

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Alguns Resultados de Rigidez em Superfícies Mínimas Free Boundary

Claudeilton Fonseca da Costa

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Alguns Resultados de Rigidez em Superfícies Mínimas Free Boundary

por

Claudeilton Fonseca da Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

João Pessoa – PB
Julho de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C837a Costa, Claudeilton Fonseca da.
Alguns Resultados de Rigidez em Superfícies Mínimas
Free Boundary / Claudeilton Fonseca da Costa. - João
Pessoa, 2018.
52 f. : il.

Orientação: Allan George de Carvalho Freitas
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Superfície. 2. Mínimas. 3. Free boundary. I.
Freitas, Allan George de Carvalho. II. Título.

UFPB/CCEN

Alguns Resultados de Rigidez em Superfícies Mínimas Free Boundary

por

Claudeilton Fonseca da Costa ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.


Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em 13 de Julho de 2018.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa – UFMG
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do(a) CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais...

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, saúde e pela força pra conduzir este trabalho.

A minha mãe Dilvanira, meu pai Claudionor, e meu irmão Claudenilton pelo apoio incondicional.

Agradeço ao meu orientador Allan George de Carvalho Freitas pelo apoio, incentivo e valiosa orientação.

A todos meus professores durante a graduação na UFRN e durante o mestrado na UFPB pelo aprendizado. Em especial ao professor Ronaldo Freire de Lima pela inspiração para seguir em frente.

Aos meus colegas e amigos que também contribuíram para que eu chegasse até aqui. Finalmente, agradeço a Capes pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos Teoremas de rigidez para superfícies mínimas free boundary. Num primeiro momento, estudamos um resultado de folheação por superfícies free boundary de curvatura média constante e, através disso, abordamos um resultado de rigidez global para variedades Riemannianas tridimensionais com fronteira mean convex. Este resultado foi provado por L. Ambrozio [1]. Após isto, estudamos um resultado de rigidez para superfícies mínimas free-boundary contidas na bola tridimensional, dada uma condição pinçante no módulo da segunda forma fundamental. Neste contexto, obtemos os importantes exemplos do disco equatorial plano e do catenoide crítico. Este resultado foi abordado por L. Ambrozio e I. Nunes [3].

Palavras-chave: Superfície, Mínimas, Free boundary.

Abstract

In this work, we study some rigidity theorems for free boundary minimal surfaces. Firstly, we have studied a foliation result by free boundary surfaces of constant mean curvature and, through this, we have approached a global rigidity result for mean convex three-dimensional manifolds. This result was proved by L. Ambrozio [1]. After this, we study a rigidity result for free-boundary minimal surfaces immersed in the three-dimensional ball, since a pinching condition on the norm of the second fundamental form. In this context, we obtain the important examples of the flat equatorial disc and the critical catenoid. This result was addressed by L. Ambrozio and I. Nunes [3].

Keywords: Surface, Minimal, Free boundary.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	6
1.1 Notações, Terminologia, Conceitos Básicos	6
1.1.1 A Geometria Intrínseca	8
1.1.2 A Geometria Extrínseca	8
1.1.3 Teorema da Divergência	10
1.2 Fórmulas de Variações	11
1.2.1 1ª Variação da Área	12
1.2.2 2ª Variação da Área para Superfícies Free Boundary	16
2 Rigidez de Superfícies Area-Minimizing Free Boundary	22
2.1 Rigidez Infinitesimal	22
2.2 Construção da Folheação	24
2.3 Rigidez Local	27
2.4 Rigidez Global	32
3 Teorema de Rigidez para Superfícies Mínimas Free Boundary em B^3	35
3.1 O Disco Equatorial Plano e o Catenóide Crítico	35
3.2 Prova do Teorema	37
Referências Bibliográficas	43

Introdução

A Geometria Diferencial possui diversos ramos de estudo que dispõem a atenção da ciência no passar dos anos. Dentre esses, um dos mais prolíficos é o estudo de superfícies mínimas. Lembramos que uma superfície é chamada mínima, quando sua curvatura média é identicamente nula. Historicamente, Thomas Young [25] foi o primeiro a introduzir o conceito de curvatura média em 1805. A partir daí, tal conceito gerou muito interesse, sendo seguido por Laplace e, mais tarde, por Gauss. Lembramos que este é um conceito que pode ser estendido para dimensões maiores, no escopo de hiperfícies imersas numa dada variedade Riemanniana. De fato, um dos maiores pontos de relevância nesse conceito reside nos problemas de otimização, visto que as superfícies mínimas fechadas (isto é, sem fronteira) são pontos críticos do funcional área. Dentre tais pontos críticos, temos os importantes exemplos das hiperfícies que localmente minimizam a área. Um importante resultado de rigidez sobre tais hiperfícies foi provado por I. Nunes em [22], e será descrito a seguir.

Teorema 0.1. *Seja (M^3, g) uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar R maior ou igual a -2 . Se Σ é uma superfície compacta, 2-sided, mergulhada em M de gênero $g(\Sigma) \geq 2$ que é localmente area-minimizing, então*

$$|\Sigma| \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1). \quad (1)$$

Além disso, se vale a igualdade, então Σ tem uma vizinhança que é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$, onde $\varepsilon > 0$, g_Σ é a métrica em Σ induzida por g e Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a -1 .

Para demonstrar esse Teorema, Nunes precisou mostrar que quando vale a igualdade em (1), Σ é totalmente geodésica, $Ric(N, N) = 0$ e $R = -2$ em Σ , onde N é o campo normal unitário a Σ . Isto foi utilizado para provar a proposição a seguir, que é um resultado de folheação que por si só tem grande interesse e, além disso, é utilizada na demonstração do Teorema 0.1.

Proposição 0.1. *Se Σ satisfaz a igualdade em (1), então existem $\varepsilon > 0$ e uma família suave $\Sigma_t \subset M$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ de superfícies compactas mergulhadas satisfazendo:*

(1) $\Sigma_t = \exp_x(w(t, x)\nu(x)) : x \in M$, onde $w : (\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave tal que

$$w(0, x) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma} (w(t, \cdot) - t) dA.$$

(2) Σ_t tem curvatura média constante para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

De posse da proposição 0.1, M. Micalef e V. Moraru, provaram em [20], o seguinte Teorema:

Teorema 0.2. *Sejam M uma 3-variedade Riemanniana e Σ uma superfície fechada, 2-sided, imersa em M . Suponha que Σ satisfaz as seguintes condições:*

- (1) Σ é totalmente geodésica,
- (2) R é igual a $\inf_{x \in M} R(x)$ ao longo de Σ e
- (3) $\text{Ric}(N, N) = 0$ ao longo de Σ .

Sejam Σ_t e ε como na Proposição 0.1. Então, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$\text{para } |t| < \delta, \quad |\Sigma_t| \leq |\Sigma|.$$

Além disso, Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{2} \min_{x \in M} R(x)$.

É importante observar que o Teorema 0.2 dá uma importante relação entre as áreas das superfícies geradas na Proposição 0.1. Em [4], H. Bray, S. Brendle e A. Neves demonstraram o seguinte Teorema de rigidez, com objetivos relacionados aos citados anteriormente.

Teorema 0.3. *Seja (M, g) um 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar maior ou igual a 2. Se Σ é uma 2-esfera mergulhada que é localmente area-minimizing, então Σ tem área menor ou igual a 4π . Além disso, se a igualdade vale, então Σ , com a métrica induzida g_{Σ} , tem curvatura Gaussiana constante igual a 1 e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_{\Sigma})$.*

O objetivo dessa dissertação é estudar extensões desses resultados para superfícies com fronteira. De fato, passaremos a estudar tais problemas para hiperfícies free boundary, isto é, hiperfícies tais que sua fronteira está contida na fronteira da variedade ambiente M , e, além disso, a superfície intersecta ∂M ortogonalmente. Uma observação interessante é que as superfícies mínimas free boundary são pontos críticos do funcional área (cf. a Seção 1.2.2). Um dos resultados que abordaremos em nossa dissertação é o resultado de rigidez global descrito a seguir, que foi demonstrado em [1], por L. Ambrozio. Observa-se que o mesmo é uma versão para superfícies com fronteira dos Teoremas 0.1 e 0.3.

Teorema 0.4. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira mean convex (curvatura média da fronteira maior ou igual a zero). Assuma que \mathcal{F}_M (conjunto de discos imersos em M cuja fronteira são curvas em ∂M) é não vazio. Então*

$$\frac{1}{2} \inf R^M \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} |\Sigma| + \inf H^{\partial M} \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} |\partial \Sigma| \leq 2\pi. \quad (2)$$

Além disso, se a igualdade vale, então o recobrimento universal de (M, g) é isométrico a $(\mathbb{R} \times \Sigma_0, dt^2 + g_0)$, onde (Σ_0, g_0) é um disco com curvatura Gaussiana constante igual a $\inf R^M/2$ e $\partial \Sigma_0$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^{\partial M}$ em (Σ_0, g_0) .

Numa outra direção, um resultado clássico para superfícies mínimas fechadas contidas na esfera, dada uma condição pinçante no comprimento da segunda forma fundamental, é o Teorema de S. S. Chern, M. do Carmo e S. Kobayashi [9] descrito a seguir.

Teorema 0.5 (Chern-do Carmo-Kobayashi). *Seja Σ^{n-1} uma superfície mínima fechada na esfera unitária S^n . Assuma que*

$$|\text{III}|^2 \leq n,$$

onde III é a segunda forma fundamental de Σ . Então

- 1) $|\text{III}|^2 \equiv 0$ e Σ^n é um equador.
- 2) ou $|\text{III}|^2 \equiv n$ e Σ^n é uma superfície de Clifford (produto de duas esferas de raio e dimensão apropriados).

Seguindo esta mesma linha, I. Nunes e L. Ambrozio [3] obtiveram uma versão deste Teorema 0.5 para superfícies mínimas free boundary contidas na bola tridimensional.

Teorema 0.6. *Seja Σ^2 uma superfície mínima free boundary compacta na bola unitária B^3 . Assuma que para todo ponto x em Σ ,*

$$|\text{III}|^2(x) \langle x, N(x) \rangle^2 \leq 2.$$

Então

- 1) $|\text{III}|^2 \langle x, N \rangle^2 \equiv 0$ e Σ^2 é um disco equatorial plano.
- 2) ou $|\text{III}|^2(p) \langle p, N(p) \rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ^2 é um catenoide crítico.

Este trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro é dedicado aos resultados básicos necessários para o bom entendimento das demonstrações dos teoremas principais. Definimos e expomos resultados sobre variedades e subvariedades Riemannianas. Apresentamos o Teorema de Gauss-Bonnet que é uma ferramenta bastante

útil no estudo de superfícies. Ainda no Capítulo 1, calculamos a fórmula da primeira variação de área para hiperfícies com fronteira e a fórmula da segunda variação da área para superfícies free boundary. O Capítulo 2 é dedicado aos resultados do artigo de L. Ambrozio [1], que tem como um dos resultados principais o Teorema 0.4. Por fim, no Capítulo 3, estudamos o artigo do L. Ambrozio e I. Nunes [3], onde o principal foco é demonstrar o Teorema 0.6.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações, Terminologia, Conceitos Básicos

Ao curso deste trabalho, consideraremos como pré-requisito o conhecimento sobre variedades diferenciáveis. A partir de agora, M denotará uma variedade diferenciável. Dado um ponto $x \in M$, denotamos por $T_x M$ o espaço tangente de M em x e o conjunto $TM = \{(x, v); p \in M, v \in T_x M\}$ o fibrado tangente de M . Um *campo de vetores* (ou *campo vetorial*) em M é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$, $\mathfrak{X}(M)$ é o espaço de todos campos vetoriais suaves em M e $\mathfrak{D}(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis em M . Considerando um sistema de coordenadas $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e um campo vetorial X , é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a ϕ , $i = 1, \dots, n$. Assim definimos a derivada direcional de f na direção X como

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na parametrização ϕ . Verifica-se que X é diferenciável se, e somente se, Xf é diferenciável para toda função f diferenciável. Dado um outro campo vetorial Y podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ que não necessariamente são campos vetoriais por envolver derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, existe um único campo vetorial Z tal que, para toda função diferenciável f , $Zf = (XY - YX)f$. Com isso definimos o *colchete de Lie* $[X, Y] = XY - YX$. Outra definição importante é a de conexão afim.

Definição 1.1. *Uma Conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $\nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (3) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Utilizaremos em nosso texto a consagrada notação de Einstein, segundo a qual omitimos o símbolo de somatório ao interpretar índices repetidos num mesmo termo como indicador deste somatório. Para prosseguir é necessário a definição de métrica Riemanniana e variedade Riemanniana.

Definição 1.2. *Uma métrica Riemanniana g em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno g_p (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:*

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas em torno de p , tal que $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então aplicação definida por $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = g_q(\frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q))$ é uma função diferenciável em U .

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a função $g(X, Y)$ é diferenciável em V . É usual deixar de indicar o índice p em g_p sempre que não houver confusão. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana g é chama-se uma *variedade Riemanniana*. Uma conexão afim é *compatível* com a métrica Riemanniana quando $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ e é *simétrica* quando $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Uma conexão afim que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana chama-se conexão de Levi-Civita. Ao curso desse trabalho sempre consideraremos (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ .

Nas próximas subseções, estabeleceremos algumas notações e resultados preliminares de Geometria Riemanniana, importantes ao curso de nosso texto. A maioria das notações e demonstrações dos resultados podem ser encontradas em alguns consagrados livros da matéria como, por exemplo, [10],[23],[15].

