Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

APLICAÇÃO DE ELIMINAÇÃO ITERADA DE ESTRATÉGIAS DOMINADAS A MODELOS DE COMPETIÇÃO ENTRE DOIS JOGADORES

João Paulo Caraú de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Sergio de Carvalho Bezerra

João Pessoa
Junho de 2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

O48a Oliveira, João Paulo Caraú de.
APLICAÇÃO DE ELIMINAÇÃO ITERADA DE ESTRATÉGIAS DOMINADAS A MODELOS DE COMPETIÇÃO ENTRE DOIS JOGADORES / João Paulo Caraú de Oliveira. - João Pessoa, 2018.
67 f. : il.

Orientação: Sergio de Carvalho Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/PPGMMC.

1. Eliminação Iterada. 2. Estratégias Dominadas. I. Bezerra, Sergio de Carvalho. II. Título.

UFPB/BC

APLICAÇÃO DE ELIMINAÇÃO ITERADA DE ESTRATÉGIAS DOMINADAS A MODELOS DE COMPETIÇÃO ENTRE DOIS JOGADORES

João Paulo Caraú de Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Sergio de Carvalho Bezerra, D.Sc.

Prof. Marcelo Rodrigo Portela Ferreira, D.Sc.

Prof. Silvio de Barros Melo – UFPE, Ph.D.

Prof. Matheus da Silva Menezes, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
JUNHO DE 2018

M21m Caraú de Oliveira, João Paulo

Aplicação de eliminação iterada de estratégias dominadas a modelos de competição entre dois jogadores / João Paulo Caraú de Oliveira. – João Pessoa, 2018.

67, f.: il.;

Orientador: Sergio de Carvalho Bezerra

Dissertação (mestrado) – UFPB/CI/PPGMMC.

Referências Bibliográficas: p. 38 – 39.

1. IESD. 2. Eliminação Iterada. 3. Dominância. 4. Teoria dos Jogos.

UFPB/BC CDU: 719.6(043)

A minha avó Maria Guiomar
Caraú de França(in Memorian),
você continuará sendo a melhor
de todas as pessoas.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiro de tudo a toda minha família que acreditou em mim todo o tempo, me apoiando sempre, meus pais, Naide Caraú de Oliveira e João Maria de Oliveira.

A minha esposa Olívia Sobreira Gomes e aos meus filhos Benjamin Gomes Caraú e Nicholas Araújo de Oliveira.

A Maria de Fátima Marques da Silva, José Luiz da Silva Junior, Paula Moreno e suas famílias por todas as vezes que me acolheram em sua residência e por serem pessoas tão bondosas.

Ao ex-presidente Luiz Inácio Lula da Silva.

Ao meu orientador Sérgio de Carvalho Bezerra por toda a paciência e presteza e a todo o corpo docente do PPGMMC-UFPB.

À UFERSA-Angicos por ter me formado, em especial Matheus da Silva Menezes, Núbia Alves, Marcilene Nobrega.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

APLICAÇÃO DE ELIMINAÇÃO ITERADA DE ESTRATÉGIAS DOMINADAS A MODELOS DE COMPETIÇÃO ENTRE DOIS JOGADORES

João Paulo Caraú de Oliveira

Junho/2018

Orientador: Sergio de Carvalho Bezerra

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Apresenta-se nesta dissertação o estudo e aplicação de uma ferramenta retirada da Teoria dos Jogos chamada de eliminação iterada de estratégias ou ações estritamente dominadas (IESD). Utilizando a linguagem de programação Python, este trabalho se concentra na construção e aplicação de um algoritmo baseado nesta ferramenta para resolução de uma situação hipotética de conflito entre duas naves espaciais. A análise ocorre da perspectiva de um dos jogadores e diversos modelos de distribuições para qualificar como é escolhido um ganhador são adotados e simulados. Para ganhar, um dos jogadores deve realizar uma série de escolhas de trajetórias sendo que uma escolha errada significa sua destruição. No geral a utilização de (IESD) se mostrou mais vantajosa que a escolha aleatória.

Palavras-chave:IESD, Eliminação iterada; Teoria dos Jogos, Dominância.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

APLICCATION OF ITERATE ELIMINATION OF DOMINATED STRATEGIES TO TWO-PLAYER COMPETITION MODELS

João Paulo Caraú de Oliveira

June/2018

Advisor: Sergio de Carvalho Bezerra

Program: Computational Mathematical Modelling

In this dissertation we present the study and application of a tool derived from the Theory of Games called the iterated elimination of strictly dominated strategies or actions (IESD). Using the Python programming language, this work focuses on the construction and application of an algorithm based on this tool to solve a hypothetical situation of conflict between two spaceships. The analysis takes place from the perspective of one of the players and various models of distributions to qualify how a winner is chosen are adopted and simulated. To win one of the players must make a series of path choices to be a winner, and a wrong choice means their destruction. In general the use of IESD was more advantageous than the random choice.

Keywords:IESD, iterated elimination; Theory of Games, Dominance.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

A_1	Matriz representação o conjunto de ações disponíveis para o Jogador 1, p. 10
A_2	Matriz representação o conjunto de ações disponíveis para o Jogador 2, p. 10
A_i	Matriz contendo o conjunto de de ações para o jogador i, p. 5
B	Conjunto de números reais, p. 8
N	Conjunto de Jogadores, p. 5
Ω	Espaço amostral, p. 7
α	Limite inferior de um determinado intervalo, p. 9
β	Limite superior de um intervalo, p. 9
λ	Parâmetro da variável de Poisson, p. 9
$\mathcal{A}$	Sigma Álgebra, p. 7
a_i	Elementos da matriz A para o respectivo jogador i, p. 10
a_i	Elemento da matriz representando uma das ações, p. 5
b_i	Elemento da matriz representando uma das ações, p. 5
f	Função densidade de Probabilidade, p. 8
i	Índice da matriz A, conforme jogador i, p. 5
$p(a)$	Função de Probabilidade, p. 8
u_i	Função de recompensa para cada jogador i, p. 5
J1	Jogador 1, p. 10
J2	Jogador 2, p. 10

X	Variável aleatória, p. 7
λ	Parâmetro da variável de poisson, p. 9
a	Limite inferior de B, p. 8
b	Limite superior de B, p. 8
e	Núemro de Euler, p. 9

Lista de Abreviaturas

IDLE	Ambiente de desenvolvimento integrado para python, p. 2
IESD	Itereted Elimination of Strictly Dominates actions, p. 6

Capítulo 1

Introdução

Atingir objetivos é um dilema presente em qualquer instância, seja na vida pessoal como no setor econômico, nos planejamentos empresariais, nas organizações corporativas, enfim, em todos setores que se pode pensar. Atreladas a esse dilema estão as estratégias. Por ser um termo aplicado em praticamente todas as situações, torna-se difícil formular um significado para tal. Todavia, de acordo com o dicionário Michaelis, estratégia é a arte de utilizar planejadamente os recursos de que se dispõe ou de explorar de maneira vantajosa a situação ou as condições favoráveis de que por ventura se desfrute, de modo a atingir determinados objetivos.

Um campo da matemática aplicada que faz uso de estratégias sabiamente formuladas para o processo de tomadas de decisão é a Teoria dos Jogos. O matemático John Von Neumann e o economista Oskar Morgenstern publicaram um livro *The Theory of Games and Economic Behavior* e nele definiram a teoria dos jogos como o conjunto de ferramentas criadas para auxiliar o entendimento das decisões resultantes da interação entre jogadores. Esse conjunto de ferramentas visa determinar em qual momento e quais estratégias serão aplicadas em cada situação (ALMEIDA 2006).

As estratégias de dominância utilizadas para solucionar alguns problemas da Teoria dos Jogos tem a função de orientar um jogador a tomar uma decisão que lhe garanta o melhor ganho. Com elas é possível traçar um plano de escolhas para cada ponto de decisão, formando uma sequência completa de movimentos através dos conjuntos de informações disponíveis, tendo em vista os melhores valores oferecidos para se chegar no objetivo final.

