



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Informática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

## ESTUDO DA MINIMIZAÇÃO DA MASSA DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

José Aluisio Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: José Miguel Aroztegui Massera  
Thiago José Machado

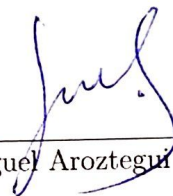
João Pessoa  
Julho de 2018

# ESTUDO DA MINIMIZAÇÃO DA MASSA DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

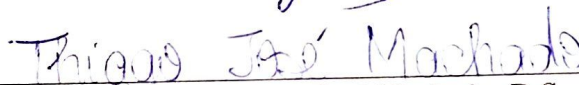
José Aluisio Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

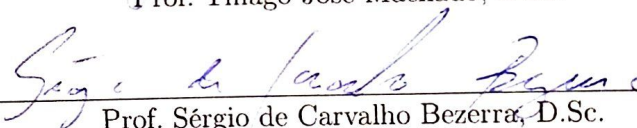
Examinada por:



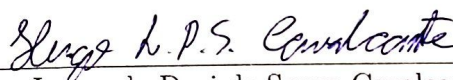
Prof. José Miguel Aroztegui Massera, D.Sc.



Prof. Thiago José Machado, D.Sc.



Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra, D.Sc.



Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL  
JULHO DE 2018

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S586e Silva, José Aluisio.

Estudo da minimização da massa de treliças tridimensionais / José Aluisio Silva. - João Pessoa, 2018.

70 f. : il.

Orientação: José Miguel Aroztegui Massera.

Coorientação: Thiago José Machado.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI/PPGMMC.

1. Otimização estrutural. 2. Minimização da massa. 3. Treliças tridimensionais. I. Massera, José Miguel Aroztegui. II. Machado, Thiago José. III. Título.

UFPB/BC

*As mulheres da minha vida:  
Maria e Concebida (mães),  
Lidianny (namorada),  
Mercedes (irmã) e Graça (tia).*

# Agradecimentos

A Deus, por todas as minhas conquistas e por me dar força e sabedoria na busca dos meus objetivos;

As minhas mães, Maria Mercedes e Maria Concebida pelo amor, carinho, confiança, paciência e dedicação incondicional durante minha vida acadêmica ;

A minha namorada Lidianny Moura pelo amor, carinho, pela confiança, por estar ao meu lado todos os dias desta conquista e compartilhado todos os sentimentos desta trajetória;

Aos meus sobrinhos Matheus e Mathias, pela sublime inocência de uma criança;

A minha irmã Mercedes e seu esposo Francisco, pelo apoio e confiança, demonstrado nesta trajetória;

Ao meu orientador José Miguel Aroztegui pela paciência durante este período e principalmente, pelo compartilhamento de conhecimento na orientação deste trabalho;

Aos meus familiares, que sempre estiveram dispostos a contribuir para a realização desta etapa, em especial aos meus tios Graça e Pedro, pelo incentivo e confiança;

Aos meus amigos, pelo companheirismo, em especial a Damião da Silva, Ananias Félix, Lígia Moura e Vanlex Gaudino pelo incentivo para fazer este curso;

Ao amigo Jairo pelos conselhos de um pai e pelo apoio, o qual foi de suma importância para concluir este curso;

Aos meus colegas de sala, por ter vivido comigo cada momento deste passo da minha trajetória, em especial Iago Ferreira, que como bons irmãos compartilhou os momentos de angústia, tristezas, felicidades e glória;

Aos amigos de república “ Vila do Chaves” Evilásio, Marlon e Wilson pelo apoio no final desta etapa;

Aos professores Thiago, Hugo e Sérgio pela disposição em contribuir com a realização deste trabalho e pela partilha de conhecimento.

Aos professores do PPGMMC pela constante partilha de conhecimento, em especial aos professores Sérgio e Miguel pela confiança e pelos conselhos para concluir este curso;

A todos o meu muito obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## ESTUDO DA MINIMIZAÇÃO DA MASSA DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

José Aluisio Silva

Julho/2018

Orientadores: José Miguel Aroztegui Massera

Thiago José Machado

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Treliças são estruturas formadas por barras conectadas nas extremidades. A minimização das massas dessas treliças é geralmente empregada em projetos de engenharia onde se busca por estruturas leves e resistentes. Neste trabalho estuda-se o problema de minimização da massa de treliças tridimensionais, com restrições de tensão. Para definir este problema, apresenta-se os modelos matemáticos de otimização e de estruturas treliçadas. É descrito o modelo de elementos finitos para treliças e o modelo programação não linear para o problema de otimização. Para resolver o problema de otimização proposto emprega-se o *Feasible Arc Interior Point Algorithm* (FAIPA). São apresentados resultados numéricos obtidos com o FAIPA para diferentes tipos de estruturas tridimensionais. As estruturas ótimas calculadas com esta técnica mostram a utilidade do problema resolvido neste trabalho: as estruturas ótimas empregam menos material (são mais baratas) e são viáveis, pois verificam as restrições de tensão de cada barra.

Palavras-chave: Otimização estrutural. Minimização da massa. Treliças tridimensionais.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## ESTUDO DA MINIMIZAÇÃO DA MASSA DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

José Aluisio Silva

Julho/2018

Orientadores: José Miguel Aroztegui Massera

Thiago José Machado

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Trusses are structures formed by bar connected at the ends. The minimization of the total mass of a truss is generally employed in engineering projects where light and resistant structures are sought. In this work the problem of minimization of the mass of tridimensional trusses with stress constraints is considered. To define this problem, we introduce the mathematical model of optimization and truss structures. We describe the finite element model for trusses and the nonlinear programming model for the optimization problem. To solve the proposed optimization problem, the Feasible Arc Interior Point Algorithm (FAIPA) is used. Numerical results obtained with FAIPA are presented for different types of three-dimensional structures. The optimal structures calculated with this technique show the usefulness of the problem solved in this work: the optimal structures use less material (they are cheaper) and are feasible since every bar verify the required stress constraint.

Keywords: Structural optimization. Minimizing the mass. Three-dimensional trusses.

# Sumário

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                                  | <b>x</b>   |
| <b>Lista de Símbolos</b>                                 | <b>xii</b> |
| <b>Lista de Abreviaturas</b>                             | <b>xiv</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                      | <b>1</b>   |
| 1.1 Métodos numéricos . . . . .                          | 3          |
| 1.2 Objetivos . . . . .                                  | 4          |
| 1.3 Resumo dos capítulos . . . . .                       | 4          |
| <b>2 Modelos matemáticos</b>                             | <b>5</b>   |
| 2.1 Formulação variacional e equações de Euler . . . . . | 5          |
| 2.1.1 Elementos básicos . . . . .                        | 5          |
| 2.1.2 Princípio das potências virtuais . . . . .         | 7          |
| 2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF) . . . . .         | 8          |
| 2.3 Tensão . . . . .                                     | 12         |
| 2.4 Modelo de otimização . . . . .                       | 14         |
| 2.4.1 Problema de otimização . . . . .                   | 14         |
| 2.4.2 Condições de otimalidade . . . . .                 | 17         |
| 2.5 Problema de mínima massa . . . . .                   | 18         |
| <b>3 Procedimentos</b>                                   | <b>20</b>  |
| 3.1 Cálculo do deslocamento e da tensão . . . . .        | 20         |
| 3.1.1 Deslocamento . . . . .                             | 20         |
| 3.1.2 Tensão . . . . .                                   | 23         |
| 3.2 Análise de sensibilidade . . . . .                   | 23         |
| 3.3 FAIPA . . . . .                                      | 24         |
| 3.3.1 Direção de descida e viável . . . . .              | 25         |
| 3.3.2 Busca no arco . . . . .                            | 27         |
| 3.3.3 Atualização . . . . .                              | 28         |
| 3.3.4 Pseudocódigo . . . . .                             | 29         |



|          |                                              |           |
|----------|----------------------------------------------|-----------|
| 3.4      | Códigos computacionais . . . . .             | 29        |
| 3.4.1    | OCTAVE . . . . .                             | 29        |
| 3.4.2    | CALFEM . . . . .                             | 30        |
| 3.4.3    | FAIPA . . . . .                              | 30        |
| <b>4</b> | <b>Resultados numéricos</b>                  | <b>32</b> |
| 4.1      | Dados do Problema . . . . .                  | 32        |
| 4.2      | Dados de controle . . . . .                  | 33        |
| 4.3      | Resultados das aplicações . . . . .          | 34        |
| 4.3.1    | Ponte modelo 1 . . . . .                     | 35        |
| 4.3.2    | Ponte modelo 2 . . . . .                     | 37        |
| 4.3.3    | Base de palcos . . . . .                     | 38        |
| 4.3.4    | Torre . . . . .                              | 40        |
| 4.3.5    | Cobertura de terminais rodoviários . . . . . | 42        |
| <b>5</b> | <b>Consideração finais</b>                   | <b>45</b> |
| 5.1      | Sugestão para trabalhos futuros . . . . .    | 47        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>            | <b>48</b> |
| <b>A</b> | <b>Configuração de uma treliça</b>           | <b>50</b> |
| A.1      | Estrutura 3D . . . . .                       | 50        |
| <b>B</b> | <b>Iterações do FAIPA</b>                    | <b>54</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                              |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Malha de elementos finitos . . . . .                                         | 9  |
| 2.2  | Elemento . . . . .                                                           | 10 |
| 2.3  | Diagrama tensor $\times$ deformação do aço . . . . .                         | 13 |
| 2.4  | Região viável $\Omega$ . . . . .                                             | 15 |
| 2.5  | Condições de KKT. . . . .                                                    | 18 |
| 3.1  | Barra e informações empregadas no MEF . . . . .                              | 20 |
| 3.2  | Gráfico de $f$ ao longo do arco $A(t)$ . . . . .                             | 28 |
| 4.1  | Ponte modelo 1 . . . . .                                                     | 35 |
| 4.2  | Configurações inicial e final das áreas da ponte modelo 1 . . . . .          | 36 |
| 4.3  | Gráfico das restrições da ponte 1 . . . . .                                  | 36 |
| 4.4  | Ponte modelo 2 . . . . .                                                     | 37 |
| 4.5  | Configurações inicial e final das áreas da ponte modelo 2 . . . . .          | 38 |
| 4.6  | Gráfico das restrições da ponte modelo 2 . . . . .                           | 38 |
| 4.7  | Palco . . . . .                                                              | 39 |
| 4.8  | Configurações inicial e final das áreas do palco . . . . .                   | 40 |
| 4.9  | Gráfico das restrições do palco . . . . .                                    | 40 |
| 4.10 | Torre . . . . .                                                              | 41 |
| 4.11 | Configurações inicial e final das áreas da torre . . . . .                   | 42 |
| 4.12 | Gráfico das restrições da torre . . . . .                                    | 42 |
| 4.13 | Cobertura de rodoviária . . . . .                                            | 43 |
| 4.14 | Configurações inicial e final das áreas da cobertura de rodoviária . . . . . | 44 |
| 4.15 | Gráfico das restrições cobertura . . . . .                                   | 44 |
| 5.1  | Estrutura ótima da aplicação 4.3.5 para outra força inicial . . . . .        | 46 |
| 5.2  | Estrutura ótima da aplicação 4.3.3 para outra força inicial . . . . .        | 47 |
| A.1  | Estrutura tridimensional discretizada em 36 elementos. . . . .               | 53 |
| A.2  | Estrutura deformada. . . . .                                                 | 53 |
| B.1  | Tabela de interações da aplicação 4.3.1 . . . . .                            | 54 |

|     |                                                   |    |
|-----|---------------------------------------------------|----|
| B.2 | Tabela de interações da aplicação 4.3.2 . . . . . | 55 |
| B.3 | Tabela de interações da aplicação 4.3.3 . . . . . | 55 |
| B.4 | Tabela de interações da aplicação 4.3.4 . . . . . | 55 |
| B.5 | Tabela de interações da aplicação 4.3.5 . . . . . | 56 |

# Lista de Símbolos

|                  |                                                      |
|------------------|------------------------------------------------------|
| $\tilde{d}$      | Direção restauradora do FAIPA, p. 29                 |
| $A(t)$           | Arco viável do FAIPA, p. 29                          |
| $B$              | Matriz quase-Newton, p. 26                           |
| $D$              | Região ocupada por um sólido, p. 6                   |
| $E$              | Modulo de Young, p. 12                               |
| $H$              | Hessiana da função lagrangeana, p. 18                |
| $I(x)$           | Conjunto das restrições ativas , p. 17               |
| $L$              | Função lagrangeana, p. 18                            |
| $S^n$            | Conjunto das matrizes simétricas, p. 17              |
| $S_+^n$          | Conjunto das matrizes semidefinidas positivas, p. 17 |
| $S_{++}^n$       | Conjunto das matrizes definidas positivas , p. 17    |
| $T(x)$           | Espaço tangente, p. 17                               |
| $\Omega$         | Região viável, p. 15                                 |
| $\lambda$        | Multiplicador de Lagrange, p. 18                     |
| $\mathbb{N}$     | Conjuntos dos números naturais, p. 26                |
| $\mathbb{R}$     | Conjunto dos números reais, p. 11                    |
| $\nabla^2 f(x)$  | Matriz hessiana, p. 17                               |
| $\nabla f(x)$    | Gradiente de função escalar, p. 16                   |
| $\partial D$     | Fronteira de $D$ , p. 6                              |
| $\tilde{\omega}$ | Medida de viabilidade do FAIPA, p. 28                |

|           |                                                   |
|-----------|---------------------------------------------------|
| $d$       | Direção de descida do FAIPA, p. 17                |
| $e$       | Elemento (barra), p. 11                           |
| $f(x)$    | Função objetivo, p. 15                            |
| $g(x)$    | Vetor de funções de restrições, p. 15             |
| $m$       | Número de componentes de $g(x)$ , p. 15           |
| $n$       | Número de componentes de $x$ , p. 15              |
| $n_e$     | Número de elementos da estrutura, p. 11           |
| $n_{gle}$ | Número de graus de liberdade, p. 11               |
| $p$       | Vetor de forças nodais, p. 11                     |
| $p_e$     | Vetor de força do elemento $e$ , p. 11            |
| $t$       | Passo de Armijo, p. 29                            |
| $u$       | Vetor de deslocamento globais da estrutura, p. 11 |
| $u_e$     | Vetor de deslocamentos do elemento $e$ , p. 11    |
| $x$       | Vetor das variáveis de projeto, p. 15             |
| $x^*$     | Solução do problema de otimização, p. 17          |

# Lista de Abreviaturas

|            |                                                             |
|------------|-------------------------------------------------------------|
| <i>int</i> | Interior , p. 26                                            |
| CALFEM     | Computer Aided Learning of the Finite Element Method, p. 31 |
| FAIPA      | Feasible Arc Interior Point Algorithm, p. 3                 |
| KKT        | Karush-Kuhn-Tucker, p. 4                                    |
| MEF        | Método dos Elementos Finitos, p. 2                          |

# Capítulo 1

## Introdução

No passado, os problemas matemáticos relacionados à engenharia eram de difícil resolução, tendo em vista que tinha-se disposição apenas de relações algébricas. Estes problemas requeriam de cálculos extensos e tediosos. Os projetos eram realizados com base em experiências anteriores [1].

A procura por inovação e aperfeiçoamento de objetos é algo importante nos dias atuais. É notória a busca incessante pelo ótimo, ou seja, encontrar dentro de um conjunto, a melhor decisão ou solução.

No caso dos projetos de engenharia é necessária uma base científica eficiente no processo de elaboração/experimentação dos materiais antes da produção do mesmo, o que requer dos projetistas grande conhecimento teórico e computacional [1].

Na realização de projetos de engenharia, tais como edifícios, pontes, veículos entre outras estruturas, o engenheiro precisa tomar uma série de decisões técnicas sobre sistemas estruturais, de modo a verificar um conjunto de condições, como por exemplo: eficiência (forma aerodinâmica), beleza ou *design* atraente (com curvas estéticas ou artísticas) e economia (custo reduzido) [2]. Neste sentido, para o desenvolvimento de projetos de engenharia, é necessário um conjunto de técnicas que assegurem a eficiência do produto. A síntese de estruturas ótimas envolve vários tipos de análises, dentre eles estão: a análise estrutural e a análise de sensibilidade estrutural (cálculo da derivada). O processo de otimização pode empregar estes dois tipos de análises [2].

A análise estrutural se ocupa de calcular a deformação da estrutura no equilíbrio quando submetida a forças de apoios. Por exemplo, no caso de uma ponte, com a análise estrutural se obtém o deslocamento da região da ponte por onde passa um veículo.

A análise de sensibilidade é importante para os métodos numéricos de otimização que empregam a derivada das funções de origem mecânica (deslocamento, tensão, frequência).

A otimização estrutural é uma área de conhecimento que tem como objetivo

obter o desempenho ótimo (mínima massa, mínima complacência, entre outros), satisfazendo algumas restrições tanto sobre as variáveis de projeto quanto sobre alguns parâmetros de comportamento da estrutura.

Em meados do século *XIX* são relatados os primeiros trabalhos na linha de otimização estrutural. De acordo com [3], tem-se como precursor, o trabalho de Maxwell em 1872. Maxwell desenvolveu um método para a síntese de pontes de mínima massa livre de falhas. Ele realizou estudos relacionados a problemas simples, fazendo uso de conceitos de teoria de elasticidade. No ano 1904, Michell aplicou o método de Maxwell para o projeto de mínimo volume de diversos tipos de estruturas. No entanto, para a época os trabalhos foram considerados muito teóricos, sem aplicação prática. Somente na década de 1960, com o surgimento dos computadores e do Método dos Elementos Finitos (MEF), foi que iniciou-se os estudos de problemas práticos em otimização estrutural, com forte destaque à aplicação na indústria aeroespacial. Neste sentido, a indústria e a capacidade computacional impulsionaram a pesquisa e o desenvolvimento de diversas técnicas de otimização [3].

Por exemplo, é interessante minimizar a massa de uma estrutura metálica, pois o custo da estrutura é proporcional à massa da mesma. Esta minimização está acompanhada de restrições de diversos tipos. A citar, quando se minimiza a massa de uma estrutura, a mesma poderá sofrer grandes deformações e isto pode provocar a fratura da estrutura. Portanto, a otimização envolve a minimização de uma função, mas respeitando um conjunto de restrições de origem mecânica. Assim, obtém-se estruturas mais leves, sem abrir mão da segurança.

Os problemas de otimização estruturais podem ser agrupados em três categorias: Otimização dimensional (a adotada nesta dissertação), de forma (ou geométrica) e topológica. De acordo com o projeto que se deseja realizar, escolhe-se uma ou mais categorias. Por exemplo, na otimização dimensional de treliças, as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais de cada barra. Já para o caso de estruturas planas, as variáveis de projeto podem ser as espessuras de cada elemento [4]. A otimização de forma tem como objetivo definir a melhor fronteira de um sólido com relação a uma função custo e restrições de projeto de origem mecânicas. Por exemplo, projetar a asa de avião com o menor arrasto de modo que as frequências naturais da asa sejam maiores que determinado valor.

Por fim, na otimização topológica busca-se definir a melhor distribuição de material em um domínio pré-determinado, considerando-se uma função custo e as restrições mecânicas. Neste caso, a variável de projeto pode ser um parâmetro que mede a rigidez da estrutura em um ponto do domínio. No caso de otimização de topologia a rigidez pode atingir o valor nulo, o qual pode significar a ausência de material naquele ponto. Por exemplo, no trabalho [5] empregou-se o MEF a teoria da homogenização. Nesta teoria foram simulados furos em estruturas, considerando como



variável de projeto uma medida de rigidez de cada elemento. Um furo é modelado como um elemento quando a rigidez se torna nula.