1.1.1 A Geometria Intrínseca

Agora introduziremos algumas definições da geometria intrínseca.

Definição 1.3. *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana M é um aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathfrak{D}(M).$$

Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais suaves, definimos a *Curvatura Riemanniana*, denotando-o por R , como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

e o *tensor curvatura de Riemann* de ordem 4 denotado por Rm por

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Fixado $x \in M$, considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$. A *curvatura de Ricci* de (M, g) é um tensor de ordem 2, definido por

$$Ric(X, Y) = \sum_{k=1}^n Rm(X, e_k, e_k, Y),$$

e a *curvatura escalar* é uma função real suave em M definida por

$$R(x) = \sum_{k=1}^n Ric(e_k, e_k)(x).$$

Dados $x \in M$ e $\pi \subset T_x M$ um plano bidimensional, definimos a *curvatura seccional* de π por

$$K(\pi) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2 |Y|^2 - g(X, Y)^2},$$

onde $\{X, Y\}$ é uma base de π . A definição de curvatura seccional independe da base $\{X, Y\}$ escolhida. Quando $T_x \Sigma$ é uma variedade bi-dimensional, K é chamada de *curvatura Gaussiana* de Σ em x e nesse caso, vale $R(x) = 2K(x)$.

1.1.2 A Geometria Extrínseca

Seja $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ uma hipersuperfície, para cada $p \in \Sigma$ o produto interno g_p induz uma decomposição

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus T_p \Sigma^\perp.$$

A união disjunta $\coprod_{p \in \Sigma} T_p \Sigma^\perp$ admite uma estrutura de fibrado vetorial, denominado *fibrado normal* $T\Sigma^\perp$. Uma hiperfície é dita 2-sided quando o fibrado normal é trivial. A partir de agora, consideraremos Σ uma hiperfície compacta, imersa e 2-sided na variedade Riemanniana (M^n, g) e N denotará o campo normal unitário exterior à Σ (quando Σ tiver uma parte exterior, por exemplo, a esfera tem uma parte exterior, mas o plano não). O *operador forma* $S_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ é definido como

$$S_N(Y) := \nabla_Y N,$$

onde $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. A *Segunda Forma Fundamental* de Σ é uma forma bilinear e simétrica em $\mathfrak{X}(\Sigma)$, definida como

$$\mathbb{I}\mathbb{I}(Y, Z) := g(\nabla_Y N, Z).$$

Uma hiperfície Σ é dita *totalmente geodésica* quando $\mathbb{I}\mathbb{I} \equiv 0$. A *curvatura média* de Σ num ponto $x \in \Sigma$ é denotada por $H(x)$ e definida como

$$H(x) := \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{I}\mathbb{I}(e_i, e_i),$$

onde $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_x \Sigma$. Σ é dita *mínima* quando $H \equiv 0$. A variedade M tem fronteira *mean convex* quando $H^{\partial M} \geq 0$, ou seja, quando a curvatura média da fronteira é não negativa.

Considere campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Existe uma importante relação entre a curvatura ambiente de M e a curvatura intrínseca da hiperfície Σ , que é dada pela *Equação de Gauss*

$$Rm(X, Y, Z, W) = Rm^\Sigma(X, Y, Z, W) - \mathbb{I}\mathbb{I}(X, W)\mathbb{I}\mathbb{I}(Y, Z) + \mathbb{I}\mathbb{I}(X, Z)\mathbb{I}\mathbb{I}(Y, W), \quad (1.1)$$

onde Rm e Rm^Σ denotam a curvatura de M e Σ , respectivamente. Considere uma base ortonormal $\{e_1(x), \dots, e_{n-1}(x)\}$ de $T_x \Sigma$, fazendo $Y = Z = e_k(x)$ na equação de Gauss 1.1 e somando em k para depois fazer $X = W = e_i(x)$ e somar em i , temos que

$$R - 2Ric(N, N) = R^\Sigma - H^2 + |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2,$$

onde $Ric(N, N)$ é o tensor de Ricci de M avaliado na direção do vetor normal à Σ e $|\mathbb{I}\mathbb{I}|^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{I}\mathbb{I}(e_i, e_k)^2$ denota a norma da segunda forma fundamental de Σ ao quadrado. Em particular, quando a hiperfície Σ é bi-dimensional a fórmula toma a seguinte forma

$$R - 2Ric(N, N) = 2K - H^2 + |\mathbb{I}\mathbb{I}|^2. \quad (1.2)$$

Outra importante relação, é dada pela *Equação de Codazzi*

$$R(X, Y, N, Z) = (\nabla_X^\Sigma \text{III})(Y, Z) - (\nabla_Y^\Sigma \text{III})(X, Z) \quad (1.3)$$

onde ∇^Σ é a conexão de Levi-Civita de (Σ, g) . No caso particular da variedade Riemanniana ser de dimensão 3 definimos na superfície Σ^2 a *curvatura geodésica* da curva $\partial\Sigma$ por $k = g(T, \nabla_T \nu)$, onde T é o campo vetorial unitário tangente à $\partial\Sigma$ e ν é o vetor conormal que aponta para fora de Σ (conormal no sentido que $\{T(x), \nu(x), N(x)\}$ forma uma base de $T_x M$). Um resultado fundamental sobre a geometria da hiperfície compacta (Σ^2, g) é o Teorema de Gauss-Bonnet

$$\int_\Sigma K dA + \int_{\partial\Sigma} k dL = 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde K é a curvatura Gaussiana de Σ , k é a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ e $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ .

1.1.3 Teorema da Divergência

Um importante resultado no contexto de variedade Riemanniana é o Teorema da divergência para isso vamos precisar definir alguns conceitos antes. Considere (M, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O *gradiente* de f é o campo vetorial ∇f que satisfaz

$$g(\nabla f, X) = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, a divergência de X é uma função suave $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\text{div} X)(x) = \sum_{k=1}^n g(\nabla_{e_k} X(x), e_k),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$.

Dado $x \in M$, o *Laplaciano* de f é uma função suave $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f).$$

Uma importante observação é que, se $\{e_1 \dots e_n\}$ é um referencial geodésico, então Laplaciano de f pode ser calculado fazendo $e_i(e_i(f))$ (ver, por exemplo, [5], pg 16).

Por último, definimos o 2-tensor $\text{Hess} f(x)$, denominado a *forma Hessiana* de f , $\text{Hess} f(x) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ por

$$\text{Hess}f(x)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).$$

A seguir enunciaremos o Teorema da divergência. Pelo escopo do texto, não demonstraremos, mas indicaremos referência para a demonstração.

Teorema 1.1 (Teorema da divergência). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientada e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se ∂M é munido com a orientação e a métrica induzidas por M e ν denota o campo normal unitário exterior a M ao longo de ∂M , então*

$$\int_M (\text{div} X) dM = \int_{\partial M} g(X, \nu) d(\partial M)$$

Demonstração. Veja, por exemplo, [5] pg 23. □

Alguns corolários, conhecidos por fórmulas de Green são:

Corolário 1.1.

$$\int_M \Delta f dM = \int_{\partial M} \nu(f) d(\partial M), \tag{1.4}$$

$$\int_M h \Delta f dM = - \int_M g(\nabla f, \nabla h) + \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \nu} h d(\partial M). \tag{1.5}$$

1.2 Fórmulas de Variações

O propósito dessa seção é fornecer uma caracterização variacional das imersões. Para isso, no restante deste trabalho, a menos que se especifique o contrario, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana n -dimensional com fronteira ∂M e métrica g , e Σ^{n-1} uma hipersuperfície compacta, conexa e 2-sided com fronteira $\partial \Sigma$, tal que Σ está imersa em M de tal forma que $\partial \Sigma$ está contida em ∂M . Σ é dita *propriamente imersa* (respect., *mergulhada*) em M quando Σ é imersa (respect., *mergulhada*) em M e $\Sigma \cap \partial M = \partial \Sigma$.

Uma *Variação Admissível* de Σ é um aplicação diferenciável

$$f : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

tal que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a hipersuperfície $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$ é propriamente imersa em M , onde $f_t : x \in \Sigma \mapsto f(x, t) \in M$ e além disso, $f_0(\Sigma) = \Sigma$.

O índice subscrito t será usado para denotar quantidades em $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$. Por exemplo, N_t denotará um campo normal unitário em Σ_t e H_t denotará a curvatura média de Σ_t , usaremos o índice subscrito 0 para referenciar a hipersuperfície Σ o qual será omitido quando não houver confusão.

Indicaremos por (x_1, \dots, x_n) , as coordenadas locais em Σ e para simplificar a notação, escreveremos

$$V = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{e} \quad \partial_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

onde $i = 1, \dots, n$. V é chamado de *campo variacional* da f . Decompondo V nas componentes tangente e normal obtemos

$$V = V^\top + \rho N.$$

A função ρ é chamada a *função lapse* (ou *variação da velocidade normal*) e caracterizada por $\rho = g(V, N)$.

1.2.1 1ª Variação da Área

É muito importante estudar as variações, principalmente as variações da área, pois os pontos críticos do funcional área são um forte candidato a ser localmente minimizante, isto é, ter a menor área entre todas as hiperfícies proximas. A primeira variação que vamos trabalhar é a variação da métrica, definido por $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$.

Proposição 1.1. *A variação do tensor métrica é dada por*

$$\partial_t g_{ij} = g(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} V) \quad \text{e} \quad (1.6)$$

$$\partial_t g^{ij} = -2g^{ik} g^{jl} g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) \quad (1.7)$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa da matriz (g_{ij}) .

Demonstração. A igualdade (1.6) segue direto, pois, pela regra de Leibniz

$$\partial_t g_{ij} = \partial_t g(\partial_i, \partial_j) = g(\nabla_V \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_V \partial_j) = g(\nabla_{\partial_i} V, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} V).$$

Para a igualdade (1.7), devemos notar que primeiramente $g^{ik} g_{kl} = \delta_{il}$ donde, derivando em relação a t , temos

$$(\partial_t g^{ik}) g_{kl} + g^{ik} (\partial_t g_{kl}) = 0$$

Substituindo (1.6) nessa identidade, temos

$$(\partial_t g^{ik}) g_{kl} = -g^{ik} (g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_l} V))$$

Multiplicando ambos os membros por g^{lj} , veremos que

$$\begin{aligned} (\partial_t g^{ik}) g_{kl} g^{lj} &= -g^{ik} g^{lj} (g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_l} V)) \\ \Rightarrow (\partial_t g^{ik}) \delta_{kj} &= -g^{ik} g^{lj} (g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_l} V)). \end{aligned}$$

Portanto, $\partial_t g^{ij} = -g^{ik} g^{lj} (g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_l} V))$. Como no segundo membro temos dois somatórios, um em k e outro em l , a parcela $g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l)$ aparecerá duas vezes, uma referente ao primeiro termo dos parenteses e outro referente ao segundo termo, esse na forma $g(\partial_l, \nabla_{\partial_k} V)$. Adicionando-os, temos

$$\partial_t g^{ij} = -2g^{ik} g^{lj} g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l)$$

O fato de g^{ij} também ser simétrica completa a demonstração de (1.7). \square

A partir de agora, o objetivo será encontrar a primeira variação da área. Para isso faz-se necessário definir o funcional área.

Considere dA_t o elemento de volume da hipersuperfície Σ_t induzida por f . O funcional área da variação f é a função $|\Sigma_\bullet| : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|\Sigma_t| = \int_{\Sigma} dA_t. \quad (1.8)$$

A proposição a seguir será importante para a demonstração da fórmula da primeira variação da área.

Proposição 1.2. *Se $A(t) = (a_{ij}(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é um caminho suave de matrizes $n \times n$, tal que $A(0) = \text{Id}$, então*

$$\left. \frac{d}{dt} \det A_t \right|_{t=0} = \text{tr} A'(0)$$

Demonstração. Ver Lema 7.1 de [5]. \square

A seguir,

Teorema 1.2 (Primeira variação da área). *Nas notações dadas anteriormente, a fórmula para a primeira variação da área de uma hipersuperfície compacta Σ é dada por*

$$\left. \frac{d}{dt} |\Sigma_t| \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} H \rho dA + \int_{\partial \Sigma} g(\nu, V) dL$$

onde ρ é a função lapse de Σ e ν é o vetor normal a ∂M que aponta para fora de M .

Demonstração. Utilizando (1.8) e a regra de Leibniz de derivação sobre o sinal de integral, temos

$$\left. \frac{d}{dt} |\Sigma_t| \right|_{t=0} = \int_M \left. \frac{d}{dt} dA_t \right|_{t=0}.$$

Se mostramos que

$$\frac{d}{dt}dA_t \Big|_{t=0} = (\operatorname{div}(V^\top) + Hv)dA,$$

o teorema seguirá imediatamente do Teorema da divergência. Para isto, fixe $p \in \Sigma$ e um referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ numa vizinhança $U \subset \Sigma$ de p , ortonormal em relação à métrica g . Diminuindo U , se necessário, podemos supor $(f_t)|_U : U \rightarrow U_t := f_t(U)$ é um mergulho para $|t| < \varepsilon$. Considere em U_t o referencial (não necessariamente ortonormal) $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$, de tal forma que $e_i(t) = df_t e_i$ para $1 \leq i \leq n$ (em particular, observe que $e_i(0) = e_i$ para $1 \leq i \leq n$). Considere

$$g_{ij}(t) = g(e_i(t), e_j(t)),$$

onde $1 \leq i, j \leq n$.

