, p. 012015, (2009). Citado na página [21](#).
- [133] CARLIP, S.; MOSNA, R. A.; PITELLI, J. P. M. Vacuum fluctuations and the small scale structure of spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, v. 107, p. 021303, (2011). Citado na página [21](#).
- [134] HSIANG, J.-T.; WU, T.-H.; LEE, D.-S. Brownian motion of a charged particle in electromagnetic fluctuations at finite temperature. *Found. Phys.*, v. 41, p. 77–87, (2011). Citado na página [21](#).
- [135] AMELINO-CAMELIA, G.; ASTUTI, V.; ROSATI, G. Gravity’s weight on worldline fuzziness. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 21, p. 1242012, (2012). Citado na página [21](#).
- [136] LEONARD, K. E.; WOODARD, R. P. Graviton corrections to Maxwell’s equations. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 104048, (2012). Citado na página [21](#).
- [137] HSIANG, J.-T.; WU, T.-H.; LEE, D.-S. Negative correlation of electromagnetic vacuum fluctuations and motion of a charged particle. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, v. 12, p. 299, (2012). Citado na página [21](#).
- [138] BONGA, B.; KHAVKINE, I. Quantum astrometric observables. II. Time delay in linearized quantum gravity. *Phys. Rev. D*, v. 89, p. 024039, (2014). Citado na página [21](#).
- [139] KHAVKINE, I. Local and gauge invariant observables in gravity. *Class. Quantum Grav.*, v. 32, p. 185019, (2015). Citado na página [21](#).
- [140] CARMELI, M. *Classical fields: General relativity and gauge theory*. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., (1982). Citado na página [21](#).
- [141] ZHANG, P.-M.; DUVAL, C.; GIBBONS, G. W.; HORVATHY, P. A. Soft gravitons and the memory effect for plane gravitational waves. *Phys. Rev. D*, v. 96, p. 064013, (2017). Citado 3 vezes nas páginas [21](#), [171](#) e [190](#).
- [142] SHAHZAD, M. U.; JAWAD, A. Tidal forces in Kiselev black hole. *Eur. Phys. J. C*, v. 77, p. 372, (2017). Citado na página [21](#).

- [143] BEYER, F.; FRAUENDIENER, J.; STEVENS, C.; WHALE, B. Numerical initial boundary value problem for the generalized conformal field equations. *Phys. Rev. D*, v. 96, p. 084020, (2017). Citado na página 21.
- [144] TANAHASHI, N.; OHASHI, S. Wave propagation and shock formation in the most general scalar-tensor theories. *Class. Quantum Grav.*, v. 34, p. 215003, (2017). Citado na página 21.
- [145] DOWNES, T. G.; VAN METER, J. R.; KNILL, E.; MILBURN, G. J.; CAVES, C. M. Quantum estimation of parameters of classical spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 96, p. 105004, (2017). Citado na página 21.
- [146] CARROLL, S. *Spacetime and geometry*. 1. ed. San Francisco: Addinon-Wesley, Inc., (2004). Citado na página 21.
- [147] MAEDER, A. An alternative to the Λ CDM model: The case of scale invariance. *Astrophys. J.*, v. 849, p. 158, (2017). Citado na página 21.
- [148] BIERI, L.; GARFINKLE, D.; YUNES, N. Gravitational wave memory in Λ CDM cosmology. *Class. Quantum Grav.*, v. 34, p. 215002, (2017). Citado na página 21.
- [149] YANG, H.; CASALS, M. General relativistic dynamics of an extreme mass-ratio binary interacting with an external body. *Phys. Rev. D*, v. 96, p. 083015, (2017). Citado na página 21.
- [150] PADMANABHAN, T. *Gravitation*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, (2010). Citado na página 21.
- [151] CIUFOLINI, I. Generalized geodesic deviation equation. *Phys. Rev. D*, v. 34, p. 1014–1017, (1986). Citado na página 21.
- [152] DALVIT, D. A. R.; MAZZITELLI, F. D. Quantum corrected geodesics. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 084018, (1999). Citado na página 21.
- [153] SÄMANN, C.; STEINBAUER, R.; LECKE, A.; PODOLSKÝ, J. Geodesics in nonexpanding impulsive gravitational waves with Λ , part I. *Class. Quantum Grav.*, v. 33, p. 115002, (2016). Citado na página 21.
- [154] EPERON, F. C. Geodesics in supersymmetric microstate geometries. *Class. Quantum Grav.*, v. 34, p. 165003, (2017). Citado na página 21.
- [155] HARKO, T.; LEUNG, C. S.; MOCANU, G. Generalized Langevin equation with colored noise description of the stochastic oscillations of accretion disks. *Eur. Phys. J. C*, v. 74, p. 2900, (2014). Citado na página 22.

