

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Ideais de Ratliff-Rush

Douglas de Souza Queiroz

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Ideais de Ratliff-Rush

por

Douglas de Souza Queiroz

sob a orientação do

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

Q3i Queiroz, Douglas de Souza.
Ideais de Ratliff-Rush / Douglas de Souza Queiroz. -
João Pessoa, 2018.
52 f. : il.

Orientação: Ricardo Burity Croccia Macedo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Elemento superficial. 3. Fecho de
Ratliff-Rush. 4. Número de redução. I. Macedo, Ricardo
Burity Croccia. II. Título.

UFPB/BC

Ideais de Ratliff-Rush

por

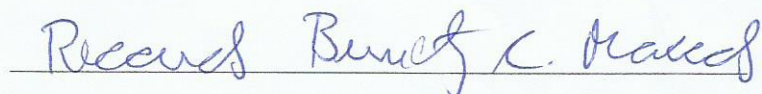
Douglas de Souza Queiroz ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Ricardo Burity Crocchia Macedo – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Aron Simis – UFPE
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves – UFRPE
(Examinador Externo)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais, por todos os
sacrifícios feitos para tornar
o meu caminho mais fácil.*

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, Waldonmes Queiroz e Angela Maria, e minha irmã Fabíola Queiroz por estarem incondicionalmente ao meu lado e, mesmo à distância, me darem todo apoio necessário.

À minha namorada Lorena Augusto, por todo amor depositado.

Ao professor Ricardo Burity, pela orientação neste trabalho, por (desde a graduação) estar sempre disposto a me aconselhar e auxiliar no que for necessário e por ser uma inspiração profissional.

Aos professores Aron Simis e Rodrigo Gondim, por aceitarem participar da banca e pelas sugestões neste trabalho.

Aos meus amigos, Sylvia Ferreira, Castelo Branco e Breno Souza pela experiência única de conviver com as individualidades de cada um.

Aos amigos feitos no PPGMAT-UFPB, mas que levarei para toda a vida, Adelson Madruga, Alan Teixeira, Bosoerg Pereira, Djair Paulino, Fagner Lima, Fernando Vieira, Hector Alan, Janiely Maria, Marcos Thadeu, Mariana Lima, Rafael Holanda, Rubens Silva, Sérgio Romero e Thyago Lunes.

Aos professores Adriano Alves, Cleto Brasileiro, Flank Bezerra, José Naeliton e Miriam Silva pelos ensinamentos, conselhos e experiências compartilhadas.

Ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT-UFPB) Daniel Pellegrino e à secretária Roseli Agapito.

A todos os professores do DM-UFRPE.

A CAPES pelo essencial apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Resumo

Em 1978, Louis J. Ratliff e David E. Rush, estudando alguns resultados sobre reduções, introduziram o seguinte ideal $\tilde{I} = \bigcup_{n \geq 1} (I^{n+1} : I^n)$, atualmente conhecido por fecho de Ratliff-Rush. Neste trabalho apresentaremos propriedades sobre tais ideais, como seu comportamento assintótico, resultados do tipo local-global e algumas patologias deste fecho. O objetivo principal é exibir a solução dada por Amir Mafi, em 2017, para a questão proposta por Maria E. Rossi e Irena Swanson, em 2003, sobre o número de redução Ratliff Rush de um ideal I ser menor ou igual ao número de redução de I , sendo I um ideal \mathfrak{M} -primário em um anel local Cohen-Macaulay d -dimensional.

Palavras-chave: Elemento superficial, Fecho de Ratliff-Rush, Número de redução.

Abstract

In 1976, while studying some results on reduction, Louis J. Ratliff and David E. Rush introduced the following ideal $\tilde{I} = \bigcup_{n \geq 1} (I^{n+1} : I^n)$, at present known as Ratliff-Rush closure, in this work we present properties about such ideals, such as their asymptotic behavior, local-global type results and some pathologies of this closure. The main goal is to show the solution given by Amir Mafi, in 2017, to the question proposed by Maria E. Rossi and Irena Swanson, in 2003, on the Ratliff-Rush reduction number of an ideal I be less than or equal to the reduction number of I , being I an \mathfrak{M} -primary ideal in a Cohen-Macaulay local ring d -dimensional.

Keywords: Superficial elements, Ratliff-Rush closure, Reduction number.

Sumário

Introdução	2
1 Sobre fecho inteiro e redução	4
1.1 Fecho inteiro	4
1.2 Redução	7
1.2.1 Redução minimal	11
1.3 Elemento superficial	15
2 Ideais de Ratliff-Rush	19
2.1 Propriedades dos fechos de Ratliff-Rush	19
2.2 Comportamento dos fechos de Ratliff-Rush em potências de ideais	28
3 O número de redução Ratliff-Rush	31
A Resultados auxiliares	39
Referências Bibliográficas	42

Notações

Neste trabalho A denota, à menos de menção contrária, um anel comutativo e com identidade. A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- (a_1, \dots, a_n) denota o ideal gerado pelos elementos a_1, \dots, a_n do anel A ;
- \sqrt{I} denota o radical de I ;
- $I : J$ denota o ideal condutor de J em I , com I e J ideais;
- A_P denota o anel de frações de A com respeito ao sistema multiplicativo $S = A \setminus P$;
- $\text{gr}_I(A)$ denota o anel graduado associado;
- $\det(C)$ denota o determinante da matriz C ;
- $\text{adj}(C)$ denota a adjunta da matriz C ;
- $\text{Min}(M)$ denota o conjunto dos ideais primos minimais do A -módulo M ;
- $\text{Ass}(M)$ denota o conjunto dos ideais primos associados do A -módulo M ;
- $\text{ht}(I)$ denota a altura do ideal I ;
- $\mu(I)$ denota o número mínimo de geradores de I ;
- $\dim(A)$ denota a dimensão de Krull de A ;
- $\dim_K(V)$ denota a dimensão do K -espaço vetorial V ;
- $k \gg 0$ denota k suficientemente grande;
- \square denota o final de uma demonstração.

Introdução

Sejam A um anel Noetheriano e $I \subseteq A$ um ideal regular, sabemos que os ideais $I^{n+1} : I^n$ formam uma cadeia crescente. Em *Two notes on reductions of ideals* [15] Louis J. Ratliff e David E. Rush se interessaram em estudar o ideal $\tilde{I} = \bigcup_{n \geq 1} (I^{n+1} : I^n)$ observando, entre outras coisas, que o ideal I é uma redução de \tilde{I} . Após ser introduzido tal ideal vem sendo objeto de estudo em diversos trabalhos, por exemplo em [6], [8], [11] e [16], entre outros. Atualmente chamamos \tilde{I} de fecho de Ratliff-Rush associado a I .

A primeira meta deste trabalho será apresentar o conceito de *fecho de Ratliff-Rush* associado a um ideal. Apresentaremos diversos resultados acerca desses fechos, entre eles estudaremos algumas propriedades que o relacionam com o anel graduado associado e daremos alguns exemplos que exploram seu comportamento assintótico. Em seguida, introduziremos o conceito de *número de redução Ratliff-Rush de I com respeito a J* , redução minimal de I , denotado por $\tilde{r}_J(I)$, o que faz menção ao *número de redução* usual, $r_J(I)$, e teremos por objetivo expor a solução dada por Amir Mafi, em *Ratliff-Rush Ideal and Reduction Numbers* [11], a seguinte pergunta feita por Maria E. Rossi e Irena Swanson em *Notes on the Behavior of the Ratliff-Rush Filtration* [16]:

(Q) *Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão positiva d e I um ideal \mathfrak{M} -primário. É sempre verdade que $\tilde{r}_J(I) \leq r_J(I)$?*

Nosso trabalho está dividido em três capítulos, além de um apêndice que apresenta alguns resultados utilizados nesta dissertação.

No primeiro capítulo apresentaremos os conceitos de fecho inteiro, redução e sequência superficial, tais tópicos são essenciais para o estudo dos fechos de Ratliff-Rush. Veremos, no segundo capítulo, que \tilde{I} sempre está contido no fecho inteiro de I . Além disso, a partir das sequências superficiais é possível definir as sequências tame superficiais, que nos darão base para apresentar a solução da questão **(Q)**.

No segundo capítulo definiremos o fecho de Ratliff-Rush associado a um certo ideal I , exibindo diversas de suas propriedades. Por exemplo, mostraremos que este fecho é o maior ideal tal que potências suficientemente grandes de \tilde{I} coincidem com potências de I .

Por fim, no terceiro capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados a fim de exibir a solução da questão **(Q)**, dada por Amir Mafi, principal resultado desta dissertação.

Capítulo 1

Sobre fecho inteiro e redução

Neste capítulo introduziremos os conceitos de fecho inteiro, redução e elemento superficial baseados em Burity [2] e Swanson e Huneke [19], e apresentaremos algumas de suas propriedades. Tais resultados serão úteis em todo decorrer desta dissertação.

Note que em diversos resultados a condição do anel ser Noetheriano não foi imposta, eles foram apresentados desta forma com o objetivo de preservar sua generalidade.

1.1 Fecho inteiro

Seja I um ideal em um anel A . Um elemento $b \in A$ é dito **inteiro sobre I** se existem $n \in \mathbb{Z}_+$ e elementos $a_i \in I^i$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} b + a_n = 0$$

tal equação é chamada **equação de dependência inteira de b sobre I** .

O conjunto de todos os elementos que são inteiros sobre I , denotado por \bar{I} , é chamado de **fecho inteiro** de I . Se $I = \bar{I}$, então I é dito **integralmente fechado**. Se $I \subseteq J$ são ideais, dizemos que J é **inteiro sobre I** se $J \subseteq \bar{I}$. E, por fim, se I é um ideal tal que para todo inteiro positivo n , I^n é integralmente fechado, então I é chamado **ideal normal**.

Veremos, no Corolário [1.8], que utilizando algumas noções de redução é possível mostrar que o fecho inteiro de um ideal é também um ideal (sob o mesmo anel).

Observação 1.1. (a) $I \subseteq \bar{I}$, pois dado $b \in I$ podemos fazer $n = 1$ e $a_1 = -b$ na definição acima obtendo que $b \in \bar{I}$;

(b) Se $I \subseteq J$ são ideais, então $\bar{I} \subseteq \bar{J}$. De fato, toda equação de dependência inteira de b em I é também uma equação de dependência inteira de b em J ;

(c) $\bar{I} \subseteq \sqrt{I}$, pois $b \in \bar{I}$ resulta que $b^n \in (a_1, \dots, a_n) \subseteq I$, logo $b \in \sqrt{I}$.

Os resultados apresentados a seguir nos darão algumas maneiras de caracterizar elementos inteiros em um dado ideal I .

Proposição 1.1. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e $b \in A$. Então,

$$b \in \bar{I} \iff \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } (I + (b))^n = I(I + (b))^{n-1}.$$

Demonstração. Suponha que $b \in \bar{I}$. Note que $I^{j-1}b^{n-j} \subseteq (I + (b))^{n-1}$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ portanto, da equação de dependência inteira de b sobre I , concluímos que $b^n \in I(I + (b))^{n-1}$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Logo, $(I + (b))^n = I(I + (b))^{n-1}$. Reciprocamente, se $(I + (b))^n = I(I + (b))^{n-1}$, então $b^n = a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \dots + a_{n-1}b + a_n$ com $a_i \in I^i$ o que nos fornece uma equação de dependência inteira de b sobre I , assim $b \in \bar{I}$. \square

Corolário 1.2. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e $b \in A$. Então são equivalentes:

1. $b \in \bar{I}$.
2. Existe um A -módulo finitamente gerado M tal que $bM \subseteq IM$, possuindo a seguinte propriedade: se $a \in A$ é tal que $aM = 0$ então $ab \in \sqrt{0}$.

Além disso, se I é finitamente gerado e contém um não divisor de zero, então b é inteiro sobre I se, e somente se, existe um A -módulo fiel finitamente gerado tal que $IM = (I + (b))M$.

Demonstração. (1 \Rightarrow 2) Suponha que b é inteiro sobre I . Logo, podemos tomar uma equação de dependência inteira $b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \dots + a_{n-1}b + a_n = 0$ com $a_i \in I^i$. Sendo assim, para cada i , temos que a_i é soma finita de elementos da forma $x_{j_1} \cdots x_{j_i}$ com $x_{j_l} \in I$. Seja J o ideal gerado pelos elementos x_{j_l} , note que $J \subseteq I$ é um ideal finitamente gerado tal que $a_i \in J^i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Assim b é inteiro sobre J e, pela Proposição [1.1](#) acima, existe um inteiro n tal que $J(J + (b))^{n-1} = (J + (b))^n$. Daí, defina $M = (J + (b))^{n-1}$. Note que M é um A -módulo finitamente gerado tal que $bM = b(J + (b))^{n-1} \subseteq (J + (b))^n = J(J + (b))^{n-1} = JM \subseteq IM$. Por fim, se $a \in A$ é tal que $aM = 0$, então em particular $ab^{n-1} = 0$ e assim $ab \in \sqrt{0}$.

(2 \Rightarrow 1) Seja M um A -módulo gerado por $\{x_1, \dots, x_m\}$ tal que $bM \subseteq IM$. Para cada $i = 1, \dots, m$, temos que $bx_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j$ tal que $a_{ij} \in I$. Considere a matriz $C = (\delta_{ij}b - a_{ij})$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Seja v o vetor $(x_1, \dots, x_m)^T$. Pela construção, $Cv = 0$, logo $\det(C)v = \text{adj}(C)Cv = 0$. Assim, para cada i , temos que $\det(C)x_i = 0$ o que implica $\det(C)M = 0$. Pela propriedade da nossa hipótese

$\det(C)b \in \sqrt{0}$, segue que $(\det(C)b)^k = 0$, para algum k inteiro, esta relação nos fornece uma equação de dependência inteira de b sobre I .

Além disso, suponha que I é finitamente gerado e contém um não divisor de zero, neste caso, basta tomar $J = I$. Deste modo, $M = (I + (b))^{n-1}$ é finitamente gerado e satisfaz $IM = (I + (b))M$. Se $a \in A$ é tal que $ax = 0$ para todo $x \in M$, então em particular $ay^{n-1} = 0$, onde $y \in I$ é não divisor de zero, logo $a = 0$, e portanto M é fiel. Reciprocamente, note que se M é um A -módulo fiel finitamente gerado tal que $IM = (I + (b))M$ então M satisfaz as condições do item 2, o que mostra a volta do caso particular. \square

Proposição 1.3. Sejam A um anel e $I \subseteq A$ ideal. Um elemento $b \in A$ é inteiro sobre I se, e somente se, para todo primo minimal P de A , a imagem de b em $\frac{A}{P}$ é inteiro sobre $\frac{I+P}{P}$.

Demonstração. Note que a imagem de \bar{I} em $\frac{A}{P}$ está contida no fecho inteiro de $\frac{I+P}{P}$, para todo $P \in \text{Min}(A)$, mostrando que todo elemento inteiro sobre I tem sua imagem em $\frac{A}{P}$ inteira sobre $\frac{I+P}{P}$. Reciprocamente, considere o conjunto dado por $W = \{b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_n \mid n > 0 \text{ e } a_i \in I^i\}$, observe que W é fechado para a operação de multiplicação. Se mostrarmos que $0 \in W$ concluimos que b é inteiro sobre I . Suponhamos por absurdo que $0 \notin W$, pelo Lema de Krull, existe Q um ideal primo de A tal que $Q \cap W = \emptyset$, seja $P \subseteq Q$ um primo minimal. Logo, $P \cap W \subseteq Q \cap W = \emptyset$, que é um absurdo já que por hipótese para todo primo minimal P de A temos $P \cap W \neq \emptyset$. Portanto, $0 \in W$ e b é inteiro sobre I . \square

Note que a Proposição [1.3](#) nos fornece condições para reduzir questões de dependência inteira de ideais ao caso em que o anel é um domínio.

Proposição 1.4. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e S um conjunto multiplicativo de A . Então,

$$\overline{S^{-1}(I)} = S^{-1}(\bar{I}).$$

Demonstração. Seja $f \in \overline{S^{-1}(I)}$. Sendo o fecho inteiro de um ideal ainda um ideal, podemos assumir que $f = \frac{x}{1}$ com $x \in A$. Considere a equação de dependência inteira de f sobre $S^{-1}(I)$,

$$f^n + \frac{a_1}{s_1}f^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}f + \frac{a_n}{s_n} = \frac{0}{1},$$

onde $\frac{a_i}{s_i} \in (S^{-1}(I))^i$. Como $S^{-1}(I)^i = S^{-1}(I^i)$, suponha que $a_i \in I^i$ e $s_i \in S$ para cada $i = 1, \dots, n$. Simplificando a equação temos, por definição, a seguinte relação em A :

$$sx^n + t_1a_1x^{n-1} + \dots + t_{n-1}a_{n-1}x + t_na_n = 0,$$

com $s = s_1 \cdots s_n$, $t_i = s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_n \in S$, $i = 1, \dots, n$. Assim, multiplicando por s^{n-1} , obtemos que $sx \in \bar{I}$. A recíproca, segue do fato de $S^{-1}(I)^i = S^{-1}(I^i)$ juntamente com a definição de fecho inteiro. \square

A proposição à seguir nos fornece uma propriedade local-global para fechos inteiros.