Se $\{\tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t)\}$ é um referencial em U_t , ortonormal em relação à métrica g e com mesma orientação de $\{e_1, \dots, e_n\}$, segue de fatos básicos de Álgebra Linear que existem funções $a_{ij}^t : U_t \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$e_i(t) = a_{ik}^t \tilde{e}_k(t), \tag{1.9}$$

e, além disso, $A(t) = (a_{ij}^t)$ tem determinante positivo. Portanto,

$$g_{ij}(t) = g(e_i(t), e_j(t)) = a_{ik}^t a_{jk}^t = (A(t)A^\top(t))_{ij},$$

Onde A^\top denota a matriz transposta de A . Isto significa que $(g_{ij}(t)) = A(t)A^\top(t)$, portanto,

$$\det A(t) = \sqrt{g(t)}, \tag{1.10}$$

onde $g(t) = \det(g_{ij}(t))$. Agora se dM_t é o elemento de volume de Σ_t em relação à métrica g , segue de (1.9) e (1.10) que

$$\begin{aligned} dA_t(e_1, \dots, e_n) &= (f_t^* dM_t)(e_1, \dots, e_n) \\ &= dM_t(df_t e_1, \dots, df_t e_n) \\ &= dM_t(e_1(t), \dots, e_n(t)) \\ &= \det A(t) dM_t(\tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t)) \\ &= \det A(t) = \sqrt{g(t)}. \end{aligned}$$

Onde as três primeiras igualdades segue das definições. Portanto,

$$dA_t = \sqrt{g(t)} dA.$$

Como $g_{ij}(0) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, segue que $g(0) = \det(g_{ij}(0)) = \det \text{Id} = 1$, e daí

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} dA_t \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} (\sqrt{g(t)} \right|_{t=0} dA \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(0)}} \frac{dg}{dt}(0) dA = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt}(0) dA. \end{aligned}$$

Utilizando a proposição 1.2, temos que

$$\frac{dg}{dt}(0) = \text{tr}(g'_{ij}(0)),$$

donde

$$\left. \frac{d}{dt} dM_t \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt}(0) dM = \frac{1}{2} \text{tr}(g'_{ij}(0)) dM = \frac{1}{2} g'_{kk}(0) dM. \quad (1.11)$$

Note que,

$$g'_{kk}(t) = \partial_t g(e_k(t), e_k(t)) = 2g(\nabla_V e_k(t), e_k(t)). \quad (1.12)$$

Agora, considere em $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ a métrica produto e seja $i_t : \Sigma \rightarrow \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ a inclusão canônica, isto é, $i_t(q) = (t, x)$. Denotando também por e_k o levantamento vertical de $e_k \in \mathfrak{X}(U)$ a $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, observe que $[\partial_t, e_k] = 0$. Por outro lado, como $f_t = f \circ i_t$, segue que

$$e_k(t) = (df_t)e_k = df_{(q,t)} \circ (di_t)_q e_k = df_{(q,t)} e_k.$$

Portanto, pela naturalidade dos colchetes de Lie (cf. Corolário 8.31 de [14]) temos que

$$[V, e_k(t)]_{f(q,t)} = [df_{(q,t)} \partial_t, df_{(q,t)} e_k] = df_{q,t} [\partial_t, e_k] = 0.$$

Desta forma,

$$\nabla_V e_k(t) = \nabla_{e_k(t)} V$$

assim, por (1.12) obtemos que

$$g'_{kk}(t) = 2g(\nabla_{e_k}(t) V, e_k(t)) = 2\{e_k(t)g(V, e_k(t)) - g(V, \nabla_{e_k(t)} e_k(t))\}.$$

pois $e_k(t)g(V, e_k(t)) = g(\nabla_V e_k(t), e_k(t)) + g(V, \nabla_{e_k(t)} e_k(t))$. Denotando por N o campo normal unitário a Σ , e visto que $g(N, e_k) = 0$, segue que

$$0 = e_k g(N, e_k) = g(\nabla_{e_k} N, e_k) + g(N, \nabla_{e_k} e_k).$$

Isto é, $g(N, \nabla_{e_k} e_k) = -g(\nabla_{e_k} N, e_k)$. Disto e do fato que $e_k(0) = e_k$, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}g'_{kk}(0) &= e_k g(V, e_k) - g(V, \nabla_{e_k} e_k) \\
 &= e_k g(V^\top, e_k) - g(V^\top + vN, \nabla_{e_k} e_k) \\
 &= g(\nabla_{e_k} V^\top, e_k) + g(V^\top, \nabla_{e_k} e_k) - g(V^\top, \nabla_{e_k} e_k) - \rho g(N, \nabla_{e_k} e_k) \\
 &= g(\nabla_{e_k} V^\top, e_k) + \rho g(\nabla_{e_k} N, e_k) \\
 &= \operatorname{div}(V^\top) + \rho H.
 \end{aligned}$$

Substituindo a última expressão em (1.11) completamos a demonstração. \square

1.2.2 2ª Variação da Área para Superfícies Free Boundary

O objetivo agora, é calcular a segunda variação da área para hiperfícies free boundary, conceito muito importante que definimos a seguir.

Definição 1.4. *Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ um hiperfície compacta, 2-sided, propriamente imersa. Σ é chamada free boundary quando intersecta ∂M ortogonalmente, isto é, se X é o campo normal unitário ao longo de ∂M que aponta para fora de ∂M e ν o conormal de $\partial\Sigma$ que aponta para fora de Σ então $X = \nu$ em $\partial\Sigma$. Em outras palavras, se N é um campo normal a Σ , então $g(X, N) = 0$ ao longo de $\partial\Sigma$.*

Um fato interessante é que se Σ é superfície mínima e free boundary, então pela primeira variação da área, Σ é ponto critico do funcional área. Antes de calcular a segunda variação, devemos calcular a variação da curvatura media e do campo normal. Denote por $\mathbb{I}\!\!\!I\!_{ij} = \mathbb{I}\!\!\!I(\partial_i, \partial_j)$, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.3. *A variação do campo normal N_t é dada por*

$$\nabla_{\partial_i} N_t = g^{kl} \mathbb{I}\!\!\!I_{il} \partial_k \quad (1.13)$$

$$\nabla_V N_t = \nabla_{V^\top} N_t - \nabla^{\Sigma_t} \rho_t \quad (1.14)$$

onde $\nabla^{\Sigma_t} \rho_t$ é o gradiente da função lapse ρ_t em Σ_t .

Demonstração. Como $g(N_t, N_t) = 1$, temos que $g(\nabla_{\partial_i} N_t, N_t) = 0$. Isto significa que $\nabla_{\partial_i} N_t$ é tangente a Σ_t . Desta forma podemos escrever,

$$\nabla_{\partial_i} N_t = \alpha_k \partial_k. \quad (1.15)$$

No que segue, provaremos que $\alpha_k = g^{kl} \mathbb{I}\!\!\!I_{il}$. De fato, tomando o produto interno de ∂_i

em (1.15), temos

$$g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_l) = \alpha_k g(\partial_k, \partial_l) \Rightarrow \alpha_k g_{lk} g^{kl} = g^{kl} \mathbb{I}_{il} \Rightarrow \alpha_k = g^{kl} \mathbb{I}_{il}.$$

O que demonstra (1.13). Analogamente, temos

$$\nabla_V N_t = g^{kl} g(\nabla_V N_t, \partial_l) \partial_k \quad \text{e} \quad (1.16)$$

$$\nabla_{V^\top} N_t = g^{kl} g(\nabla_{V^\top} N_t, \partial_l) \partial_k. \quad (1.17)$$

Por outro lado, como $g(N_t, \partial_l) = 0$, obtemos que

$$g(\nabla_V N_t, \partial_l) = -g(N_t, \nabla_V \partial_l) \quad \text{e} \quad (1.18)$$

$$g(\nabla_{V^\top} N_t, \partial_l) = -g(N_t, \nabla_{V^\top} \partial_l). \quad (1.19)$$

substituindo (1.18) em 1.16, temos

$$\begin{aligned} \nabla_V N_t = g^{kl} g(\nabla_V N_t, \partial_l) \partial_k &= -g^{kl} g(N_t, \nabla_V \partial_l) \partial_k \\ &= -g^{kl} g(N_t, \nabla_{\partial_l} V) \partial_k \\ &= -g^{kl} g(N_t, \nabla_{\partial_l} (V^\top + \rho_t N_t)) \partial_k \\ &= -g^{kl} g(N_t, \nabla_{\partial_l} V^\top + \nabla_{\partial_l} \rho_t N_t) \partial_k \\ &= -g^{kl} g(N_t, \nabla_{\partial_l} V^\top) \partial_k - g^{kl} g(N_t, \nabla_{\partial_l} \rho_t N_t) \partial_k. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Note que, fazendo $V^\top = \beta_i \partial_i$, temos

$$\begin{aligned} g(N_t, \nabla_{\partial_l} V^\top) &= g(N_t, \nabla_{\partial_l} \beta_i \partial_i) = g(N_t, \partial_l(\beta_i) \partial_i + \beta_i \nabla_{\partial_l} \partial_i) \\ &= g(N_t, \beta_i \nabla_{\partial_l} \partial_i) \\ &= g(N_t, \nabla_{\beta_i \partial_i} \partial_l) \\ &= g(N_t, \nabla_{V^\top} \partial_l). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Em coordenadas locais $\{\partial_i\}$, podemos descrever o gradiente da função lapse ρ_t em Σ_t por $\nabla^{\Sigma_t} \rho_t = (g^{ij} \partial_j \rho_t) \partial_i$. Desta forma,

$$\begin{aligned} g^{kl} g(N_t, \nabla_{\partial_l} \rho_t N_t) \partial_k &= g^{kl} g(N_t, \rho_t \nabla_{\partial_l} N_t + \partial_l(\rho_t) N_t) \partial_k \\ &= g^{kl} g(N_t, \partial_l(\rho_t) N_t) \partial_k \\ &= g^{kl} \partial_l(\rho_t) g(N_t, N_t) \partial_k \\ &= (g^{kl} \partial_l \rho_t) \partial_k = \nabla^{\Sigma_t} \rho_t. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Utilizando (1.22), (1.21), (1.19) e (1.17) em (1.20), concluimos que

$$\begin{aligned}
\nabla_V N_t &= -g^{kl}g(N_t, \nabla_{\partial_l} V^\top) \partial_k - g^{kl}g(N_t, \nabla_{\partial_l} \rho_t N_t) \partial_k \\
&= -g^{kl}g(N_t, \nabla_{V^\top} \partial_l) \partial_k - \nabla^{\Sigma_t} \rho_t \\
&= g^{kl}g(\nabla_{V^\top} N_t, \partial_l) \partial_k - \nabla^{\Sigma_t} \rho_t \\
&= \nabla_{V^\top} N_t - \nabla^{\Sigma_t} \rho_t.
\end{aligned}$$

□

Antes de mais nada, na equação de Codazzi (1.3), considere $Y = \partial_i$ e $U = \partial_k$ e depois faça o somatório em i e k , desta forma,

$$Ric(Y, N_t) = g^{ik}(\nabla_{\partial_i}^{\Sigma_t} \mathbb{III})(Y, \partial_k) - dH_t(Y), \quad (1.23)$$

onde $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. (1.23) é conhecida como a Equação de Codazzi contraída. A seguir a variação da curvatura média em nosso contexto.

Proposição 1.4. *A variação da curvatura média é dada por*

$$\partial_t H_t = dH_t(V^\top) - L_{\Sigma_t} \rho_t, \quad (1.24)$$

onde $L_{\Sigma_t} = \Delta_{\Sigma_t} + Ric(N_t, N_t) + |\mathbb{III}|^2$ é o operador de Jacobi.

Demonstração. Como $\nabla_V \nabla_{\partial_i} N_t = R(V, \partial_i) N_t + \nabla_{\partial_i} N_t$ e, por definição, temos que $H_t = g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j)$, utilizando as proposições 1.1 e 1.3 podemos obter que

$$\begin{aligned}
\partial_t H_t &= (\partial_t g^{ij})g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) + g^{ij}g(\nabla_V \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) + g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_V \partial_j) \\
&= -2g^{ig}g^{jl}g(\nabla_{\partial_k} V, \partial_l)g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) + g^{ij}g(R(V, \partial_i))N_t, \partial_j) \\
&\quad + g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} \nabla_V N_t, \partial_j) + g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} V) \\
&= -2g^{ig}g(\nabla_{\partial_k} V, \nabla_{\partial_i} N_t) - Ric(V, N_t) \\
&\quad + g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} \nabla_V N_t, \partial_j) + g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} V) \\
&= -g^{ig}g(\nabla_{\partial_k} (V^\top + \rho_t N_t), \nabla_{\partial_i} N_t) - Ric(V^\top, N_t) - Ric(\rho_t N_t, N_t) \\
&\quad + g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{V^{top}} N_t, \partial_j) - g^{ij}g(\nabla_{\partial_i} (\nabla^{\Sigma_t} \rho_t), \partial_j).
\end{aligned} \quad (1.25)$$

Agora, utilizando a equação de Codazzi contraída (1.23) e tomando $Z = V^\top$ temos

$$\begin{aligned}
Ric(V^\top, N_t) &= g^{ij}(\nabla_{\partial_i}^{\Sigma_t} \mathbb{III})(V^\top, \partial_j) - dH(V^\top) \\
&= g^{ij} \partial_i(\mathbb{III}(V^\top, \partial_j)) - g^{ij}(\mathbb{III}((\nabla_{\partial_i} V^\top)^\top, \partial_j)) \\
&\quad - g^{ij}(\mathbb{III}(V^\top, (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^\top)) - dH(V^\top) \\
&= g^{ij} \partial_i(g(\nabla_{V^\top} N_t, \partial_j)) - g^{ij}(g(\nabla_{(\nabla_{\partial_i} V^\top)^\top} N_t, \partial_j)) \\
&\quad - g^{ij}(g(\nabla_{V^\top} N_t, (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^\top)) - dH(V^\top) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{V^\top} N_t, \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{V^\top} N_t, \nabla_{\partial_i} \partial_j) \\
&\quad - g^{ij} g(\nabla_{V^\top} N_t, \nabla_{\partial_i} \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{(\nabla_{\partial_i} V^\top)^\top} N_t, \partial_j) - dH(V^\top) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_{V^\top} N_t, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{(\nabla_{\partial_i} V^\top)^\top} N_t, \partial_j) - dH(V^\top). \tag{1.26}
\end{aligned}$$

Substituindo (1.26) em 1.25 e cancelando os termos correspondentes, vemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t H_t &= -g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t) \rho_t - Ric(N_t, N_t) \rho_t \\
&\quad + dH(V^\top) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} (\nabla^{\Sigma_t} \rho), \partial_j),
\end{aligned}$$

Portanto, a formula (1.24) segue, pois $g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} (\nabla^{\Sigma_t} \rho), \partial_j) = \text{div}(\nabla^{\Sigma_t} \rho) \Delta_{\Sigma_t} \rho$ e

$$\begin{aligned}
g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_j} N_t) &= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, g^{kl} \mathbb{III}_{jl} \partial_k) \\
&= g^{ij} g^{kl} \mathbb{III}_{jl} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_k) = g^{ij} g^{kl} \mathbb{III}_{jl} \mathbb{III}_{ik} = |\mathbb{III}|^2.
\end{aligned}$$

□

De posse da variação da curvatura media e do campo normal, estamos aptos para calcular a segunda variação do funcional área. Para os objetivos deste trabalho, vamos focar em um versão particular para o nosso trabalho e versões das variações anteriores que serviram de base para tal.