- [156] MIYAMOTO, Y.; MOTOHASHI, H.; SUYAMA, T.; YOKOYAMA, J. Langevin description of gauged scalar fields in a thermal bath. *Phys. Rev. D*, v. 89, p. 085037, (2014). Citado na página 22.
- [157] HARKO, T.; MOCANU, G. Electromagnetic radiation of charged particles in stochastic motion. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, p. 160, (2016). Citado na página 22.
- [158] BOYANOVSKY, D. Fermionic influence on inflationary fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 93, p. 083507, (2016). Citado na página 22.
- [159] OU, Z. W.; TONG, H.; KOU, F. F.; DING, G. Q. Fluctuating neutron star magnetosphere: Braking indices of eight pulsars, frequency second derivatives of 222 pulsars and 15 magnetars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 457, p. 3922–3933, (2016). Citado na página 22.
- [160] BOYANOVSKY, D. Effective field theory during inflation. II. Stochastic dynamics and power spectrum suppression. *Phys. Rev. D*, v. 93, p. 043501, (2016). Citado na página 22.
- [161] HOLLOWOOD, T. J.; MCDONALD, J. I. Decoherence, discord, and the quantum master equation for cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, v. 95, p. 103521, (2017). Citado na página 22.
- [162] SALINAS, S. R. A. *Introduction to statistical physics*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, (2001). Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- [163] YU, H.; FORD, L. H. Vacuum fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 065009, (2004). Citado na página 22.
- [164] BESSA, C. H. G.; BEZERRA, V. B.; FORD, L. H. Brownian motion in Robertson-Walker spacetimes from electromagnetic vacuum fluctuations. *JMathPhys*, v. 50, p. 062501, (2009). Citado na página 22.
- [165] PARKINSON, V.; FORD, L. H. Model for noncancellation of quantum electric field fluctuations. *Phys. Rev. A*, v. 84, p. 062102, (2011). Citado na página 22.
- [166] PARKINSON, V.; FORD, L. H. Noncancellation of quantum geometry fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 89, p. 064018, (2014). Citado na página 22.
- [167] WALD, R. M. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. 1. ed. Chicago: The University of Chicago Press, (1994). Citado na página 24.
- [168] D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. 1. ed. New York: Oxford University Press, (1998). Citado na página 24.

- [169] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., (1964). Citado na página 24.
- [170] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. 1. ed. Boulder: Westview Press, (1995). Citado na página 24.
- [171] KUBO, R. *Statistical mechanics*. 1. ed. Amsterdam: North-Holland Physics Publishing, (1988). Citado na página 24.
- [172] HEUN, K. Zur theorie der Riemann'schen functionen zweiter ordnung mit vier verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, v. 33, p. 161–179, (1889). Citado na página 33.
- [173] FORSYTH, A. *Theory of differential equations, part III*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, (1902). Citado na página 33.
- [174] INCE, E. L. *Ordinary differential equations*. 1. ed. New York: Dover Publications, (1926). Citado na página 33.
- [175] ERDÉLYI, A. *High transcendental functions*. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., (1955). v. III. Citado na página 33.
- [176] HAUTOT, A. Sur les solutions polynomiales de l'équation différentielle $zP_n'' + (az^2 + bz + c)P_n' + (d + ez + fz^2)P_n = 0$. *Bull. Soc. R. Sci. Liège*, v. 40, p. 13–23, (1969). Citado na página 33.
- [177] DECARREAU, A.; DUMONT-LEPAGE, M.; MARONI, P.; ROBERT, A.; RONVEAUX, A. Formes canoniques des équations confluentes de l'équations de Heun. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, v. 92, p. 53–78, (1978). Citado na página 33.
- [178] DECARREAU, A.; MARONI, P.; ROBERT, A. Sur les équations confluentes de l'équation de Heun. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, v. 92, p. 151–189, (1978). Citado na página 33.
- [179] LEAUTE, B.; MARCILHACY, G. On the Schrödinger equations of rotating harmonic, three-dimensional and doubly anharmonic oscillators and a class of confinement potentials in connection with the biconfluent Heun differential equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 19, p. 3527–3533, (1986). Citado na página 33.
- [180] RONVEAUX, A. *Heun's differential equations*. 1. ed. New York: Oxford University Press, (1995). Citado na página 33.
- [181] MAIER, R. S. The 192 solutions of the Heun equation. *Math. Comp.*, v. 76, p. 811–843, (2007). Citado na página 33.

- [182] OLVER, F. W. J.; LOZIER, D. W.; BOISVERT, R. F.; CLARK, C. W. *NIST handbook of mathematical functions*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, (2010). Citado na página 33.
- [183] FIZIEV, P. P. Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation. *Class. Quantum Grav.*, v. 27, p. 135001, (2010). Citado na página 33.
- [184] FIZIEV, P. P. Novel relations and new properties of confluent Heun's functions and their derivatives of arbitrary order. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 43, p. 035203, (2010). Citado na página 33.
- [185] CARUSO, F.; MARTINS, J.; OGURI, V. Solving a two-electron quantum dot model in terms of polynomial solutions of a biconfluent Heun equation. *Ann. Phys. (NY)*, v. 347, p. 130–140, (2014). Citado na página 33.
- [186] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B.; COSTA, A. A. Scalar fields in the Lense-Thirring background with a cosmic string and Hawking radiation. *Europhys. Lett.*, v. 109, p. 60006, (2015). Citado na página 53.
- [187] LENSE, J.; THIRRING, H. Ueber den einfluss der eigenrotation der zentralkoerper auf die bewegung der planeten und monde nach der Einsteinschen gravitationstheorie. *Phys. Z.*, v. 19, p. 156–163, (1918). Citado na página 53.
- [188] FILHO, R. M. T.; BEZERRA, V. B. Scalar particles in weak gravitational fields. *Class. Quantum Grav.*, v. 21, p. 307–315, (2004). Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 62.
- [189] ZHANG, J.; ZHAO, Z. New coordinates for Kerr-Newman black hole radiation. *Phys. Lett. B*, v. 618, p. 14–22, (2005). Citado 2 vezes nas páginas 60 e 62.
- [190] LI, H. F.; ZHANG, S. L.; ZHAO, R. General radiation spectrum of a Kerr-Newman black hole. *Chin. J. Phys.*, v. 47, p. 618–624, (2009). Citado 2 vezes nas páginas 60 e 62.
- [191] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B.; MUNIZ, C. R. Exact solutions of the Klein-Gordon equation in the Kerr-Newman background and Hawking radiation. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 350, p. 14–28, (2014). Citado 11 vezes nas páginas 60, 61, 67, 77, 79, 104, 106, 120, 121, 126 e 127.
- [192] DAMOUR, T.; RUFFINI, R. Black-hole evaporation in the Klein-Sauter-Heisenberg-Euler formalism. *Phys. Rev. D*, v. 14, p. 332–334, (1976). Citado 5 vezes nas páginas 61, 78, 105, 121 e 127.