Neste trabalho se apresentam resultados numéricos para o problema de mínima massa com restrições de tensão em estruturas tridimensionais de barras. Esse problema consiste em determinar o melhor dimensionamento das áreas das seções transversais de cada barra da estrutura, de modo a minimizar a massa total da estrutura. Quando se minimiza a massa de uma estrutura de barras, podem ocorrer grandes deformações em determinadas barras. Estas grandes deformações podem acarretar grandes tensões nas barras. A tensão em uma barra pode produzir a ruptura da barra, o que pode levar ao colapso da estrutura. Para evitar este efeito de grandes deformações ou tensões, interessa, nos projetos de engenharia, minimizar a massa com restrições de tensão em cada barra.

As estruturas aqui apresentadas foram selecionadas pela forte utilidade das mesmas pela sociedade brasileira diariamente. Mesmo que de forma indireta cotidianamente veículos passam por pontes transportando os mais diversos tipos de mercadorias movendo o mercado brasileiro, outro fato presente de forma muito evidente são os shows de artistas no Brasil nas mais diversas categorias de apresentação, por exemplo: shows musicais, teatrais entre tantos outros, acontecem diariamente pelas cidades brasileiras. Os meios de comunicações como : rádios, tvs, telefone e a internet, a muitos anos vem propagado as informações e interligando pessoas em segundos. Destaca-se por fim, a busca diária dos brasileiros por uma vida digna e pelo sucesso, assim, os terminais rodoviários são de suma importância, pois estes são os principais pontos de interligação entre as cidades dos estados brasileiros.

## 1.1 Métodos numéricos

Um método numérico faz uso de cálculos para determinar uma solução que pode não ser conhecida de forma analítica.

Os métodos numéricos são de grande importância para os estudos e realização de projetos de engenharia, principalmente quando aplicados a problemas complexos, que podem determinar uma grande quantidade de operações aritméticas e lógicas.

No presente trabalho, se empregam os seguintes métodos numéricos: Método dos Elementos Finitos (MEF)[6] e *Feasible Arc Interior Point Algorithm* (FAIPA)[7]. O MEF é empregado para calcular os deslocamentos dos nós das estruturas, assim como o cálculo da sensibilidade frente a mudanças nas variáveis de projeto. O FAIPA é usado para resolver problemas de otimização não linear diferenciável com restrições.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivos:

1. Formular problemas de otimização estrutural, em particular definir o problema da treliça de mínima massa com restrições de tensão.
2. Descrever e empregar a técnica geral de otimização FAIPA para resolver problemas de otimização estrutural.
3. Apresentar soluções computacionais para problemas de otimização de estruturas definidos no presente trabalho.

## 1.3 Resumo dos capítulos

Os capítulos da dissertação estão organizados da seguinte forma.

O capítulo 2 apresenta os modelos matemáticos utilizados no presente trabalho. Neste capítulo são formulados dois problemas fundamentais: o problema do deslocamento (elastoestático) em treliças e o problema de otimização estrutural. Com este objetivo, se apresenta uma introdução ao método dos elementos finitos aplicados ao problema do equilíbrio de treliças tridimensionais. Posteriormente se apresentam os principais conceitos e propriedades matemáticas necessárias para formular o problema geral de otimização e suas condições de otimalidade ( condições de  $KKT$ ). Esse capítulo finaliza com a formulação de problemas de otimização de estruturas. Em particular é formulado o problema estrutural de mínima massa com restrições de tensão para treliças tridimensionais.

No capítulo 3 são apresentados os procedimentos empregados para resolver numericamente as instâncias dos problemas matemáticos apresentados no capítulo 2. Os procedimentos numéricos detalhados são:

- cálculo dos deslocamentos nodais de uma treliça submetida a forças e apoios.
- cálculo da sensibilidade dos deslocamentos relativo a mudança das variáveis de projeto.
- cálculo de uma solução do problema de otimização por meio do algoritmo FAIPA.

No capítulo 4 se apresentam resultados numéricos concretos obtidos com os procedimentos do capítulo 3 aplicados a instâncias dos problemas de otimização definidos no capítulo 2.

Por Fim, no capítulo 5, apresenta-se as considerações finais.

# Capítulo 2

## Modelos matemáticos

Neste capítulo se apresentam fundamentação matemática referentes as deformações das estruturas quando submetidas a forças satisfazendo a seguinte equação diferencial que governa o equilíbrio elastoestático [6]. E a formulação de um problema de otimização

### 2.1 Formulação variacional e equações de Euler

Nesta seção será deduzida a formulação variacional do problema de elastostática com base em [8]. A formulação variacional permite colocar numa única expressão as equações de equilíbrio, as condições de contorno, as equações constitutivas e as condições de descontinuidade, ou seja, todos os elementos relevantes ao problema em análise.

#### 2.1.1 Elementos básicos

Considere um corpo físico que ocupa uma região  $D \subset \mathbb{R}^3$ , que é denominada configuração de referência. A deformação deste corpo é denotada por uma aplicação bijetiva  $\Psi : D \rightarrow \hat{D}$ , onde  $\hat{D} \subset \mathbb{R}^3$ . Ou seja, através da função  $\Psi$ , o corpo deixa de ocupar a região  $D$  e passa a ocupar a região  $\hat{D}$ . Em  $D$ , as coordenadas são denotadas por  $X$ , enquanto que em  $\hat{D}$  adota-se as coordenadas  $x$ . Em outras palavras:

$$x = \Psi(X). \quad (2.1)$$

A fim de evitar que um corpo de volume não-nulo passe a ter volume nulo depois da deformação, assume-se que:

$$\nabla \Psi > 0. \quad (2.2)$$

A partir da deformação de um corpo, que é caracterizada pela função  $\Psi$ , é possível

definir o campo de deslocamentos  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  através da seguinte relação:

$$u(X) = x - X = \Psi(X) - X. \quad (2.3)$$

O campo tensorial  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  representa o gradiente da deformação, que é dado por:

$$F(X) = \nabla_X \Psi(X) = \nabla_X(X + u) = I + \nabla_X u, \quad (2.4)$$

onde  $I$  é o tensor identidade de segunda ordem.

Determinando uma medida da deformação. Usando a regra da cadeia, se tem:

$$dx = \nabla_X \Psi(X) dX = (I + \nabla_X u) dX, \quad (2.5)$$

o que fornece:

$$\begin{aligned} \|dx\|^2 &= (I + \nabla_X u) dX \cdot (I + \nabla_X u) dX \\ &= (I + \nabla_X u)^T (I + \nabla_X u) dX \cdot dX \\ &= [I + (\nabla_X u)^T + \nabla_X u + (\nabla_X u)^T \nabla_X u]. \end{aligned}$$

Se defini assim o tensor de deformação de Green por:

$$\epsilon_G(u) = \frac{1}{2} [(\nabla_X u)^T + \nabla_X u + (\nabla_X u)^T \nabla_X u]. \quad (2.6)$$

De maneira análoga, ao considerar que  $dX = (\nabla_x \Psi)^{-1} dx$ , tem-se que:

$$\|dX\|^2 = [I + (\nabla_x u)^T + \nabla_x u - (\nabla_x u)^T \nabla_x u] dx,$$

de onde se obtém o tensor de deformação de Almansi:

$$\epsilon_A(u) = \frac{1}{2} [(\nabla_x u)^T + \nabla_x u - (\nabla_x u)^T \nabla_x u]. \quad (2.7)$$

Ao supor que os deslocamentos e seus gradientes são suficientemente pequenos, será possível desprezar os termos de ordem superior. Consequentemente, pode-se concluir que  $\nabla_x u = \nabla_X u$ , ou seja, os gradientes espacial e material coincidem. A partir daí, define-se o tensor de deformação infinitesimal:

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2} [(\nabla u)^T + \nabla u]. \quad (2.8)$$

Essa é a medida de deformação que será utilizada deste ponto em diante, uma vez que a hipótese de pequenos deslocamentos é adotada.

Dize-se que uma deformação  $\Psi$  é rígida se a medida de deformação  $\epsilon$  for nula. Como consequência, tem-se que o gradiente do campo de deslocamentos é anti-

simétrico. Logo, para quaisquer  $X, Y \in D$ , segue que:

$$u(X) = u(Y) + W(X - Y), \quad (2.9)$$

onde  $W$  é um tensor anti-simétrico.

O movimento, também chamado de taxa de deformação, é uma função  $\varphi : D \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por:

$$\varphi(X, t) = x, \quad (2.10)$$

ou seja,  $x$  é o lugar ocupado pela partícula  $X$  no instante de tempo  $t$ . Por sua vez, a região ocupada pelo corpo no instante  $t$  é dada por:

$$D_t = \varphi(D, t). \quad (2.11)$$

## 2.1.2 Princípio das potências virtuais

As forças aplicadas sobre um corpo é um conceito fundamental na Mecânica. Esta surge como um elemento em dualidade a uma determinado movimento, sendo esta dualidade representada através do conceito de trabalho ou potência virtual. Este conceito relaciona as potências internas e externas relativas ao corpo.

A potência virtual interna associada ao corpo é dada por um funcional linear e contínuo definido em função do deslocamento e do seu gradiente. Este funcional é dado por:

$$P_i(v) = - \int_D (l \cdot v + \sigma \cdot (\nabla v)^S) dx, \quad (2.12)$$

onde  $l$  representa o atrito e  $\sigma$  é o campo de tensões de Cauchy. Neste trabalho não será considerada a influência do atrito sobre o corpo. Além disso, considera-se que a lei de Hooke generalizada relaciona a tensão e a deformação, ou seja,

$$\sigma = \mathbb{C}\epsilon. \quad (2.13)$$

Nesta relação constitutiva, tem-se que  $\mathbb{C}$  é um campo tensorial de quarta ordem que reflete as propriedades elásticas do corpo e, para cada  $x \in D$ ,  $\mathbb{C}(x)$  é um tensor simétrico e positivo definido.

Por outro lado, a potência virtual externa é composta pelas forças de corpo, denotadas por  $f$  e definidas em toda a região ocupada por esse corpo, e pelas forças impostas sobre o contorno. Aqui, considera-se que a fronteira de  $D$ , denotada por  $\partial D$ , é dividida em dois conjuntos disjuntos  $\partial D_1$  e  $\partial D_2$ . Sobre  $\partial D_1$  é imposta uma força  $p_f$  e sobre  $\partial D_2$  é prescrita uma restrição cinemática  $u_0$ . Portanto, a potência

virtual externa é dada pelo seguinte funcional linear:

$$P_e(v) = \int_D f \cdot v \, dx + \int_{\partial D_1} p_f \cdot v \, dS. \quad (2.14)$$

O Princípio das potências virtuais estabelece sob quais restrições ocorre o equilíbrio global e suas consequências, além de determinar quais são as cargas externas compatíveis com o modelo. Este princípio pode ser enunciado da seguinte forma: para todo referencial e para cada instante de tempo, o corpo se encontra em equilíbrio estático sob ação da carga aplicada se:

- (1) a potência virtual das forças externas que atuam sobre o corpo no instante  $t$  é nula para toda ação de movimento virtual rígida, ou seja,

$$P_e(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \cap \mathcal{N}; \quad (2.15)$$

- (2) a soma da potência interna com a externa é nula para toda ação de movimento virtual, ou seja,

$$P_e(v) + P_i(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (2.16)$$

onde  $\mathcal{V} = \{v : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : v = 0 \text{ sobre } \partial D_2\}$  é o espaço que contém todas as ações de movimento cinematicamente admissíveis e  $\mathcal{N} = \{v : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : \epsilon(v) = 0 \text{ em } D\}$  é o núcleo do operador de deformação infinitesimal. Do segundo item, obtém-se a formulação variacional associada ao problema de equilíbrio elastoestático, que consiste em determinar  $u \in \mathcal{U} = \{u : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : u = u_0 \text{ sobre } \partial D_2\}$  tal que:

$$\int_D \sigma \cdot (\nabla v)^S \, dx = \int_D f \cdot v \, dx + \int_{\partial D_1} p_f \cdot v \, dx \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.17)$$

## 2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O Método dos Elementos Finitos (MEF) surgiu no mesmo período no qual foram lançados os primeiros computadores, em meados do século XX. No entanto, os conceitos e fundamentos matemáticos disponíveis neste período, não possibilitavam a aplicação e implementação deste método.

Posteriormente, as primeiras aplicações do MEF foram em análise de problemas da mecânica dos sólidos, seguido de aplicações nos mais diversos problemas físicos. Diante das contribuições significativas e expressivas deste método, em pouco tempo, oportunizou-se um estudo mais profundo e extenso do mesmo vindo a ser aplicado hoje, nas mais diversas áreas, contribuindo para o avanço de trabalhos nas engenharias e possibilitando um número expressivo de artigos publicados nessa área.

O MEF é uma técnica geral para encontrar computacionalmente a solução de um problemas de valor de contorno. Este método consiste em dividir o domínio em um número finito de sub domínios, denominados de elementos. O método emprega conceitos variacionais para aproximar a solução por meio deste conjunto de elementos.

Considerando o sistema de coordenadas cartesiano  $Oxyz$ , em que os nós são pontos que ligam os elementos (barras) entre si, a posição de cada nó na malha de elementos finitos é representado por três números reais, conhecidos como coordenadas. Caso  $z = 0$ , a coordenada de cada nó possui dois números reais Figura 2.1. A depender do modelo de treliças  $2D$  ou  $3D$ , cada nó possui dois ou três graus de liberdade, respectivamente. Cada barra representa um Elemento Finito. Toda barra possui dois nós (extremidades). Quando se aplica uma força em algum nó o conjunto de barras é deformado e os nós são deslocados. Neste modelo as barras são submetidas a forças de tração ou compressão.

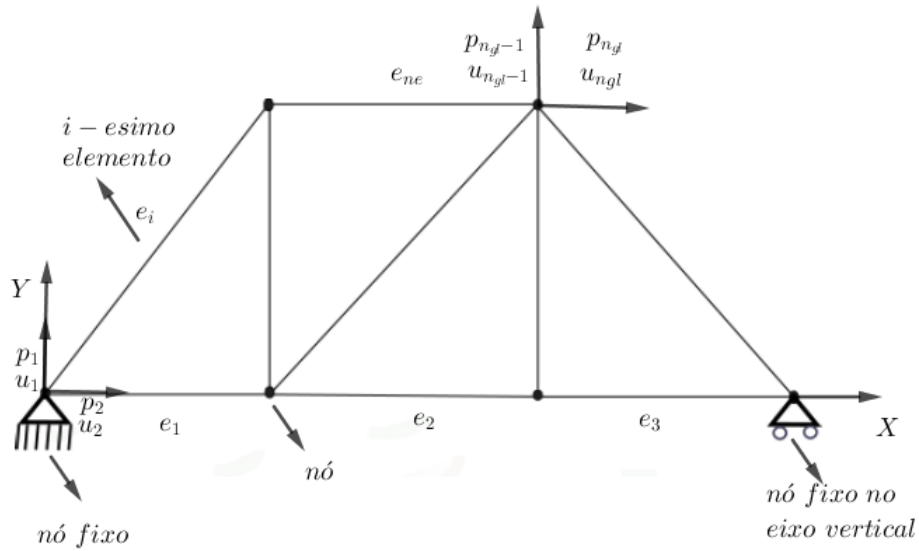


Figura 2.1: Malha de elementos finitos

A constante  $n_e$  significa o número de elementos da estrutura. O deslocamento de todos os nós da estrutura está organizado no vetor  $u \in \mathbb{R}^{n_{gl}}$ , onde  $n_{gl}$  é o número de graus de liberdade da estrutura. Cada elemento  $e$  ( $e = 1, \dots, n_e$ ) terá um vetor de deslocamentos representado por  $u_e \in \mathbb{R}^{n_{gle}}$ , onde  $n_{gle}$  representa o número de graus de liberdade do elemento. O vetor  $u_e$  é denominado vetor de deslocamentos local do elemento  $e$  e o vetor  $u$  é chamado de vetor de deslocamentos globais da estrutura. O vetor de força do elemento  $e$  se representa por  $p_e \in \mathbb{R}^{n_{gle}}$  e o vetor de forças aplicadas em todos os graus de liberdade se denota por  $p \in \mathbb{R}^{n_{gl}}$ . O vetor  $p_e$  é denominado vetor de forças locais do elemento  $e$  e o vetor  $p$  é chamado de vetor

de forças globais da estrutura.

Em cada grau de liberdade, pode-se definir uma condição de contorno (deslocamento prescrito) ou aplicar uma força. Para modelar um nó fixo, se estabelece que os graus de liberdade do nó não podem ter deslocamento. Assim se define o deslocamento nulo para estes graus de liberdade. Outras condições de contorno podem ser estabelecidas para um nó. Por exemplo, se é permitido que o nó se movimente apenas na direção horizontal, então será definido apenas deslocamento nulo na direção vertical. Para uma visualização mais detalhada veja os exemplos no Apêndice A.

Na formulação do MEF, basicamente existe uma equação integral sobre um domínio de volume  $V$ , onde esta deve ser possível de ser substituída por um somatório de integrais sobre subdomínios mais simples de volume  $V_i$ .

$$\int_V y dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} y dV. \quad (2.18)$$

Assim realizando-se os cálculos das integrais nos elementos, para o cálculo da solução geral basta realizar o somatório das soluções de cada elemento.

Para determinar a solução numérica da equação (2.17), define-se uma aproximação linear das funções  $u(x)$  e  $v(x)$  [9] :

$$j(x) = \sum_{i=1}^{n_{gel}} S_i(x) j_i, \quad (2.19)$$

onde  $S_i$  são as funções de forma conhecidas e linearmente independentes e  $j_i$  são as constantes a serem determinadas.

Sejam as funções  $S_i$  definidas por polinômios de primeiro grau que valem 1 no ponto escolhido e 0 nos outros e multiplicadas pelas constantes  $j_i$  resulta em função de aproximação linear por partes.

Considerando o elemento da Figura 2.1 com dois graus de liberdade, (Figura 2.2):

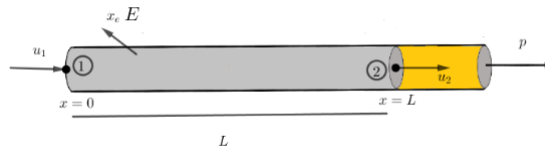


Figura 2.2: Elemento



Onde  $E$  é o modulo de Young do material,  $x_e$  é a área da barra do elemento  $e$ ,  $L$  é o comprimento da barra.

A função aproximação para a função  $u$  é igual a:

$$u(x) = S_1(x)u_1(x) + S_2(x)u_2, \quad (2.20)$$

onde  $S_1(x) = (1 - \frac{x}{L})$  e  $S_2(x) = \frac{x}{L}$ . Enquanto que função aproximação para a função  $v$  é igual a:

$$v(x) = S_1(x)v_1 + S_2(x)v_2. \quad (2.21)$$

Derivando as Equações (2.20) e (2.21) tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = S'_1(x)u_1 + S'_2(x)u_2 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = S'_1(x)v_1 + S'_2(x)v_2, \quad (2.23)$$

onde  $S'_1(x) = -\frac{1}{L}$  e  $S'_2(x) = \frac{1}{L}$ .