Proposição 1.5. Sejam A um anel e $I \subseteq A$ um ideal. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $I = \bar{I}$.
2. Para todo conjunto multiplicativo S de A , $S^{-1}(I) = \overline{S^{-1}(I)}$.
3. Para todo ideal primo P de A , $I_P = \overline{I_P}$.
4. Para todo ideal maximal \mathfrak{M} de A , $I_{\mathfrak{M}} = \overline{I_{\mathfrak{M}}}$.

Demonstração. (1 \Rightarrow 2), (2 \Rightarrow 3) e (3 \Rightarrow 4) são claras.

(4 \Rightarrow 1) Seja $b \in \bar{I}$, então para todo ideal maximal \mathfrak{M} em A , $\frac{b}{1} \in \bar{I}_{\mathfrak{M}} = \overline{I_{\mathfrak{M}}} = I_{\mathfrak{M}}$ logo, pelo princípio local-global, $b \in I$. \square

1.2 Redução

Sejam $J \subseteq I$ ideais de A . O ideal J é uma **redução** de I se existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I^{n+1} = JI^n$. Segue da Proposição [1.1](#) que um elemento $b \in A$ é inteiro sobre J se, e somente se, J é uma redução de $J + (b)$.

Note que se $JI^n = I^{n+1}$, então, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$I^{m+n} = JI^{m+n-1} = \dots = J^m I^n.$$

Em particular, se $J \subseteq I$ é uma redução, então, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $m \geq 1$, $I^{m+n} \subseteq J^m$.

A proposição à seguir nos mostra, em particular, a transitividade das reduções.

Proposição 1.6. Seja $K \subseteq J \subseteq I$ ideais em A .

- (a) Se K é uma redução de J e J é uma redução de I , então K é uma redução de I .
- (b) Se K é uma redução de I , então J é uma redução de I .
- (c) Se I é finitamente gerado, $J = K + (b_1, \dots, b_k)$, e K é uma redução de I , então K é uma redução de J .

Demonstração. (a) Sejam $K \subseteq J$ e $J \subseteq I$ reduções, então existem inteiros n e m tais que $KJ^n = J^{n+1}$ e $JJ^m = I^{m+1}$, portanto $I^{m+n+1} = J^{n+1}I^m = KJ^nI^m = KI^{m+n}$ portanto K é uma redução de I .

(b) Por hipótese existe um inteiro n tal que $I^{n+1} = KI^n \subseteq JI^n \subseteq I^{n+1}$, portanto $JI^n = I^{n+1}$ e assim J é uma redução de I .

(c) Sejam I finitamente gerado, $J = K + (b_1, \dots, b_k)$ e K uma redução de I , então existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $KI^n = I^{n+1}$. Pelo item (b) desta proposição $K + (b_1, \dots, b_i)$ é uma redução de I para todo $i = 0, \dots, k$, onde para $i = 0$ temos $(b_1, \dots, b_i) = (0)$. Além disso, como $b_i \in I$ segue que $b_iI^n \subseteq I^{n+1} = KI^n \subseteq (K + (b_1, \dots, b_{i-1}))I^n$, se $aI^n = 0$ para algum $a \in A$, então $ab_i^n = 0$, ou seja, $ab_i \in \sqrt{0}$ e, por hipótese, I^n é finitamente gerado, assim podemos aplicar o Corolário 1.2 obtendo que b_i é inteiro sobre $K + (b_1, \dots, b_{i-1})$. Daí, pela Proposição 1.1, $K + (b_1, \dots, b_{i-1})$ é uma redução de $K + (b_1, \dots, b_i)$. Portanto, utilizando o item (a) desta proposição e indução sobre k obtemos que $K \subseteq K + (b_1, \dots, b_k) = J$ é uma redução. \square

Corolário 1.7. Sejam $K \subseteq I$ ideais. Suponha que I é finitamente gerado. Então, K é uma redução de I se, e somente se, $I \subseteq \overline{K}$.

Demonstração. (\Rightarrow) Pela Proposição 1.6 item (c) segue que K é uma redução de $K + (b)$ para todo $b \in I$. Assim, da Proposição 1.1, segue que $b \in \overline{K}$ e daí $I \subseteq \overline{K}$.

(\Leftarrow) Suponha que $I = (b_1, \dots, b_n) \subseteq \overline{K}$. Então, para $j \in \{1, \dots, n\}$, b_j é inteiro sobre K e daí sobre $K + (b_1, \dots, b_{j-1})$. Assim, pela Proposição 1.1, cada inclusão da cadeia $K \subseteq K + (b_1) \subseteq \dots \subseteq K + (b_1, \dots, b_n) = I$ é uma redução. Portanto, pelo item (a) da Proposição 1.6, segue que $K \subseteq I$ é uma redução. \square

Corolário 1.8. O fecho inteiro de um ideal em um anel é um ideal integralmente fechado (sob o mesmo anel).

Demonstração. Seja K um ideal em A . Sabemos que \overline{K} é fechado sob multiplicação por elementos de A , nos resta mostrar que \overline{K} é fechado sob adição. Sejam $b, r \in \overline{K}$ e escreva as equações de dependência inteira de b, r em K :

$$\begin{aligned} b^n + a_1b^{n-1} + \dots + a_n &= 0, \\ r^m + k_1r^{m-1} + \dots + k_m &= 0 \end{aligned}$$

com $a_i \in K^i$ e $k_j \in K^j$. Como na demonstração do Corolário 1.2, existe um ideal finitamente gerado $K' \subseteq K$ tal que $a_i \in (K')^i$ e $k_j \in (K')^j$ e assim $b, r \in \overline{K'}$. Sejam $J = K' + (b)$ e $I = K' + (b, r) = J + (r)$, pela Proposição 1.1, K' é uma redução de J e J é uma redução de I . Assim, da Proposição 1.6 item (a), K' é uma redução de I . Como I é finitamente gerado segue, pela Proposição 1.6 itens (b) e (c), que

$K' \subseteq K' + (b+r) \subseteq I$ são reduções. Portanto, da Proposição 1.1, $b+r$ é inteiro sobre K' e daí sobre K , assim \overline{K} é um ideal.

Provaremos agora que, dado um ideal I no anel A , $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$. Sabemos que $\overline{I} \subseteq \overline{\overline{I}}$. Seja $b \in \overline{\overline{I}}$. Então, novamente como na demonstração do Corolário 1.2, existe um ideal finitamente gerado $J \subseteq \overline{I}$ tal que $b \in \overline{J}$. Escreva $J = (j_1, \dots, j_k)$, de maneira análoga existe um ideal finitamente gerado $K \subseteq I$ tal que cada $j_i \in \overline{K}$. Tendo em vista o comentário no início da seção juntamente com a Proposição 1.6 e aplicando indução sobre k segue que cada uma das contensões $K \subseteq K+J \subseteq K+J+(b)$ é uma redução. Note, do item (a) da Proposição 1.6, que K é uma redução de $K+J+(b)$ e sabemos que $K+J+(b)$ é finitamente gerado. Com esses resultados e utilizando o item (c) da Proposição 1.6 em $K \subseteq K+(b) \subseteq K+J+(b)$ segue que K é uma redução de $K+(b)$, logo $b \in \overline{K}$ e assim $b \in \overline{I}$ concluindo o resultado. \square

Vimos, na primeira seção desse capítulo, que há um resultado do tipo local-global para fechos inteiros. A proposição à seguir mostra esta mesma propriedade para reduções.

Proposição 1.9. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A . Considere as condições:

- (1) J é uma redução de I .
- (2) $S^{-1}J$ é uma redução de $S^{-1}I$, para cada $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo.
- (3) J_P é uma redução de I_P , para cada $P \subseteq A$ ideal primo.
- (4) $J_{\mathfrak{M}}$ é uma redução de $I_{\mathfrak{M}}$, para cada $\mathfrak{M} \subseteq A$ ideal maximal.

Então, (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4). Além disso, se A é Noetheriano então (4) \Rightarrow (1).

Demonstração. (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (4) são claras.

(4) \Rightarrow (1) Seja A Noetheriano e considere a seguinte cadeia ascendente:

$$(J : I) \subseteq (JI : I^2) \subseteq (JI^2 : I^3) \subseteq (JI^3 : I^4) \subseteq \dots$$

como A é Noetheriano, existe um inteiro k tal que $(JI^k : I^{k+1}) = (JI^n : I^{n+1})$, para todo $n \geq k$. Por (4), para cada $\mathfrak{M} \subseteq A$ ideal maximal, existe m inteiro tal que $J_{\mathfrak{M}}I_{\mathfrak{M}}^m = I_{\mathfrak{M}}^{m+1}$. Com isso, para n suficientemente grande, tem-se $(JI^n : I^{n+1}) \not\subseteq \mathfrak{M}$. Do contrário, temos que

$$(JI^n : I^{n+1})_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}} \Rightarrow (J_{\mathfrak{M}}I_{\mathfrak{M}}^n : I_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}} \Rightarrow (I_{\mathfrak{M}}^{n+1} : I_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}} \Rightarrow A_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{M}}$$

um absurdo, logo $(JI^k : I^{k+1}) \not\subseteq \mathfrak{M}$, assim $(JI^k : I^{k+1}) = A$ e conseqüentemente, $J I^k = I^{k+1}$, portanto concluímos que J é uma redução de I . \square

Proposição 1.10. Sejam $J = (a_1, \dots, a_k) \subseteq I$ ideais do anel A .

- (a) Se J é uma redução de I , então para qualquer m inteiro positivo, (a_1^m, \dots, a_k^m) e J^m são reduções de I^m .
- (b) Se (a_1^m, \dots, a_k^m) ou J^m é uma redução de I^m , para algum inteiro positivo m , então J é uma redução de I .

Demonstração. (a) Sendo J uma redução de I existe um inteiro n tal que $J I^n = I^{n+1}$. Inicialmente mostraremos que J^m é uma redução de I^m para qualquer m inteiro positivo. Sabemos que $J^m I^n = I^{n+m}$, para todo $m \geq 1$. Assim, multiplicando por I^{mn-n} , temos que $J^m (I^m)^n = (I^m)^{n+1}$ e portanto J^m é uma redução de I^m .

Mostraremos agora que (a_1^m, \dots, a_k^m) é uma redução de I^m , para todo $m \geq 1$. Dado m um inteiro positivo, note que:

$$(a_1^m, \dots, a_k^m) J^{(m-1)(k-1)} = J^{(m-1)k+1}.$$

De fato, é claro que $(a_1^m, \dots, a_k^m) J^{(m-1)(k-1)} \subseteq J^{(m-1)k+1}$. Se $f \in J^{(m-1)k+1}$, então f é uma soma finita de termos da forma $a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$ com $\sum_{i=1}^k n_i = (m-1)k+1$. Suponha que $n_i < m$ para todo $i = 1, \dots, k$, então $n_i \leq m-1$ e assim $(m-1)k+1 = \sum_{i=1}^k n_i \leq (m-1)k$, um absurdo! Portanto $n_i \geq m$ para algum $i = 1, \dots, k$ e assim podemos reescrever f como uma soma finita de termos da forma $a_1^{l_1} \cdots a_i^{m+l_i} \cdots a_k^{l_k}$, com $\sum_{i=1}^k l_i = (m-1)(k-1)$, daí $f \in (a_1^m, \dots, a_k^m) J^{(m-1)(k-1)}$ como queríamos.

Assim, multiplicando a igualdade obtida por J^{k-1} vemos que $(a_1^m, \dots, a_k^m) (J^m)^{k-1} = (J^m)^k$. Portanto (a_1^m, \dots, a_k^m) é uma redução de J^m e, por transitividade, segue que (a_1^m, \dots, a_k^m) é uma redução de I^m .

(b) Primeiro suponha que J^m é uma redução de I^m , para algum m inteiro positivo. Logo, existe um inteiro n tal que $J^m (I^m)^n = (I^m)^{n+1}$. Assim, $I^{mn+m} = J^m I^{mn} \subseteq J I^{mn+m-1} \subseteq I^{mn+m}$. Portanto, J é uma redução de I . Agora, se existe $m > 0$ tal que (a_1^m, \dots, a_k^m) é uma redução de I^m então pelo item (b) da Proposição [1.6](#) com $(a_1^m, \dots, a_k^m) \subseteq J^m \subseteq I^m$ segue que J^m é uma redução de I^m e, pelo que argumentamos no item (a), J é redução de I . \square

Lema 1.11. Sejam A um anel Noetheriano, \mathfrak{R}_A o radical de Jacobson de A , $J, K \subseteq I$ ideais e L um ideal contido em $\mathfrak{R}_A I$. Se $J + L = K + L$, então J é uma redução de I se, e somente se, K é uma redução de I .

Demonstração. Se J é uma redução de I , então existe um inteiro n tal que $J I^n = I^{n+1}$. Assim, $I^{n+1} = J I^n \subseteq (J + L) I^n = (K + L) I^n \subseteq (K + \mathfrak{R}_A I) I^n \subseteq \mathfrak{R}_A I^{n+1} + K I^n$ e como $\mathfrak{R}_A I^{n+1} + K I^n \subseteq I^{n+1}$ temos que $I^{n+1} = \mathfrak{R}_A I^{n+1} + K I^n$, e daí,

$$\mathfrak{R}_A \left(\frac{I^{n+1}}{K I^n} \right) = \frac{\mathfrak{R}_A I^{n+1} + K I^n}{K I^n} = \frac{I^{n+1}}{K I^n}.$$

Pelo Lema de Nakayama, $K I^n = I^{n+1}$. Portanto K é uma redução de I . Da mesma forma mostramos que se K é uma redução de I , então J é uma redução de I . \square

O exemplo abaixo mostra que dada uma redução $J \subseteq I$ não necessariamente temos que $\text{Ass} \left(\frac{A}{J} \right) = \text{Ass} \left(\frac{A}{I} \right)$.

Exemplo 1.1. Sejam K um corpo e $A = K[x, y, z]$ o anel de polinômios nas indeterminadas x, y, z . Sejam $J = (x^3, y^3, xy^2z) \subseteq I = (x^3, y^3, xy^2, x^2y(z-1))$ ideais de A e note que

$$J I^2 = (x^9, x^8y(z-1), x^7y^2, x^6y^3, x^5y^4, x^4y^5, x^3y^6, x^2y^7, xy^8, y^9) = I^3.$$

Portanto, J é uma redução de I . Porém, $\text{Ass} \left(\frac{A}{J} \right) = \{(x, y), (x, y, z)\}$ e $\text{Ass} \left(\frac{A}{I} \right) = \{(x, y), (x, y, z-1)\}$.

Apesar desse exemplo temos o seguinte:

Lema 1.12. Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A . Se J é uma redução de I então $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, $\text{Min} \left(\frac{A}{J} \right) = \text{Min} \left(\frac{A}{I} \right)$ e $\text{ht}(J) = \text{ht}(I)$.

Demonstração. Sendo J uma redução de I , existe um inteiro n tal que $J I^n = I^{n+1}$. Como $J \subseteq I$ segue que $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. Seja $x \in \sqrt{I}$, logo existe $m > 0$ tal que $x^m \in I$, assim $(x^m)^{n+1} \in I^{n+1} = J I^n \subseteq J$, implicando que $x \in \sqrt{J}$. Portanto, $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, como $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \text{Min}(\frac{A}{I})} P$ e $\sqrt{J} = \bigcap_{P' \in \text{Min}(\frac{A}{J})} P'$ segue que $\text{Min} \left(\frac{A}{J} \right) = \text{Min} \left(\frac{A}{I} \right)$ e isso implica a outra igualdade. \square

1.2.1 Redução minimal

Uma redução J de I é chamada **minimal** se nenhum ideal contido propriamente em J é uma redução de I . Um ideal que não tem outra redução além de si mesmo é dito **básico**.

Apresentada a noção de redução minimal podemos introduzir um importante invariante numérico, o número de redução de um ideal.

Sejam A um anel e $J \subseteq I$ ideais de A tais que J é uma redução de I . O **número de redução de I com relação a J** é o menor inteiro n tal que $J I^n = I^{n+1}$, denotado por $r_J(I)$. O número de redução (absoluto) de I é definido por

$$\min\{r_J(I) \mid J \text{ uma redução minimal de } I\}.$$

Mostraremos, como mencionado na introdução, que esse número é sempre maior ou igual ao número de redução Ratliff-Rush, que será apresentado no segundo capítulo.