Diante disso, o presente trabalho, faz uso de um instrumental denominando Itereted Elimination Stritcly Dominated(IESD) para modelar a interação entre dois jogadores na perspectiva de vitória e derrota do jogador 1 que será denominado J1. O conjunto de estratégias aqui utilizadas compreende um programa de instruções que indicará qual linha de ação os jogadores adotarão durante toda partida.

1.1 Objetivos

- Aplicar a estratégia IESD num modelo de competição entre dois jogadores descritos como jogador 1 e jogador 2.
- Analisar os resultados sobre suas tendências positivas e negativas.
- Realizar um levantamento probabilístico das possibilidades de vitória do jogador 1 para comparar com os resultados do trabalho.

A metodologia utilizada consiste de levantamento teórico dos conceitos necessários, construção de um algoritmo que aplique uma eliminação de estratégias que forem julgadas como dominadas pelas demais e apresentação desses resultados em forma de tabelas com o quantitativo de vitórias e derrotas, findando com uma comparação destas últimas com a probabilidade de vitórias que o jogador 1 teria de vencer sem adotar nenhum tipo de estratégia.

Em resumo, todo o trabalho se baseia em uma comparação de elementos de duas matrizes, essa comparação será intercalada em seis passos que serão chamados de “fases "ao longo do trabalho, onde cada fase é caracterizada pela comparação de matrizes associadas aos dois jogadores. Logo no capítulo 2, apresentam-se os conceitos e teorias necessários para a modelagem do problema, construção do algoritmo e discussão dos resultados. Nele explica-se a parte da Teoria dos Jogos que resultou no algoritmo construído bem como os modelos de onde serão criados e os cenários que serão simulados. No capítulo 3, serão detalhado a construção do modelo e regras definidas para os testes que serão realizados e seus respectivos resultados. As particularidades desta proposta que estão ligadas aos modelos e como os elementos das matrizes a serem comparadas são escolhidos, estarão expostas junto à apresentação dos resultados no capitulo 4. No capítulo 5 tem-se as conclusões acerca dos objetivos estabelecidos.

Apesar de que o assunto "Eliminação iterada de estratégias dominadas"não ser novo e na literatura consultada ser dito que o mesmo tem pouca aplicação em situações no mundo real, ao longo deste trabalho pode-se observar que dependendo de como o problema for modelado e quais os objetivos dos tomadores de decisões, este conceito pode ser aplicado e trazer bons resultados.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Teoria dos Jogos

2.1.1 O que é a teoria dos jogos?

Por milhares de anos parte da interação humana se justificou a partir das relações de trocas e posteriormente comércio. Com a aglomeração e formação das cidades, essas relações de trocas se tornaram mais complexas e eventualmente tanto para os caçadores-coletores, um investidor ou um general participando de uma guerra, temos alguns impasses que nos levam a realizar uma escolha entre uma série de alternativas. Neste contexto qual devo escolher?

Ajudar a escolher entre alternativas diferentes é o objetivo da teoria dos jogos.

Definição 2.1.1. *Teoria dos jogos é um estudo sistemático das interações estratégicas entre indivíduos racionais.*

Limitações à parte, teoria dos jogos pode muito bem ser aplicada a muitas situações no mundo real. A seguir apresentam-se algumas definições teóricas que serão utilizadas neste trabalho.

2.1.2 Jogos em forma estratégica

Partindo do argumento que num determinado jogo, os jogadores envolvidos podem escolher suas ações de forma simultânea ou sequencial e com ou sem o conhecimento de qual ação os demais jogadores irão escolher, temos segundo [9] os tipos de formas que um jogo estratégico pode assumir:

Forma dos jogos		
Movimentos	Completa	Incompleta
Simultâneos	Jogos em forma estratégica com informação completa	Bayesian Games
sequenciais	Jogos em forma extensiva com informação completa	Jogos em forma extensiva com informação incompleta

O modelo adotado neste trabalho é construído segundo *Jogos em forma estratégica com informação completa*

Antes da definição de forma estratégica, deve-se citar a teoria da escolha racional.

Teoria da escolha racional

Esta teoria é muito utilizada em diversos modelos na teoria dos jogos. Segundo esta teoria, o jogador irá escolher a melhor ação entre um conjunto de ações disponíveis para ela, dadas as preferências desse jogador[11].

Ações

As ações que um determinado jogador pode escolher sob certas circunstâncias devem ser modeladas, para [11] teoricamente é um modelo baseado em dois componentes. O primeiro componente é um conjunto A que é composto por todas as ações que o tomador de decisões tem disponível, o segundo é uma especificação das preferências desse tomador. O autor ainda afirma que numa situação de um jogo modelado, ao serem determinadas suas preferências, o tomador de decisões será confrontado com um subconjunto de A de onde ele irá escolher um único elemento, o tomador conhece esse subconjunto e sua escolha por um único elemento sofre influência das suas preferências.

No que se refere às preferências do tomador de decisões, [11] cita que quando apresentado a qualquer par de ações, o tomador de decisões sabe qual prefere ou que ambas são igualmente possíveis de se escolher. Estendendo naturalmente, temos que se o tomador prefere uma ação **a** em relação a uma ação **b**, e se prefere **b** em relação a **c**, então prefere **a** em relação a **c**. Como alternativa, cita que pode-se representar as preferências por uma função de recompensa.

Logo, pode-se concluir que de acordo com as preferências do tomador de decisões, a ação escolhida é a melhor das disponíveis. Ou como [11] descreve:

> *"A ação escolhida pelo tomador de decisões é ao menos tão boa quanto todas as ações disponíveis para aquele subconjunto, de acordo com suas preferências."*

Estes conceitos são condensados de forma mais resumida por [11] quando descreve que o modelo de *jogos estratégicos* é um modelo de interação de tomadores de decisões chamados jogadores, e cada jogador tem um conjunto de possíveis ações. O autor completa que este modelo permite que uma representação das interações entre os jogadores seja feita permitindo que cada jogador possa ser afetado pelas ações de todos ou outros jogadores e não somente por sua própria ação.

Logo, uma definição de Jogos em forma estratégica conforme visto em [9] e [11]é dada por :

Definição 2.1.2. *Um jogo em forma estratégica é composto por:*
$\Longrightarrow$ *Conjunto de jogadores: N;*
$\Longrightarrow$ *Conjunto de ações: A_i, para cada jogador i.*
$\Longrightarrow$ *Uma função de recompensa: : $A \longrightarrow R$, para cada jogador i.*

Em geral os elementos de N, podem ser nomeados por números ou letras acompanhadas de números e um elemento genérico pode ser chamado de jogador i.

A_i é o conjunto de ações disponíveis para o jogador i e u_i define o resultado da escolha feita pelo jogador i entre as escolhas de ações disponíveis no conjunto A_i.

Em resumo, um jogo em forma estratégica tenta descrever um cenário em que jogadores tomam decisões simultaneamente ou sem conhecer as ações tomadas por outros jogadores, mesmo que o resultado seja interdependente dessas escolhas [9].

2.1.3 Estratégias de dominância

Em jogos estratégicos, o problema principal é decidir qual ação tomar sem saber qual ação o oponente irá escolher. Nessa situação mesmo você conhecendo os possíveis resultados de cada escolha, pode não ser fácil de escolher uma ação. Nesse sentido vamos especificar um conjunto de $N = 1, 2, 3, ..., n$ e para cada jogador i, temos que especificar um conjunto de possíveis ações ou estratégias C_i e uma função de recompensa (u_i), [10].

Definição 2.1.3. *Uma ação $a_k \in A_k$ fracamente domina cada ação $b_k \in A_k$ para cada jogador k se:*

$$u_i(a_k) \geq u_j(b_k); i \neq j \quad \forall \quad a_k, b_k \in A_k$$

e

$$u_i(a_k) > u_j(b_k); i \neq j \quad para \quad algum \quad a_k, b_k \in A_k.$$

e estritamente domina b_k se:

$$u_i(a_k) > u_j(b_k); i \neq j \quad \forall \quad a_k, b_k \in A_k.$$

Ou seja, uma ação a_i fracamente domina uma ação b_i se independente do que os outros jogadores fazem, ela é pelo menos tão boa quanto b_i e é estritamente dominante se independente do que os outros jogadores fizerem, a ação a_i for melhor que b_i.