A seguir dois resultados particulares usados nesse trabalho.

Corolário 1.2. *Se Σ é free boundary e $V^\top = 0$ em $t=0$, então*

$$\partial_t H_t|_{t=0} = -L_{\Sigma} \rho \quad \text{e} \tag{1.27}$$

$$\partial_t g(\nu_t, V)|_{t=0} = \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \rho - g(N, \nabla_N X) \rho^2. \tag{1.28}$$

Demonstração. A igualdade (1.27) segue imediatamente da proposição 1.4 junto ao fato que $V^\top = 0$ em $t = 0$. Para demonstrar (1.28), note inicialmente que

$$g(\nu_t, N_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\nabla_V \nu_t, N_t) = -g(\nu_t, \nabla_V N_t).$$

Como $\nu = X$ e $V = \rho N$ em $t = 0$, segue da proposição 1.3, que

$$\begin{aligned} \partial_t g(\nu_t, V)|_{t=0} &= (g(\nabla_V \nu_t, V) + g(\nu_t, \nabla_V V))|_{t=0} \\ &= -g(\nu, (\nabla_V N_t)|_{t=0})\rho + g(X, \nabla_{\rho N} \rho N) \\ &= g(\nu, \nabla^\Sigma \rho)\rho + g(X, \nabla_N N)\rho^2 \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \rho - g(N, \nabla_N X)\rho^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.3. *Se cada Σ_t é free boundary e tem curvatura média constante, então*

$$\partial_t H_t = -L_{\Sigma_t} \rho_t \quad \text{e} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = g(N_t, \nabla_{N_t} X)\rho_t. \quad (1.30)$$

Demonstração. A igualdade (1.29) novamente segue de imediato da proposição 1.4 junto ao fato da curvatura média de Σ_t ser constante, o que implica que, $dH(V^\top) = 0$. Para (1.30) note que como todas Σ_t são free boundary, então $g(N_t, X) = 0$, para todo t , donde

$$\begin{aligned} \partial_t g(N_t, X) &= g(\nabla_V N_t, X) + g(N_t, \nabla_V X) \\ &= g(\nabla_{V^\top} N_t - \nabla^\Sigma \rho_t, X) + g(N_t, \nabla_{V^\top + \rho_t N_t} X) \\ &= g(\nabla_{V^\top} N_t X) + g(N_t, \nabla_{V^\top} X) - g(\nabla^\Sigma \rho_t, \nu_t) + g(N_t, \nabla_{N_t} X)\rho_t \\ &= -\frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} + g(N_t, \nabla_{N_t} X)\rho_t. \end{aligned}$$

□

No que segue, usaremos os resultados anteriores para calcular a segunda variação da área ao longo de variações, para o qual $V^\top = 0$ ao longo de Σ .

Proposição 1.5 (Segunda variação da área). *Seja Σ uma hipersuperfície compacta mínima e free boundary. Para toda variação de Σ com campo variacional $V = \rho N$ em $t = 0$ ao longo de Σ , temos*

$$\frac{d^2}{dt^2} |\Sigma_t| \Big|_{t=0} = - \int_\Sigma L_\Sigma(\rho) \rho dA + \int_{\partial \Sigma} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \rho - g(N, \nabla_N X)\rho^2 \right) dL.$$

Demonstração. Lembre que a primeira variação da área nos mostra que

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t| = \int_\Sigma H_t \rho_t dA_t + \int_{\partial \Sigma} g(\nu_t, V) dL_t.$$

Como $H_0 = 0$, derivamos ambos os membros da igualdade acima e usamos a regra de Leibniz de derivação sob o sinal de integral, para obter que

$$\frac{d^2}{dt^2} |\Sigma_t| \Big|_{t=0} = \int_{\Sigma} (\partial_t H_t)|_{t=0} \rho dA + \int_{\partial\Sigma} (\partial_t g(\nu_t, V))|_{t=0} dL.$$

Portanto, o resultado segue do corolário 1.2. \square

Para finalizar esta seção falaremos do conceito de estabilidade de hiperfícies free boundary. Dada uma hiperfície mínima e free boundary Σ em (M, g) , nos consideramos a forma bilinear Q em $C^\infty(\Sigma)$ associada a segunda variação da area, que é dada por

$$Q(\phi, \psi) = - \int_{\Sigma} L_{\Sigma}(\phi) \psi dA + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu} - g(N, \nabla_N X) \phi \right) \psi dL.$$

A segunda variação da área é a forma quadrática associada a essa forma bilinear.

Definição 1.5. *Uma hiperfície mínima e free boundary Σ em (M, g) é chamada free boundary estável quando a segunda variação da area é não negativa para todas variações admissíveis. Isso é equivalente a dizer que a forma bilinear Q é não negativa.*

Uma hiperfície propriamente imersa Σ em (M, g) é chamada localmente area-minimizing quando toda hiperfície propriamente imersa proxima tem área maior ou igual a área de Σ , isto é, dada uma variação admissível f , $f_t(\Sigma)$ tem área maior que Σ , para $|t| < \varepsilon$. Em particular, hiperfícies localmente area-minimizing são free boundary estáveis.

Capítulo 2

Rigidez de Superfícies Area-Minimizing Free Boundary

Para o restante do trabalho sempre vamos considerar (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira ∂M , e Σ uma superfície compacta, 2-sided e conexa com fronteira $\partial\Sigma \subset M$ e campo normal unitário N . Os resultados desse capítulo são encontrados no artigo de L. Ambrozio [1] e inspirados nos trabalhos de [22],[20] e [4]. Na primeira seção desse capítulo fazemos uma caracterização das superfícies com as hipóteses do Teorema 0.2, no nosso caso, as superfícies tem a hipótese adicional de serem free boundary, por serem superfícies com fronteira. Na segunda seção, construímos uma família semelhante a da proposição 0.1, com as alterações necessárias para o nosso contexto. Na terceira seção, encontramos um resultado semelhante ao Teorema 0.1 e 0.3 e obtemos um teorema de rigidez local. Na última seção, generalizamos o teorema da terceira seção para um teorema de rigidez global.

2.1 Rigidez Infinitesimal

O objetivo dessa seção é chegar numa caracterização de superfícies que satisfaz algumas propriedades interessantes, mais precisamente as propriedades da proposição 2.1. Se a curvatura escalar R de (M, g) e a curvatura média $H^{\partial M}$ de ∂M são limitadas inferiormente, podemos considerar o seguinte funcional no espaço das superfícies propriamente imersas:

$$I(\Sigma) = \frac{1}{2} \inf R|\Sigma| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma|,$$

onde $|\Sigma|$ denota a área de Σ e $|\partial\Sigma|$ denota a comprimento de $\partial\Sigma$.

A próxima proposição, nos dará uma limitação superior para $I(\Sigma)$, ao assumirmos

que Σ é uma superfície mínima free boundary estável.

Proposição 2.1. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira ∂M . Assuma que R e $H^{\partial M}$ são limitadas inferiormente. Se Σ é uma superfície mínima free boundary estável, 2-sided, propriamente imersa, então*

$$I(\Sigma) \leq 2\pi\chi(\Sigma), \quad (2.1)$$

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ . Além disso, a igualdade vale se, e somente se, Σ satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) Σ é totalmente geodésica em M e $\partial\Sigma$ consiste em geodésicas de ∂M ;
- (b) A curvatura escalar R é constante ao longo de Σ e igual a $\inf R$, e a curvatura média $H^{\partial M}$ é constante ao longo de $\partial\Sigma$ e igual a $\inf H^{\partial M}$;
- (c) $\text{Ric}(N, N) = 0$ e $g(N, \nabla_N X) = 0$.

Em particular, (a), (b) e (c) implicam que Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\inf R/2$ e $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^{\partial M}$.

Demonstração. Como Σ é 2-sided, existe um campo vetorial unitário N ao longo de Σ que é normal a Σ . Seja X o campo de vetor unitário em ∂M que é normal a ∂M e aponta para fora de M . Como Σ é free boundary, o conormal unitário ν de $\partial\Sigma$ que aponta para fora de Σ coincide com X ao longo de $\partial\Sigma$.

A curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ , por definição é $k = g(T, \nabla_T \nu) = g(T, \nabla_T X)$, onde T é um campo de vetor unitário tangente a $\partial\Sigma$ e a última igualdade segue do fato de Σ ser free boundary. Por definição, como $\{T, \nu\}$ é base ortornormal sobre ∂M , temos

$$H^{\partial M} = g(T, \nabla_T X) + g(N, \nabla_N X) = k + g(N, \nabla_N X). \quad (2.2)$$

A hipótese de ser free boundary estável, nos dá pela proposição 1.5 que

$$Q(\rho, \rho) = - \int_{\Sigma} L_{\Sigma}(\rho)\rho dA + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\rho - g(N, \nabla_N X)\rho^2 \right) dL \geq 0,$$

onde Q é a forma bilinear associada a segunda variação da área e $\rho \in C^{\infty}(\Sigma)$ é qualquer. Em particular tomando ρ constante igual a 1 obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Sigma} (\text{Ric}(N, N) + |\text{III}|^2) dA + \int_{\partial\Sigma} g(N, \nabla_N X) dL \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R + H^2 + |\text{III}|^2) dA - \int_{\Sigma} K dA - \int_{\partial\Sigma} k dL + \int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} dL \\ &\geq \frac{1}{2} \inf R |\Sigma| + \inf H^{\partial M} |\partial\Sigma| - 2\pi\chi(\Sigma) \\ &= I(\Sigma) - 2\pi\chi(\Sigma), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde na primeira igualdade utilizamos a equação de Gauss (1.2) e (2.2), e na terceira linha é usado o Teorema de Gauss-Bonnet. Isso prova a desigualdade (2.1). Quando vale a igualdade em (2.1), as desigualdades em (2.3) são, em verdade, igualdades. Dessa forma $\text{III} \equiv 0$ e, portanto, Σ é totalmente geodésica, (b) vale e $Q(1,1) = 0$. Como $Q(\rho, \rho) \geq 0$, temos (por Q ser uma forma bilinear) que $Q(1, \rho) \leq Q(1,1)Q(\rho, \rho) = 0$ para toda $\rho \in C^\infty(\Sigma)$. Isso implica que $Q(1, \rho) = 0$, para toda $\rho \in C^\infty(\Sigma)$. Escolhendo apropriadamente a função ρ , concluímos que $\text{Ric}(N, N) = 0$ e $g(N, \nabla_N X) = 0$, e isso mostra (c).

Como Σ é totalmente geodésica, segue que $g(\nabla_T N, T) = \text{III}(T, T) = 0$, donde a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em ∂M é nula. Isto mostra a segunda parte de (a).

Em particular, se (a) e (c) valem, segue da equação de Gauss que $K = \frac{1}{2}R$ e por (b), temos que Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{2} \inf R$. Por outro lado, de (2.2) temos que $k = H^{\partial M}$ e novamente por (b), temos que $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^{\partial M}$ em Σ .

Reciprocamente, se vale (a), (b) e (c), pelo Teorema de Gauss-Bonnet temos

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(\Sigma) &= \int_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k dL \\ &= \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \inf R dA + \int_{\partial\Sigma} \inf H^{\partial M} dL \\ &= \frac{1}{2} \inf R |\Sigma| + \inf H^{\partial M} |\partial\Sigma| = I(\Sigma), \end{aligned}$$

e, portanto, vale a igualdade. □

É importante observar que a desigualdade (2.1) relaciona a curvatura escalar de M , a curvatura média de ∂M , e a topologia da superfície free boundary estável Σ .

Uma superfície free boundary, 2-sided, propriamente mergulhada em M será chamada *infinitesimalmente rígida* se satisfaz as propriedades (a), (b) e (c). Na próxima seção, construiremos uma folheação ao redor de uma superfície infinitesimalmente rígida em que as folhas são todas superfícies free boundary com curvatura média constante.

