



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional

ESTUDO DA MAXIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA DE TRELIÇAS COM
MASSA NÃO ESTRUTURAL

Creyton Borges Rocha

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional, PPGMMC, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: José Miguel Aroztegui Massera

João Pessoa
Fevereiro de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R672e Rocha, Creyton Borges.

Estudo da maximização da frequência de treliças com massa não estrutural / Creyton Borges Rocha. - João Pessoa, 2018.

58 f. : il.

Orientação: José Miguel Aroztegui Massera.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Matemática computacional - Modelagem. 2. Estruturas mecânicas - Massa não estrutural. 3. Massa não estrutural - Maximização da frequência. I. Massera, José Miguel Aroztegui. II. Título.

UFPB/BC

ESTUDO DA MAXIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA DE TRELIÇAS COM
MASSA NÃO ESTRUTURAL

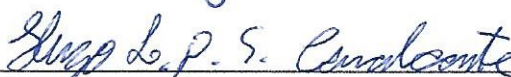
Creyton Borges Rocha

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:



Prof. José Miguel Aroztegui Massera, D.Sc.



Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, D.Sc.



Prof. José Jefferson da Silva Nascimento, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
FEVEREIRO DE 2018

Agradecimentos

Sou imensamente grato a Deus, por dar a oportunidade de me aprofundar na ciência.

Todas as conquistas são frutos de muito trabalho. A conclusão do curso de mestrado e a elaboração desta dissertação contaram com a contribuição de muitas pessoas. Sem dúvida, alguns desses parceiros de jornada merecem um agradecimento especial.

A minha mãe Amélia Pereira Borges, ao meu pai(in memoriam) João Alvarenga Rocha, aos meus avós Maria das Mercês Ferreira e Jaime Ferreira Borges, a minha irmã Cinara Borges Rocha, não posso deixar de reiteradamente agradecer aos incentivos, a compreensão diante da minha ausência e angústia, pelo amor incondicionado que nunca deixaram de me agraciar.

Aos meus companheiros de moradia, André castro e Mirlla Brandão pelo convívio e aprendizado durante esses dois anos, fizeram com que os momentos longe da família fossem menos tristes.

Ao Meu orientador José Miguel Aroztegui, por todos os ensinamentos e experiências partilhados, por sua dedicação, competência e paciência.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DA MAXIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA DE TRELIÇAS COM MASSA NÃO ESTRUTURAL

Creyton Borges Rocha

Fevereiro/2018

Orientador: José Miguel Aroztegui Massera

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Neste trabalho estuda-se o problema da maximização da frequência de treliças e o efeito da inclusão de uma massa não estrutural. O problema de maximização da frequência de estruturas é importante para as aplicações de engenharia mecânica, contudo, este problema de otimização possui sérias dificuldades técnicas quando se permite que algum componente estrutural seja excluído (otimização de topologia). Afortunadamente, existem resultados teóricos que permitem reescrever este problema com um modelo de programação semidefinida. Neste sentido, o presente trabalho apresenta as definições e resultados teóricos necessários para a compreensão da formulação de programação semidefinida. Para resolver numericamente este problema emprega-se o algoritmo de pontos interiores para programação não linear semidefinida denominado FAIPA-SDP. Esta técnica foi empregada para resolver exemplos numéricos. Estes exemplos mostram que o FAIPA-SDP obtém uma solução para os problemas de otimização formulados. Os resultados numéricos também permitem comprovar todas as propriedades teóricas apresentados neste trabalho. Palavras-chave: algoritmo de pontos interiores; programação não linear semidefinida; frequência natural de estruturas; massa não estrutural.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DA MAXIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA DE TRELIÇAS COM MASSA NÃO ESTRUTURAL

Creyton Borges Rocha

Fevereiro/2018

Orientador: José Miguel Aroztegui Massera

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

This work study the problem of maximizing the fundamental frequency of trusses and the effect of including a non structural mass. The problem of maximizing the natural frequencies of structures is important for mechanical engineering applications, however, the optimization model has difficult technical issues when some structural element is removed (topology optimization). Fortunately, there exists theoretical results that transforms the original problem in a semidefinite optimization model. In this sense, the present work shows the mathematics to define the semidefinite model for the maximum eigenfrequency problem. To solve that problem numerically, the Feasible Arc Interior Point Algorithm (FAIPA-SDP) is employed. Some numerical examples are solve with this algorithm. Those numerical examples shows that FAIPA-SDP solve the optimization problems. Those results also confirm all the theoretical properties presented in this work.

keywords: interior point algorithm; nonlinear semidefinite programming; natural frequency of structures; non-structural mass.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Símbolos	x
1 Introdução	1
1.1 Introdução da pesquisa	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Organização do Trabalho	3
2 Conceitos preliminares	5
2.1 Notações, definições e teoremas fundamentais	5
2.2 Programação não linear e semidefinida	10
2.2.1 Restrições LMI/BMI	10
2.2.2 Condições de Otimalidade	11
2.3 Modelo de treliças	14
2.3.1 Método dos elementos finitos	14
2.3.2 Complacência	17
2.3.3 Frequência natural de uma estrutura	18
3 Problema da maximização da frequência com massa não estrutural	20
3.1 Introdução	20
3.2 Formulação dos problemas	21
3.3 Inter-relação dos problemas sem a massa não estrutural	22
3.4 Inter-relação dos problemas com a massa não estrutural não nula	23
3.5 Discussão sobre a variação da massa não estrutural	25
3.6 Reformulação dos problemas para programação semidefinida	26
4 Algoritmo de pontos interiores e arcos viáveis para programação semidefinida (FAIPA-SDP)	28
4.1 Descrição do FAIPA-SDP	28
4.2 Cálculo da direção de descida	29
4.3 Cálculo da direção de decida e viável	32

4.4	Cálculo do arco	32
4.5	Busca linear	33
4.6	Atualizações do FAIPA-SDP	33
4.7	FAIPA-SDP	34
5	Testes numéricos	36
5.1	Dependência da frequência fundamental com a massa não estrutural .	36
5.1.1	Dados	37
5.1.2	Exemplo 2- treliça de 18 barras	41
5.1.3	Exemplo 3	44
5.1.4	Exemplo 4	45
6	Conclusões e trabalhos futuros	46
6.1	Conclusões	46
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	46
	Referências Bibliográficas	48

Lista de Figuras

2.1	Direção viável de descida em ponto x . Espaço tangente $T(x)$	12
2.2	Uma treliça bidimensional.	14
2.3	Definição do elemento barra bidimensional.	15
5.1	Estruturas	39
5.2	frequência da estrutura.	40
5.3	frequência da estrutura ótima.	40
5.4	gráfico comparativo	41
5.5	Estruturas	42
5.6	frequência da estrutura.	43
5.7	frequência da estrutura ótima.	43
5.8	gráfico comparativo	43
5.9	Estruturas ótimas.	44

Lista de Símbolos

P_{aut}	Problema do autovalor mínimo ou maximização da mínima frequência, p. 23
P_{com}	Problema da mínima complacência, p. 23
P_{vol}	Problema do mínimo volume, p. 23
Ω	Conjunto viável, p. 7
λ_{min}	Maximização da menor frequência natural, p. 20
$f(x)$	Função objetivo, p. 7
$g(x)$	Restrições de desigualdade, p. 9

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução da pesquisa

O conceito de otimização é intuitivo e inerente aos seres vivos, desde as tarefas cotidianas que executamos da melhor maneira possível, a escolha de caminhos ótimos para um determinado local, até mesmo escolher entre as várias possibilidades um trajeto mais rápido ou mais curto entre a casa e o trabalho. Para problemas mais complexos, a intuição deu lugar ao uso de artifícios técnicos desenvolvidos para otimizar essas atividades, dando origem a teoria da otimização. Hoje em dia a teoria de otimização provoca um enorme interesse científico por causa das exigências de aplicação em diferentes áreas da vida humana tais como engenharia, economia, biologia, medicina, física e outros [1].

A busca de uma solução mais adequada entre diversas soluções alternativas determina um problema de otimização. Para isso, necessitamos de um critério de avaliação das soluções viáveis, objetivo ou subjetivo, que nos permita dizer que uma solução é melhor que a outra.

Esse critério de avaliação é chamado de função objetivo, a qual se busca otimizar, ou seja, maximizar ou minimizar. Se é solução, tem que ser viável. Esses dois elementos caracterizam um problema de otimização: otimizar uma função objetivo, satisfazendo restrições existentes.

A minimização ou maximização da função objetivo pode não ser suficiente para encontrar uma solução interessante do problema de otimização. Por este motivo é necessário definir um conjunto onde se deve procurar a solução do problema de otimização. Por este motivo é necessário a definição de funções de restrição.

O projeto de engenharia pode envolver diversos sistemas (por exemplo: sistemas mecânicos e eletrônicos). Cada sistema tem um conjunto de variáveis de estado que devem pertencer a um conjunto de valores para que o projeto seja viável. A função deve ser otimizada de modo que as variáveis de estado estejam dentro do conjunto

de configurações admissíveis.

O problema de otimização do projeto de engenharia é minimizar ou maximizar uma função objetivo apropriada, sujeita a restrições de igualdade e desigualdades não lineares. Assim temos o problema de programação não linear.

Os métodos de pontos interiores se tornaram bastante populares a partir dos anos 80 do século passado. O interesse inicial se deveu à complexidade polinomial destes métodos, o que os diferencia do simplex que tem complexidade exponencial. Um pouco mais tarde, foram desenvolvidas versões dos métodos de pontos interiores bem competitivas também do ponto de vista computacional. Os métodos de pontos interiores são os mais indicados para problema de grande porte [2].

O FAIPA (*Feasible Arc Interior Point Algorithm*) desenvolvido por J. Herskovits e G. Santos, é um algoritmo de pontos interiores que resolve o problema geral de otimização não linear fazendo iterações tipo Newton nas variáveis do projeto e nos multiplicadores de Lagrange para resolver as condições de otimalidade. O FAIPA tem se mostrado confiável e eficiente na solução de problemas reais de engenharia e tem vantagens importantes. O FAIPA é um algoritmo de pontos interiores por direções e arcos viáveis. Os algoritmos de direção viável tem se mostrado muito eficiente na área de engenharia, onde a avaliação das funções geralmente é muito cara. Como em cada iteração é obtido um ponto viável, o processo de otimização pode ser detido em qualquer momento quando, por exemplo, a função objetivo tiver um valor suficientemente pequeno. Essa vantagem é muito importante porque muitos problemas de engenharia exigem a verificação das restrições em cada iteração. O FAIPA resolve em cada iteração três sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes. Isto permite que se faça uma única fatoração da matriz do sistema linear por iteração, economizando tempo de computo para resolver os demais sistemas lineares [3].

Existe uma classe de problemas de otimização com muitas aplicações teóricas e práticas denominada problemas de programação semidefinida (*Semidefinite Programming*, SDP). Na programação semidefinida se minimiza uma função objetivo sujeito a restrições de funções matriciais semidefinidas. Em [4] foi desenvolvido um algoritmo baseado no FDIPA (*Feasible Direction Interior Point Algorithm*), para resolver problemas de programação semidefinida. O mesmo se denomina FDIPA-SDP e tem sido aplicado em problemas de programação semidefinida e de otimização de estruturas [5], [6]. Recentemente, em [7], desenvolveu-se o FAIPA-SDP que é uma adaptação do FAIPA para resolver problemas de programação semidefinida.

A engenharia de estruturas, nas últimas décadas, vem levando em consideração vários problemas nos quais são consideradas as vibrações em estruturas quando submetidas a ação de carregamentos dinâmicos. Os impactos sofridos pelas estruturas quando submetidas a ações de cargas que variam ao longo do tempo podem ser

determinados através de análise das propriedades que tratam dos modos naturais de vibração, dos fatores de amortecimento e das frequências naturais destas estruturas.

A otimização estrutural tem por objetivo buscar uma configuração para uma estrutura onde se obtenha um desempenho ótimo segundo alguns parâmetros pré-definidos. Ao formular um problema de otimização estrutural é indispensável determinar quais são as: variáveis de projeto, função objetivo e função de restrição.

A formulação clássica do problema de maximização da menor frequência natural com massa não estrutural e sem a massa não estrutural possui dificuldades técnicas (como a não diferenciabilidade e a não continuidade). Em [8] é apresentada uma formulação de programação semidefinida que supera todas essas dificuldades, contudo as restrições deste problema de programação semidefinida são bilineares, portanto um problema não convexo. A solução numérica deste problema, em geral, é de difícil obtenção, uma vez que, há poucos algoritmos que resolvem o mesmo.

No presente trabalho são apresentados diferentes formulações para o problema de otimização de topologia estrutural. Em alguns problemas a frequência fundamental é considerada uma restrição e em outros problemas a frequência fundamental é a função objetivo. Apresenta-se o problema do mínimo volume, o problema da mínima complacência e o problema da maximização da frequência fundamental (a menor frequência natural da estrutura). Em todos os casos se inclui ou não uma massa não estrutural. O trabalho discute também as inter-relações destes problemas e mostra como as soluções de um problema podem ser obtidas a partir das soluções dos outros. Para o problema da maximização, são realizados testes numéricos para estruturas de treliças. Estes resultados ilustram os resultados teóricos e demonstram a utilidade prática do presente estudo.

1.2 Objetivos

- Estudar por meio da análise de elementos finitos a relação da frequência fundamental de treliças com a existência de massa não estrutural.
- Dissertar sobre algoritmos de pontos interiores para programação não convexa, não linear e semidefinida, com particular ênfase na técnica FAIPA-SDP.
- Realizar testes numéricos com o algoritmo FAIPA-SDP para obter projetos ótimos de treliças com ou sem massa não estrutural.