- [193] SANNAN, S. Heuristic derivation of the probability distributions of particles emitted by a black hole. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 20, p. 239–246, (1988). Citado 5 vezes nas páginas [61](#), [79](#), [106](#), [121](#) e [127](#).
- [194] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B.; SILVA, G. V. Analytic solutions in the dyon black hole with a cosmic string: Scalar fields, Hawking radiation and energy flux. *Ann. Phys. (NY)*, v. 362, p. 576–592, (2015). Citado na página [63](#).
- [195] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B. Confluent Heun functions and the physics of black holes: Resonant frequencies, Hawking radiation and scattering of scalar waves. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 373, p. 28–42, (2016). Citado 2 vezes nas páginas [63](#) e [90](#).
- [196] KASUYA, M. Exact solution of a rotating dyon black hole. *Phys. Rev. D*, v. 25, p. 995–1001, (1982). Citado na página [63](#).
- [197] SEMIZ, I. Dyon Kerr-Newman black holes, complex scalar field and cosmic censorship. *Gen. Relativ. Grav.*, v. 43, p. 833–846, (2011). Citado na página [66](#).
- [198] BEZERRA, V. B.; VIEIRA, H. S.; COSTA, A. A. The Klein-Gordon equation in the spacetime of a charged and rotating black hole. *Class. Quantum Grav.*, v. 31, p. 045003, (2014). Citado 2 vezes nas páginas [67](#) e [104](#).
- [199] SEMIZ, I. Klein-Gordon equation is separable on the dyon black-hole metric. *Phys. Rev. D*, v. 45, p. 532–533, (1992). Citado 2 vezes nas páginas [67](#) e [72](#).
- [200] FERNANDES, S. G.; DE A. MARQUES, G.; BEZERRA, V. B. Scalar solutions in spacetimes containing a cosmic string. *Class. Quantum Grav.*, v. 23, p. 7063–7073, (2006). Citado 2 vezes nas páginas [72](#) e [87](#).
- [201] ZHAO, Z.; ZHANG, D. Quantum effects near a rotating dyon black hole. *Kexue Tongbao*, v. 29, p. 1303–1306, (1984). Citado 2 vezes nas páginas [77](#) e [87](#).
- [202] YANG, S. Z. Kerr-Newman-Kasuya black hole tunnelling radiation. *Chin. Phys. Lett.*, v. 22, p. 2492–2495, (2005). Citado 3 vezes nas páginas [77](#), [78](#) e [87](#).
- [203] HE, T. M.; FAN, J. H.; WANG, Y. J. Hawking radiation from Kerr-Newman-Kasuya black hole via quantum anomalies. *Chin. Phys. B*, v. 17, p. 2321–2325, (2008). Citado 2 vezes nas páginas [77](#) e [87](#).
- [204] WU, C. H.; FORD, L. H. Fluctuations of the Hawking flux. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 104013, (1999). Citado na página [80](#).
- [205] BANERJEE, R.; MAJHI, B. R. Hawking black body spectrum from tunneling mechanism. *Phys. Lett. B*, v. 675, p. 243–245, (2009). Citado na página [80](#).

- [206] SIMONE, L. E.; WILL, C. M. Massive scalar quasi-normal modes of Schwarzschild and Kerr black holes. *Class. Quantum Grav.*, v. 9, p. 963–977, (1992). Citado na página 82.
- [207] FIZIEV, P. P. Exact solutions of Regge-Wheeler equation and quasi-normal modes of compact objects. *Class. Quantum Grav.*, v. 23, p. 2447–2468, (2006). Citado na página 82.
- [208] DOLAN, S. R.; DEMPSEY, D. Bound states of the Dirac equation on Kerr spacetime. *Class. Quantum Grav.*, v. 32, p. 184001, (2015). Citado na página 82.
- [209] FIZIEV, P.; STAICOVA, D. Application of the confluent Heun functions for finding the quasinormal modes of nonrotating black holes. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 127502, (2011). Citado 2 vezes nas páginas 83 e 95.
- [210] ABRAMOV, D. I.; KAZAKOV, A. Y.; PONOMAREV, L. I.; SLAVYANOV, S. Y.; SOMOV, L. N. Phaseshifts in the Coulomb two-centre problem. *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.*, v. 12, p. 1761–1773, (1979). Citado 2 vezes nas páginas 84 e 96.
- [211] STAROBINSKY, A. A. Amplification of waves during reflection from a rotating “black hole”. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 64, p. 48–57, (1973). Citado 2 vezes nas páginas 86 e 88.
- [212] HANDLER, F. A.; MATZNER, R. A. Gravitational wave scattering. *Phys. Rev. D*, v. 22, p. 2331–2348, (1980). Citado 2 vezes nas páginas 86 e 88.
- [213] GLAMPEDAKIS, K.; ANDERSSON, N. Scattering of scalar waves by rotating black holes. *Class. Quantum Grav.*, v. 18, p. 1939–1966, (2001). Citado 2 vezes nas páginas 86 e 88.
- [214] FELICE, F. Bound states in the Kerr metric. *Phys. Rev. D*, v. 19, p. 451–456, (1979). Citado 2 vezes nas páginas 86 e 88.
- [215] KOFINTI, N. K. Scattering of a Klein-Gordon particle by a black hole. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 23, p. 991–999, (1984). Citado 2 vezes nas páginas 86 e 88.
- [216] SANCHEZ, N. G. Scattering of scalar waves from a Schwarzschild black hole. *J. Math. Phys.*, v. 17, p. 688–692, (1976). Citado 2 vezes nas páginas 87 e 88.
- [217] ERNST, F. J. Black holes in a magnetic universe. *J. Math. Phys.*, v. 17, p. 54–56, (1976). Citado na página 90.
- [218] CHEN, J.; LIAO, H.; WANG, Y.; CHEN, T. Absorption and scattering of scalar wave from Schwarzschild black hole surrounded by magnetic field. *Eur. Phys. J. C*, v. 73, p. 2395, (2013). Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.