2.2 Construção da Folheação

Uma folheação em uma variedade Riemanniana M é uma partição (suave) de M por subvariedades imersas, chamadas folhas. É interessante ter em mente a seguinte situação modelo. Uma 3-variedade Riemanniana da forma $(\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + g_0)$, onde (Σ, g_0) é uma superfície compacta com curvatura Gaussiana constante, cuja fronteira tem curvatura geodésica constante e $dt^2 + g_0$ é a métrica produto em $\mathbb{R} \times \Sigma$. Em

que todas folhas $\{t\} \times \Sigma$ satisfaz as hipóteses da Proposição 2.1 e, desta forma, são infinitesimalmente rígidas. Essas folhas tem a propriedade adicional de serem area-minimizing.

Dado Σ uma superfície infinitesimalmente rígida propriamente mergulhada em M , existem extensões do campo vetorial N , ou seja, existem campos vetoriais Z em M tal que $Z(p) = N(p)$, $\forall p \in \Sigma$ e $Z(p) \in T_p \partial M$, $\forall p \in \partial M$. Iremos fixar $\phi = \phi(x, t)$ o fluxo de um desses campos vetoriais e α um número real entre zero e um.

Dado uma superfície infinitesimalmente rígida Σ_0 , construiremos uma folheação $\{\Sigma_t\}_{t \in I}$ ao redor de Σ_0 , na qual toda folha é uma superfície free boundary com curvatura media constante e, então, analisaremos o comportamento da área das superfícies Σ_t . Veremos que quando $\inf H^{\partial M} > 0$ e cada componente de $\partial \Sigma$ é localmente minimizante, ou quando $\inf H^{\partial M} = 0$, tem-se que $|\Sigma_0| \geq |\Sigma_t|$ para todo $t \in I$ (desde que I seja suficientemente pequeno). Como consequência, obtemos um Teorema de rigidez local para superfícies free boundary area-minimizing em 3-variedades Riemannianas com fronteira mean convex.

Proposição 2.2. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira ∂M . Assuma que R e $H^{\partial M}$ são limitadas inferiormente. Seja Σ uma superfície free boundary, 2-sided, e propriamente mergulhada em M .*

Se Σ é infinitesimalmente rígida, então existe $\varepsilon > 0$ e $w : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, o conjunto

$$\Sigma_t = \{\phi(x, w(x, t)); x \in \Sigma\}$$

é uma superfície free boundary com curvatura média constante $H(t)$. Além disso, para todo $x \in \Sigma$ e todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$w(x, 0) = x, \quad \int_{\Sigma} (w(x, t) - t) dA = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) \right|_{t=0} = 1.$$

Em particular, para ε suficientemente pequeno, $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é uma folheação de uma vizinhança de $\Sigma_0 = \Sigma$ em M .

Demonstração. Como na prova da proposição 2.1, X denotará o campo normal unitário a ∂M que, pelo fato de Σ ser free boundary coincide com o conormal ν de $\partial \Sigma$. Lembremos que dA é o elemento de área de Σ e dL o elemento de comprimento de $\partial \Sigma$.

Uma função f é α -Hölder-contínua quando existe um número real $C \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha$$

para todo x e y no domínio da f e $0 < \alpha < 1$. O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(\Omega)$ é composto de funções definidas em Ω , k vezes diferenciáveis nas quais a k -ésima derivada é α -Hölder-contínua.

Dado uma função u no espaço de Hölder $C^{2,\alpha}(\Sigma)$, com $0 < \alpha < 1$, consideramos $\Sigma_u = \{\phi(x, u(x)); x \in \Sigma\}$, a qual é uma superfície propriamente mergulhada em M , se a norma de u é suficientemente pequena. Aqui, usaremos o subscrito u para denotar quantidades em Σ_u . Por exemplo, H_u será a curvatura média de Σ_u , N_u será o campo normal unitário de Σ_u e X_u será a restrição de X a Σ_u . Em particular, $\Sigma_0 = \Sigma$, $H_0 = 0$ (pois Σ é mínima) e $g(N_0, X_0) = 0$ (pois Σ é free boundary).

Sendo $0 < \alpha < 1$, considere os espaços de Banach $E = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} u dA = 0\}$ e $F = \{u \in C^{0,\alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} u dA = 0\}$. Dados $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, podemos definir a aplicação $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (B(0, \delta) \subset E) \rightarrow F \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ dada por

$$\Phi(t, u) = \left(H_{t+u} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{t+u} dA, g(N_{t+u}, X_{t+u}) \right).$$

Afirmção 2.1. $D\Phi_{(0,0)}$ é um isomorfismo quando restrito a $0 \times E$.

De fato, para cada $v \in E$, a aplicação $f : (x, s) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \phi(x, sv(x)) \in M$ nos dá uma variação com campo variacional $\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{s=0} = vZ = vN$ em Σ . Como Σ é infinitesimalmente rígida, pelo corolário 1.2 e pela proposição 1.3 obtemos

$$\begin{aligned} D\Phi_{(0,0)(0,v)} &= \left. \frac{d}{ds} \Phi(0, sv) \right|_{s=0} = \left(-L_{\Sigma}v - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} -L_{\Sigma}v dA, g(-\nabla^{\Sigma}v, \nu) + g(N, \nabla_{\nu}X) \right) \\ &= \left(-\Delta_{\Sigma}v + \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma}v dA, -\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \\ &= \left(-\Delta_{\Sigma}v + \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} dL, -\frac{\partial v}{\partial \nu} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se igualarmos (2.4) a $(0, 0)$, resultados clássicos para as condições de contorno do tipo Neumann para o operador de Laplace, mostram que v é constante (cf., por exemplo, Teorema 3.6 de [12]), o fato de $v \in E$ completa a afirmação.

Assim podemos aplicar o Teorema da função implícita. Isto é, para um $\varepsilon > 0$ pequeno, existe uma função $u : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto u(t) \in B(0, \delta) \subset E$ tal que $u(0) = 0$ e $\Phi(t, u(t)) = \Phi(0, 0) = (0, 0)$ para todo t . Em outras palavras, as superfícies

$$\Sigma_{t+(u(t))} = \{\phi(x, t + u(t)(x)); x \in \Sigma\}$$

são superfícies free boundary (pois $g(N_{t+(u(t))}, X_{t+(u(t))}) = 0$) com curvatura média constante (pois como $\int_{\Sigma} H_{t+(u(t))} dA$ é um número, e assim, $H_{t+(u(t))}$ é constante igual a $\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{t+(u(t))} dA$).

Considere $w : (x, t) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto t + u(t)(x) \in \mathbb{R}$. Então as superfícies $\Sigma_t = \{\phi(x, w(x, t)); x \in \Sigma\}$ são free boundary com curvatura média constante e, por definição, $w(x, 0) = u(0)(x) = 0$, para todo $x \in \Sigma$. Como $w(x, t) - t = u(t)(x)$, temos que $\int_{\Sigma} (w(x, t) - t) dA = \int_{\Sigma} u(t) dA = 0$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Tomando a derivada em $t = 0$, temos

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} - 1 dA = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} dA = |\Sigma|.$$

Para concluir que $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1$, basta mostrar que $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0}$ é constante em Σ . Para isso, observe que a aplicação $G : (x, s) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \phi(x, w(x, s)) \in M$ dá uma variação em Σ com campo variacional Σ dado por $\left(\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) N$. Como $w(-, t) = t + u(t)$ para todo t , nós temos

$$(0, 0) = \Phi(t, u(t)) = \left(H_{w(-, t)} - \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} H_{w(-, t)} dA, g(N_{w(-, t)}, X_{w(-, t)}) \right). \quad (2.5)$$

Tomando a derivada de (2.5) em $t = 0$, concluimos que $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0}$ satisfaz o problema de Neumann homogêneo, donde, deve ser constante em Σ (cf., por exemplo, Teorema 3.6 de [12]).

Para finalizar, como $G_0(x) = \phi(x, 0) = 0$ e $\partial_t G(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} N_0(x) = N_0(x)$ para todo $x \in \Sigma_0$ e Σ_0 é propriamente mergulhada, diminuindo o ε , se necessário, segue que G parametriza uma vizinhança de Σ em M , o que resulta numa folheação de tal vizinhança. \square

2.3 Rigidez Local

Nessa seção analisaremos o comportamento da área das superfícies construídas na proposição 2.2.

Proposição 2.3. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira mean convex e curvatura escalar R limitada inferiormente. Seja Σ_0 uma superfície infinitesimalmente rígida free boundary, 2-sided e propriamente mergulhada em M . Assuma que uma das seguintes hipóteses ocorre:*

- (i) *Cada componente de $\partial\Sigma_0$ é localmente minimizante em ∂M ; ou*
- (ii) $\inf H^{\partial M} = 0$.

Seja $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ como na Proposição 2.2. Então $|\Sigma_0| \geq |\Sigma_t|$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (talvez diminuindo, se necessário o ε).

Demonstração. Seguindo a notação da proposição 2.2, seja $G : \Sigma_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, dada por $G(x, t) = \phi(x, w(x, t))$, a parametrização da folheação $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ao redor

da superfície infinitesimalmente rígida Σ_0 . Vamos denotar $G_t(x) = G(x, t)$ e o índice subscrito t as quantidades em $\Sigma_t = G_t(\Sigma_0)$. Como H_t é constante, vamos denotar H_t por $H(t)$, uma função que só depende do t e não mais dos pontos de Σ_t , sendo assim, $H'(t) = \partial_t H_t$.

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a função lapse em Σ_t é dada por $\rho_t = g(\partial_t G, N_t)$ e satisfaz (pelo Corolário 1.3) as equações

$$H'(t) = -\Delta_{\Sigma_t} \rho_t - (\text{Ric}(N_t, N_t) + |\text{III}|^2) \rho_t, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} = g(N_t, \nabla_{N_t} X) \rho_t. \quad (2.7)$$

Note que $\rho_0 = 1$, pois $\frac{\partial}{\partial t} G(x, t)|_{t=0} = N_0(x)$, para todo $x \in \Sigma$. Assim, podemos assumir que $\rho_t > 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e, dessa forma, podemos dividir a equação (2.6) por ρ_t , ficando com

$$H'(t) \frac{1}{\rho_t} = -(\Delta_{\Sigma_t} \rho_t) \frac{1}{\rho_t} - \text{Ric}(N, N) - |\text{III}|^2. \quad (2.8)$$

Usando a equação de Gauss (1.2), podemos escrever (2.8) como

$$H'(t) \frac{1}{\rho_t} = -(\Delta_{\Sigma_t} \rho_t) \frac{1}{\rho_t} + K_t - \frac{1}{2}(R + H(t)^2 + |\text{III}|^2). \quad (2.9)$$

Utilizando o corolário 1.1 para integrar $(\Delta_{\Sigma_t} \rho_t) \frac{1}{\rho_t}$ em Σ , e (2.7), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\Delta_{\Sigma_t} \rho_t) \frac{1}{\rho_t} dA_t &= \int_{\Sigma} \frac{|\nabla^{\Sigma_t} \rho_t|^2}{\rho_t^2} dA_t + \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} dL_t \\ &= \int_{\Sigma} \frac{|\nabla^{\Sigma_t} \rho_t|^2}{\rho_t^2} dA_t + \int_{\partial \Sigma} g(N_t, \nabla_{N_t} X) dL_t. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Integrando (2.9), e utilizando (2.10), juntamente com o fato de $H'(t)$ só depender do t , temos

$$\begin{aligned} H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} dA_t &= - \int_{\Sigma} \frac{|\nabla^{\Sigma_t} \rho_t|^2}{\rho_t^2} dA_t - \int_{\partial \Sigma} g(N_t, \nabla_{N_t} X) dL_t \\ &\quad + \int_{\Sigma} K_t dA_t - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R + H(t)^2 + |B_t|^2) dA_t. \end{aligned}$$

Observe que como Σ_t é free boundary vale $H^{\partial M} - k = g(N_t, \nabla_{N_t} X)$. Unindo isso ao

Teorema de Gauss-Bonnet, obtemos

$$\begin{aligned}
 H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} dA_t &= - \int_{\Sigma} \frac{|\nabla^{\Sigma_t} \rho_t|^2}{\rho_t^2} dA_t - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R + H(t)^2 + |B_t|^2) dA_t \\
 &\quad - \int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} dL_t + 2\pi\chi(\Sigma_0) \\
 &\leq -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} R dA_t - \int_{\partial\Sigma} H^{\partial M} dL_t + 2\pi\chi(\Sigma_0) \\
 &\leq I(\Sigma_0) - I(\Sigma_t) \\
 &= \frac{1}{2} \inf R(|\Sigma_0| - |\Sigma_t|) + \inf H^{\partial M} (|\partial\Sigma_0| - |\partial\Sigma_t|), \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade foi usado o fato de Σ_0 ser infinitesimalmente rígida, que implica $I(\Sigma_0) = 2\pi\chi(\Sigma_0)$.

Por hipótese, temos que $\inf H^{\partial M} \geq 0$. Se cada componente de $\partial\Sigma$ é minimizante de comprimento, o segundo termo do lado direito de (2.11) é menor ou igual a zero, e no caso que $\inf H^{\partial M} = 0$, o mesmo é zero. Em todo caso,

$$H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} dA_t \leq \frac{1}{2} \inf R(|\Sigma_0| - |\Sigma_t|) = -\frac{1}{2} \inf R \int_0^t \frac{d}{ds} |\Sigma_s| ds.$$

Como cada Σ_t é free boundary com curvatura média constante, a primeira variação da área nos dá que

$$\frac{d}{dt} \Sigma_t = \int_{\Sigma} \rho_t H(t) dA_t = H(t) \int_{\Sigma} \rho_t dA_t. \tag{2.12}$$

Portanto,

$$H'(t) \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} dA_t \leq -\frac{1}{2} \inf R \int_0^t H(s) \int_{\Sigma} \rho_s dA_s ds. \tag{2.13}$$

Afirmção 2.2. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$.*

Para mostrar essa afirmação, vamos dividir nos seguintes casos:

(a) $\inf R = 0$.

