

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEFFERSON DE ARAÚJO FERREIRA

O ENSINO DE COMBINATÓRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS
DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

João Pessoa - PB
2015

JEFFERSON DE ARAÚJO FERREIRA

**O ENSINO DE COMBINATÓRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS
DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da
Paraíba como requisito parcial para obtenção
do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rogéria Gaudêncio do
Rêgo

João Pessoa – PB

2015

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN
Maria Teresa Macau - CRB 15/176

A383e Ferreira, Jefferson de Araújo.
O ensino de combinatória: uma análise de livros didáticos de matemática / Jefferson de Araújo Ferreira.- João Pessoa, 2015.
66p. : il.-

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba.
Orientadora: Profª Drª Rogéria Gaudêncio do Rêgo.

1. Análise combinatória. 2. Matemática - Ensino.
3. Livros didáticos - Matemática. I. Título.

UFPB/BS-CCEN

CDU 519.1(043.2)

O ENSINO DE COMBINATÓRIA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rogéria Gaudêncio do Rêgo

Aprovado em: ____/____/2015.

Nota: _____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.^a. Dr.^a. Rogéria Gaudêncio do Rêgo - UFPB
(Orientadora)

Prof. Ms Antonio Sales da Silva - UFPB
(Avaliador)

Prof. Ms João Batista Alves Parente - UFPB
(Avaliador)

Aos meus pais, Marcos e Maria de Lourdes,
pelo apoio e incentivo durante todo o Curso.

Em especial aos meus amigos, Jailton e
Avelino Neto, pelo companheirismo e pelas
muitas horas de estudo.

A minha futura esposa, Amanda, que sempre
acreditou em minha capacidade intelectual.

A todos os professores do Departamento de
Matemática, pelo conhecimento que adquiri
durante a minha Graduação.

AGRADECIMENTOS

Destino esse espaço em particular para agradecer o incentivo de muitas pessoas presentes em minha vida, que contribuíram de todas as formas possíveis para essa conquista.

Em especial ao meu pai, Marcos Domingos Ferreira, e a minha mãe, Maria de Lourdes de Araújo Ferreira, pelo apoio incondicional; pela minha educação; por me orientarem e me amarem sempre, independentemente das escolhas que eu fiz.

A minha futura esposa, Amanda Silva Santos, que sempre esteve comigo. Mais que uma companheira, uma verdadeira amiga, sempre acreditando em um potencial que nem eu mesmo sabia que tinha.

A todos os amigos que fiz no Curso, em especial a Jailton da Silva Nascimento (Cap. Nascimento), e Avelino (Neto), pela companhia nas horas de estudo e pela amizade.

A todo o corpo docente do Departamento de Matemática, por conseguirem transformar um aluno da rede pública em um professor de Matemática, alterando completamente minha perspectiva de vida profissional e me ajudando a adquirir, mesmo que por muitas vezes aos trancos e barrancos, um conhecimento que de outra forma não estaria ao meu alcance.

Para todos os meus professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, por participarem do início de minha formação, professores estes que retiraram leite de pedra para lapidar e orientar minha pessoa como cidadão.

A minha professora orientadora, Rogéria Gaudêncio do Rêgo pelas horas de dedicação destinadas a minha pessoa e a esse trabalho de conclusão de curso.

Meus sinceros agradecimentos!

Os nossos pais amam-nos porque somos seus filhos, é um fato inalterável. Nos momentos de sucesso, isso pode parecer irrelevante, mas nas ocasiões de fracasso, oferecem um consolo e uma segurança que não se encontram em qualquer outro lugar.

Bertrand Russell

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo geral analisar propostas de ensino de Análise Combinatória presentes em livros didáticos de Matemática das décadas de 1960 e 2000, dirigidos ao atual Ensino Médio, considerando a perspectiva da contextualização desse conteúdo. O foco de análise se deu tanto em relação à apresentação dos conteúdos quanto aos exercícios, problemas e atividades propostos. Nosso trabalho de investigação foi de natureza qualitativa, baseada em uma pesquisa bibliográfica de livros de Matemática, tendo como foco o conceito de contextualização, conforme discutido por D'Ambrósio (2005), Vasconcelos (2015) e outros autores. Tomamos como base de discussão teórica, ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os quatro anos finais do ensino Fundamental (PCN) (BRASIL, 1998, 1999) e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2002), tanto para discutir a importância do conteúdo destacado para a formação do aluno quanto para discutir o conceito de contextualização. Considerando esse foco de discussão, concluímos que, embora o foco algébrico formal predomine nas obras da década de 1960, observa-se nesses livros a proposição de algumas questões contextualizadas, com temáticas diversas. Na obra da década de 2000 analisada, a abordagem dos conteúdos é algebricamente mais informal e os problemas são mais diversificados, em termos de contextos. Concluímos desse modo, que houve evolução da estrutura das obras didáticas de Matemática, comparando-se os textos das duas décadas destacadas, em relação à apresentação desse conteúdo, tomando-se como foco a contextualização dos conteúdos de Análise Combinatória.

Palavras-Chave: Análise Combinatória; Livros didáticos de Matemática; evolução do ensino de Matemática.

ABSTRACT

This study aimed to analyze Combinatorial Analysis of teaching proposals present in textbooks of Mathematics of the 1960s and 2000, led to the current high school, considering the perspective of the context of that content. The focus of analysis was done both for the presentation of the contents about the exercises, proposed problems and activities. Our research was qualitative in nature, based on a literature search of Mathematics books, focusing on the concept of contextualization, as discussed by D'Ambrosio (2005), Vasconcelos (2015) and other authors. We take as a theoretical basis for discussion, yet, the Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) for the final four years of elementary education (BRASIL, 1998, 1999) and the Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2002), both to discuss the importance of the highlighted content to the formation of the student and to discuss the concept of contextualization. Given this focus of discussion, we conclude that, although the formal algebraic focus predominates in the works of the 1960s, there is in these books the proposition of some contextual issues, with various themes. Analyzed in the work of the 2000s, the approach of the contents is algebraically more informal and problems are more diverse in terms of contexts. We conclude, therefore, that there was the current structure of textbooks of Mathematics, comparing the texts of two decades highlighted in relation to the presentation of that content, taking as focus the context of Combinatorial Analysis of content.

Keywords: Combinatorial analysis; Textbooks of Mathematics; evolution of mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Primeiro problema de contagem do livro 1.....	29
Figura 2 - Exemplo de contagem em lançamento de moedas.....	30
Figuras 3 - Pares ordenados de elementos de um conjunto A.....	31
Figura 4 - Formalização de Permutações.....	32
Figura 5 - Exemplos de exercícios aplicados ao cotidiano.....	33
Figura 6 - Exemplo para quatro elementos.....	34
Figura 7 - Proposta de associação entre Combinação e Permutação.....	35
Figura 8 - Sistematização da relação entre Combinação e Permutação.....	36
Figura 9 - Aplicações da fórmula de Combinação.....	37
Figura 10 - Exemplo envolvendo jogo de cartas.....	38
Figura 11 - Exemplo envolvendo interação de conteúdos.....	38
Figura 12 - Exemplos de exercícios práticos.....	39
Figura 13 - Exemplos de exercícios de aplicação direta.....	40
Figura 14 - Exercícios de caráter abstrato.....	40
Figura 15 - Exemplo sobre agrupamento simples.....	41
Figura 16 - Definições seguidas de seus respectivos exemplos.....	42
Figura 17 - Diferentes tipos de notações para arranjo.....	43
Figura 18 - Notação para permutação.....	43
Figura 19 - Exemplo de combinações simples.....	43
Figura 20 - Teorema fundamental e sua respectiva demonstração.....	45
Figura 21 - Fórmula do número de arranjo simples de objetos distintos.....	46
Figura 22 - Fórmula para calcular permutações de objetos repetidos.....	46
Figura 23 - Fórmula de permutação com objetos repetidos e seu respectivo exemplo.....	47
Figura 24 - Cálculo do número de combinações simples.....	47
Figura 25 - Relação de Stifel.....	48

Figura 26 - Questões de concurso de habilitação.....	49
Figura 27 - Árvores de possibilidades.....	51
Figura 28 - Exemplo utilizando tabela.....	52
Figura 29 - Problema explorando arranjo simples.....	54
Figura 30 - Fórmula de arranjo simples.....	55
Figura 31 - Exercícios sobre Arranjo simples com uso direto de fórmula.....	56
Figura 32 - Questões de Arranjo, contextualizadas.....	56
Figura 33 - Exemplo tomado como base para Combinação simples.....	57
Figura 34 - Construção da fórmula de combinação simples.....	57
Figura 35 - Exercícios sobre Combinação simples.....	58
Figura 36 - Resolução por permutação simples.....	59
Figura 37 - Resolução por permutação com elementos repetidos.....	59
Figura 38 - Introdução aos números binominais.....	60
Figura 39 - Algumas propriedades dos números binominais.....	60

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO AO TEMA DA PESQUISA.....	12
1.1 Justificativa da escolha do tema.....	12
1.2 Objetivos do trabalho.....	13
1.3 Metodologia adotada em nossa pesquisa.....	14
1.4 Estrutura e Organização do trabalho.....	14
2. O ENSINO DE ANÁLISE COMBINÁTORIA: UMA BREVE DISCUSSÃO.....	16
2.1 O Pensamento combinatório nos documentos oficiais.....	16
2.2 A Análise de livros didáticos em Souza (2010)	19
2.3 A Contextualização de conteúdos matemáticos.....	23
3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	27
3.1. Análise do livro 1.....	27
3.2 Análise do livro 2.....	41
3.3 Análise do livro 3.....	50
CONSIDERACOES FINAIS.....	63
REFERÊNCIAS.....	65

1 – INTRODUÇÃO AO TEMA DE NOSSA PESQUISA

1.1 Justificativa da escolha do tema

Não é de hoje que o ensino de Matemática vem sendo debatido pelas equipes dos órgãos responsáveis (escolas; Secretarias de Educação) e por pesquisadores, no que se refere às deficiências de aprendizado que têm sido observadas nos estudantes da Educação Básica. Os resultados mostrando esse baixo desempenho se manifesta em avaliações nacionais como a Prova Brasil, aplicada a alunos do Ensino Fundamental, e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Nesses exames temos visto uma crescente modificação na forma como os conteúdos são apresentados, em especial nas questões das avaliações dirigidas ao Ensino Médio, o que tem provocado mudanças no material dirigido a esse nível de ensino (livros didáticos, apostilas e outros). Problemas contextualizados e diferentes formas de abordagem de tais conteúdos, procuram envolver o cotidiano dos alunos, com o objetivo de aumentar seu interesse por aquilo que estudam.

Visando orientar os educadores que atuam nas diversas disciplinas da Educação Básica, no final da década de 1990, começaram a ser publicados pelo Ministério da Educação, obras denominadas de Parâmetros Curriculares, dirigidos para o Ensino Fundamental (PCN) e Médio (PCNEM). Esses documentos, embora não tenham força de lei, serviram de guia para muito do que tem sido feito na área de educação nas quase duas últimas décadas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais influenciaram, inclusive, a organização dos livros didáticos da atualidade, cujos princípios seguem esses documentos, por serem eles base do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). As resenhas dos livros nos Guias do PNLD referem-se, em geral, aos blocos de conteúdo definidos nesses documentos.

Nos PCN do Ensino Fundamental, a Matemática foi dividida nos seguintes blocos: Números e Operações; Grandezas e Medidas; Espaço e Forma e Tratamento da Informação. Nos PCNEM, a Matemática, discutida no documento “Ciências, Matemática e suas tecnologias”, foi dividida em quatro

grandes blocos: Números e operações; Funções; Geometria; e Análise de dados e Probabilidade.

Em nosso estudo iremos focar nossa análise e discussão no ensino voltado para a formação do pensamento combinatório, pelas razões que iremos expor no próximo Capítulo do presente trabalho. De acordo com os PCNEM (BRASIL, 1999), a Análise Combinatória não deve ser explorada com a única função de complementar a parte de Probabilidade, mas de adicionar a formação do aluno outras formas de abordar determinados problemas aplicados, sem necessariamente aplicar fórmulas.

Ou seja, “[A] combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias”. (BRASIL, 1999, p.79). Dessa forma, considerando as dificuldades gerais de aprendizado matemático dos alunos, fazendo um recorte para o campo da Análise Combinatória, tratamos das diferentes formas de abordagem desse conteúdo ao longo das últimas décadas.

1.2 Objetivos do trabalho

O nosso trabalho teve por Objetivo Geral: *analisar propostas de ensino de Análise Combinatória presentes em livros didáticos de Matemática das décadas de 1960 e 2000, dirigidos ao atual Ensino Médio, considerando a perspectiva da contextualização desse conteúdo.*

Partimos do pressuposto de que, mesmo com base em uma relativamente pequena amostragem de livros didáticos representando esse período, é possível esboçar um perfil geral do ensino de Análise Combinatória, tendo como foco a contextualização.

Para alcançar nosso Objetivo Geral, traçamos alguns Objetivos Específicos, que foram:

- Selecionar livros didáticos das duas décadas, contendo proposta de ensino para o conteúdo Análise Combinatória;
- Identificar, com base no referencial teórico, o eixo de análise das obras, no caso, selecionamos a contextualização;

- Avaliar a abordagem do conteúdo de Análise Combinatória, de acordo com os critérios estabelecidos na etapa anterior.

1.3. Metodologia adotada em nossa pesquisa

Tendo em vista os nossos objetivos Geral e Específicos, optamos por fazer um estudo qualitativo do tipo Pesquisa Bibliográfica (JEZINE, 2002). Partindo deste princípio, nosso trabalho visa levantar a evolução do ensino de Análise Combinatória, tendo como base coleções de livros didáticos de diferentes décadas, dirigidas ao atual Ensino Médio.

O foco de nossa análise será a natureza dos problemas propostos nos livros didáticos analisados, considerando se são contextualizados (internamente à própria Matemática, ao cotidiano ou a outras áreas de conhecimento) ou não (compreendem aplicação direta de regras ou fórmulas).

1.4 Estrutura e Organização do trabalho

Nosso trabalho apresenta a seguinte sequência de capítulos: Justificativa; Capítulo teórico; Apresentação e discussão dos resultados; e Considerações Finais.

No primeiro Capítulo, apresentamos as justificativas para a construção deste trabalho, assim como os objetivos que pretendemos alcançar e a metodologia utilizada.

No segundo Capítulo, faremos uma apresentação teórica sobre o conteúdo em questão e seu respectivo ensino nas escolas de nível médio, assim como a evolução do material didático até o presente momento.