Note que, em um anel Noetheriano qualquer, reduções minimais não necessariamente existem.

Exemplo 1.2. Sejam K um corpo, $A = K[x, y, z]$ o anel de polinômios nas indeterminadas x, y, z e $I = (x^5z, y^5(z-1), x^3y^2z, x^2y^3(z-1))$. Para cada k inteiro não negativo, considere $J_k = (x^5z - y^5(z-1), x^3y^2z^k, x^2y^3(z-1)^k)$. Temos que para cada k , J_k é uma redução de I , porém, $\bigcap_{k>0} J_k$ não é uma redução de I .

Todavia, em anéis locais Noetherianos reduções minimais sempre existem.

Proposição 1.13. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais tais que J é uma redução minimal de I . Então,

(a) $J \cap \mathfrak{M}I = \mathfrak{M}J$;

(b) Para qualquer ideal K de A tal que $J \subseteq K \subseteq I$, todo conjunto minimal de geradores de J pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de K .

Demonstração. (a) Como A é Noetheriano temos que I é finitamente gerado. Logo, $\dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{I}{\mathfrak{M}I} \right) = \mu(I) < \infty$. Assim, $\frac{I}{\mathfrak{M}I} \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{M}} \right)^n$, para algum $n > 0$. Além disso,

$$\frac{J}{J \cap \mathfrak{M}I} \simeq \frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I} \subseteq \frac{I}{\mathfrak{M}I}.$$

Portanto, $\frac{J}{J \cap \mathfrak{M}I} \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{M}} \right)^k$, para algum $k > 0$. Daí, $J = (x_1, \dots, x_k) + J \cap \mathfrak{M}I$, com $x_i \in J$, $i = 1, \dots, k$. Como $J = J + J \cap \mathfrak{M}I$ podemos aplicar o Lema [1.11](#) na igualdade acima concluindo que (x_1, \dots, x_k) é uma redução de I , sendo J minimal temos $J = (x_1, \dots, x_k)$ e, conseqüentemente, temos que k é o número mínimo de geradores de J , isto é, $k = \mu(J) = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{J}{\mathfrak{M}J} \right)$. Assim,

$$\frac{J}{\mathfrak{M}J} \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{M}} \right)^k \simeq \frac{J}{J \cap \mathfrak{M}I}.$$

Portanto, $J \cap \mathfrak{M}I = \mathfrak{M}J$.

(b) Segue de (a) que $J \cap \mathfrak{M}K = \mathfrak{M}J$. Logo,

$$\frac{J}{\mathfrak{M}J} \simeq \frac{J}{J \cap \mathfrak{M}K} \simeq \frac{J + \mathfrak{M}K}{\mathfrak{M}K} \subseteq \frac{K}{\mathfrak{M}K}.$$

Assim, $\mu(J) = \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{J}{\mathfrak{M}J} \right) \leq \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{K}{\mathfrak{M}K} \right) = \mu(K)$ e todo conjunto minimal de geradores de J pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de K . \square

Teorema 1.14. *Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A . Se J é uma redução de I então existe pelo menos um ideal K contido em J tal que K é uma redução minimal de I .*

Demonstração. Seja \mathfrak{F} a família de todos os ideais K tais que $K \subseteq J$ e K é uma redução de I . Como J é uma redução de I temos que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Sendo A um anel Noetheriano, temos que $\frac{I}{\mathfrak{M}I}$ é um $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Considere a família

$$\mathcal{F} = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \exists K \in \mathfrak{F} \text{ tal que } \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{K + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I} \right) = m \right\}.$$

Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I} \right) \leq \dim_{\frac{A}{\mathfrak{M}}} \left(\frac{I}{\mathfrak{M}I} \right) < \infty$. Portanto, pelo princípio da boa ordem, segue que \mathcal{F} possui um menor elemento. Logo, existe $K \in \mathfrak{F}$ tal que $\frac{K + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ é o menor subespaço (com respeito a inclusão). Suponha que a dimensão de $\frac{K + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ como $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ -espaço vetorial é n , então, considere $k_1, \dots, k_n \in K$ as pré-imagens de uma base de $\frac{K + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$. Seja $K_0 = (k_1, \dots, k_n)$, assim $K + \mathfrak{M}I = K_0 + \mathfrak{M}I$ e, pelo Lema [1.11](#), segue que K_0 é uma redução de I . Sem perda de generalidade assumiremos que $K = K_0$. Portanto, $\frac{K}{\mathfrak{M}K}$ e $\frac{K + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ são $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ -espaços vetoriais de dimensão n , logo a projeção canônica $\frac{K}{\mathfrak{M}K} \rightarrow \frac{K}{K \cap \mathfrak{M}I} \simeq \frac{K + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ é um isomorfismo, implicando que $K \cap \mathfrak{M}I = \mathfrak{M}K$.

Provemos agora que $K \subseteq J$ é uma redução minimal de I . Se $L \subseteq K$ é uma redução de I então, pela minimalidade de K , temos que $K + \mathfrak{M}I = L + \mathfrak{M}I$. Assim, conseguimos a seguinte igualdade $K = (L + \mathfrak{M}I) \cap K = L + (\mathfrak{M}I \cap K)$ e pela última implicação do parágrafo anterior, $K = L + \mathfrak{M}K$. Portanto, pelo Lema de Nakayama, $K = L$, mostrando que K é uma redução minimal de I . \square

Sejam agora (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano e I um ideal de A . Definimos à **fibra especial de I** por

$$F_I = F_I(A) = \frac{A}{\mathfrak{M}} \oplus \frac{I}{\mathfrak{M}I} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{M}I^2} \oplus \dots$$

A dimensão de Krull de $F_I(A)$, $\dim(F_I(A))$, é um importante invariante chamado de **analytic spread** e denotado por $\ell(I)$.

Corolário 1.15. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A tais que J é uma redução de I e $\mu(J) = \ell(I)$. Então,

- (a) J é uma redução minimal de I .
- (b) $F_J(A)$ é isomorfo a subálgebra de $F_I(A)$ gerada por $\frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ sobre $\frac{A}{\mathfrak{M}}$, além disso, também é isomorfo ao anel de polinômios em $\ell(I)$ indeterminadas sobre o corpo $\frac{A}{\mathfrak{M}}$.
- (c) Para todo inteiro positivo k , temos $J^k \cap \mathfrak{M}I^k = \mathfrak{M}J^k$.

Demonstração. (a) Pelo Teorema [1.14](#) acima, existe $K \subseteq J$ ideal tal que K é uma redução minimal de I . Assim, pelo item (b) da Proposição [1.13](#), qualquer conjunto minimal de geradores de K pode ser estendido a um conjunto minimal de geradores de J . Mas, pelo Corolário [A.6](#), temos que $\mu(K) \geq \ell(I) = \mu(J)$, logo, $K = J$, e portanto J é uma redução minimal de I .

(b) Seja B a subálgebra de $F_I(A)$ gerada por $\frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ sobre $\frac{A}{\mathfrak{M}}$. Pela Proposição [A.5](#) temos que $F_I(A) \supseteq B$ é um B -módulo finitamente gerado, logo $B \subseteq F_I(A)$ é uma extensão inteira, assim $\dim(B) = \dim(F_I(A)) = \ell(I)$. Como J é gerado por $\ell(I)$ elementos segue que B é isomorfo a um anel de polinômios com $\ell(I)$ indeterminadas sobre $\frac{A}{\mathfrak{M}}$. Considere a aplicação graduada canônica sobrejetora $F_J(A) \rightarrow B$. Sendo $F_J(A)$ gerado sobre $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ por $\mu(J) = \ell(I)$ elementos, temos que a aplicação canônica é um isomorfismo.

(c) Pelo item (b), para cada $k > 0$, $\frac{J^k}{\mathfrak{M}J^k} \simeq \frac{J^k + \mathfrak{M}I^k}{\mathfrak{M}I^k} \simeq \frac{J^k}{J^k \cap \mathfrak{M}I^k}$, assim, $\mathfrak{M}J^k = J^k \cap \mathfrak{M}I^k$. \square

Daremos, a seguir, os dois principais resultados dessa seção inspirados em Northcott and Rees [\[14\]](#).

A próxima proposição relaciona, no caso de um anel local com corpo residual infinito, o número mínimo de geradores de uma redução minimal de um certo ideal com o seu analytic spread.

Proposição 1.16 (*Northcott-Rees*). Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano tal que $\frac{A}{\mathfrak{M}}$, o corpo residual, é infinito, I um ideal de A e $\ell = \ell(I)$ o analytic spread de I . Então, qualquer redução minimal de I é gerada minimamente por exatamente ℓ elementos. Em particular, toda redução de I contém alguma redução gerada por ℓ elementos.

Demonstração. Seja J uma redução de I e seja B a $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ -subálgebra de $F_I(A)$ gerada por $\frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$, pela Proposição [A.5](#) temos que $F_I(A) \supseteq B$ é um B -módulo finitamente gerado. Em particular, $B \subseteq F_I(A)$ é uma extensão inteira, e isso implica que $\dim(B) = \dim(F_I(A)) = \ell$. Pelo Teorema [A.1](#) (Teorema da Normalização de Noether Graduado) aplicado a álgebra B sobre $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ existem $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell \in B_1 = \frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ a componente homogênea de grau 1 (isso porque $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ é um corpo infinito), algebricamente independentes sobre $\frac{A}{\mathfrak{M}}$, tal que $R = \frac{A}{\mathfrak{M}}[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell] \subseteq B$ é uma extensão inteira. Assim, B é um R -módulo finitamente gerado. Portanto, $F_I(A)$ é um R -módulo finitamente gerado. Considere o ideal $K = (a_1, \dots, a_\ell) \subseteq A$, onde $a_i \in J$ é tal que sua imagem em $\frac{J + \mathfrak{M}I}{\mathfrak{M}I}$ é \bar{a}_i , $i = 1, \dots, \ell$. Novamente pela Proposição [A.5](#), temos que K é uma redução de I tal que $\mu(K) = \ell = \ell(I)$, por isso, pelo Corolário [1.15](#), segue que K é uma redução minimal de I . Portanto, toda redução minimal é gerada exatamente por ℓ elementos. \square

O próximo resultado mostra que, mesmo sem a hipótese do corpo residual infinito, o analytic spread de I nos fornece informações sobre reduções minimais.

Proposição 1.17. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano e I um ideal de A . Então, existe um inteiro positivo n tal que I^n possui uma redução minimal gerada por $\ell(I)$ elementos.

Demonstração. Seja $\ell = \ell(I)$. Sendo $F_I(A)$ uma $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ -álgebra finitamente gerada, segue do Teorema [A.1](#) (Teorema da Normalização de Noether Graduado) que existem elementos $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell \in (F_I(A))_n = \frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}$, isto é, elementos homogêneos de grau n , tais que $R = \frac{A}{\mathfrak{M}}[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_\ell] \subseteq F_I(A)$ é inteira, assim, $F_I(A)$ é um R -módulo finitamente gerado. Considere o ideal $J = (a_1, \dots, a_\ell) \subseteq A$, onde $a_i \in I^n$ é tal que sua imagem em $\frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}$ é \bar{a}_i , $i = 1, \dots, \ell$. Pela Proposição [A.5](#), temos que J é uma redução de I^n tal que $\mu(J) = \ell$, por isso, pelo Corolário [1.15](#), segue que J é uma redução minimal de I^n . \square

1.3 Elemento superficial

O conceito de elemento superficial foi introduzida por Zariski e Samuel em [\[22\]](#), para facilitar o estudo da função de Hilbert-Samuel em anéis locais. Nossa referência para essa seção foi Swanson e Huneke [\[19\]](#).

Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal e M um A -módulo. Evidentemente, para todo $n \geq c$, $I^n M$ está contido em $(I^{n+1} M :_M x) \cap I^c M$, onde $x \in I$. Dizemos que x é um

elemento superficial de ordem 1 de I com respeito a M se existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq c$, $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^n M = I^n M$. Se x é um elemento superficial de ordem 1 com respeito a A diremos simplesmente que x é um **elemento superficial de I** .

Proposição 1.18. Sejam A um anel, $I \subseteq A$ um ideal, $x \in I$ e M um A -módulo. Suponha que x é um elemento superficial de I com respeito a M . Então, para todo $m \geq 1$, x^m é um elemento superficial de I^m com respeito a M .

Demonstração. Como x é um elemento superficial de I com respeito a M existe $c \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq c$, $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^n M = I^n M$. Fixe $m \geq 1$ e seja $r \in (I^{m(n+1)}M :_M x^m) \cap I^{cm} M$ mostraremos, por indução em $k = m - i$, com $0 \leq i \leq m$, que $rx^i \in I^{m(n+1)-m+i} M$. Se $k = 0$, então $m = i$ e por hipótese $rx^m \in I^{m(n+1)} M$, suponha que o resultado é válido para $k = m - i$, assim $rx^i \in I^{m(n+1)-m+i} M$, daí obtemos que $rx^{i+1} = rx^i x \in x I^{m(n+1)-m+i} M \subseteq I^{m(n+1)-m+i+1} M$, o que prova a indução. Portanto, fazendo $i = 0$, concluímos que $(I^{m(n+1)}M :_M x^m) \cap I^{cm} M = I^{mn} M$ e assim que x^m é um elemento superficial de I^m com respeito a M . \square

É interessante sabermos de que forma os elementos superficiais e regulares se relacionam. As duas proposições a seguir versam importantes resultados nesse sentido.

Proposição 1.19. Seja $x \in I$ regular em M . Então, x é um elemento superficial de I com respeito a M se, e somente se, para todo $n \gg 0$, $I^n M :_M x = I^{n-1} M$.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja x um elemento superficial de I com respeito a M . Pelo Lema [A.2](#) (Lema de Artin-Rees), com $N = xM$, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que, para $n \geq k$, $I^n M \cap xM = I^{n-k}(I^k M \cap xM) \subseteq x I^{n-k} M$. Como $I^n M \cap xM = x(I^n M :_M x)$ e x é regular em M , segue que $I^n M :_M x \subseteq I^{n-k} M$. Além disso, sabemos que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq c$, $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^n M = I^n M$. Seja $n \geq k + c$, então $n - k \geq c$, logo $I^{n-k} M \subseteq I^n M$ e assim $I^n M :_M x = (I^n M :_M x) \cap I^n M = I^{n-1} M$ como queríamos.

(\Leftarrow) Como, para todo $n \gg 0$, $I^n M :_M x = I^{n-1} M$ podemos tomar c como o menor inteiro com essa propriedade, assim para todo $k \geq c$ temos que $(I^{k+1}M :_M x) \cap I^k M = I^k M$ e assim x é um elemento superficial. \square

Proposição 1.20. Sejam A um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal e M um A -módulo finitamente gerado. Suponha que $\bigcap_n (I^n M) = 0$ e que I contém um elemento regular em M . Então, todo elemento superficial de I com respeito a M é um elemento M -regular.

Demonstração. Seja x um elemento superficial de I com respeito a M . Assim, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq c$ temos a seguinte igualdade $(I^{k+1}M :_M x) \cap I^k M = I^k M$. Note que $I^c(0 :_M x) \subseteq I^n M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $n \leq c$, então $I^c(0 :_M x) \subseteq$

$I^c M \subseteq I^n M$ e se $n \geq c$, então $I^c(0 :_M x) \subseteq (I^{n+1} :_M x) \cap I^c M = I^n M$. Portanto, $I^c(0 :_M x) \subseteq \cap_n (I^n M) = 0$, logo $I^c(0 :_M x) = 0$, como I^c possui um elemento regular de M , $(0 :_M x) = 0$, assim x é um não divisor de zero. \square

A seguir daremos o principal resultado deste capítulo que garante, sob certas condições, a existência de elementos superficiais.

Proposição 1.21. Sejam A um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal e M um A -módulo finitamente gerado, então existe um inteiro m tal que I^m tem um elemento superficial x com respeito a M , e mais que isso, existe um inteiro c tal que para todo $n \geq m, c$,

$$(I^n M :_M x) \cap I^c M = I^{n-m} M$$

isto é, x é superficial de ordem m .