2.1.4 Solucionável por dominância

Tomando o argumento que um jogador racional nunca jogaria uma ação enquanto houver outra ação que garanta mais ganhos para este jogador independente do que os outros jogadores podem fazer, nós apresenta-se a seguinte definição:

Definição 2.1.4. *Seja um jogo em sua forma estratégica e duas ações $a_k, b_k \in A_k$, nós dizemos que b_k é estritamente dominada por a_k se:*

$$u_i(a_k) > u_j(b_k); i \neq j \quad \forall \quad a_k, b_k \in A_k.$$

e dizemos que b_i é fracamente dominada por a_i se:

$$u_i(a_k) \geq u_j(b_k); i \neq j \quad \forall \quad a_k, b_k \in A_k$$

enquanto

$$u_i(a_k) > u_j(b_k); i \neq j \quad para \quad algum \quad a_k, b_k \in A_k.$$

De acordo com [9] na teoria dos jogos, uma premissa fundamental para a aplicação de estratégias de dominância é que jogadores racionais não tomam ações estritamente dominadas. Dito isso, em um jogo G, pode-se aplicar essas estratégias e eliminar certas ações do outro jogador, e quando todos os jogadores ponderam sobre as ações eliminadas, o jogo real sendo jogado é reduzido a um jogo com menores possibilidades que o jogo original. Então, um primeira pergunta é: Pode-se continuar eliminando opções até enquanto foi possível?

A resposta é que essa situação pode ser razoável ou não dependendo do contexto.

IESD (Iterated Elimination of Strictly Dominates actions), uma sigla em inglês para *Eliminação iterada de ações estritamente dominadas*. Isso é uma extensão do equilíbrio de estratégia dominante[1] e escrevemos a partir daí uma proposição:

Proposição 2.1.1. *Se ambos os jogadores tem ações estritamente dominantes, então ações IESD levam a um equilíbrio de estratégia dominante única.(demonstrada no Apêndice A)*

Além disso, ações IESD podem ser aplicadas a muitos jogos que não possuem ações dominantes, mesmo que nenhum dos jogadores envolvidos tenham ações dominantes e ainda produzir um resultado único. Um jogo em forma estratégica que através de ações IESD, possui solução única é dito *Solucionável por dominância.*

Definição 2.1.5. *Um jogo em forma estratégica é "Solucionável por dominância", se através de ações IESD ele possui solução única.*

Um exemplo famoso de um jogo solucionável por dominância é o dilema do prisioneiro.

A eliminação iterada de ações estritamente dominadas é abordada por [15] como "Eliminação iterada de estratégias fortemente dominadas", e os autores consultados tem definições semelhantes sobre seus conceitos, mas [15] também se refere como "recursivamente forte".

Foram encontrados artigos com aplicações deste conceito, mas com objetivos diferentes conforme visto em [16], [17], [18], [19] que trazem aplicações da eliminação iterada de ações estritamente dominadas mas com objetivos de reduzir as opções de escolha, ou comparando com outra estratégia, o que se distingue deste trabalho, que visa propor uma solução baseada no IESD e investigar sua aplicabilidade e eficiência.

2.2 Probabilidade

2.2.1 Variáveis Aleatórias

Segundo [13] uma definição de variável aleatória por ser dada por:

Definição 2.2.1. *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é uma função real sobre Ω tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que*

$$X^{-1}(\infty, x] \in \mathcal{A}.$$

As principais variáveis aleatórias podem ser discretas e contínuas. Nas variáveis aleatórias discretas, tem-se que a variável pode a assumir um valor máximo contável

[1] Segundo [9] Equilíbrio de estratégia dominante é quando num jogo não se exige uma quantidade excessiva de "racionalidade" dos envolvidos. Exige-se apenas que os jogadores sejam racionais do ponto de vista de escolher sempre a melhor opção para si e não exige que eles saibam que os outros são racionais também

num conjunto de valores possíveis. Para uma variável discreta X, definimos a função de probabilidade

$$p(a) = \mathbb{P}(X = a)$$

Segundo [12] a função discreta de probabilidade $p(a)$ é positiva para no máximo um número contável de valores de a, ou seja, X assumindo um dos valores $x_1, x_2, ...$, então

$$p(x_i) \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3...,$$

$$p(x_i) = 0 \text{ para todos os demais valores de } x$$

e como X recebe apenas os valores de x_i, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Tanto [12] quanto [13] definem variável aleatória contínua de forma semelhante. X é uma variável variável aleatória contínua(também chamada de absolutamente contínua) se existir uma função não negativa f, definida em $x \in (-\infty, \infty)$ que possua a propriedade de que, para qualquer conjunto B de números reais

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx \tag{2.1}$$

f é chamada função de densidade de probabilidade.

A equação 2.1 diz que a probabilidade de que X esteja em B pode ser obtida integrando-se f ao longo de B. Então, X assumindo algum valor, f deve satisfazer

$$1 = \mathbb{P}\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

fazendo $B = [a, b]$, obtemos

$$\mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx \tag{2.2}$$

Fazendo $b = a$, tem-se que:

$$\mathbb{P}\{X = a\} = \int_a^a f(x)dx = 0,$$

essa equação quer dizer que a probabilidade de que uma variável aleatória contínua assuma qualquer valor específico é zero. Portanto para uma variável aleatória contínua,

$$\mathbb{P}\{X < a\} = \mathbb{P}\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{2.3}$$

Neste trabalho utiliza-se das variáveis aleatórias de Poisson e uniforme.

Para [12] uma variável aleatória X que pode assumir qualquer um dos valores $0, 1, 2, ...$ é chamada de variável aleatória de Poisson com parâmetro λ, se, para algum $\lambda \geq 0$,

$$p(i) = \mathbb{P}(x = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2... \tag{2.4}$$

A equação 2.4 define uma função de probabilidade, já que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=o}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1. \tag{2.5}$$

Segundo [12] uma variável é dita aleatória uniformemente ao longo do intervalo $(0, 1)$ se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.6}$$

O autor ainda afirma que a equação 2.6 é uma função densidade de probabilidade já que $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = 1$. $f(x) > 0$ somente quando $x \in (0, 1)$, tem-se como consequência que X deve assumir um valor no intervalo $(0, 1)$. Também, como $f(x)$ é constante para $x \in (0, 1)$, X tem a mesma probabilidade de estar na vizinhança de qualquer valor em $(0, 1)$. Verificando essa afirmação, observe que, para $0 < a < b < 1$,

$$\mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx = b - a$$

Ou seja, a probabilidade de que X esteja em qualquer subintervalo particular $(0, 1)$ é igual ao comprimento desse subintervalo. Então, dizemos que X é uma variável aleatória uniforme no intervalo (α, β) se a função densidade de probabilidade de X é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Dado que $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, [12] afirma que decorrente da equação 2.7 que a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória uniforme no intervalo (α, β) é dada por

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad a \leq \alpha, \\ \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha < a < \beta \\ 1, & \text{se} \quad a \geq \beta. \end{cases} \tag{2.8}$$

Capítulo 3

Métodologia

Neste trabalho adotou-se os seguintes procedimentos:

- Modelagem de problema de competição entre dois jogadores;
- Criação de um algoritmo baseado em IESD;
- Definição dos modelos de competição para serem resolvidos pelo algoritmo IESD;
- Realização dos testes de competição;
- Apresentação dos resultados e discussões dos testes através de tabelas e gráficos.

3.1 Modelagem de problema de competição entre dois jogadores

Neste trabalho, modela-se um situação de confronto entre dois jogadores aqui nomeados de J1 e J2.

O cenário se desenrola em uma competição que se alonga por 6 fases e que tem como resultado a destruição do J1 ou J2, sem possibilidade de equilíbrio.

O J2 está constantemente atirando contra o J1, e um único tiro acertado implica destruição para J1. O J1 deve passar ileso pelas 6 fases para conseguir desferir um tiro certeiro que com certeza destrói J2, não existe possibilidade de J1 acertar J2 até que passe pela fase 6.