Reescrevendo a equação 2.17 para o caso unidimensional e levando em consideração

$$\int_0^L E x_e \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^L f v dx + \int_0^L p_f v dx. \quad (2.24)$$

Os três termos da equação representam: o trabalho interno de deformação, o trabalho das forças de corpo e o trabalho das forças de fronteira, respectivamente. Não aplica forças de trabalho no corpo, assim pode-se reescrever a equação (2.24) como:

$$\int_0^L E x_e \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = p_f \int_0^L v dx. \quad (2.25)$$

Substituindo as equações (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23) na equação (2.25) tem-se:

$$\begin{aligned}
Ex_e \int_0^L (S'_1(x)u_1(x) + S'_2(x)u_2(x))(S'_1(x)v_1(x) + S'_2(x)v_2(x))dx = \\
p_f \int_0^L (S_1(x)v_1(x) + S_2(x)v_2(x))dx,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

A equação (2.26) é válida para quaisquer números reais  $v_1(x)$  e  $v_2(x)$ . Considerando este fato, obtém-se o seguinte sistema, dado na forma matricial por:

$$Ex_e \begin{bmatrix} \int_0^L S_1'^2(x) & \int_0^L S_1'S_2' \\ \int_0^L S_2'S_1' & \int_0^L S_2'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = p_f \begin{bmatrix} \int_0^L S_1 & \int_0^L S_2 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

O sistema (2.27) pode ser escrito na seguinte forma compacta:

$$K_e u_e = p_e, \tag{2.28}$$

onde,  $K_e$  é a matriz de rigidez local,  $u_e$  é o vetor de deslocamento local e  $p_e$  vetor de forças nodais local.

Como citado no início desta seção, para realizar o cálculo do equilíbrio global da estrutura, se realiza uma montagem com todos os elementos dada por:

$$Ku = p, \tag{2.29}$$

onde,  $K$  é a matriz de rigidez global,  $u$  o vetor de deslocamento global e  $p$  o vetor de forças global.

A discretização para o caso 3D é análoga.

## 2.3 Tensão

A tensão é a razão entre as forças e a área da seção densidade superficial de força. Com o objetivo de analisar se a estrutura tem condições de suportar as cargas aplicadas, necessita-se verificar se o material tem capacidade para resistir ao esforço normal em cada barra, ou seja, determinar se cada uma das barras tem condição de suportar o esforço normal atuante.

Sabendo-se que a capacidade de um material resistir a uma certa força é caracterizada por um efeito pontual, mas que a força interna neste material é uma força distribuída ao longo de toda seção transversal de uma barra, a tensão em um elemento com área de seção transversal  $x_e$  sujeito a uma força axial  $p_e$  é calculada por meio do quociente entre o valor  $p_e$  da força pela área  $x_e$ .

$$\sigma_e = \frac{p_e}{x_e}, \quad (2.30)$$

conhecida como tensão uniaxial. Se o sinal da tensão  $\sigma$  for positivo, isto representa uma tração do elemento  $e$ , se negativo, representa uma compressão do elemento.

### Tensão admissível

A tensão admissível representa a capacidade que o material tem para resistir tensões normais.

Para realização de projetos estruturais ótimos, um dos principais fatores a ser analisado é a capacidade de segurança das mesmas, que por sua vez está associada à capacidade de resistência do material em todos os pontos da estrutura. Assim, um dos critérios para verificar a segurança de uma estrutura é a comparação à tensão normal solicitada (provocada pelo esforço normal) em qualquer ponto da estrutura com a tensão admissível do material.

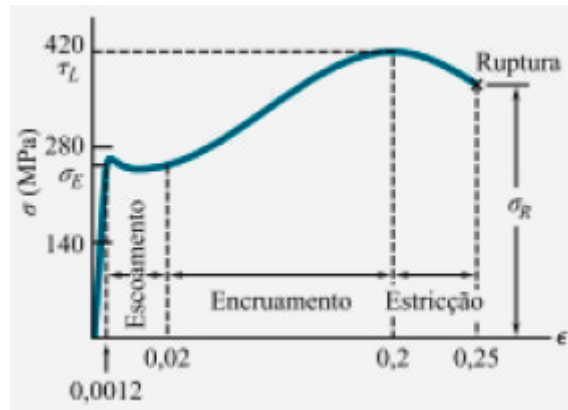


Figura 2.3: Diagrama tensor  $\times$  deformação do aço

Fonte: Foto de [10]

Até atingir  $\sigma_e$  a tensão está em uma área chamada zona elástica do material. Para qualquer valor de tensão abaixo de  $\sigma_e$  a mesma é proporcional à deformação  $\epsilon$ . Portanto, a Lei de Hooke, que estabelece que a tensão é proporcional à deformação, vale somente para valores neste intervalo. A tensão admissível  $\bar{\sigma}$  é um valor neste intervalo pouco menor que  $\sigma_e$ .

Exatamente no ponto  $\sigma_e$  caracteriza-se o ponto de escoamento, ou seja, a perda da propriedade elástica do material, conhecida como zona de fluência, em  $\tau_l$  é a maior tensão que o corpo pode suportar antes de atingir o ponto de ruptura, esta área é chamada zona plástica.

Na realização dos testes numéricos usa-se um único material para todas as aplicações, de modo que as estruturas estejam todas definidas na zona elástica [6]. Considera-se que a tensão admissível  $\bar{\sigma}$  da barra é igual à tensão de escoamento  $\bar{\sigma}_e$ [11].

## 2.4 Modelo de otimização

### 2.4.1 Problema de otimização

Um problema de otimização com restrições de desigualdade é definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x), \\ s.a : & g(x) \leq 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a função das restrições de desigualdade. Denota-se por  $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ , o vetor das variáveis de projeto e por  $g(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)]^\top$ , o vetor de restrições. A desigualdade  $g(x) \leq 0$  significa  $g_i(x) \leq 0$  com  $i = 1, \dots, m$ . Denota-se por  $n$  o número de variáveis de projeto e  $m$  o número de restrições de desigualdade. A sigla *s.a* significa sujeito à.

**Definição 1.** (*Região viável*). Define-se  $\Omega$  o conjunto de todos os pontos viáveis do problema (2.31) como sendo:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}.$$

Com o objetivo de ilustrar uma região viável e o significado do problema de otimização (2.31), considera-se um caso particular no qual  $n = 2$  e  $m = 3$ .

Seja  $x = [x_1 \ x_2]^\top$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x) \ g_3(x)]^\top$ . Desta forma  $\Omega$  torna-se:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 :$$

$$g_1(x) = 1 - x_1 x_2 \leq 0, \quad (2.32)$$

$$g_2(x) = -x_1 - x_2 + 4 \leq 0, \quad (2.33)$$

$$g_3(x) = x_2 - x_1^2 \leq 0\}. \quad (2.34)$$

Os pontos de  $\Omega$  são todos aqueles que satisfazem, simultaneamente, as condições de (2.32), (2.33) e (2.34).

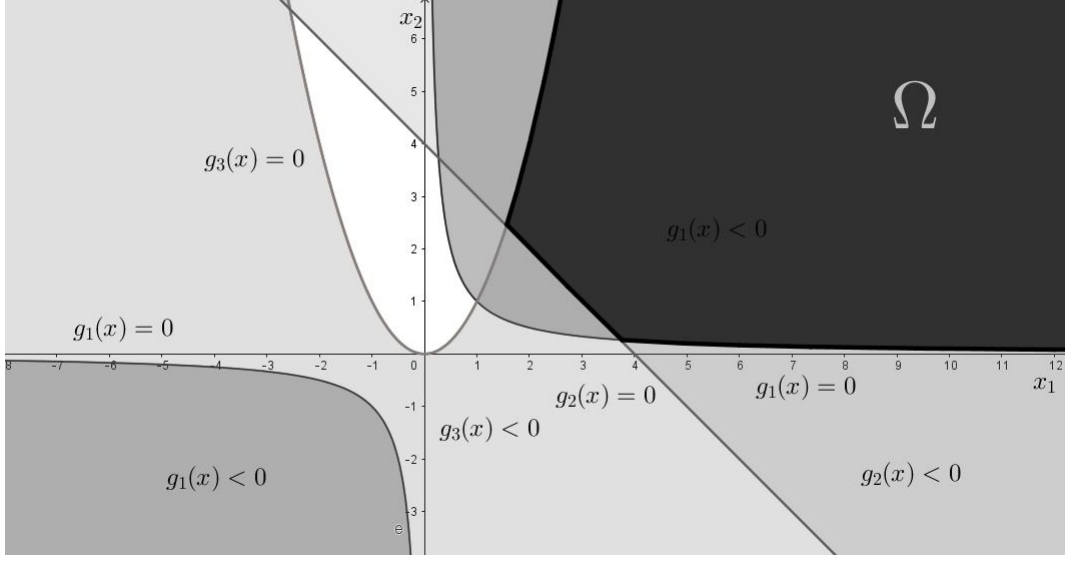


Figura 2.4: Região viável  $\Omega$

A Figura 2.4 apresenta uma visão geométrica do conjunto  $\Omega$ . Os tons de cinza são pontos de  $x$  tais que  $g_i(x) \leq 0$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ . O tom mais escuro indica a região viável  $\Omega$ . Vale ressaltar que, na prática, quase sempre não é possível se obter uma visão geométrica para  $\Omega$ , pois  $n$  pode ser maior que 3.

Assim, resolver o problema de otimização (2.31) significa encontrar um ponto  $x \in \Omega$  que minimize  $f(x)$ . A seguir são apresentadas definições e resultados necessários para resolver o mesmo.

O vetor gradiente de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por:

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^\top. \quad (2.35)$$

O vetor gradiente de cada restrição de  $g_i$  em relação a  $x_i$ , é representado pela matriz  $\nabla g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , a qual é definida por:

$$\nabla g(x) = [\nabla g_1(x) \cdots \nabla g_m(x)]. \quad (2.36)$$

A matriz Hessiana de  $f$  em relação a  $x$  é dada por:

$$\nabla \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

Denota-se por  $\mathbb{S}^n$ , o conjunto de matrizes simétricas e ordem  $n \times n$ .

Uma matriz  $A \in \mathbb{S}^n$  é dita semi definida positiva, se  $x^\top Ax \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $x^\top Ax > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $A$  é chamada de definida positiva. Denota-se por  $\mathbb{S}_+^n$  e  $\mathbb{S}_{++}^n$ , os conjuntos das matrizes semi definidas positivas e definidas positivas, respectivamente.

**Definição 2.** (*Restrições Ativas*). Dado um ponto  $x \in \Omega$ , o conjunto das restrições ativas é dado por:

$$I(x) := \{i : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

**Definição 3.** (*Ponto regular*) Um ponto  $x$  é dito regular das restrições de (2.31), se o conjunto  $\{\nabla g_i : i \in I(x)\}$  é linearmente independente.

**Definição 4.** (*Espaço Tangente*) O espaço tangente no ponto regular  $x$  é definido por:

$$T(x) = \{d : \nabla g_i^\top d = 0, \forall i \in I(x)\}.$$

**Definição 5.** (*Mínimo local*) O ponto  $x^* \in \Omega$  é um mínimo local de  $f$ , se existe um  $\epsilon > 0$ , tal que  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \Omega \cap B(x^*, \epsilon)$ . Onde  $B(x^*, \epsilon)$  é a bola aberta com centro  $x^*$  e raio  $\epsilon$ . Dize-se que  $x^* \in \Omega$  mínimo local estrito quando  $f(x^*) < f(x), \forall x \in \Omega \cap B(x^*, \epsilon)$ .

**Definição 6.** (*Direção Viável*) Um vetor  $d \in \mathbb{R}^n$  é uma direção viável em  $x \in \Omega$ , se existe  $\theta > 0$ , tal que  $x + td \in \Omega$ , para todo  $t \in [0, \theta)$ .

**Definição 7.** (*Direção de descida*) Um vetor  $d \in \mathbb{R}^n$  é uma direção de descida para uma função suave  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em  $x \in \mathbb{R}^n$  se existe  $\psi > 0$ , tal que  $\phi(x + td) < \phi(x)$ , para todo  $t \in (0, \psi)$ . Se  $d^\top \nabla \phi(x) < 0$ , então  $d$  é uma direção de descida para  $\phi$  em  $x$ .

**Definição 8.** (*Função Lagrangiana*) Define-se função Lagrangiana  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , associada ao problema (2.31) como sendo:

$$L(x, \lambda) = f(x) + (\lambda)^\top g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad (2.38)$$

onde o vetor  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é chamado de multiplicador de Lagrange.

O conceito de Multiplicadores de Lagrange é bastante geral. Ele é utilizado em muitas aplicações de engenharia e pode ser interpretado como a força necessária para impor as restrições.

O gradiente de  $L$  é dado pela seguinte fórmula:

$$\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x). \quad (2.39)$$

A Hessiana da função Lagrangiana é a matriz  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definida por:

$$H(x, \lambda) = \nabla \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \nabla g_i(x). \quad (2.40)$$

## 2.4.2 Condições de otimalidade

A seguir se apresentam as condições de otimalidade para o problema (2.31).

**Teorema 2.4.1.** *Se  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um mínimo local e ponto regular das restrições do problema (2.31), então existe um único vetor  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tal que:*

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0, \quad (2.41)$$

$$G(x^*)\lambda^* = 0, \quad (2.42)$$

$$\lambda^* \geq 0, \quad (2.43)$$

$$g(x^*) \leq 0, \quad (2.44)$$

onde,  $G(x)$  é uma matriz diagonal tal que  $G_{ii}(x) = g_i(x)$ . As condições ((2.41), (2.42), (2.43) e (2.44) apresentadas no teorema 2.4.1 são denominam condições de Karush-Kuhn-Tucker ( $KKT$ ).

A seguir apresenta-se uma interpretação geométrica, para as condições de  $KKT$ .

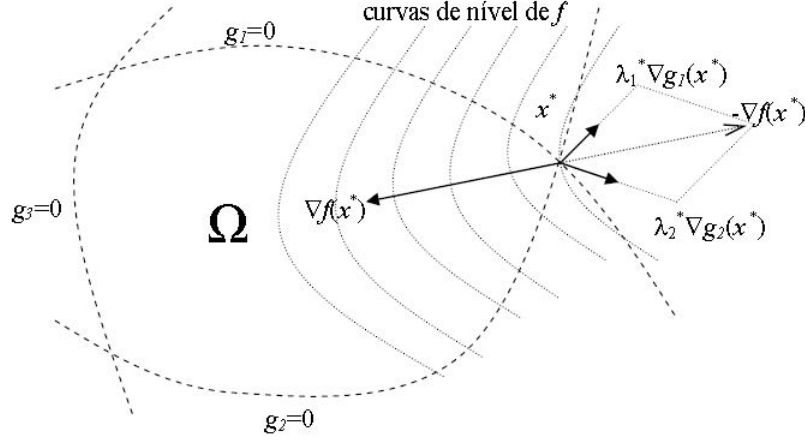


Figura 2.5: Condições de KKT.

Fonte: Aroztegui[12]

Na Figura 2.5 se desenha o conjunto  $\Omega$  formado por três restrições de desigualdade e o ponto  $x^*$  que é mínimo local do problema (2.31). Nesta figura os multiplicadores de Lagrange associados às restrições ativas ( $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$ ) são maiores que zero e junto ao ponto  $x^*$  satisfazem todas as condições de *KKT*.

## 2.5 Problema de mínima massa

Um dos objetivos da otimização de estruturas é minimizar a massa da estrutura. Um modelo de otimização de treliças é o de minimização das áreas das barras. Para isso, define-se para cada elemento da treliça  $e$  (barra) uma variável  $x_e$  que representará a área da seção transversal da barra  $e$ . Neste caso é importante minimizar a soma das áreas de todas as barras, pois isto faz com que as estruturas resultantes (ótima) sejam mais leves e, portanto, mais econômicas.

Seja uma estrutura constituída por um material linear, elástico e isotrópico, definido com um módulo de elasticidade  $E$ .

No problema de mínima massa com restrição de tensão, a estrutura treliça é discretizada por *MEF* e cada elemento  $e$  está associado a uma variável de projeto  $x_e$ , que representa a área da seção transversal da barra  $e$ .

Quando a variável  $x_e$  é próxima de zero, a estrutura poderá sofrer grandes deformações. Para evitar este efeito, durante o processo de minimização da massa, é necessário incluir restrições de tensão.

O problema de mínima massa define-se da seguinte forma:



$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^{n_e}} \sum_{i=1}^{n_e} x_i \\ s.a : \frac{\sigma_e^2 - \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2} \leq 0 \\ x_{min} \leq x \end{array} \right. \quad (2.45)$$

onde  $\sigma_e$  representa a tensão de elemento e  $\bar{\sigma}$  a tensão máxima que cada elemento pode alcançar neste problema, com  $e = 1, \dots, n_e$ .  $\bar{\sigma}$  é uma constante positiva menor que  $\sigma_e$  e é definida para evitar que o vetor  $\sigma_e$  esteja ilimitado e a estrutura permaneça dentro da zona elástica do material. O vetor  $x_{min}$  é constante e define o valor mínimo para todas as variáveis de projeto. No caso de treliças  $x_{min}$  contém valores mínimos das áreas das seções transversais de todas as barras.

Este problema tem maior utilidade para aplicação em engenharia, pois representa projetos reais que buscam reduzir massa das estruturas, mas que não provoquem tensões elevadas a ponto de causar a fratura da barra.

Assim o processo de minimização de massa, com restrições de origens mecânicas, apresenta fatores interessantes para a engenharia, pois ao minimizar massa, ao mesmo tempo reduz gastos com materiais, mão de obra, e produz estruturas mais econômicas. Assim, esses fatores têm impactos mais significativos quando pensados em aplicações de projetos em séries como por exemplo, construções de pontes, prédios, carros, aviões, entre outros.

# Capítulo 3

## Procedimentos

Neste capítulo se apresentam procedimentos numéricos que se empregam nos exemplos nos próximos capítulos do presente trabalho.

### 3.1 Cálculo do deslocamento e da tensão

#### 3.1.1 Deslocamento

Considerando o sistema de coordenadas global  $Oxyz$ , uma discretização da barra  $e$  em  $MEF$  é apresentada na Figura 3.1.