No terceiro Capítulo apresentamos e discutimos a estrutura das coleções selecionadas, quanto ao conteúdo em foco, considerando as diferentes formas de abordar os conceitos relativos ao tema, as atividades, problemas e exercícios propostos.

Concluimos nosso trabalho, apresentando nossas Considerações Finais sobre o tema, apontando as contribuições de nossa pesquisa, bem como a possibilidade de ampliação de nossa investigação, em trabalhos futuros.

2. O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATORIA: UMA BREVE DISCUSSÃO

Este Capítulo traz um breve recorte teórico, baseado no pensamento de alguns pesquisadores que trataram ou tratam do ensino de Análise Combinatória, em particular aqueles que trataram dessa temática, vinculando-a aos livros didáticos de Matemática, dirigidos à formação dos alunos desde a década de 1960 até a atualidade. Vale salientar que nesse período o sistema educacional do nosso país passou por modificações de âmbito curricular e disciplinar, alterando, assim, a forma de abordagem dos conteúdos dos diferentes componentes curriculares e, em particular, de Matemática.

Apesar de entendermos que o ensino de cada período possuía características próprias e supostamente adequadas à época, como critérios básicos para a análise dos livros das décadas destacadas, tomaremos como referência as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a Educação Básica, assim como os trabalhos de pesquisa de Souza (2010), realizado em treze livros didáticos selecionados da década de 1940 até o ano de 2010.

2.1 O PENSAMENTO COMBINATÓRIO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a Matemática é discutida no texto intitulado: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, assim como as disciplinas de Química, Física e Biologia.

Em relação aos conteúdos a serem explorados nesse nível de escolaridade, na Matemática, os PCNEM evidenciam os seguintes temas estruturadores, a serem desenvolvidos ao longo dos três anos do Ensino Médio: 1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; e 3. Análise de dados.

Em nosso trabalho focamos nossa discussão no terceiro tema, ou seja, na Análise de dados, que se encontra dividido em três temáticas: Estatística; Contagem; e Probabilidade. Em relação ao item 2, Contagem - princípio multiplicativo e problemas de contagem, os conteúdos e habilidades propostos são:

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 1999, p. 124).

O documento ressalta que esse item, ao mesmo tempo em possibilita a ampliação do trabalho com a Probabilidade, auxilia o desenvolvimento de uma forma particular de pensamento matemático, denominada de raciocínio combinatório. Nesse caso, o trabalho do professor, teria como objetivo, ajudar o aluno a desenvolver sua capacidade de organizar dados e informações e, com eles, identificar os casos possíveis, o que não deve ser feito aplicando-se listas de regras e fórmulas, que o aluno nem sempre compreende. O processo “exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação”.

As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. (BRASIL, 1999, pp.126-127).

Os PCNEM orientam para o trabalho em sala de aula, o uso de calculadoras e do computador, que permitem a resolução de problemas com dados reais, ajudando o aluno a se familiarizar com esses instrumentos e com o uso de softwares matemáticos. Ainda de acordo com o documento citado, a Contagem auxilia no desenvolvimento de competências relacionadas a uma melhor compreensão de fenômenos atuais, de problemas no contexto social e cultural e de outras áreas de conhecimento.

Embora a Análise Combinatória seja explicitamente explorada apenas no Ensino Médio, pretende-se que o pensamento combinatório seja desenvolvido nos estudantes ainda no Ensino Fundamental. Quanto a esse aspecto, destacamos os PCN de Matemática voltados para o Ensino Fundamental e seus respectivos objetivos para o campo do Tratamento da

Informação. Embora o Ensino Fundamental compreenda hoje os anos de escolaridade que seguem a Educação Infantil, ou seja, vão do 1º ao 9º Anos, os PCN explicitam quatro ciclos do processo educacional, sendo os dois últimos correspondentes ao que atualmente denominamos de 6º ao 9º Anos.

No primeiro e no segundo ciclo, destaca-se o trabalho com as crianças das series iniciais do Ensino Fundamental, supostamente alfabetizadas, a fim de serem capazes de realizar leitura e interpretação de dados; a construção e resolução de problemas de caráter informativo; e a organização de dados, de tal forma que possam trabalhar conteúdos que envolvam elementos da Estatística, da Combinatória e da Probabilidade, atingindo assim o objetivo traçado pelo PCN as series iniciais, citado logo abaixo.

- Coleta, organização e descrição de dados.
- Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
- Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros.
- Obtenção e interpretação de média aritmética.
- Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades. (BRASIL, 1998, p.61)

No terceiro e quarto ciclos, a importância de trabalhar os conteúdos relativos ao pensamento combinatório se amplia cada vez mais, de forma a preparar o aluno, através de situações problemas vinculadas a outras áreas de conhecimento e ao cotidiano, para que ele seja capaz de lidar com problemas mais complexos e que exigem maior capacidade interpretativa, no Ensino Médio.

É importante salientar a interação do conteúdo de Combinatória com os conteúdos de Estatística e Probabilidade. Nessa interação fica evidente o objetivo de seu estudo, que é contribuir para o processo de desenvolvimento de um tipo particular de raciocínio. De acordo com os PCN,

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 1998, pág. 20)

As atividades desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, envolvendo agrupamentos, contagem e o princípio multiplicativo, possibilitarão que o aluno compreenda os conceitos centrais do Cálculo de Probabilidades e de Análise Combinatória, estudados no Ensino Médio.

Embora a base do pensamento combinatório precise ser desenvolvida ao longo do Ensino Fundamental, é apenas no Ensino Médio que os conceitos centrais relacionados a esses conteúdos são formalizados, por essa razão, nosso estudo será centrado nesse nível de escolaridade. Entendemos que a perspectiva metodológica adotada também influenciará diretamente nos resultados, o que nos remete ao livro didático de Matemática, que muitas vezes define o processo didático desenvolvido em sala de aula.

Os PCN reconhecem a importância que esse recurso tem para a prática de muitos professores da Educação Básica, por diversas razões, mas observa a necessidade de que o livro não seja o elemento definidor do que e de como se vai trabalhar um conteúdo. De qualquer modo, por entendermos que o livro didático é ainda uma das principais ferramentas utilizadas pelo professor, destacamos, em nossa pesquisa, a análise da proposta de trabalho para o conteúdo que escolhemos como recorte.

2.2 A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS EM SOUZA (2010)

Inicialmente iremos trazer os resultados de um trabalho de pesquisa realizado por Souza (2010), relativo ao conteúdo de Análise Combinatória, em livros didáticos de Matemática, de diferentes décadas. Em seu trabalho de pesquisa Souza considerou quatro critérios de análise:

- i) Se ao trabalhar a Análise Combinatória os autores partem ou não de problemas;
- ii) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo entre os alunos, no sentido de estimular pesquisas ou resolução de problemas em grupo;

- iii) Se a formalização dos conceitos de Análise Combinatória é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema, ou após a resolução do mesmo;
- iv) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o trabalho do professor em sala de aula, no sentido de propor atividades que favoreçam o desenvolvimento de um raciocínio combinatório (SOUZA, 2010, p.20)

Com base nesses critérios avaliativos, Souza estabeleceu o perfil geral dos livros didáticos analisados, identificando as principais características da abordagem proposta para o trabalho com Análise Combinatória nas diferentes obras, em suas respectivas décadas.

Iremos destacar em nosso texto, os resultados e discussões de Souza, começando por sua discussão sobre o sistema educacional dos anos 1960, que se caracterizou pela expansão do ensino básico para a população, com a Lei 4.024 de Diretrizes e Bases da Educação, promulgada em 21 de dezembro de 1961.

Destacava-se, em relação à Educação Básica, a nova divisão da fase que era então denominada de Ensino Médio: ela passaria a ser dividida em dois ciclos – o ciclo ginásial, com duração de quatro anos (hoje correspondente ao período do 6º ao 9º Anos do Ensino Fundamental) e o ciclo colegial, com três anos de duração (correspondente ao atual Ensino Médio).

De acordo com a autora, nesse período houve um significativo aumento da carga horária das disciplinas da área das ciências exatas, o que afetou diretamente a abordagem dos conteúdos, em especial os de Língua Portuguesa e Matemática, o que, conseqüentemente, implicou em mudanças no ensino de Análise Combinatória no Brasil.

Souza afirma que boa parte do material didático utilizado naquela época no ensino de Matemática era trazida do exterior e traduzida para o português. O material era conservador, com poucas informações teóricas, definições objetivas seguidas de exercícios de aplicação das fórmulas, sem a demanda de raciocínios mais elaborados.

A autora destaca a segunda grande transformação de âmbito nacional no sistema educativo brasileiro, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), nº 5.692, promulgada em 1971, durante a ditadura militar, e que afetava diretamente a grade curricular da Educação Básica, tendo como foco a

preparação do alunado à capacitação técnica profissionalizante para o mercado de trabalho. De acordo com ela, os livros de Matemática dessa década ainda possuíam características tradicionais de abordagem dos conteúdos, em especial de Análise Combinatória.

Tomando como base o processo de ensino desse conteúdo, Souza afirma que no livro “[...] os conceitos são definidos pelo professor, seguidos de alguns exemplos e com uma possível aplicação num problema a ser resolvido pelo professor, não permitindo a participação dos alunos na construção desses conceitos” (SOUZA, 2010, p. 100). A pesquisadora menciona ainda a falta de problemas de aplicação ao cotidiano e de problemas que visassem estimular o raciocínio do aluno.

Com o fim da ditadura militar, em 1988, o próximo grande passo da evolução educacional brasileira surgiu por volta de 1996, quando foi aprovada uma nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação (nº 9.394/96) que estabeleceu, no parágrafo 2º do Artigo 1º “[...] que a educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social”. (BRASIL, 1996).

Com a aprovação da nova LDB, surgiu a necessidade de serem apresentados parâmetros curriculares que auxiliassem os professores a entender os novos direcionamentos do processo de ensino e aprendizagem brasileiros, o que se deu com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dirigidos aos diferentes níveis da Educação Básica, para as diferentes áreas de conhecimento trabalhadas na escola.

O programa de acompanhamento da produção e distribuição de livros didáticos, denominado Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que já existia, passou a seguir as orientações propostas para o processo educacional, presentes nos PCN, a fim de aprimorar e solidificar o processo educativo e social dos alunos.

De acordo com Souza, a partir do final da década de 1990 a contextualização passou a ser explorada nos problemas de Matemática. Os livros passaram a ter mais Ilustrações, diagramas, definições mais simples, exercícios mais aplicados e a promover a interdisciplinaridade. Passou a se indicar, para o ensino de Análise Combinatória, a não memorização de fórmulas e processos resolutivos de questões.

Essa tendência tem crescido cada vez mais, até o atual padrão de ensino. Com a adoção do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como critério seletivo para as universidades federais, os livros didáticos têm procurado focar cada vez mais no raciocínio, em substituição ao uso direto de fórmulas, e indicando métodos de abordagem dos conteúdos, por meio da compreensão.

Na análise que Souza realizou dos livros didáticos, em relação ao conteúdo foco de nosso trabalho, não foi observada a natureza dos problemas e exercícios propostos, mas a sequência de apresentação dos conteúdos. Em nossa investigação, apresentada no próximo Capítulo, vamos explicar, de maneira mais profunda esse contexto, com a análise bibliográfica de exemplares de livros didáticos da década de 1960 e livros didáticos atuais, não necessariamente os mesmos analisados por aquela autora.

A escolha da década de 1960 se deu em razão da introdução, no Brasil e no mundo, das ideias promovidas pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), que tinha como uma de suas características centrais a defesa de uma maior formalização dos conteúdos matemáticos, cada vez mais cedo. O Movimento defendia o uso da linguagem básica da Teoria dos Conjuntos desde os anos iniciais do que hoje corresponde ao Ensino Fundamental, e a presença de demonstrações formais no desenvolvimento dos conteúdos (MIORIM, 1998).

De acordo com Miorim (1998), o estudo de gráficos e tabelas e de Probabilidade passou a ser feito apenas em relação com o estudo de funções e as orientações de que os conteúdos matemáticos fossem associados ao cotidiano e a outras áreas de conhecimento, de acordo com a Reforma conhecida como Francisco Campos, foram deixadas de lado.

O MMM começou a ser implantado no Brasil na década de 1960 e suas ideias perduraram até a década de 1980, com a ajuda dos livros didáticos que começaram a ser produzidos no país. Os resultados pretendidos pelo MMM não foram alcançados e apenas na década de 1990 começaram a ocorrer modificações reais nessa maneira de trabalhar a Matemática, com o lançamento dos PCN e a produção de livros didáticos baseados nas novas orientações presentes nesses documentos.

Como base de consulta para a seleção dos livros didáticos que analisamos, usamos o acervo bibliográfico do Laboratório de Estudos e Pesquisas da Aprendizagem Científica (LEPAC), laboratório vinculado ao Departamento de Matemática (DM), do Centro de Ciências Exatas e da Natureza (CCEN), da Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

Como já destacamos anteriormente, nossa análise irá diferenciar da realizada por Souza em particular no que trata do tipo de problema presente nos livros didáticos de Matemática dirigidos ao Ensino Médio, na proposta de trabalho com o conteúdo de Análise Combinatória.

Nós fizemos nossa discussão centrando nossos critérios na natureza dos problemas propostos, tomando como referência a ideia de contextualização, tanto interna à própria Matemática, quanto relativa a outras áreas de conhecimento ou ao cotidiano.

2.3 A CONTEXTUALIZAÇÃO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Sobre a contextualização dos conteúdos matemáticos, os PCNEM, juntamente com os PCN+, deixam clara a proposta de utilização da contextualização como forma de proporcionar ao aluno uma vivência do aprendizado matemático conectada com seu cotidiano, entendendo que

[...] o ensino da matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e também à contextualização sociocultural. (BRASIL, 2002, p.69)

Essa vivência se solidifica com base nas diferentes estratégias de ensino adotada para trabalhar determinados conteúdos, a fim de desenvolver a capacidade de interpretação de dados e informações e a resolução de problemas. Tal processo, envolvendo educador, conteúdo e educando, pode ser entendido como uma ponte que liga o conhecimento matemático específico aos conhecimentos práticos, envolvendo as mais diversas situações, visando ampliar as competências para interpretar, compreender e solucionar os problemas propostos, assim como entender o conteúdo explorado. De acordo com os PCNEM,

[É] na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. (BRASIL, 2002, p.83)

A defesa é que a contextualização ajudaria o aluno a perceber a presença da Matemática em diversos lugares (cotidiano, outros campos de conhecimento, dentre outros), ou seja, entendendo que, como defende D'Ambrósio,

[C]ontextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado. (...) Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana... e assim justificam sua importância nos currículos (D'AMBROSIO, 2005, p.115).