Cada fase representa um espaço de confronto onde J2 ataca J1 e o mesmo tenta desviar dos ataques e passar para a próxima fase. O resultado desse confronto é modelado através de uma comparação de duas matrizes A_1 e A_2.

Conforme 2.1.2 tem-se que:

$$N = \{J1, J2\}$$

Logo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix},$$

Também pode-se representar o conjunto de ações/possibilidades como $A_i = a_i, i = 1, 2, ...9.$.

Onde teremos que a comparação é dada pela função recompensa u_i

Função $u_i = (a_i, b_i)$

Se $a_i > b_i$ então naquela célula o J1 será o vencedor, o caso contrário implica derrota para J1.

Então, dado um espaço S como visto na figura 3.1, temos na figura 3.2 uma subdivisão do espaço com as matrizes A_1 e A_2 inseridas e cujos elementos a serem comparados representam subespaços de S onde em cada subespaço é aplicada a função utilidade u_i.

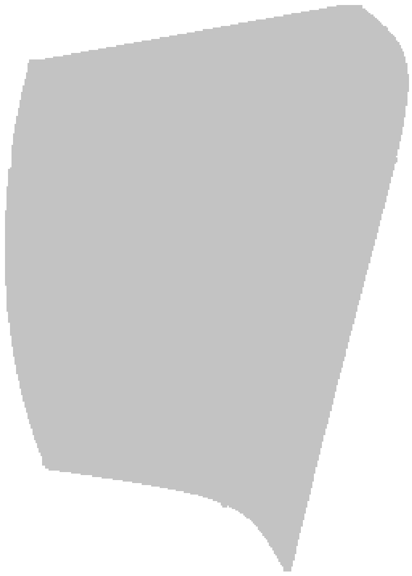

Figura 3.1: Espaço S(Autoria própria)

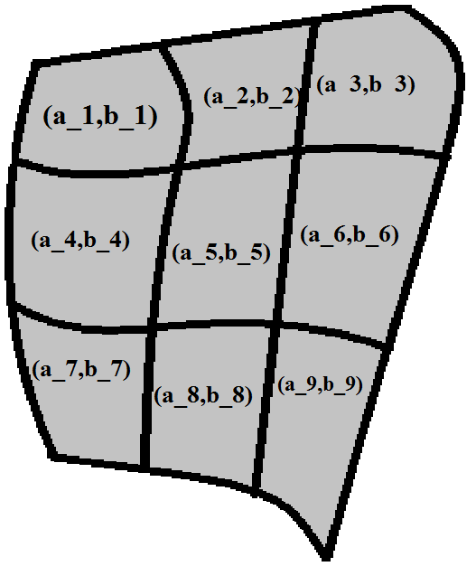

Figura 3.2: Espaço S dividido(Autoria própria)

Tem-se neste modelo que J1 e J2 escolhem suas ações independentemente da escolha do outro da seguinte forma: J1 escolhe uma linha da matriz A_1; J2 escolhe uma coluna em A_2, as escolhas ocorrem simultaneamente. O resultado é a função utilidade aplicada sobre a intersecção da linha escolhida por J1 e da coluna J2.

Nesse contexto tem-se que as estratégias que podem ser utilizadas por J1 e J2 são escolha entre as linhas para J1 e escolha de colunas para J2 ou $C_1 = \{linha1, linha2, linha3\}$ e $C_2 = \{coluna1, coluna2, coluna3\}$.

A figura 3.2 mostra o modelo para uma só fase, na figura 3.3 mostra as 6 fases pelo qual J1 deverá passar.

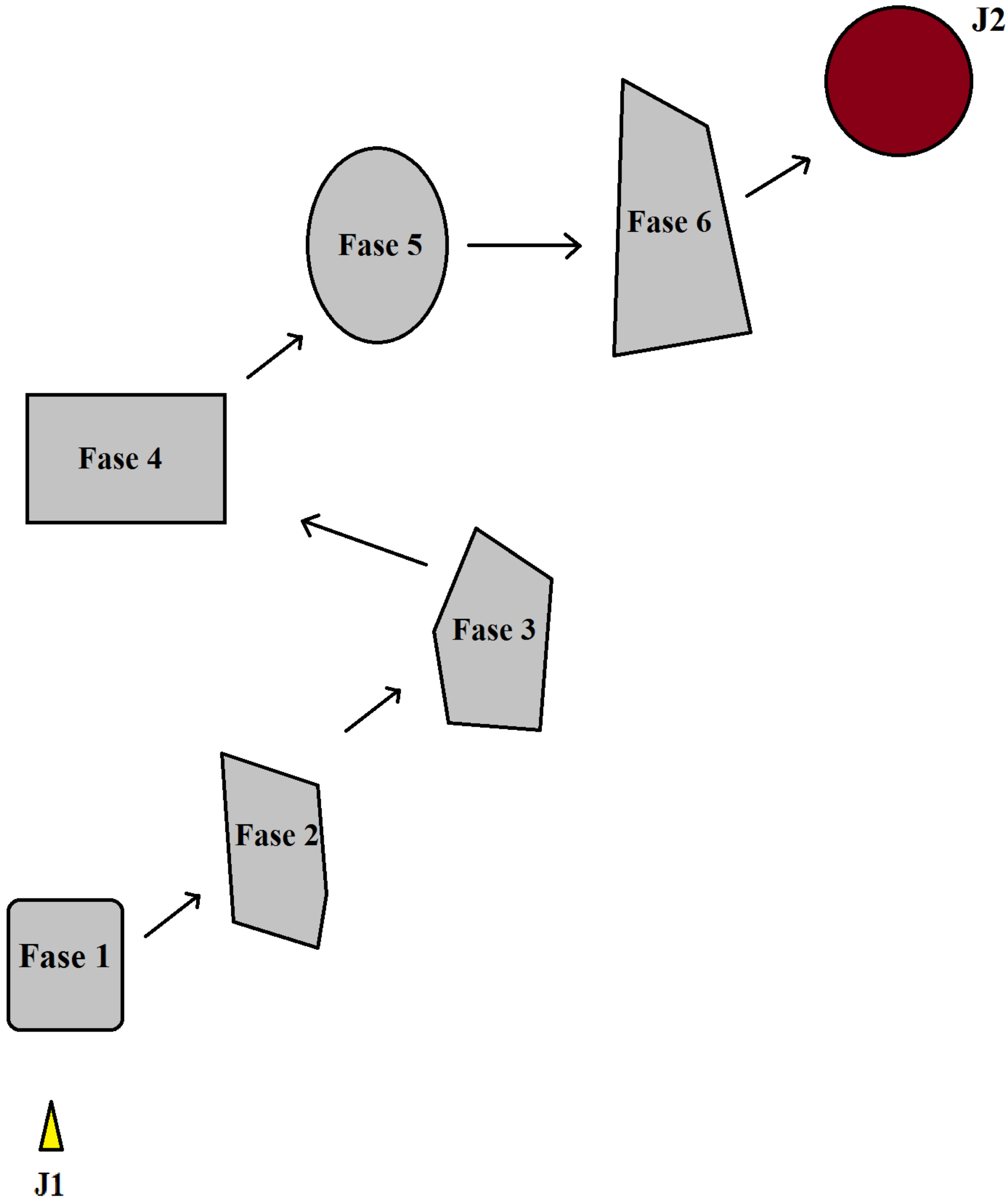

Figura 3.3: Espaço S(Autoria própria)

Finalizando o modelo tem-se que a geração das matrizes ocorre de forma aleatória, segundo alguns critérios iniciais e secundários, são eles:

São critérios iniciais:

- As primeiras matrizes para J1 e J2 são geradas aleatoriamente;

- Caso J1 seja derrotado na fase 1, ou em qualquer outra fase, a comparação cessa e é exibida a mensagem de vitória para J2;
- Caso J1 seja vitorioso na fase 1, ele passa para a fase 2 e assim por diante, sua matriz A_1 será mantida fixa;
- Na vitória do J1 para a fase 1 e demais fases, será gerada uma nova matriz para J2 para cada fase;
- Todas as matrizes serão geradas segundo uma distribuição de probabilidade(Uniforme, Poisson e outras não comuns definidas abaixo).