- [219] VIEIRA, H. S.; GRAÇA, J. P. M.; BEZERRA, V. B. Scalar resonant frequencies and Hawking effect of an $f(R)$ global monopole. *Chin. Phys. C*, v. 41, p. 095102, (2017). Citado na página 100.
- [220] CARAMÊS, T. R. P.; DE MELLO, E. R. B.; GUIMARÃES, M. E. X. Gravitational field of a global monopole in a modified gravity. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, v. 03, p. 446–454, (2011). Citado na página 100.
- [221] KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A. V. Stability and quasinormal modes of the massive scalar field around Kerr black holes. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 124040, (2006). Citado na página 109.
- [222] MA, C.; GUI, Y.; WANG, W.; WANG, F. Massive scalar field quasinormal modes of a Schwarzschild black hole surrounded by quintessence. *Cent. Eur. J. Phys.*, v. 6, p. 194, (2008). Citado na página 109.
- [223] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B. Acoustic black holes: massless scalar field analytic solutions and analogue Hawking radiation. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 48, p. 88, (2016). Citado na página 114.
- [224] VISSER, M. Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation. *Class. Quantum Grav.*, v. 15, p. 1767–1791, (1998). Citado 2 vezes nas páginas 114 e 121.
- [225] ZHANG, L. C.; LI, H. F.; ZHAO, R. Hawking radiation from a rotating acoustic black hole. *Phys. Lett. B*, v. 698, p. 438–442, (2011). Citado 3 vezes nas páginas 120, 121 e 128.
- [226] VISSER, M. Acoustic black holes. *arXiv:9901047 [gr-qc]*, (1999). Citado na página 122.
- [227] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. 6. ed. San Diego: Elsevier Academic Press, (2005). Citado na página 123.
- [228] BÉCAR, R.; GONZÁLEZ, P.; PULGAR, G.; SAAVEDRA, J. Hawking radiation via anomaly and tunneling method by Unruh’s and canonical acoustic black hole. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 25, p. 1463–1475, (2010). Citado 2 vezes nas páginas 127 e 128.
- [229] KIM, W.; SHIN, H. Anomaly analysis of Hawking radiation from acoustic black hole. *J. High Energy Phys.*, v. 07, p. 070, (2007). Citado na página 128.
- [230] VIEIRA, H. S. Resonant frequencies of the hydrodynamic vortex. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 26, p. 1750035, (2017). Citado na página 129.

- [231] SAAVEDRA, J. Quasinormal modes of Unruh's acoustic black hole. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 21, p. 1601–1607, (2006). Citado na página [132](#).
- [232] LAY, W.; BAY, K.; SLAVYANOV, S. Y. Asymptotic and numeric study of eigenvalues of the double confluent Heun equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 31, p. 8521–8531, (1998). Citado na página [132](#).
- [233] M. A. DARIESCU, D. MIHU, C. D. Stationary solutions to Kompaneets equation for relativistic processes in astrophysical objects. *Rom. Journ. Phys.*, v. 59, p. 224–232, (2014). Citado na página [132](#).
- [234] BERTI, E.; CARDOSO, V.; STARINETS, A. O. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class. Quantum. Grav.*, v. 26, p. 163001, (2009). Citado na página [133](#).
- [235] VIEIRA, H. S. Analytic solutions in the acoustic black hole analogue of the conical Kerr metric. *Chin. Phys. C*, v. 41, p. 043105, (2017). Citado na página [135](#).
- [236] UNRUH, W. G. Sonic analog of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation. *Phys. Rev. D*, v. 51, p. 2827–2838, (1995). Citado na página [135](#).
- [237] JACOBSON, T. *Analogue gravity phenomenology*. Lecture notes in physics. Switzerland: Springer International Publishing, (2013). Edited by D. Faccio et al. Citado na página [135](#).
- [238] BENONE, C. L.; CRISPINO, L. C. B.; HERDEIRO, C.; RADU, E. Acoustic clouds: Standing sound waves around a black hole analogue. *Phys. Rev. D*, v. 91, p. 104038, (2015). Citado na página [135](#).
- [239] GOMES, F. A.; MARQUES, G. A. *Analogue of superradiance effect in acoustic black hole in the presence of disclination*. Astronomy and Relativistic Astrophysics. Singapore: (World Scientific, (2010). Edited by C. A. Z. Vasconcellos et al. Citado na página [136](#).
- [240] KLÉMAN, M. *Points, lines and walls*. 1. ed. New York: Wiley, (1983). Citado na página [136](#).
- [241] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B. Quantum Newtonian cosmology and the biconfluent Heun functions. *J. Math. Phys.*, v. 56, p. 092501, (2015). Citado na página [142](#).
- [242] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B. Lagrangian formulation of Newtonian cosmology. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 36, p. 3310, (2014). Citado na página [142](#).