Compreendemos, no entanto, que a contextualização não é importante apenas se considerarmos o ponto de vista do estudante. Ela é igualmente importante do ponto de vista profissional, uma vez que cabe ao professor a seleção dos contextos dos conteúdos a partir dos quais eles serão explorados.

O conhecimento específico que o professor possui sobre o que ensina, assim como seu conhecimento didático o ajudará a selecionar as estratégias que irá adotar, considerando diferentes bases metodológicas, para desenvolver em sala de aula determinado conteúdo. Desse modo, também será fundamental, a concepção de contextualização que o professor possui.

Vasconcelos (2007), em uma investigação envolvendo professores da Educação Básica que ensinam Matemática, em relação ao que pensam sobre contextualização e o que fazem em sala de aula, considerando essa perspectiva, concluiu que,

[E]mbora os professores tenham demonstrado reconhecerem a importância das situações contextualizadas em sala de aula, eles revelaram um conhecimento superficial sobre contextualização, ou seja, não demonstraram um conhecimento teórico que desse sustentação às suas respostas, o que dificultaria a proposição de uma ação

pedagógica que valorizasse o contexto das situações problematizadoras como principal ferramenta para uma aprendizagem significativa. O professor, ao relacionar a contextualização apenas à aplicabilidade, restringiu sua compreensão à realidade imediata dos alunos. Além disso, não associa “contextualização” à “problematização”, no sentido de propor uma discussão em torno de uma situação para encontrar soluções. (VASCONCELOS, 2007, p.57)

Vasconcelos destacou que, em sua investigação, alguns professores participantes alegaram que, apesar de entenderem a contextualização como sendo importante, não faziam propostas de atividades contextualizadas por não conseguirem identificar contextos relacionados a todos os conteúdos matemáticos que ensinam ou por falta de tempo para isso.

Um dos professores afirmou que a contextualização poderia inclusive atrapalhar o trabalho com a Matemática. Para ele, se o trabalho com os conteúdos, somente envolvendo cálculos diretos, já não é compreendida pelos alunos, quem dirá o que acontece quando eles são apresentados em problemas de aplicação. Os participantes do estudo destacaram, ainda, a dificuldade para encontrar materiais que orientem o professor a desenvolverem uma prática contextualizada adequada.

De modo geral, Vasconcelos identificou que a ideia de contextualização dos participantes estava quase totalmente associada apenas à aplicação e conteúdos matemáticos a situações do cotidiano dos alunos, não considerando a contextualização interna, ou seja, quando conteúdos matemáticos auxiliam à atribuição de significados novos ou mais amplos a outros conteúdos da área.

A contextualização realizada em ligação a outras áreas de conhecimento, embora tenham sido citadas por alguns dos participantes, não foi, segundo a pesquisadora, observada em sua prática de sala de aula. A autora defende, em seu texto, a necessidade de os professores contemplarem, em sua formação inicial e/ou continuada, o estudo de temáticas relevantes para sua prática de sala de aula, presentes em documentos oficiais e em estudos da área de Educação Matemática recentes.

Como destacam os PCNEM,

[A] contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas. O professor precisa antecipar os conteúdos que são

objetos de aprendizagem, em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2002, p.83)

Essas recomendações gerais valem para o caso do conteúdo que destacamos em nossa discussão, a Análise Combinatória, que discutimos em nossa análise bibliográfica, tomando por base diferentes abordagens desse conteúdo, avaliando exercícios, atividades e problemas propostos em livros didáticos de Matemática dirigidos ao Ensino Médio.

Nossa análise se baseou em livros de diferentes décadas, ajudando-nos a compreender a evolução de propostas de trabalho com o conteúdo citado, na perspectiva da natureza das aplicações a situações reais ou de outras áreas de conhecimento, ainda que o termo contextualização não fosse utilizado com o significado aqui destacado, na época em que os livros didáticos mais antigos foram elaborados.

Ou seja, avaliamos como cada autor sugere trabalhar conteúdos de Análise Combinatória, tendo em vista que boa parte do material didático analisado nesse trabalho não corresponde à realidade atual de nossos alunos, mas que serão avaliados considerando as tendências pedagógicas defendidas hoje no que diz respeito ao conceito de contextualização.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No presente Capítulo iremos destacar a análise que realizamos dos livros didáticos selecionados, considerando a natureza dos problemas propostos em associação ao conteúdo de Análise Combinatória, tendo como referência a contextualização (interna, a outras áreas do conhecimento e ao cotidiano).

3.1. ANÁLISE DO LIVRO 1

O primeiro livro que analisamos é de autoria de Artur Neves e Washington Helou e foi publicado na década de 1960. Trata-se do segundo volume da Coleção cujo título é: Matemática curso colegial (V.2), publicada pela Editora EDART, de São Paulo, no ano de 1966. Essa obra, do final da década de 1960, aborda as ideias da Análise Combinatória no volume dedicado à então denominada 2ª série do 2º grau, que atualmente corresponde ao 2º Ano do Ensino Médio.

Vale salientar que a coleção em questão é uma tradução do material produzido pelo School Mathematics Study Group (SMSG), e teve como principal objetivo desenvolver uma teoria geral até chegar a resultados mais específicos. O SMSG era um dos principais divulgadores do MMM no mundo e seus livros traduziam a proposta de formalização da Matemática em todos os níveis de escolaridade, em especial nos mais avançados.

O trabalho com o conteúdo se inicia com uma referência ao princípio da contagem, antes de avançar nos processos referentes especificamente à permutação e combinação. Os autores definem o processo de contagem como sendo o envolvimento de três ideias fundamentais:

- A primeira é a de relação ou correspondência biunívoca. Assim, exemplificam, contamos os nossos dedos ou os nossos convidados para um jantar, associando a cada uma das coisas que estão sendo contadas um número natural, começando com 1, e tomando-os “em ordem”. Cessamos esse processo quando acabam os dedos, convidados, ou o que quer que seja que estejamos contando.

- A segunda ideia está relacionada com a adição. Dados dois conjuntos finitos que não têm quaisquer elementos em comum, o número de elementos da sua reunião é a soma dos elementos de cada um deles. Assim, o número de pessoas presentes em um festival de natação é a soma do número de pessoas que estão na piscina com o número dos que não estão na piscina.
- A terceira ideia é relativa a multiplicação. Dados n conjuntos (onde n é um número natural), não havendo quaisquer dois deles com elementos em comum, e cada um dos quais pode ser associado ao conjunto $\{1,2,\dots,m\}$ de todos os números naturais não excedendo o número natural m , o número de elementos da reunião dos n conjuntos dados é $n \times m$. Assim, podemos contar os alunos (ou as carteiras) numa sala de aula multiplicando o número de filas pelo número de carteiras em cada fila (desde que as filas tenham o mesmo número de carteiras).

Em seguida os autores discutem a fórmula $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

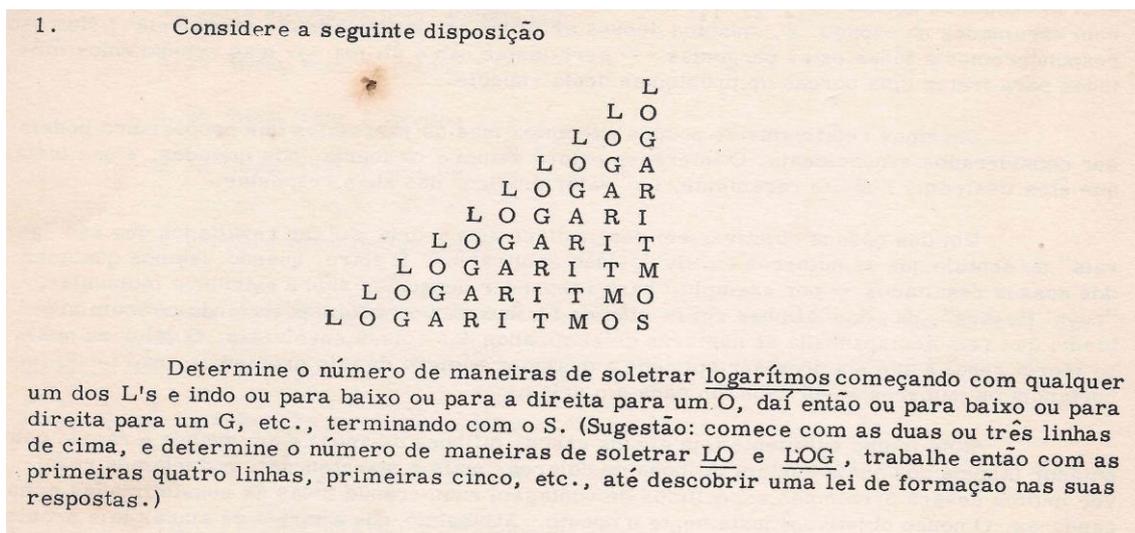
com base nas três ideias citadas, tornando sua demonstração mais compreensível. Vale salientar a preocupação dos autores com a explanação do conteúdo abordado e o que pode ser resumido na seguinte afirmação:

Daremos relativamente poucos exemplos, mas os exercícios que proporemos podem ser considerados sensacionais. O interesse estará sempre na teoria, nos métodos utilizados e nas ideias que eles ilustram e muito raramente, no “valor prático das suas respostas (NEVES e HELOU, 1966, p.473)

Os autores dedicam uma seção especial para abordar problemas de cada conteúdo específico de análise Combinatória. Os problemas que iremos destacar em seguida referem-se à contagem e depois discutiremos os problemas relacionados a Combinações e Arranjos.

O primeiro problema (Figura 1) faz referência ao conteúdo explanado no livro até então, e pretende trabalhar com o raciocínio do aluno sem que o mesmo disponha de uma regra preestabelecida. Depois de observar a disposição de letras apresentada no enunciado, o aluno deverá fazer inicialmente uma contagem para, em seguida, tentar determinar uma lei de formação para o processo.

Figura 1. Primeiro problema de contagem do livro 1.



Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.474

Analisando o que é solicitado no enunciado, entendemos que ele contém um equívoco, uma vez que pede que o aluno determine o número de maneiras de soletrar “logaritmos”. Soletrar significa “enumerar na ordem correta as letras que compõem uma palavra ou um nome” (HOUAISS, 2001, p.2.601) ou, ainda, “ler, pronunciando separada e sucessivamente as letras de uma palavra e juntando-as em sílabas” (HOUAISS, 1002, p.601).

Qualquer que seja o significado que considerarmos para o termo, o resultado da contagem seria igual a um e, assim, o que é solicitado não procede. A sequência de letras apresentada irá dirigir o raciocínio do aluno para uma determinada direção, sem que ele reflita sobre a pertinência do que está sendo pedido, o que não é possível identificar, a partir da leitura do enunciado.

A segunda questão destacada (Figura 2) é um exemplo que envolve o lançamento de duas moedas e solicita a contagem do número de pares (cara-coroa) possíveis. Para auxiliar o processo, os autores apresentam uma tabela de dupla entrada, em cujas linhas e colunas estão dispostos os possíveis valores para cada moeda e, no corpo da tabela, os pares formados.

Figura 2. Exemplo de contagem em lançamento de moedas.

possíveis ? Exemplo 16-2a: Atiram-se para o ar duas moedas. Quantos pares cara-coroa são

da moeda Solução: Há duas possibilidades para a primeira moeda $\{C, R\}$ e duas para a segunda moeda $\{c, r\}$ (R e r indicando o reverso da moeda)

	c	r
C	(C, c)	(C, r)
R	(R, c)	(R, r)

o número de pares é 4, o produto 2×2 .

Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.475

O problema utiliza uma tabela para facilitar a organização das possibilidades de resultados, ou seja, promove uma contextualização interna à Matemática, relacionando conteúdos já explorados anteriormente pelo aluno (multiplicação e tabelas) e uma contextualização com o cotidiano, uma vez que o procedimento de determinação de cara ou coroa é utilizado em situações do dia a dia. De acordo com Vasconcelos (2008), esse tipo de atividade pode ajudar a motivar o aluno para o estudo dos conteúdos matemáticos, uma vez que ele consegue, desse modo, identificar situações de aplicação.

Por outro lado, o procedimento adotado não deixa espaço para que o aluno possa chegar à conclusão, sozinho, de que ao processo simples de contagem ele poderia associar uma multiplicação, uma vez que já é anunciado que “o número de pares é 4; o produto 2×2 ”. Além disso, embora discuta uma ação que está presente no cotidiano (o lançamento de moedas), os autores não aprofundam esse aspecto, valorizando mais os elementos formais da linguagem matemática.

Vale frisar a desproporção em termos de nível de dificuldade encontrado nas duas situações que destacamos, o primeiro deles exigindo uma sistematização pelo aluno, com base em um enunciado complexo, e o segundo antecipando a resposta de um procedimento de contagem simples.

Os autores exploram outros problemas de contagem no mesmo gênero dos aqui apresentados, relacionando a contagem com a operação de multiplicação para, em seguida, começar a trabalhar com Permutações. Ao abordar esse conteúdo, os autores introduzem a teoria partindo de um conjunto

A com três elementos (a,b,c), identificando os possíveis pares ordenados formados pelos elementos do conjunto A, em uma tabela de dupla entrada (Figura 3).

Figura 3. Pares ordenados de elementos de um conjunto A.

	a	b	c
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)

Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.480

Em seguida Neves e Helou definem elementos de primeira espécie como sendo os que contém repetições e os de segunda espécie sendo como sendo os elementos sem repetições. Assim, os pares (a,a); (b,b) e (c,c) seriam de primeira espécie e os demais de segunda espécie.