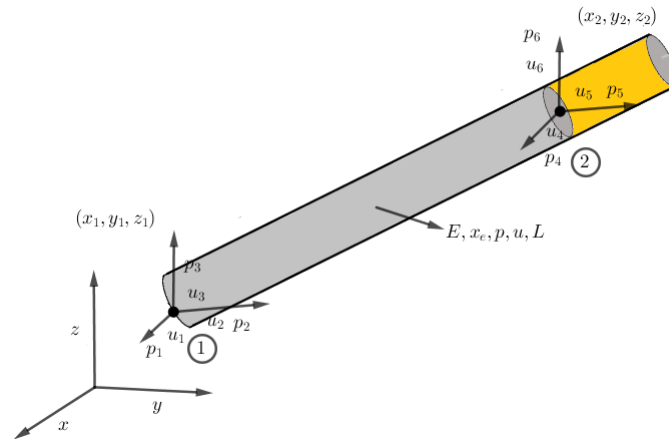


Figura 3.1: Barra e informações empregadas no MEF

Desta pode-se considerar os vetores deslocamento e forças do elemento dados por:

$$\begin{aligned} u_e^\top &= [u_1, \dots, u_6], \\ p_e^\top &= [p_1, \dots, p_6]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sendo as coordenadas dos nós definidas por  $c_1 = (x_1, x_2, z_3)$  e  $c_2 = (y_1, y_2, z_3)$ , então define-se o vetor  $b$  como sendo:

$$b^\top = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

assim, o comprimento da barra  $e$  é dado por:

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L_e = |b|. \quad (3.3)$$

Sejam as constantes  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  e  $\psi_z$  dadas por:

$$\psi_x = \frac{x_2 - x_1}{|b|}$$

$$\psi_y = \frac{y_2 - y_1}{|b|}$$

$$\psi_z = \frac{z_2 - z_1}{|b|}. \quad (3.4)$$

Define-se agora a matriz de transformação  $G_e$  da seguinte forma:

$$G_e = \begin{bmatrix} \psi_x & \psi_y & \psi_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Calculando a matriz  $\bar{K}_e$ :

$$\bar{K}_e = \frac{Ex_e}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A equação do equilíbrio elastoestático do elemento  $e$  definida em (2.28) é dada por:

$$K_e u_e = p_e, \quad (3.7)$$

onde  $K_e$  é a matriz de rigidez do elemento dada por:

$$K_e = G_e^\top \bar{K}_e G_e. \quad (3.8)$$

Agora substituindo  $G_e$  e  $\bar{K}_e$  na equação (3.8):

$$K_e = \begin{bmatrix} \psi_x & 0 \\ \psi_y & 0 \\ \psi_z & 0 \\ 0 & \psi_x \\ 0 & \psi_y \\ 0 & \psi_z \end{bmatrix} \frac{Ex_e}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_x & \psi_y & \psi_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

assim,

$$K_e = \frac{Ex_e}{L_e} \begin{bmatrix} -\psi_x^2 & -\psi_x\psi_y & -\psi_x\psi_z & \psi_x^2 & \psi_x\psi_y & \psi_x\psi_z \\ -\psi_y\psi_x & -\psi_y^2 & -\psi_y\psi_z & \psi_y\psi_x & \psi_y^2 & \psi_y\psi_z \\ -\psi_z\psi_x & -\psi_z\psi_y & -\psi_z^2 & \psi_z\psi_x & \psi_z\psi_y & \psi_z^2 \\ \psi_x^2 & \psi_x\psi_y & \psi_x\psi_z & -\psi_x^2 & -\psi_x\psi_y & -\psi_x\psi_z \\ \psi_y\psi_x & \psi_y^2 & \psi_y\psi_z & -\psi_y\psi_x & -\psi_y^2 & -\psi_y\psi_z \\ \psi_z\psi_x & \psi_z\psi_y & \psi_z^2 & -\psi_z\psi_x & -\psi_z\psi_y & -\psi_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A matriz de rigidez  $K_e$  é simetria, semidefnida positiva e depende diretamente de  $L_e$ ,  $E$  e  $x_e$ .

### Matriz de Rigidez

A rigidez é uma característica mecânica que descreve o comportamento de uma estrutura sujeita às forças estáticas em termos da deflexão elástica, ou seja, é a capacidade de um sistema mecânico de suportar cargas sem grandes mudanças em sua geometria.

Sabendo que todos os elementos da estrutura no equilíbrio elastoestático verificam a equação (3.7), é possível, por meio de um processo de montagem, construir a equação de equilíbrio global da estrutura:

$$K(x) = \sum_e^{n_e} x_e K_e. \quad (3.11)$$

Por fim, o equilíbrio da estrutura é dado por:

$$Ku = p, \quad (3.12)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez global da estrutura,  $u$  e  $p$  são os vetores de deslocamento e de força globais da estrutura.

### 3.1.2 Tensão

A tensão de cada barra é dada por:

$$\sigma_e = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} G_e u_e, \quad (3.13)$$

onde  $u_e$  é o deslocamento dos nós da barra  $e$  (no máximo 6 componentes). O deslocamento  $u$  de todos os nós da estrutura (no máximo  $n_{gl}$ ) é calculado com a resolução de (3.12).

## 3.2 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade é utilizada para calcular a variação das respostas mecânicas (deslocamento) em relação a pequenas perturbações nas variáveis de projeto.

Neste trabalho será realizada a análise de sensibilidade, pois é necessário o cálculo da derivada primeira empregada nos algoritmos de otimização.

A seguir apresenta-se o cálculo da matriz de sensibilidade  $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^{n_e \times n_{gl}}$  definida por:

$$\nabla u(x) = [\nabla u_1(x) \cdots \nabla u_i(x) \cdots \nabla u_{n_{gl}}(x)]. \quad (3.14)$$

onde  $\nabla u_i(x)$  é o vetor coluna com as derivadas parciais em relação a  $x$  [4].

Derivando ambos os membros da igualdade (3.12) com respeito a  $x_i$ , com  $\{i = 1, 2, \dots, n_e\}$  tem-se:

$$\frac{\partial (K(x)u)}{\partial x_i} = \frac{\partial (p)}{\partial x_i}. \quad (3.15)$$

Como  $p$  não depende de  $x$ , a regra da derivada do produto  $K(x)u$  tem-se:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}(x)u + K(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \quad (3.16)$$

Pela equação (3.11) tem-se:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}(x) = K_i. \quad (3.17)$$

Aplicando (3.17) em (3.16) tem-se que:

$$K_i u + K(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \quad (3.18)$$

ou

$$K(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = -K_i u. \quad (3.19)$$

onde  $K_i$  é matriz de rigidez do elemento e  $u$  é calculado em (3.10).

O vetor  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  é calculado resolvendo-se o sistema linear (3.19) e representa a linha  $i$ -ésima de  $\nabla u(x)$ . Portanto, para o cálculo de  $\nabla u(x)$  é necessário resolver  $1 + n_e$  sistemas lineares com a mesma matriz  $K(x)$ .

A matriz com o cálculo das derivadas da tensão da estrutura é formado por:

$$\nabla \sigma(x) = [\nabla \sigma_1(x), \dots, \nabla \sigma_i(x), \dots, \nabla \sigma_{n_e}(x)], \quad (3.20)$$

onde  $\nabla \sigma_i$  é o vetor coluna com as derivadas parciais em relação a  $x$ .

Considerando a tensão do elemento descrita na equação (3.13), tem-se que a derivada parcial de  $\sigma$  é dada por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} G_e \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (3.21)$$

Seja  $M$  a matriz dada por:

$$M = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} G_e, \quad (3.22)$$

então a equação (3.21) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = M \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (3.23)$$

onde o vetor  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  é calculado na equação (3.19). Assim a derivada da tensão do elemento é calculada resolvendo o sistema da equação (3.23) e representa a  $i$ -ésima linha de  $\nabla \sigma(x)$ .

### 3.3 FAIPA

O algoritmo FAIPA, proposto por Herskovits [7], é uma técnica que resolve o problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. As funções que definem o problema podem ser lineares ou não lineares, convexas ou não convexas. Desde a sua criação até hoje o FAIPA vem sendo aprimorado para resolver os mais diversos tipos de problemas de otimização estrutural. A seguir apresenta-se o estudo dos passos realizados pelo algoritmo FAIPA para resolver problemas de otimização

não-linear com restrições de desigualdade para resolver o problema (2.31). O mesmo realiza interações nas variáveis de projeto  $x \in \mathbb{R}^n$  e nos multiplicadores de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ . Considerando inicialmente um ponto  $x^0 \in \text{int}(\Omega)$  e  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$  com entradas estritamente positivas, o algoritmo gera uma sequência de pontos  $(x^k, \lambda^k)$ , com  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ .

É provado em [13] que  $(x^k, \lambda^k)$  converge para um ponto  $(x^*, \lambda^*)$  que verifica as condições de *KKT*.

### 3.3.1 Direção de descida e viável

Em toda iteração  $k$  do algoritmo FAIPA,  $x^k \in \text{int}(\Omega)$  e  $\lambda^k > 0$ . A partir destes dados é calculada uma direção  $d^k$  viável para  $\Omega$  e de descida para  $f$ .

Uma iteração do tipo Newton consiste na resolução de um sistema linear para encontrar uma direção. A mesma se chama direção de Newton. Para definir a direção de Newton define-se a função  $\Theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , como sendo:

$$\Theta(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla L(x, \lambda) \\ G(x)\lambda \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde  $G(x) = \text{diag}(g(x))$ .

Quando  $\Theta(x, \lambda) = 0$  as igualdades das condições de *KKT* foram verificadas. Para resolver este sistema de equações, calcula-se a direção de Newton  $d_0$  como sendo a solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} H(x^k, \lambda^k) & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g^\top(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) + \nabla g(x^k)\lambda^k \\ G(x^k)\lambda^k \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ . Na prática, a matriz do sistema linear (3.25) pode ser singular. Para evitar este fato, emprega-se uma matriz  $B \in \mathbb{S}_{++}^n$  como sendo uma aproximação quase - Newton de  $H(x^k, \lambda^k)$  [14].

$$\begin{bmatrix} B^k & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g(x^k)^\top & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x^k) + \nabla g(x^k)\lambda^k \\ G(x^k)\lambda^k \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Reescrevendo o sistema (3.26) como:

$$\begin{aligned} B^k d_0 + \nabla g(x^k)\lambda_0^{K+1} &= -\nabla f(x^k), \\ \Lambda^k \nabla g(x^k)^\top d_0 + G(x^k)\lambda_0^{K+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Pelo sistema (3.27)  $d_0$  é uma direção de descida para  $f$ , mas não se tem garantia de que  $d_0$  seja uma direção viável. Sempre que alguma restrição  $g_i(x^k)$  se aproxima de zero,  $d_0$  torna-se tangente ao conjunto viável  $\Omega$ .

Para melhor visualização deste fato, basta reescrever a segunda equação de (3.27) como sendo:

$$\lambda_i^k \nabla g_i(x^k)^\top d_0 + g_i(x^k) \lambda_{0i}^{k+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.28)$$

Assim da equação (3.28) se tem  $\nabla g_i(x^k)^\top d_0 = 0$ , para algum  $i$  tal que  $g_i(x^k) = 0$ .

Buscando obter a viabilidade para uma direção  $d_0^k$ , adicionamos um vetor negativo no lado direito de segunda equação (3.27). Assim, define-se um novo sistema linear nas variáveis  $d^k$  e  $\bar{\lambda}^k$ :

$$\begin{aligned} B^k d^k + \nabla g(x^k) \bar{\lambda}^{k+1} &= -\nabla f(x^k) \\ \Lambda^k \nabla g(x^k)^\top d^k + G(x^k) \bar{\lambda}^{k+1} &= -\rho^k \lambda^k \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde  $\rho^k$  é um número positivo e  $\bar{\lambda}$  uma nova estimativa para  $\lambda$ .

A segunda equação de (3.29) pode ser reescrita como:

$$\lambda_i^k \nabla g_i(x^k)^\top d^k + g_i(x^k) \bar{\lambda}_i^{k+1} = -\rho^k \lambda_i^k, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.30)$$

Do sistema acima,  $d^k$  é uma direção viável, pois  $\nabla g_i(x^k)^\top d^k = -\rho^k < 0$  para todo  $i \in I(x^k)$ .

Ao incluir um novo termo negativo no lado direito da segunda equação de (3.28), o mesmo acarreta um desvio na direção  $d_0$  para o interior da região viável ( $\Omega$ ), sendo esse desvio proporcional ao parâmetro  $\rho$ .

Como  $d_0$  é uma direção de descida para  $f$ , podem-se limitar superiormente o parâmetro  $\rho$  fazendo e assim a direção  $d$  é também uma direção de descida [13]. Sendo  $d_0^\top \nabla f(x) < 0$ , é válida a seguinte condição:

$$(d^k)^\top \nabla f(x^k) \leq \xi (d_0^k)^\top \nabla f(x^k), \quad \xi \in (0, 1) \quad (3.31)$$

que resulta em  $(d^k)^\top \nabla f(x^k) < 0$ . Logo,  $d^k$  é uma direção viável e de descida para  $f$  em  $x^k$ .

Apesar da direção  $d^k$  ser de descida, a função  $f$  ainda apresenta um decrescimento maior ao longo da direção  $d_0^k$ .

O cálculo da direção  $d^k$  pode ser calculado com a combinação de dois sistemas lineares com a mesma matriz. Para isto, Herskovits[13] propõe a construção de uma direção restauradora  $d_1$  que aponta para  $\text{int}(\Omega)$  por meio de um segundo sistema linear com a mesma matriz que (3.25). Considerando o sistema auxiliar nas variáveis



$d_1^k$  e  $\lambda_1^k$  dado por :

$$\begin{aligned} B^k d_1^k + \nabla g(x^k) \lambda_1^{k+1} &= 0 \\ \Lambda^k \nabla g(x^k)^\top d_1^k + G(x^k) \lambda_1^{k+1} &= -\lambda^k \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para obter a direção viável e de descida  $d^k$ , calcula-se  $(d_0^k, \lambda_0^{k+1})$  no sistema (3.27) e depois calcula-se  $(d_1^k, \lambda_1^{k+1})$  no sistema (3.32). Assim a direção  $d^k$  é dada por:

$$d^k = d_0^k + \rho^k d_1^k. \quad (3.33)$$

e para calcular  $\bar{\lambda}^{k+1}$ :

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \lambda_0^{k+1} + \rho^k \lambda_1^{k+1}$$

Para calcular  $\rho^k$  substitui  $d^k$  definido em (3.33), na condição (3.31). Dessa forma:

$$\rho^k \leq (\xi - 1) \frac{(d_0^k)^\top \nabla f(x^k)}{(d_1^k)^\top \nabla f(x^k)} \quad (3.34)$$

caso  $d_1^\top \nabla f(x) > 0$ . Se  $d_1^\top \nabla f(x) \leq 0$ , toma-se

$$\rho^k \leq \varphi \|d_0\|^2. \quad (3.35)$$

para algum parâmetro  $\varphi > 0$ .

### 3.3.2 Busca no arco

Nesta etapa é feita uma busca linear ao longo de um arco na região viável. Este passo tem por objetivo melhorar a velocidade de convergência do algoritmo, onde busca-se definir um arco tangente à direção  $d$ .

Para isto, define-se uma medida de viabilidade  $\tilde{\omega}$ , que é uma aproximação das derivadas segundas das restrições, contendo assim, informação da curvatura das restrições ativas.

$$\tilde{\omega} = g(x^k + d) - g(x^k) - \nabla g(x^k)^\top d^k. \quad (3.36)$$

Com o vetor  $\tilde{\omega}$ , determina-se uma nova direção  $\tilde{d}$ , que se calcula, pelo seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} B^k & \nabla g(x^k) \\ \Lambda^\top \nabla g(x^k) & G(x^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda^k \tilde{\omega} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Assim, defini-se o arco tangente às direções  $d$  e  $\tilde{d}$ , como sendo:

$$A(t) = x + td + t^2\tilde{d}. \quad (3.38)$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, o novo ponto da sequência  $x^{k+1}$  será determinado por um passo  $t > 0$ , que verifica as condições de uma busca linear no arco, a partir do ponto  $x^K$ . Um exemplo de busca linear é a definida por Armijo [15]: definir o passo  $t$  como sendo o primeiro da sequência  $\{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\}$  tal que:

$$f(A(t)) \leq f(x^k) + t\eta d^\top \nabla f(x^k), \quad (3.39)$$

$$g(A(t)) < 0. \quad (3.40)$$

onde,  $\nu, \eta \in (0, 1)$  são parâmetros fixos.

As condições acima podem ser reescritas como:

$$f(x^k + td + t^2\tilde{d}) \leq f(x^k) + t\eta d^\top \nabla f(x), \quad (3.41)$$

$$g_i(x^k + td + t^2\tilde{d}) < 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.42)$$

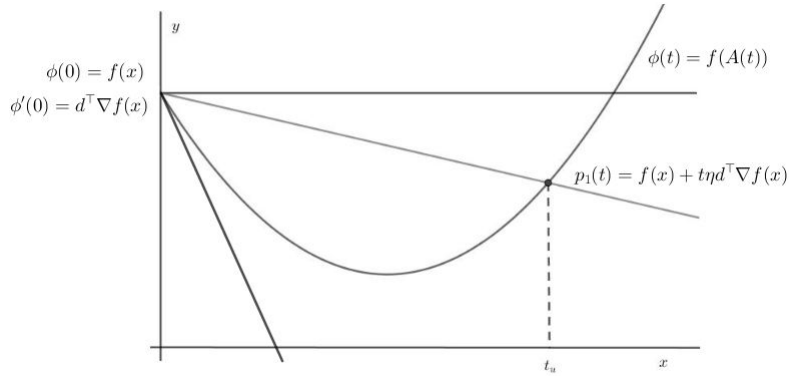


Figura 3.2: Gráfico de  $f$  ao longo do arco  $A(t)$

Na Figura 3.2, o passo  $t$  aceito pelo critério de Armijo é aquele menor que  $t_u$ .

### 3.3.3 Atualização

Para usar este método precisamos iterar sobre os pontos da sequência  $x_k$  atualizando os dados para uma nova iteração:

- Atualiza-se matriz  $B \in \mathbb{S}_{++}^n$ .
- Atualiza-se  $\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda > 0$ .

- Atualiza-se o ponto  $x^{k+1} = x + td + t^2\tilde{d}$ .

A seguir apresenta-se o pseudocódigo do FAIPA.

### 3.3.4 Pseudocódigo

Parâmetros:  $\xi, \eta, \nu \in (0, 1)$ .

Dados iniciais:  $B \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda > 0$ ,  $x \in \text{int}(\Omega)$ .

Passos:

**Passo 1:** Cálculo da direção viável de descida  $d$ .

1. Resolver o sistema linear (3.26), obtendo-se  $d_0$  e  $\lambda_0$ .  
Se  $d_0 = 0$ , FIM.  
Resolver o sistema linear (3.32), obtendo-se  $d_1$  e  $\lambda_1$
2. Se  $d_1^\top \nabla f(x) > 0$ , calcular  $\rho = \min \left\{ \varphi \|d_0\|_2^2, (\xi - 1) \frac{d_0^\top \nabla f(x)}{d_1^\top \nabla f(x)} \right\}$ .  
Caso contrário, calcular  $\rho = \|d_0\|_2^2$ .
3. Calcular  $d = d_0 + \rho d_1$ .

**Passo 2:** Busca linear ao longo do arco.

1. Calcular (3.36), obtendo-se  $\tilde{\omega}$
2. Resolver o sistema linear (3.37), obtendo-se  $\tilde{d}$  e  $\tilde{\lambda}$ .
3. Encontrar  $t$ , o primeiro na sequência  $\{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\}$  que verifica (3.42).

**Passo 3:** Atualizações:

1. Definir nova matriz  $B \in \mathbb{S}_{++}^n$ .
2. Definir novo  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda > 0$ .
3. Definir novo ponto como  $x^{k+1} = x^k + td^k + t^2\tilde{d}^k$ .
4. Voltar para o **Passo 1**

## 3.4 Códigos computacionais

### 3.4.1 OCTAVE

Para realizar os exemplos numéricos emprega-se o programa OCTAVE ([www.gnu.org/software/octave/](http://www.gnu.org/software/octave/)).

O OCTAVE<sup>1</sup> foi criado por John W. Eaton em 1988, software livre que qualquer pessoa modificá-lo sob os termos da Licença Pública Geral GNU (GPL), conforme publicado pela *Free Software Foundation*.

Grande contribuição foi dada pelos professores James B. Rawlings, da universidade de Wisconsin-Madison e de John G. Ekerdt da universidade de Texas, pela necessidade de uma apostila do curso Projetos de Reatores Químicos. Para tal curso alguns recomendavam a utilização do Fortran, linguagem bastante reconhecida na engenharia, no entanto para tal curso os alunos passavam mais tempo tentando entender as falhas do Fortran do que estudando Química.

A parte de 1992 o desenvolvimento deste software se deu com mais intensidade, sendo lançada a versão 1.0 em 17 fevereiro de 1993. O nome OCTAVE é uma homenagem a um ex-professor do autor que era conhecido por realizar cálculos rápidos e pela escrita do livro engenharia das reações químicas.

O OCTAVE possui um ambiente de programação que permite utilizar rotinas numéricas para resolver diversos problemas da matemática computacional. Em particular, OCTAVE possui rotinas eficientes para resolver sistemas lineares e uma linguagem de programação idêntica à do MATLAB. O OCTAVE é um software livre, contudo podem existir rotinas do MATLAB ainda não programadas no OCTAVE.