Segue de (2.13) que $H'(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$, isto é, H é uma função não crescente. Como $H(0) = 0$ temos que $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$.

(b) $\inf R > 0$.

Para facilitar a notação, seja $\varphi(t) = \int_{\Sigma} \frac{1}{\rho_t} dA_t$ e $\xi(t) = \int_{\Sigma} \rho_t dA_t$. A inequação (2.13) pode então ser reescrita como

$$H'(t) \leq -\frac{1}{2} \inf R \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t H(s) \xi(s) ds. \tag{2.14}$$

Por continuidade, podemos assumir que existe um $C > 0$ tal que $\frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t \xi(s) ds \leq 2C$ para todo $t \in [0, \varepsilon_1]$.

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{C(\inf R)}$ e $\varepsilon < \varepsilon_1$. Então $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$. De fato, suponha que existe $t_1 \in [0, \varepsilon]$ tal que $H(t_1) > 0$. Por continuidade, existe $t_0 \in [0, t_1]$ tal que $H(t) \geq H(t_0)$ para todo $t \in [0, t_1]$ (H atinge o mínimo em $[0, t_1]$). Note que, em particular $H(t_0) \leq H(0) = 0$. Pelo Teorema do valor médio, existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que $\frac{H(t_1) - H(t_0)}{t_1 - t_0} = H'(t_2)$. Dessa forma, a desigualdade (2.14) nos mostra que

$$\begin{aligned} \frac{H(t_1) - H(t_0)}{t_1 - t_0} = H'(t_2) &\leq \frac{1}{2} \inf R \frac{1}{\varphi(t_2)} \int_0^{t_2} (-H(s))\xi(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2} \inf R(-H(t_0)) \left(\frac{1}{\varphi(t_2)} \int_0^{t_2} \xi(s)ds \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \inf R(H(t_0))(2C) \\ &= -\inf R(H(t_0))C \end{aligned}$$

Isolando $H(t_1)$, obtemos

$$H(t_1) \leq H(t_0) - \inf R(H(t_0))C(t_1 - t_0) \leq H(t_0)(1 - (\inf R)C\varepsilon) \leq 0,$$

o que contradiz o fato de que $H(t_1) > 0$.

(c) $\inf R < 0$

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < -\frac{1}{C(\inf R)}$, onde C é a mesma constante do item (b). Então $H(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon]$. De fato, suponha que existe t_1 tal que $H(t_1) > 0$. Seja

$$\bar{t} = \{t \in [0, t_1]; H(t) \geq H(t_1)\}$$

e seja $t_0 \in [0, t_1]$ o ínfimo de \bar{t} . Note que, por continuidade, $H(t_0) \geq H(t_1)$. E $H(t_0) > H(t_1)$ não ocorre, pois por continuidade, existiria $t < t_0$ com $H(t) > H(t_1)$, contradizendo a definição de t_0 . Observe também que, por definição, $H(t) \leq H(t_1) = H(t_0)$ para todo $t \in [0, t_0]$.

Suponha que $t_0 > 0$, então pelo teorema do valor médio existe $t_2 \in (0, t_0)$ tal que

$\frac{H(t_0) - H(0)}{t_0 - 0} = H'(t_2)$. Então, a desigualdade (2.14) nos da

$$\begin{aligned} \frac{H(t_0)}{t_0} = H'(t_2) &\leq -\frac{1}{2} \inf R \frac{1}{\varphi(t_2)} \int_0^{t_2} (H(s)) \xi(s) ds \\ &\leq -\frac{1}{2} \inf R(H(t_0)) \left(\frac{1}{\varphi(t_2)} \int_0^{t_2} \xi(s) ds \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \inf R(H(t_0)) (2C) \\ &= -\inf R(H(t_0)) C \end{aligned}$$

Multiplicando por t_0 e colocando os termos no primeiro membro, obtemos

$$H(t_0) + \inf R(H(t_0)) C t_0 \leq 0.$$

O que implica que

$$H(t_0)(1 + (\inf R) C \varepsilon) \leq 0.$$

Isso contradiz o fato que $H(t_0) = H(t_1) > 0$, pois $(1 + (\inf R) C \varepsilon) > 0$.

Então, teríamos que $t_0 = 0$. Isto novamente é uma contradição, pois como Σ_0 é mínima, teríamos $0 = H(0) = H(t_1) > 0$.

Isso prova a afirmação. Assim, por (2.12), nos concluímos que $|\Sigma_0| \geq |\Sigma_t|$ para todo $t \in [0, \varepsilon)$. A prova que $|\Sigma_0| \geq |\Sigma_t|$ para todo $t \in (-\varepsilon, 0]$ é completamente analoga. \square

Resultados *splitting* são caracterizados por conseguir uma isometria de uma determinada variedade Riemanniana M ao espaço produto $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ é uma hiperfície de M . Agora estamos prontos para provar o resultado de *splitting* local (isto é, invece de $\mathbb{R} \times \Sigma$ na definição acima temos $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ isométrico a uma vizinhança de Σ).

Teorema 2.1. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira mean convex. Assuma que a curvatura escalar R é limitada por baixo.*

Seja Σ uma superfície free boundary, localmente area-minimizing, 2-sided, propriamente mergulhada e tal que $I(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma)$. Assuma que uma das hipóteses vale:

- (1) *Cada componente de $\partial\Sigma_0$ é localmente minimizante de comprimento em ∂M ; ou*
- (2) $\inf H^{\partial M} = 0$.

Então existe uma vizinhança de Σ em (M, g) que é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$, onde (Σ, g_Σ) tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{2} \inf R$ e $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^{\partial M}$ em Σ .

Demonstração. Segue de Σ ser localmente area-minimizing, que é uma superfície mínima estável. Como $I(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma)$, vale a igualdade na proposição 2.1, ou seja, Σ é infinitesimalmente rígida. Das proposições 2.2 e 2.3, nos obtemos uma folheação $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$

ao redor de $\Sigma_0 = \Sigma$ tal que $|\Sigma_t| \leq |\Sigma_0|$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como Σ é localmente area-minimizing, temos que $|\Sigma_t| = |\Sigma_0|$ e Σ_t é localmente area-minimizing, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sendo G a parametrização da folheação de M em volta de Σ_0 dada na proposição 2.2. Como a característica de Euler é um invariante topológico e $\Sigma_t = G_t(\Sigma_0)$, obtemos que $\chi(\Sigma_t) = \chi(\Sigma_0)$.

Uma vez que $H^{\partial M} = 0$ ou as componentes de $\partial\Sigma_0$ são localmente minimizante,

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(\Sigma_t) = 2\pi\chi(\Sigma_0) = I(\Sigma_0) &= \frac{1}{2} \inf R|\Sigma_0| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma_0| \\ &\leq \frac{1}{2} \inf R|\Sigma_t| + \inf H^{\partial M}|\partial\Sigma_t| = I(\Sigma_t) \leq 2\pi\chi(\Sigma_t), \end{aligned}$$

que implica que $\Sigma_t = 2\pi\chi(\Sigma_t)$, ou seja, cada Σ_t é infinitesimalmente rígida. Com isso, as equações (2.6) e (2.7) da proposição 2.3 nos dão

$$\Delta_{\Sigma_t}\rho_t = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\rho_t}{\partial\nu_t} = 0,$$

ou seja, para cada t a função lapse ρ_t satisfaz o problema de Neumann homogêneo. Portanto, ρ_t é uma função constante em Σ_t (cf., por exemplo, Teorema 3.6 de [12]).

Como temos uma folheação, o campo normal de Σ_t localmente define um campo de vetores em M . Por Σ_t ser totalmente geodésica temos $\nabla_{V^\top} = 0$. Por ρ_t ser constante, implica que $\nabla^{\Sigma_t}\rho_t = 0$, assim utilizando a proposição 1.3 concluimos que $\nabla_V N_t = 0$, ou seja, N_t é um campo paralelo. Em particular, N_t é um campo de killing, e seu fluxo é um fluxo por isometrias e, portanto, fornece a splitting local: uma vizinhança de Σ_0 é de fato isométrica ao produto $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma_0, dt^2 + g_{\Sigma_0})$. Já que Σ_0 é infinitesimalmente rígida, (Σ_0, g_{Σ_0}) tem curvatura Gaussiana constante igual a $\inf R/2$ e $\partial\Sigma_0$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^M$ em Σ_0 . \square

Como veremos na seção a seguir, usaremos esse resultado para provar o Teorema de rigidez global.

2.4 Rigidez Global

Começamos essa seção com o enunciado preciso de um resultado de W. Meeks e S.T. Yau [19] sobre a existência de discos free boundary area-minimizing, qual vamos usar para provar um resultado global. Dada uma 3-variedade M , denotamos por \mathcal{F}_M o conjunto de discos imersos em M cuja fronteira são curvas em ∂M e são homotopicamente

não-triviais em ∂M . Se \mathcal{F}_M é não vazio, definimos

$$\mathcal{A}(M, g) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} |\Sigma| \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(M, g) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} |\partial \Sigma|.$$

Teorema 2.2 (W. Meeks e S.T. Yau). *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira mean convex. Se \mathcal{F}_M é não vazio, então*

- (1) *Existe um disco mínimo imerso Σ_0 em M tal que $\partial \Sigma_0$ representa uma curva homotópica não trivial em ∂M e $|\Sigma_0| = \mathcal{A}(M, g)$.*
- (2) *Qualquer disco imerso de menor área é de fato um disco free boundary propriamente mergulhado.*

Agora nós vamos para os Teoremas principais. Nosso primeiro Teorema de rigidez global envolve uma combinação dos invariantes geométricos $\mathcal{A}(M, g)$ e $\mathcal{L}(M, g)$.

Teorema 2.3. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana com fronteira mean convex. Assuma que \mathcal{F}_M é não vazio. Então*

$$\frac{1}{2} \inf R\mathcal{A}(M, g) + \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g) \leq 2\pi. \quad (2.15)$$

Além disso, se a igualdade vale, então o recobrimento universal de (M, g) é isométrico a $(\mathbb{R} \times \Sigma_0, dt^2 + g_0)$, onde (Σ_0, g_0) é um disco com curvatura Gaussiana constante igual a $\inf R/2$ e $\partial \Sigma_0$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^{\partial M}$ em (Σ_0, g_0) .

Demonstração. Como \mathcal{F}_M é não vazio, o Teorema 2.2 diz que existe um disco mínimo free boundary propriamente mergulhado $\Sigma_0 \in \mathcal{F}_M$ tal que $|\Sigma_0| = \mathcal{A}(M, g)$, ou seja, Σ_0 é area-minimizing. Portanto, Σ_0 é 2-sided e free boundary estável, a desigualdade segue da proposição 2.1, pois

$$\frac{1}{2} \inf R\mathcal{A}(M, g) + \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g) \leq \frac{1}{2} \inf R|\Sigma_0| + \inf H^{\partial M} |\partial \Sigma_0| = I(\Sigma_0) \leq 2\pi.$$

Além disso, se a igualdade vale, então $\inf H^{\partial M}$ é nulo, ou $\partial \Sigma_0$ deve ter comprimento igual a $\mathcal{L}(M, g)$, e assim é minimizante de comprimento. Em ambos os casos, podemos aplicar o Teorema 2.1 para conseguir um local splitting de (M, g) ao redor de Σ_0 .

Seja \exp a aplicação exponencial de (M, g) . Considere S o conjunto de todos os $t > 0$ tal que a aplicação $\Psi : [-t, t] \times \Sigma_0 \rightarrow M$ dada por $\Psi(s, x) = \exp_x(sN_0(x))$ é bem definida, $\Psi([-t, t] \times \partial \Sigma_0)$ está contida em ∂M , e $\Psi : ((-t, t) \times \Sigma_0, ds^2 + g_{\Sigma_0}) \rightarrow (M, g)$ é uma isometria local.

S é não vazio por conta do Teorema 2.1.

Afirmção 2.3. $S = (0, +\infty)$.

Suponha que seja falso, e seja $\tau = \sup S$. Por continuidade $\tau \in S$. Nós definimos a aplicação $f_\tau : \Sigma \rightarrow M$ por $f_\tau(x) = \Psi(x, \tau)$ e considere $\Sigma_\tau = f_\tau(\Sigma)$. Note que, Σ_τ tem as mesmas propriedades de Σ , e além disso $|\Sigma_\tau| = |\Sigma|$. Assim, podemos aplicando o Teorema 2.1, para conseguir um $\varepsilon > 0$ tal que, $\Psi|_{[0, \tau + \varepsilon) \times \Sigma}$ é isometria local. Analogamente, existe $\delta > 0$ tal que, $\Psi|_{(-\tau - \delta, 0] \times \Sigma}$ é isometria local. Contradizendo o fato de τ ser supremo. Isso finaliza a afirmação.

Portanto, temos uma isometria local bem definida

$$\Psi : (t, x) \in (\mathbb{R} \times \Sigma_0, dt^2 + g_{\Sigma_0}) \mapsto \exp_x(tN_0(x)) \in (M, g),$$

tal que $\Psi(\mathbb{R} \times \partial\Sigma_0)$ esta contida em ∂M . Tal Ψ é uma aplicação de recobrimento (cf. Lema 1.32 de [6]). Isso termina a prova do Teorema. \square

Quando $\inf R$ é negativo, provaremos um Teorema de rigidez para soluções do problema de Plateau (isto é, dado uma curva, encontrar a superfície que minimiza área e tem essa curva como fronteira), que será uma consequência imediata do Teorema 2.3.