Demonstração. Como o módulo $gr_I(M) = \frac{M}{IM} \oplus \frac{IM}{I^2M} \oplus \frac{I^2M}{I^3M} \oplus \dots$ sobre o anel Noetheriano $gr_I(A)$ é finitamente gerado segue que todo submódulo próprio admite decomposição primária. Seja $0 = N_1 \cap \dots \cap N_r$ uma decomposição primária do submódulo zero de $gr_I(M)$. Para $i = 1, \dots, r$ seja $P_i = \sqrt{N_i :_{gr_I(A)} gr_I(M)}$, temos que cada P_i é um ideal primo. Sem perda de generalidade suponha que $gr_I(A)^+$ esteja contido em P_1, \dots, P_s e não esteja em P_{s+1}, \dots, P_r . Assim, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{I^c M}{I^{c+1} M}$ está contido em N_1, \dots, N_s .

Pelo Lema da Esquiva (ver Lemma 5, Ch. VIII, Seção 8, de Zariski e Samuel [22]), existe um elemento homogêneo h de grau positivo em $gr_I(A)$ que não está contido em nenhum P_i , para $i = s + 1, \dots, r$. Digamos $h = x + I^{m+1}$ para algum $x \in I^m$.

Suponha, por contradição, que exista $y \in [(I^n M :_M x) \cap I^c M] \setminus I^{n-m} M$ para algum $n \geq c$. Seja k o maior inteiro tal que $y \in I^k M$, então $c \leq k < n$. Em $gr_I(M)$, $(x + I^{m+1}) \cdot (y + I^{k+1} M) = xy + I^{k+m+1} M = 0$, pois $k + m + 1 \leq n$ e daí $xy \in I^n M \subseteq I^{k+m+1} M$. Do contrário teríamos $k + m + 1 > n$ e isto nos diz que $k + m + 1 \geq n + 1$, assim $k \geq n - m$, logo $I^k M \subseteq I^{n-m} M$ o que é um absurdo, pois $y \in I^k M$ e $y \notin I^{n-m} M$. Assim, pela escolha de $x + I^{m+1}$, temos que $y + I^{k+1} M \in N_{s+1} \cap \dots \cap N_r$. E, pela escolha de c , $y + I^{k+1} M \in N_1 \cap \dots \cap N_s$, e daí $y + I^{k+1} M = 0$, o que contradiz a escolha de k . Concluindo assim o resultado. \square

Introduziremos agora a noção de seqüência superficial. Uma seqüência $x_1, \dots, x_s \in I$ é dita uma **seqüência superficial de I com respeito a M** se, para todo $i = 1, \dots, s$, a imagem de x_i em $\frac{I}{(x_1, \dots, x_{i-1})}$ é um elemento superficial de ordem 1 de $\frac{I}{(x_1, \dots, x_{i-1})M}$ com respeito a $\frac{I}{(x_1, \dots, x_{i-1})M}$.

Proposição 1.22. Seja x_1, \dots, x_s uma sequência superficial de I com respeito a M . Então, para todo $n \gg 0$,

$$I^n M \cap (x_1, \dots, x_s)M = (x_1, \dots, x_s)I^{n-1}M.$$

Demonstração. Procederemos por indução em s . Inicialmente, suponha que $s = 1$, por hipótese existe um inteiro c tal que, para todo $n \geq c$, $(I^{n+1}M :_M x_1) \cap I^c M = I^n M$. Aplicando o Lema [A.2](#) (Lema de Artin-Rees), como na Proposição [1.19](#), temos que existe um inteiro $k \geq 1$ tal que, para $n \geq k$, $I^n M \cap x_1 M = I^{n-k}(I^k M \cap x_1 M) \subseteq x_1 I^{n-k} M$. Sejam $n > c + k$, e $y \in I^n M \cap x_1 M$. Podemos escrever $y = x_1 a = x_1 b$, para algum $a \in I^n M :_M x_1$ e algum $b \in I^{n-k} M \subseteq I^c M$. Então, $a - b \in 0 :_M x_1 \subseteq I^n M :_M x_1$, assim $b = a - (a - b) \in I^n M :_M x_1$. Isso prova que $I^n M \cap x_1 M \subseteq x_1((I^n M :_M x_1) \cap I^c M)$, daí pela superficialidade de x_1 , $I^n M \cap x_1 M \subseteq x_1 I^{n-1} M$. Assim, $I^n M \cap x_1 M = x_1 I^{n-1} M$.

Agora suponha $s > 1$. Por indução existe um inteiro l tal que para todo $n \geq l$,

$$I^n M \cap (x_1, \dots, x_{s-1})M = (x_1, \dots, x_{s-1})I^{n-1}M$$

pelo caso $s = 1$, existe um inteiro c tal que para todo $n \geq c$,

$$(I^n M + (x_1, \dots, x_{s-1})M) \cap (x_1, \dots, x_s)M = (x_1, \dots, x_{s-1})M + x_s I^{n-1} M.$$

Daí, para todo $n \geq l + c$,

$$\begin{aligned} I^n M \cap (x_1, \dots, x_s)M &\subseteq I^n M \cap ((x_1, \dots, x_{s-1})M + x_s I^{n-1} M) \\ &= I^n M \cap (x_1, \dots, x_{s-1})M + x_s I^{n-1} M \\ &= (x_1, \dots, x_s)I^{n-1} M. \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Ideais de Ratliff-Rush

Neste capítulo definiremos os fechos de Ratliff-Rush e apresentaremos exemplos e algumas propriedades básicas envolvendo este ideal. As principais referências utilizadas neste capítulo foram Heinzer, Lantz e Shah [6]; Ratliff e Rush [15] e Rossi e Swanson [16].

2.1 Propriedades dos fechos de Ratliff-Rush

Sejam A um anel Noetheriano e $I \subseteq A$ um ideal regular, isto é, existe $x \in I$ um não divisor de zero, defina:

$$\tilde{I} = \bigcup_{n \geq 1} (I^{n+1} :_A I^n)$$

Chamaremos \tilde{I} de **fecho de Ratliff-Rush associado a I** . Observe que $I \subseteq \tilde{I}$ é sempre válido, quando $I = \tilde{I}$ dizemos que I é um **fechado a Ratliff-Rush** (Ou simplesmente que I é **Ratliff-Rush**).

Note que \tilde{I} é um ideal. De fato, esse fecho coincide $I^{k+1} :_A I^k$ para $k \gg 0$, pois os condutores $I^{n+1} :_A I^n$ formam uma cadeia ascendente de ideais em um anel Noetheriano. Desta forma os fechos de Ratliff-Rush também são chamados de **ideais de Ratliff-Rush**.

Lema 2.1. Seja M um módulo finitamente gerado sobre o anel Noetheriano A , sejam $I \subseteq A$ um ideal e $x \in A$. Então existe um inteiro r tal que

$$I^n M :_M x \subseteq (0 :_M x) + I^{n-r} M$$

para $n > r$.

Demonstração. Sabemos que $x(I^n M :_M x) = I^n M \cap xM$ e, pelo Lema [A.2](#) (Lema de Artin-Rees), existe um inteiro r tal que $I^n M \cap xM = I^{n-r}(I^r M \cap xM) \subseteq xI^{n-r}M$. Sendo assim, se $y \in I^n M :_M x$, então existe $z \in I^{n-r}M$ tal que $xy = xz$, portanto $y - z \in (0 :_M x)$, logo $y = y - z + z \in (0 :_M x) + I^{n-r}M$. \square

Teorema 2.2. *Sejam A um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal regular, então $I \subseteq \tilde{I}$ e $(\tilde{I})^k = I^k$ para $k \gg 0$. Além disso, se J é um ideal em A tal que $J^j = I^j$ para todo $j \gg 0$. Então, $J \subseteq \tilde{I}$.*

Demonstração. Pela Proposição [1.21](#), segue que existem $h \in \mathbb{N}$ e um elemento $x \in I^h$ tal que x é um elemento superficial de I e $(I^k : x) \cap I^c = I^{k-h}$ para todo $k \gg 0$. Assim, pelo Lema [2.1](#), $I^n : x = I^{n-h}$, para todo $n \gg 0$. Além disso, desde que I é regular, podemos tomar x sendo um elemento regular.

Digamos que $n \geq n_0$ e seja $m = n_0 - h$, então, para todo $i \geq 0$,

$$I^{m+i} \subseteq I^{m+i+1} : I \subseteq \dots \subseteq I^{m+i+h} : I^h \subseteq I^{m+i+h} : x = I^{m+i}$$

assim $I^{k+1} : I = I^k$ para todo $k \geq m$. Portanto, segue que $I^{j+n} : I^n = I^j$ para todo $j \geq m$ e para todo $n \geq 1$, visto que $I : JK = (I : J) : K$ para quaisquer I, J e K ideais. Como A é Noetheriano existe $k \geq m$ tal que $\tilde{I} = I^{k+1} : I^k$, então $I \subseteq \tilde{I}$ e $I^k \subseteq (\tilde{I})^k = (I^{k+1} : I^k)^k \subseteq I^{k^2+k} : I^{k^2} = I^k$, visto que para ideais quaisquer tem-se $(H : I)(J : K) \subseteq HJ : IK$. Portanto, a primeira parte do resultado vale.

Agora suponha que $J \subseteq A$ é um ideal tal que $J^j = I^j$ para todo $j \gg 0$, digamos $j \geq j_0$. É claro que

$$(I + J)^j = \sum_{i=0}^j I^i J^{j-i}$$

e, se $j \geq 2j_0 - 1$, temos duas possibilidades. Se $j - i \geq j_0$, então $I^i J^{j-i} = I^j$ e se $j - i < j_0$ obtemos que $2j_0 - 1 - i \leq j - i \leq j_0 - 1$ e daí $i \geq j_0$, logo $I^i J^{j-i} = J^j = I^j$. Assim, para $j \gg 0$, $(I + J)^j = I^j = J^j$. Portanto, se $b \in J$, então

$$I^j \subseteq (I, b)^j \subseteq (I + J)^j = I^j$$

daí, $bI^{j-1} \subseteq (I, b)^j = I^j$ o que implica $b \in I^j : I^{j-1} = \tilde{I}$, e assim $J \subseteq \tilde{I}$. \square

Note, do Teorema [2.2](#), que $I \subseteq \tilde{I}$ é uma redução. De fato, para algum $k \gg 0$ temos que $I(\tilde{I})^k = I I^k = I^{k+1} = (\tilde{I})^{k+1}$ e, do Corolário [1.7](#), temos que $\tilde{I} \subseteq \bar{I}$. Desta forma, obtemos a seguinte série de inclusões

$$I \subseteq \tilde{I} \subseteq \bar{I} \subseteq \sqrt{\bar{I}}.$$

Assim os ideais integralmente fechados são nossos primeiros exemplos de fechados a Ratliff-Rush. Em particular, os ideais radicais são fechados a Ratliff-Rush.

Corolário 2.3. Sejam I um ideal regular em um anel Noetheriano A , \tilde{I} seu fecho de Ratliff-Rush e H um ideal em A tal que $I \subseteq H \subseteq \tilde{I}$, então $\tilde{H} = \tilde{I}$. Assim, em particular, $\tilde{\tilde{I}} = \tilde{I}$, e portanto $(\tilde{I})^{i+1} : (\tilde{I})^i = \tilde{I}$ para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Utilizando o Teorema 2.2 temos, para todo $k \gg 0$, que $I^k \subseteq H^k \subseteq (\tilde{I})^k = I^k$ portanto $(\tilde{I})^k = I^k = H^k = (\tilde{H})^k$. Novamente pelo Teorema 2.2 temos, de $(\tilde{I})^k = H^k$, que $\tilde{I} \subseteq \tilde{H}$ e, de $(\tilde{H})^k = I^k$, que $\tilde{H} \subseteq \tilde{I}$ assim $\tilde{I} = \tilde{H}$ e daí segue que $\tilde{\tilde{I}} = \tilde{I}$. É claro que $\tilde{I} \subseteq (\tilde{I})^{i+1} : (\tilde{I})^i$, como

$$\tilde{I} = \tilde{\tilde{I}} = \bigcup_{i \geq 1} ((\tilde{I})^{i+1} : (\tilde{I})^i)$$

segue a igualdade. □

Proposição 2.4. Sejam I um ideal regular em um anel Noetheriano A e \tilde{I} seu fecho de Ratliff-Rush. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $\tilde{I}^n = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : I^i)$. Além disso, se $J = (x_1, \dots, x_d)$ é uma redução de I então

$$\tilde{I}^n = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : (x_1^i, \dots, x_d^i)).$$

(b) $\tilde{I} \supseteq \tilde{I}^2 \supseteq \dots \supseteq \tilde{I}^k = I^k$ para todo $k \gg 0$.

(c) Se $I = \bar{I}$, então $\tilde{I}^k \subseteq I$ para todo $k \geq 1$.

(d) Se I é um ideal normal, isto é, $\bar{I}^k = I^k$ para todo $k \geq 1$, então $\tilde{I}^k = I^k$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $I^j : I^i = I^{j-i}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração. (a) Por definição temos que:

$$\tilde{I}^n = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+ni} : I^{ni}) = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : I^i).$$

Como $(x_1^i, \dots, x_d^i) \subseteq I^i$ temos que $\tilde{I}^n = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : I^i) \subseteq \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : (x_1^i, \dots, x_d^i))$.

Por outro lado, como (x_1^i, \dots, x_d^i) é uma redução de I^i existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x_1^i, \dots, x_d^i)(I^i)^k = (I^i)^{k+1}$, assim $y(x_1^i, \dots, x_d^i) \subseteq I^{n+i}$ implica que $yI^{ik+i} = y(I^i)^{k+1} = y(x_1^i, \dots, x_d^i)(I^i)^k \subseteq (I^{n+i})(I^i)^k = I^{n+ki+i}$ e daí podemos concluir a igualdade.

(b) É óbvio que

$$I^{(j+1)+i} : I^i \subseteq I^{j+i} : I^i$$

para todo $i \geq 1$. Portanto, $\widetilde{I^{j+1}} \subseteq \widetilde{I^j}$. Na demonstração do Teorema 2.2 vimos que $I^{k+i} : I^i = I^k$ para todo $k \gg 0$ e todo $i \geq 1$. Assim, $\widetilde{I^k} = \bigcup_{i \geq 1} (I^{k+i} : I^i) = I^k$ para todo $k \gg 0$ concluindo este resultado.

(c) De fato, para $k \geq 1$ temos que $\widetilde{I^k} \subseteq \widetilde{I} = I$.

(d) Observe que $I^k \subseteq \widetilde{I^k} \subseteq \overline{I^k} = I^k$ para todo $k \geq 1$, assim $\widetilde{I^k} = I^k$. É claro que $I^{j-i} \subseteq I^j : I^i$, e como $I^j : I^i = I^{j-i+i} : I^i \subseteq \bigcup_{k \geq 1} (I^{j-i+k} : I^k) = \widetilde{I^{j-i}} = I^{j-i}$ segue que $I^j : I^i = I^{j-i}$.

□

Note, do item (d) da Proposição 2.4 acima, que a normalidade é preservada para o caso do fecho de Ratliff-Rush.

Definição 2.1. Dizemos que um ideal regular I é **estável** quando existe um elemento $a \in I$ tal que $aI = I^2$.

Proposição 2.5. Se I é um ideal estável em um anel Noetheriano A , então I é um fechado a Ratliff-Rush.

Demonstração. De fato, sempre temos que $I \subseteq \widetilde{I}$. Seja $x \in \widetilde{I}$, então $x \in I^{n+1} : I^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Como I é estável existe $a \in I$ um não divisor de zero tal que $aI = I^2$. Ora, $xa^n \in xI^n \subseteq I^{n+1} = a^n I$, logo $xa^n = ya^n$ com $y \in I$ assim $(x-y)a^n = 0$. Como a é um não divisor de zero temos que $x-y=0$ e assim $x=y \in I$, portanto $I = \widetilde{I}$. □

Observação 2.1. Note que o conjunto de ideais estáveis é fechado sob o produto, isto é, se $I^2 = aI$ e $J^2 = bJ$, então $(IJ)^2 = (ab)(IJ)$. Em particular, toda potência de um ideal estável é um fechado a Ratliff-Rush.

A próxima observação nos fornecerá condições para que um certo ideal I seja estável e assim Ratliff-Rush.

Observação 2.2. No Corolário 1, em [4], P. Eakin e A. Sathaye mostram que dado I um ideal finitamente gerado em um anel local (A, \mathfrak{M}) as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Alguma potência de I é estável.
2. Existe um limite sobre o número de geradores das potências de I .

3. Para algum inteiro positivo n , I^n é gerado por n elementos.

E além disso, mostram que se I é um ideal regular e I^n tem n geradores então I^{n-1} é estável.

Já na demonstração do Teorema 3.4, em [17], J. Sally e W. Vasconcelos concluem que se I e I^2 são gerados por dois elementos, então I é estável. O exemplo a seguir mostra que mesmo no caso em que I , e todas as suas potências, são geradas por três elementos temos que I não necessariamente é estável, nem tampouco Ratliff-Rush.