- [243] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B. Class of solutions of the Wheeler-DeWitt equation in the Friedmann-Robertson-Walker universe. *Phys. Rev. D*, v. 94, p. 023511, (2016). Citado na página 149.
- [244] ATKATZ, D.; PAGELS, H. The origin of the universe as a quantum tunneling event. *Phys. Rev. D*, v. 25, p. 2065–2073, (1982). Citado na página 149.
- [245] HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave function of the Universe. *Phys. Rev. D*, v. 28, p. 2960–2975, (1983). Citado na página 149.
- [246] NORBURY, J. W. From Newton’s laws to the Wheeler-DeWitt equation. *Eur. J. Phys.*, v. 19, p. 143–150, (1998). Citado 2 vezes nas páginas 149 e 151.
- [247] PINTO-NETO, N.; FABRIS, J. C. Quantum cosmology from the de Broglie-Bohm perspective. *Class. Quantum Grav.*, v. 30, p. 143001, (2013). Citado 2 vezes nas páginas 149 e 151.
- [248] BELINCHÓN, J. A. Wheeler-DeWitt equation with variable constants. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 11, p. 527–544, (2002). Citado 2 vezes nas páginas 149 e 150.
- [249] VILENKIN, A. Creation of Universes from nothing. *Phys. Lett. B*, v. 117, p. 25–28, (1982). Citado 2 vezes nas páginas 151 e 161.
- [250] VIEIRA, H. S.; FORD, L. H.; BEZERRA, V. B. Spacetime geometry fluctuations and geodesic deviation. *arXiv:1805.05264 [gr-qc]*, (2018). Citado na página 164.
- [251] YU, H.; SVAITER, N. F.; FORD, L. H. Quantum light-cone fluctuations in compactified spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 124019, (2009). Citado 3 vezes nas páginas 165, 169 e 220.
- [252] ARTEAGA, D.; PARENTANI, R.; VERDAGUER, E. Propagation in a thermal graviton background. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 044019, (2004). Citado na página 166.
- [253] SCHIAPPACASSE, E. D.; FORD, L. H. Graviton creation by small scale factor oscillations in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, v. 94, p. 084030, (2016). Citado na página 166.
- [254] THOMPSON, R. T.; FORD, L. H. Spectral line broadening and angular blurring due to spacetime geometry fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 024012, (2006). Citado 3 vezes nas páginas 166, 176 e 222.
- [255] GRISHCHUK, L. P.; SIDOROV, Y. V. On the quantum state of relic gravitons. *Class. Quantum Grav.*, v. 6, p. L161–L165, (1989). Citado na página 171.

- [256] GRISHCHUK, L. P.; SIDOROV, Y. V. Squeezed quantum states of relic gravitons and primordial density fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 42, p. 3413–3421, (1990). Citado na página 171.
- [257] BARROW, J. D.; COPELAND, E. J.; LIDDLE, A. R. The cosmology of black hole relics. *Phys. Rev. D*, v. 46, p. 645–657, (1992). Citado na página 171.
- [258] BORGMAN, J.; FORD, L. H. Effects of stress tensor fluctuations upon focusing. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 064032, (2004). Citado na página 178.
- [259] FORD, L. H.; ROMAN, T. A. Minkowski vacuum stress tensor fluctuations. *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 105010, (2005). Citado 3 vezes nas páginas 178, 185 e 187.
- [260] SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. 1. ed. Massachusetts: Addinon-Wesley, Inc., (1994). Citado na página 216.
- [261] BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., (1978). Citado na página 217.
- [262] WEISSTEIN, E. W. *Polylogarithm*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource: <http://mathworld.wolfram.com/Polylogarithm.html>, (2016). Citado na página 218.
- [263] COFFEY, M. W. Series representation of the Riemann zeta function and other results: Complements to a paper of Crandall. *Math. Comp.*, v. 83, p. 1383–1395, (2013). Citado na página 218.

Apêndices

APÊNDICE A – Notações, definições e convenções

Algumas das notações, definições e convenções utilizadas ao longo do texto são apresentadas neste apêndice.

A.1 Vetores, tensores e operadores

Iremos trabalhar no sistema de unidades relativísticas, onde

$$\hbar = c = G = 1, \quad (\text{A.1})$$

de modo que

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

O tensor métrico no espaço de Minkowski, η_{ab} , é definido como

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde os índices latinos $a, b = \{0, 1, 2, 3\}$ referem-se às componentes espaço-temporais no espaço de Minkowski e os índices gregos $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$ referem-se às componentes no espaço-tempo curvo. Os índices latinos $i, j = \{1, 2, 3\}$ correspondem às componentes espaciais do quadrivetor no espaço Cartesiano.

Os quadrivetores covariantes e contravariantes são definidos como

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad (\text{A.4})$$

$$x_\mu = (-x_0, \mathbf{x}). \quad (\text{A.5})$$

De modo que a relação entre os mesmos é expressa por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{A.6})$$

onde usamos a convenção de Einstein de soma sobre os índices repetidos, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico no espaço-tempo curvo a ser determinado pela geometria então considerada.

Para as derivadas covariantes e contravariantes temos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(-\frac{\partial}{\partial x_0}, \nabla \right). \quad (\text{A.8})$$

O operador de d'Alembert ou d'Alembertiano é definido como

$$\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \nabla^2 = \square. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Notação de Dirac

Na nossa análise das soluções de onda para o efeito Hawking no horizonte de eventos dos diferentes buracos negros aqui estudados, fomos levados a considerar um espaço vetorial complexo. A notação utilizada nesta tese é a notação de “*bra*” e “*ket*” desenvolvida por P. A. M. Dirac [260].