São critérios secundários:

- Empate na função utilidade, não será sendo considerado vitória para nenhum dos jogadores;
- J1 só será considerado vitorioso, caso passe pelas seis fases.

3.2 Algoritmo Baseado em IESD

Ao cenário descrito em 3.1 aplica-se a teoria descrita em 2.1.1, especificamente a estratégia IESD através da construção de um algoritmo para com a finalidade de resolver a competição por meio dessa estratégia.

A estratégia IESD funciona em etapas de comparação e eliminação. Uma vez definidas as matrizes A_1 e A_2, a função utilidade u_i é responsável por combina-las nos subespaços conforme figura 3.2.

De posse desta configuração, neste trabalho serão implementadas etapas de comparações e eliminações. Nas etapas de comparação, duas matrizes auxiliares são criadas e as quais terão seus elementos compostos por 0 ou 1 da seguinte forma:

$$matriz1[i][j] = 1$$

, se $a_j > b_j$, e

$$matriz1[i][j] = 0,$$

caso contrário. Enquanto

$$matriz1[i][j] = 1,$$

se $a_j < b_j$ e

$$matriz1[i][j] = 0$$

caso contrário. Em resumo as matrizes $matriz1$ e $matriz2$ investigam quais linhas para J1 e quais colunas para J2, são mais vantajosas.

Nas etapas de eliminação são eliminadas linhas ou colunas nas matrizes A_i e ocorrem conforme os dados obtidos em $matriz1$ e $matriz2$.

Primeiro verifica-se em quais linhas J1 tem mais opções de vitórias. As células de $matriz1$ que são iguais a 1 representam os estados em que J1 vence, enquanto as células que são iguais a 0 são os estados em que J1 perde. Somando-se os elementos de cada linha, podemos saber quais linhas tem mais vitórias para J1, em seguida elimina-se a linha que tiver menos ou nenhuma vitória.

Verificações para $matriz1$

- Se a soma das linhas de $matriz1[i]$ forem iguais, nenhuma linha é eliminada;
- Se a soma das linhas de $matriz1[i]$ forem diferentes entre si, a linha que tiver menor soma será eliminada;
- Caso duas linhas em $matriz1[i]$ tenha soma igual mas menor que a terceira, as duas com soma inferior serão eliminadas;
- Caso duas linhas em $matriz1[i]$ tenha soma igual, e maior que a terceira, esta terceira linha será eliminada;
- Caso todos os elementos de $matriz1$ sejam iguais a 1, a vitória é automaticamente atribuída a J1.

Verificações para $matriz2$

- Se a soma das colunas de $matriz2[i]$ forem iguais, nenhuma coluna é eliminada;
- Se a soma das colunas de $matriz2[i]$ forem diferentes entre si, a coluna que tiver menor soma será eliminada;
- Caso duas colunas em $matriz2[i]$ tenha soma igual mas menor que a terceira, as duas com soma inferior serão eliminadas;
- Caso duas colunas em $matriz2[i]$ tenha soma igual, e maior que a terceira, esta terceira coluna será eliminada;
- Caso todos os elementos de $matriz2$ sejam iguais a 1, a vitória é automaticamente atribuída a J2.

Essa rotina se desenrola em etapas sucessivas e iteradas conforme segue:

- 1) Gerar $matriz1$;
- 2) Se não houver vencedor definido, eliminar linha, caso permitido;
- 3) Exibir $c1$ e $c2$ que são as matrizes A_i após etapas 1 e 2 anteriores;

- 4) Gerar $matriz2$ aplicado a $c1$ e $c2$;
- 5) Se não houver vencedor definido, eliminar coluna caso permitido;
- 6) Exibir $c1$ e $c2$ que são as matrizes A_i após etapas 4 e 5 anteriores;
- 7) Repetir processo caso não haja vencedor definido;

Escrevendo as etapas acima descritas em forma de algoritmo, tem-se o funcionamento por meio de várias funções. A exemplo, tem-se que as funções $matriz1(f, f1, f2)$ e $matriz2(e, e1, e2)$ que criam novas matrizes para J1 e J2 já com as eliminações de linhas e colunas que representam estratégias dominadas.

As funções $vrow(xxx)$ e $vcol(xxx)2$ criam listas que indicam respectivamente quais linhas e colunas devem permanecer e quais devem ser excluídas. Uma ressalva é que neste trabalho não se segue estritamente a eliminação iterada, o algoritmo elimina linhas e/ou colunas que tem o mesmo nível de desvantagem para J1 e J2.

Caso duas linhas ou colunas escolhidas possua o mesmo nível de desvantagem, então ambas serão eliminadas.

As principais funções utilizadas no algoritmo seguem abaixo:

Algoritmo 1: Algoritmo IESD2

```
Entrada: A_1,A_2,Vitória = 0
Saída: Vitória para: J1, J2 ou sem solução única por IESD
início
    c1 = A1;
    c2 = A2;
    enquanto Vitória = 0 faça
        xxx = gol(visãoJ1)(c1, c2);
        xxx2 = gol2(visãoJ2)(c1, c2);
        Vitória pode assumir um dos valores (J1, J2, sem solução única por
        IESD);
        if Vitória = 0 then
            t1,List1 = vrow(xxx);
            t2,List2 = vcol(xxx2);
            c1 = matriz1(A_1,A_2);
            c2 = matriz1(A_1,A_2);
            xxx = gol(visãoJ1)(c1, c2);
            xxx2 = gol2(visãoJ2)(c1, c2);
            Vitória pode assumir um dos valores (J1, J2, sem solução única
            por IESD);
            if Vitória = 0 then
                t1,List1 = vrow(xxx);
                t2,List2 = vcol(xxx2);
                c1 = matriz2(A_1,A_2);
                c2 = matriz2(A_1,A_2);
                xxx = gol(visãoJ1)(c1, c2);
                xxx2 = gol2(visãoJ2)(c1, c2);
                Vitória pode assumir um dos valores (J1, J2, sem solução
                única por IESD);
    fim
fim
```

Algoritmo 2: gol

```
Entrada: p,pp
Saída: xxx
início
    xxx = matriz de mesmo tamanho que p;
    para j até o número de colunas de p faça
        para i até número de linhas de p faça
            if p[i] > pp[i] then
                xxx[i][j] = 1
            else
                xxx[i][j] = 0
            end
        fim
    fim
fim
```

Algoritmo 3: gol2

```
Entrada: p,pp
Saída: xxx2
início
    xxx2 = matriz de mesmo tamanho que p;
    para j até o número de colunas de p faça
        para i até número de linhas de p faça
            if p[i] < pp[i] then
                xxx2[i][j] = 1
            else
                xxx2[i][j] = 0
            end
        fim
    fim
fim
```

Algoritmo 4: vrow

```
Entrada: xxx
Saída: t1,List1
início
    1-Verificação de quais linhas serão eliminadas t1 = pode receber um dos
    valores (0,1,2,3);
    List1 = tem tamanho do número de linhas de xxx, e recebe valores
    (0,1), 0 indicando que a respectiva linha será eliminada, e 1 indicando
    que não será eliminada;
fim
```

Algoritmo 5: vcol

Entrada: xxx2
Saída: t2,List2
início
  2-Verificação de quais colunas serão eliminadas t2 = pode receber um dos valores (0,1,2,3);
  List2 = tem tamanho do número de colunas de xxx2, e recebe valores (0,1), 0 indicando que a respectiva coluna será eliminada, e 1 indicando que não será eliminada;
fim

Algoritmo 6: Matriz1

```
Entrada: f,f1,f2
Saída: c1
início
    ff = gol(f1,f2);
    t1,List1 = vrow(ff);
    para i até t1 faça
        if List1[i]== 0 then
            Pule a linha;
        else
            linhha c1[i] = linha f1[i];
        end
    fim
fim
```

Algoritmo 7: Matriz2

```
Entrada: e,e1,e2
Saída: c2
início
    ee = gol(e1,e2);
    t2,List2 = gol2;
    para i até t2 faça
        if List2[i]== 0 then
            Pule a coluna;
        else
            coluna c2[i] = coluna e1[i];
        end
    fim
fim
```

Todo o processamento de verificação e escolha das linhas e colunas é realizado dentro de uma função chamada *domain*, que é esta representada pelo algoritmo domain 1 responsável por realizar todas as verificações e chamadas das funções vistas nos algoritmos 6, 7, 4 e 5, as eliminações também são feitas dentro dessa função e o que se tem como resultado final serão matrizes $c1$ e $c2$, que são as matrizes resultantes do processo de eliminação.