1.3 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2: Apresenta-se conceitos básicos e alguns resultados importantes da otimização não linear que serão usados na parte de análise do FAIPA-SDP.

Capítulo 3: Descreve algumas relações entre os problemas do mínimo volume, mínima complacência e da maximização da frequência natural, incluindo uma massa não estrutural.

Capítulo 4: Neste capítulo é descrito o algoritmo de pontos interiores para programação não linear semidefinida denominado FAIPA-SDP.

Capítulo 5: São feitos testes em problemas concretos para calcular a máxima frequência natural e verificar qual a sua relação com a massa não estrutural.

Capítulo 6: Neste capítulo se apresentam as conclusões finais da pesquisa e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos preliminares

Nesta seção se apresentam definições e notações que serão utilizadas em diversas partes deste trabalho. Estes objetos são apresentados na literatura [9], [10], [2], [11] e [5].

2.1 Notações, definições e teoremas fundamentais

Definição 1. *Uma sequência em \mathbb{R}^n é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que associa a cada número natural k um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. Denota-se $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência por x .*

Definição 2. *Uma sequência (x_k) em \mathbb{R}^n diz-se convergente quando existe $a = \lim x_k$.*

Teorema 2.1.1. *(Bolzano – Weierstrass) Toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subsequência convergente.*

Definição 3. *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica. Dizemos que A é:*

1. *Definida positiva quando $x^\top Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.*
2. *Semidefinida positiva quando $x^\top Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.*
3. *Definida negativa quando $x^\top Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.*
4. *Semidefinida negativa quando $x^\top Ax \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.*
5. *Indefinida se existem x e y em \mathbb{R}^n tais que $x^\top Ax > 0$ e $y^\top Ay < 0$.*

Definição 4. *A aplicação que organiza em um vetor os componentes de uma matriz $A \in \mathbb{S}^k$ é definida como*

$$svec : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{k}}$$

onde

$$svec(A) = \left[a_{11} \quad \sqrt{2}a_{12} \quad a_{22} \quad \sqrt{2}a_{13} \quad \sqrt{2}a_{23} \quad a_{33} \quad \cdots \quad a_{kk} \right]^\top \in \mathbb{R}^{\bar{k}} \quad (2.1)$$

Denota-se por $\text{smat} : \mathbb{R}^{\bar{k}} \rightarrow \mathbb{S}^k$ a inversa de svec .

Definição 5. Define-se o produto interno entre duas matrizes $A, B \in \mathbb{S}^m$ como:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB) = \text{svec}(A)^\top \text{svec}(B). \quad (2.2)$$

Definição 6. Sejam $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ e $L \geq 0$ uma constante. Dizemos que ζ é Lipschitz em V , com constante L , se

$$\|\zeta(x) - \zeta(y)\| \leq L \|x - y\| \quad (2.3)$$

para $x, y \in V$.

Definição 7. A e B devem ser simétricas $n \times n$. O produto simétrico de Kronecker entre essas duas matrizes é denotado por $A \otimes B$ e verifica, para qualquer matriz $C \in \mathbb{S}^n$, a seguinte igualdade:

$$(A \otimes B) \text{svec}(C) = \text{svec}(\text{sym}(BCA)) \quad (2.4)$$

Proposição 2.1.1. Para A, B, C e $D \in \mathbb{S}^m$ e uma matriz não singular P , o produto simétrico de Kromecker e svec satisfazem as seguintes propriedades:

1. $(A \otimes B) \text{svec}(C) = (B \otimes C) \text{svec}(A)$
2. $A \otimes B = B \otimes A$
3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = \frac{1}{2}(AC \otimes BD + AD \otimes BC)$
4. $(P \otimes P)^{-1} = (P)^{-1} \otimes (P)^{-1}$
5. Se $A, B \succeq 0$, então $(A \otimes B) \succeq 0$
6. Se $A \succeq 0$ e $B \preceq 0$, então $(A \otimes B) \preceq 0$

Definição 8. Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Define-se $\text{diag}(v)$ como a matriz diagonal cujos componentes na diagonal são v_i , $i = 1, \dots, n$.

Definição 9. Seja C um subconjunto de \mathbb{R}^n . Dizemos que C é um conjunto convexo se, para qualquer par de pontos $x, y \in C$, e para qualquer $\lambda \in [0, 1]$, o ponto $\lambda x + (1 - \lambda)y$ pertence também a C .

Definição 10. Uma função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um conjunto convexo C é convexa se, e somente se, para todo $x, y \in C$ e para $\lambda \in [0, 1]$, se verifica que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (2.5)$$

Definição 11. Um problema de programação convexa é um problema de otimização onde a função objetivo f é convexa e a região viável Ω é um conjunto convexo.

Definição 12. Uma função f é quasiconvexa se, e somente se, para qualquer x e y , e para qualquer $\lambda \in [0, 1]$, a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max \{f(x), f(y)\} \quad (2.6)$$

Definição 13. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente no ponto $a \in X$ quando, para cada $c > f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, \|x - a\| < \delta$ implica $f(x) < c$.

Observamos que o mínimo global é também um mínimo local e que os mínimos globais somente podem ser caracterizados em casos particulares, como em problemas de programação convexa.

Definição 14. Um ponto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito mínimo Local (ou Mínimo Relativo) de f sobre Ω se existe uma vizinhança $V \equiv \{x \in \Omega : |x - x^*| \leq \delta\}$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para qualquer $x \in V$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in V, x \neq x^*$ então dizemos que x^* é um Mínimo Local Estrito.

Definição 15. Um ponto $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito mínimo global (ou Mínimo absoluto) de f sobre Ω se $f(x) \geq f(x^*)$ para qualquer $x \in \Omega$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \Omega$ então dizemos que x^* é um Mínimo Global Estrito.

A maioria dos métodos de Programação Não Linear (PNL) são iterativos: dado um ponto inicial x^0 , uma sequência de pontos x^k é obtida por repetidas aplicações de uma regra algorítmica. Esta sequência deve convergir a uma solução x^* do problema. O número de iterações fornece uma ideia do esforço computacional requerido para resolver o problema. As definições a seguir introduzem um critério de avaliação da velocidade de convergência para métodos iterativos. A convergência será chamada de assintótica quando a solução não é alcançada em um número finito de iterações.

Definição 16. Um algoritmo iterativo é dito ser globalmente convergente se para qualquer ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ou $(x^0 \in \Omega)$ este gera uma sequência de pontos que converge a uma solução do problema.

Definição 17. Um algoritmo iterativo é dito ser localmente convergente se existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ou $(x^0 \in \Omega)$ que verifica $\|x^0 - x^*\| \leq \epsilon$, a sequência gerada de pontos converge para uma solução do problema.

Uma análise acerca da taxa de convergência de um método com convergência assintótica pode ser feita da definição de ordem de convergência abaixo.

Definição 18. *A ordem de convergência de uma sequência $\{x^k\} \rightarrow x^*$ é o maior valor de p positivo que satisfaz*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^p} = \beta < \infty$$

O método possui convergência linear se $p = 1$ e superlinear se ainda $\beta = 0$. A convergência é quadrática quando $p = 2$. O valor $\beta < 1$ chamamos de raio de convergência.

Os valores de p e β fornecem uma garantia de velocidade na redução da distância de $\|x^{k+1} - x^*\|$ em relação $\|x^k - x^*\|$ quando k é suficientemente grande. Somente uma boa ordem de convergência não garante a rapidez de um método. A convergência é rápida quando p é grande e β pequeno.

Definição 19. *Um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida da função f em $x \in \mathbb{R}^n$ se existe um $\delta > 0$ tal que $f(x + td) < f(x)$ para qualquer $t \in (0, \delta)$.*

É possível prova que se $f(x)$ diferenciável em x e $d^\top \nabla f(x) < 0$, então d é uma direção de descida de $f(x)$.

Definição 20. *Um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ chama-se uma direção viável no ponto $x \in \Omega$ em relação a Ω , se existe $\theta > 0$ tal que para todo $t \in (0, \theta)$ temos $x + td \in \Omega$.*

Dada uma aproximação x^k à solução do problema, uma ideia natural consiste em definir uma direção que, ao mesmo tempo, é viável em x^k em relação ao conjunto Ω e é de descida para a função objetivo.

Definição 21. *O conjunto de pontos viáveis define-se por:*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) \preceq 0\}. \quad (2.7)$$

Para o caso do problema (2.15) a região viável se reduz a:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}. \quad (2.8)$$

Definição 22. *Um ponto x é dito ponto interior do conjunto \mathbb{X} , se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{X}$, para todo $x \in \mathbb{X}$. $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{X}$ denota uma bola aberta de centro em x e raio ϵ .*

O conjunto formado por todos os pontos interiores de \mathbb{X} denominamos interior de \mathbb{X} e se denota por $\text{int}(\mathbb{X})$.

Sejam dadas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^k$, funções suaves. Usa-se a seguinte notação:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} G_{11}(x) & \cdots & G_{1k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{1k}(x) & \cdots & G_{kk}(x) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Na programação não linear, o interior do conjunto Ω é caracterizado por $g(x) < 0$. Para programação semidefinida, o interior de Ω se caracteriza como sendo $G(x) \prec 0$.

Neste trabalho usa-se a seguinte notação para os gradientes das seguintes funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^k$:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

$$\nabla g(x) = \left[\nabla g_1(x) \quad \cdots \quad \nabla g_i(x) \quad \cdots \quad \nabla g_m(x) \right] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (2.11)$$

$$\nabla G(x) = \nabla \text{svec}(G(x)) = \begin{bmatrix} \text{svec} \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(x) \right)^\top \\ \vdots \\ \text{svec} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) \right)^\top \\ \vdots \\ \text{svec} \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}(x) \right)^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \bar{k}} \quad (2.12)$$

onde $\frac{\partial G}{\partial x_i}(x)$ é a derivada parcial de G , em relação a x_i , $i = 1, \dots, n$.

A derivada direcional de G na direção d , no ponto x escreve-se:

$$\frac{\partial G}{\partial d}(x) = \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \text{smat}(\nabla G(x)^\top d). \quad (2.13)$$

A expansão de Taylor de uma função matricial G pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G(x+d) &= G(x) + \frac{\partial G}{\partial d}(x) + R(x,d) \\ &= G(x) + \text{smat}(\nabla G(x)^\top d) + R(x,d) \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $R(x,d)$ contém informação das derivadas parciais de segunda ordem de G .

2.2 Programação não linear e semidefinida

O problema de programação não linear (*Nonlinear Programming Problem, NLP*), empregado neste trabalho, se define como:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sujeito a } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde f ou g_i são não lineares. A função f se denomina função objetivo e a função g de restrição de desigualdade. A desigualdade $g(x) \leq 0$ significa $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$.

O vetor $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ denomina-se vetor de variáveis de projeto.

Similarmente, o problema de programação semidefinida (*Semidefinite Programming Problem, SDP*) se define como:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sujeito a } G(x) \preceq 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A restrição $G(x) \preceq 0$ denomina-se de restrição semidefinida negativa. A matriz $G(x)$ é simétrica de tamanho $k \times k$.

O problema de programação semidefinida (2.16) se reduz ao problema de programação não linear (2.15) quando $G(x) = \text{diag}(g(x))$. O significado de ambos problemas é encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ que minimiza $f(x)$ com x pertencendo a uma região do \mathbb{R}^n denominada conjunto de pontos viáveis ou região viável.

2.2.1 Restrições LMI/BMI

O problema (2.16) chama-se problema de programação semidefinida (*Semidefinite Programming Problem, SDP*) quando a função objetivo f é uma função linear e a função G é uma combinação afim de matrizes simétricas. Neste caso, a função matricial G assume a seguinte forma:

$$G(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i, \quad (2.17)$$

onde $A_i \in \mathbb{S}^k$, $i = 1, \dots, n$.

A restrição semidefinida

$$A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i \preceq 0, \quad (2.18)$$

denomina-se desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequality, LMI*).

Diversos problemas de otimização podem ser rescritos como problemas de programação semidefinida, dentre eles podemos citar os problemas de: programação

quadrática, máximo autovalor, minimização da norma matricial, aproximações logarítmica de Chebyshev, otimização de estruturas e minimização do traço fatorial [12].

Neste trabalho se consideram restrições LMI contudo, se dará ênfase em restrições onde a relação entre G e x é bilinear. Neste caso a matriz de restrição $G(x)$ assume o seguinte formato:

$$G(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k A_{jk} \quad (2.19)$$

sendo a matriz A_{jk} simétrica da mesma dimensão de A_i .

A restrição semidefinida

$$A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k A_{jk} \preceq 0, \quad (2.20)$$

chama-se desigualdade matricial bilinear (*Bilinear Matrix Inequality-BMI*).

O projeto mecânico de maximização da frequência natural é um exemplo de problema de otimização onde acontece a restrição BMI.

O presente trabalho propõe resolver problemas onde a restrição $G(x) \preceq 0$ não se limita as formas LMI ou BMI. A única hipótese que G deve verificar é que seja suave.

Tendo em conta (2.14), conclue-se que em problemas com restrições LMI, $R(x, d) = 0$. Contudo, para problemas com restrições BMI, $R(x, d)$ é uma função independente de x (constante em relação a x).

Pode-se provar que um problema de programação semidefinida com restrições LMI é um problema de otimização convexo. Contudo, um problema de otimização com restrições BMI não é convexo [13], [12], [14].