Na mecânica quântica, um estado físico é representado por um vetor de estado em um espaço vetorial complexo. Segundo Dirac, vamos chamar tal vetor de *ket* e representá-lo por $|\alpha\rangle$. O espaço vetorial dual ao espaço *ket* é o espaço *bra*, denotado por $\langle\alpha|$. Assim, existe uma correspondência um-para-um entre os espaços *bra* e *ket*:

$$|\alpha\rangle \overset{\text{CD}}{\longleftrightarrow} \langle\alpha|, \quad (\text{A.10})$$

onde CD significa correspondência dual.

Como pode ser visto de forma completa e detalhada em [260], podemos substituir uma soma discreta sobre os autovalores $\{a'\}$ por uma integral sobre a variável contínua ξ' , trocando o símbolo de Kronecker pela função delta de Dirac, de forma que

$$\langle a' | a'' \rangle = \delta_{a', a''} \rightarrow \langle \xi' | \xi'' \rangle = \delta(\xi' - \xi''). \quad (\text{A.11})$$

O estado *ket* para um estado físico arbitrário pode ser expandido em termos da base $\{|x'\rangle\}$, na forma

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Logo, podemos normalizar $|\alpha\rangle$ à unidade tomando:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \langle \alpha | x' \rangle \langle x' | \alpha \rangle = 1. \quad (\text{A.13})$$

Portanto, $\langle x' | \alpha \rangle$ é a função de onda para o estado físico representado por $|\alpha\rangle$.

APÊNDICE B – Funções especiais

Algumas das funções especiais que apareceram ao longo do texto são apresentadas neste apêndice.

B.1 Função degrau de Heaviside

A função degrau de Heaviside, $H(x)$, algumas vezes chamada de função theta de Heaviside, é usualmente chamada apenas de função degrau. Ela foi introduzida por Oliver Heaviside no final de 1800 para representar a idealizada voltagem ligada (no tempo) ou outra fonte em problemas de engenharia elétrica. Ela é definida para número reais por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ 1 & \text{para } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Alguns autores usam uma notação diferente [261]

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \text{indefinido} & \text{para } x = 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

E, de forma geral, podemos defini-la como

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_0, \\ 1 & \text{para } x \geq x_0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Podemos usar a função degrau de Heaviside para cortar ou mover funções. Multiplicando $f(t)$ por $H(t - a)$ cortamos $f(t)$ de modo que ela passa a existir (ou ligada) em $t = a$:

$$H(t - a)f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a, \\ f(t) & \text{para } t > a. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando $f(t)$ por $H(t - a) - H(t - b)$, com $a < b$, cortamos $f(t)$ de modo que ela passa a existir (ou ligada) em $t = a$ e a desligada em $t = b$:

$$[H(t - a) - H(t - b)]f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a, \\ f(t) & \text{para } a < t < b, \\ 0 & \text{para } t > b. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A derivada da função degrau é usualmente tomada como sendo a função delta de Dirac:

$$H'(x - x_0) \equiv \frac{d}{dx}H(x - x_0) = \delta(x - x_0). \quad (\text{B.6})$$

A integral da função degrau é

$$\int_{-\infty}^x H(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ x & \text{para } x > 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Função polilogarítmica

A função polilogarítmica, $\text{Li}_n(z)$, é a função [262, 263]

$$\text{Li}_n(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (\text{B.8})$$

definida no plano complexo ao longo de um disco unitário aberto, é também denotada por $F(z, n)$ e os casos especiais $n = 2$ e $n = 3$ são chamadas dilogarítmica e trilogarítmica, respectivamente.

No caso especial $z = 1$ se reduz a

$$\text{Li}_n(1) = \zeta(n), \quad (\text{B.9})$$

onde $\zeta(n)$ é a função zeta de Riemann.

A polilogarítmica da ordem inteiro negativo surge em somas da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n r^k = \text{Li}_{-n}(r) = \frac{1}{(1-r)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\rangle, \quad (\text{B.10})$$

onde $\left\langle \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\rangle$ é um número euleriano.

B.3 Função dilogarítmica

A função dilogarítmica pode ser definida pela soma

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad (\text{B.11})$$

ou pela integral

$$\text{Li}_2(z) \equiv \int_z^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (\text{B.12})$$

Alguns valores de $\text{Li}_2(z)$ que podem ser calculados de forma fechada são dados por

$$\text{Li}_2(-1) = -\frac{1}{12}\pi^2,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Li}_2(0) &= 0, \\ \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2, \\ \operatorname{Li}_2(1) &= \frac{1}{6}\pi^2.\end{aligned}$$

APÊNDICE C – Função de correlação do tensor de Riemann

As funções de correlação do tensor de Riemann que apareceram ao longo do texto são apresentadas neste apêndice. Primeiramente, vamos descrever o formalismo relevante para todos os casos.

A partir da teoria quântica de campos linearizada para gravidade, podemos expandir o operador do campo como

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \sum_{\ell, p} (A_{\mu\nu} \hat{a}_{\ell, p} e^{i\ell_\epsilon x^\epsilon} + \text{H.c.}), \quad (\text{C.1})$$

onde ℓ^μ é o vetor de onda e p rotula a polarização do modo com tensor de polarização $A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(\ell, p)$.