Por último tem-se que a função *domain* acessada por meio de outra função chamada *result* que é a responsável pelo teste em si, recebendo as matrizes, aplicando a função *domain* cujo resultado são matrizes $c1$ e $c2$, e executando o teste final que indicará se há um vencedor através da IESD modificada. Os resultados finais da *result* podem ser um entre os três:

- "Victory for J1"
- "Victory for J2"
- "Not unique solution"

Este último item representa uma ressalva, pois nem sempre a IESD pode indicar um vencedor, neste caso o resultado será "sem solução única", e quando é possível através dessa estratégia dizer quem será o vencedor, dizemos que é solucionável por dominância conforme 2.1.5

A construção passou por muitos testes de calibração. Cerca de 200 milhões de simulações automáticas foram efetuados objetivando verificar o número de vitórias, derrotas e impossibilidade de obtenção de solução única por IESD. Além destes, foram efetuados 340 testes com comparação manual para se verificar se o resultado exibido estava condizente com com o resultado correto ao se solucionar manualmente.

Tabela 3.1: Testes Manuais

Teste efetuado	Quantidade	Erros	Acertos
Vitórias para J1	120	8	112
Vitórias para J2	110	6	104
Teste sem solução única	110	6	104

Os resultados que representaram erros no algoritmo tiveram suas matrizes para J1 e J2 armazenadas e serviram para corrigir eventuais situações onde o algoritmo não estava preparado para lidar, após cada alteração decorrente de alguns desse erros, todas as situações de erros armazenadas como erros eram repassadas.

3.3 Definição dos modelos de competição para serem resolvidos pelo algoritmo IESD

Os modelos criados seguem o que foi definido no item 3.1 em 3.1. Foram gerados utilizando variáveis aleatórias para escolher os elementos das matrizes que representam as ações de J1 e J2. Serão chamados de casos numerados conforme abaixo.

- 1.0) A_1 e A_2 se distribuem conforme uma variável aleatória uniforme [1,10];
- 1.1) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,11];
- 1.2) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,12];
- 1.3) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,13];
- 1.4) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,14];
- 1.5) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,15];
- 1.6) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,16];
- 1.7) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,17];
- 1.8) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,18];
- 1.9) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,19];
- 2.1) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória de poisson com parâmetro lambda [0.5, 1,0, 1.5, 2.0, 2.5];
- 2.2) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória de poisson com parâmetro lambda [0.5, 1,0, 1.5, 2.0, 2.5] e A_2 uma variável aleatória uniforme J2|J1 se distribui como Uniforme [1-(2J1-1)];

- Extra) Cada fase passada por J1, aumenta a dificuldade para que o mesmo vença novamente. A dificuldade foi elevada fazendo com que as células J2 vencidas por J1, serão re-sorteadas seguindo a fórmula $a_j/2$ até o final da distribuição, ex: caso esteja em uma distribuição (1,10), e na primeira fase em um determinado elemento de J2 $a_j = 6$ e neste elemento J2 perderia para J1, então na próxima fase será sorteado entre 3 e 10.

3.4 Ambiente de testes

Em todas as simulações computacionais e construção de gráficos foi utilizado a linguagem de programação Python em sua versão 2.7 através do IDLE (Ambiente de desenvolvimento integrado para python) Spyder versão 2.3.5.2.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Segue abaixo tabelas exibindo os dados sobre as vitórias para J1 em cada caso, uma tabela mais abrangente contendo todos os dados obtidos estará presente nos apêndices.[1]:

Tabela 4.1: Resultados Caso 1: Autoria própria

Nº Simul.	Casos 1									
	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
1000	22	7	2	0	0	0	0	0	0	0
2000	40	13	1	0	0	0	0	0	0	0
3000	59	11	3	1	1	0	0	0	0	0
4000	81	22	3	1	0	0	0	0	0	0
5000	90	21	13	1	0	1	0	0	0	0
10000	181	51	17	5	0	0	0	0	0	0
20000	288	105	30	9	1	2	0	0	0	0
30000	601	161	50	8	7	4	0	1	0	0
40000	754	198	59	24	7	2	1	1	0	0
50000	933	283	90	24	7	2	1	0	0	0
100000	1904	523	152	49	6	4	4	1	0	0
200000	3830	1046	343	96	32	8	3	3	0	0
300000	5945	1563	493	160	30	17	3	0	0	0
400000	7714	2156	614	178	58	19	7	2	0	0
500000	9610	2716	726	214	84	20	8	2	0	2
1E+06	19353	5316	1505	471	144	45	13	7	1	0

[1]A coluna resultados são relativos a J1: Vitória na 6 fases para J1; Derrota em qualquer fase para J1; Derrota 1 a Derrota 6, seriam em qual fase J1 é derrotado.

Tabela 4.2: Resultados Caso 2.1:Autoria própria

Caso 2.1					
Nº Simul.	Lambda				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
1000	988	939	864	780	648
2000	1978	1915	1731	1474	1264
3000	2972	2823	2595	2317	1848
4000	3966	3799	3502	3074	2542
5000	4951	4757	4368	3841	3128
10000	9894	9511	8717	7637	6333
20000	19781	18977	17507	15310	12619
30000	29711	28510	26192	22969	18898
40000	39581	38007	35020	30588	25227
50000	49507	47516	43744	38377	31630
100000	98997	95002	87443	76909	63544
200000	197950	190074	174711	153238	126743
300000	297057	285011	262259	229229	189962
400000	396092	379818	349376	305921	253843
500000	495013	474669	436851	382704	316631
1000000	990036	949718	873285	764433	633372

Tabela 4.3: Resultados Caso 2.2:Autoria própria

Caso 2.2					
Nº Simul.	Lambda				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
1000	0	0	0	0	0
2000	0	0	0	0	0
3000	0	0	0	0	0
4000	0	0	0	0	0
5000	0	0	0	0	0
10000	0	0	0	0	0
20000	0	0	0	0	0
30000	0	0	0	0	1
40000	0	0	0	0	0
50000	0	0	0	0	1
100000	0	0	0	0	1
200000	0	0	0	1	0
300000	0	0	0	1	1
400000	0	0	0	0	3
500000	0	0	0	0	2
1000000	0	0	0	7	2

Tabela 4.4: Resultados Caso Extra: Autoria própria

Nº Simul.	Distribuição J2, ocorrendo entre aj/2 e:						
	10	11	12	13	14	15	16
1000	13	0	0	0	0	0	0
2000	19	1	1	0	0	0	0
3000	17	3	0	0	0	0	0
4000	26	9	2	0	0	0	0
5000	34	8	0	0	0	0	0
10000	67	19	3	2	0	0	0
20000	134	32	4	2	1	0	0
30000	224	36	14	5	2	0	0
40000	274	63	17	5	1	0	0
50000	357	48	16	2	1	0	0
100000	684	153	27	6	4	2	0
200000	1378	309	76	10	3	2	0
300000	2052	449	78	20	5	4	0
400000	2704	563	119	36	4	3	0
500000	3499	766	149	34	11	5	0
1000000	6833	1417	309	89	22	11	3

Na tabela Caso 1 4.1 tem-se uma amostra desses resultados, pode-se observar que para o caso (1.0) a quantidade de vitórias nas 6 fases fica na casa de 2% independente da quantidade de simulações Mais abaixo veremos que para essa distribuição a maior probabilidade de vitória foi de 0,0677%, que é bem menor que a taxa de vitórias obtidas, nos demais casos as taxas permanecem maiores que a maior probabilidade de vitória, essas diferenças serão melhor abordadas na seção de discussões.