Exemplo 2.1. (Heinzer, Lantz e Shah, [6]) Sejam $A = K[[t^3, t^{10}, t^{11}]]$ e $I = (t^9, t^{10}, t^{14})$. Então $\tilde{I} = (t^9, t^{10}, t^{11})$, assim I não é Ratliff-Rush mas todas as potências de I são minimamente geradas por três elementos.

Proposição 2.6. Seja I um ideal regular em um anel Noetheriano A que tem uma redução J tal que JI é Ratliff-Rush, então I tem número de redução com respeito a J no máximo igual a um.

Demonstração. De fato, se $JI^n = I^{n+1}$ então $(JI)^{n+k} = J^{n+k}I^{n+k} = I^{n+k+n+k} = (I^2)^{n+k}$, $\forall k \geq 0$, assim $I^2 \subseteq (JI)^{n+1} : (JI)^n$ e portanto $I^2 \subseteq \tilde{JI} = JI \subseteq I^2$ e isso implica que $JI = I^2$. \square

Corolário 2.7. Se I tem uma redução principal (a) e aI é Ratliff-Rush, então I é estável e todas as potências de I são Ratliff-Rush.

Demonstração. Segue da Proposição 2.6 que I é estável e da Observação 2.1 que todas as potências de I são Ratliff-Rush. \square

Proposição 2.8. Sejam I um ideal regular contido propriamente em um anel Noetheriano A e $\text{gr}_I(A)$ o anel graduado associado. Então, todas as potências de I são Ratliff-Rush se, e somente se, seu ideal graduado positivo (ideal irrelevante) dado por $\text{gr}_I(A)^+ = \frac{I}{I^2} \oplus \frac{I^2}{I^3} \oplus \dots$ contém um não divisor de zero em $\text{gr}_I(A)$.

Demonstração. De fato, se $\text{gr}_I(A)^+$ contém um não divisor de zero, então ele não está contido no conjunto dos divisores de zero de $\text{gr}_I(A)$, isto é, na união dos ideais primos associados de 0 em $\text{gr}_I(A)$, portanto $\frac{I}{I^2} \not\subseteq P$ com $P \in \text{Ass}(\text{gr}_I(A))$. Assim, para algum $s \in \mathbb{Z}_+$, existe $\bar{a} \in \frac{I^s}{I^{s+1}}$ regular e tomando a como sua pré-imagem em I^s , temos que $I^{n+ks} : a^k = I^n \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}_+$. De fato, é claro que $I^{n+ks} : a^k \supseteq I^n$, além disso, $I^{n+ks} : a^k \subseteq I^n$ decorre do fato de \bar{a} ser regular. Dessa igualdade obtemos que $I^{n+ks} : I^{ks} = I^n \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}_+$ e da Proposição 2.4, item (a), obtemos a seguinte igualdade $\tilde{I}^n = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : I^i) = I^n$. Assim todas as potências de I são Ratliff-Rush.

Reciprocamente, se $\text{gr}_I(A)^+$ consiste de divisores de zero então, pelo Lema da Esquiva, $\text{gr}_I(A)^+$ está contido em algum primo associado de $\text{gr}_I(A)$. Assim, para algum $s \in \mathbb{Z}_+$ existe um elemento homogêneo não nulo $\bar{a} \in \frac{I^s}{I^{s+1}}$ tal que $\bar{a}(\text{gr}_I(A)^+) = 0$. Sendo a a pré-imagem de \bar{a} em I^s e $J = I^{s+1}$, temos $aJ \subseteq J^2$, pois $\bar{a} \frac{I^{s+1}}{I^{s+2}} = \bar{0} \in \frac{I^{2s+1}}{I^{2s+2}}$ implica que $aI^{s+1} \subseteq (I^{s+1})^2$ e daí $a \in J^2 : J$, assim $a \in \tilde{J} \setminus J$, ou seja, existe uma potência de I que não é Ratliff-Rush. \square

Corolário 2.9. Todas as potências de I são fechos de Ratliff-Rush se, e somente se, $\text{prof}(\text{gr}_I(A)) > 0$.

Demonstração. Segue do fato de estarmos tomando a profundidade sobre o ideal graduado positivo, $\text{gr}_I(A)^+$ juntamente com a Proposição 2.8. \square

Note, da Proposição 2.5 e da Observação 2.1, que ideais estáveis satisfazem as condições da Proposição 2.8. Além disso, se I é gerado por uma sequência regular então $\text{gr}_I(A)$ é isomorfo a um anel de polinômios sobre $\frac{A}{I}$ cujo indeterminadas são as imagens dos geradores de I , assim qualquer potência de I é Ratliff-Rush.

Proposição 2.10. Se (A, \mathfrak{M}) é um anel local Cohen-Macaulay de dimensão positiva e I é um ideal \mathfrak{M} -primário com número de redução no máximo um, então toda potência de I é um ideal de Ratliff-Rush.

Demonstração. De fato, pelo Lema A.3 juntamente com o Lema A.7 e o Teorema A.8 temos que $\text{gr}_I(A)$ é Cohen-Macaulay, logo $\text{prof}(\text{gr}_I(A)) = \dim(\text{gr}_I(A)) > 0$, ou seja, $\text{gr}_I(A)^+$ contém um não divisor de zero, e assim I e todas as suas potências são ideais de Ratliff-Rush. \square

Observação 2.3. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local e I um ideal \mathfrak{M} -primário regular. Como \tilde{I} é o maior ideal em A com a propriedade que $(\tilde{I})^n = I^n$ para n suficientemente grande, temos que \tilde{I} pode ser caracterizado como o maior ideal contendo I que tem o mesmo polinômio de Hilbert $P_I(n)$ ($= \text{length}(A/I^n)$ para n suficientemente grande) de I .

As proposições a seguir nos fornecem condições para que um ideal seja Ratliff-Rush. É importante observar que ser ideal de Ratliff-Rush é uma propriedade local-global.

Proposição 2.11. Sejam A, S anéis Noetherianos, $f : A \rightarrow S$ um homomorfismo e defina em S uma estrutura de A -álgebra via f . Suponha que I é um ideal regular em A tal que IS é um ideal de Ratliff-Rush em S e $I = f^{-1}(IS)$. Então I é Ratliff-Rush em A .

Demonstração. Seja $a \in \widetilde{I}$, então $a \in I^{n+1} :_A I^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Logo $aI^n \subseteq I^{n+1}$ e daí dado $\sum_{j=1}^m x_{1j} \cdots x_{nj} \in I^n$ temos que

$$\begin{aligned} a \sum_{j=1}^m x_{1j} \cdots x_{nj} &= \sum_{j=1}^k y_{1j} \cdots y_{(n+1)j} \Rightarrow \\ f(a \sum_{j=1}^m x_{1j} \cdots x_{nj}) &= f(\sum_{j=1}^k y_{1j} \cdots y_{(n+1)j}) \Rightarrow \\ f(a) \sum_{j=1}^m f(x_{1j}) \cdots f(x_{nj}) &= \sum_{j=1}^k f(y_{1j}) \cdots f(y_{(n+1)j}). \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^m f(x_{1j}) \cdots f(x_{nj}) \in (IS)^n$ e $\sum_{j=1}^k f(y_{1j}) \cdots f(y_{(n+1)j}) \in (IS)^{n+1}$ concluimos que $f(a) \in (IS)^{n+1} :_S (IS)^n$ e portanto $f(a) \in IS$, pois IS é Ratliff-Rush, assim $a \in I$ como desejamos. \square

Corolário 2.12. Se $f : A \rightarrow S$ é sobrejetiva, então a pré-imagem em A de um ideal de Ratliff-Rush em S , se regular, é também Ratliff-Rush.

Demonstração. Segue de $f(f^{-1}(J))S = J$ e da Proposição [2.11](#). \square

Definição 2.2. Sejam A um anel e M um A -módulo. Dizemos que M é um A -módulo **plano** se para cada sequência exata de A -módulos

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

a sequência induzida

$$0 \rightarrow M \otimes N' \rightarrow M \otimes N \rightarrow M \otimes N'' \rightarrow 0$$

é exata. Quando temos a equivalência dizemos que M é **fielmente plano**.

Proposição 2.13. Sejam A, S anéis Noetherianos e $f : A \rightarrow S$ o homomorfismo que define S como uma A -álgebra. Suponha que S é plano sobre A . Então para qualquer ideal $I \in A$, $\widetilde{IS} = \widetilde{IS}$. Em particular, se I é Ratliff-Rush, então IS também é.

Demonstração. De fato, sabemos que $(IS)^{n+1} :_S (IS)^n = I^{n+1}S :_S I^nS$. Assim, como I^n é finitamente gerado, temos que $I^{n+1}S :_S I^nS = (I^{n+1} :_A I^n)S$. Esse resultado nos mostra que $\widetilde{IS} = \bigcup_{n \geq 1} (IS)^{n+1} :_S (IS)^n = \bigcup_{n \geq 1} (I^{n+1} :_A I^n)S = (\bigcup_{n \geq 1} I^{n+1} :_A I^n)S = \widetilde{IS}$. \square

Proposição 2.14. I é Ratliff-Rush se, e somente se, $IA_{\mathfrak{p}}$ é Ratliff-Rush para todo ideal primo, ou todo ideal maximal, $\mathfrak{p} \in A$

Demonstração. (\Rightarrow) De fato, temos que $A_{\mathfrak{p}}$ é plano para todo \mathfrak{p} ideal primo de A . Se I é Ratliff-Rush ($I = \widetilde{I}$) obtemos, da Proposição 2.13, que $\widetilde{IA_{\mathfrak{p}}} = \widetilde{I}A_{\mathfrak{p}} = IA_{\mathfrak{p}}$, ou seja, $IA_{\mathfrak{p}}$ é Ratliff-Rush para todo ideal primo e, em particular, para todo maximal.

(\Leftarrow) Seja $IA_{\mathfrak{p}}$ um ideal de Ratliff-Rush para todo ideal primo, ou maximal, de A . Assim $\widetilde{IA_{\mathfrak{p}}} = IA_{\mathfrak{p}}$, e daí $\widetilde{IA_{\mathfrak{p}}} = IA_{\mathfrak{p}}$. Pela Proposição A.4 temos que $\widetilde{I} = I$, isto é, I é Ratliff-Rush. \square

Corolário 2.15. I é Ratliff-Rush se, e somente se, $IA_{\mathfrak{p}}$ é Ratliff-Rush, $\forall \mathfrak{p}$ primo associado de I .

Demonstração. (\Rightarrow) Segue direto da Proposição 2.14 acima.

(\Leftarrow) Sabemos que se $JA_{\mathfrak{p}} \subseteq IA_{\mathfrak{p}}$, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A \left(\frac{A}{I} \right)$, então $J \subseteq I$. Portanto, como $\widetilde{IA_{\mathfrak{p}}} = \widetilde{IA_{\mathfrak{p}}} = IA_{\mathfrak{p}}$ segue que I é Ratliff-Rush. \square

Corolário 2.16. Suponha que S é fielmente plano sobre A , então $\widetilde{I} = \widetilde{IS} \cap A$ para qualquer ideal I em A . Daí, IS é um ideal de Ratliff-Rush em S se, e somente se, I é Ratliff-Rush em A .

Demonstração. Da Proposição 2.13 segue que $\widetilde{IS} = \widetilde{IS}$ e, por S ser fielmente plano, segue que $\widetilde{I} = \widetilde{IS} \cap A = \widetilde{IS} \cap A$. Se IS é um ideal de Ratliff-Rush segue que $\widetilde{I} = \widetilde{IS} \cap A = IS \cap A = I$. À recíproca segue da Proposição 2.13. \square

Proposição 2.17. Seja I um ideal regular em um anel Noetheriano A , e seja a um elemento de $I^s \setminus I^{s+1}$ tal que a imagem \bar{a} em $\frac{I^s}{I^{s+1}} \subseteq \text{gr}_I(A)$ é um não divisor de zero (assim, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, I^n é um fechado a Ratliff-Rush). Então, $J = I^{s+1} + (a)$ é também um ideal de Ratliff-Rush.

Demonstração. Note, como na Proposição 2.8, que a hipótese sobre \bar{a} nos diz que $I^{k+s} : a = I^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Assim, para cada $n \neq 1$, temos que $J \subseteq J^{n+1} : J^n \subseteq J^{n+1} : a^n$. A fim de concluir o resultado vamos mostrar, por indução, que $J^{n+1} : a^n \subseteq J$. Para $n = 0$ o resultado é obvio, para $n > 0$ suponha que $J^n : a^{n-1} \subseteq J$, portanto $x \in J^{n+1} : a^n \implies xa^n \in J^{n+1} = (I^{s+1})^{n+1} + a(I^{s+1})^n + \dots + a^n I^{s+1} + (a^{n+1}) \implies xa^n = \sum_{j=0}^{n+1} a^j b_j$, onde $b_j \in (I^{s+1})^{n+1-j}$. Como $a(a^{n-1}x + \sum_{j=1}^{n+1} a^{j-1}b_j) = b_0 \in (I^{s+1})^{n+1}$ temos que $(a^{n-1}x + \sum_{j=1}^{n+1} a^{j-1}b_j) \in (I^{s+1})^{n+1} : a = I^{(s+1)(n+1)-s} \subseteq (I^{s+1})^n$. Assim, fazendo $k = j - 1$, temos que $a^{n-1}x \in \sum_{k=0}^n a^k (I^{s+1})^{(n+1)-(k+1)} + (I^{s+1})^n = \sum_{k=0}^n a^k (I^{s+1})^{n-k} = J^n$ e daí $x \in J^n : a^{n-1} \subseteq J$, concluindo assim que J é Ratliff-Rush. \square

A proposição à seguir nos mostra condições para o produto de ideais de Ratliff-Rush ser Ratliff-Rush.

Proposição 2.18. Se I, J são ideais de Ratliff-Rush comaximais, então IJ é também Ratliff-Rush.

Demonstração. De fato, como as potências de I são comaximais com as potências de J , temos que produtos de potências desses ideais são iguais a interseção dessas potências e assim:

$$\begin{aligned}
 (IJ)^{n+1} : (IJ)^n &= (I^{n+1} \cap J^{n+1}) : I^n J^n \\
 &= (I^{n+1} : I^n J^n) \cap (J^{n+1} : I^n J^n) \\
 &= ((I^{n+1} : I^n) : J^n) \cap ((J^{n+1} : J^n) : I^n) \\
 &= (I : J^n) \cap (J : I^n) \\
 &= (A \cap (I : J^n)) \cap (A \cap (J : I^n)) \\
 &= ((I : I) \cap (I : J^n)) \cap ((J : J) \cap (J : I^n)) \\
 &= (I : I + J^n) \cap (J : J + I^n) \\
 &= (I : A) \cap (J : A) \\
 &= I \cap J \\
 &= IJ
 \end{aligned}$$

como queríamos. □

Observação 2.4. Seja I um ideal em um domínio Noetheriano A e seja $a \in A$. Então não necessariamente $\widetilde{aI} = a\widetilde{I}$. Por exemplo, mesmo se I e todas as suas potências forem Ratliff-Rush e (a) for uma redução minimal de I temos pela Proposição 2.6 que se I não é estável aI não é Ratliff-Rush. Por isso a família de ideais de Ratliff-Rush de um domínio integral não é fechada, em geral, sob isomorfismo e nem sob interseções. Em particular, $I \subseteq J$ não implica que $\widetilde{I} \subseteq \widetilde{J}$.

Exemplo 2.2. Seja $A = K[[t^3, t^4]]$, onde t é uma indeterminada sobre o corpo K , e seja $\mathfrak{M} = (t^3, t^4)$ o ideal maximal de A . Como $A \cong \frac{K[[x, y]]}{(y^3 - x^4)}$ e o anel graduado de (x, y) em $K[[x, y]]$ é isomorfo à $K[x, y]$. Segue do Lema A.9 que $gr_{\mathfrak{M}}(A) \cong \frac{K[x, y]}{(y^3)K[x, y]}$, assim $gr_{\mathfrak{M}}(A)$ é Cohen-Macaulay, logo $gr_{\mathfrak{M}}(A)^+$ contém um não divisor de zero e segue que todos as potências de \mathfrak{M} são fechados a Ratliff-Rush. Note que $t^8 \in \widetilde{t^3\mathfrak{M}}$, pois $(t^3\mathfrak{M})^2 = \mathfrak{M}^4$, mas $t^8 \notin t^3\mathfrak{M}$, assim $t^3\mathfrak{M} \subsetneq \widetilde{t^3\mathfrak{M}}$, exemplificando o primeira resultado da observação 2.4. Além disso, temos que o ideal $t^8\mathfrak{M} = (t^{11}, t^{12}) = (t^3) \cap (t^8)$ é a interseção de dois ideais principais, ou seja, de dois ideais de Ratliff-Rush e é claro que $t^8\mathfrak{M} \subseteq (t^8)$, mas $t^{13} \in (t^{11}, t^{12}, t^{13}) \setminus (t^8) \subseteq \widetilde{t^8\mathfrak{M}} \setminus t^8\mathfrak{M}$, isto é, $\widetilde{t^8\mathfrak{M}} \not\subseteq (t^8) = \widetilde{(t^8)}$.