Nesta teoria linearizada, o operador do tensor de Riemann é dado por

$$\hat{R}_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) = \partial_\nu \partial_{[\alpha} \hat{h}_{\lambda]\mu} - \partial_\mu \partial_{[\alpha} \hat{h}_{\lambda]\nu}. \quad (\text{C.2})$$

A partir deste ponto, vamos simplificar a notação suprimindo o símbolo “ $\hat{}$ ” e entendendo que ambos, $h_{\mu\nu}$ e $R_{\alpha\lambda\mu\nu}$, são operadores. Logo, o valor esperado de $R_{\alpha\lambda\mu\nu}$ é dado por

$$\langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle = \langle \partial_\nu \partial_{[\alpha} h_{\lambda]\mu} \rangle - \langle \partial_\mu \partial_{[\alpha} h_{\lambda]\nu} \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Assim, vamos definir

$$\begin{aligned} K_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x') &= \langle \partial_\nu \partial_\alpha h_{\lambda\mu}(x) \partial'_\sigma \partial'_\gamma h_{\delta\rho}(x') \rangle - \langle \partial_\nu \partial_\alpha h_{\lambda\mu}(x) \rangle \langle \partial'_\sigma \partial'_\gamma h_{\delta\rho}(x') \rangle \\ &= \partial_\nu \partial_\alpha \partial'_\sigma \partial'_\gamma \langle h_{\lambda\mu}(x) h_{\delta\rho}(x') \rangle - \langle h_{\lambda\mu}(x) \rangle \langle h_{\delta\rho}(x') \rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde ∂' denota a diferenciação com respeito a x' .

Portanto, a função de correlação do tensor de Riemann pode ser expressa como

$$C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x') = 4K_{[\alpha\lambda][\mu\nu][\gamma\delta][\rho\sigma]}(x, x'). \quad (\text{C.5})$$

C.1 Estado térmico de grávitons

A função de dois pontos térmica do tensor de Riemann é construída a partir da função de dois pontos do vácuo via o método de Matsubara (veja [251] e as referências nele). Isto é feito no *gauge* de Feynman, mas visto que estamos lidando diretamente com funções do tensor de Riemann, o resultado é independente de *gauge*.

A partir da Eq. (C.2) e das propriedades de simetria do tensor métrico, no TT *gauge*, a função de dois pontos do tensor de Riemann no vácuo pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\langle R_{0101}(x)R_{0101}(x') \rangle &= \frac{1}{4} \langle (2h_{01,01} - h_{00,11} - h_{11,00})(x)(2h_{01,01} - h_{00,11} - h_{11,00})(x') \rangle \\ &= \frac{1}{4} (4G_{0101,0101} - 2G_{0100,0111} - 2G_{0111,0100} - 2G_{0001,1101} \\ &\quad + G_{0000,1111} + G_{0011,1100} - 2G_{1101,0001} + G_{1100,0011} \\ &\quad + G_{1111,0000}),\end{aligned}\tag{C.6}$$

onde $G_{\alpha\lambda\mu\nu}$ é a função de dois pontos da métrica e a “vírgula” representa a diferenciação. Os dois primeiros índices em $G_{\alpha\lambda\mu\nu}$ se referem ao ponto x , enquanto os dois outros se referem ao ponto x' , e de forma análoga para os índices das derivadas. No *gauge* de Feynman, temos que

$$G_{\alpha\lambda\mu\nu} = (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\lambda\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\lambda\mu} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\mu\nu})D,\tag{C.7}$$

onde D é a função de dois pontos escalar do vácuo, a saber,

$$D = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\Delta\vec{x})^2 - (\Delta t)^2}.\tag{C.8}$$

Assim, temos que os únicos componentes diferentes de zero de $G_{\alpha\lambda\mu\nu}$ são G_{0101} , G_{0000} , G_{0011} , G_{1100} e G_{1111} . Logo,

$$\langle R_{0101}(x)R_{0101}(x') \rangle = \frac{1}{4} (-4D_{,txt'x'} + D_{,xxx'x'} + D_{,xxt't'} + D_{,ttx'x'} + D_{,ttt't'}).\tag{C.9}$$

A partir da função D , é fácil ver que $D_{,txt'x'} = D_{,xxt't'} = D_{,ttx'x'} = \partial_t^2 \partial_x^2 D$ e, portanto,

$$\langle R_{0101}(x)R_{0101}(x') \rangle = \frac{1}{4} (\partial_t^4 - 2\partial_t^2 \partial_x^2 + \partial_x^4)D.\tag{C.10}$$

Agora, a função de dois pontos térmica do tensor de Riemann pode ser construída a partir da função de dois pontos do vácuo pela substituição $D \rightarrow D_\beta$, tal que

$$\langle R_{0101}(x)R_{0101}(x') \rangle_\beta = \frac{1}{4} (\partial_t^4 - 2\partial_t^2 \partial_x^2 + \partial_x^4)D_\beta,\tag{C.11}$$

onde $\beta = 1/k_B T$.

Como mencionamos anteriormente, D_β é construída via o método de Matsubara. Primeiro, fazemos D periódica em um tempo imaginário e, então, tomamos uma soma infinita da imagem, de modo que

$$D_\beta = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\Delta\vec{x})^2 - (\Delta t + in\beta)^2},\tag{C.12}$$

onde a “aspa” no somatório indica que removemos o termo $n = 0$, que corresponde ao termo do vácuo. Esta é uma função de dois pontos normalmente ordenada.

C.2 Grávitons em um estado quântico *squeezed*

Um estado de vácuo *squeezed* (espremido, em português) é o estado natural para uma partícula criada *quantum* mecanicamente que ocupa um estado *invacuum* (dentro do vácuo, em português) representado em um espaço *out-Fock* (fora do de Fock, em português). Os estados quânticos *squeezed* são gerados através dos operadores de deslocamento unitário e *squeeze* [254].

O operador deslocamento gera o conjunto de estados coerentes e é definido por

$$\begin{aligned} D(\alpha) &\equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha a}, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

onde α é um número complexo arbitrário.