### 3.4.2 CALFEM

O “*Computer Aided Learning of the Finite Element Method*” (CALFEM) (<https://github.com/CALFEM/calfem-matlab>) é um software livre criado na universidade de Lund, tendo início ao seu desenvolvimento no final dos anos 70, criado por um grupo de professores do centro de mecânica estrutural. O mesmo é empregado na resolução dos diversos problemas de mecânica estrutural e problemas de campo. CALFEM pode ser empregado em OCTAVE.

Algumas rotinas do pacote CALFEM foram empregadas para realizar a análise estrutural e análise de sensibilidade.

### 3.4.3 FAIPA

Para resolver os problemas de otimização se dispõe da rotina do FAIPA adaptada para o entorno de programação do OCTAVE. O FAIPA é uma rotina que resolve numericamente o problema (2.31). As entradas mais importantes do FAIPA são:

- $f$  (função objetivo),  $g$  (função de restrições de desigualdade). Estas duas funções são programadas em uma *function* do octave chamado *fun.m*;

---

<sup>1</sup>Dados históricos disponíveis em: <https://www.gnu.org/software/octave/about.html>

- $\nabla f, \nabla g$  (derivada primeira de  $f$  e  $g$ ). Estas duas funções são programadas em uma *function* do octave chamado *gfun.m*;
- $x_0$  (ponto inicial viável,  $x_0 \in \Omega$ );
- condições de parada, busca linear, outros parâmetros do FAIPA. Estas informações se encontram no arquivo *fdata.m*.

Se o problema (2.31) estiver bem formulado, o FAIPA encontra um ponto de KKT verificando as condições (2.41), (2.42), (2.43) e (2.44).

O FAIPA retorna como saída:

- $x$ , solução aproximada de (2.31);
- $\lambda$ , multiplicador de Lagrange;
- $f(x), g(x)$ ;
- *counter*, um vetor com números de avaliações de  $f, g, \nabla f, \nabla g$  e número de iterações do algoritmo.

# Capítulo 4

## Resultados numéricos

Neste capítulo são apresentadas aplicações numéricas para o problema de otimização (2.45).

Neste trabalho são analisados os seguintes tipos de estruturas:

- Ponte modelo 1
- Ponte modelo 2
- Base de palcos
- Torre
- Cobertura de rodoviária

As configurações de barras destas estruturas são mostrados nas Figuras 4.1, 4.4, 4.7, 4.10 e 4.13 .

### 4.1 Dados do Problema

Nesta seção se apresentam instâncias do problema de mínima massa (2.45) onde a estrutura a ser otimizada é tridimensional. O objetivo é encontrar uma estrutura com melhor distribuição de áreas  $x$  (vetor formado pelas áreas transversais de todas as barras da estrutura  $3D$ ), apenas limitadas a tensão máximas e as áreas mínimas das barras.

Todas as aplicações tem as seguintes componentes:

- Função objetivo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_e} x_i. \quad (4.1)$$

- Restrição de tensão

$$\frac{\sigma_e^2 - \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2} \leq 0, \quad e = 1, \dots, n_e \quad (4.2)$$

- Restrição de áreas

$$x_{min} \leq x. \quad (4.3)$$

- O cálculo da tensão  $\sigma_e$  em (4.2) é realizado segundo na equação (3.13). O cálculo do deslocamento é realizado resolvendo os sistemas da equação (3.12)
- A análise de sensibilidade é calculada resolvendo equação linear (3.19) e empregada a equação (3.23).

## 4.2 Dados de controle

Nesta secção se apresenta os parâmetros empregados no FAIPA.

- Cálculo do  $\rho$

- $\xi = 0.8$  ( $0 < \xi < 1$ ,  $\nabla f(x)^\top d \leq \xi \nabla f(x)^\top d_0$ )
- $\varphi = 1$  ( $\varphi > 0$ ,  $\varphi |d_0|^2$ )

- Busca linear de Armijo

- $\eta = 0.1$  ( $0 < \eta < 1$ ,  $f(x + td) \leq f(x) + t\eta d^\top \nabla f(x)$ )
- $\nu = 0.7$  ( $0 < \nu < 1$ ,  $t = 1, \nu, \nu^2, \dots$ )

- Dados Iniciais

- Os Multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade tem valor inicial  $\lambda_i = 1$ , para  $i = 1, \dots, m$ ;
- O valor inicial da matriz quase-Newton é uma matriz identidade.

- Critérios de parada

Os critérios de parada do algoritmo são:

- A norma da direção de descida  $|d_0| < 10^{-4}$ ;
- A norma do gradiente da função Lagrangeana  $|\nabla L| < 10^{-4}$ ;
- A norma da complementariedade  $|compl| < 10^{-4}$

- Atualização

$$B : BFGS$$

$$\Lambda : \Lambda_0 + \text{constante}I$$

- O FAIPA permite que o cálculo da primeira derivada seja feito por diferenças finitas ou que as derivadas sejam programadas. Neste trabalho o gradiente da função objetivo e das funções de restrição são calculadas e programadas.

### 4.3 Resultados das aplicações

Para as aplicações aqui apresentadas, se considera em todas as estruturas as seguintes condições:

- O modulo de Young utilizado é  $E=200 \text{ GPa}$  (aço);
- As unidades de comprimento estão em metros ( $m$ );
- As unidades de áreas estão em  $m^2$ ;
- As unidades de forças estão em Newtons ( $N$ );
- Os nós não fixos podem se movimentar em qualquer direção  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .
- As forças nodais (quando existirem) são aplicadas, nos graus de liberdade da componente  $z$ ;
- A tensão admissível do aço é dada por  $\bar{\sigma} = 295 \times 10^6 \text{ Pa}$ ;
- Nas Figuras as barras em azul e vermelhas: tensionadas indica tensão positiva (os nós se afastam) tracionadas indica tensão negativa (os nós se aproximam).  $nxx$  denota nó com numeração  $xx$  ( $n1$ , nó ①).  $exx$  denota barra com numeração  $xx$  ( $e1$ , barra 1);
- $A_i$  representa a área inicial das barras da estrutura;
- $x_{min}$  é dado por  $\frac{A_i}{100}$ ;
- $A_i$  é escolhida para que a estrutura inicial seja viável, as forças nodais também são escolhidas de forma que a estrutura inicial seja viável. Assim a estrutura inicial verifica as restrições de tensão e de área (estrutura viável).



### 4.3.1 Ponte modelo 1

Na Figura 4.1 se apresenta um modelo simples de ponte. Considera-se um exemplo simples para verificar a validade do método desenvolvido no trabalho.

Esta estrutura é composta por 12 nós,  $n_e = 39$  elementos, sendo: (comprimento, altura, profundidade) = (9, 2.6, 3). Os triângulos equiláteros e os quadrados possuem lado de comprimento 3. O nó ① está fixo, o nó ② está fixo nas direções  $x$  e  $z$ , enquanto os nós ⑩ e ⑪ estão fixos na direção  $z$ . Todas as barras da estrutura possuem áreas iniciais iguais a  $A_i = 3 \times 10^{-4}$ . São aplicadas forças sobre os nós centrais da base ③, ④, ⑤ e ⑥ de intensidade  $p = -2500 \times 9.8$ .

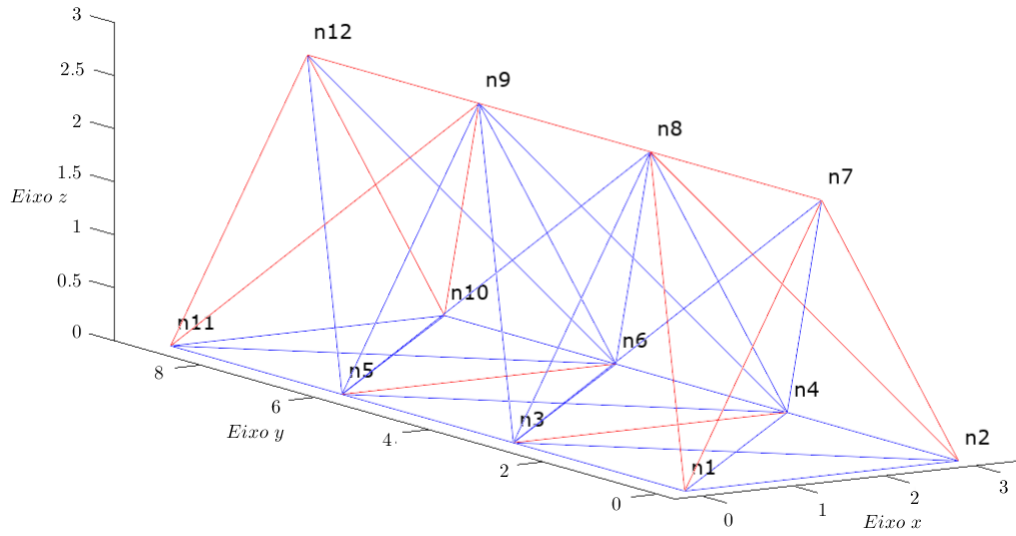


Figura 4.1: Ponte modelo 1

Na Figura 4.2 se apresenta o gráfico das áreas das barras antes e após a otimização.

A barra que apresentou maior área é a e15, esta, sendo a barra central superior da estrutura. As duas barras centrais da base e5 e e7, apresentam áreas finais iguais e inferiores apenas a barra e15 com valor  $1 \times 10^{-4}$  aproximadamente, sendo estas ligadas pelos nós (③ à ⑤) e (④ à ⑥) respectivamente. As barras e14 e e18 barras superiores centrais ficaram com áreas finais muito próximas das anteriores.

Quatro barras das diagonais apresentam áreas iguais, de  $0.74 \times 10^{-4}$  aproximadamente, estas são as que ligam os nós ① e ② ao nó ⑧ e, ⑩ e ⑪ ao nó ⑨. As barras com que possuem valores de áreas inferiores a estes e maiores que  $0.3 \times 10^{-4}$  são barras externas da base, juntamente com as demais que estão ligadas ao nó ⑫. As barras que ficaram com áreas próximas a mínima são as barras diagonais da base, juntamente com as diagonais laterais não mencionadas anteriormente.

Pela distribuição das áreas finais, percebe-se uma configuração ótima que compensa as áreas de modo a resistir às cargas aplicadas na estrutura.

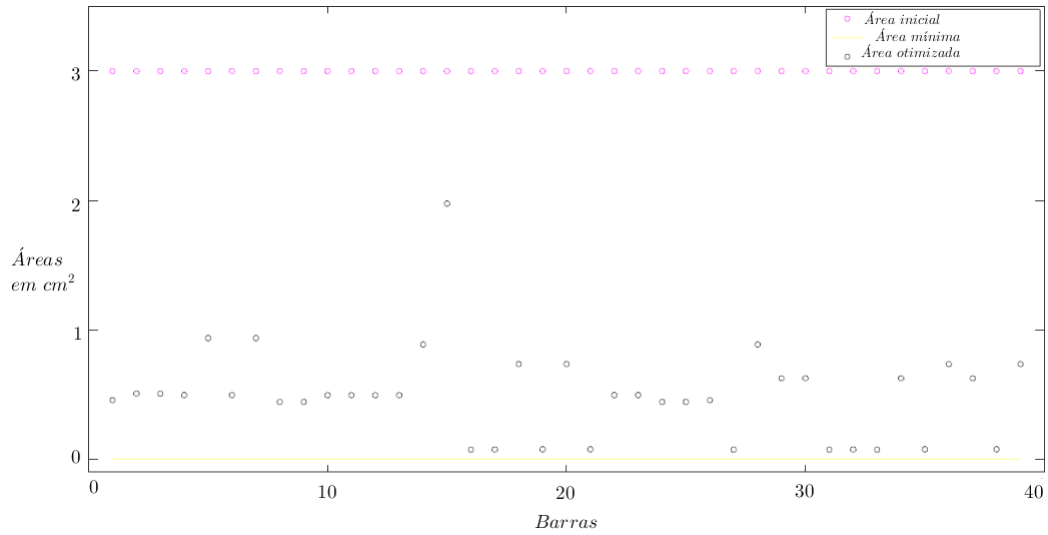


Figura 4.2: Configurações inicial e final das áreas da ponte modelo 1

A estrutura ótima apresentou redução significativa das áreas das barras como mostra a Figura 4.2, condizendo com a tensão final em cada barra como mostra a Figura 4.3. Observa-se que a maioria das barras ficaram muito próximas da tensão máxima. Vale ressaltar que as barras menos tensionadas são aquelas que apresentam maior redução de áreas.

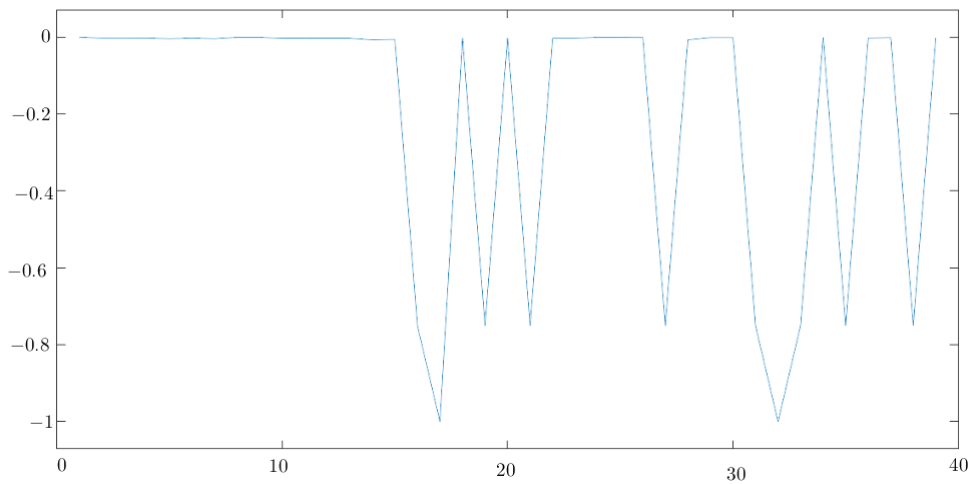


Figura 4.3: Gráfico das restrições da ponte 1

Assim, de acordo com os dados expostos nos gráficos a estrutura apresentou um resultado esperado. Por fim, no Apêndice A, é apresentada a tabela com a redução da função objetivo, e os demais parâmetros de convergência.

### 4.3.2 Ponte modelo 2

Na Figura 4.4 se apresenta um modelo de ponte treliçada, inspirado nas pontes sobre os rios brasileiros.

Os dados do problema são: A estrutura contém 22 nós,  $n_e = 73$  elementos, sendo: (comprimento, altura, profundidade) = (12, 4, 3), as barras que definem o comprimento medem 3. A altura está dividida em duas partes: as barras maiores de tamanho 3 e as menores 1. Nas laterais da estrutura se formam retângulos de (comprimento, altura) = (3, 1). Os quadrados da estrutura nas laterais, bases inferior e superior tem lados 3. As barras de apoio diagonais externas medem 5. A segunda base na altura 3 é colocada para garantir a estabilidade da estrutura.

O nó ① está fixo, os graus de liberdades nas direções  $y$  e  $z$  do nó ⑥ estão fixos, enquanto os nós ⑤ e ⑩ estão fixos apenas na direção  $z$ . Se aplica forças de  $p = -1750 \times 9.8$  nos nós centrais da base ②, ③, ④, ⑦, ⑧ e ⑨. Todas as barras tem áreas iniciais iguais à  $A_i = 3 \times 10^{-4}$ .

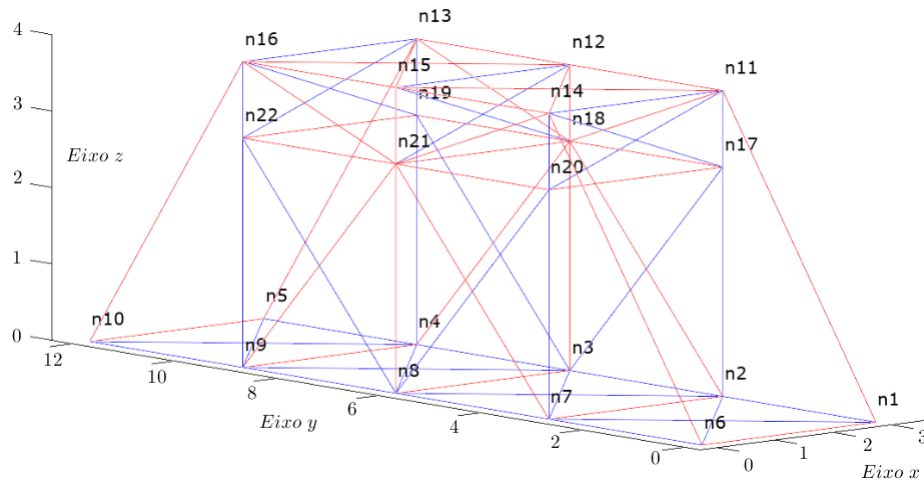


Figura 4.4: Ponte modelo 2

Na Figura 4.5 se apresenta os gráficos das áreas das barras antes e após a otimização. A configuração desta ponte, diferentemente da estrutura anterior, proporciona uma estabilidade das barras centrais superiores, assim todas as barras centrais apresentam áreas finais quase iguais e convergiram para a área mínima, exceto as barras externas que estão ligadas aos nós submetidos a forças. As barras que apresentam a maior área são as e22, e30, e33 e e41. Estas são as barras diagonais que ligam diretamente o solo ao topo da estrutura.

A distribuição das massas apresenta a estrutura ótima com barras centrais superiores muito pequenas, o que mostra que a distribuição das barras na estrutura influencia diretamente na área final, isto fica evidente quando analisa-se que todas as barras da segunda base convergiram para a área mínima.

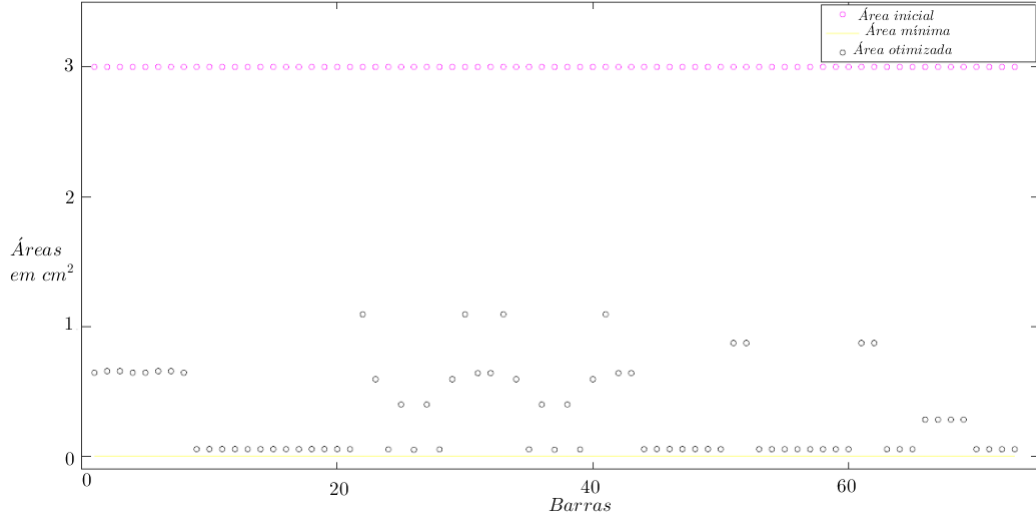


Figura 4.5: Configurações inicial e final das áreas da ponte modelo 2

A maioria das barras apresentam uma redução significativa na área das secções transversais. Na Figura 4.6 apresenta-se o gráfico das tensões da estrutura, que pode-se visualizar a relação das áreas com a tensão.