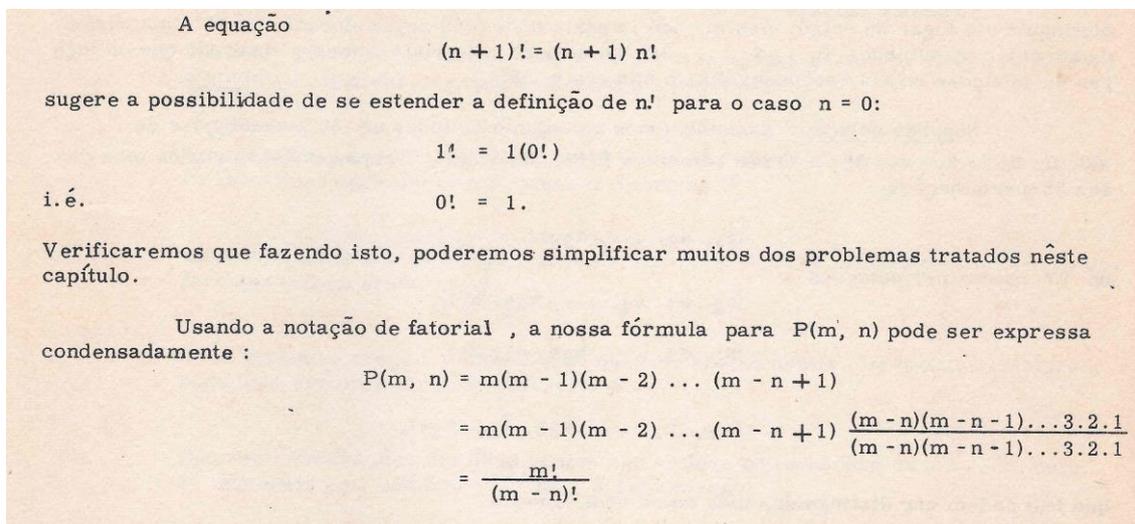
O raciocínio utilizado nesse caso particular é então generalizado, deduzindo os autores que dado um conjunto com m elementos, podemos formar m^2 pares ordenados, cujos componentes são elementos do conjunto dado. Destes m^2 pares existem m pares (um para cada elemento) com repetições, ou seja, de primeira espécie e portanto, $m^2 - m$ pares sem repetições, ou seja, de segunda espécie.

A partir dessa generalização, os autores definem Permutação dos m elementos tomados n a n , como sendo o conjunto que contém os m elementos sem repetições, dentre os pares formados pelos m elementos de um conjunto.

Com base nesse último exemplo, os autores definem número fatorial, apresentando exemplos numéricos, como: $3! = 3 \times 2 \times 1$; $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$, dentre outros. Os autores observam que: $n! = n \cdot (n - 1)!$; que $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ e, com base nessa última propriedade, $1! = 1$. $(0!)$, e, assim, $0! = 1$.

Em decorrência dessas observações, o autor define a notação fatorial para uma Permutação: $P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$, como exposto na Figura 4.

Figura 4. Formalização de Permutações



Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.483

Essa formalização exposta na Figura 4 conclui o processo de apresentação do estudo de permutações. Vale salientar que essa formalização se dá de forma confusa, partindo de propriedades previamente dispostas seguidas de demonstração não tão rigorosas e que podem gerar dúvidas referentes a esse processo construtivo.

Os autores encerram a apresentação do conteúdo com outros exemplos de contextualização ao cotidiano do aluno, como podemos observar nos três exemplos sobre permutações simples dispostos na Figura 5, seguidos de suas respectivas resoluções. Vale salientar que a resolução desses exercícios, feita pelos autores, serve como referência para a resolução de outros exercícios propostos na seção Conjunto de problemas, na qual há uma série de problemas de caráter similar aos aqui destacados.

Figura 5. Exemplos de aplicações ao cotidiano

Exemplo 16-3a: Em um concurso com doze participantes, de quantas maneiras podem ser atribuídos um primeiro e um segundo prêmio, se nenhum participante pode ganhar mais de um prêmio ?

Solução: O nosso problema pede o número de pares da forma (um participante, outro participante) sem repetição, onde o primeiro participante ganha o primeiro prêmio e o outro ganha o segundo prêmio. O número de tais pares é $P(12, 2)$, de modo que a resposta é 12×11 , ou 132.

Exemplo 16-3b: Um mapa de quatro países deve ser colorido com uma cor diferente para cada país. Se dispomos de seis cores, de quantas maneiras diferentes pode o mapa ser colorido ?

Solução: Queremos o número de 4-permutações de um conjunto tendo seis elementos. Cada quádrupla tem a forma (cor do primeiro país, cor do segundo, cor do terceiro, cor do quarto). A resposta é $P(6, 4)$, que é $6 \times 5 \times 4 \times 3$ ou 360 maneiras.

Exemplo 16-3c: Suponha que uma classe de vinte alunos decide deixar a sala numa ordem diferente cada dia. Quantos dias seriam necessários para a classe deixar a sala em todas as ordens possíveis ?

Resposta: $20!$ dias. Se fizerem isso 365 dias por ano, levará aproximadamente 6,7 quatrilhões de anos. ($20! \approx 2,4329 \times 10^{18}$). Mesmo se passassem pela porta numa ordem diferente a cada segundo, levaria mais ou menos 70 bilhões de anos.

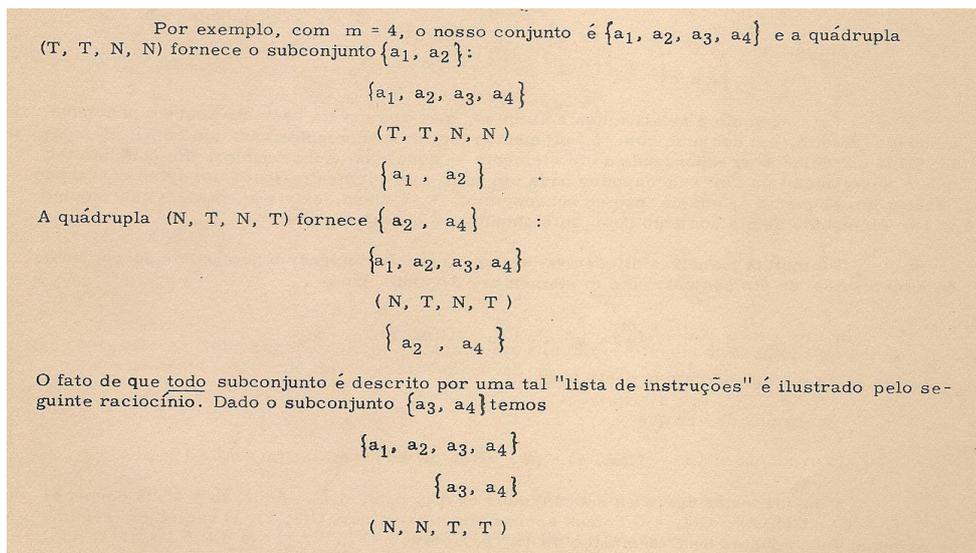
Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.483

Ao abordar o conteúdo de Combinação, os autores introduzem a apresentação com os seguintes problemas envolvendo contagem:

- “Dado um conjunto finito com m elementos, quantos subconjuntos ele contém?”
- “Dado um conjunto finito com m elementos, quantos subconjuntos de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de n -elementos ele possui? (tome n um número natural)”.

Partindo do primeiro problema proposto, os autores buscam promover o uso de um procedimento intuitivo como veremos logo a seguir. Considerando o problema 1 os autores constroem o conjunto $A (a_1, a_2, \dots, a_m)$. A partir desse conjunto, Neves e Helou propõem a construção de diversos subconjuntos, tomando ou não cada elemento. Esse processo é classificado como T (tomado) ou N (não tomado), como evidenciado na Figura 6.

Figura 6. Exemplo para quatro elementos



Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.487

A partir da construção presente no exemplo destacado na Figura 6, os autores anunciam o seguinte teorema: "Há 2^m subconjuntos de um conjunto finito que tem m elementos". Ou seja, os autores formalizam o caso geral, considerando um conjunto qualquer com m elementos.

Após resolver a primeira questão, os autores abordam o problema dois de maneira semelhante, de forma a induzir o procedimento geral e a fórmula correspondente. É apresentado um exemplo, com base no conjunto $\{a,b,c\}$, com três elementos, a partir do qual podem ser organizados os seguintes subconjuntos não vazios: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$. De tal exemplo, os autores concluem três afirmações:

- "Um conjunto com m elementos tem m subconjuntos cada um com 1 elemento";
- "Um conjunto com m elementos tem m subconjuntos com $m-1$ elementos";
- "Existe apenas um subconjunto de m elementos de um conjunto com m elementos, que é o conjunto todo". (NEVES e HELOU, 1966, pág.488).

Partindo do princípio de que existem várias formas de determinar o número de subconjuntos com n elementos de um conjunto com m elementos, e que não é apresentada no livro, os autores tomam por regra a relação $C(m,n)$, com $C(m,1) = m$; $C(m,m-1) = m$; $C(m,m) = 1$. A notação adotada e não

justificada é usada por eles como alicerce para a elaboração da fórmula a ser utilizada em problemas dessa natureza, ou seja, envolvendo Combinações.

Retomando o mesmo procedimento, agora para um conjunto com quatro elementos $\{a,b,c,d\}$, os autores identificam todos os subconjuntos formados pelos elementos desse conjunto, com $m = 4$. Como $C(4,1)$, $C(4,3)$ e $C(4,4)$ podem ser determinados usando as indicações para o caso geral, resta apenas identificar $C(4,2)$.

Para determinar esse subconjunto, Neves e Helou apresentam uma demonstração muito extensa e de difícil compreensão. Primeiramente exibem-se os subconjuntos de dois elementos de um conjunto de quatro elementos, ou seja, dado $A=\{a, b, c, d\}$ temos os seguintes subconjuntos: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ que pode ser determinado por $C(4,2)$. (Figura 7).

Figura 7. Proposta de associação entre Combinação e Permutação

Podemos encontrar uma ligação entre o nosso atual problema e os problemas de permutações considerados na Seção 16-3, se compararmos a nossa última lista com a Tabela 16-4a exibindo os pares ordenados que podem ser formados com elementos de $\{a, b, c, d\}$.

	a	b	c	d
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)	(a, d)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)	(b, d)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)	(c, d)
d	(d, a)	(d, b)	(d, c)	(d, d)

Tabela 16-4a.

Os subconjuntos

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\},$$

$$\{b, c\}, \{b, d\},$$

$$\{c, d\}$$

estão representados na Tabela 16-4a pelos pares

$$(a, b), (a, c), (a, d),$$

$$(b, c), (b, d),$$

$$(c, d)$$

que aparecem no canto superior direito. Mas, eles são também representados pelos pares que aparecem no canto esquerdo inferior da Tabela 16-4a:

$$(b, a),$$

$$(c, a), (c, b),$$

$$(d, a), (d, b), (d, c).$$

Vamos associar estes pares aos subconjuntos da seguinte maneira:

$$\{a, b\} : (a, b), (b, a)$$

$$\{a, c\} : (a, c), (c, a)$$

$$\{b, c\} : (b, c), (c, b)$$

$$\{a, d\} : (a, d), (d, a)$$

$$\{b, d\} : (b, d), (d, b)$$

$$\{c, d\} : (c, d), (d, c)$$

Na discussão destacada na Figura 8, os autores apresentam uma sistematização do processo e a conexão entre Combinação e Permutação, mas as explicações são pouco claras e fazem referência a elementos (linhas e retas), que não foram destacadas quando da apresentação da tabela. Os autores afirmam que todo par ordenado à direita da reta (referindo-se à reta vertical da tabela), é uma 2-permutação do conjunto à esquerda da sua linha (a mesma reta), ou seja, para o subconjunto formado por a e b, existem 2 permutações do tipo P(2,2), correspondentes aos pares (a,b) e (b,a). Como podemos formar dois subconjuntos de dois elementos a partir do conjunto formado por a, b, c e d, teremos P(4,2) permutações, ou seja, a tabela terá quatro colunas.

Para saber o número de linhas, basta considerar o primeiro elemento de cada par de combinações possíveis, sem repetição, que será, nesse caso, igual a quatro, os pares que começam com a; os que começam com b; os que começam com c; e os que começam com d. Assim, a tabela terá quatro linhas e dois pares de duas colunas, totalizando 16 células, ou seja, P(4,2) elementos, uma vez que são excluídos da contagem os pares em que o primeiro e o segundo elemento são iguais, o que resulta na Combinação C(4,2) de quatro elementos, tomados dois a dois.

Figura 8. Sistematização da relação entre Combinação e Permutação

Examinando esta disposição vemos que todo par ordenado à direita da reta é uma 2-permutação do conjunto à esquerda da sua linha. Para todo subconjunto de 2 elementos, existem portanto P(2, 2) 2-permutações. Portanto, P(2, 2) é o número de colunas à direita da reta. C(4, 2) é o número de linhas. Uma vez que o número total de 2-permutações que podemos formar a partir de {a, b, c, d} é P(4, 2), temos

$$C(4, 2) \times P(2, 2) = P(4, 2),$$

logo

$$C(4, 2) = \frac{P(4, 2)}{P(2, 2)} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Consideraremos agora um conjunto com m elementos. C(m, n) designa o número (desconhecido) de seus subconjuntos de n elementos. Vamos imaginar uma tabela, em que cada um desses subconjuntos de n elementos determina uma linha. Em cada uma das linhas, escrevemos as P(n, n) n-permutações do subconjunto que identifica a linha. O número total de elementos utilizados nesta tabela é P(m, n), número de todas permutações de n elementos do conjunto dado. Multiplicando o número de linhas e o número de colunas, temos

$$C(m, n) P(n, n) = P(m, n)$$

ou

$$C(m, n) = \frac{P(m, n)}{P(n, n)} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.488

Na mesma página os autores trazem, em seguida, um conjunto de exemplos de aplicação da relação estabelecida (Figura 9).

Figura 9. Aplicações da fórmula de Combinação.

Exemplo 16-4b: Duas cartas são tiradas de um baralho de 52 cartas. De quantas maneiras pode isto ser feito ?

Solução: Queremos o número de subconjuntos de 2-elementos de um conjunto de 52 elementos.

$$C(52, 2) = \frac{(52)!}{2! \cdot 50!} = \frac{(52) \cdot (51)}{1 \cdot 2} = (26) \cdot (51) = 1326 .$$

Exemplo 16-4c: Quantas mãos de pôquer, contendo 5 cartas, contendo o ás de espadas, são possíveis com um baralho de 52 cartas ?

Resposta: $C(51, 4) = \frac{51!}{4! \cdot (47)!}$. Usando a tabela para $\log n!$, (que segue estes exemplos), achamos

$$\begin{aligned} \log 4! &= 1,3802 \\ \log 47! &= \frac{59,4127}{4!} \\ \log 4! \cdot 47! &= 60,7929 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 51! &= 66,1906 \\ \log 4!(47!) &= \frac{60,7929}{4!} \\ \log C(51, 4) &= \frac{66,1906}{4!} - \frac{60,7929}{4!} = 5,3977 \end{aligned}$$

Portanto $C(51, 4) \approx 2,5 \times 10^5$.

Exemplo 16-4d: Mostrar que $C(m, n) = C(m, m - n)$ e interpretar esta fórmula em termos dos subconjuntos de um conjunto dado.

Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.488

Para explicar melhor o processo, consideremos inicialmente o conjunto formado pelas letras a e b. Nesse caso, teríamos $P(2,2)$ permutações. Em seguida os autores associam a demonstração à fórmula: $\frac{m!}{n!(m-n)!}$. Seguindo o mesmo processo adotado no caso das Permutações, os autores, após exporem a demonstração da fórmula destacada, apresentam exemplos para esclarecer a teoria exposta. Dentre esses exemplos, destacamos um exemplo de fácil compreensão envolvendo jogo de azar, presente na Figura 10.

Figura 10. Exemplo envolvendo jogo de cartas

Exemplo 16-4b: Duas cartas são tiradas de um baralho de 52 cartas. De quantas maneiras pode isto ser feito ?

Solução: Queremos o número de subconjuntos de 2-elementos de um conjunto de 52 elementos.

$$C(52, 2) = \frac{(52)!}{2! \cdot 50!} = \frac{(52) \cdot (51)}{1 \cdot 2} = (26) (51) = 1326 .$$

Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.490

Outro exemplo envolve o número $\log n!$, explorado por meio de uma tabela, figura e exercícios. Os autores resolvem a questão aplicando logaritmo na fórmula de Combinação, destacando que podemos nos aproximar do resultado obtido, através da aplicação direta da fórmula (Figura 11).

Figura 11. Exemplo envolvendo interação de conteúdos.

Exemplo 16-4c: Quantas mãos de pôquer, contendo 5 cartas, contendo o ás de espadas, são possíveis com um baralho de 52 cartas ?

Resposta: $C(51, 4) = \frac{51!}{4! \cdot (47)!}$. Usando a tabela para $\log n!$, (que segue estes exemplos), achamos

$$\begin{aligned} \log 4! &= 1,3802 \\ \log 47! &= 59,4127 \\ \log 4! \cdot 47! &= 60,7929 \\ \\ \log 51! &= 66,1906 \\ \log 4!(47!) &= 60,7929 \\ \log C(51, 4) &= 5,3977 \end{aligned}$$

Portanto $C(51, 4) \approx 2,5 \times 10^5$.

Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.490

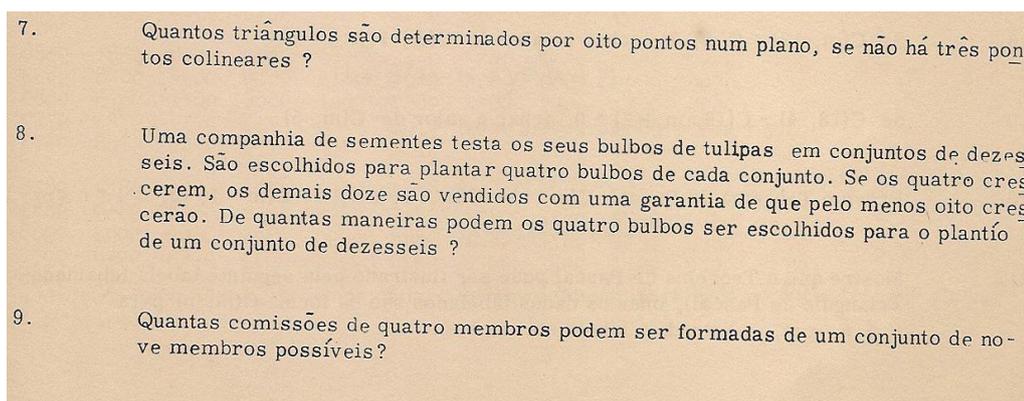
Por meio desse exemplo, os autores explanam acerca da aplicação do logaritmo em exercícios de Combinação, mostrando ao leitor a interação entre conteúdos vistos até essa etapa do livro didático, o que nos dias atuais satisfaz uma das indicações do trabalho com a contextualização, que é a contextualização interna, na medida em que há uma interação de conteúdos matemáticos.

No terceiro exemplo os autores solicitam que o aluno prove que $C(m, n) = C(m, m - n)$. Esse exemplo envolve uma demonstração formal e indica o que

eles esperam que o aluno desenvolva quando abordam esse tipo de questão. Nesse caso particular os autores esperam que o aluno interprete a fórmula geral em termos de subconjuntos de um conjunto dado. A exposição do conteúdo é baseada na apresentação de diferentes tipos de exemplos e exercícios, visando propiciar uma grande diversidade de abordagens.

Para finalizar o trabalho com Combinações, os autores propõem uma lista com 29 problemas variados que envolvem a aplicação direta das fórmulas propostas; demonstrações; e questões contextualizadas. Essa variação de questões propostas por Neves e Helou tem como objetivo abordar a maior quantidade de questões possíveis das mais diversas formas seja ela aplicadas em situações matemáticas (conectando Análise Combinatória e Geometria, em uma contextualização interna) e do cotidiano (Figura 12).

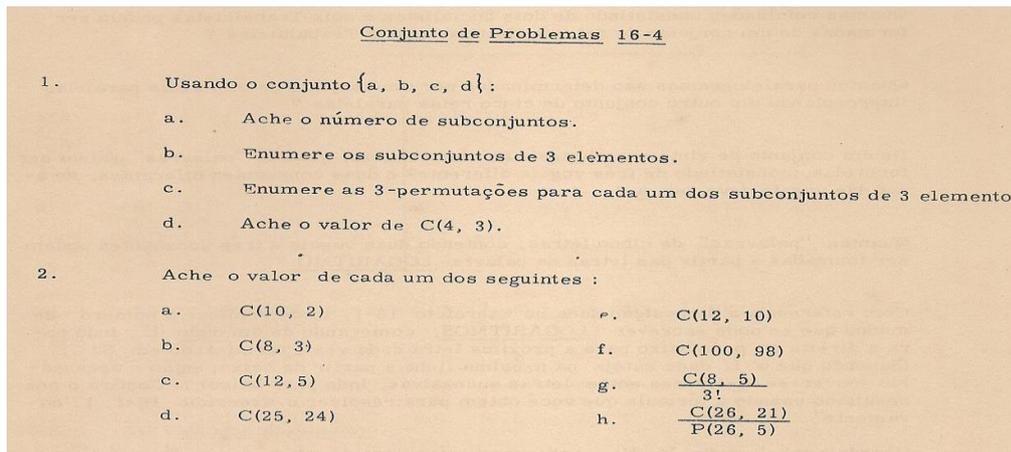
Figura 12. Exemplos de exercícios práticos.



Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.495

Há também exercícios que envolvem a aplicação direta de fórmulas expostas no capítulo em questão, como podemos observar na (Figura 13).

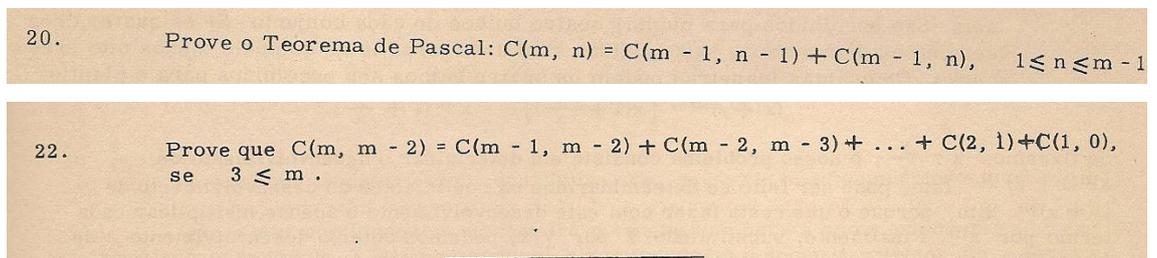
Figura 13. Exemplos de exercícios de aplicação direta.



Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.495

Os autores trazem questões que envolvem conhecimentos em um nível mais formal, com demonstrações relativas ao conteúdo, a exemplo das questões 20 e 22 apresentadas na (Figura 14).

Figura 14. Exercícios de caráter abstrato.



Fonte: NEVES e HELOU, 1966, p.496

Para finalizar a apresentação de nossa avaliação do livro didático em questão, destacamos as principais características da obra de Neves e Helou. Inicialmente consideramos as limitações relativas aos aspectos pedagógicos, uma vez que diversas passagens da apresentação do conteúdo são pouco claras, mesmo que, em alguns momentos os autores proponham uma abordagem mais intuitiva e menos formal.

Os autores propõem problemas dos mais variados níveis de dificuldade e em alguns casos problemas diretos de aplicação de fórmulas, que não exigem o trabalho adicional de interpretação para resolução dos mesmos e que

são resolvidos de uma única maneira, ou seja, não proporcionam ao aluno o trabalho com diferentes formas de abordar um mesmo problema.

Identificamos algumas conexões do conteúdo de análise combinatória com outros conteúdos matemáticos já abordados, no livro ou em anos de escolaridade anteriores, por exemplo, como no caso do conteúdo de logarítmico; de propriedades algébricas como a comutatividade e a propriedade distributiva; e ao cotidiano. Não identificamos, porém, conexões com outras disciplinas, limitando-se apenas a conexões com a própria Matemática.

De modo geral, o livro propõe a apresentação do conteúdo com base em exemplos gerais, mesmo que em alguns momentos isso seja feito de modo pouco claro, como nos casos que destacamos em nosso trabalho.

3.2 ANÁLISE DO LIVRO 2.

O segundo livro que analisamos é de autoria de Ary Quintella, e seu título é “Matemática segundo ano colegial (V.2)”. A obra foi publicada pela Companhia Editora Nacional, de São Paulo, no ano de 1967. Também do final da década de 1960, o livro aborda as ideias centrais da Análise Combinatória na 2ª série do 2º grau (que atualmente corresponde ao 2º Ano do Ensino Médio).

O trabalho com o conteúdo se inicia com a apresentação do que é Análise Combinatória e da definição de Agrupamento simples, seguido de um exemplo envolvendo agrupamentos simples (Figura 15).

Figura 15: Exemplo sobre agrupamento simples.

Exemplo:

Consideremos as três letras a , b , c , representando os elementos de um conjunto.

Formaremos agrupamentos simples de duas letras, escrevendo: ab , ac , bc .

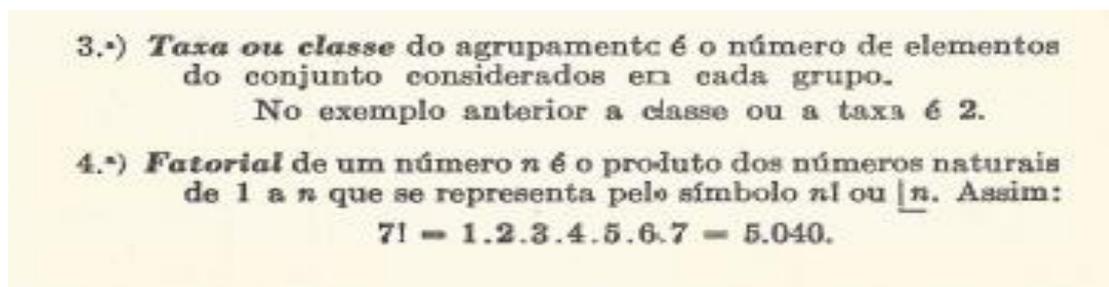
E com repetição ou completos:

aa , ab , ac , bb , bc , cc .

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.15

Esse mesmo procedimento, ou seja, definição seguida de exemplo, é a estratégia que Quintella adota quando apresenta as noções de taxa ou classe e fatorial, tomando como referência o exemplo da (Figura 16).

Figura 16: Definições seguidas de seus respectivos exemplos.



Fonte: QUINTELLA, 1967, p.15

A definição de fatorial como podemos observar na Figura 16, é seguida de um único exemplo numérico de um número fatorial, visando facilitar a compreensão do aluno, assim como na parte de taxa ou classe, onde, após a definição, Quintella faz a associação da teoria exposta, com o único exemplo apresentado na Figura 16.

Depois da apresentação de definições iniciais, como as destacadas nas Figuras 15 e 16, o autor aprofunda a discussão sobre os tipos de Agrupamento simples, sendo estes definidos pelo mesmo como Arranjos, Permutações e Combinações simples. Tratando tais temas como tópicos, Quintella define Arranjo simples da seguinte maneira: “São os agrupamentos em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, um elemento figura uma só vez em cada grupo e dois agrupamentos diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos que neles figuram” (QUINTELLA, 1967, p.16)

Como exemplo Quintella toma três elementos a,b,c, em agrupamentos com taxa 2, dispostos da seguinte maneira: ab; ac; bc; ba; ca; cb. A partir desse exemplo, Quintella define a notação de Arranjo com n elementos e p taxas. (Figura 17)

Figura 17: Diferentes tipos de notações para arranjo

$$A_n^p \quad A_{n,p} \quad D_n^p \quad \text{ou} \quad D_{n,p}.$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.16

O livro traz a seguinte definição de Permutação: “são agrupamentos formados com todos os n elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos” (QUINTELLA, 1967, p.16). Dessa forma, Quintella define Permutação como um caso particular de Arranjo, onde a taxa é igual ao número de elementos $n = p$. (Figura 18).

Figura 18: Notação para permutação.

$$P_n = A_n^n$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p. 17

Sobre Combinação simples o autor apresenta a seguinte definição: “São agrupamentos em que o número de elementos de cada grupo é menor que o total, em cada grupo um elemento figura uma só vez e dois agrupamentos diferem pela natureza, de pelo menos, um elemento” (QUINTELLA, 1967, p.17). Em seguida ele cita um exemplo simples para a não distinção da ordem dos elementos, como podemos ver na (Figura 19).

Figura 19: Exemplo de combinações simples

Exemplo:

As combinações simples dos três elementos a, b, c , serão:

$ab, ac, bc.$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p. 17

Observa-se que nesse exemplo os agrupamentos $ab = ba$ não são considerados combinações distintas, ou seja, $ab = ba$ (o par “ ab ” é igual ao par “ ba ”).

A partir dessa etapa, ou seja, após a apresentação das definições, o autor aborda o uso de fórmulas para a resolução dos problemas propostos, sendo tais fórmulas expostas por meios de teoremas e de suas respectivas demonstrações. Nos teoremas enunciados para a formação de Arranjos simples, o autor parte de um Teorema Fundamental para a explanação das outras fórmulas, no caso, as de Arranjo e Permutação. Vale salientar que o autor inicialmente trabalha as definições como sendo situações distintas, para depois abordar suas fórmulas e respectivas demonstrações.

Sobre o teorema fundamental, podemos observar na Figura 20 o enunciado do mesmo, seguido de uma demonstração de caráter indutivo, seguindo um rigoroso processo de construção algébrica, o que, para o aluno, exige certa maturidade para a compreensão. Vale salientar também que Quintella propõe uma abordagem matemática bastante abstrata para a exploração do conteúdo, sem se preocupar muito com o nível do leitor que fará parte da utilização desse material o que fica cada vez mais evidente nas demonstrações posteriores, onde fórmulas serão demonstradas com rigor matemático avançado e poucos exemplos de caráter contextual são trabalhados.