2.2.2 Condições de Otimalidade

Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, dizemos que 2.15 é um problema de otimização irrestrito. Quando $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, dizemos que 2.15 é um problema de otimização com restrições. Apresentamos a seguir as condições de otimalidade para o problema de otimização com restrição. As demonstrações dos seguintes teoremas se encontram em [15].

Definição 23. Denotamos por $I(x) \equiv \{i : g_i(x) = 0\}$ o conjunto de índices referentes as restrições ativas em x . O ponto x é dito ponto regular se os vetores $\nabla g_i(x)$, para todo $i \in I(x)$ são linearmente independentes. Espaço tangente em x é dado por:

$$T \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i^\top(x)y = 0, i \in I(x)\} \quad (2.21)$$

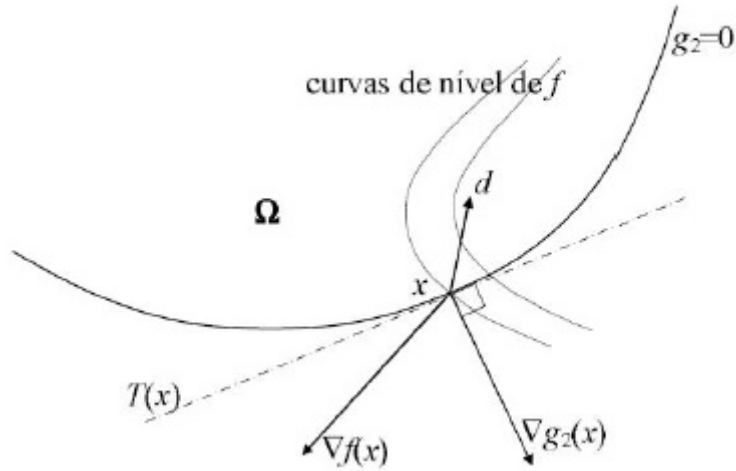


Figura 2.1: Direção viável de descida em ponto x . Espaço tangente $T(x)$.

Definição 24. Define-se a função Lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, associada ao problema 2.15, como:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (2.22)$$

O gradiente da função Lagrangiana em relação a x , associada ao problema 2.15 é:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) \quad (2.23)$$

Definição 25. Define-se a Hessiana da função Lagrangiana $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, associada ao problema 2.15, como:

$$H(x, \lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x) \quad (2.24)$$

Teorema 2.2.1. Condições necessárias de primeira e segunda ordem. Se $x^* \in \Omega$ é um mínimo local de f em Ω então, para qualquer direção d viável em x relativamente a Ω ,

1. $d^\top \nabla f(x^*) \geq 0$
2. Se $d^\top \nabla f(x^*) = 0$, então $d^\top \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$.

A primeira condição indica que no ponto x^* não existe uma direção viável que reduza $f(x)$.

Teorema 2.2.2. *Condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker, (KKT). Seja x^* um ponto regular da restrição $g(x) \leq 0$, um mínimo local do problema 2.15. Então existe o vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$ tais que:*

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0 \quad (2.25)$$

$$G(x^*)\lambda^* = 0 \quad (2.26)$$

$$g(x^*) \leq 0 \quad (2.27)$$

$$\lambda^* \geq 0 \quad (2.28)$$

A condição adicional necessária $\lambda^* \geq 0$ é obtida como consequência do primeiro resultado no teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.3. *Condições necessárias de segunda ordem. Seja x^* um ponto regular da restrição $g(x) \leq 0$, um mínimo local do problema 2.15. Então existe o vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, tal que o resultado do teorema 2.2.2 é verdade e a matriz Hessiana*

$$H(x^*, \lambda^*) = \nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(x^*) \quad (2.29)$$

é positiva semidefinida no espaço tangente. isto é:

$$y^\top H(x^*, \lambda^*)y \geq 0 \quad (2.30)$$

para todo $y \in T$.

Em problema com restrição, a Hessiana $H(x^*, \lambda^*)$ desempenha uma função importante. Para as restrições lineares temos $H(x^*, \lambda^*) = \nabla^2 f(x^*)$, e do teorema anterior segue-se que $\nabla^2 f(x^*)$ é positiva semidefinida no espaço tangente definido pelas restrições ativas. Este é um resultado natural em vista do teorema 2.2.1. Para restrições não lineares $H(x^*, \lambda^*)$ leva em conta a curvatura da função.

Teorema 2.2.4. *Condições suficientes de segunda ordem. Seja o ponto x^* que satisfaz $g(x^*) \leq 0$. Seja um vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\lambda^* \geq 0$ tal que:*

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0 \quad (2.31)$$

e $H(x^, \lambda^*)$ positiva definida no espaço tangente. Então, x^* é um mínimo local estrito do problema 2.15.*

2.3 Modelo de treliças

2.3.1 Método dos elementos finitos

Os procedimentos de elementos finitos são muito utilizados atualmente na engenharia, e podemos esperar que esse uso aumente significativamente nos próximos anos. Os procedimentos são utilizados extensivamente na análise de estruturas. O desenvolvimento do método dos elementos finitos para a solução de problemas de engenharia começou com o advento do computador digital.

A análise estrutural usa três equações básicas, chamadas equações de compatibilidade, de equilíbrio e constitutivas, também chamadas de relação tensão-deformação. O Método dos Elementos Finitos usa os conceitos de discretização do contínuo e de matriz de interpolação, que fornece os deslocamentos em um ponto, no interior do elemento, em função de seus deslocamentos nodais. A análise de estruturas de treliças pode ser obtido pelo método dos elementos finitos [16].

No presente trabalho, o domínio é representado por uma estrutura denominada **treliça**. Uma treliça é conjunto de barras interconectadas nas extremidades. Cada barra representa um elemento finito. Todo elemento possui dois nós (extremidades). Um exemplo de tal domínio é o apresentado na figura 2.2[17] mostra-se uma treliça plana típica.

No caso de uma treliça, os eixos das barras têm sentidos diferentes, portanto existem dois tipos de coordenadas, as coordenadas locais \mathbf{s} e as coordenadas globais (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

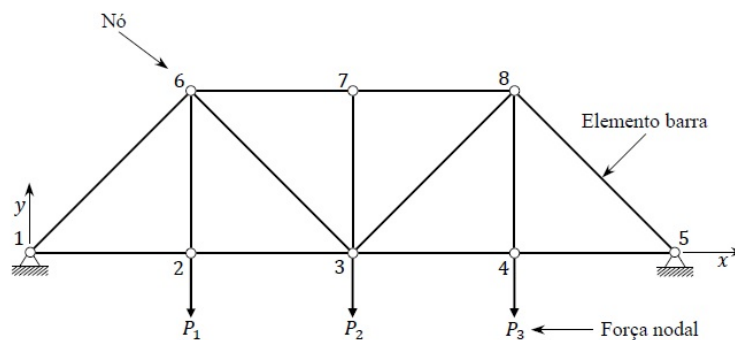


Figura 2.2: Uma treliça bidimensional.

A figura 2.3[17] mostra um elemento barra bidimensional de uma estrutura de treliças. Os nós 1 e 2 são, respectivamente, o nó inicial e o nó final de um elemento barra bidimensional e . Cada nó tem dois graus de liberdade no sistema global de coordenadas. O ângulo ϕ define a rotação do eixo da barra em relação ao sistema global de coordenadas. O sistema local de coordenadas consiste no eixo \mathbf{s} que encontra-se alinhado ao longo do elemento do nó 1 até o nó 2. O sistema global de coordenadas

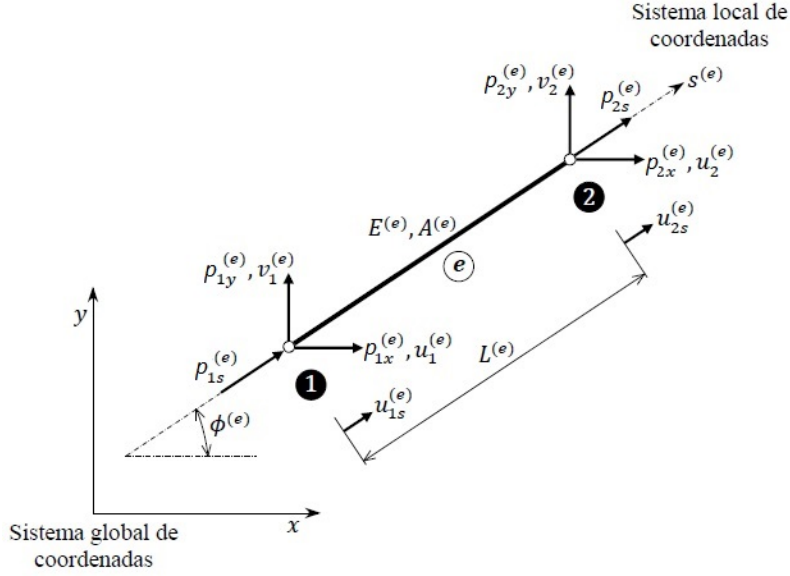


Figura 2.3: Definição do elemento barra bidimensional.

está fixo e não depende da orientação do elemento.

No sistema local de coordenadas são definidos o vetor deslocamento e o vetor de força, respectivamente por:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(e)} &= \begin{bmatrix} u_{1s}^{(e)} & u_{2s}^{(e)} \end{bmatrix}^T \\ \bar{p}^{(e)} &= \begin{bmatrix} p_{1s}^{(e)} & p_{2s}^{(e)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.32)$$

No sistema global de coordenadas são definidos o vetor deslocamento e o vetor de força, respectivamente por:

$$\begin{aligned} u^{(e)} &= \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} \end{bmatrix}^T \\ p^{(e)} &= \begin{bmatrix} p_{1x}^{(e)} & p_{1y}^{(e)} & p_{2x}^{(e)} & p_{2y}^{(e)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

A partir dos nós do elemento, é possível determinar o comprimento da barra da seguinte maneira:

$$L^{(e)} = \sqrt{\left(x_2^{(e)} - x_1^{(e)}\right)^2 + \left(y_2^{(e)} - y_1^{(e)}\right)^2} \quad (2.34)$$

onde $(x_1^{(e)}, y_1^{(e)})$ e $(x_2^{(e)}, y_2^{(e)})$ são as coordenadas dos nós 1 e 2 do elemento e .

Define-se $l^{(e)}$ e $m^{(e)}$ como sendo os co-senos diretores do ângulo $\phi^{(e)}$:

$$\begin{aligned} l^{(e)} &= \cos \phi^{(e)} = \frac{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}{L^{(e)}} \\ m^{(e)} &= \sin \phi^{(e)} = \frac{y_2^{(e)} - y_1^{(e)}}{L^{(e)}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

A partir dos valores encontrados para $l^{(e)}$ e $m^{(e)}$, pode-se definir a matriz de

transformação T como sendo:

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} l^{(e)} & m^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^{(e)} & m^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Os componentes globais definidos em (2.33) e locais definidos em (2.32) podem ser vinculados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(e)} &= T^{(e)}u^{(e)} \\ (T^{(e)})^\top \bar{p}^{(e)} &= p^{(e)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

No sistema local de coordenadas o equilíbrio elastoestático (para o elemento) pode escrever-se:

$$\bar{K}^{(e)}\bar{u}^{(e)} = \bar{p}^{(e)}$$

onde $\bar{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento de barra no sistema local de coordenadas definida por:

$$\bar{K}^{(e)} = \frac{A^{(e)}E^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Considerando (2.37) e (2.38), o equilíbrio elastoestático, no sistema global de coordenadas pode escrever-se como:

$$K^{(e)}u^{(e)} = p^{(e)} \quad (2.39)$$

onde $K^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento de barra no sistema global de coordenadas definida por:

$$K^{(e)} = T^{(e)}\bar{K}^{(e)}T^{(e)} \quad (2.40)$$

Substituindo $T^{(e)}$ definida em (2.36) e $\bar{K}^{(e)}$ definida em (2.38) tem-se:

$$K^{(e)} = \frac{A^{(e)}E^{(e)}}{L^{(e)}} = \begin{bmatrix} l^{2(e)} & l^{(e)}m^{(e)} & -l^{2(e)} & -l^{(e)}m^{(e)} \\ l^{(e)}m^{(e)} & m^{2(e)} & -l^{(e)}m^{(e)} & -m^{2(e)} \\ -l^{2(e)} & -l^{(e)}m^{(e)} & l^{2(e)} & l^{(e)}m^{(e)} \\ -l^{(e)}m^{(e)} & -m^{2(e)} & l^{(e)}m^{(e)} & m^{2(e)} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

A matriz de rigidez $K^{(e)}$ se caracteriza por ser simétrica, semidefinida positiva e dependente do comprimento da barra L , rigidez axial EA e do ângulo de orientação ϕ .

A partir da matriz de rigidez e das forças nodais de cada elemento e no sistema global, é feita então a montagem da matriz de rigidez \mathbf{K} e das forças nodais \mathbf{p} globais da estrutura em função da conexão entre os elementos [18], obtendo-se a equação de equilíbrio global da estrutura:

$$Ku = p \quad (2.42)$$

A matriz de massa do elemento barra é dada por:

$$M = \int_0^L \rho A N N^T dV \quad (2.43)$$

sendo ρ a densidade do elemento, \mathbf{N} o vetor das funções de forma, e \mathbf{V} o volume do elemento. O vetor das funções de forma para o elemento barra é dado por:

$$N^T = [N_1(x) \ N_2(x)] \quad (2.44)$$

sendo as funções de forma:

$$N_1(x) = -\frac{x-x_2}{L} \quad (2.45)$$

$$N_2(x) = -\frac{x-x_1}{L} \quad (2.46)$$

Usando-se as funções de forma e substituindo-se na equação 2.43 temos que a matriz de massa do elemento barra no sistema local de coordenadas é dada por:

$$M^{(e)} = -\frac{\rho^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

A matriz de massa no sistema global de coordenadas é dada por:

$$M^{(e)} = -\frac{\rho^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

A montagem da matriz de massa global \mathbf{M} é feita da mesma maneira que a montagem da matriz de rigidez.