Apesar da Observação 2.4 temos, em certos casos, que o produto de um fechado a Ratliff-Rush I com um ideal principal regular (a) é também Ratliff-Rush.

Exemplo 2.3. Se I é estável então aI é Ratliff-Rush, isto é, $\widetilde{aI} = aI = a\widetilde{I}$. Pois como o conjunto de ideais estáveis é fechado sob o produto (Observação 2.1) e como todo ideal estável é Ratliff-Rush (Proposição 2.5) temos que aI é também Ratliff-Rush.

Proposição 2.19. Dado um ideal não nulo $I \subseteq A$ e um não divisor de zero $a \in A$. Se aI é Ratliff-Rush então I é Ratliff-Rush.

Demonstração. De fato, se I não é Ratliff-Rush, isto é, $I \subsetneq I^{n+1} : I^n$, então $aI \subsetneq a(I^{n+1} : I^n) \subseteq (aI)^{n+1} : (aI)^n$, assim aI também não é Ratliff-Rush. \square

2.2 Comportamento dos fechos de Ratliff-Rush em potências de ideais

Sabemos, da Proposição 2.4, que a definição de fecho de Ratliff-Rush tem um bom comportamento assintótico, isto é, potências suficientemente grandes de ideais regulares são fechados a Ratliff-Rush. Porém, potências menores não tem o mesmo comportamento. Essa seção dedica-se à exemplificar fenômenos que podem ocorrer com essas potências.

Nossos dois primeiros exemplos abordam o caso de ideais que são fechados a Ratliff-Rush, mas que alguma de suas potências não é.

Exemplo 2.4. Seja I o ideal maximal do anel local $A = \frac{K[[x, y, z]]}{(y^2, yz, xy - z^3)}$ que é Cohen-Macaulay, com K corpo e x, y e z indeterminadas sobre K . Como x é um não divisor de zero e $x \in I$ temos que I é regular. Como I é primo segue que é Ratliff-Rush, porém $y \in I^3 : I \subseteq \widetilde{I}^2$ mas $y \notin I^2$.

Exemplo 2.5. Seja $I_n = (x^{3n-1}, x^{3n-4}y^3, x^3y^{3n-4}, y^{3n-1})$ um ideal em $A = K[x, y]$, onde $n \geq 3$ é um número inteiro ímpar e K um corpo. Mostraremos que $(I_n)^n$ não é Ratliff-Rush. Note que $(xy)^{(3n-1)n/2}(x^{3n-1})^{2m-1} \in I^{n+2m-1}$, onde $n = 2m + 1$, pois:

$$\begin{aligned} (xy)^{(3n-1)n/2}(x^{3n-1})^{2m-1} &= (xy)^{6m^2+5m+1}x^{12m^2-2m-2} \\ &= (x^{18m^2+3m-1}y^{9m+3})(y^{6m^2-4m-2}) \\ &= (x^{(6m-1)(3m+1)}y^{3(3m+1)})(y^{(6m+2)(m-1)}) \\ &= (x^{3n-4}y^3)^{3m+1}(y^{3n-1})^{m-1} \end{aligned}$$

e $(x^{3n-4}y^3)^{3m+1}(y^{3n-1})^{m-1} \in (I_n)^{4m} = (I_n)^{n+2m-1}$. De forma análoga obtemos que $(xy)^{(3n-1)n/2}(x^{3n-4}y^3)^{2m-1} \in I^{n+2m-1}$, $(xy)^{(3n-1)n/2}(x^3y^{3n-4})^{2m-1} \in I^{n+2m-1}$ e $(xy)^{(3n-1)n/2}(y^{3n-1})^{2m-1} \in I^{n+2m-1}$. Portanto, da Proposição 2.4 item (a), segue que $(xy)^{(3n-1)n/2} \in \widetilde{(I_n)^n}$, contudo $(xy)^{(3n-1)n/2} \notin (I_n)^n$.

A seguir exibiremos um ideal que não é fechado a Ratliff-Rush, mas que todos as suas potências ($n \geq 2$) são.

Exemplo 2.6. Seja $A = K[x, y]$ o anel de polinômios, onde K é um corpo, e considere o ideal $I = (x^4, x^3y, xy^3, y^4)$. Observe que $I^n = (x, y)^{4n}$ para todo $n \geq 2$, assim da Proposição 2.4, item (a), e do que observamos acima segue que $\tilde{I}^n = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : I^i) = (x, y)^{4n}$. Portanto I não é Ratliff-Rush, mas suas potências são.

O próxima exemplo apresenta uma família de ideais onde todas as potências são Ratliff-Rush.

Exemplo 2.7. Sejam $A = K[x, y]$, com K corpo, e $I = (x^l, xy^{l-1}, y^l)$, com $l \geq 3$. Note que a imagem de x^l em $\text{gr}_I(A)$ é um elemento regular. De fato, temos que

$$\begin{aligned} I^{n+1} : x^l &= (x^l I^n + (xy^{l-1}, y^l)^{n+1}) : x^l \\ &= I^n + (y^{l-1})^{n+1} (x, y)^{n+1} : x^l \\ &= I^n + (y^{l-1})^{n+1} (x, y)^{(n+1)-l}. \end{aligned}$$

Note que se $n+1 \leq l$, então $I^n + (y^{l-1})^{n+1} (x, y)^{(n+1)-l} = I^n$, pois $(l-1)(n+1) = ln + l - (n+1) \geq ln$. Temos também que se $n+1 \geq l$, então $I^n + (y^{l-1})^{n+1} (x, y)^{(n+1)-l} = I^n$, pois $(y^{l-1})^{n+1} (x, y)^{(n+1)-l} = (y^l)^{l-1} (xy^{l-1}, y^l)^{(n+1)-l} \subseteq I^{l-1+n+1-l} = I^n$. Portanto, sendo \bar{f} a imagem de $f \in I^n - I^{n+1}$ em $\frac{I^n}{I^{n+1}}$ tal que $\overline{x^l f} = \bar{0}$, temos daí que

$$x^l f \in I^{n+2} \implies f \in I^{n+2} : x^l = I^{n+1} \implies \bar{f} = \bar{0},$$

absurdo, portanto \bar{x}^l é regular em $\text{gr}_I(A)$, assim $\text{prof}(\text{gr}_I(A)) \geq 1$ e, do Corolário 2.9, todas as potências de I são Ratliff-Rush.

Finalizaremos essa seção apresentando uma importante proposição. Ela nos fornecerá condições para que todas as potências de um ideal monomial sejam fechados a Ratliff-Rush.

Proposição 2.20. Seja A o anel de polinômios $K[x_1, \dots, x_d]$ em d variáveis sobre o corpo K . Seja I um ideal monomial zero dimensional $(d+1)$ -gerado, então o anel graduado associado $\text{gr}_I(A)$ tem profundidade positiva. Em particular, todas as potências de I são Ratliff-Rush.

Demonstração. Necessariamente $d > 1$. Note que $I = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_d^{\alpha_d}, \underline{x}^v)$, onde para cada i , $\alpha_i > v_i$. Além disso, pelo menos dois dos v_i são não nulos. Suponha que $\text{gr}_I(A)$ tem profundidade igual a zero, desde que I é monomial existe um monômio $\underline{x}^u \in I^n \setminus I^{n+1}$ (para algum inteiro não negativo n) tal que $\underline{x}^u(x_1, \dots, x_d) \subseteq I^{n+1}$ e $\underline{x}^u I \subseteq I^{n+2}$.

2. Ideais de Ratliff-Rush

Seja $I_0 = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_d^{\alpha_d})$, vamos provar que se $\underline{x}^u I_0 \subseteq I^{n+2}$, $\underline{x}^u \notin I^{n+1}$ e $n \geq 0$, então $\underline{x}^u = \underline{x}^v \underline{x}^{u'}$, onde $\underline{x}^{u'} I_0 \subseteq I^{n+1}$. A saber,

$$\underline{x}^u x_i^{\alpha_i} \in I^{n+2} \cap (x_i^{\alpha_i}) \subseteq x_i^{\alpha_i} I^{n+1} + J^{n+2} \cap (x_i^{\alpha_i}),$$

onde $J = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, \dots, x_d^{\alpha_d}, \underline{x}^v)$. Como $\underline{x}^u \notin I^{n+1}$, necessariamente

$$\underline{x}^u x_i^{\alpha_i} \in J^{n+2} \cap (x_i^{\alpha_i}) \subseteq J^{n+2}.$$

Escreva $\underline{x}^u x_i^{\alpha_i} = \underline{x}^\beta (x_1^{\alpha_1})^{e_1} \dots (x_d^{\alpha_d})^{e_d} (\underline{x}^v)^e$, onde os e_j e e são inteiros não negativos acrescentados a $n+2$, $e_i = 0$ e o monômio \underline{x}^β é possivelmente uma unidade. Se $e = 0$, então

$$\underline{x}^u \in (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, \dots, x_d^{\alpha_d})^{n+2} : x_i^{\alpha_i} = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, \dots, x_d^{\alpha_d})^{n+2}$$

contrariando a hipótese, assim $e > 0$.

Então, da equação $\underline{x}^u x_i^{\alpha_i} = \underline{x}^\beta (x_1^{\alpha_1})^{e_1} \dots (x_d^{\alpha_d})^{e_d} (\underline{x}^v)^e$, temos que $u_j \geq v_j$ para todo $j \neq i$. Como isso vale para todo i , segue que $u \geq v$. Em particular, para todo i , $\underline{x}^{u-v} x_i^{\alpha_i} = (x_1^{\alpha_1})^{e_1} \dots (x_d^{\alpha_d})^{e_d} (\underline{x}^v)^{e-1} \in I^{n+1}$, o que prova a afirmação.

Contradição! Pois, repetindo esse processo, \underline{x}^u é um produto de $n+1$ copias de \underline{x}^v vezes um elemento de $I : I_0 = A$, e assim $\underline{x}^u \in I^{n+1}$. \square

Por fim, observamos ainda que desde a definição de fecho de Ratliff-Rush estamos supondo que o ideal em questão é regular, esta é uma hipótese natural e que não só beneficia o desenvolvimento da teoria, por exemplo, se I é um ideal principal em um anel Noetheriano não-nulo satisfazendo a condição de Ratliff-Rush, então o gerador de I é um não divisor de zero. É suficiente mostrar isso em localizações por ideais maximais contendo o ideal principal. De fato, suponha que a não seja uma unidade em um anel local Noetheriano R tal que $I = (a) = \bigcup_{n \geq 1} (a^{n+1}) :_R (a^n)$ e que $ab = 0$ para algum $b \in R$. Então $b \in (a^2) : (a)$, digamos com $b = ab_1$. Como $a^2 b_1 = ab = 0$ vemos que $b_1 \in (a^3) : (a^2)$, digamos com $b_1 = ab_2$. Continuando esse argumento notamos que $b \in \bigcap_{n \geq 1} (a^n) = 0$, portanto a é um não divisor de zero.

Capítulo 3

O número de redução Ratliff-Rush

Este capítulo é dedicado a apresentar o resultado dado por Amir Mafi em [11], para a questão proposta por Maria Evelina Rossi e Irena Swanson em [16].

Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão positiva d com corpo residual infinito e I um ideal \mathfrak{M} -primário. Note que, sob essas condições, $\text{prof}\left(\frac{A}{I}\right) = 0$ e assim I é um ideal regular. Além disso, pelo Teorema da Interseção de Krull, temos que $\bigcap_n I^n = (0)$ logo, pela Proposição 1.20, todo elemento superficial $x \in I$ é regular e, pela Proposição 1.19, tem-se $I^k : x = I^{k-1}$ para todo $k \gg 0$.

Lema 3.1. Seja m um inteiro não negativo. Então seguem os resultados:

- (a) $\widetilde{I}^{m+1} : x = \widetilde{I}^m$ para todo elemento superficial $x \in I$;
- (b) $\widetilde{I}^{m+1} : J = \widetilde{I}^m$ para toda redução minimal J de I ;
- (c) $\widetilde{I}^{m+1} : I = \widetilde{I}^m$;
- (d) $J\widetilde{I}^{m+1} : x = \widetilde{I}^{m+1}$ para toda redução minimal J de I e todo elemento superficial $x \in J$.

Demonstração. Sabemos que $\widetilde{I}^m = I^{m+k} : I^k$ para todo $k \gg 0$ e $\widetilde{I}^{m+1} = I^{m+1+j} : I^j$ para todo $j \gg 0$. Assim,

- (a) $\widetilde{I}^{m+1} : x = (I^{m+1+j} : I^j) : x = (I^{m+1+j} : x) : I^j = I^{m+j} : I^j = \widetilde{I}^m$.
- (b) $\widetilde{I}^{m+1} : J = (I^{m+1+j} : I^j) : J = I^{m+1+j} : JI^j = I^{m+j+1} : I^{j+1} = \widetilde{I}^m$.
- (c) $\widetilde{I}^{m+1} : I = (I^{m+1+j} : I^j) : I = I^{m+1+j} : II^j = I^{m+j+1} : I^{j+1} = \widetilde{I}^m$.

- (d) Sabemos que $x\widetilde{I^{m+1}} \subseteq J\widetilde{I^{m+1}}$. Seja $f \in J\widetilde{I^{m+1}} : x$, logo $fx \in J\widetilde{I^{m+1}}$ e, pelo item (b), temos que $J\widetilde{I^{m+1}} \subseteq \widetilde{I^{m+2}}$ portanto $f \in \widetilde{I^{m+2}} : x$. Pelo item (a), $\widetilde{I^{m+2}} : x = \widetilde{I^{m+1}}$ e assim segue a igualdade.

□

Voltando ao objetivo deste capítulo, sejam (A, \mathfrak{M}) um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal regular e $J \subseteq I$ uma redução minimal. Vimos, no primeiro capítulo, que o número de redução de I com respeito a J é dado por:

$$r_J(I) := \min\{n \mid I^{n+1} = JI^n\}.$$

Se I tem uma redução principal, isto é, existe $x \in I$ tal que $I^{n+1} = xI^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$, então o analytic spread, $\ell(I)$, é igual a 1 e $r_J(I)$ não depende de J . De fato, note inicialmente que se (x) é uma redução de I então, da Proposição 1.13 item (b), o ideal (x) é uma redução minimal, assim $\ell(I) = 1$. Além disso, sejam (x) e (y) reduções minimais de I e $m, n \in \mathbb{Z}^+$ os menores inteiros tais que $xI^n = I^{n+1}$ e $yI^m = I^{m+1}$. Suponha, por contradição, que $m > n$, provaremos que $yI^{m-1} = I^m$. É claro que $yI^{m-1} \subseteq I^m$, seja $z \in I^m$ como $m > n$ temos que $xI^{m-1} = I^m$ assim $z \in xI^{m-1}$, logo $z = xw$ com $w \in I^{m-1}$. Note que $zI = xwI \subseteq I^{m+1} = yI^m = yxI^{m-1}$ e como x é um elemento regular segue que $wI \subseteq yI^{m-1}$, logo $z = wx \in yI^{m-1}$ e daí $yI^{m-1} = I^m$, contradição. O mesmo argumento vale para $n > m$, portanto $m = n$ e, neste caso, escrevemos:

$$r(I) := \min\{n \mid I^{n+1} = xI^n\}.$$

Como vimos no capítulo precedente o fecho de Ratliff-Rush comporta-se assintoticamente bem, isto é, $\widetilde{I^n} = I^n$ para $n \gg 0$. Assim, em geral, se J é uma redução minimal de I então existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\widetilde{I^{m+1}} = J\widetilde{I^m}$ para todo $m \geq k$.

Definimos o **número de redução Ratliff-Rush** de I com respeito a J por:

$$\widetilde{r}_J(I) := \min\{n \mid \widetilde{I^{m+1}} = J\widetilde{I^m} \ \forall \ m \geq n\}.$$

Não é claro se $\widetilde{I^{n+1}} = J\widetilde{I^n}$ implica que $\widetilde{I^{m+1}} = J\widetilde{I^m}$ para todo $m \geq n$, observe que $\widetilde{I^n}$ não necessariamente é $\widetilde{I^{n+1}}$, contudo se I é um ideal regular que tem redução principal, digamos (x) , então o número de redução Ratliff-Rush de I com respeito a (x) coincide com o menor inteiro n tal que $\widetilde{I^{n+1}} = x\widetilde{I^n}$. De fato, se $\widetilde{I^{n+1}} = x\widetilde{I^n}$ para algum inteiro n , então $\widetilde{I^{m+1}} \subseteq \widetilde{I^m} \subseteq \widetilde{I^{n+1}} = x\widetilde{I^n} \subseteq (x)$ para todo $m > n$, daí $\widetilde{I^{m+1}} = (x) \cap \widetilde{I^{m+1}} = x\widetilde{I^m}$.