Teorema 2.4. *Seja (M, g) uma 3-variedade Riemanniana compacta tal que $H^{\partial M} > 0$ e $\inf R = -2$. Assuma que \mathcal{F}_M é não vazio.*

Se $\hat{\Sigma}$ é uma solução do problema de Plateau para uma curva homotópica mergulhada não-trivial em ∂M , a qual limita um disco em M e tem comprimento $\mathcal{L}(M, g)$, então

$$|\hat{\Sigma}| \geq \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g) - 2\pi. \quad (2.16)$$

Além disso, se a igualdade vale em (2.16) para algum $\hat{\Sigma}$, então o recobrimento universal de (M, g) é isométrico a $(\mathbb{R} \times \hat{\Sigma}, dt^2 + g_0)$, onde $(\hat{\Sigma}, g_0)$ é um disco com curvatura Gaussiana constante igual a -1 e $\partial\hat{\Sigma}$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf H^{\partial M}$ em $\hat{\Sigma}$.

Demonstração. Considere $\hat{\Sigma}$ como no Teorema. $\hat{\Sigma}$ tem área pelo menos $\mathcal{A}(M, g)$ e $\partial\hat{\Sigma}$ tem comprimento igual a $\mathcal{L}(M, g)$. Quando $\inf R$ é negativo, temos que

$$\frac{1}{2} \inf R |\hat{\Sigma}| + \inf H^{\partial M} |\partial\hat{\Sigma}| \leq \frac{1}{2} \inf R \mathcal{A}(M, g) + \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g).$$

Aplicando o Teorema 2.3, juntamente com a hipótese de $\inf R = -2$, obtemos que

$$-|\hat{\Sigma}| + \inf H^{\partial M} \mathcal{L}(M, g) \leq 2\pi,$$

o que prova (2.16), a segunda parte é imediata do Teorema 2.3. \square

Capítulo 3

Teorema de Rigidez para Superfícies Mínimas Free Boundary em B^3

Neste capítulo, veremos que, entre as superfícies mínimas free boundary na bola unitária 3-dimensional centrada na origem, o disco equatorial plano e o catenóide crítico são caracterizados por uma condição pinçante no comprimento da segunda forma fundamental. Mais precisamente, veremos o seguinte Teorema.

Teorema 3.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima free boundary compacta na bola unitária B^3 . Assuma que para todo ponto x em Σ ,*

$$|\mathbb{I}\mathbb{I}|^2(x)\langle x, N(x)\rangle^2 \leq 2. \quad (3.1)$$

Então

- 1) $|\mathbb{I}\mathbb{I}|^2\langle x, N\rangle^2 \equiv 0$ e Σ^2 é um disco equatorial plano.
- 2) ou $|\mathbb{I}\mathbb{I}|^2(p)\langle p, N(p)\rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ^2 é um catenóide crítico.

3.1 O Disco Equatorial Plano e o Catenóide Crítico

Nesta seção definimos o disco equatorial plano e o catenóide crítico, mostrando alguns resultados sobre os mesmos.

Seja B^3 a bola unitária em \mathbb{R}^3 , centrada na origem. Os discos equatoriais planos são definidos pela interseção da bola unitária B^3 com um plano que contém a origem.

Os discos equatoriais planos são as únicas superfícies mínimas free boundary totalmente geodésica em B^3 . Nitsche [21] mostrou que eles são as únicas superfícies mínimas free boundary imersas em B^3 que são homeomorfas a um disco.

Teorema 3.2 (Nitsche). *Se Σ é uma superfície mínima free boundary homeomorfa a um disco, então Σ é o disco equatorial plano.*

Os catenóides críticos, por outro lado, são as únicas superfícies não planas que são invariantes por rotação ao redor de um eixo dado. Eles podem ser definidas analiticamente pela imagem da seguinte aplicação

$$X : (t, \theta) \in [-t_0, t_0] \times S^1 \mapsto a_0 \cosh(t) \cos(\theta)e_1 + a_0 \cosh(t) \sin(\theta)e_2 + a_0 t e_3 \in \mathbb{R}^3$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é alguma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . A constante t_0 é a única solução positiva da equação $t \sinh(t) = \cosh(t)$, enquanto $a_0 = (a_0 t_0 \cosh(t_0))^{-1}$. Essas constantes são escolhidas de tal maneira que a imagem esteja contida em B^3 , e o catenóide encontre ∂B ortogonalmente. Além disso, o eixo de simetria é a linha gerada pelo vetor e_3 .

Foi conjecturado que o catenóide crítico é o único anel mínimo free boundary mergulhado em B^3 (veja, por exemplo, conjectura 1.1 de [11]). McGrath [17] mostrou que esta conjectura é verdadeira com a hipótese adicional da superfície ser simétrica com relação a três planos mutuamente ortogonais.

Em relação ao nosso resultado principal, observe que, na parametrização X , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= a_0 \sinh(t) \cos(\theta)e_1 + a_0 \sinh(t) \sin(\theta)e_2 + a_0 e_3 \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} &= -a_0 \cosh(t) \sin(\theta)e_1 + a_0 \cosh(t) \cos(\theta)e_2. \end{aligned}$$

Assim, temos que o campo normal unitário N é dado por

$$N(t, \theta) = \frac{-\cos(\theta)}{\cosh(t)}e_1 - \frac{\sin(\theta)}{\cosh(t)}e_2 + \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}e_3.$$

Portanto, a norma da segunda forma fundamental e a função suporte são dadas por

$$|\text{III}|^2 = \frac{2}{a_0^2 \cosh^2(t)} \quad \text{e} \quad \langle x, N \rangle^2 = a_2 \left(1 - \frac{t \sinh(t)}{\cosh(t)} \right)$$

Em particular, visto que $|t| \leq t_0$,

$$|\text{III}|^2 \langle x, N \rangle^2 = \frac{2}{\cosh^2(t)} (\cosh(t) - t \sinh(t))^2 \leq 2.$$

Note que o valor máximo 2 é atingido em $t = 0$, isto é, no círculo definido pela interseção do catenóide crítico dado e o plano que é ortogonal ao eixo de simetria passando pela origem.

3.2 Prova do Teorema

Nessa seção, vamos explicar a prova do Teorema 3.1. A principal observação é relacionar a condição pinçante (3.1) com uma condição da forma Hessiana da função distância de pontos de Σ para a origem.

Lema 3.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima free boundary em B^3 . Seja f uma função definida por*

$$f(x) = \frac{|x|^2}{2}, \quad x \in \Sigma.$$

Então,

- 1) $\nabla^\Sigma f(x) = x$ para todo $x \in \partial\Sigma$.
- 2) Para cada $x \in \Sigma$, os autovalores de $\text{Hess}_\Sigma f(x)$ são dados por

$$1 - \frac{|\text{III}|}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle \quad \text{e} \quad 1 + \frac{|\text{III}|}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle.$$

Demonstração. Para provar 1), note inicialmente que $\nabla^\Sigma f(x) = x^\top$ para todo $x \in \Sigma$, onde $(\cdot)^\top$ representa a projeção ortogonal de x em $T_x\Sigma$. De fato, por definição, temos $\langle \nabla^\Sigma f(x), X \rangle = X(f(x)) = \langle x, X \rangle = \langle x^\top, X \rangle$, para todo $X \in T_x\Sigma$. Como Σ intersecta ∂B ortogonalmente, temos que $x \in T_x\Sigma$ para todo $x \in \partial\Sigma$ e o item segue.

Note que, se D é a conexão de Levi-Civita de Σ , $(\nabla_X Y)^\top = D_X Y$ e

$$\nabla_X Y - D_X Y = \langle \nabla_X Y, N \rangle N = -\langle Y, \nabla_X N \rangle N = -\langle S_N(X), Y \rangle N.$$

Assim, para todo $X, Y \in T_x\Sigma$, temos

$$\begin{aligned} \text{Hess}_\Sigma f(x)(X, Y) &= X(Y(f(x))) - (D_X Y)(f(x)) \\ &= X \langle x, Y \rangle - \langle x, D_X Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + \langle x, \nabla_X Y \rangle - \langle x, D_X Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \langle x, \langle S_N(X), Y \rangle N \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \langle x, N \rangle \langle S_N(X), Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \langle \langle x, N \rangle S_N(X), Y \rangle \\ &= \langle X - \langle x, N \rangle S_N(X), Y \rangle \end{aligned}$$

Portanto, se k_1 e k_2 são as curvaturas principais de Σ em x , temos que os autovalores de $\text{Hess}_\Sigma f(x)$ são dados por

$$1 - k_1 \langle x, N \rangle \quad \text{e} \quad 1 - k_2 \langle x, N \rangle.$$

3. Teorema de Rigidez para Superfícies Mínimas Free Boundary em B^3

Além disso, $|\mathbb{III}|^2 = k_1^2 + k_2^2$, e como Σ é mínima $k_1 + k_2 = 0$, assim $|\mathbb{III}|^2 = 2k_1^2 = 2k_2^2$. Assumindo que $k_1 \leq k_2$, temos $k_1 = -|\mathbb{III}|/\sqrt{2}$ e $k_2 = |\mathbb{III}|/\sqrt{2}$, finalizando a prova de 2). \square

Agora, introduziremos alguns conceitos para melhorar o entendimento da próxima proposição. Um subconjunto A de uma variedade Riemanniana (M, g) é *totalmente convexo*, quando qualquer geodésica de M que liga pontos de A , na verdade está toda contida em A (ver, por exemplo, [7]).

Dados curvas $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ em uma variedade Riemanniana M . Dizemos que α é *homotópica* a β se existe uma função suave $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$, tal que

$$H(t, 0) = \alpha(t) \quad e \quad H(t, 1) = \beta(t).$$

E escrevemos $\alpha \simeq \beta$. \simeq é uma relação de equivalência (ver, por exemplo, [16]). $[\alpha]$ denota a classe de homotopia de α . Isto é,

$$[\alpha] = \{\beta : [0, 1] \rightarrow M; \beta \simeq \alpha\}.$$

Uma curva fechada em M é uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$. O ponto $\alpha(0) = \alpha(1)$ é chamado ponto base de α . Dizemos que α é baseada em $\alpha(0) = \alpha(1)$. Fixado $x \in M$, o *grupo fundamental* de M baseado em x é o conjunto

$$\pi_1(M, x) = \{[\alpha]; \alpha \text{ é curva fechada baseada em } x\}.$$

Dizemos ainda que uma curva α baseada em x é trivial, se é a curva constante igual a x .

Proposição 3.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima free boundary compacta em B^3 . Defina*

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma; |p| = \min_{x \in \Sigma} |x|\}.$$

Se $|\mathbb{III}|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$ em Σ , então

- 1) \mathcal{C} contém um único ponto $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, neste caso Σ é o disco equatorial plano;
- 2) ou \mathcal{C} é uma geodésica fechada simples em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ e Σ é homeomorfa a um anel.

Demonstração. Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida como no Lema 3.1.

Afirmção 3.1. \mathcal{C} é um subconjunto totalmente convexo de Σ .

De fato, dado $p, q \in \mathcal{C}$, seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Pelo item 2) do Lema 3.1, a condição geométrica $|\mathbb{III}|^2 \langle x, N(x) \rangle^2 \leq 2$ em Σ implica que os autovalores de $\text{Hess}_\Sigma f(x)$ são não negativos, e assim $\text{Hess}_\Sigma f \geq 0$.

Consequentemente, $(f \circ \gamma)''(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, isto é, $f \circ \gamma$ é convexa em $[0, 1]$. Por definição de \mathcal{C} , p e q são mínimo da f , assim, $f \circ \gamma$ atinge o mínimo em $t = 0$ e $t = 1$, daí concluímos que $(f \circ \gamma)(t) \equiv \min_{\Sigma} f$. Portanto, $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$, o que conclui a afirmação.

Note que, dado X um campo vetorial tangente em ∂B , $\nabla_X x = X$, onde x é o vetor posição ao longo de ∂B . Assim, como o conormal ν coincide com o vetor x (por Σ ser free boundary), temos que a curvatura geodésica k de $\partial\Sigma$ em Σ é indenticamente 1. De fato, $k = \langle \nabla_T \nu, T \rangle = \langle \nabla_T x, T \rangle = \langle T, T \rangle = 1$. Em particular, $\partial\Sigma$ é estritamente convexa em Σ . Isso implica que para todo $p, q \in \Sigma$ existe uma geodésica minimizante em Σ unindo p e q . Portanto, o conjunto totalmente convexo \mathcal{C} é conexo. Além disso, \mathcal{C} está contido no interior de Σ , pois por definição o conjunto \mathcal{C} é os pontos de mínimo da f , e o gradiente da f é diferente de 0 em $\partial\Sigma$ pelo item 1) do lema 3.1.

Suponha que \mathcal{C} contém um único ponto $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Dado $[\alpha] \in \pi_1(\Sigma, p)$, assumamos que $[\alpha]$ é uma classe de homotopia não trivial. Como $\partial\Sigma$ é estritamente convexa, podemos encontrar uma geodésica fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, tal que $\gamma \in [\alpha]$. Como \mathcal{C} é totalmente convexo, $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Mas $\mathcal{C} = \{p\}$ e $[\alpha]$ é não trivial, o que é uma contradição. Portanto, Σ é homeomorfo a um disco. Pelo Teorema 3.2, Σ é um disco equatorial plano.