2.3.2 Complacência

A complacência (*compliance*) de uma estrutura se define como uma medida da energia de deformação. Esta medida é relativa a força p aplicada na estrutura. Seja dada uma treliça com determinada distribuição de volumes $x \geq 0$. Seja p um vetor de forças aplicadas na treliça. O deslocamento u do equilíbrio é a solução do sistema linear:

$$K(x)u = p \quad (2.49)$$

A complacência da estrutura, relativamente a p e x , se define como:

$$p^\top u \tag{2.50}$$

A complacência é um número não negativo pois, $p^\top u = u^\top K(x)u$ e $K(x) \succcurlyeq 0$, qualquer que seja $x \geq 0$.

Fixado p e $\bar{\gamma} > 0$, o conjunto de restrições:

$$\begin{aligned} p^\top u &\geq \bar{\gamma} \\ K(x)u &= p \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

representa um subconjunto de treliças com distribuição de volume x no qual a estrutura, no equilíbrio, não pode ter uma complacência maior que $\bar{\gamma}$. De outra forma, o conjunto de restrições (2.51) é o conjunto de treliças com distribuição de volume x que podem se deformar até o nível $\bar{\gamma}$, devido a força p . Quanto maior é $\bar{\gamma}$, mais "complacente" a estrutura pode ser (poderá ser deformar mais).

2.3.3 Frequência natural de uma estrutura

Para entender as vibrações de uma treliça considera-se a equação do movimento:

$$M(x)\ddot{u} + K(x)u = p \tag{2.52}$$

com $p = 0$:

$$M(x)\ddot{u} + K(x)u = 0 \tag{2.53}$$

A equação (2.53) pode significar, por exemplo, o movimento dos nós da treliça, após uma "pancada", ou seja uma força p que se aplica por um instante de tempo e cessa imediatamente. Neste movimento não se consideram forças de atrito.

Seja $j = \sqrt{-1}$. Assumindo a solução da forma:

$$u = we^{j\omega t} \tag{2.54}$$

e substituindo-a em (2.53) tem-se:

$$-\omega^2 M(x)we^{j\omega t} + K(x)we^{j\omega t} = (-\omega^2 M(x)w + K(x)w) e^{j\omega t} = 0$$

portanto, $K(x)w = \lambda(M(x))w$

$$-\omega^2 M(x)w + K(x)w = 0$$

ou também:

$$K(x)w = \lambda(M(x))w \quad (2.55)$$

onde $\lambda = \omega^2$

A equação (2.55) define o problema de autovalor-autovetor generalizado [14]: dado x , encontrar w e λ de modo que (2.55) é verificada. O par (λ, w) denomina-se autovalor e autovetor do par de matrizes $(K(x), M(x))$ (*matrix pencil*). Nesta seção mostra-se que a relação funcional entre x e o par $(\lambda(x), w(x))$ satisfazendo (2.55) pode ser não suave e até descontínua [14].

Os autovalores λ e autovetores w são chamados de quadrado das **frequências naturais** e de **modos (ou formas) de vibração** da estrutura, respectivamente. Em [14] mostra-se que se $x > 0$, então $K(x)$ e $M(x)$ são definidas positivas (matrizes invertíveis). Contudo, se $x \geq 0$, as matrizes $K(x)$ e $M(x)$ podem ser singulares, podendo-se afirmar, apenas que são semidefinidas positivas. Quando $K(x) \succcurlyeq 0$ e $M(x) \succ 0$, o problema de autovalor-autovetor generalizado (2.55) admite n_{dof} autovalores reais:

$$\lambda_{min}(x) = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n_{dof}}$$

associados a n_{dof} autovetores (com componentes reais):

$$w_1, \dots, w_{n_{dof}}$$

de modo que $w_i^\top (M(x))w_j = 0$ se $i \neq j$. A raiz quadrada do menor autovalor λ_{min} se denomina **frequência fundamental da estrutura**.

Quando uma estrutura é submetida a forças dinâmicas (por exemplo: vento, vibração de um motor) é desejável que tal estrutura seja projetada de modo que sua frequência fundamental seja bem acima que a frequência destas forças dinâmicas.

Por exemplo, se o motor de um carro vibra a uma frequência λ_f e se quer projetar uma treliça (com distribuição de volume x) que sustente o motor, a seguinte restrição é muito desejável:

$$\lambda_{min}(x) \geq \bar{\lambda}$$

onde a constante $\bar{\lambda}$ é escolhida de modo que $\bar{\lambda} > \lambda_f$. Este tipo de restrições previne que a estrutura falhe pois, se a frequência fundamental da estrutura for próxima a λ_f , a estrutura pode entrar em ressonância: os deslocamentos podem aumentar até que a estrutura fracture.

Capítulo 3

Problema da maximização da frequência com massa não estrutural

3.1 Introdução

A maximização da menor frequência natural de uma estrutura é um problema clássico da engenharia estrutural. As frequências naturais estão associadas aos autovalores e autovetores generalizados do seguinte problema: encontrar $\omega \neq 0$ e λ tal que:

$$K(x)\omega = \lambda(M(x) + M_0)\omega \quad (3.1)$$

Onde $K(x)$ e $M(x)$ são matrizes simétricas semidefinida positiva e que dependem do parâmetro x . O problema geral da otimização do autovalor pertence também a problemas clássicos de álgebra linear. Quando a matriz $M(x) + M_0$ é positiva definida para todo x , então pode-se recorrer à teoria desenvolvida para o problema do autovalor padrão [19]. Não há muitos trabalhos que estudam a dependência dos autovalores para o caso geral quando $M(x) + M_0$ é apenas semidefinido positivo.

Apresenta-se três formulações de diferentes problemas de projeto estrutural. No primeiro, minimiza-se o volume da estrutura sujeito às condições e as restrições de complacência. Além disso exige que a frequência natural da estrutura ótima seja maior ou igual a determinado valor limite. A segunda formulação é análoga a primeira, neste caso se minimiza a complacência com restrições de volume. Na terceira formulação, maximiza-se a frequência natural sujeito as condições de equilíbrio e restrições sobre o volume e a complacência. Usando a programação semidefinida (SDP), formula-se os três problemas de forma unificada. Os dois primeiros problemas são de programação semidefinida com restrições lineares. Contudo, o terceiro é um problema de programação semidefinida com restrições de desigualdade de matriz bilinear (BMI).

3.2 Formulação dos problemas

Apresenta a seguir três formulações do projeto de treliça que são bem conhecidas na literatura de engenharia.

O problema do volume mínimo: na formulação tradicional do problema da topologia de estrutura, minimiza-se o peso da estrutura sujeito as condições de equilíbrio e restrições na menor frequência natural.

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m x_i \\
 & \text{sujeito a } (\sum_{i=1}^m x_i K_i)u = p \\
 & \quad p^\top u \leq \bar{\gamma} \\
 & \quad \lambda_{\min}(x) \geq \bar{\lambda} \\
 & \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

O parâmetro $\bar{\gamma}$ que define um limite de complacência e $\bar{\lambda} > 0$ é um autovalor limite determinado. A função objetivo deste problema é a função $(x, u) \mapsto \sum x_i$. Note que a restrição do autovalor é descontínua, isso torna o problema bastante difícil.

O problema da mínima complacência: nesta formulação, minimiza a complacência (maximiza a rigidez) da treliça sujeito a condição de equilíbrio e restrição do mínimo autovalor da frequência.

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}} p^\top u \\
 & \text{sujeito a } (\sum_{i=1}^m x_i K_i)u = p \\
 & \quad \sum_{i=1}^m x_i \leq \bar{V} \\
 & \quad \lambda_{\min}(x) \geq \bar{\lambda} \\
 & \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aqui \bar{V} é um limite superior no volume da estrutura ótima e novamente, $\bar{\lambda} > 0$ é um autovalor de limite determinado. Para este problema a função objetivo é $(x, u) \mapsto \max p^\top u$. Novamente observe que a restrição do autovalor não é contínua.

O problema de maximizar o autovalor mínimo: aqui desejamos maximizar a menor frequência natural da estrutura sujeito a condições de equilíbrio e restrições de complacência e volume. Este problema é de suma importância em muitas aplicações industriais, por exemplo, nos projetos de engenharia civil.

$$\begin{aligned}
& \max_{x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}} \lambda_{\min}(x) \\
& \text{sujeito a } \left(\sum_{i=1}^m x_i K_i \right) u = p \\
& \qquad \qquad \qquad p^\top u \leq \bar{\gamma} \\
& \qquad \qquad \qquad \sum_{i=1}^m x_i \leq \bar{V} \\
& \qquad \qquad \qquad x_i \geq 0, i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aqui a função objetivo é $(x, u) \mapsto \lambda_{\min}(x)$ que é uma função possivelmente descontínua. Essa descontinuidade é a razão pela qual uma abordagem de perturbação padrão amplamente utilizada pelos profissionais para a solução de (P_{aut}) pode falhar. Dado um $\epsilon > 0$, as restrições não negativas são substituídas pelas restrições $x_i \geq \epsilon$, para todo i , e x_ϵ^* , denota uma solução desse problema perturbado (juntamente com alguns u_ϵ^*) então x_ϵ^* pode não convergir para alguma solução x^* do problema sem perturbação.

3.3 Inter-relação dos problemas sem a massa não estrutural

Nesta seção, será estudado as relações dos três problemas $(P_{vol}) \equiv (3.2)$, $(P_{comp}) \equiv (3.3)$ e $(P_{aut}) \equiv (3.4)$ quando $M_0 = 0$. Essas relações são diretamente dadas por argumentos de redimensionamento, mas também aparecerão como casos especiais de problemas com M_0 arbitrários tratados na próxima seção. Observe que nos seguintes teoremas não será discutida a existência de solução. Em vez disso será discutida suas inter-relações quando a existência é garantida. A demonstração dos lemas, teoremas e proposições estão em [14].

(3.2) (3.3) (3.4)

Lema 1. *Se $(x, u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $x > 0$ satisfaz a condição de equilíbrio*

$$K(x)u = p \tag{3.5}$$

para o vetor de carga p . Então $p^\top u > 0$ e $\sum_{i=1}^m x_i > 0$.

Em seguida, observa que a função λ_{\min} é independente da escala da estrutura, desde que $M_0 = 0$. Tem-se um conjunto $X := \{x \in \mathbb{R}^m | x \geq 0, x \neq 0\}$ em que $\lambda_{\min}(x)$ é um número não-negativo bem definido para qualquer $x \in X$.

Teorema 3.3.1. *Se $M_0 = 0$ e (x^*, u^*) é uma solução de (P_{vol}) com.*

1. *Então $p^\top u^* = \bar{\gamma}$*
2. *Se $\bar{V} := \sum_{i=1}^m x_i^*$ e $\bar{\lambda}$ são empregados no problema (P_{comp}) . Então (x^*, u^*) é solução para (P_{comp}) com valor ótimo da função objetivo $\bar{\gamma}$.*

Teorema 3.3.2. *Se $M_0 = 0$ e (x^*, u^*) é uma solução de (P_{comp}) .*

1. *Então $\sum_{i=1}^m x_i^* = \bar{V}$*
2. *Se $\bar{\gamma} := \max p^\top u^*$ e $\bar{\lambda}$ são empregados no problema (P_{vol}) . Então (x^*, u^*) é solução para (P_{vol}) com valor ótimo da função objetivo \bar{V} .*

3.4 Inter-relação dos problemas com a massa não estrutural não nula

Nesta seção, não se faz qualquer restrição a M_0 em relação aos requisitos gerais já mencionados, isto é, M_0 deve ser apenas simétrica e definida positiva. Ao relacionar dois problemas diferente de otimização, a matriz M_0 é considerada a mesma em ambos os problemas.

O estudo começa com um resultado geral da relação dos problemas de otimização, onde a função objetivo de um problema atua como restrição do outro e vice-versa. Através desse resultado pode-se indicar todas as inter-relações das formulações (P_{comp}) , (P_{vol}) e (P_{aut}) .

O mínimo é alcançado em todas as situações. Para isso define-se a função:

$$c : \{x \in \mathbb{R}^m | x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad (3.6)$$

$$x \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}} \{p^\top u - u^\top (\sum_{i=1}^m x_i K_i) u\}. \quad (3.7)$$

Proposição 3.4.1. *(Propriedades da função c)*

1. *Se $x \geq 0$. Então $c(x) < +\infty$ se e somente se existir vetores de deslocamento $u \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$K(x)u = p \quad (3.8)$$

2. *Se $c(x) < +\infty$ para $x \geq 0$ então:*

$$c(x) = p^\top u \quad (3.9)$$

para todo u , que satisfaz (3.8)

3. *A função $c(\cdot)$ é finita e continua no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^m | x > 0\}$ e semicontínua em $\{x | x > 0\}$, isto é,*

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} c(x) \geq c(\bar{x}), \bar{x} \geq 0. \quad (3.10)$$

Para simplificar a notação define-se:

$$vol(x) := \sum_{i=1}^m x_i \quad (3.11)$$

para $x \in \mathbb{R}^m, x \geq 0$. Além disso, define:

$$S_{vol}^*, S_{comp}^*, S_{aut}^* \subset \{x \in \mathbb{R}^m | x \geq 0\} \times \mathbb{R}^n \quad (3.12)$$

A solução define respectivamente os problemas (P_{vol}) , (P_{comp}) e (P_{aut}) . Observe que esses conjuntos podem ser vazios.