Também sobre os casos (2.1) e (2.2) pode-se co-relacionar as respectivas diminuições e elevações dos números de vitórias analisando a probabilidade de ocorrência na escolha dos elementos das matrizes que utilizam uma distribuição conforme variável aleatória de Poisson.

Em todos os casos as células em amarelo representam as simulações onde houveram vitórias para J1 nas seis fases.

4.1 Discussões

As simulações para os casos 1 e todos os seus sub-casos serão discutidas utilizando gráficos que apresentam todos casos. Essas simulações seguem um mesmo modelo de escolha para os elementos de A_i e A_j, mas enquanto em A_i, a distribuição mantém-se inalterada, nos sub-casos (1.1) a (1.9), a distribuição para A_j é diferente em cada sub-caso, aumentando o grupo de escolhas para os elementos de A_j. E segundo os resultados tem-se que a quantidade de vitórias nas 6 fases para A_i diminui conforme a distribuição A_j tem seus parâmetro de escolha aumentado, o que era um comportamento esperado.

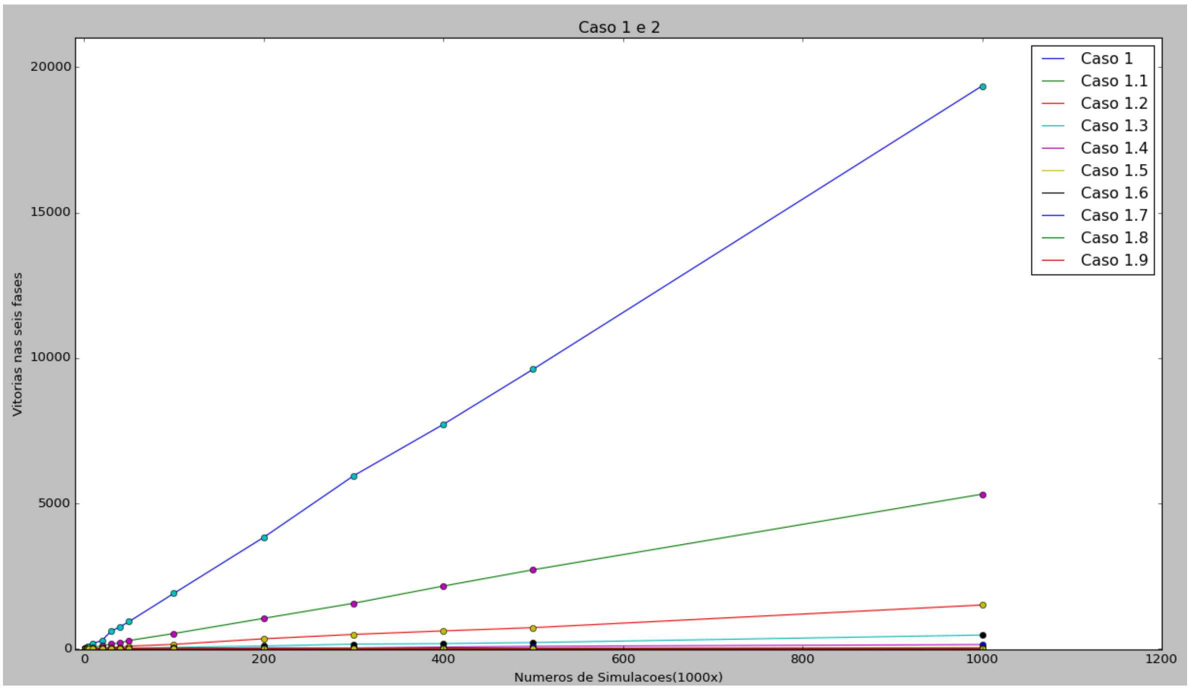

Figura 4.1: Tendências para caso 1(Autoria própria)

Na figura caso 1.0, ao analisar somente um sub caso, que no gráfico é representado por uma das retas, pode-se notar que existe um crescimento com tendência linear do número de vitórias nas 6 fases conforme o números de simulações aumenta, e mesmo que esse comportamento se mantenha conforme muda a distribuição para A_j, ou seja, passado de caso para caso, tem-se também que o número de vitórias cai à medida que A_j pode receber elementos com valores maiores. Nas figuras 4.2 e 4.3 tem-se uma ampliação da figura 4.1 para um intervalo próximo e menor que 500 mil simulações, e nota-se que para o caso em que A_j se distribui conforme uma variável uniforme[(1,16),(1,17),(1,18),(1,19)] representado pelos casos de 1.6 a 1.9, a inclinação está muito menos acentuada com relação no número de vitórias para as 6 fases conforme aumenta o número de simulações.

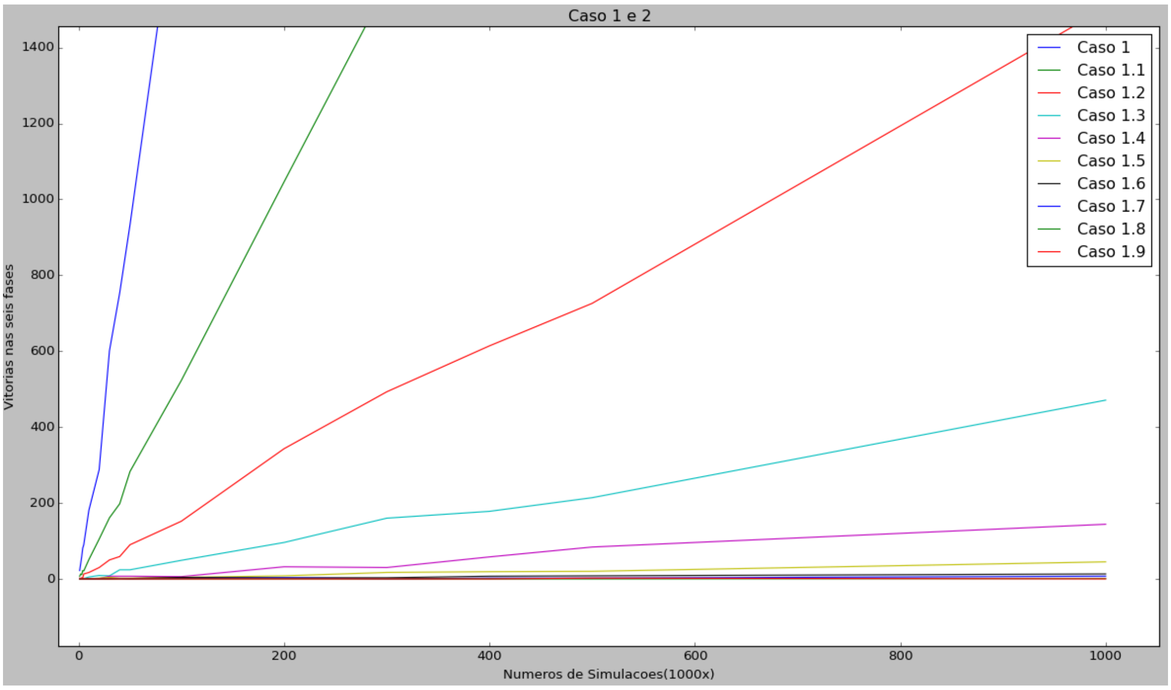

Figura 4.2: Gráfico do Caso 1 ampliado Versão 1(Autoria própria)