Esse uso excessivo da formalidade, sem a preocupação de ser ela compreendida ou não pelo aluno, está presente nas duas obras analisadas, até aqui, ambas da década de 1960.

Figura 20: Teorema fundamental e sua respectiva demonstração.

Teorema fundamental. Suponhamos n elementos representados pelas letras $a, b, c, \dots l$. Os arranjos com taxa 1, serão, evidentemente:

$$a, b, c, \dots l.$$

e teremos:

$$A_n^1 = n.$$

Para formar os arranjos de taxa 2, colocaremos, adiante de cada uma daquelas letras, sucessivamente, cada uma das $n-1$ restantes:

		n colunas			
n-1 linhas		<i>ab</i>	<i>ba</i>	<i>ca</i> ...	<i>la</i>
		<i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>cb</i> ...	<i>lb</i>
				
		<i>al</i>	<i>bl</i>	<i>cl</i> ...	<i>lk</i> .

Dêsse modo, cada grupo de 1 fornece $n-1$ grupos de 2 e nenhum arranjo está omitido nem repetido.

Podemos, pois concluir:

$$A_n^2 = A_n^1 (n - 1)$$

Procedendo análogamente, para passar aos arranjos de taxa 3, colocaremos adiante de cada grupo de 2, sucessivamente, cada um dos $n-2$ restantes. Assim, cada grupo de 2 fornecerá $n-2$ grupos de 3 e teremos:

$$A_n^3 = A_n^2 (n - 2)$$

De modo geral, se tivermos um grupo de i elementos

$$abc \dots i$$

e colocarmos, à direita, cada um dos $n-i$ restantes, obteremos $n-i$ grupos de $i+1$ elementos:

$$abc \dots ij, abc \dots ik, \text{ etc, } abc \dots il.$$

Da formação do quadro conclui-se o teorema fundamental:

$$\boxed{A_n^{i+1} = A_n^i (n - i)}$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, pp.18-19.

Após a exposição e demonstração do Teorema fundamental, Quintella apresenta a fórmula para calcular o número de Arranjos simples com objetos distintos. A apresentação é formal e direta, sem preocupação com o entendimento do processo pelo aluno. (Figura 21).

Figura 21: Fórmula do número de arranjo simples de objetos distintos

4. Fórmula do número de arranjos simples de objetos distintos. Para a taxa $p = 1$ temos, com evidência, $A_n^1 = n$, e, fazendo, sucessivamente, $i = 1, 2, 3, \dots, p-1$, no teorema fundamental, obteremos as igualdades:

$$\begin{aligned} A_n^1 &= n \\ A_n^2 &= A_n^1 (n-1) \\ A_n^3 &= A_n^2 (n-2) \\ &\dots\dots\dots \\ A_n^p &= A_n^{p-1} (n-p+1) \end{aligned}$$

Multiplicando-as membro a membro e simplificando os fatores comuns aos dois membros resulta a fórmula:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \quad (\text{I})$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.19.

Em seguida Quintella apresenta a fórmula para calcular Permutações de objetos distintos. Nessa exposição, o autor trata a Permutação como um caso particular de Arranjo, onde a taxa é igual ao número de elementos. Após apresentar a fórmula, Quintella expõe um exemplo de característica algébrica, para mostrar para os alunos como funciona a fórmula nesse caso particular. (Figura 22)

Figura 22: Fórmula para calcular permutações de objetos repetidos.

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \dots 1 = n! \quad (\text{III})$$

Exemplo:

$$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.20

O próximo teorema exposto por Quintella no livro é o Teorema de Bezout, no qual se afirma que: “quando se troca a posição de dois elementos, a permutação muda de classe” (QUINTELLA, 1967, p. 21). A partir desse Teorema o autor aborda as Permutações simples com elementos repetidos, apresentando a notação e a fórmula geral para a resolução de situações dessa

natureza. Para exemplificar, o autor traz um exemplo numérico simples para ilustrar o procedimento (Figura 23).

Figura 23: Fórmula de permutação com objetos repetidos e seu respectivo exemplo.

$$P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \beta!}$$

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! 2!} = 4 \times 5 \times 3 = 60.$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.23

O cálculo do número de Combinações simples é proposto diretamente a partir da demonstração da fórmula em questão e da apresentação das propriedades destacadas na (Figura 24).

Figura 24: Cálculo do número de combinações simples.

Temos a propriedade (n.º 2, c, pág. 17) :

$$C_n^p \times P_p = A_n^p \therefore C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p}$$

Considerando as fórmulas (I) e (III), podemos, então, concluir :

$$C_n^p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \quad (IV)$$

ou, com as fórmulas (II) e (III) :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!} \quad (V)$$

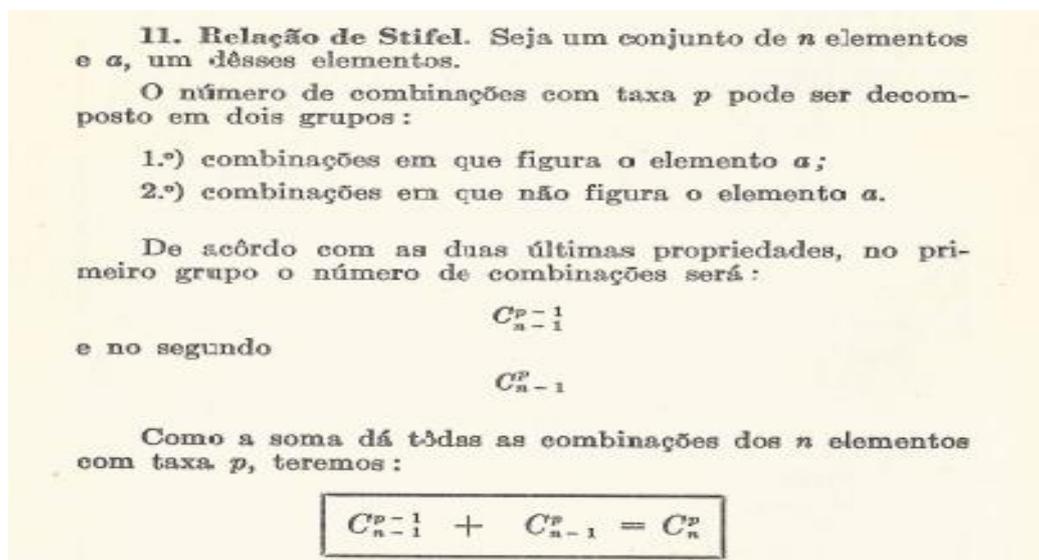
no numerador em ordem decrescente a partir de n e no denominador a partir de p . Estas frações representam-se pelo símbolo $\binom{n}{p}$. Daí, a fórmula das combinações escrever-se, também

$$C_n^p = \binom{n}{p}.$$

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.23

Quintella traz no livro, ainda, a Relação de Stifel, que além de citada, também teve suas propriedades expostas (Figura 25)

Figura 25: Relação de Stifel.



Fonte: QUINTELLA, 1967, p.26

Para finalizar a discussão teórica do Capítulo referente à Análise Combinatória, Quintella traz um breve resumo do que foi abordado nas páginas anteriores e um quadro com um resumo das fórmulas expostas ao longo do Capítulo.

É importante salientar que o autor não fez nenhuma ponte do conteúdo em questão com o de Probabilidade e Estatística, omitindo a utilização de gráficos e tabelas. A linguagem utilizada, bem como a forma como o conteúdo, evidencia o uso da formalização e de demonstrações apresentadas em uma perspectiva tradicional, o que hoje podemos considerar como sendo de difícil compressão para alunos do Ensino Médio atuais, o que não podemos constatar em relação aos alunos daquela época.

Quanto às questões referentes ao conteúdo foco de nossa análise, Quintella propõe a resolução de 41 exercícios, sendo onze deles visando a habilitação para futuros concursos, a exemplo da questão destacada na (Figura 26).

Figura 26. Questões de concurso de habilitação.

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO

31. Das permutações de 5 objetos são de classe ímpar permutações (E.N.E. - 1958).

32. Calcule A_m^s , sabendo que $C_m^s = 84$ (E.P.U.C. - 1958) *Resp.: 504.*

33. Calcule o número de combinações simples das letras a, b, c, d, e , tomadas 4 a 4, nas quais as letras b e c figuram sempre juntas (E.N.E. - 1958) *Resp.: 3* (veja pág. 25).

34. Com uma letra m , uma letra d e um certo número de letras a , podemos formar 20 permutações. Calcule o número de letras a . (E. Flum. E - 58) *Resp.: 3.*

35. Numa classe existem 6 rapazes e 4 moças. De quantas maneiras podemos reuní-los em grupos de 6 compostos de 4 rapazes e 2 moças? (E. Arq. U. M. Gerais - 1951) *Resp.: 90.*

36. Em um saco há 4 bolas brancas e 6 pretas. $a)$ De quantos modos poderemos extrair 5 bolas, sendo 2 brancas e 3 pretas? $b)$ De quantos modos poderemos retirar 5 bolas, sendo tôdas pretas? (E. T. Ex. - 1946) *Resp.: 120 e 6.*

37. Quantos números diferentes de dez algarismos, se podem formar com os algarismos 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, tendo todos eles o mesmo final 34 475? (E. T. Ex. - 1948) *Resp.: 30.*

38. Sendo $C_{10}^{p-3} = C_{10}^{p+3}$, calcule p . (E.N.E. 59) *Resp.: 5.*

39. Calcule m , de modo que :

$$\frac{m! + (m-1)!}{(m+1)! - m!} = \frac{6}{25} \quad \text{Resp.: 5 (E.F.E. 60).}$$

40. Calcule m , sabendo que :

$$C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 1.023 \quad (\text{EPUC} - 60).$$

Resp.: 10.

41. Quantos números existem de 7 algarismos significativos, tais que os algarismos 4 e 8 apareçam, sempre, duas e três vêzes, respectivamente, em cada número? (E.F.E. - 955) *Resp.: 8.820.*

Fonte: QUINTELLA, 1967, p.29

Podemos observar que por boa dos exercícios propostos nessa seção demandam aplicação direta da teoria em questão (emprego direto de fórmulas), deixando-se a cargo do aluno o uso de diferentes métodos de resolução. Destacamos, ainda, o grau de dificuldade das questões, levando à suposição de que o autor acredita que o aluno estaria devidamente preparado, com base nos exemplos dispostos ao longo do capítulo, a resolver os exercícios dados.

Para concluirmos nossa análise, não podemos deixar de destacar a falta de exercícios resolvidos no decorrer da apresentação do conteúdo, uma vez que entendemos que os exercícios resolvidos auxiliam a compreensão da teoria, assim como servem de referência base para a resolução de outras questões propostas no livro.

Também podemos observar o formalismo excessivo com que o autor apresenta o conteúdo de Análise Combinatória, focando no rigor da linguagem matemática, demandando muita capacidade de abstração e o uso da linguagem algébrica. Apenas no final de cada seção o autor aborda questões

envolvendo situações do cotidiano dos alunos, com problemas contextualizados, que estão ausentes nas explicações da parte teórica, o que torna a resolução das questões contextualizadas mais difícil e pode comprometer a compreensão da teoria exposta pelo autor.

De um modo geral, o apelo direto às fórmulas e a demonstração formal das mesmas, tornaria a perspectiva apresentada no livro não recomendável para a utilização com nossos atuais alunos do Ensino Médio, deixando esse material de uso restrito para turmas de nível superior, como na formação docente de professores de Matemática.

3.3 ANÁLISE DO LIVRO 3

O terceiro livro que analisamos é de autoria de Cláudio Xavier e Benigno Barreto. Tem como título: “Matemática ensino médio aula por aula” e é o volume dedicado ao 2º Ano do Ensino Médio. Foi publicado pela Editora FTD, de São Paulo, no ano de 2005.

O livro, do início da década 2000, aborda as ideias centrais de Análise Combinatória no segundo volume da Coleção. A introdução do conteúdo apresenta uma grande diferença dos livros da década de 1960 que analisamos. Nela o autor argumenta que Matemática, de um modo geral, não se constitui apenas da aplicação de fórmulas e cálculos mecânicos, mas, pelo contrário, existe uma história por trás da teoria que envolve cada conteúdo.

O Capítulo tem início com o texto “A história contada”, no qual são trazidas as contribuições do Matemático Blaise Pascal para a Análise Combinatória e de como seu trabalho serviu para que esse conhecimento se tornasse um dos alicerces da Teoria dos Números, da Probabilidade e da própria Topologia, segundo afirmam os autores. A explanação ressalta a conexão existente entre diferentes conteúdos matemáticos, em um processo que possibilita uma contextualização interna dos conteúdos.

Além de Pascal, os autores citam as contribuições de outros matemáticos, como Fermat, Leibniz e Wallis, que no final do século XVII também faziam estudos sobre o assunto, o qual era denominado na época de Geometria do Acaso, mas o autor enfatiza o pioneirismo de Pascal no desenvolvimento de tal conteúdo, trazendo um pouco da vida desse

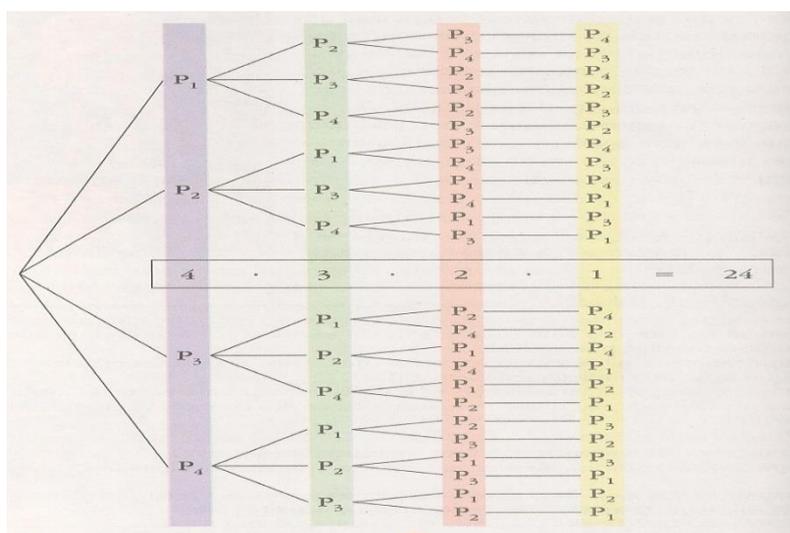
matemático e de suas descobertas, tanto no campo da Física quanto da Matemática.