Finalmente, suponha que \mathcal{C} não consiste de um único ponto. Sejam $p \in \mathcal{C}$ e $[\alpha]$ uma classe de homotopia não trivial em $\pi_1(\Sigma, p)$. Analogamente, podemos encontrar uma geodésica fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, tal que $\gamma \in [\alpha]$.

Afirmação 3.2. $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, $\gamma([0, 1])$ é uma curva simples e $\mathcal{C} = \gamma([0, 1])$.

De fato, se $\gamma'(0) \neq \gamma'(1)$, então podemos encontrar uma geodésica minimizante para pontos de γ próximos de p , e por \mathcal{C} ser totalmente convexo, essa imagem está toda contida em \mathcal{C} , assim, conseguimos um aberto U de Σ todo contido em \mathcal{C} , esse aberto também faz parte da esfera de centro 0 e raio $|p|$, por definição de \mathcal{C} , isso é uma contradição, pois Σ é mínima, e U não é, por ser parte de uma esfera. Argumentos análogos concluem a afirmação.

Como qualquer geodésica fechada baseada em p deve estar contida em \mathcal{C} , concluímos que $\pi_1(\Sigma, p) = \mathbb{Z}$, isto é, Σ é homeomorfa a um anel. □

O corolário a seguir é consequência imediata da proposição 3.1.

Corolário 3.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima free boundary compacta em B^3 . Se $|\text{III}|^2 \langle x, N \rangle^2 < 2$ em Σ , então Σ é o disco equatorial plano.*

Demonstração. Como $|\text{III}|^2 \langle x, N \rangle^2 < 2$, a função f definida no Lema 3.1 é estritamente convexa (item 2 do mesmo lema), isto é, $\text{Hess}_{\Sigma} f > 0$ em Σ . E pelo item 1), f atinge

3. Teorema de Rigidez para Superfícies Mínimas Free Boundary em B^3

o valor mínimo no interior de Σ (pois na fronteira o gradiente não é nulo). Pela convexidade estrita da f , o conjunto \mathcal{C} definido na proposição 3.1 é somente um ponto, caso contrário, a geodésica ligando dois pontos de \mathcal{C} estaria em \mathcal{C} e teríamos uma contradição com a convexidade estrita. Portanto, pela proposição 3.1, Σ é o disco equatorial plano. \square

Para finalizar a prova do Teorema 3.1, resta somente analisar a situação em que a função $|\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}|^2\langle x, N \rangle^2$ atinge o valor máximo 2 em algum ponto de Σ .

Proposição 3.2.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima free boundary compacta em B^3 . Se $|\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}|^2\langle x, N \rangle^2 \leq 2$ em Σ e $|\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}|^2\langle p, N(p) \rangle^2 = 2$, então Σ é o catenóide crítico.*

Demonstração. Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathcal{C} definidos como no lema 3.1 e proposição 3.1, respectivamente. Como $|\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}|^2\langle p, N(p) \rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$, a superfície Σ não pode ser homeomorfa a um disco, pois nesse caso deveria ser o disco equatorial plano como consequência do Teorema 3.2 e assim totalmente geodésico. Portanto, pela proposição 3.1, Σ é homeomorfa a um anel e \mathcal{C} é uma geodésica simples fechada, seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \Sigma$, a parametrização por comprimento de arco de \mathcal{C} . Em particular $\inf_{\Sigma} f > 0$ (caso contrário, \mathcal{C} seria somente a origem, e nesse caso Σ seria o disco equatorial plano, o que é uma contradição).

Sejam $R > 0$ tal que $R^2/2 = \inf_{\Sigma} f$ e $S_R \subset \mathbb{R}^3$ a esfera de raio R centrada na origem.

Afirmção 3.3. *γ é um grande círculo de S_R*

De fato, por definição de R , temos que $\Sigma \subset \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \geq R\}$ e $\Sigma \cap S_R = \gamma([0, l])$. Assim, temos que $T_{\gamma(s)}\Sigma = T_{\gamma(s)}S_R$ para todo $s \in [0, l]$. Como γ é uma geodésica de Σ , também é uma geodésica de S_R , isto é, um grande círculo de S_R .

Denotando por e_3 o vetor unitário em \mathbb{R}^3 que é ortogonal ao plano que contém o grande círculo γ , então $\{\gamma'(s), e_3\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(s)}\Sigma$ para todo $s \in [0, l]$.

Seja $u(x) = \langle x \wedge N(x), e_3 \rangle$, $x \in \Sigma$, onde \wedge denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 .

Afirmção 3.4. *$u(x)$ satisfaz:*

$$\Delta_{\Sigma}u + |\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}|^2u = 0 \text{ em } \Sigma, \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = u \text{ em } \partial\Sigma.$$

Além disso, se u é identicamente nula, então Σ é uma superfície de revolução em volta do eixo e_3 .

Dado $x \in \Sigma$, seja $\{e_1, e_2\}$ direções principais de $T_x\Sigma$, ou seja, $\nabla_{e_1}N = k_1e_1$ e $\nabla_{e_2}N = k_2e_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais de Σ em p . Extenda $\{e_1, e_2\}$

3. Teorema de Rigidez para Superfícies Mínicas Free Boundary em B^3

para um referencial geodésico $\{E_1, E_2\}$ em p . Assim, o Laplaciano de u é dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(u)). \quad (3.2)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} E_i(u) &= E_i(\langle x \wedge N(x), e_3 \rangle) \\ &= \langle E_i \wedge N(x) + x \wedge \nabla_{E_i} N(x), e_3 \rangle \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} E_i(E_i(u)) &= E_i(\langle E_i \wedge N(x) + x \wedge \nabla_{E_i} N(x), e_3 \rangle) \\ &= \langle \nabla_{E_i} E_i \wedge N(x) + E_i \wedge \nabla_{E_i} N(x) + E_i \wedge \nabla_{E_i} N(x) + x \wedge \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i} E_i \wedge N(x) + 2k_i E_i \wedge E_i + x \wedge \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle x \wedge \nabla_{E_i} \nabla_{E_1} N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle x \wedge e_3, \nabla_{E_i} \nabla_{E_1} N(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

Fazendo

$$x \wedge e_3 = \alpha_j E_j + \bar{u} N, \quad (3.4)$$

onde $\bar{u} = \langle x \wedge e_3, N \rangle = \langle x \wedge N, e_3 \rangle = u$. Substituindo (3.4) em (3.3) temos que

$$\begin{aligned} E_i(E_i(u)) &= \langle x \wedge e_3, \nabla_{E_i} \nabla_{E_1} N(x) \rangle \\ &= \langle \alpha_j E_j + u N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_1} N(x) \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, substituindo (3.5) em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta u &= \langle \alpha_j E_j + u N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x) \rangle \\ &= \alpha_j \langle E_j, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x) \rangle + u \langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x) \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mas $\langle E_j, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x) \rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_j, \nabla_{E_i} N(x) \rangle = \langle \nabla_{E_i} E_j, k_i E_i \rangle = 0$ e

$$\langle N, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} N(x) \rangle = -\langle \nabla_{E_i} N, \nabla_{E_i} N(x) \rangle = k_i k_i = |\mathbb{III}|^2.$$

Daí, obtemos $\Delta_\Sigma u + |\mathbb{III}|^2 u = 0$. E como a superfície Σ é free boundary, temos que o vetor posição x coincide com o vetor conormal ν em $\partial\Sigma$, e além disso, ν é direção

3. Teorema de Rigidez para Superfícies Mínimas Free Boundary em B^3

principal de Σ , assim $\nabla_\nu = \lambda\nu$, daí como $x \times \nu = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\nu(u) &= \nu \langle x \times N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle \nabla_\nu x \times N(x), e_3 \rangle + \langle x \times \nabla_\nu N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle \nu \times N(x), e_3 \rangle + \langle x \times \lambda\nu, e_3 \rangle \\ &= \langle x \times N(x), e_3 \rangle = u.\end{aligned}$$

Assim, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = u$ em $\partial\Sigma$.

Além disso, se u é identicamente nula, seja π o plano perpendicular ao eixo e_3 . Assim, $x \wedge N(x) \in \pi$ para todo $x \in \Sigma$. A interseção do plano afim $x + \pi$ com Σ é então um círculo e Σ é uma superfície de revolução em volta de e_3 .

Claramente, $\gamma([0, l])$ está contido em $u^{-1}(0)$, pois $x = |x|N(x)$, para todo x em $\gamma([0, l])$. Isso implica que $du(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$ para todo $s \in [0, l]$. Assim,

$$\begin{aligned}0 &= \langle \gamma'(s) \wedge N(x), e_3 \rangle + \langle x \wedge \nabla_{\gamma'(s)} N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle \gamma'(s) \wedge N(x), e_3 \rangle + \langle N(x) \wedge |x| \nabla_{\gamma'(s)} N(x), e_3 \rangle \\ &= \langle (\gamma'(s) + |x| \nabla_{\gamma'(s)} N(x)) \wedge N(x), e_3 \rangle.\end{aligned}$$

Isso implica que $(\gamma'(s) + |x| \nabla_{\gamma'(s)} N(x)) = 0$, de fato $\gamma'(s) + |x| \nabla_{\gamma'(s)} N(x)$ é combinação linear de $N(x)$ e e_3 , mas de $\langle N(x), N(x) \rangle = 1$ e de $\langle N(x), e_3 \rangle = 0$ temos que $\langle \nabla_{\gamma'(s)} N(x), N(x) \rangle = 0$ e $\langle \nabla_{\gamma'(s)} N(x), e_3 \rangle = 0$, assim $\gamma'(s)$ é direção principal de $T_x \Sigma$ em $\gamma(s)$, a direção ortogonal $e_3 \in T_x \Sigma$ também é. Portanto, $dN_{\gamma(s)} e_3$ é paralelo a e_3 e

$$du(\gamma(s))e_3 = \langle e_3 \wedge N(\gamma(s)), e_3 \rangle + \langle \gamma(s) \wedge dN_{\gamma(s)} e_3, e_3 \rangle = 0.$$

Assim, todo ponto do círculo \mathcal{C} está contido em $u^{-1}(0)$ e é ponto crítico de u . Mas isso implica que u é identicamente nula em Σ . Caso contrário, o conjunto nodal $u^{-1}(0)$ deveria ter apenas pontos críticos isolados (ver [8], Teorema 2.5). Isso é uma contradição, pois \mathcal{C} é uma curva.

Portanto, Σ é uma anel mínima free boundary de revolução ao redor do eixo e_3 em B^3 . Em outras palavras, Σ é um catenóide crítico. \square

Referências Bibliográficas

- [1] AMBROZIO, L. C., *Rigidity of area-minimizing free boundary minimal surfaces in mean convex three-manifolds*, J. Geom. Anal. **25** (2015), 1001-1007.
- [2] AMBROZIO, L. C., *Constant mean curvature foliations and scalar curvature rigidity of three-manifolds*, Teses de Matemática do IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [3] AMBROZIO, L. C. & NUNES, I., *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*, arXiv:1608.05689 [math.DG].
- [4] BRAY, H., BRENDLE, S. & NEVES, A., *Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds*, Comm. Anal. Geom. **18** (2010), no. 4, 821-830.
- [5] CAMINHA, A., *Notas de Geometria Diferencial*, Forteleza, 2010.
- [6] CHEEGER, J. & EBIN, D. G., *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Company, 1975.
- [7] CHEEGER, J. & GROMOLL, D., *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Ann. of Math. Second Series **96** (1972), No 3, pg. 413-443.
- [8] CHENG, S. Y., *Eigenfunctions and Nodal Sets*, Comment. Math. Helvetici . **51** (1975), pg. 43-55.
- [9] CHERN, S. S., DO CARMO, M. & KOBAYASHI, S., *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968), Springer, New York, 1970, pg. 59-75.
- [10] DO CARMO, M. P., *Geometria Riemanniana*, 3ª Ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [11] FRASER, A. & LI, M., *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*, J. Differential Geom. **92** (2014), no. 2, pg. 183-200.

- [12] GILBARD, D. & TRUDING, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1998.
- [13] GOMES, J. N. V. & PEREIRA, A. L., *Notas de aula da disciplina MAT6651-Operadores diferenciais em variedades Riemannianas*, IME-USP, São Paulo, 2015.
- [14] LEE, J. M., *Introduction to smooth manifolds*, Springer Verlag, New York, 2012.
- [15] LEE, J. M., *Riemannian Manifolds*, Springer Verlag, New York, 1997.
- [16] LIMA, E. L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.
- [17] MACGRATH, P., *A characterization of the critical catenoid*, Indiana University Mathematics Journal **67**, Issue 2 (2018), pg. 889-897.
- [18] MEEKS III, W. H. & PÉREZ, J., *The classical theory of minimal surfaces*, American Mathematical Society **48** (2011), No. 3, pg. 325-407.
- [19] MEEKS, W. & YAU, S. T., *Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory*, Annals of Mathematics **112** (1980), No. 3, pg. 441-484.
- [20] MICALLEF, M. & MORARU, V., *Splitting of 3-Manifolds and rigidity of area-minimizing surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 2865-2872.
- [21] NITSCHKE, J. C. C., *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), pg. 1-19.
- [22] NUNES, I., *Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds*, J. Geom. Anal. **23** (2013), 1290-1302.
- [23] PETERSEN, P., *Riemannian Geometry*, 2ª Ed., Springer-Verlag, New York, 2006.
- [24] ROS, A. & VERGASTA, E., *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 1, pg. 19-33.
- [25] YOUNG, T., *An essay on the cohesion of fluids*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. **95** (1805), pg. 65-87.