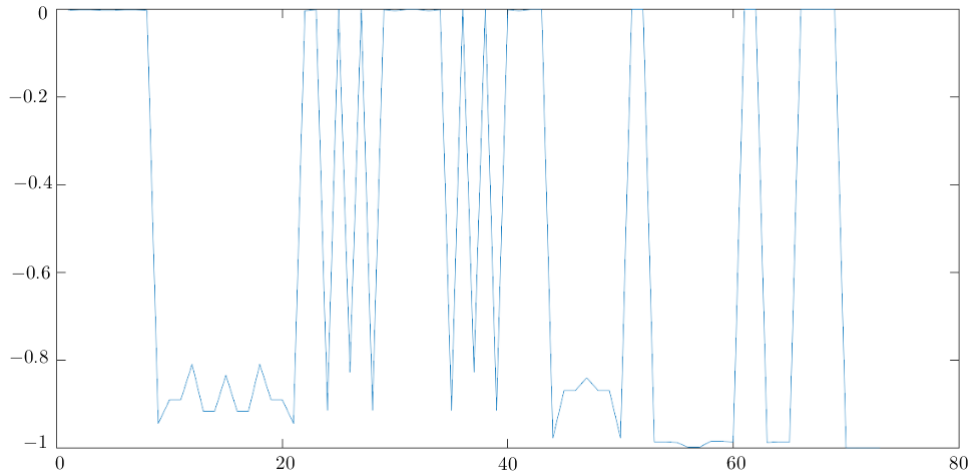


Figura 4.6: Gráfico das restrições da ponte modelo 2

No Apêndice A, é apresentada a tabela com a redução da função objetivo, e os demais parâmetros de convergência.

### 4.3.3 Base de palcos

Na Figura 4.7 se apresenta a estrutura de um palco com barras, inspirado nos conhecidos palcos utilizados nos mais diversos shows artísticos.

Segue os dados do problema: a estrutura possui 36 nós e  $n_e = 138$  elementos, a mesma tem: (comprimento, altura, profundidade) = (4, 3, 6). Cada barra do com-

primento mede 2, da altura 1.5 e de profundidade 2, assim na laterais da estrutura forma-se retângulos, e nas bases quadrados.

O nó ① está fixo, os nós ④ e ⑨ estão fixos na direção  $z$ , enquanto o nó ⑫ está fixo nos graus de liberdades  $x$  e  $z$ . Aplica-se forças nos nós superiores ⑫, ⑰ e [ ⑲ à ⑳] de intensidade  $p = -1500 \times 9.8$ , as barras da estrutura tem áreas iniciais dadas por  $A_i = 2.5 \times 10^{-4}$ .

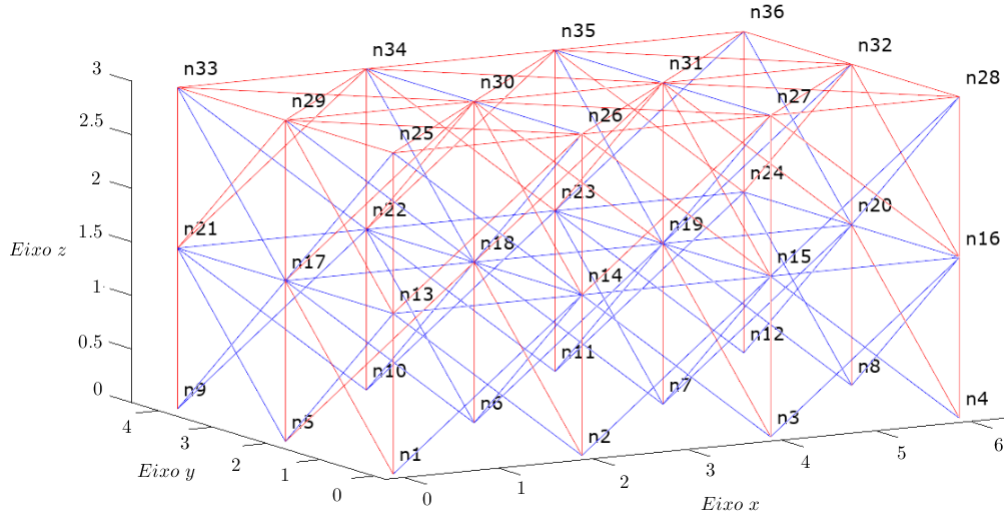


Figura 4.7: Palco

As quatro barras externas extremas  $e1$ ,  $e2$ ,  $e9$ , e  $e12$  ligadas pelos nós ① à ⑬, ④ à ⑮, ⑨ à ⑳ e ⑫ à ㉑, respectivamente, são as que apresentam maior área após otimização, como mostra a Figura 4.8. As barras que apresentam áreas de aproximadamente  $0.6 \times 10^{-4}$ , são as diagonais que ligam os nós ⑭ à ㉑, ⑮ à ㉒, ⑯ à ㉓ e ⑰ à ㉔, o que implicou nas barras ligadas pelos nós ⑭ à ⑮ e ⑯ à ⑰ convergirem para área mínima estas são  $e14$  e  $e20$ . A maioria das barras apresentam mesma área final e próxima da mínima.

Esta estrutura apresentou simetria nas áreas finais e uma distribuição de massa de forma a sustentar as forças aplicadas. Também percebeu-se que pela configuração dos nós ④ e ⑫ a estrutura apresentou outras barras com mais massa próximas a estes nós, para garantir a simetria entre as quatro barras externas extremas.

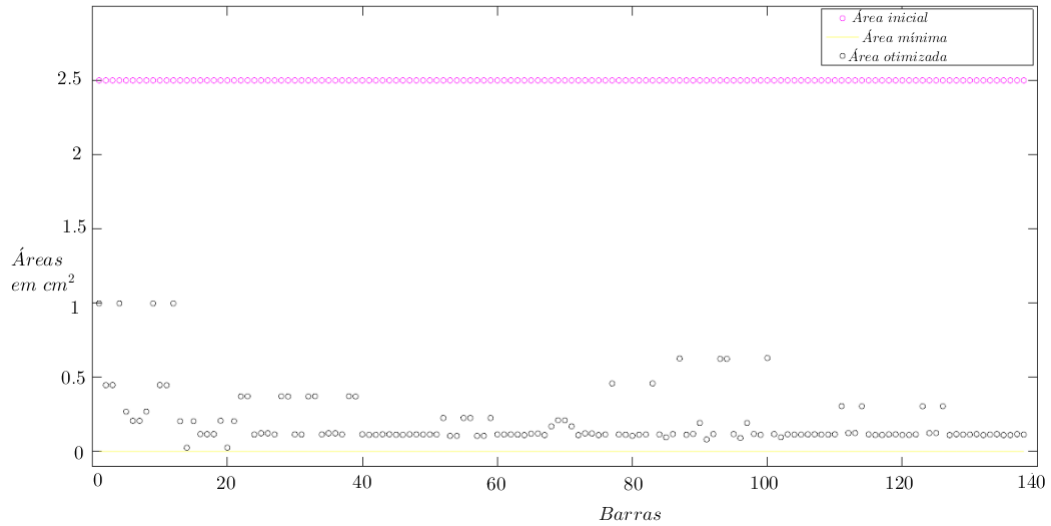


Figura 4.8: Configurações inicial e final das áreas do palco

A tensão nesta estrutura ficou muito próxima da tensão admissível para barras com áreas próximas de  $0.5 \times 10^4$ , as barras com maior área atingiram a tensão admissível, enquanto as barras com menor área convergiram para a área mínima apresentando pouca tensão.

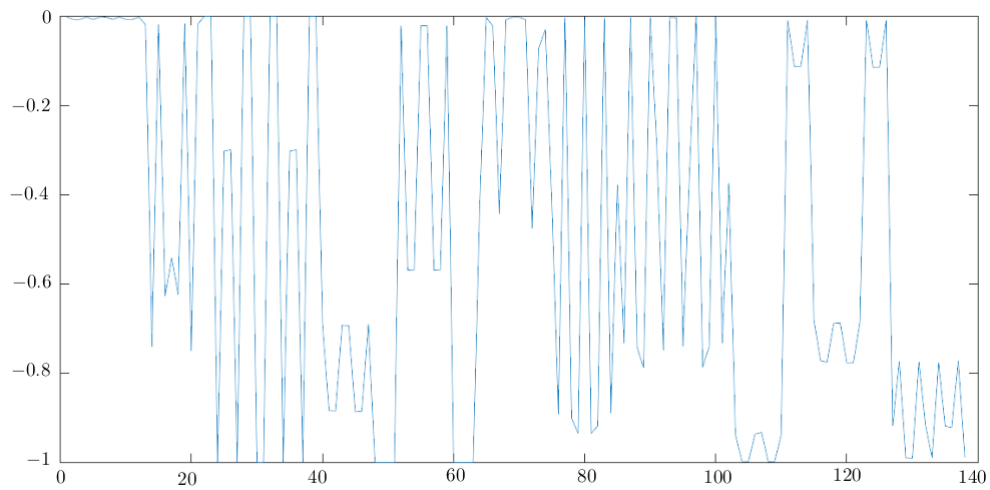


Figura 4.9: Gráfico das restrições do palco

Para mais detalhes da otimização no Apêndice A, mostra-se a tabela com a redução da função objetivo, os valores empregados como critérios de parada.

#### 4.3.4 Torre

Na Figura 4.10 se apresenta uma torre treliçada, a qual foi inspirada nas torres telefônicas e de internet, presentes no interior do Ceará.

A estrutura é composta por duas bases: a primeira contém os elementos com nós fixados no solo, a segunda ergue os elementos verticalmente deixando a torre com formato cúbico. A estrutura tem  $n_e = 100$  elementos os quais estão conectados por 29 nós. A mesma apresenta no solo comprimento = profundidade = 6, reduzindo-se gradativamente 1 a cada 1.5 de altura até atingir a segunda base, desta em diante a mesma apresenta uma subida vertical de 1, e sobe mais 1.5 chegando ao ponto de interseção das quatro colunas, assim a mesma possui as seguintes dimensões (comprimento, profundidade, altura) = (6, 6, 10).

O nó ① está fixo, enquanto o nó ② tem grau de liberdade diferente de zero apenas na direção  $y$ , já os nós ③ e ④ estão fixos apenas na direção  $z$ . Todas as barras possuem áreas iniciais iguais à  $A_i = 2 \times 10^{-4}$ . Se aplica forças  $p = -3000 \times 9.8$  nos nós [25 à 28].

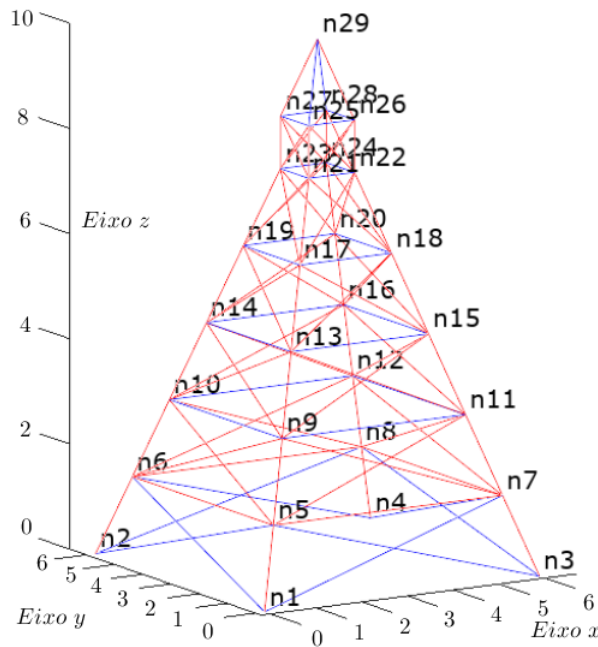


Figura 4.10: Torre

As áreas barras das quatro colunas externas reduziram gravitativamente, como mostra na Figura 4.11, estas são:  $e1$  à  $e4$ ,  $e18$  à  $e21$ ,  $e32$  à  $e36$ ,  $e49$  à  $e52$ ,  $e65$  à  $e68$ ,  $e81$  à  $e89$  e  $e97$  à  $e100$  sendo as quatro primeiras as barras com maiores áreas e as quatro últimas com área próxima da área mínima.

As barras centrais que interligam as quatro colunas externas da estrutura obtiveram áreas finais aproximadamente iguais e próximas da área mínima, assim como as quatro últimas que estão ligadas ao nó no topo da estrutura.

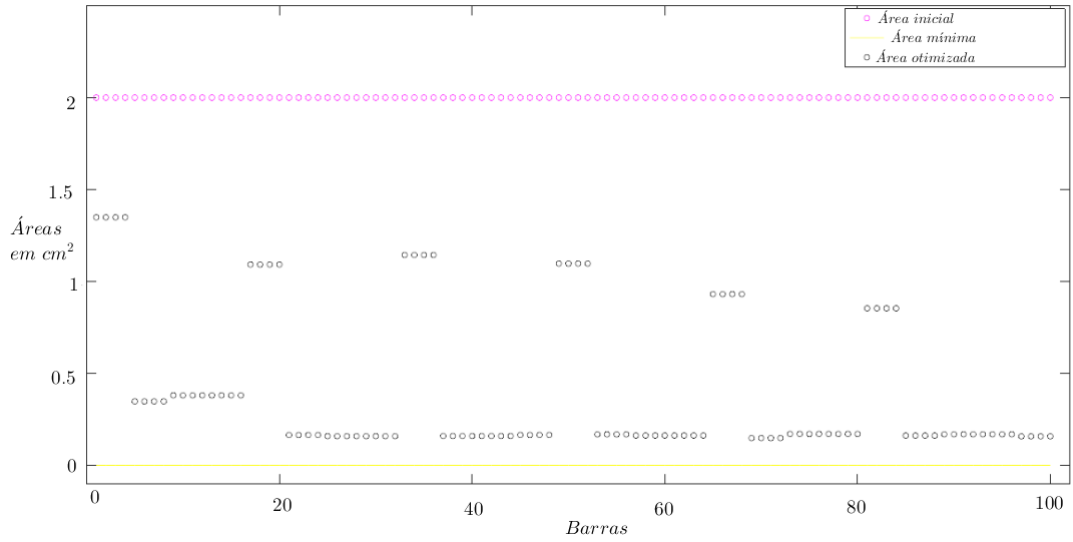


Figura 4.11: Configurações inicial e final das áreas da torre

Quanto à otimização, a estrutura apresentou redução significativa, como mostra na Figura 4.12 as barras de  $e1$  à  $e20$  apresentam maior tensão, enquanto as barras que ligam as quatro colunas apresentam menores tensões.

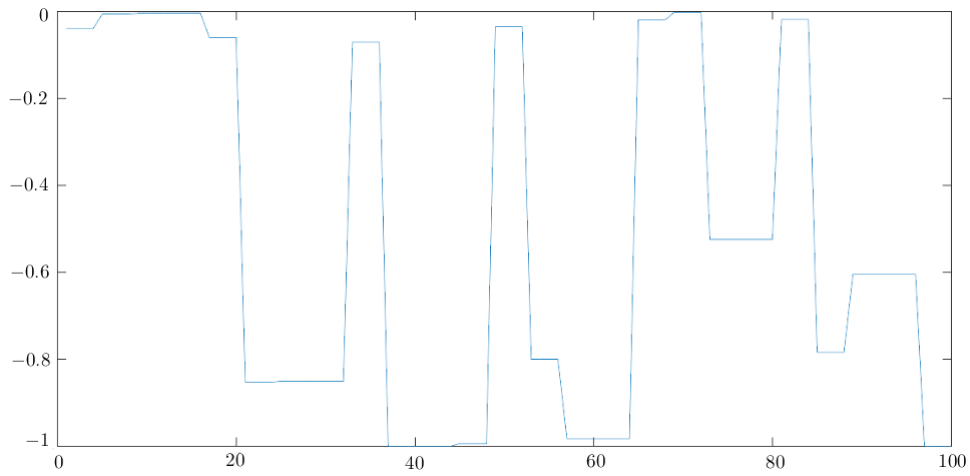


Figura 4.12: Gráfico das restrições da torre

Segue no Apêndice A a tabela com a redução da função objetivo, os valores empregados como critérios de parada.

### 4.3.5 Cobertura de terminais rodoviários

Na Figura 4.13 se apresenta a base para cobertura de terminais rodoviários, inspiradas nas rodoviárias no interior do estado Paraíba, por exemplo da cidade de Cajazeiras.

Seguem os dados do problema: a estrutura é composta por 60 nós e  $n_e = 188$



elementos, a mesma tem as seguintes dimensões comprimento, altura, profundidade = (9, 5.6, 15). As barras que suspendem o teto medem 3 e assim, o teto tem altura 2.6. A distribuição das barras nos fornece uma estrutura composta de triângulos equiláteros e quadrados de lado 3.

Quanto aos graus de liberdade, os quatros nós extremos do solo apresentam as seguintes características: o nó ① está fixo, enquanto o ④ está fixo nas direções  $x$  e  $z$ , o ⑤ está fixo nas direções  $y$  e  $z$ , já o nó ⑧ está fixo apenas na direção  $z$ . Já na cobertura apenas os nós ⑩, ⑲, ③⑦ e ④③ estão fixos na direção  $z$ . As barras da estrutura possuem áreas iniciais iguais a  $A_i = 2 \times 10^{-4}$ . Se aplicam forças  $p = -1000 \times 9.8$  nos nós centrais da base da cobertura estes são: ⑪, ⑫, ⑮, ⑯, ②③, ②⑤, ③①, ③③, ③⑤, ④①, ④⑦ e ④⑨.

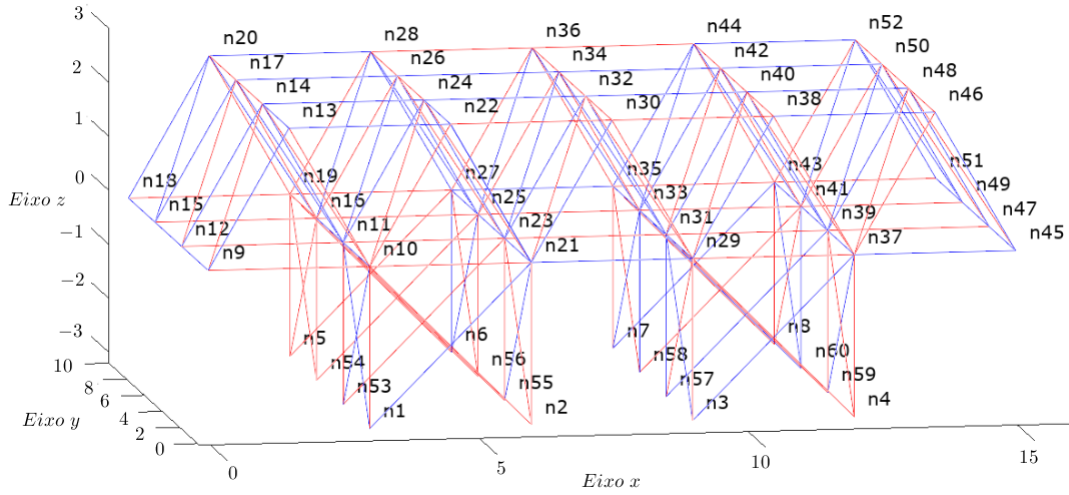


Figura 4.13: Cobertura de rodoviária

De acordo com o apresentado na Figura 4.14, as barras que apresentam maior área são:  $e_2$  pertencente ao primeiro pilar conectada pelos nós ⑩ e ⑪,  $e_{14}$  a barra extrema que liga os dois pilares da esquerda com coordenadas nos nós ⑪ e ⑯,  $e_{92}$  pertencente ao terceiro pilar conectada pelos nós ③⑦ e ③⑨,  $e_{131}$  a barra extrema que liga os dois pilares da direita com coordenadas nos nós ③⑨ e ④①, as demais barras que ligam os quatros pilares apresentam áreas no intervalo de  $0.6 \times 10^{-4}$  à  $0.8 \times 10^{-4}$  de modo que as barras simétricas são exatamente iguais.