O livro ainda traz os problemas vividos por Pascal, pelo fato de seu pensamento estar à frente das ideias defendidas pela igreja, e a forma como foi perseguido, para que não prosperasse com suas descobertas que, na época, eram tidas como “satânicas”. No final do Capítulo os autores propõem aos leitores uma pesquisa mais aprofundada sobre as histórias dos matemáticos destacados no texto e suas descobertas, indicando a ampliação da formação, por meio de leituras extraclasse.

Após a introdução teórica do conteúdo, o livro trata do princípio fundamental da contagem e define a Análise Combinatória como sendo “Um ramo da matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem em escolher e agrupar os elementos de um conjunto” (XAVIER e BARRETO, 2005, pág.240).

Nessa introdução os autores remetem esse conteúdo ao cálculo das Probabilidades e a Estatística, por meio da utilização de tabelas e porcentagens aplicadas a problemas referentes à Análise Combinatória. Seguindo a explanação do conteúdo, os autores apresentam um exemplo onde exploram todas as possibilidades de ocorrência em um determinado experimento. Esse exemplo utiliza o método da árvore de possibilidades, a fim de facilitar a compreensão do procedimento (Figura 27).

Figura 27: Árvores de possibilidades.



Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.244

Em seguida os autores utilizam outro exemplo, propondo uma abordagem distinta do anterior. Esse exemplo, resolvido por meio de uma tabela, objetiva mostrar ao aluno que um acontecimento que ocorre em duas situações sucessivas e independentes, pode ser determinado pelo produto de n maneiras da situação um por m maneiras da situação dois, independentemente da forma como o problema é interpretado (Figura 28). Essa perspectiva apresenta uma contextualização interna da Matemática (VASCONCELOS, 2008), conectando a Análise Combinatória com o Tratamento da Informação.

Figura 28: Exemplo utilizando tabela.

Exemplo:
Um rapaz possui 4 bermudas e 3 camisas. De quantos modos diferentes ele pode se vestir com essas roupas?
Vamos indicar bermuda com a letra b e camisa com a letra c e dispor as maneiras possíveis no quadro:

bermuda \ camisa	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	$c_1 \cdot b_1$	$c_1 \cdot b_2$	$c_1 \cdot b_3$	$c_1 \cdot b_4$
c_2	$c_2 \cdot b_1$	$c_2 \cdot b_2$	$c_2 \cdot b_3$	$c_2 \cdot b_4$
c_3	$c_3 \cdot b_1$	$c_3 \cdot b_2$	$c_3 \cdot b_3$	$c_3 \cdot b_4$

O quadro mostra que existem $3 \cdot 4 = 12$ modos distintos.

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.245

Após a explanação inicial, o livro traz uma série de questões, cujas soluções envolvem a aplicação de uma árvore de possibilidades e a elaboração de tabelas, seguindo os exemplos expostos anteriormente. Em seguida, o livro apresenta, de maneira breve, os números fatoriais e algumas de suas propriedades. Os livros da década de 1960 que analisamos adotaram uma abordagem superficial desse conteúdo, enquanto o livro 3 detalha o conteúdo trazendo uma definição formal, algumas propriedades e um conjunto de exercícios.

Os autores definem o número fatorial como sendo “o produto de todos os números naturais consecutivos de 1 até n , ou seja, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ ” (XAVIER e BARRETO, 2005, p.247). Em relação às propriedades, o livro destaca apenas que $0! = 1$ e que $1! = 1$. Não são apresentadas outras propriedades importantes como, por exemplo, $(x + a)!$, com “ a ” natural, o que pode levar o aluno a concluir que existe apenas o número fatorial simples $n!$.

Nessa abordagem, os autores sugerem a resolução de um conjunto de exercícios envolvendo números fatoriais para, em seguida, iniciar a apresentação das Permutações simples. Todos os exercícios expostos pelos autores nesse capítulo, são de natureza algébrica e não contextualizados, caracterizando assim uma explanação mais formal nessa parte do conteúdo, o que vem a ser uma falha do ponto de vista das recomendações dos PCNEM.

A partir desse ponto, a abordagem teórica do conteúdo é reduzida e a definição de Permutação simples é dada como: “qualquer grupo ordenado com n elementos” (XAVIER e BARRETO, 2005, p.248), ou seja, matematicamente falando, $P=n!$, ou seja, $P = n.(n - 1).(n - 2).....1$.

Em seguida os autores trazem um exemplo envolvendo um anagrama e propõem exercícios envolvendo esse conteúdo. Observamos que tanto nesse tópico quanto no anterior, envolvendo números fatoriais, a quantidade de exercícios resolvidos é reduzida. A apresentação de exemplos e exercícios resolvidos pode auxiliar o aluno a compreender os conteúdos, assim como a diversidade de situações problemas pode ajudá-lo a perceber a importância daquilo que está estudando, bem como a aplicabilidade a diversos âmbitos.

Ao explanarem sobre Arranjos simples, os autores adotam o mesmo procedimento didático usado quando abordaram o Princípio Fundamental da Contagem. Os autores definem Arranjo simples como sendo

[...] todos os agrupamentos simples de p elementos que podemos formar com n elementos distintos, sendo $p \leq n$, onde cada um desses agrupamentos se diferencia do outro pela ordem ou natureza de seus elementos. (XAVIER e BARRETO, 2005, p.250).

Após a definição, o texto traz um problema referente ao conteúdo disposto, explorando uma tabela (Figura 29).

Figura 29: Problema explorando arranjo simples

Exemplo:

Uma escola possui 18 professores. Entre eles, serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?

Os agrupamentos são arranjos simples, pois 2 deles se distinguem por terem algum professor diferente ou por terem as mesmas pessoas mas em cargos diferentes.

Veja a tabela:

Cargo	Diretor	Vice	C. Pedagógico
Possibilidades	18	17	16

Logo: $A_{18,3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\ 896$

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.250

Ao observar o exemplo disposto por Xavier e Barreto, fica evidente a preocupação dos autores em resolver o problema de Arranjo simples, tendo em vista a não apresentação da fórmula que expressa a resolução algébrica para o problema. Vale salientar também o uso de contexto na explanação, para facilitar a compreensão do problema pelos alunos, diferentemente do que aconteceu com os exercícios do capítulo anterior.

A partir desse ponto do texto os autores passam a utilizar fórmulas para a resolução dos problemas propostos, apresentando a fórmula para Arranjos simples, com uma demonstração informal. Um raciocínio construtivo é elaborado, partindo de um conjunto A e seus respectivos elementos.

Vale salientar o quão detalhista são os autores ao descreverem os processos algébricos utilizados pelos mesmos para a construção da fórmula, deixando o principal passo dessa construção algébrica evidente para os leitores, quando eles sugerem por escrito a multiplicação do segundo membro por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$.

Depois que apresentam a demonstração, os autores trazem um exemplo numérico, para exemplificar o uso da expressão determinada por eles, por meio das manipulações algébricas descritas no processo. (Figura 30).

Figura 30: Fórmula de arranjo simples.

Vejamus como estabelecer uma fórmula para o cálculo do número $A_{n,p}$.
 Considerando o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ e os números $A_{n,1}; A_{n,2}; A_{n,3}; \dots; A_{n,p}$, temos:

$$A_{n,1} = n$$

$$A_{n,2} = n \cdot (n - 1)$$

$$A_{n,3} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$$

$$A_{n,4} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$$

Multiplicando o segundo membro da igualdade por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, encontramos a fórmula do arranjo:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

Logo:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ sendo } p \leq n$$

Quando $p = n$, temos:
 $A_{n,n} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, ou $A_{n,n} = n!$, que é a permutação simples de n elementos.
 Assim, $A_{n,n} = P_n = n!$, para cálculo do número de arranjos simples.

Exemplo:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.251

Após a apresentação do exemplo, os autores propõem uma lista de exercícios para a prática da teoria exposta. Essa lista de exercícios traz questões envolvendo o uso direto da fórmula (Figura 31), sem contextos, e problemas de aplicação, associados a contextos diversificados (Figura 32), que o aluno poderá encontrar em avaliações ou em situações práticas envolvendo o conteúdo.

Figura 31: Exercícios sobre Arranjo simples com uso direto de fórmula.

Calcule:

a) $A_{4,3} = 24$ c) $A_{12,3} = 1320$

b) $A_{5,2} = 20$ d) $\frac{A_{4,2}}{A_{6,5}} = \frac{1}{60}$

Resolva as equações:

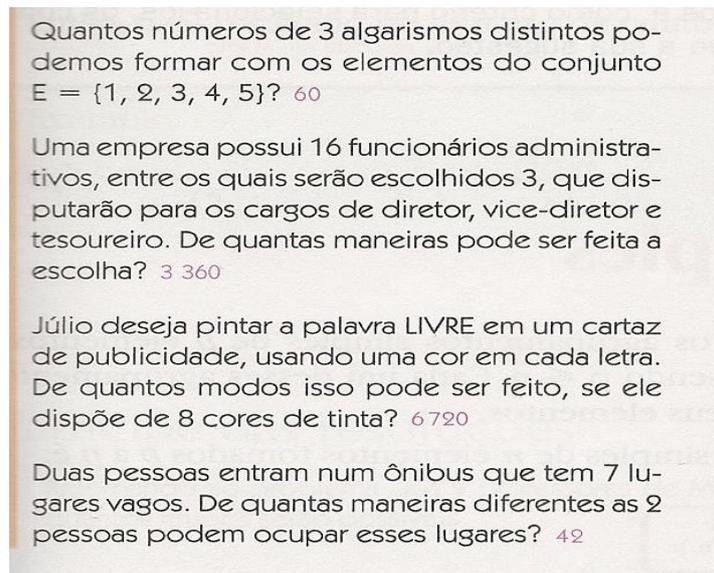
a) $A_{n,2} = 30 \quad \vee = \{6\}$

b) $\frac{A_{n,4}}{A_{n,3}} = 8 \quad \vee = \{11\}$

c) $\frac{A_{n,2}}{3} = n + 4 \quad \vee = \{6\}$

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.253

Figura 32. Questões de Arranjo, contextualizadas.



Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.253

Xavier e Barreto definem uma Combinação simples como “todo agrupamento simples de p elementos que podemos formar com n elementos distintos, sendo $p \leq n$ ” (XAVIER e BARRETO, 2005, p.254). Os autores destacam, como observação, que cada um desses agrupamentos se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos, o que poderia complementar a definição dada pelos autores. Para chegar à fórmula de Combinação de n elementos tomados p a p , os autores tomam como ponto de partida o problema destacado na (Figura 33).

Figura 33: Exemplo tomado como base para Combinação simples.

Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?

Os agrupamentos são combinações simples, pois um deles se distingue do outro somente quando apresenta pelo menos uma pessoa diferente. Invertendo a ordem dos elementos, não alteramos o grupo.

Calculamos inicialmente os arranjos simples formados por 4 entre os 9 professores de

$$\text{Matemática (m)}: A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = 3\,024.$$

Mas aqui consideramos distintos os agrupamentos do tipo (m_3, m_7, m_6, m_9) e (m_7, m_3, m_6, m_9) . A quantidade de agrupamentos formados por esses professores, mudando-se apenas a ordem, é dada por $p_4 = 4! = 24$.

Logo, o número de combinações simples será o quociente $3\,024 : 24 = 126$.

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, pág.254

Para resolver o problema proposto, usa-se a fórmula de Arranjo simples, fazendo-se considerações acerca da diferença existente entre Arranjos e Combinações. Para a demonstração da fórmula, os autores utilizam o exemplo dado (Figura 33), e, chegam à fórmula de Combinação: $C = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, com $p \leq n$ (Figura 34).

Figura 34: Construção da fórmula de combinação simples.

Considerando o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ e uma combinação de p elementos de A , vamos fazer as permutações desses elementos, e encontrar $p!$ seqüências, ou seja, os arranjos n elementos de A tomados p a p . Portanto temos o produto:

$$C_{n,p} = A_{n,p}, \text{ ou seja, } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ sendo } p \leq n$$

Então, para o cálculo do número de combinações simples, temos:

Exemplo:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.255

Vale aqui destacar a informalidade na demonstração da fórmula de Combinação, evidenciando a preocupação dos autores com a resolução de

exercícios e não com a Matemática formal relacionada ao conteúdo. Também podemos perceber, assim como no exemplo para os Arranjos simples, a resolução de um problema envolvendo o assunto, mas sem considerar a existência prévia de uma fórmula para Combinação simples.

Xavier e Barreto utilizam o problema de partida para determinar o quociente da Permutação simples com a sequência $p!$, ideia que usam para construir a expressão algébrica para Combinação simples. Para finalizar essa construção, a mesma estratégia seguida em Arranjos é novamente disposta, utilizando-se de um exemplo numérico para finalizar a discussão algébrica.

Após essa breve abordagem, são propostos exercícios sobre o conteúdo de mesma natureza dos apresentados para o conteúdo de Arranjos, ou seja, problemas com objetivos diferentes, mas que abordam principalmente a prática algébrica na aplicação da fórmula, com contextualizações inexpressivas no âmbito geral (Figura 35).

Figura 35: Exercícios sobre Combinação simples.