Teorema 3.4.1. *Seja S_{vol}^* não vazio, denota o valor da função ideal do problema (P_{vol}) por V^* isto é,*

$$V^* := \sum_{i=1}^m x_i^* \quad (3.13)$$

para todo $(x^*, u^*) \in S_{vol}^*$. Defina,

$$\gamma^* := \inf\{\max p^\top u^* | (x^*, u^*) \in S_{vol}^*\}, \quad (3.14)$$

e

$$\lambda^* := \sup\{\lambda_{min}(x^*) | (x^*, u^*) \in S_{vol}^*\}. \quad (3.15)$$

Então as seguintes afirmações são válidas:

1. O mínimo em (3.14) é atingido em algum $(\hat{x}^*, \hat{u}^*) \in S_{vol}^*$. Além disso, com $\bar{V} := V^*$ e com $\bar{\lambda}$ obtido do problema (P_{vol}) , o ponto (\hat{x}^*, \hat{x}^*) é um ponto ótimo do problema (P_{comp}) com o valor da função objetivo ideal γ^* .
2. O máximo em (3.15) é atingido em algum $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*) \in S_{vol}^*$. Além disso, com $\bar{V} := V^*$ e com $\bar{\gamma}$ obtido do problema (P_{vol}) , o ponto $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$ é um ponto ótimo do problema (P_{aut}) com o valor da função objetivo ideal λ^* .

Teorema 3.4.2. *Seja S_{aut}^* não vazio, denota o valor da função ideal do problema (P_{aut}) por λ^* isto é,*

$$\lambda^* := \lambda_{min}(x^*) \quad (3.16)$$

para todo $(x^*, u^*) \in S_{aut}^*$. Defina,

$$V^* := \inf\{\sum_{i=1}^m x_i^* | (x^*, u^*) \in S_{aut}^*\}, \quad (3.17)$$

e

$$\lambda^* := \inf\{\max p^\top u^* | (x^*, u^*) \in S_{aut}^*\}. \quad (3.18)$$

Então as seguintes afirmações são válidas:

1. O mínimo em (3.17) é atingido em algum $(\hat{x}^*, \hat{u}^*) \in S_{aut}^*$. Além disso, com $\bar{\lambda} := \lambda^*$ e com $\bar{\gamma}$ obtido do problema (P_{aut}) , o ponto (\hat{x}^*, \hat{x}^*) é um ponto ótimo do problema (P_{vol}) com o valor da função objetivo ideal V^* .
2. O mínimo em (3.18) é atingido em algum $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*) \in S_{aut}^*$. Além disso, com $\bar{\lambda} := \lambda^*$ e com \bar{V} obtido do problema (P_{aut}) , o ponto $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$ é um ponto ótimo do problema (P_{comp}) com o valor da função objetivo ideal γ^* .

Corolário 1. *Seja o conjunto $X_{aut}^* = \{x^* | (x^*, u^*) \in S_{aut}^*\}$, então tem-se a seguinte afirmação:*

1. Defina $\bar{\lambda} := \lambda_{min}(x^*)$ no problema (P_{vol}) obtemos o $\bar{\gamma}$ para o problema (P_{aut}) . Então (x^*, u^*) é ótimo para o problema (P_{vol}) e o valor ótimo da função objetivo $vol(x^*)$.

O teorema (3.4.1) reflete o fato de que em alguma solução (x^*, u^*) do (P_{vol}) nenhuma das restrições de complacência pode ser satisfeita com a igualdade, portanto em (3.14) é necessário selecionar uma solução adequada de (P_{vol}) para obter uma solução de (P_{comp}) . O teorema (3.4.1) também mostra que, com as configurações apropriadas de \bar{V} e $\bar{\lambda}$, há sempre uma estrutura x^* que é otimizada para ambos os problemas ao mesmo tempo (desde que exista uma solução). Comentários análogos, podem ser feito do (3.4.1) sobre soluções do (P_{aut}) .

3.5 Discussão sobre a variação da massa não estrutural

O que acontece quando a massa não-estrutural é alterada ou removida? Por exemplo, considerando-se a minimização do volume, uma maior massa não-estrutural geralmente aumentará o volume ótimo. Da mesma forma, considerando-se a maximização do autovalor mínimo, a remoção da massa não-estrutural geralmente levará a um autovalor mínimo menor. Nesta seção será feito uma breve variação de M_0 , usando a seguinte notação:

$$\lambda_{min}(x, M_0) := \sup\{\lambda | k(x) - \lambda(M(x) + M_0) \succeq 0\}. \quad (3.19)$$

Lema 2. *Dado $x \geq 0$ e $\widetilde{M}_0, M_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica com $\widetilde{M}_0 \succeq M_0 \succeq 0$. Então $\lambda_{min}(x, \widetilde{M}_0) \leq \lambda_{min}(x, M_0)$.*

3.6 Reformulação dos problemas para programação semidefinida

Todos os problemas anteriores não são convexos, alguns até descontínuos. Além disso todos eles implicitamente incluem a computação do menor autovalor. A seguir, serão apresentados formulações dos problemas (P_{vol}) , (P_{comp}) e (P_{aut}) que são muito mais fáceis de se analisar e de se resolver numericamente. Será feita uma abordagem unificada para essas reformulações que oferecem uma visão clara de suas relações mútuas.

Proposição 3.6.1. *Seja $A \succcurlyeq 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Portanto,*

$$\begin{aligned} Au &= p \\ p^\top u &\leq c \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} c & -p^\top \\ -p & A \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (3.20)$$

Substituindo A por $K(x)$ e c por $\bar{\gamma}$ em (3.20), tem-se:

$$\begin{aligned} K(x)u &= p \\ p^\top u &\leq \bar{\gamma} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & -p^\top \\ -p & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (3.21)$$

Desta forma a restrição de igualdade $K(x)u = p$ e a de desigualdade $p^\top u \leq \bar{\gamma}$ são substituíveis por uma restrição semidefinida onde não aparece a variável de projeto $u \in \mathbb{R}$.

Com esta proposição, são obtidas as seguintes reformulações dos três problemas anteriores.

O problema do mínimo volume. Neste problema $\bar{\gamma}$ e $\bar{\lambda}$ são dados, e minimiza-se o volume V :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m, V \in \mathbb{R}} V \\ \text{sujeito a } \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & -p^\top \\ -p & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq V \\ K(x) - \bar{\lambda}(M(x) + M_0) \succcurlyeq 0 \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

O problema da mínima complacência. Dados \bar{V} e $\bar{\lambda}$ minimiza-se a compla-

cência γ :

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathbb{R}^m, \gamma \in \mathbb{R}} \gamma \\
\text{sujeito a } & \begin{pmatrix} \gamma & -p^\top \\ -p & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \\
& \sum_{i=1}^n x_i \leq \bar{V} \\
& K(x) - \bar{\lambda}(M(x) + M_0) \succcurlyeq 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

O problema de maximizar o autovalor mínimo. Dados $\bar{\gamma}$ e \bar{V} maximiza-se λ (o menor autovalor):

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}} -\lambda \\
\text{sujeito a } & \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & -p^\top \\ -p & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \\
& \sum_{i=1}^n x_i \leq \bar{V} \\
& K(x) - \lambda(M(x) + M_0) \succcurlyeq 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Doravante, $(P_{vol}^{SDP}) \equiv (3.22)$, $(P_{comp}^{SDP}) \equiv (3.23)$ e $(P_{aut}^{SDP}) \equiv (3.24)$.

Proposição 3.6.2. 1. Se (x^*, u^*) é um mínimo global de (P_{vol}) então (x^*, V^*) é o mínimo global de (P_{vol}^{SDP}) onde $V^* := \sum_{i=1}^n x_i^*$ e o valor ótimo de ambos problemas coincidem.

2. Se (x^*, V^*) é um mínimo global de (P_{vol}^{SDP}) então existe um u^* tal que (x^*, u^*) é mínimo global de (P_{vol}) e o valor ótimo de ambos problemas coincidem.

De maneira análoga vale para os problemas (P_{comp}) - (P_{comp}^{SDP}) e (P_{aut}) - (P_{aut}^{SDP}) .

Os problemas (P_{comp}^{SDP}) e (P_{vol}^{SDP}) são SDPs lineares, enquanto que (P_{aut}^{SDP}) é um problema que tem como restrição uma matriz bilinear (BMI). Por este motivo (P_{aut}^{SDP}) é um problema não convexa. Devido a reformulação SDP, os problemas originalmente descontínuos tornaram-se contínuos; um fato de grande valor prático.

Teorema 3.6.1. Considere o problema (3.22) com as constantes $\bar{\gamma}$ e $\bar{\lambda}$. Seja x^* a solução ótima do problema (3.22) e $V^* = \sum_{i=1}^{n_{elem}} x_i^*$ (volume ótimo da treliça). Considere o problema (3.24) com as constantes $\bar{\gamma}$ e $\bar{V} = V^*$. Então o problema (3.24) terá solução ótima (x^*, λ^*) onde $\lambda^* = \bar{\lambda}$.

Capítulo 4

Algoritmo de pontos interiores e arcos viáveis para programação semidefinida (FAIPA-SDP)

Foi desenvolvida em [4] uma técnica para problemas de programação semidefinida com resultados de convergência global a pontos estacionários. Esta técnica foi aplicada a problemas de programação semidefinida e otimização estrutural [6]. Esta técnica se baseia no *Feasible Direction Interior Point Algorithm*, FDIPA que resolve o problema de programação não linear com restrições de igualdade e desigualdade vetoriais.

Segundo a literatura [20], existem problemas de otimização onde a convergência do FDIPA não é satisfatória, devido ao efeito Maratos. O efeito Maratos geralmente acontece em problemas onde a curvatura da região viável é considerável próximo a solução do problema de otimização. Este efeito não ocorre no (*Feasible Arc Interior Point Algorithm*, FAIPA) [3].

Foi proposto, na dissertação de mestrado [7], a generalização do FAIPA para resolver problemas de programação não linear com restrições semidefinidas, a qual se denomina FAIPA-SDP.

A diferença entre o FAIPA-SDP e o FDIPA-SDP é que em um se faz uma busca linear em um arco e no outro se faz a busca linear em uma direção d de descida e viável.

4.1 Descrição do FAIPA-SDP

Este algoritmo pretende ser uma técnica geral para solucionar o problema de programação semidefinida (2.16), podendo este problema ser não convexo.

O procedimento é idêntico ao do FAIPA:

1. Calcula-se uma direção de descida e viável $d = d_0 + \rho d_1$.
2. Calcula-se uma direção de restauração \tilde{d} .
3. Fazer uma busca linear em arco $A(t) = x + td + t^2\tilde{d}$ para encontra o novo ponto.

Os sistemas lineares que devem ser resolvidos no FAIPA-SDP são diferentes aos do FAIPA, pois as condições de (KKT) para o problema de programação não linear são diferentes aos do problema de programação semidefinida.

4.2 Cálculo da direção de descida

Teorema 4.2.1. *Se f e G são funções da classe C^1 , x^* é um mínimo relativo do problema (2.16) e se x^* verifica a condição de Mangasarian-Fromovitz, então existe uma matriz de multiplicadores de Lagrange $\Lambda^* \in \mathbb{S}^k$ tais que:*

$$\begin{aligned}
\nabla f(x^*) + \nabla G(x^*)\lambda^* &= 0 \\
\Lambda^* G(x^*) &= 0 \\
G(x^*) &\preceq 0 \\
\Lambda^* &\succeq 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\lambda^* = \text{svec}(\Lambda^*)$.

As condições (4.1) são denominadas condições de (*Karush-Kuhn-Tucker, KKT*). A igualdade $\Lambda^* G(x^*) = 0$ é chamada de condição de complementaridade. A proposição a seguir mostra outras formas equivalentes de representar a condição de complementaridade.

Proposição 4.2.1. *Se $A \preceq 0$ e $B \succeq 0$, então são equivalentes as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned}
AB &= 0 \\
\text{tr}(AB) &= 0 \\
\lambda_i(A)\lambda_i(B) &= 0, i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{4.2}$$

sendo $\lambda_i(A)$ o i -ésimo autovalor da matriz A com $\lambda_i(A) \leq \lambda_{i+1}(A)$.

Como na condição (4.1) $G(x^*) \preceq 0$ e $\Lambda^* \succeq 0$ a equação $\Lambda^* G(x^*) = 0$ equivale a uma complementaridade nos autovalores de Λ^* e $G(x^*)$.

A unicidade da matriz Λ^* em (4.1) é garantida somente sob a hipótese de complementaridade estrita e regularidade. Estes conceitos são definidos a seguir.

Definição 26. *As matrizes Λ^* e $G(x^*)$ verificam a condição de complementaridade estrita quando verificam as condições de (KKT) (4.1) e*

$$\text{posto}(\Lambda^*) + \text{posto}(G(x^*)) = k \tag{4.3}$$

onde $\text{posto}(A)$ é a dimensão do espaço vetorial gerado pelas colunas de A .

Definição 27. *Seja $p = \dim(\ker(G(x)))$ a dimensão do núcleo de $G(x)$, e, seja $\{b_1, \dots, b_p\}$ uma base ortonormal do núcleo de $G(x)$. O ponto x^* é um ponto regular da restrição $G(x) \preceq 0$ se o conjunto de vetores:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} b_i^\top \frac{\partial G}{\partial x_1}(x) b_j \\ \vdots \\ b_i^\top \frac{\partial G}{\partial x_n}(x) b_j \end{bmatrix} : i \leq j, \quad i, j = 1, \dots, p \right\} \quad (4.4)$$

é linearmente independente.