Seja

$$\widetilde{G} := \bigoplus_{n \geq 0} \frac{\widetilde{I}^n}{\widetilde{I}^{n+1}}$$

o anel graduado associado ao fecho de Ratliff-Rush de I . Este anel tem uma estrutura natural de álgebra graduada com profundidade positiva, porém não é uma álgebra standard pois não necessariamente temos $\widetilde{G}_{n+1} = \widetilde{G}_1 \widetilde{G}_n$. O Lema a seguir mostra que, para um ideal regular que possui redução principal, o número de redução Ratliff-Rush coincide com o menor inteiro t tal que $\widetilde{G}_t \simeq \widetilde{G}_{t+1}$. Isso implica que se I tem uma redução principal, então $\widetilde{r}_J(I)$ também não depende de J e podemos escrever $\widetilde{r}(I)$ em vez de $\widetilde{r}_J(I)$.

Lema 3.2. Seja I um ideal regular no anel local (A, \mathfrak{M}) que possui redução principal e seja $t \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) $\widetilde{G}_t \simeq \widetilde{G}_{t+1}$;
- (b) $I\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2} = x\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2}$;
- (c) $\widetilde{G}_t \simeq \widetilde{G}_n \quad \forall n \geq t$;
- (d) $\widetilde{I}^{n+1} = x\widetilde{I}^n$ para algum elemento superficial $x \in I$ e para todo $n \geq t$;
- (e) $\widetilde{I}^{t+1} = x\widetilde{I}^t$ para algum elemento superficial $x \in I$.

Demonstração. Observação: De maneira similar ao Lema [3.1](#) temos que, sob nossas hipóteses, $\widetilde{I}^{n+1} : x = \widetilde{I}^n$ para todo elemento superficial x e todo $n \geq 0$, assim a multiplicação por x define uma aplicação injetiva

$$\widetilde{G}_n \xrightarrow{x} \widetilde{G}_{n+1}$$

cujo conúcleo é

$$K_n := \frac{\widetilde{G}_{n+1}}{x\widetilde{G}_n} = \frac{\widetilde{I}^{n+1}}{x\widetilde{I}^n + \widetilde{I}^{n+2}}.$$

(a) \Rightarrow (b) Segue que $\widetilde{G}_{t+1} \simeq \widetilde{G}_t \simeq x\widetilde{G}_t$, assim a aplicação definida é bijetiva e daí $K_t = 0$, logo $I\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2} \subseteq \widetilde{I}^{t+1} \subseteq x\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2}$, e como é claro que $x\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2} \subseteq I\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2}$ segue a igualdade.

(b) \Rightarrow (c) Seja $r = r(I)$. Se $n \geq r$, então $I^n = \widetilde{I}^n$ e $I^{n+1} = x^{n+1-r}I^r$. Logo, como x é regular em A , temos que

$$\widetilde{G}_r = \frac{I^r}{xI^r} \simeq \widetilde{G}_n$$

3. O número de redução Ratliff-Rush

para todo $n \geq r$. Supondo que $t \leq n < r$, provaremos que $\widetilde{G}_r = \widetilde{G}_n$. Por hipótese $\widetilde{I}^t \subseteq x\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2}$ e sabemos que $I^r = x^{r-t}\widetilde{I}^t$. Pois,

$$I^r = I^{r-t-1}I^{t+1} \subseteq I^{r-t-1}\widetilde{I}^t \subseteq I^{r-t-1}(x\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2}) \subseteq xI^{r-t-1}\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{r+1} = xI^{r-t-1}\widetilde{I}^t + I^{r+1}.$$

Note que $I^{r+1} = II^r \subseteq \mathfrak{M}I^r$, logo $I^r = xI^{r-t-1}\widetilde{I}^t + \mathfrak{M}I^r$. Como $r \geq t+1$ temos dois casos, se $r = t+1$ então, pelo Lema de Nakayama, segue que $I^{t+1} = x\widetilde{I}^t$ e daí

$$\widetilde{G}_{t+1} = \frac{\widetilde{I}^{t+1}}{\widetilde{I}^{t+2}} = \frac{I^{t+1}}{I^{t+2}} = \frac{I^{t+1}}{xI^{t+1}} = \frac{x\widetilde{I}^t}{xI^{t+1}} \simeq \frac{\widetilde{I}^t}{I^{t+1}} = \widetilde{G}_t.$$

Se $r > t+1$, então

$$xI^{r-t-1}\widetilde{I}^t + I^{r+1} \subseteq xI^{r-t-2}(x\widetilde{I}^t + \widetilde{I}^{t+2}) + I^{r+1} \subseteq x^2I^{r-t-2}\widetilde{I}^t + I^{r+1} \subseteq \dots \subseteq x^{r-t}\widetilde{I}^t + I^{r+1}.$$

Como foi feito acima podemos aplicar o Lema de Nakayama obtendo que $I^r = x^{r-t}\widetilde{I}^t$ e daí $I^{r+1} = xI^r = x^{r-t+1}\widetilde{I}^t \subseteq x^{r-t}\widetilde{I}^{t+1} \subseteq \dots \subseteq \widetilde{I}^{r+1} = I^{r+1}$. Logo,

$$\widetilde{G}_r = \frac{\widetilde{I}^r}{I^{r+1}} = \frac{I^r}{I^{r+1}} = \frac{x^{r-t}\widetilde{I}^t}{x^{r-t}\widetilde{I}^{t+1}} \simeq \frac{\widetilde{I}^t}{\widetilde{I}^{t+1}} = \widetilde{G}_t.$$

E como, para todo $t \leq n < r$, temos $I^r = x^{r-t}\widetilde{I}^t \subseteq x^{r-t-1}\widetilde{I}^{t+1} \subseteq x^{r-n}\widetilde{I}^n \subseteq x^{r-n-1}\widetilde{I}^{n+1} \subseteq \dots \subseteq \widetilde{I}^r = I^r$ segue que $I^r = x^{r-n}\widetilde{I}^n$ e $I^{r+1} = x^{r-n}\widetilde{I}^{n+1}$ para todo $t \leq n < r$, assim

$$\widetilde{G}_r = \frac{\widetilde{I}^r}{I^{r+1}} = \frac{I^r}{I^{r+1}} = \frac{x^{r-n}\widetilde{I}^n}{x^{r-n}\widetilde{I}^{n+1}} \simeq \frac{\widetilde{I}^n}{\widetilde{I}^{n+1}} = \widetilde{G}_n.$$

Portanto o item (c) é válido.

(c) \Rightarrow (d) Note que se $n \geq r$ o item (d) é válido. Suponha que $n < r$, se provarmos que $\widetilde{I}^{n+1} \subseteq x\widetilde{I}^n + \mathfrak{M}\widetilde{I}^{n+2}$ para todo $t \leq n < r$ então a conclusão segue do Lema de Nakayama. Seja m um inteiro tal que $t \leq m < r$. Por hipótese o conúcleo $K_m = 0$, assim

$$\widetilde{I}^{m+1} \subseteq x\widetilde{I}^m + \widetilde{I}^{m+2}.$$

Além disso $K_n = 0$, para todo $n > m$, logo $\widetilde{I}^{m+2} \subseteq x\widetilde{I}^m + \widetilde{I}^{m+3} \subseteq \dots \subseteq x\widetilde{I}^m + \widetilde{I}^{s+1}$ e como $\widetilde{I}^{s+1} = x\widetilde{I}^s \subseteq x\widetilde{I}^{m+1} \subseteq \mathfrak{M}\widetilde{I}^{m+1}$ segue que $\widetilde{I}^{m+1} \subseteq x\widetilde{I}^m + \mathfrak{M}\widetilde{I}^{m+1}$ portanto o resultado é válido.

(d) \Rightarrow (e) Trivial.

(e) \Rightarrow (a) Temos, por hipótese, que $K_t = 0$ logo a aplicação definida na nossa observação é um isomorfismo em t . \square

O resultado a seguir nos mostra como relacionar os invariantes $r(I)$ e $\tilde{r}(I)$ que definimos.

Proposição 3.3. Seja I um ideal regular de um anel local (A, \mathfrak{M}) tendo redução principal e seja $s(I)$ o menor inteiro tal que $\tilde{I}^n = I^n$ para todo $n \geq s$. Então

- (a) $s(I) \leq r(I)$;
- (b) $\tilde{r}(I) \leq r(I)$;
- (c) $\tilde{r}(I) = r(I)$ se, e somente se, $I^{r(I)} \not\subseteq (x)$ para alguma redução minimal (x) de I .

Demonstração. De fato, faça $r := r(I)$. Então $I^{i+1} = xI^i$ para todo $i \geq r$, daí segue que dado $p \geq r$ e $t \geq 0$ temos que $I^{t+p} = x^{t+p-r}I^r$.

Sejam $j \geq r$ e t um inteiro positivo tal que $\tilde{I}^j = I^{j+t} : I^t$, então:

$$\tilde{I}^j = I^{j+t} : I^t \subseteq I^{j+t} : x^t = x^{j+t-r}I^r : x^t = x^{j-r}I^r \subseteq I^j$$

Assim, para todo $j \geq r$, $\tilde{I}^j = I^j$ o que prova os itens (a) e (b). Como $\tilde{I}^n \cap (x) = x\widetilde{I^{n-1}}$ para todo inteiro positivo podemos observar que $\tilde{I}^n = x\widetilde{I^{n-1}}$ para algum n se, e somente se, $\tilde{I}^n \subseteq (x)$. Assim a conclusão do item (c) segue do item (a), pois $\tilde{I}^r = I^r$. \square

Note que se $\text{gr}_I(A)$ tem profundidade positiva, então $\tilde{r}(I) = r(I)$ e $s(I) = 0$. O exemplo a seguir mostra que a desigualdade na Proposição 3.3 item (b) pode ser estrita:

Exemplo 3.1. Sejam $A = K[[t^4, t^5, t^{11}]]$ e I o seu ideal maximal. Temos que $I^4 = t^4I^3$, assim $r(I) = 3$. Note que I é fechado a Ratliff-Rush, mas $I^2 \neq \tilde{I}^2 = (t^8, t^9, t^{10}, t^{11})$. Além disso, $\widetilde{I^{n+1}} = t^4\tilde{I}^n$ para todo $n \geq 2$ daí $\tilde{r}(I) < r(I)$

Note que a Proposição 3.3 responde a seguinte pergunta: Seja (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d = 1$ e I um ideal \mathfrak{M} -primário. É sempre verdade que $\tilde{r}_J(I) \leq r_J(I)$? No que segue o nosso objetivo será apresentar uma solução para este resultado com $d = 2$ e $d \geq 3$.

Uma sequência superficial $x_1, \dots, x_s \in I$ é dita ser uma **sequência tame superficial** se, para todo $i = 1, \dots, s$, x_i é um elemento superficial de I . Sequências desse tipo serão cruciais na obtenção do resultado final deste capítulo.

Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano com dimensão positiva e I um ideal de A . Um sistema de elementos homogêneos $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_t \in \text{gr}_I(A)$ é chamada **sequência filter-regular** se, e somente se,

$$\overline{y}_i \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}\left(\frac{\text{gr}_I(A)}{(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_{i-1})\text{gr}_I(A)}\right)} \mathfrak{p} V(\text{gr}_I(A)^+)$$

para todo $i = 1, \dots, t$. Sabemos que y_1, \dots, y_t é uma sequência regular de I se, e somente se $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_t}$ é uma sequência filter-regular de $\text{gr}_I(A)$, onde $\overline{y_i} = y_i + I^2$. Uma sequência $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_t}$ que é filter-regular em qualquer ordem é chamada **sequência filter-regular incondicionada**.

Lema 3.4. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão positiva d , com corpo residual infinito, e I um ideal \mathfrak{M} -primário de A . Então toda redução minimal J de I pode ser gerado por uma sequência tame superficial de I .

Demonstração. Seja J uma redução minimal de I . Como o corpo residual é infinito temos, pela seção 8.6 em [19], que existe um sequência superficial y_1, \dots, y_d em I tal que $J = (y_1, \dots, y_d)$. Como $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_d}$ forma uma sequência filter-regular em $\text{gr}_I(A)$ então, pela Proposição A.12, $Q = (\overline{y_1}, \dots, \overline{y_d})$ admite um sistema de geradores de comprimento d , digamos $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_d}$, que forma uma sequência filter-regular incondicionada. Como z_1, \dots, z_d é, em particular, uma sequência superficial maximal na redução minimal J , segue que $J = (z_1, \dots, z_d)$ é gerado por uma sequência tame superficial. \square

Lema 3.5. Seja (A, \mathfrak{M}) uma anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d = 2$ e seja x_1, x_2 uma sequência superficial em I com $J = (x_1, x_2)$. Então, $J^{n+1}\widetilde{I}^m : x_1 = J^n\widetilde{I}^m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Provaremos esse resultado por indução sobre n . O caso $n = 0$ segue do Lema 3.1 item (d). Supondo que $n \geq 1$, sempre temos que $x_1 J^n \widetilde{I}^m \subseteq J^{n+1} \widetilde{I}^m$, queremos mostrar que se $f \in J^{n+1} \widetilde{I}^m : x_1$, então $f \in J^n \widetilde{I}^m$. Como $J^{n+1} \widetilde{I}^m = J J^n \widetilde{I}^m$, temos que $f x_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$, com $a_1, a_2 \in J^n \widetilde{I}^m$. Assim, $x_1(f - a_1) = a_2 x_2 \in x_2 J^n \widetilde{I}^m$, da Proposição 1.20 juntamente com o Teorema da Interseção de Krull, temos que x_1, x_2 é uma sequência regular. Assim, $\overline{x_1}$ é um não divisor de zero em $\frac{A}{(x_2)}$, e como $\overline{x_1(f - a_1)} = \overline{a_2 x_2} = \overline{0}$ segue que $f - a_1 \in (x_2)$, logo $f - a_1 = t x_2$, com $t \in A$, daí $t x_1 x_2 = x_1(f - a_1) \in x_2 J^n \widetilde{I}^m$ e, como x_2 é um não divisor de zero em A , temos que $t x_1 \in J^n \widetilde{I}^m$ e daí $t \in J^n \widetilde{I}^m : x_1$. Por hipótese de indução $J^n \widetilde{I}^m : x_1 = J^{n-1} \widetilde{I}^m$ assim obtemos $f = a_1 + t x_2 \in J^n \widetilde{I}^m$ como desejamos. \square

Proposição 3.6. Sejam (A, \mathfrak{M}) uma anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d = 2$ e x_1, x_2 uma sequência superficial em I com $J = (x_1, x_2)$. Então, $\widetilde{r}_J(I) \leq r_J(I)$.

Demonstração. Faça $r_J(I) = m$ e seja n um inteiro tal que $n \geq m$. Como $\widetilde{I}^{n+1} = I^{n+k+1} : (x_1^k, x_2^k)$ para todo $k \gg 0$ e $I^{n+k+1} = J^{k+1} I^n$, temos que:

$$\widetilde{I}^{n+1} = J^{k+1} I^n : (x_1^k, x_2^k) \subseteq J^{k+1} I^n : x_1^k \subseteq J^{k+1} \widetilde{I}^n : x_1^k = ((J^{k+1} \widetilde{I}^n : x_1) : x_1^{k-1}).$$

3. O número de redução Ratliff-Rush

Aplicando o Lema 3.5 k vezes concluímos que $\widetilde{I^{n+1}} \subseteq J\widetilde{I^n}$ e $f \in J\widetilde{I^n}$ implica que $f = \sum_{i=1}^N x_i y_i$, com $x_i \in J$ e $y_i \in \widetilde{I^n} = \bigcup_{i \geq 1} (I^{n+i} : I^i)$, logo $y_i \in I^{n+k_i} : I^{k_i}$ para algum $k_i \geq 1$, daí $x_i y_i I^{k_i} \subseteq x_i I^{n+k_i} \subseteq I^{n+1+k_i}$, pois $x_i \in J \subseteq I$. Assim, $J\widetilde{I^n} \subseteq \widetilde{I^{n+1}}$, ou seja, $\widetilde{I^{n+1}} = J\widetilde{I^n}$ para todo $n \geq m$. Portanto $\widetilde{r}_J(I) \leq m$. \square

Observação 3.1. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d = 2$ e J uma redução minimal de I . Se $r_J(I) = m$ e $\widetilde{I^m} = I^m$ então, pela Proposição 3.6, temos $\widetilde{I^n} = I^n$ para todo $n \geq m$.