As barras que apresentam áreas entre  $0.35 \times 10^{-4}$  e  $0.5 \times 10^{-4}$ , são barras conectadas aos nós ②⑧ e ④④, de tal forma que as barras simétricas apresentam áreas iguais, já as barras apresentam áreas entre  $0.15 \times 10^{-4}$  e  $0.35 \times 10^{-4}$ , são barras conectadas aos nós ②② e ②⑧, de tal forma que as barras simétricas apresentam áreas iguais.

As quatro barras com menores áreas são as ligadas pelos nós ⑪ à ②③, ⑯ à ②⑤, ③① à ③⑤, ③③ à ④①. Sendo as duas primeiras aproximadamente  $0.02 \times 10^{-4}$  e as outras duas de  $0.05 \times 10^{-4}$ .

As demais barras da estrutura apresentam áreas finais aproximadamente iguais convergem para área mínima atingida, são também as barras que apresentam menor tensão (Figura 4.14).

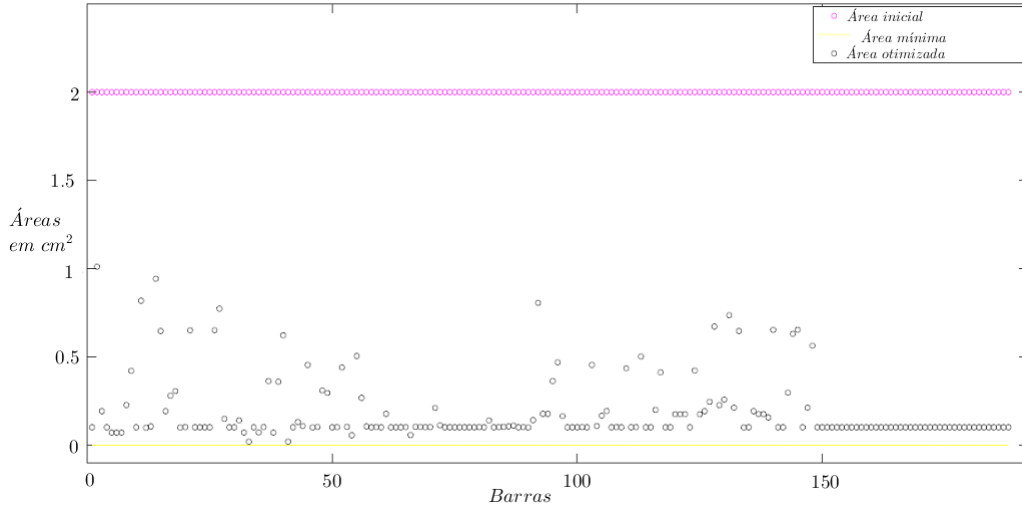


Figura 4.14: Configurações inicial e final das áreas da cobertura de rodoviária

A estrutura ótima apresentou uma redução significativa, tendo em vista que quase 95% das barras tiveram área final próxima da permitida para o problema.

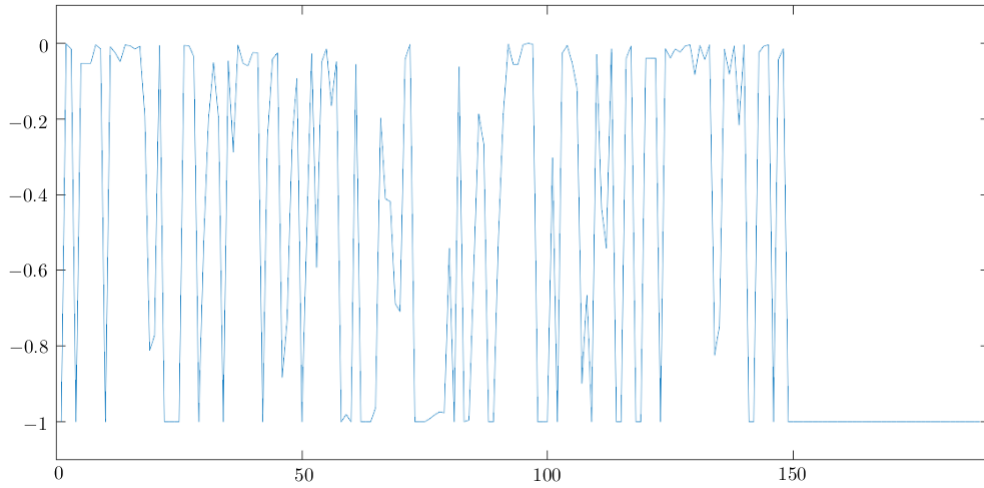


Figura 4.15: Gráfico das restrições cobertura

Para mais detalhes da otimização no Apêndice A, mostra-se a tabela com a redução da função objetivo, os valores empregados como critérios de parada.

Ressalta-se que, em todas as aplicações a simetria das áreas finais e os diferentes níveis de discretização das áreas ótimas, assim para se obter uma estrutura ótima necessita-se de barras com diferentes configurações de áreas.

## Capítulo 5

### Consideração finais

Neste trabalho aplicou-se MEF e o algoritmo FAIPA para resolver o problema de otimização estrutural (2.45).

No decorrer do estudo buscou-se um referencial histórico, com intuito de explicar, de forma sucinta, ao leitor, os acontecimentos, assim como, os diversos fatores que contribuíram para a escolha do tema.

Para se chegar à formulação do problema de minimização da massa de treliças tridimensionais com restrições de tensão (2.45), realizou-se estudos na busca por um referencial e uma escrita sucinta e clara dos cálculos matemáticos necessários para o presente estudo. Nesta etapa encontrou-se grandes dificuldades na formulação de *MEF*, diante da proposta de escrita, no entanto, acredita-se que a forma apresentada traz todos os elementos necessários para a fundamentação teórica e compreensão no que diz respeito ao *MEF*.

O problema de otimização em estudo está fundamentado em uma teoria forte de otimalidade, na qual buscou-se apresentar a mesma de forma breve e clara.

Quanto às técnicas numéricas, a análise estrutural foi realizada fazendo uso de rotinas do CALFEM que permitiu criar as estruturas de tal forma que verificasse a equação do equilíbrio (3.12), assim podendo utilizar o algoritmo de otimização FAIPA.

Os testes foram realizados com treliças tridimensionais inspiradas nas estruturas presentes na realidade do autor, onde, desde o início do presente curso motivou-se em estudar modelos de otimização estrutural.

Para os problemas propostos, os resultados numéricos apresentaram estruturas ótimas. Encontrou-se dificuldades em encontrar soluções viáveis para certas condições iniciais, mas a forma rápida que o FAIPA executou os testes, permitiu um grande número de teste, buscando assim, resultados que condizem com a teoria apresentada e conseguindo alcançar os objetivos do trabalho.

Diante dos testes verificou-se a sensibilidade das estruturas em relação às forças aplicadas nos problemas, tendo em vista que quanto maior for a força maior será

tensão, assim para grandes forças os problemas ficam inviáveis para certas condições iniciais.

Na situação problema 4.3.5, considerando os dados iniciais os mesmos apresentados na referida aplicação e manipulando a intensidade de forças, encontrou-se soluções ótimas apenas para estruturas sujeitas menores ou (igual 4.3.5) a intensidade de força  $p = -1000 * 9.8$ .

Quando se aplicou uma força  $p = -800 * 9.8$  no problema 4.3.5, o gráfico de áreas é similar ao apresentado na Figura 4.14 apresentando uma redução maior das áreas, ou seja as barras estão com menos tensão.

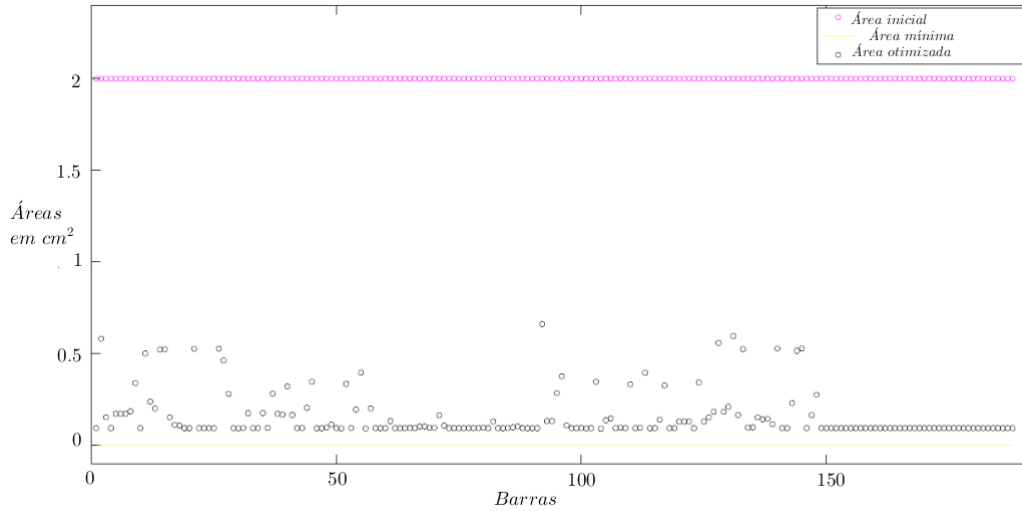


Figura 5.1: Estrutura ótima da aplicação 4.3.5 para outra força inicial

Assim, em cada aplicação buscou-se a estrutura ótima, para os dados propostos, tendo em vista que todas as soluções convergiram para um ponto de  $KKT$ .

O processo de otimização aplicado nas estruturas tridimensionais utilizadas nos testes apresentou resultados condizente com o referencial teórico abordado no estudo, onde a minimização de massa com restrições de tensão apresentou redução significativa nas áreas das barras transversais das estruturas, apresentando resistência a certas quantidades de forças e assim, reduzindo a espessura das mesmas.

Em todas as estruturas a redução das áreas é proporcional à força aplicada de modo que as configurações dos níveis de discretização das barra permanecem os mesmos independentemente da força aplicada. A citar a estrutura 4.7, quando reduzisse a força aplicada na mesma em 50%, ou seja,  $p = -1500 * 9.8$ . Como mostra na Figura 5.2 as áreas das barras reduziram em 50 % do valor encontrado após otimização no primeiro caso Figura 4.11.

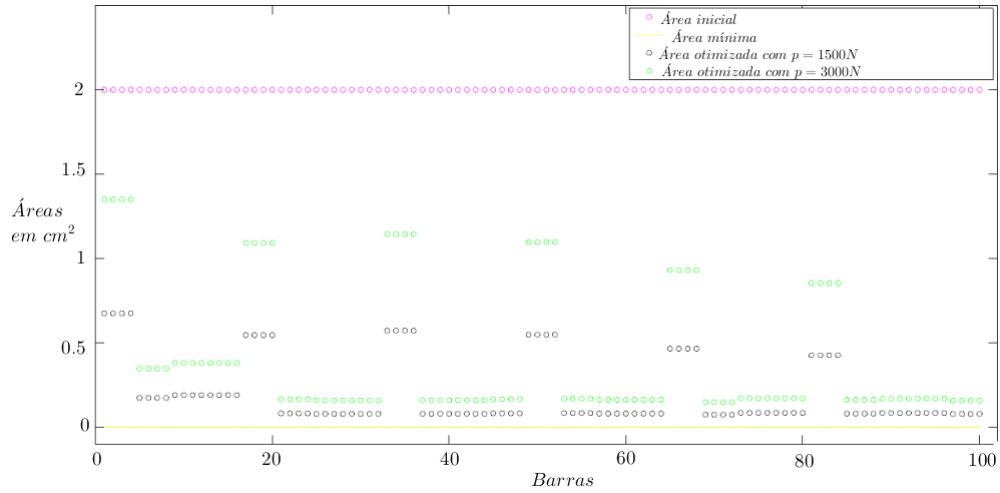


Figura 5.2: Estrutura ótima da aplicação 4.3.3 para outra força inicial

Assim, o presente trabalho alcançou os objetivos propostos, diante do exposto, espera-se que o mesmo possa auxiliar aos futuros estudos realizados pelos alunos do PPGMMC que venham realizar trabalhos na linha de otimização estrutural, assim como, contribua com crescimento daqueles que tenham contato com este material.

## 5.1 Sugestão para trabalhos futuros

Este trabalho despertou no autor o interesse em realizar novos estudos na área de otimização estrutural. Alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos futuramente são:

- Minimização da massa de treliças tridimensional considerado massa própria com restrição de tensão.
- Minimização da complacência de treliças tridimensional considerando massa própria com restrições de deslocamento e tensão.
- Estudar como reduzir o numero de variáveis, definindo variáveis de projeto de acordo com a simetria da estrutura.

# Referências Bibliográficas

- [1] BAZZO, W., PEREREIRA, L. *Introdução à engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos*. 1 ed. Florianopolis, Editora da UFSC, 2006.
- [2] LEET, K. M., UANG, C., GILBERT, A. M. *Fundamentos da análise estrutural [recurso eletrônico]*. 3 ed. Porto Alegre- RS, AMGH, dados eletronicos, 2009.
- [3] SILVA, E. C. N. “Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos”, *Departamento de Engenharia Mecatrônica e Sistemas Mecânicos da Escola Politécnica da USP*, pp. 39–43, São Paulo,SP,Brasil 2000.
- [4] CHOI, K. K., KIM, N. H. *Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1 Linear Systems*. 1 ed. Springer, USA, 2005.
- [5] BENDSOE, M., KIKUCHI, N. “Optimal topologies in structural design / Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Elsevier Science Publishers*, pp. 198–224, 1998.
- [6] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey 07632, Prentice-Hall, 1987.
- [7] HERSKOVITS, J., SANTOS, G. *A Feasible arc interior point algorithms for nonlinear optimization*. Computational Mechanics and New trends and Applications hal-00758803, CIMNE, Barcelona, Spain, 2014.
- [8] FEIJÓO, R. A., TAROCO, E., PADRA, C. “Métodos Variacionais”, 2004.
- [9] PEREIRA, O. J. B. A. *Análises de estruturas II: Introdução ao método dos elementos finitos na análise de problemas planos de elasticidade*. 2005.
- [10] BEER, F., JR, E., DEWOLF, J., et al. *Estatica e mecanica do materiais [recurso eletrônico]*. traduzido por: Antônio eustáquio de melo ed. Porto Alegre, AMGH, 2013.

- [11] R.L.HIBBELER. *Resistência dos materiais; tradução J.P.N. Silva*. Pearson prentice hall ed. São Paulo, 2004.
- [12] AROZTEGUI, M. *Uma nova técnica para otimização de estrutura de grande porte*. M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.
- [13] HERSKOVITS, J. *An Interior Point Technique for Nonlinear Optimization*. In: Research Report No 1808, INRIA, BP 105, 78153, Le Chesnay CEDEX, France, 1992.
- [14] EDENNIS, J., MORE, J. “Quasi - Newton Methods, Motivation and Theory”, *SIAM Review*, v. 19, pp. 46–89, 1997.
- [15] NOCEDAL, J., WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. Berlin, Spring, 1999.

# Configuração de uma treliça

Seja a Figura A.1 uma estrutura 3D.

- Definir o tipo de material e sua área.

- Geometria se define a dimensão (*nsd*), as coordenadas de cada nó (*NoCoord*) e as barras ligadas a cada nó (*ENod*).

50



```
ENode=ENode(: , 2:nsd);
[nel ncol]=size(ENode);
```

- Define os graus de liberdade de cada nó (*Dof*) e quais graus estão fixos (*bc*).

```
Dof=[
1   1   2   3
2   4   5   6
...

12  34  35  36 ];
Dof=Dof(: , 2:nsd+1);
ndof=max(max(Dof));

bc=[
1   0
2   0
...
12  0
];

Edof=zeros(nel, 2*nsd+1);
for e=1:nel
dofn1=Dof(ENode(e, 1), :);
dofn2=Dof(ENode(e, 2), :);
Edof(e, :)= [e dofn1 dofn2];
end
[nel ncol]=size(Edof);
Edof=Edof(: , 2:ncol);
```

- Define o vetor de forças (*p*), indicando em quais graus de liberdade serão aplicadas as forças.

```
p=zeros(ndof, 1);
p(27)=-intensidade;
p(30)=-intensidade;
p(33)=-intensidade;
p(36)=-intensidade;
```

- Agora em outro documento, *deslocamento.m*, se realiza o cálculo da matriz de rigidez (*K*) e do vetor deslocamento (*u*) dado por:

- No *for* é calculado a rigidez de cada elemento e montada a matriz de rigidez global *K*, de acordo com o exposto em 3.1.1.
- Seguindo é calculado o deslocamento *u*.

```
function [u K]=deslocamento(areas)
```

```
K=zeros(ndof);
vecn=zeros(nsd, nel);

for e=1:nel
nos=ENode(e, :);
xyz=Coord(nos, :);
dx=xyz(2,1)-xyz(1,1);
dy=xyz(2,2)-xyz(1,2);
dz=xyz(2,3)-xyz(1,3);
bvec=[dx; dy; dz];
L=sqrt(bvec'*bvec);

vec=bvec/L;
vecn(:, e)=vec;
G=[vec' zeros(1, nsd);
zeros(1, nsd) vec'];
```

```

Kle=E*areas(e)/L*[1 -1;
-1 1];

Kbarra=G'*Kle*G;
graus=Edof(e,:);
K(graus,graus)=K(graus,graus)+Kbarra;
end

graus_prescritos=bc(:,1);
dof=1:ndof;
dof(graus_prescritos)=[];
ndof_red=max(size(dof));
K_red=K(dof,dof);
p_red=p(dof);
u_red=K_red\p_red;
u=zeros(ndof,1);
u(dof)=u_red;

```

- Em seguida, é realizado o cálculo da tensão, em outro documento nomeado *tensaonormal.m*
- no *for* é calculado a tensão de cada elemento como descrito em 3.1.2

```

function t=tensaonormal(areas)

% repete todo o processo de function [u K]=deslocamento(areas), mais:

t=zeros(nel,1);
for e=1:nel
nos=ENode(e,:);
xyz=Coord(nos,:);
dx=xyz(2,1)-xyz(1,1);
dy=xyz(2,2)-xyz(1,2);
dz=xyz(2,3)-xyz(1,3);
bvec=[dx;dy;dz];
L=sqrt(bvec'*bvec);

vec=bvec/L;
G=[vec' zeros(1,nsd);
zeros(1,nsd) vec'];

graus=Edof(e,:);
ue=u(graus);
N=E*areas(e)/L*[-1 1]*G*ue;
t(e)=N/areas(e);
end

```

- É definida a função *desenha* que retorna as Figuras A.1 (antes deslocamento) e A.2, (após deslocamento).
  - No *for* é calculada a nova posição de cada nó após o deslocamento. onde *CoordDesloc* guarda a nova posição de cada nó.

```

u=deslocamento(areas);
t=tensaonormal(areas);

desenha(Coord,ENode,Dof,areas,t,'b-',[0 1 0 1]) % Desenha a Figura A.1.

CoordDesloc=zeros(nn,nsd);
for no=1:nn
CoordDesloc(no,:)=Coord(no,:)+u(Dof(no,:))';
end

desenha(CoordDesloc,ENode,Dof,areas,t,'b-',[0 1 0 1]) % Desenha a Figura A.2.