Quando as hipóteses do teorema (4.2.1), as condições de complementaridade estrita (4.3) e as condições de regularidade (4.4) são verdadeiras, é possível provar que a matriz (multiplicador de Lagrange) Λ^* é única, [21].

Os sistemas lineares do FAIPA-SDP são iterações tipo Newton para encontrar as raízes da seguinte função $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}}$:

$$\psi(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \psi_l(x, \lambda) \\ \psi_c(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \nabla G(x)\lambda \\ \text{svec}(\text{sym}(\Lambda G(x))) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde $\lambda = \text{svec}(\Lambda)$ e $\Lambda \in \mathbb{S}^m$.

Usa-se a parte simétrica do produto $\Lambda G(x)$ para que o domínio e o contradomínio de ψ sejam iguais. Por outro lado, $\text{sym}(\Lambda G(x)) = 0$ é equivalente a $\Lambda G(x) = 0$ em virtude das equivalências (4.2). Portanto, encontrar raízes de ψ significa encontrar x e λ tais que $G(x)\Lambda = 0$.

As raízes da função $\psi(x, \lambda)$ são calculadas através do método de Newton. Para escrever o sistema linear do método de Newton é necessário calcular a matriz Jacobiana de ψ . O cálculo da Matriz Jacobiana será dado através da derivada da função ψ com respeito a x e Λ .

A definição do produto simétrico de Kronecker (7), facilita o cálculo da matriz Jacobiana de ψ , pois:

$$\begin{aligned} \psi_c(x, \lambda) &= \text{svec}(\text{sym}(\Lambda G(x)I)) = [\Lambda \otimes I] \text{svec}(G(x)) \\ \psi_c(x, \lambda) &= \text{svec}(\text{sym}(I\Lambda G(x))) = [I \otimes G(x)] \text{svec}(\Lambda) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da primeira equação de (4.6) e por (2.12) tem-se:

$$\nabla_x \psi_c(x, \lambda) = (\Lambda \otimes I) \nabla G(x)^\top.$$

Considerando-se a segunda equação em (4.6):

$$\nabla_\lambda \psi_c(x, \lambda) = (I \otimes G(x)).$$

Desta forma, a matriz Jacobiana de ψ será dada por:

$$\nabla\psi(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x\psi_l(x, \lambda) & \nabla_\lambda\psi_l(x, \lambda) \\ \nabla_x\psi_c(x, \lambda) & \nabla_\lambda\psi_c(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}L(x, \lambda) & \nabla G(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top & (I \otimes G(x)) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A fim de obter um menor custo computacional, se utiliza uma matriz simétrica definida positiva B no lugar da Hessiana do Lagrangeano $\nabla_{xx}L(x, \lambda)$. A matriz B pode ser uma aproximação quasi-Newton, a identidade ou qualquer outra matriz definida positiva. Dessa forma, define-se a matriz do sistema linear W , que é dada por uma aproximação de (4.7) como segue:

$$W(x, B, \Lambda) = \begin{bmatrix} B & \nabla G(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top & (I \otimes G(x)) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

É demonstrado por [4] que $W(x, B, \Lambda)$ é invertível quando $B \succ 0$, Λ comuta com $G(x)$ e x é regular no sentido da definição (4.4).

Desta forma, o sistema linear de um método tipo Newton para encontrar as raízes de ψ é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} B & \nabla G(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top & (I \otimes G(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 - x \\ \lambda_0 - \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \nabla G(x)\lambda \\ \text{svec}(\text{sym}(\Lambda G(x))) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Definindo a direção $d_0 = x_0 - x$ e simplificando (4.9) tem-se:

$$\begin{bmatrix} B & \nabla G(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top & (I \otimes G(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ou

$$\begin{aligned} Bd_0 + \nabla G(x)\lambda_0 &= -\nabla f(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top d_0 + (I \otimes G(x))\lambda_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pode-se prova que se na solução de (4.11) resulta $d_0 = 0$, então x é um ponto de (KKT).

Se d_0 não é nulo, foi provado em [4] que d_0 é de descida para f em x_k , no entanto, quando x_k está próximo da fronteira da região viável Ω , d_0 é tangente a esta região. Na próxima seção se mostra como calcular, usando a mesma matriz W , uma direção de descida e por sua vez viável.

4.3 Cálculo da direção de decida e viável

Como apresentado por Herskovits em [22], para caracterizar a direção viável acrescenta-se uma quantidade negativa do lado direito da segunda equação de (4.11). Com isso, define-se um outro sistema linear com a mesma matriz $W(x, B, \Lambda)$ nas variáveis $(d, \bar{\lambda})$:

$$\begin{aligned} Bd + \nabla G(x)\bar{\lambda} &= -\nabla f(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top d + (I \otimes G(x))\bar{\lambda} &= -\rho\lambda \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde ρ um número real positivo e $\lambda = svec(\Lambda)$.

Com base nos sistemas lineares (4.11) e (4.12) vemos que para um $\rho > 0$, quanto menor for o seu valor mais a direção d tenderá a d_0 . Por outro lado, se ao invés disso tivermos um valor cada vez maior para ρ , a tendência é que a direção d seja desviada para o interior da região viável [4]. Para garantir que esse desvio gere uma direção de descida, deve-se limitar superiormente o parâmetro ρ .

Uma forma de fazer isto é considerar:

$$d^\top \nabla f(x) \leq \xi d_0^\top \nabla f(x) \quad (4.13)$$

onde $\xi \in (0, 1)$.

O cálculo de d pode ser realizado como sendo

$$d = d_0 + \rho d_1 \quad (4.14)$$

onde d_1 é solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} B & \nabla G(x) \\ (\Lambda \otimes I)\nabla G(x)^\top & (I \otimes G(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Usando as mesmas ideias que no FAIPA, considera-se (4.13) e obtém-se:

$$\rho \leq (\xi - 1) \frac{(d_0)^\top \nabla f(x)}{(d_1)^\top \nabla f(x)}$$

quando $d_1^\top \nabla f(x) > 0$. Caso contrário, define-se:

$$\rho \leq \varphi \|d_0\|^2$$

4.4 Cálculo do arco

Utilizando informações estabelecidas na configuração x^k , define-se o fator de viabilidade $\tilde{\omega}$, que será obtido por meio de uma aproximação das derivadas segunda das restrições no ponto $x^k + d$:

$$\tilde{\omega}^k = \text{svec} \left(G(x^k + d^k) - G(x^k) - \text{smat} \left(\nabla G^\top(x^k)^\top d \right) \right). \quad (4.16)$$

Como definido no FAIPA, o fator de viabilidade será acrescido no termo independente do sistema (4.15) de modo a obter \tilde{d} como solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} B^k & \nabla G(x^k) \\ (\Lambda^k \otimes I) \nabla G(x^k)^\top & (I \otimes G(x^k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d}^k \\ \tilde{\lambda}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\Lambda^k \otimes I) \tilde{\omega}^k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} B^k \tilde{d}^k + \nabla G(x^k) \tilde{\lambda}^{k+1} &= 0 \\ (\Lambda^k \otimes I) \nabla G(x^k)^\top \tilde{d}^k + (I \otimes G(x^k)) \tilde{\lambda}^{k+1} &= -(\Lambda^k \otimes I) \tilde{\omega}^k \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim, define-se o seguinte arco tangente as direções d e \tilde{d} :

$$A(t) = x^k + td^k + t^2 \tilde{d}^k \quad (4.19)$$

Para encontrar uma nova estimativa x^{k+1} realiza-se uma busca linear em arco.

4.5 Busca linear

De forma análoga ao do FAIPA, o critério de Armijo define-se da seguinte forma: Escolher t como sendo o primeiro da sequência $\{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(A(t)) &\leq f(x^k) + t\eta d^k{}^\top \nabla f(x^k) \\ G(A(t)) &\prec 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\nu \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$ e A esta definido em (4.19).

4.6 Atualizações do FAIPA-SDP

Define-se agora um resultado que viabiliza a atualização dos parâmetros Λ e de B para o algoritmo FAIPA-SDP.

Em [4], é provado que sendo x^k um ponto regular do problema (2.16), $B \in \mathbb{S}_{++}^n$, $\Lambda \in \mathbb{S}_{++}^k$ e se Λ^k comutar com $G(x^k)$ em todas as iterações, teremos a garantia de que a matriz do sistema $W(x^k, B^k, \Lambda^k)$ é invertível. Para a atualização de B pode ser empregada uma atualização Quasi-Newton.

Na próxima seção se enumeram os passos do FAIPA-SDP.

4.7 FAIPA-SDP

Parâmetro. $\xi, \eta, \nu \in (0, 1)$ e $\varphi > 0$.

Dados. $x \in \text{int}(\Omega)$, $B \in \mathbb{S}_{++}^n$ e $\Lambda = \mu I \in \mathbb{S}_{++}^m$.

Passo 1. Cálculo da direção viável de descida d .

1.1 Resolver o sistema linear (4.11) para obter $d_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$.

Se $d_0 = 0$, parar.

1.2 Resolver o sistema linear (4.15) para obter $d_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$.

1.3 Se $d_1^\top \nabla f(x) > 0$ faça

$$\rho = \min \{ \varphi \|d_0\|^2, (\xi - 1) d_0^\top \nabla f(x) / d_1^\top \nabla f(x) \} \quad (4.21)$$

Se $d_1^\top \nabla f(x) \leq 0$ define-se

$$\rho = \varphi \|d_0\|^2 \quad (4.22)$$

1.4 Calcule d como sendo

$$d = d_0 + \rho d_1 \quad (4.23)$$

Passo 2. Busca em arco.

2.1 Calcule

$$\tilde{\omega}^k = \text{svec} \left(G(x^k + d^k) - G(x^k) - \text{smat} \left(\nabla G^\top(x^k)^\top d \right) \right). \quad (4.24)$$

2.2 Resolva o sistema linear 4.17 para obter $\tilde{d}^k \in \mathbb{R}^n$.

2.3 Encontre t , o primeiro na sequência $\{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\}$ que verifique

$$\begin{aligned} f(x^k + td^k + t^2 \tilde{d}^k) &\leq f(x^k) + t\eta d^{k\top} \nabla f(x^k) \\ g_i(x^k + td^k + t^2 \tilde{d}^k) &\prec 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Passo 3. Atualizações.

3.1 Defina um novo ponto como sendo $x^{k+1} = x^k + td^k + t^2\tilde{d}^k$ e novos valores para $B \in \mathbb{S}_{++}^n$ e $\Lambda = \mu I \in \mathbb{S}_{++}^m$.

3.2 Voltar ao Passo 1.

Considerando $\tilde{d} = 0$, este algoritmo se denomina Algoritmo de Pontos Interiores por Direções Viáveis (*Feasible Direction Interior Point Algorithm, FDIPA-SDP*). Este algoritmo foi proposto em [4].

Capítulo 5

Testes numéricos

No presente capítulo, se apresentam exemplos que ilustram alguns dos resultados teóricos do capítulo 2, e por outro lado, demonstram o uso prático das formulações do problema de programação semidefinida, resolvidos com o FAIPA-SDP.

Os problemas resolvidos são problemas de programação semidefinida com uma restrição de matricial bilinear (*Bilinear Matrix Inequality-BMI*):

1. Problema de otimização estrutural de uma treliça de 12 barras, 7 nós e uma massa não estrutural.
2. Problema de otimização estrutural de uma treliça de 18 barras, 11 nós e uma massa não estrutural.

Em ambos casos se maximiza a frequência fundamental da treliça.

5.1 Dependência da frequência fundamental com a massa não estrutural

Problema de maximização da frequência fundamental com massa não estrutural M_0

O problema de maximização da frequência fundamental (3.24) tem $n = n_{elem} + 1$ variáveis de projeto (número de elementos mais a variável λ que servirá para maximizar a frequência fundamental). O tamanho da função de restrição é $m = 1 + n_{dof} + 1 + n_{dof} + n_{elem}$. A função objetivo é $f(x, \lambda) = -\lambda$ e a função de restrição $G^{maxfreq}(x) \in \mathbb{S}^m$ é

$$G^{maxfreq}(x, \lambda) = G_0^{maxfreq} + \sum_{i=1}^{nelem} x_i G_i^{maxfreq} + \lambda \sum_{i=1}^{nelem} x_i \tilde{M}_i + \lambda M_0 \in \mathbb{R}^m$$

onde:

$$G_0^{maxfreq} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{\gamma} & f^\top \\ f & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$G_i^{maxfreq} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_i \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_i e_i^\top \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

e

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

onde K_i é a matriz de rigidez do elemento i , M_i é a matriz de massa do elemento i e e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n_{elem}}$.

A restrição $G^{maxfreq}(x) \preceq 0$ é BMI, portanto, $R(x, d)$ definido em (2.14), é não nulo. Por este motivo $\tilde{\omega}^k$, definido em (4.16), não será nulo em toda iteração k .

5.1.1 Dados

Nesta seção apresenta os dados fixos de todos os testes numéricos.

Em todos os testes realizados os dados para o algoritmo de otimização foram os seguintes:

1. Cálculo do ρ

- $\xi = 0.8$ ($0 < \xi < 1$, $\nabla f(x)^\top d \leq \xi \nabla f(x)^\top d_0$)
- $\phi = 1$ ($\phi > 0$, $\phi |d_0|^2$)

2. Busca linear

- $\eta = 0.1$ ($0 < \eta < 1$, $f(x + td) \leq f(x) + t\eta d^\top \nabla f(x)$)
- $\nu = 0.7$ ($0 < \nu < 1$, $t = 1, \nu, \nu^2, \dots$)

3. Condição de parada

- $TOL_{D0} = 10^{-4}$, tolerância da norma de d_0 .