Lema 3.7. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d \geq 3$, I um ideal \mathfrak{M} -primário e x, x_1, \dots, x_s uma seqüência tame superficial de I com $K = (x_1, \dots, x_s)$, então $K^n \widetilde{I^{m+1}} : x = K^n \widetilde{I^m}$ para todo m, n inteiros não negativos.

Demonstração. Procederemos por indução em n . O caso $n = 0$ segue do Lema 3.1. Seja $n \geq 1$, por hipótese de indução temos que $K^{n-1} \widetilde{I^{m+2}} : x = K^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$ e sabemos que $K^n \widetilde{I^{m+1}} : x \subseteq K^{n-1} \widetilde{I^{m+2}} : x$. Assim, o argumento finaliza se provarmos que:

$$(x_1, \dots, x_r)^{n-1} \widetilde{I^{m+1}} \cap (K^n \widetilde{I^{m+1}} : x) \subseteq K^n \widetilde{I^m} \quad \forall r \in \{0, \dots, s\}.$$

Procederemos agora por indução sobre r . Se $r = 0$, faça $(x_1, \dots, x_r) = (0)$, e o resultado segue. Seja $r \geq 1$ e tome $y \in (x_1, \dots, x_r)^{n-1} \widetilde{I^{m+1}} \cap (K^n \widetilde{I^{m+1}} : x)$, como $y \in (x_1, \dots, x_r)^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$ podemos escrever $y = \alpha + x_r \beta$, onde $\alpha \in (x_1, \dots, x_{r-1})^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$ e $\beta \in (x_1, \dots, x_r)^{n-2} \widetilde{I^{m+1}}$. Agora, seja $J = (x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_s)$ e então $xy = x\alpha + xx_r \beta \in K^n \widetilde{I^{m+1}} = J^n \widetilde{I^{m+1}} + x_r K^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$. Assim, podemos tomar um elemento $z \in K^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$ tal que $xy - x_r z = x\alpha + x(x_r \beta - z) \in J^n \widetilde{I^{m+1}}$. Como $J^n \widetilde{I^{m+1}} \subseteq J^{n-1} \widetilde{I^{m+2}}$ e de $\alpha \in J^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$ temos $x\alpha \in J^{n-1} \widetilde{I^{m+2}}$ segue que $x_r(x_r \beta - z) \in J^{n-1} \widetilde{I^{m+2}}$ e, por hipótese de indução em n , temos $x_r \beta - z \in J^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$ e assim $x_r \beta \in K^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$, pois $J^{n-1} \widetilde{I^{m+1}} \subseteq K^{n-1} \widetilde{I^{m+1}}$. Novamente pela hipótese indução em n temos que $\beta \in K^{n-1} \widetilde{I^m}$. Portanto $x\alpha = xy - xx_r \beta \in K^n \widetilde{I^{m+1}}$ e daí $\alpha \in (x_1, \dots, x_r)^{n-1} \widetilde{I^{m+1}} \cap (K^n \widetilde{I^{m+1}} : x)$. Assim, por hipótese de indução em r , temos que $\alpha \in K^n \widetilde{I^m}$ logo $y = \alpha + x_r \beta \in K^n \widetilde{I^m}$ como desejamos. \square

Lema 3.8. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d \geq 3$, I um ideal \mathfrak{M} -primário e x_1, x_2, \dots, x_d uma seqüência tame superficial de I com $J = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, então $J^{n+1} \widetilde{I^m} : x_1 = J^n \widetilde{I^m}$ para todos m, n inteiros não negativos.

Demonstração. Procederemos por indução sobre n . O caso $n = 0$ segue do Lema 3.1 item (d). Agora, seja $n \geq 1$ e fixe m , portanto $x_1(J^{n+1} \widetilde{I^m} : x_1) = J^{n+1} \widetilde{I^m} \cap (x_1) = (J_1^{n+1} \widetilde{I^m} + x_1 J^n \widetilde{I^m}) \cap (x_1) = (J_1^{n+1} \widetilde{I^m} \cap (x_1)) + (x_1 J^n \widetilde{I^m} \cap (x_1)) = (J_1^{n+1} \widetilde{I^m} \cap (x_1)) +$

3. O número de redução Ratliff-Rush

$x_1 J^n \widetilde{I}^m = x_1 (J_1^{n+1} \widetilde{I}^m : x_1) + x_1 J^n \widetilde{I}^m$, onde $J_1 = (x_2, \dots, x_d)$. Portanto, usando o Lema [3.7](#), temos que $x_1 (J^{n+1} \widetilde{I}^m : x_1) = x_1 (J_1^{n+1} \widetilde{I}^m : x_1) + x_1 J^n \widetilde{I}^m = x_1 J_1^{n+1} \widetilde{I}^{m-1} + x_1 J^n \widetilde{I}^m = x_1 J^n \widetilde{I}^m$, pois $J_1^{n+1} \widetilde{I}^{m-1} \subseteq J^n \widetilde{I}^m$. Daí $J^{n+1} \widetilde{I}^m : x_1 = J^n \widetilde{I}^m$ como desejamos. \square

Teorema 3.9. *Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d \geq 3$, I um ideal \mathfrak{M} -primário e x_1, x_2, \dots, x_d uma sequência tame superficial de I com $J = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, então $\widetilde{r}_J(I) \leq r_J(I)$.*

Demonstração. Faça $r_J(I) = m$, provaremos que $\widetilde{I}^{n+1} = J \widetilde{I}^n$ para todo $n \geq m$. Seja $k \gg 0$, temos que $\widetilde{I}^{n+k+1} = I^{n+k+1} : (x_1^k, x_2^k, \dots, x_d^k)$. Em particular $\widetilde{I}^{n+1} = J^{k+1} I^n : (x_1^k, x_2^k, \dots, x_d^k)$, pois $I^{n+k} = J^k I^n$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Portanto, usando o Lema [3.8](#), obtemos que $\widetilde{I}^{n+1} = J^{k+1} I^n : (x_1^k, x_2^k, \dots, x_d^k) \subseteq J^{k+1} I^n : x_1^k \subseteq J^{k+1} \widetilde{I}^n : x_1^k = J \widetilde{I}^n$. Assim, $\widetilde{I}^{n+1} \subseteq J \widetilde{I}^n$. A inclusão $J \widetilde{I}^n \subseteq \widetilde{I}^{n+1}$ segue do Lema [3.1](#), portanto $\widetilde{I}^{n+1} = J \widetilde{I}^n$ finalizando o resultado. \square

Com isso podemos fazer uma observação semelhante a feita em [3.1](#) para o caso $n \geq 3$.

Observação 3.2. *Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão $d \geq 3$, x_1, \dots, x_d uma sequência tame superficial e $J = (x_1, \dots, x_d)$. Se $r_J(I) = m$ e $\widetilde{I}^m = I^m$ então, pela Teorema [3.9](#), temos $\widetilde{I}^n = I^n$ para todo $n \geq m$.*

Por fim, exibiremos um exemplo dado por Amir Mafi ilustrando o caso em que a desigualdade, do Teorema [3.9](#), é estrita.

Exemplo 3.2. *Seja $R = K[[x, y]]$, onde K é um corpo e $I = (x^4, x^3y, xy^3, y^4)$. Com as nossas condições temos que o número de redução, $r(I)$, é independente. Sendo $J = (x, y)^4$ redução minimal de I , com $J I^2 = I^3$, segue que $r(I) = 2$. Além disso, temos que o segundo coeficiente de Hilbert, $e_2(I)$, é zero. Assim, por Huckaba-Marley, Corolário [A.13](#), $\widetilde{r}_J(I) \leq 1$ para toda redução minimal J de I . Portanto,*

$$\widetilde{r}_J(I) \leq 1 \leq 2 = r_J(I)$$

para toda redução minimal J de I .

Apêndice A

Resultados auxiliares

Teorema A.1 (*Teorema da Normalização de Noether Graduado*). Sejam K um corpo e A uma K -álgebra \mathbb{N} -graduada finitamente gerada tal que $A_0 = K$. Então, existem elementos $x_1, \dots, x_m \in A$ algebricamente independentes sobre K , homogêneos de mesmo grau tal que a extensão $K[x_1, \dots, x_m] \subseteq A$ é inteira. Se K é um corpo infinito e A é gerado sobre K por elementos de grau 1, então x_1, \dots, x_m podem ser tomados de grau 1.

Demonstração. Ver Atiyah ([1]) ou Matsumura ([12]) Lema 2 (pg 262). □

Lema A.2 (*Lema de Artin-Rees*). Sejam A um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal, M um A -módulo finitamente gerado e $N \subseteq M$ um submódulo. Então existe um inteiro $k \geq 1$ tal que, para $n \geq k$

$$I^n M \cap N = I^{n-k}(I^k M \cap N)$$

Demonstração. Ver Atiyah ([1]) Proposição 10.9 e Corolário 10.10. □

Lema A.3. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel Noetheriano local, I um ideal \mathfrak{M} -primário e J uma redução de I , então J é também \mathfrak{M} -primário, e $e(I) = e(J)$, onde $e(J)$ denota a multiplicidade de J em R .

Demonstração. Ver Matsumura ([12]) Teorema 14.13. □

Proposição A.4. Sejam A um anel e I, J ideais de A . Então $I = J$ se, e somente se, $IA_{\mathfrak{M}} = JA_{\mathfrak{M}}$ para todo ideal maximal \mathfrak{M} de A .

Demonstração. Ver Larsen-McCarthy ([10]) Proposição 3.13. □

Proposição A.5. Sejam n um inteiro positivo, (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano, J, I ideais de A tais que $J \subseteq I^n$ e B a subálgebra de $F_{I^n}(A)$ gerada por $\frac{(J + \mathfrak{M}I^n)}{\mathfrak{M}I^n}$ sobre o corpo $\frac{A}{\mathfrak{M}}$. Então, $J \subseteq I^n$ é uma redução se, e somente se, $F_I(A) \supseteq B$ é um B -módulo finitamente gerado.

Além disso, o número de redução de I^n com relação a J é o maior grau de um elemento em um conjunto minimal de geradores homogêneos de $F_{I^n}(A)$ sobre B .

Demonstração. Ver Swanson-Huneke ([19]) Proposição 8.2.4. □

Corolário A.6. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Noetheriano e $J \subseteq I$ ideais de A . Se J é uma redução de I , então o número mínimo de geradores de J é pelo menos igual ao analytic spread de I (a dimensão de Krull de $F_I(A)$), isto é, $\mu(J) \geq \ell(I)$.

Demonstração. Ver Swanson-Huneke ([19]) Corolário 8.2.4. □

Lema A.7. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d com corpo residual infinito, I um ideal \mathfrak{M} -primário em A e $J = (a_1, \dots, a_d)$, onde a_1, \dots, a_d é um sistema de parâmetro contido em I tal que $e(J) = e(I)$. Então, vale a seguinte afirmação:

$$\lambda_A \left(\frac{I}{I^2} \right) = e(I) + (d-1)\lambda_A \left(\frac{A}{I} \right) - \lambda_A \left(\frac{I^2}{JI} \right)$$

Demonstração. Ver Valla ([21]) Lema 1. □

Teorema A.8. Sejam (A, \mathfrak{M}) um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal \mathfrak{M} -primário em A . Se $\lambda_A \left(\frac{I}{I^2} \right) = e(I) + (d-1)\lambda_A \left(\frac{A}{I} \right)$, então $G(I)$ é Cohen-Macaulay.

Demonstração. Ver Valla ([21]) Teorema 1. □

Lema A.9. Sejam A, B anéis, $I \subseteq A, J \subseteq B$ ideais e $h : A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor tal que $h(I) = J$. Se $K = \text{Ker}(h)$, então

$$\text{Ker}(gr(h)) = gr_I(K) := (\{L_I(a)\}_{a \in K}),$$

o ideal em $gr_I(A)$ gerado por todos os termos líderes de $a \in K$. Em particular, temos um isomorfismo canônico de anéis graduados

$$gr_J(S) \cong \frac{gr_I(A)}{gr_I(K)}.$$

Demonstração. Ver Kunz ([9]) Lema 5.3. □

Teorema A.10. *Suponha que $x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_r$, com $t \geq 1$ e $r \geq 2$ é uma sequência regular permutável com respeito a M e sejam $I = (x_1, \dots, x_t)$ e $J = (x_{t+1}, \dots, x_r)$ ideais, então*

$$I^n M \cap J^s M = I^n J^s M$$

para todo $n \geq 0$ e $s \geq 0$.

Demonstração. Ver Caruth ([3]) Teorema 2. □

Lema A.11. *Sejam $x, x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{M}$ uma sequência regular e $J = (x_1, \dots, x_s)$. Então temos os seguintes resultados:*

- (a) $J^{n+1} : x_i = J^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i = 1, \dots, s$;
- (b) $J^n : x = J^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Segue do Teorema [A.10](#). □

Proposição A.12. *Sejam A um anel Noetheriano, $I \subseteq A$ um ideal e M um A -módulo finitamente gerado. Suponha que I é gerado por n elementos, então I possui uma sequência de geradores de comprimento n que forma uma sequência filter-regular incondicionada em M .*

Demonstração. Ver Tajarod-Zakeri ([20]) Proposição 1.2. □

Corolário A.13. *Suponha que $\dim(A) = 2$ e seja I um ideal \mathfrak{M} -primário de A , então:*

- (a) $e_1 = \sum_{n \geq 1} \lambda \left(\frac{\tilde{I}^n}{JI^{n-1}} \right)$
- (b) $e_2 = \sum_{n \geq 2} (n-1) \lambda \left(\frac{\tilde{I}^n}{JI^{n-1}} \right)$
- (c) $e_2 = 0$ se, e somente se, $\tilde{r}(I) \leq 1$

Demonstração. Ver Huckaba-Marley [8] Corolário 4.13. □

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah, M. F.; MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1969), 128 p.
- [2] Burity, R. *Álgebras de Rees*. Dissertação de Mestrado (Orientador: C. B. Miranda Neto), Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, (2013).
- [3] Caruth, A. *A modules relation associated with the Artin-Rees lemma*. Communications in Algebra, **21** (1993), 3545-3555.
- [4] Eakin, P.; Sathaye, A. *Prestable Ideals*. Journal of Algebra, **41** (1976), 439-454.
- [5] Eisenbud, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York (1995), 787 p.
- [6] Heinzer, W.; Lantz, D.; Shah, K. *The Ratliff-Rush ideals in a Noetherian ring*. Communications in Algebra, **20** (1992), 591-622.
- [7] Huckaba, S. *Reduction numbers for ideals of analytic spread one*. Journal of Algebra, **108** (1987), 503-512.
- [8] Huckaba, S.; Marley, T. *Hilbert coefficients and the depths of associated graded rings*. Journal of the London Mathematical Society, **56** (1997), 64-76.
- [9] Kunz, E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, Boston, (1985), 238 p.
- [10] Larsen, M. D.; McCarthy, P. J. *Multiplicative Theory of Ideals*. Academic Press, New York and London, (1971), 298 p.
- [11] Mafi, A. *Ratliff-Rush Ideal and Reduction Numbers*. Communications in Algebra, (2017)
- [12] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1986), 320 p.

- [13] Nagata, M. *Local Rings*. Interscience Tracts 13, Interscience Publishers, New York (1962), 234 p.
- [14] Northcott, D. G.; Rees, D. *Reductions of ideals in local rings*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **50** (1954), 145-158.
- [15] Ratliff, L.J.; Rush, D.E. *Two notes on reductions of ideals*. Indiana University Mathematical Journal, **27** (1978), 929-934.
- [16] Rossi, M.E.; Swanson, I. *Notes on the behavior of the Ratliff-Rush filtration*. Contemporary Mathematics, **331** (2003), 313-328.
- [17] Sally, J.; Vasconcelos, W. *Stable Rings*. Journal of Pure and Applied Algebra, **4** (1974), 319-336.
- [18] Swanson, I. *A note on analytic spread*. Communications in Algebra, **22** (1994), 407-411.
- [19] Swanson, I.; Huneke, C. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*. Cambridge University Press, (2006), 433 p.
- [20] Tajarod, R.; Zakeri, H. *Comparison of certain complexes of modules of generalized fractions and Čech complexes*. Communications in Algebra, **35** (2007), 4032-4041.
- [21] Valla, G. *On form rings which are Cohen-Macaulay*. Journal of Algebra, **58** (1979), 247-250.
- [22] Zariski, O.; Samuel, P. *Commutative Algebra - Volume II*. New York: Springer-Verlag, (1960), 414 p.