O estado coerente $|\alpha\rangle$ é gerado deslocando o estado de vácuo $|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (\text{C.14})$$

O operador deslocamento transforma a e $a^\dagger$ da seguinte forma, respectivamente,

$$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha \quad (\text{C.15})$$

e

$$D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*. \quad (\text{C.16})$$

O operador *squeeze* é definido como

$$S(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta^* a^2 - \zeta (a^\dagger)^2)}, \quad (\text{C.17})$$

onde $\zeta = re^{i\theta}$ é um número complexo arbitrário. O operador *squeeze* transforma a e $a^\dagger$ da seguinte forma, respectivamente,

$$S^\dagger(\zeta)aS(\zeta) = a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r \quad (\text{C.18})$$

e

$$S^\dagger(\zeta)a^\dagger S(\zeta) = a^\dagger \cosh r - a e^{i\theta} \sinh r. \quad (\text{C.19})$$

O estado *squeezed* $|\alpha, \zeta\rangle$ é obtido por *squeezing* (espremendo, em português) o vácuo e, então, deslocando-o:

$$|\alpha, \zeta\rangle = D(\alpha)S(\zeta)|0\rangle. \quad (\text{C.20})$$

Para calcular a função de correlação do tensor de Riemann $C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x')$ para o estado *squeezed*, precisamos calcular $\langle h_{\lambda\mu}(x)h_{\delta\rho}(x') \rangle$ e $\langle h_{\lambda\mu}(x) \rangle$.

Estamos interessados na mudança nas flutuações quânticas entre o estado de vácuo e o estado *squeezed*, de modo que podemos tomar a função de correlação como sendo normalmente ordenada.

Vamos avaliar o valor esperado em relação a uma onda gravitacional em um modo simples geral no estado *squeezed* $|\alpha, \zeta\rangle$, onde o modo excitado único tem vetor de onda específico ℓ^μ , frequência $\omega_g = \ell^0$ e polarização p .

Assim, podemos calcular $\langle \zeta, \alpha | h_{\lambda\mu}(x) h_{\delta\rho}(x') | \alpha, \zeta \rangle$ e $\langle \zeta, \alpha | h_{\lambda\mu}(x) | \alpha, \zeta \rangle$ e, então, obter $: K_{[\alpha\lambda][\mu\nu][\gamma\delta][\rho\sigma]}(x, x') :$ como desejado. O resultado completo é

$$: K_{[\alpha\lambda][\mu\nu][\gamma\delta][\rho\sigma]}(x, x') := \ell_\alpha \ell_\nu \ell_\gamma \ell_\sigma A_{\lambda\mu} A_{\delta\rho} F(x, x'), \quad (\text{C.21})$$

onde

$$\begin{aligned} F(x, x') &= [\cosh(2r) - 1] \cos[\ell_\epsilon(x^\epsilon - x'^\epsilon)] \\ &\quad - \sinh(2r) \cos[\ell_\epsilon(x^\epsilon + x'^\epsilon) + \theta]. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Usando a Eq. (C.5), a função de correlação normalmente ordenada do tensor de Riemann, para o estado *squeezed*, pode ser expressa como

$$: C_{\alpha\lambda\mu\nu\gamma\delta\rho\sigma}(x, x') := 4(\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]})(\ell_{[\gamma} A_{\delta][\rho} \ell_{\sigma]}) F(x, x'). \quad (\text{C.23})$$

Note que esta função de correlação depende apenas do parâmetro de *squeeze* ζ e não do parâmetro de estado coerente α .

C.2.1 Dependência clássica no tempo

A função de correlação do tensor de Riemann para o produto das contribuições em primeira ordem do seu valor esperado, $\langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle$, para a dependência clássica no tempo do estado de vácuo *squeezed* é obtida a partir de $\langle \zeta, \alpha | h_{\lambda\mu}(x) | \alpha, \zeta \rangle$. O resultado completo é

$$\langle R_{\alpha\lambda\mu\nu}(x) \rangle \langle R_{\gamma\delta\rho\sigma}(x') \rangle = 4 \sum_{\ell} (\ell_{[\alpha} A_{\lambda][\mu} \ell_{\nu]})(\ell_{[\gamma} A_{\delta][\rho} \ell_{\sigma]}) G(x, x'), \quad (\text{C.24})$$

com

$$G(x, x') = \alpha^2 e^{i\ell_\epsilon(x^\epsilon + x'^\epsilon)} + (\alpha^*)^2 e^{-i\ell_\epsilon(x^\epsilon + x'^\epsilon)} + 2|\alpha|^2 \cos[\ell_\epsilon(x^\epsilon - x'^\epsilon)]. \quad (\text{C.25})$$

Anexos

ANEXO A – Outras publicações

Neste anexo são listados outros artigos, que não fazem parte do texto principal desta tese, publicados em periódicos especializados com demais colaboradores.

1. General Relativity and Gravitation (GRG)

Volume 48

Issue 4

Pages 38

Year 2016

DOI 10.1007/s10714-016-2024-7

Scalar and spinor QNMs of a black hole with a global monopole in $f(R)$ gravity

J. P. Morais Graça, H. S. Vieira, V. B. Bezerra

2. Europhysics Letters (EPL)

Volume 115

Issue 4

Pages 40004

Year 2016

DOI 10.1209/0295-5075/115/40004

Variations in the fine-structure constant constraining gravity theories

V. B. Bezerra, M. S. Cunha, C. R. Muniz, M. O. Tahim, H. S. Vieira

3. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)

Volume 01

Issue 2018

Pages 006

Year 2018

DOI 10.1088/1475-7516/2018/01/006

On the global Casimir effect in the Schwarzschild spacetime

C. R. Muniz, M. O. Tahim, M. S. Cunha, H. S. Vieira