- $TOL_{GLAG} = 10^{-4}$, tolerância da norma do Lagrangeano.
- $TOL_{COMPL} = 10^{-4}$, tolerância da complementaridade.

4. Atualização de B : BFGS

5. Atualização de Λ : $\Lambda_0 + constante * I$

O algoritmo termina sua execução quando são verificados as seguintes condições, simultaneamente:

1. $|d_0^k| \leq TOL_{D0}$
2. $|\nabla_x L(x^k, \Lambda_0^k)| \leq TOL_{GLAG}$
3. $|tr(\Lambda_0^k G(x^k))| \leq TOL_{COMPL}$

onde d_0 e Λ_0 são calculados no sistema linear (4.11).

Foram considerados os seguintes dados para todas as estruturas:

- $Area = 0.01$, área inicial de todos os elementos.
- $E = 10.0$, módulo de Young de todos os elementos.
- $\rho^{mat} = 10.0$, densidade de todos os elementos.

Os parâmetros dos problemas de otimização são:

- $\bar{\gamma} = 1.0$, complacência máxima admissível;
- $\bar{\lambda} = 0.05$, mínima frequência admissível;
- $\bar{V} = 4.3$, para os exemplos 1 e 2.

Exemplo 1- treliça de 12 barras

Trata-se de um exemplo de otimização de uma estrutura de treliças formada por 12 barras e 7 nós com massa não estrutural $M_0 = 0, 1, 10, 20, 40, 60, 100$ aplicada no nó 7. Se proura maximizar o menor autovalor sujeito a condições de equilíbrio e restrições de complacência e volume.

A figura 5.1 mostra a geometria da estrutura composta por 7 nós, com as seguintes características:

- Número de barras: 12;
- Número de variáveis de projeto: 13;
- Número de graus de liberdade: 14;
- Magnitude da carga: -1 aplicada no nó 7;

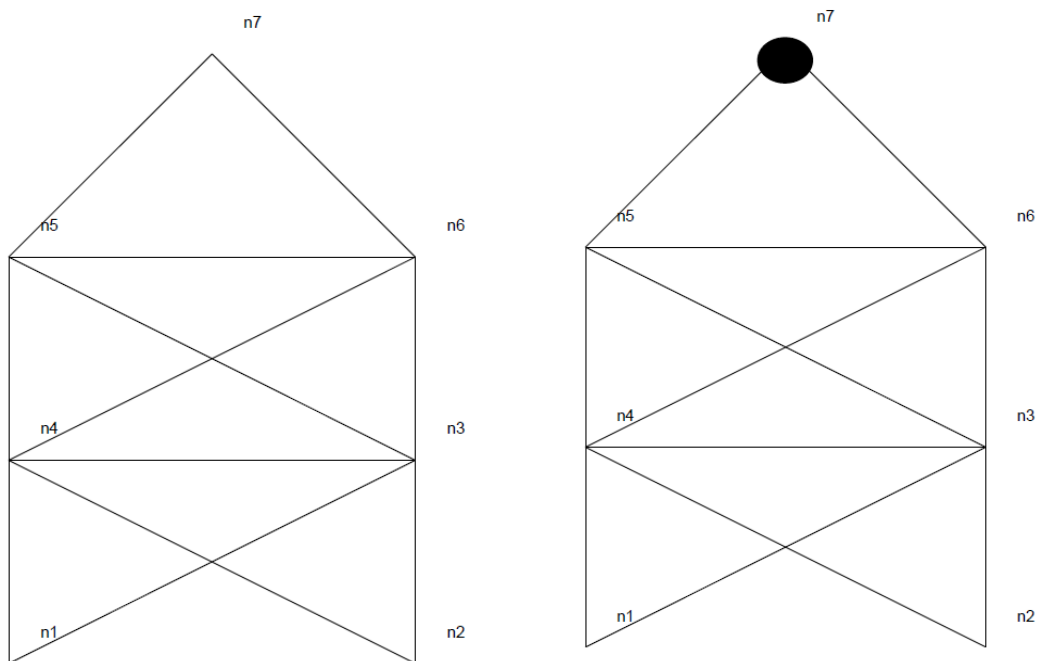


Figura 5.1: Estruturas

- Número de graus de liberdade ativos: 10;
- Nós fixos: 1 e 2;
- Tamanho de cada barra horizontal e vertical: 1

O problema do mínimo volume: Neste problema, $\bar{\gamma}$ e $\bar{\lambda}$ são dados, e minimiza o limite superior V no volume.

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^m, V \in \mathbb{R}} V \\
 \text{sujeito a } & \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & -p^\top \\ -p & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \\
 & \sum_{i=1}^n x_i \leq V \\
 & K(x) - \bar{\lambda}(M(x) + M_0) \succcurlyeq 0 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

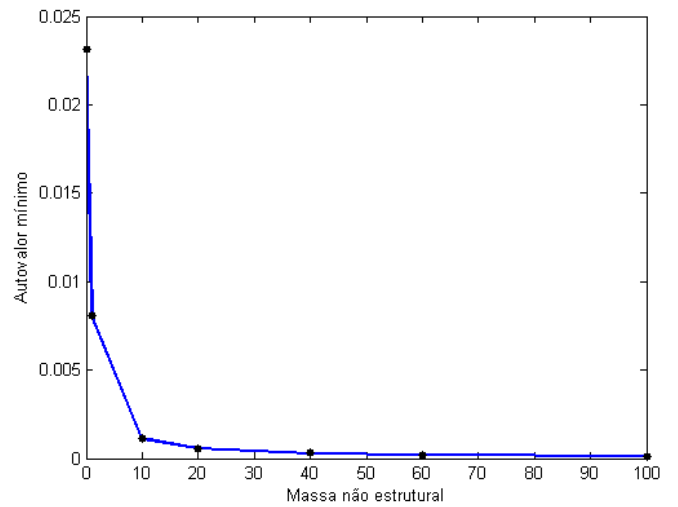
O valor obtido na minimização do problema 5.4 será o \bar{V} nos problemas 5.5 e 5.6. Assim, a formulação do exemplo 1 é a seguinte:

$$\begin{aligned}
& \min_{x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}} -\lambda \\
\text{sujeito a } & \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & -p_l^\top \\ -p_l & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \\
& \sum_{i=1}^n x_i \leq \bar{V} \\
& K(x) - \lambda(M(x) + M_0) \succcurlyeq 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Na tabela 5.2 tem-se o valor da frequência natural da estrutura 5.1 com a massa não estrutural $M_0 = 0, 1, 10, 20, 40, 60, 100$. O gráfico evidenciar a evolução da redução da função objetivo deste problema.

M_0	λ_{min}
0	0.0231
1	0.0081
10	0.0011
20	5.7864e-04
40	2.9240e-04
60	1.9563e-04
100	1.1771e-04

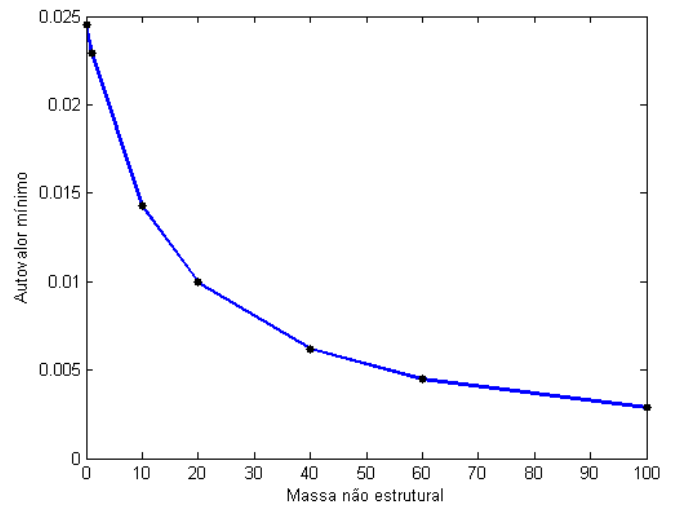
Figura 5.2: frequência da estrutura.



Na tabela 5.3 tem-se o valor da frequência ótima da estrutura 5.1 calculada com o FAIPA-SDP. O gráfico mostra a evolução da redução do λ_{min} deste problema.

M_0	λ_{min}
0	0.0244974
1	0.0229186
10	0.0142611
20	0.00994977
40	0.0061762
60	0.00447416
100	0.00288367

Figura 5.3: frequência da estrutura ótima.



O gráfico 5.4 mostra que a frequência natural da estrutura otimizada é maior.

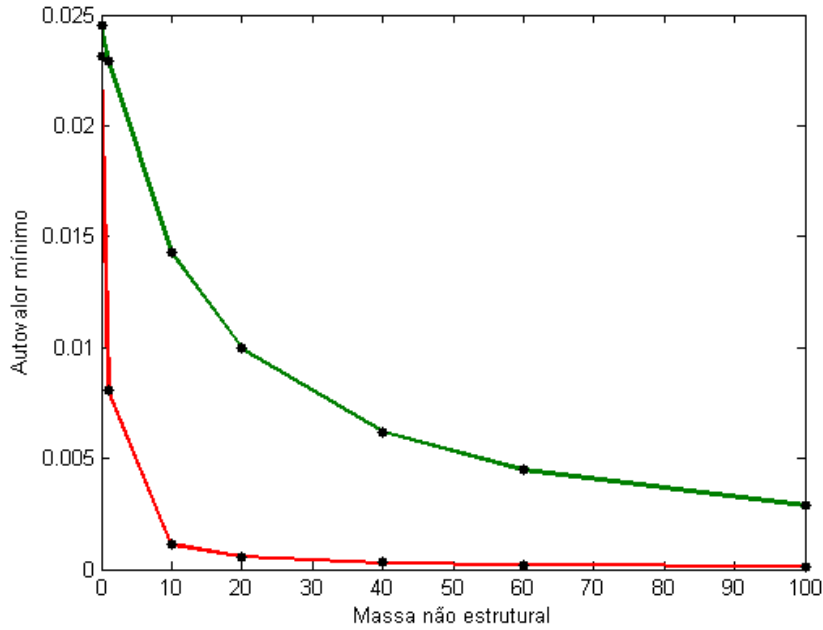


Figura 5.4: gráfico comparativo

5.1.2 Exemplo 2- treliça de 18 barras

Trata-se de um exemplo de otimização de uma estrutura de treliças formada por 18 barras e 11 nós, com massa não estrutural $M_0 = 0, 1, 10, 20, 40, 60, 100$ aplicada no nó 6 onde procura-se maximizar o menor autovalor sujeito a condições de equilíbrio e restrições de complacência e volume;

A figura 5.5 mostra a geometria da estrutura composta por 11 nós, com as seguintes características:

- Número de barras: 18;
- Número de variáveis de projeto: 19;
- Número de graus de liberdade: 22;
- Número de graus de liberdade ativos: 18;
- Magnitude da carga: -1 aplicada nos nós 9, 10, 11;
- Nós fixos: 1 e 2;
- Tamanho de cada barra horizontal e vertical: 1

Assim, a formulação do exemplo 2 é a seguinte:

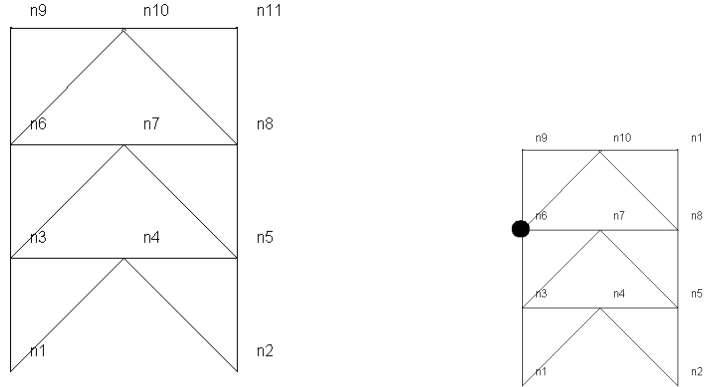


Figura 5.5: Estruturas

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}} -\lambda \\
 \text{sujeito a } & \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & -p_l^\top \\ -p_l & K(x) \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \\
 & \sum_{i=1}^n x_i \leq \bar{V} \\
 & K(x) - \lambda(M(x) + M_0) \succcurlyeq 0 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Na tabela 5.6 tem-se o valor da frequência natural da estrutura 5.5 com a massa não estrutural $M_0 = 0, 1, 10, 20, 40, 60, 100$.

Na tabela 5.7 tem-se o valor da frequência ótima da estrutura 5.5 calculada com o FAIPA-SDP.

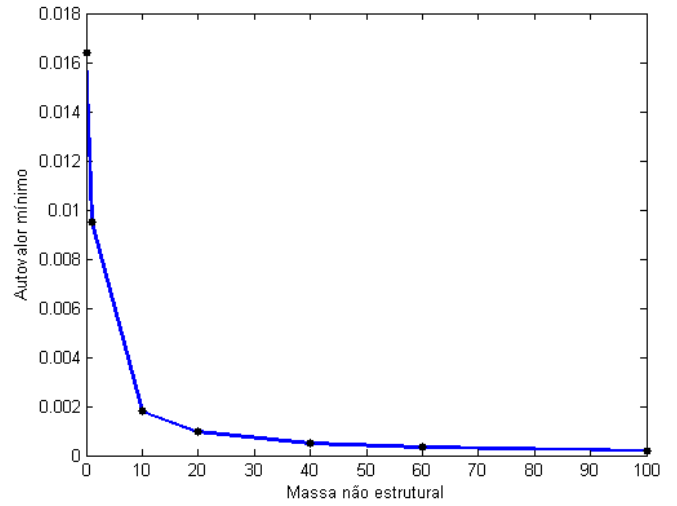
O gráfico 5.8 mostra que a frequência natural da estrutura otimizada é maior.