```

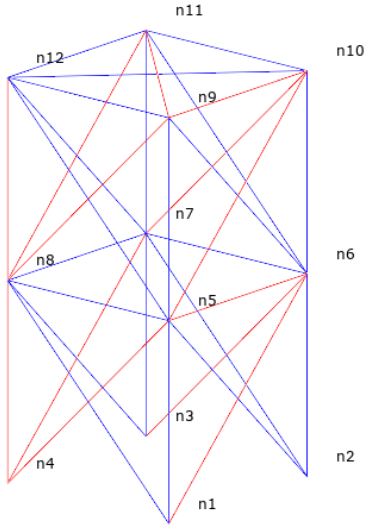


Figura A.1: Estrutura tridimensional discretizada em 36 elementos.

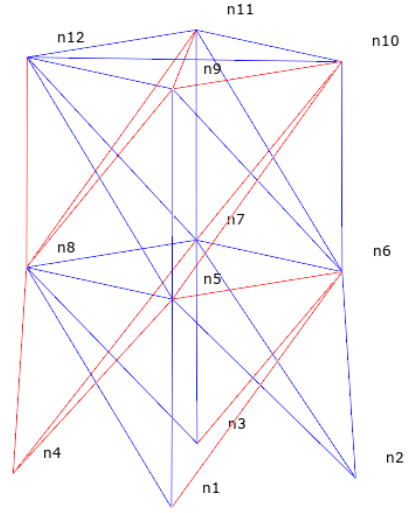


Figura A.2: Estrutura deformada.

No exemplo acima,  $n_e = 36$  elementos, 12 nós,  $n_{gl} = 36$  graus de liberdade. O valor do módulo de elasticidade é  $E = 157 \times 10^6 Pa$  madeira de jatobá, área inicial 0.0006 e intensidade de força é  $-500$ . O nó ① está fixo, os nós ② e ③ estão fixos na direção  $z$  e o nó ④ na direção  $y$  e  $z$ . As forças nodais  $p$  são aplicadas nos graus de liberdade  $z$  dos nós ⑨, ⑩, ⑪ e ⑫.

# Apêndice B

## Iterações do FAIPA

A segue apresenta-se todas as tabelas de interações do algoritmo FAIPA para realizar a otimização das aplicações propostas neste trabalho.

Dados da tabela:

- *intr* - Número de interações;
- *objective* - Valor da função objetivo;
- $|d_0|$  - Norma da direção de descida ;
- $|lagrang|$ - Norma dos multiplicadores de Lagrange ;
- $|comp11|$  - Norma da complementariedade ;
- *step*- Passo de Armijo;
- *iterlin*- Número de interações da busca linear;

| iter | objective  | d0           | lagran       | compl1       | erreq | trLOA | step      | nbind | iterlin |
|------|------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-----------|-------|---------|
| 0    | 0.0117     |              |              |              |       |       |           |       |         |
| 1    | 0.0116983  | 2.73863e-007 | 2.73863e-007 | 0.000147101  | 0     | 0     | 1         | 39    | 1       |
| 2    | 0.00394704 | 0.00358738   | 0.864008     | 4.17974e-005 | 0     | 0     | 0.358958  | 39    | 2       |
| 3    | 0.00345316 | 0.000842224  | 0.164791     | 4.02647e-005 | 0     | 0     | 0.125357  | 39    | 3       |
| 4    | 0.00281632 | 0.000445285  | 0.368798     | 1.29948e-005 | 0     | 0     | 0.241832  | 39    | 2       |
| 5    | 0.00246091 | 0.000318211  | 0.386867     | 1.18923e-005 | 0     | 0     | 0.206686  | 39    | 2       |
| 6    | 0.00226812 | 0.000226262  | 0.186218     | 9.93259e-006 | 0     | 0     | 0.169653  | 39    | 2       |
| 7    | 0.00222619 | 0.00016873   | 0.201399     | 9.0445e-006  | 0     | 0     | 0.0532568 | 39    | 2       |
| 8    | 0.00217692 | 0.000120239  | 0.446078     | 7.65064e-006 | 0     | 0     | 0.12074   | 39    | 2       |
| 9    | 0.00216547 | 0.000108607  | 0.38035      | 7.24744e-006 | 0     | 0     | 0.0397991 | 39    | 2       |
| 10   | 0.00201409 | 0.000114001  | 0.12657      | 2.83397e-006 | 0     | 0     | 0.581476  | 39    | 2       |
| 11   | 0.00193956 | 4.93352e-005 | 0.0812643    | 9.34034e-007 | 0     | 0     | 0.683658  | 39    | 2       |

Figura B.1: Tabela de interações da aplicação 4.3.1

| iter | objective  | d0           | lagran       | compl1       | erreq | trLOA | step      | nbind | iterlin |
|------|------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-----------|-------|---------|
| 0    | 0.0219     |              |              |              |       |       |           |       |         |
| 1    | 0.0218968  | 3.79193e-007 | 3.79193e-007 | 0.000109287  | 0     | 0     | 1         | 73    | 1       |
| 2    | 0.00698959 | 0.00494246   | 0.462986     | 1.76419e-005 | 0     | 0     | 0.368687  | 73    | 2       |
| 3    | 0.00532475 | 0.000752123  | 0.199137     | 1.07367e-005 | 0     | 0     | 0.261113  | 73    | 2       |
| 4    | 0.0045438  | 0.000526016  | 0.389651     | 9.15842e-006 | 0     | 0     | 0.183944  | 73    | 2       |
| 5    | 0.00430246 | 0.000377623  | 0.358282     | 9.84888e-006 | 0     | 0     | 0.0845505 | 73    | 2       |
| 6    | 0.0039153  | 0.000349507  | 0.355044     | 8.76973e-006 | 0     | 0     | 0.163981  | 73    | 2       |
| 7    | 0.00350092 | 0.0002878    | 0.220086     | 6.85461e-006 | 0     | 0     | 0.227149  | 73    | 2       |
| 8    | 0.00335655 | 0.000232494  | 0.371889     | 6.1485e-006  | 0     | 0     | 0.0991713 | 73    | 2       |
| 9    | 0.00308433 | 0.000199388  | 0.634657     | 4.82844e-006 | 0     | 0     | 0.217585  | 73    | 2       |
| 10   | 0.00304231 | 0.000157857  | 0.182139     | 4.34381e-006 | 0     | 0     | 0.0423269 | 73    | 2       |
| 11   | 0.00302966 | 0.00014471   | 0.158439     | 4.23335e-006 | 0     | 0     | 0.0139363 | 73    | 2       |
| 12   | 0.00287481 | 0.000137523  | 0.705275     | 3.69176e-006 | 0     | 0     | 0.189842  | 73    | 2       |
| 13   | 0.00246774 | 0.000116938  | 0.206235     | 1.54285e-006 | 0     | 0     | 0.592112  | 73    | 2       |
| 14   | 0.00228241 | 4.58865e-005 | 0.0362334    | 4.76586e-007 | 0     | 0     | 0.681421  | 73    | 2       |

Figura B.2: Tabela de interações da aplicação 4.3.2

| iter | objective  | d0           | lagran       | compl1       | erreq | trLOA | step        | nbind | iterlin |
|------|------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-------------|-------|---------|
| 0    | 0.0345     |              |              |              |       |       |             |       |         |
| 1    | 0.0344957  | 3.62689e-007 | 3.62689e-007 | 9.08379e-005 | 0     | 0     | 1           | 138   | 1       |
| 2    | 0.0107955  | 0.00571342   | 0.575646     | 1.97122e-005 | 0     | 0     | 0.378685    | 138   | 2       |
| 3    | 0.00690409 | 0.000869882  | 0.248324     | 1.26851e-006 | 0     | 0     | 0.384828    | 138   | 2       |
| 4    | 0.00615666 | 0.000530725  | 0.103761     | 1.08265e-006 | 0     | 0     | 0.122373    | 138   | 2       |
| 5    | 0.00575968 | 0.000452318  | 0.140969     | 1.4083e-006  | 0     | 0     | 0.0779121   | 138   | 2       |
| 6    | 0.00493784 | 0.00042882   | 0.0567836    | 1.08315e-006 | 0     | 0     | 0.173075    | 138   | 2       |
| 7    | 0.00484773 | 0.000336356  | 0.218732     | 1.86646e-006 | 0     | 0     | 0.0247548   | 138   | 2       |
| 8    | 0.00433514 | 0.00033622   | 0.440917     | 1.73146e-006 | 0     | 0     | 0.14572     | 138   | 2       |
| 9    | 0.00420605 | 0.000260325  | 0.396705     | 2.1655e-006  | 0     | 0     | 0.0501394   | 138   | 2       |
| 10   | 0.00371531 | 0.000268313  | 0.611179     | 1.7847e-006  | 0     | 0     | 0.203063    | 138   | 2       |
| 11   | 0.00350983 | 0.000220221  | 0.219024     | 1.72138e-006 | 0     | 0     | 0.105453    | 138   | 2       |
| 12   | 0.00346992 | 0.000190222  | 0.472762     | 1.77261e-006 | 0     | 0     | 0.0233163   | 138   | 2       |
| 13   | 0.00340627 | 0.000179494  | 0.345977     | 1.72899e-006 | 0     | 0     | 0.0391761   | 138   | 2       |
| 14   | 0.00336936 | 0.000163887  | 1.27385      | 2.32964e-006 | 0     | 0     | 0.025689    | 138   | 2       |
| 15   | 0.00326305 | 0.000160875  | 1.78786      | 2.12458e-006 | 0     | 0     | 0.0772608   | 138   | 2       |
| 16   | 0.00318756 | 0.00014058   | 2.47658      | 2.26966e-006 | 0     | 0     | 0.0648538   | 138   | 2       |
| 17   | 0.00287265 | 0.000148544  | 2.42245      | 1.67667e-006 | 0     | 0     | 0.191673    | 138   | 3       |
| 18   | 0.00282855 | 0.000136447  | 5.50948      | 1.85164e-006 | 0     | 0     | 0.0745194   | 138   | 1       |
| 19   | 0.00288015 | 0.000118034  | 6.32469      | 1.66433e-006 | 0     | 0     | 0.002557    | 138   | 2       |
| 20   | 0.00287154 | 0.00062246   | 3.42276      | 1.72328e-006 | 0     | 0     | 0.00498995  | 138   | 2       |
| 21   | 0.00285264 | 0.000151801  | 3.41195      | 1.84858e-006 | 0     | 0     | 0.0233218   | 138   | 2       |
| 22   | 0.00283203 | 0.000112351  | 1.42481      | 3.15761e-006 | 0     | 0     | 0.0262915   | 138   | 2       |
| 23   | 0.00280264 | 0.000131687  | 1.18882      | 2.5254e-006  | 0     | 0     | 0.040158    | 138   | 2       |
| 24   | 0.00280244 | 0.000156742  | 1.73585      | 1.97547e-006 | 0     | 0     | 0.000324927 | 138   | 1       |
| 25   | 0.00279331 | 0.000221964  | 0.98892      | 2.56397e-006 | 0     | 0     | 0.0121334   | 138   | 2       |
| 26   | 0.00278387 | 0.000112147  | 0.863795     | 3.10451e-006 | 0     | 0     | 0.0139274   | 138   | 2       |
| 27   | 0.00278373 | 0.000422663  | 0.630531     | 5.00413e-006 | 0     | 0     | 0.000182355 | 138   | 2       |
| 28   | 0.00277379 | 9.8724e-005  | 0.695466     | 2.5974e-006  | 0     | 0     | 0.0151468   | 138   | 2       |

Figura B.3: Tabela de interações da aplicação 4.3.3

| iter | objective  | d0           | lagran       | compl1       | erreq | trLOA | step       | nbind | iterlin |
|------|------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|------------|-------|---------|
| 0    | 0.02       |              |              |              |       |       |            |       |         |
| 1    | 0.0199981  | 1.90157e-007 | 1.90157e-007 | 0.000247657  | 0     | 0     | 1          | 100   | 1       |
| 2    | 0.00780948 | 0.00361115   | 2.3619       | 7.33288e-005 | 0     | 0     | 0.360693   | 100   | 2       |
| 3    | 0.00714408 | 0.00118871   | 0.714881     | 0.000100157  | 0     | 0     | 0.0911624  | 100   | 3       |
| 4    | 0.00554479 | 0.000516149  | 0.719071     | 5.46178e-005 | 0     | 0     | 0.355191   | 100   | 3       |
| 5    | 0.00535994 | 0.000312502  | 0.634112     | 3.5548e-005  | 0     | 0     | 0.0726002  | 100   | 2       |
| 6    | 0.00507172 | 0.0002885    | 0.904649     | 3.26836e-005 | 0     | 0     | 0.123699   | 100   | 2       |
| 7    | 0.00490993 | 0.00024131   | 0.705452     | 2.73648e-005 | 0     | 0     | 0.0875153  | 100   | 2       |
| 8    | 0.00410846 | 0.000228889  | 0.902655     | 1.40054e-005 | 0     | 0     | 0.465496   | 100   | 3       |
| 9    | 0.0040869  | 0.000120282  | 0.18405      | 1.34391e-005 | 0     | 0     | 0.0237535  | 100   | 2       |
| 10   | 0.00408148 | 0.000116765  | 0.632559     | 1.2668e-005  | 0     | 0     | 0.00616615 | 100   | 2       |
| 11   | 0.00407698 | 9.47736e-005 | 2.23306      | 1.10217e-005 | 0     | 0     | 0.00675901 | 100   | 2       |

Figura B.4: Tabela de interações da aplicação 4.3.4

| iter | objective  | d0           | lagran      | compl1       | erreq | trL0A | step         | nbind | iterlin |
|------|------------|--------------|-------------|--------------|-------|-------|--------------|-------|---------|
| 0    | 0.0376     |              |             |              |       |       |              |       |         |
| 1    | 0.0375963  | 2.7109e-007  | 2.7109e-007 | 7.19949e-005 | 0     | 0     | 1            | 188   | 1       |
| 2    | 0.0117507  | 0.00533878   | 0.27995     | 8.13421e-006 | 0     | 0     | 0.380771     | 188   | 2       |
| 3    | 0.00906117 | 0.000813774  | 0.139129    | 3.4546e-006  | 0     | 0     | 0.243847     | 188   | 2       |
| 4    | 0.00852897 | 0.000579943  | 0.487646    | 6.42648e-006 | 0     | 0     | 0.0702349    | 188   | 2       |
| 5    | 0.00708975 | 0.000534734  | 0.787269    | 5.97449e-006 | 0     | 0     | 0.219029     | 188   | 2       |
| 6    | 0.00636868 | 0.000460454  | 0.322003    | 6.1494e-006  | 0     | 0     | 0.13388      | 188   | 2       |
| 7    | 0.00610522 | 0.000362384  | 0.561162    | 6.92832e-006 | 0     | 0     | 0.0602242    | 188   | 2       |
| 8    | 0.00576992 | 0.000338918  | 0.381231    | 7.30365e-006 | 0     | 0     | 0.0847692    | 188   | 2       |
| 9    | 0.00534814 | 0.000321677  | 0.184663    | 6.08215e-006 | 0     | 0     | 0.115394     | 188   | 2       |
| 10   | 0.00521125 | 0.000273175  | 0.45892     | 6.13233e-006 | 0     | 0     | 0.0434623    | 188   | 2       |
| 11   | 0.00517013 | 0.000258128  | 0.579862    | 6.2687e-006  | 0     | 0     | 0.0138981    | 188   | 2       |
| 12   | 0.00503191 | 0.000247054  | 0.725879    | 6.24255e-006 | 0     | 0     | 0.0487865    | 188   | 2       |
| 13   | 0.00471364 | 0.000239051  | 1.04372     | 5.99599e-006 | 0     | 0     | 0.119527     | 188   | 2       |
| 14   | 0.0044236  | 0.000202851  | 0.66852     | 6.4282e-006  | 0     | 0     | 0.129477     | 188   | 2       |
| 15   | 0.00440062 | 0.000172328  | 0.774018    | 7.34484e-006 | 0     | 0     | 0.0122588    | 188   | 2       |
| 16   | 0.00429621 | 0.000162044  | 0.54406     | 8.64622e-006 | 0     | 0     | 0.0587492    | 188   | 2       |
| 17   | 0.0042565  | 0.000170674  | 0.57573     | 8.80432e-006 | 0     | 0     | 0.0240703    | 188   | 2       |
| 18   | 0.00423526 | 0.00016827   | 0.372199    | 9.88888e-006 | 0     | 0     | 0.0135645    | 188   | 2       |
| 19   | 0.00423489 | 0.00244617   | 0.505673    | 9.21336e-006 | 0     | 0     | 0.000280568  | 188   | 2       |
| 20   | 0.00415137 | 0.000176376  | 0.442196    | 8.55724e-006 | 0     | 0     | 0.0540136    | 188   | 1       |
| 21   | 0.00413251 | 0.000287056  | 1.27487     | 7.90539e-006 | 0     | 0     | 0.0127816    | 188   | 3       |
| 22   | 0.00413135 | 0.000908     | 0.239623    | 9.07275e-006 | 0     | 0     | 0.000811522  | 188   | 2       |
| 23   | 0.00409581 | 0.000162135  | 0.241123    | 8.41636e-006 | 0     | 0     | 0.0247247    | 188   | 1       |
| 24   | 0.00409021 | 0.000144819  | 0.41846     | 8.27444e-006 | 0     | 0     | 0.00401567   | 188   | 7       |
| 25   | 0.00408932 | 0.000142424  | 0.57894     | 8.58887e-006 | 0     | 0     | 0.000648138  | 188   | 14      |
| 26   | 0.00408922 | 0.000218417  | 0.586663    | 9.97794e-006 | 0     | 0     | 7.0116e-005  | 188   | 19      |
| 27   | 0.0040892  | 0.000141047  | 0.384056    | 1.16527e-005 | 0     | 0     | 1.47384e-005 | 188   | 22      |
| 28   | 0.0040892  | 0.000226185  | 0.572933    | 1.03665e-005 | 0     | 0     | 5.36455e-007 | 188   | 35      |
| 29   | 0.00408185 | 0.00046418   | 0.517759    | 1.6411e-005  | 0     | 0     | 0.00528774   | 188   | 2       |
| 30   | 0.0040807  | 0.0180758    | 1.04125     | 1.52903e-005 | 0     | 0     | 0.000654174  | 188   | 5       |
| 31   | 0.00393648 | 0.000139718  | 0.442081    | 1.30647e-005 | 0     | 0     | 0.109349     | 188   | 3       |
| 32   | 0.00393026 | 0.00103693   | 1.08636     | 1.2355e-005  | 0     | 0     | 0.00555915   | 188   | 3       |
| 33   | 0.00392915 | 0.00124582   | 0.541165    | 1.1879e-005  | 0     | 0     | 0.00104925   | 188   | 2       |
| 34   | 0.00387503 | 0.000326233  | 0.579052    | 1.13398e-005 | 0     | 0     | 0.0468803    | 188   | 2       |
| 35   | 0.0038088  | 0.000115248  | 0.952193    | 9.82597e-006 | 0     | 0     | 0.0599688    | 188   | 3       |
| 36   | 0.00380716 | 0.000898809  | 0.813672    | 1.033e-005   | 0     | 0     | 0.0016363    | 188   | 2       |
| 37   | 0.00367697 | 0.00051881   | 0.424393    | 8.96478e-006 | 0     | 0     | 0.127688     | 188   | 1       |
| 38   | 0.00367691 | 0.00128962   | 1.45126     | 8.81605e-006 | 0     | 0     | 8.95397e-005 | 188   | 1       |
| 39   | 0.00365182 | 9.71181e-005 | 1.18045     | 8.57853e-006 | 0     | 0     | 0.0281024    | 188   | 2       |

Figura B.5: Tabela de interações da aplicação 4.3.5