39 Calcule:

a) $C_{5,3}$ 10 c) $C_{6,2}$ 15

b) $C_{7,5}$ 21 d) $\frac{C_{10,3}}{C_{5,3}}$ 12

40 Resolva as equações:

a) $C_{n,2} = 6$ $\vee = \{4\}$ b) $C_{n,4} = 4 C_{n,3}$ $\vee = \{19\}$

41 Quantos grupos diferentes de 4 lâmpadas podem ficar acesos num galpão que tem 10 lâmpadas? 210

42 Quantos subconjuntos de 4 elementos possuem um conjunto de 6 elementos? 15

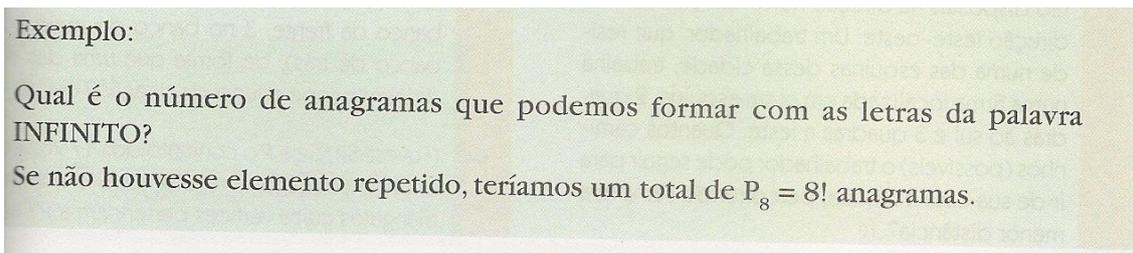
43 (FAAP-SP) O número de combinações de n objetos distintos tomados 2 a 2 é 15. Determine n .
 $n = 6$

Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.256

Após a apresentação das principais fórmulas do conteúdo de Análise Combinatória, os autores destinam espaço para um caso particular que é o de

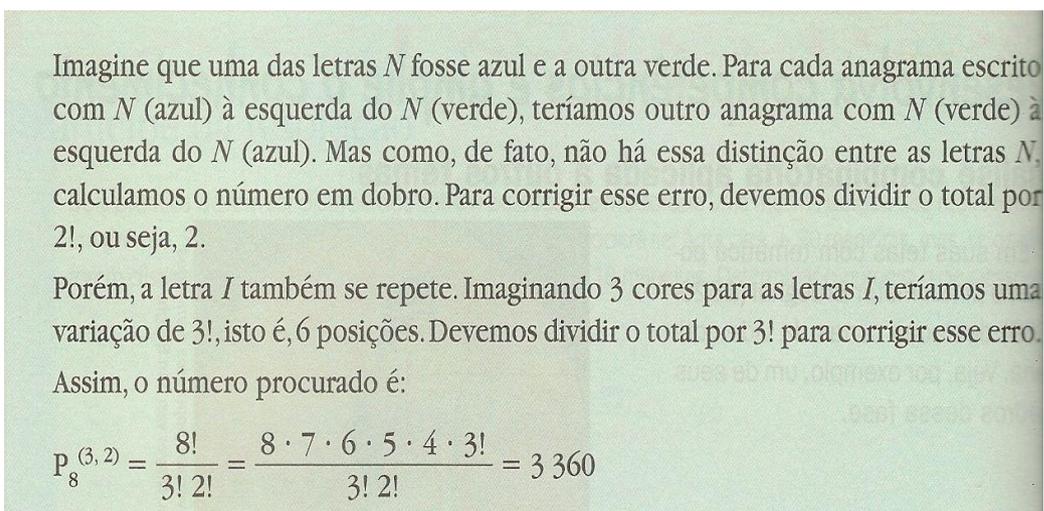
Permutação com elementos repetidos. Os autores trazem a fórmula: $P = \frac{n!}{\alpha! \beta! \mu!}$, seguida de uma breve explicação, e concluem o conteúdo com um exemplo que mostra a diferença entre os problemas de Permutação tradicional (Figura 36) e a Permutação que contém elementos repetidos (Figura 37).

Figura 36: Resolução por permutação simples



Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.259

Figura 37: Resolução por permutação com elementos repetidos



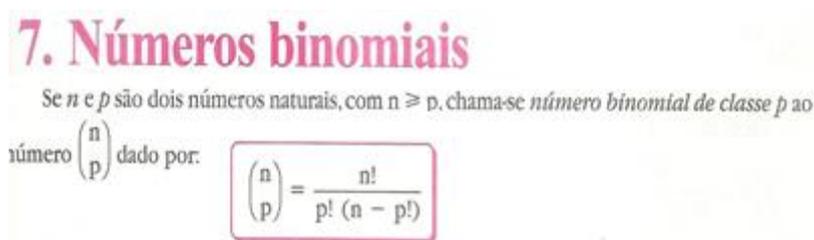
Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, pág.260

Ao observar a Figura 37, podemos perceber o cuidado dos autores ao discutirem os diferentes casos, explicando o porquê da diferenciação de abordagens. Vale salientar também que apenas com esse exemplo prático os autores concluem a parte teórica do conteúdo, omitindo o processo de obtenção da fórmula, ou seja, sua demonstração.

Ao encerrar o Capítulo dedicado à Análise Combinatória, o livro faz referência aos números binomiais, em relação com a Combinação simples, o

que não identificamos nos livros didáticos da década de 1960 analisados nesse trabalho. Não entraremos em detalhes sobre esse conteúdo, pois foge do objetivo do nosso trabalho, mas a forma como o texto apresenta o conteúdo pode ser observada na (Figura 38).

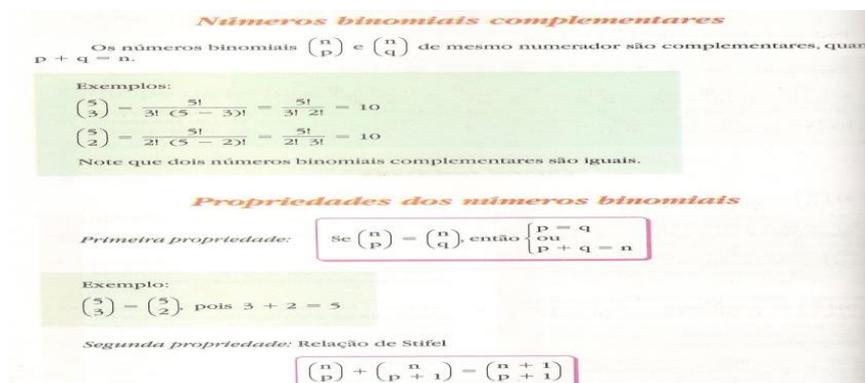
Figura 38: Introdução aos números binominais



Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, pág.261

Xavier e Barreto tratam os números binominais como uma particularidade algébrica relativa ao conteúdo de Análise Combinatória. Os autores, no capítulo sobre os números binominais, explanam as propriedades dos números binomiais de forma algébrica. Dentre as propriedades destacadas, está presente a relação de Stifel, dentre outras propriedades algébricas que servem como alicerce para a introdução ao Binômio de Newton (Figura 39).

Figura 39: Algumas propriedades dos números binominais.



Fonte: XAVIER e BARRETO, 2005, p.262

Ao finalizar esse capítulo, Xavier e Barreto expõem todas essas propriedades e suas respectivas demonstrações, com o devido rigor matemático e, em seguida, propõem uma série de exercícios de caráter algébrico, para, enfim, abordar o conteúdo referente ao Binômio de Newton.

Sobre o livro, concluímos ser ele um material didático cujas características se enquadram parcialmente aos padrões atuais de ensino sugeridos para o trabalho com Matemática no Ensino Médio, conforme documentos oficiais atuais, como os PCNEM. A preocupação dos autores, ao exporem o conteúdo de Análise Combinatória, tomando por base um problema motivacional, contextualizado, é adequada, de acordo com nossa compreensão. Além disso, a obra caracteriza-se por apresentar os resultados algébricos de maneira mais intuitiva e menos formal, omitindo os detalhes típicos do rigor matemático, mas sem deixar de apresentar uma explicação plausível do porquê da parte funcional das fórmulas.

De modo geral, boa parte dos problemas propostos por Xavier e Barreto abordam os conteúdos destacados por meio do uso direto de fórmulas, sem contexto, mas há situações problemas relacionadas ao cotidiano dos alunos, com diversos níveis de dificuldade. Neste ponto, os autores poderiam ter apresentado mais exemplos, visando facilitar a resolução dos problemas proposto.

Não podemos deixar de destacar a preocupação dos autores de incluírem em seu texto do capítulo introdutório uma breve história sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória e de como seus percussores chegaram a desenvolvê-la, o que contextualiza historicamente o conteúdo.

De um modo geral o último livro se destaca em relação aos outros dois livros analisados nesse trabalho, tanto na parte teórica quanto prática, a exemplo da introdução do conteúdo a partir de um problema contextualizado, sem deixar de lado uma explanação algébrica para justificar a estrutura do conteúdo abordado.

Essa conclusão era esperada, uma vez que, da década de 1960 até os dias atuais, muitas pesquisas foram realizadas sobre como os alunos aprendem, sobre como aprendem Matemática, e sobre como desenvolver estratégias mais eficientes de ensino dessa disciplina. Essas pesquisas terminam, de certa forma, sendo contempladas pelos autores de livros

didáticos, em especial em razão do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), desenvolvido sistematicamente no Brasil desde o ano de 1996, tendo a Secretaria de Educação Básica a responsabilidade de coordenar e avaliar as obras inscritas no Programa, em parceria com universidades públicas.

De acordo com Bittencourt,

[A]s pesquisas e reflexões sobre o livro didático permitem apreendê-lo em sua complexidade. Apesar de ser um objeto bastante familiar e de fácil identificação, é praticamente impossível defini-lo. Pode-se constatar que o livro didático assume ou pode assumir funções diferentes, dependendo das condições, do lugar e do momento em que é produzido e utilizado nas diferentes situações escolares. BITTENCOURT, 2004, p.471)

Considerando a importância que o livro didático tem para a prática do professor, entendemos como se fundamental importância o exercício da análise dessa ferramenta de ensino, por parte de professores em processo de formação inicial e continuada, o que ampliará sua visão acerca daquilo que ensina e sobre a adequação das formas como faz isso. Entendemos que nenhum livro pode ser considerado, isoladamente, bom ou ruim, e sua eficiência dependerá do uso que é feito pelo professor. Vale ressaltar, nesse aspecto, a importância da contextualização dos conteúdos matemáticos, para fortalecer a visão de que esse campo de conhecimento pode e deve auxiliar a formação social e política dos estudantes.

Se os livros didáticos não trazem questões significativas para a formação do aluno, cabe ao professor buscá-las em outras fontes, uma vez que esses instrumentos não podem conduzir ou definir o trabalho a ser desenvolvido em sala de aula, mas apenas auxiliar o trabalho docente, na medida em que contribuir para o crescimento da autonomia do estudante e auxiliar a motivá-lo para aprender.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo central, a realização da análise de livros didáticos de diferentes épocas, focando no conteúdo de Análise Combinatória. Nossa análise se deu considerando a proposta de trabalho dos autores dos livros selecionados para estudo, identificando metodologia, exercícios resolvidos e propostos, contextualizações e outros aspectos que julgássemos importante destacar durante o processo.

Nessa perspectiva, analisamos três livros didáticos de Matemática dirigidos ao que denominamos hoje de segundo ano do Ensino Médio, nos quais constavam o referido assunto. Os livros foram selecionados do acervo do Laboratório de Estudos e Pesquisa da Aprendizagem Científica (LEPAC), vinculado ao Departamento de Matemática da Paraíba.

Embora o recorte temporal tenha sido pequeno e o número de obras analisadas ter sido reduzido, com base nos resultados da pesquisa pudemos observar a crescente evolução no material didático utilizado pelos alunos ao longo das últimas décadas. Essa evolução, considerando apenas o aspecto de forma, vai desde o material utilizado para impressão; qualidade e quantidade de imagens apresentadas; formato dos livros; até a linguagem utilizada pelos autores.

Observamos que a linguagem utilizada nos livros didáticos da década de 1960, era extremamente formal, se compararmos com os livros utilizados na década atual, onde encontramos uma linguagem em que o autor se preocupa em ter um diálogo com o leitor. Além disso, observamos diferenças expressivas no sentido de os livros saírem da utilização de exercícios de natureza predominantemente matemática para a inserção de problemas contextualizados com acontecimentos relacionados à sociedade.

Esse encaminhamento, nos livros mais atuais, adotando uma perspectiva contextualizada, adequa-se aos requisitos propostos pelos PCN e os PCNEM e ao que é exigido pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Nesse último caso, as questões matemáticas têm sido aplicadas ao cotidiano ou a outras de conhecimento, em uma proposta de interdisciplinaridade.

Em relação à abordagem matemática dos conteúdos, proposta pelos autores das obras analisadas, também pudemos observar a diminuição da presença de demonstrações formais e o aumento de uso de uma abordagem que apela mais à intuição e à exemplificação, para o trabalho com os conteúdos referentes à Análise Combinatória. Essa abordagem, mais intuitiva, utiliza-se de técnicas que partem de um processo construtivo do raciocínio do aluno, assim como a proposição de questões como ponto de partida para o processo construtivo do conhecimento sobre o conteúdo em questão.

Percebemos também que essa evolução passa não só pelo material didático, mas, também, demanda modificações na relação educador-educando, assim como na relação do professor com o conteúdo. Além do fato dos livros didáticos terem hoje um formato diferente, o que é natural acontecer, em razão das mudanças que o mundo vive permanentemente, o acesso à rede de informações e comunicação possibilita que o professor tenha acesso a um grande leque de opções para o trabalho com os conteúdos.

O aluno pode ter as mesmas oportunidades, uma vez que pode ter acesso a textos complementares, problemas resolvidos, aplicativos que permitem a exploração de diferentes conteúdos matemáticos, dentre outras possibilidades, permitindo ao aluno mais oportunidades para compreender o que estuda e ter mais autonomia. Essa evolução tem se estendido aos livros didáticos de Matemática que têm sido produzidos, uma vez que os autores já apresentam a indicação de artigos e links que podem ser consultados para ampliação do trabalho com o conteúdo.

Do ponto de vista pessoal, esse trabalho acadêmico agregou valor à minha formação profissional, deixando mais clara, para nós, a importância do livro didático e de seu uso em sala de aula e de como a escolha de um bom livro didático pode contribuir positivamente para o aprendizado dos alunos.

Também é nosso desejo que essa pesquisa inicial sirva como base para outras investigações que pretendemos realizar na continuidade de nosso processo de formação, seja em nível de Especialização ou Mestrado, que envolva não só uma pesquisa bibliográfica, mas, também, uma pesquisa de campo para que possamos nos aprofundar cada vez mais nesse processo de melhoria de formação acadêmica.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases Nacional (LDB), MEC, 1996. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/tvescola/leis/lein9394.pdf>

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Parâmetros Nacionais Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. SEB, MEC, Brasília: 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em setembro de 2014.

BITTENCOURT, C. M. F. Em Foco: História, produção e memória do livro didático. Educação e Pesquisa. Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Volume 30, No.3. 2004. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-97022004000300007. Acesso em março de 2015.

D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

JEZINE, E. Metodologia do Trabalho Científico. In: Antonio Sales da Silva. (Org.). Licenciatura em Matemática a Distância. 1ed. Volume 1. João Pessoa: Linceu, 2007.

MIORIM, M. A. Introdução à história da educação matemática. São Paulo: Atual, 1998.

NEVES, A.; HELOU, W. Matemática curso colegial. Volume 2. São Paulo: EDART, 1966.

QUINTELLA, A. Matemática segundo ano colegial. Volume 2. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967.

SOUZA, A.C.P. Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP – Rio Claro.

VASCONCELOS. M. B. A contextualização e o ensino de matemática: um estudo de caso. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação, UFPB. João Pessoa: 2007. Disponível em: <http://www.ce.ufpb.br/ppge/Dissertacoes/dissert07/BETANIA.pdf>. Acesso em março de 2015.

XAVIER, C.; BARRETO, B. Matemática ensino médio aula por aula. Volume 2. São Paulo: FTD, 2005.