As figuras 5.9 demonstram a dependência da estrutura ideal quando ocorre a mudança de massa não estrutural na treliça 5.5. Nestes projetos ótimos percebe-se que com o aumento da massa não estrutural algumas barras da estrutura desaparece.

Os exemplos ilustra o lema 2, quando aumenta a massa não estrutural a frequência natural é reduzida.

M_0	λ_{min}
0	0.0164
1	0.0095
10	0.0018
20	9.6702e-04
40	4.9586e-04
60	3.3339e-04
100	2.0141e-04

Figura 5.6: frequência da estrutura.



M_0	λ_{min}
0	0.160547
1	0.117364
10	0.0432238
20	0.0271914
40	0.0159602
60	0.0113654
100	0.00723781

Figura 5.7: frequência da estrutura ótima.

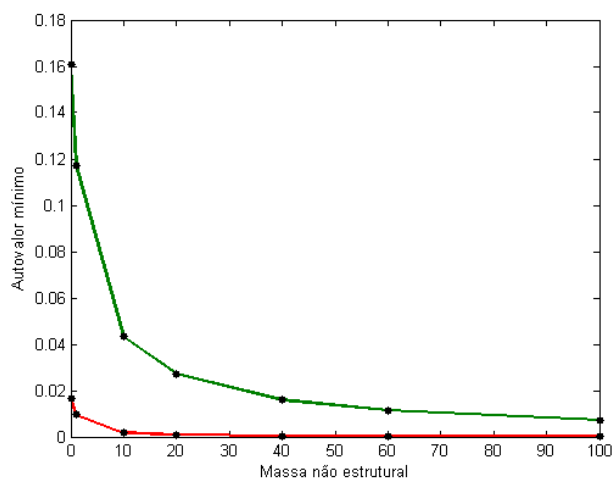
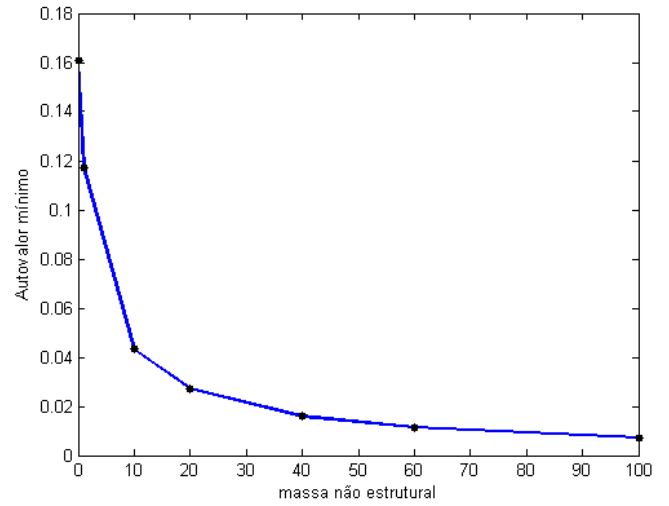


Figura 5.8: gráfico comparativo

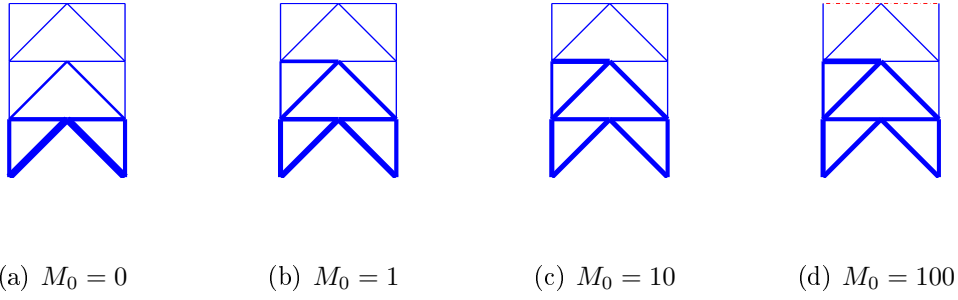
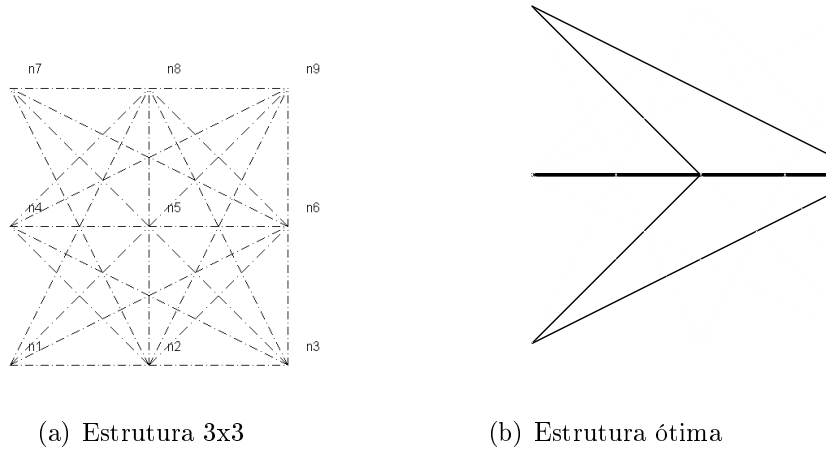


Figura 5.9: Estruturas ótimas.

5.1.3 Exemplo 3

Considere a estrutura 3x3 5.10(a) com 9 nós sendo três fixos (n_1, n_4, n_7) e conectados por barras com uma força de $(-1, 0)$ aplicada na horizontal do nó 6; na figura 5.10(a) considere $M_0 = 0$. Considerando o problema do mínimo volume (P_{vol}^{SDP}) com $\bar{\gamma} = 1$ e $\bar{\lambda} = 0.05$. O FAIPA-SDP calcula a solução ótima global (x^*, V^*) deste problema convexo: o projeto ótimo x^* é mostrado na figura 5.10(b), enquanto $V^* = 0.406793$, o algoritmo realizou os cálculos em 17 iterações.

Para o problema de maximizar o autovalor mínimo (P_{aut}^{SDP}) com $\bar{V} = 0.406793$ e $\bar{\gamma} = 1$ obtemos novamente x^* , e $\lambda^* = 0.05$. Isso mostra que o valor V^* em 3.17 e o valor γ^* em 3.18 alcança x^* , caso contrário estaria em contradição com o teorema 3.4.2.



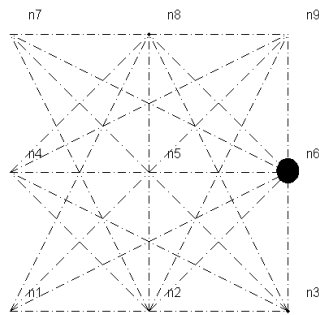
Este exemplo numérico também ilustra os resultados dos teoremas 3.3.1 e 3.3.2.

5.1.4 Exemplo 4

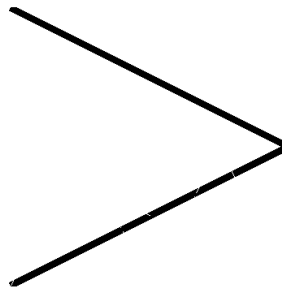
Neste exemplo, como no exemplo 3, obtemos a solução ótima para as diferentes formulações dos problemas de mínimo volume e maximização mínima da frequência, com $M_0 \neq 0$. Na estrutura 3x3, no nó 6, adicionamos uma massa não estrutural $M_0 \neq 0$ (figura 5.10(c)).

A figura 5.10(d) mostra o projeto ótimo x^* para o problema do mínimo volume (P_{vol}^{SDP}) com $\bar{\gamma} = 1$ e $\bar{\lambda} = 0.05$. O volume ótimo obtido é $\bar{V} = 1.30435$.

Ao resolver o problema de maximizar o autovalor mínimo (P_{aut}^{SDP}) com $\bar{V} = 1.30435$ e $\bar{\gamma} = 1$ se obtém novamente x^* , e $\lambda^* = 0.05$. Neste caso o resultado é compatível com o corolário 1.



(c) Estrutura 3x3



(d) Estrutura ótima

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

6.1 Conclusões

Neste trabalho se consideram diferentes formulações para problemas de otimização topológica de estruturas. Estudou-se o problema do mínimo volume, mínima complacência e o problema da maximização da mínima frequência natural, incluindo o efeito da massa não estrutural. Discute-se a inter-relação das soluções destes problemas. Além disso se apresentam modelos de programação semidefinida para cada um dos problemas anteriores. Todos estes resultados foram desenvolvidos em [14].

No presente trabalho é empregado o FAIPA-SDP para resolver problemas de maximização da frequência natural de treliças com massa não estrutural. Este algoritmo tem como entrada de um ponto viável e gera uma sequência de pontos viáveis com a redução do valor da função objetivo a cada iteração. O algoritmo resolve três sistemas lineares com a mesma matriz para definir um arco viável e de descida. Para obter um novo ponto, é realizado uma busca linear inexata ao longo deste arco.

Para fins do presente estudo são consideradas estruturas de treliças bidimensionais. Essas estruturas são analisadas pelo método dos elementos finitos. Se realizaram testes numéricos com o FAIPA-SDP. Os resultados obtidos ilustram as propriedades teóricas (apresentadas no capítulo 3) dos problemas de otimização.

O FAIPA-SDP foi proposto na dissertação [7]. Nessa dissertação não foi provada a convergência global deste algoritmo. Apesar disso, os resultados numéricos obtidos no capítulo 5 mostram que o FAIPA-SDP converge para uma solução dos problemas de otimização.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Se sugerem as seguintes pesquisas futuras:

- Resolver problemas de otimização estrutural com múltiplas massas não estru-

turais.

- Construção de uma prova para a convergência global do FAIPA-SDP.
- Comparação entre FDIPA-SDP e FAIPA-SDP. Tentar responder as seguintes questões: Existem problemas em que o FDIPA-SDP é mais eficiente que o FAIPA-SDP? Existem problemas (em que a curvatura da fronteira do conjunto viável é pronunciada) nos quais FAIPA-SDP é mais eficaz que o FDIPA-SDP?

Referências Bibliográficas

- [1] ARENALES, S., DAREZZO, A. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. Cengage Learning, 2008.
- [2] IZMAILOV, A., SOLODOV, M. *Otimização, volume 1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. Impa, 2005.
- [3] HERSKOVITS, J., SANTOS, G. “Feasible arc interior point algorithms for nonlinear optimization”. In: *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, 1998.
- [4] AROZTEGUI, M. *Técnicas de programação semidefinida e aplicações em otimização de material*. D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.
- [5] AROZTEGUI, M., HERSKOVITS, J., ROCHE, J. R., et al. “A feasible direction interior point algorithm for nonlinear semidefinite programming”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 50, n. 6, pp. 1019–1035, 2014.
- [6] ROCHE, J. R., J., H., BAZÁN, E. “A feasible direction algorithm for general nonlinear semidefinite programming”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016.
- [7] BARROS, L. *Técnicas de programação semidefinida por arco viável e aplicação a maximização da frequência natural de estruturas mecânicas*. Tese de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2017.
- [8] ACHTZIGER, W., KOČVARA, M. “Structural topology optimization with eigenvalues”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 18, n. 4, pp. 1129–1164, 2007.
- [9] LIMA, E. L. *Análise real, volume 2: funções de n variáveis*. Impa, 2010.
- [10] LAGES, E. “Álgebra linear”, *IMPA, Rio de Janeiro*, 2009.

- [11] HERSKOVITS, J., SANTOS, G. “Feasible arc interior point algorithms for nonlinear optimization”. In: *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, 1998.
- [12] VANDENBERGHEY, L., BOYD, S. “Semidefinite Programming”, *SIAM*, v. 38, pp. 8–9, mar. 1996.
- [13] BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E., et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. 15 ed. Philadelphia, SIAM Studies in Applied Mathematics IAM, 1994.
- [14] ACHTZIGER, W., KOCVARA, M. “Structural topology optimization with eigenvalues”, *Institute of Applied Mathematics, University of Dortmund, Germany (SIAM Journal on Optimization)*, p. 36, 2006.
- [15] LUENBERGER, D. G., YE, Y. *Linear and nonlinear programming*, v. 2. Springer, 1984.
- [16] CÓRDOVA, E. G. B. *OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL MEDIANTE PROGRAMAÇÃO SEMIDEFINIDA*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- [17] CHANDRUPATLA, T., BELEGUNDU, A. *Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería*. 2 ed. Prentice Hall, *, 1999.
- [18] ELOY, L. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. 1 ed. Elsevier, *, 2011.
- [19] BURKE, J. V., LEWIS, A. S., OVERTON, M. L. “Two numerical methods for optimizing matrix stability”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 351, pp. 117–145, 2002.
- [20] HERSKOVITS, J. “A view on nonlinear optimization”, *Advances in structural optimization*, v. 25, pp. 71–116, 1995.
- [21] SHAPIRO, A. “On uniqueness of Lagrange multipliers in optimization problems subject to cone constraints”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 7, pp. 508–518, 1997.
- [22] HERSKOVITS, J. *An Interior Point Technique for Nonlinear Optimization*. 1808, INRIA BP 105, Le Chesnay CEDEX, France, 1992.