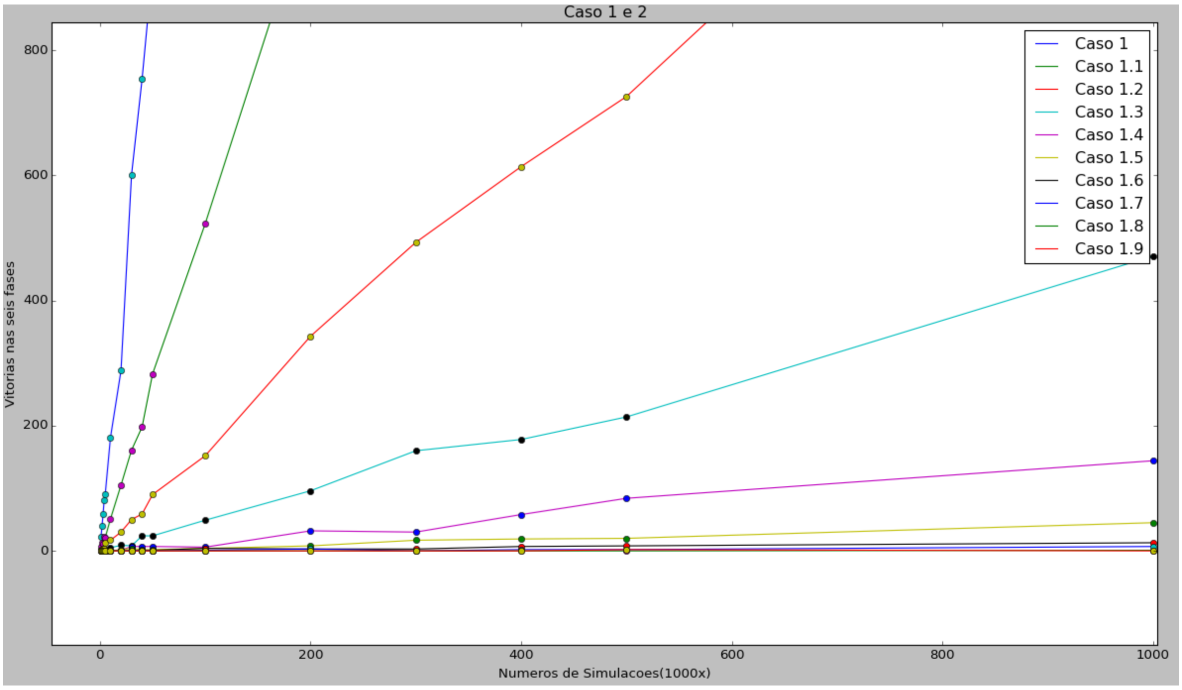

Figura 4.3: Gráfico do Caso 1 ampliado - Versão 2(Autoria própria)

Por fim para os casos 1 e 2 temos 2 gráficos dos mesmos dados mas de ângulos diferentes acerca desses dados nas figuras 4.4 e 4.5 que junto com a figura 4.6 mostram uma tendência de decrescimento semelhante a uma função exponencial.

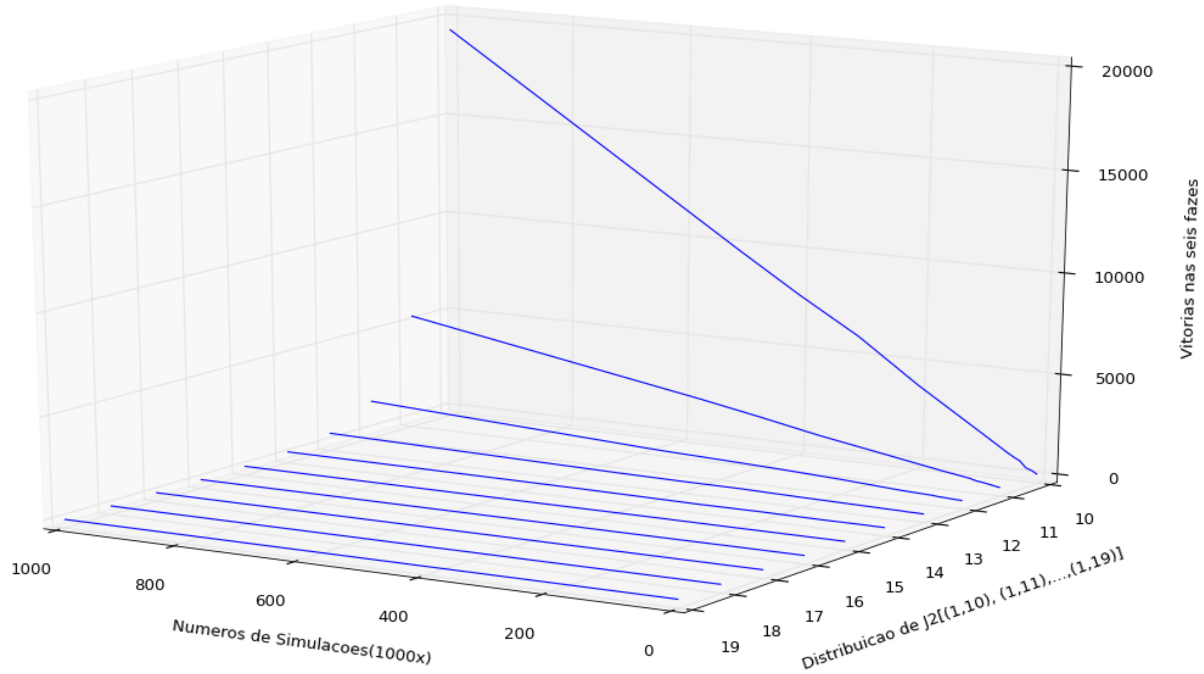

Figura 4.4: Gráfico do Caso 1-3D Versão 1(Autoria própria)

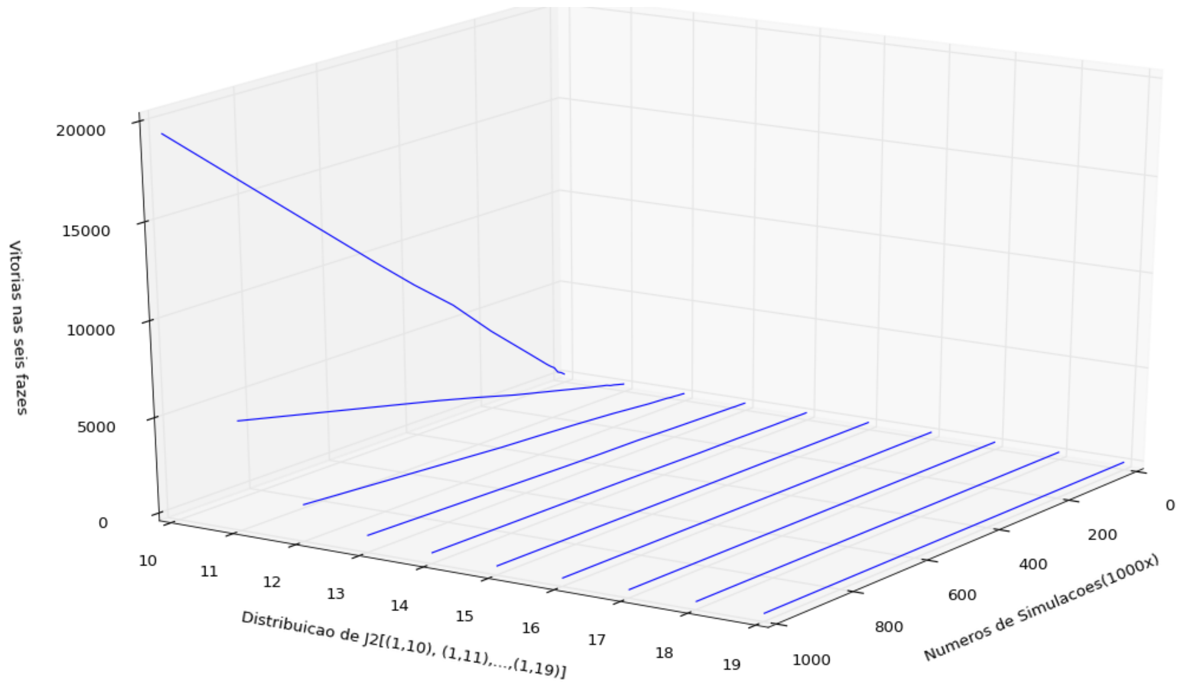

Figura 4.5: Gráfico do Caso 1-3D versão 2(Autoria própria)

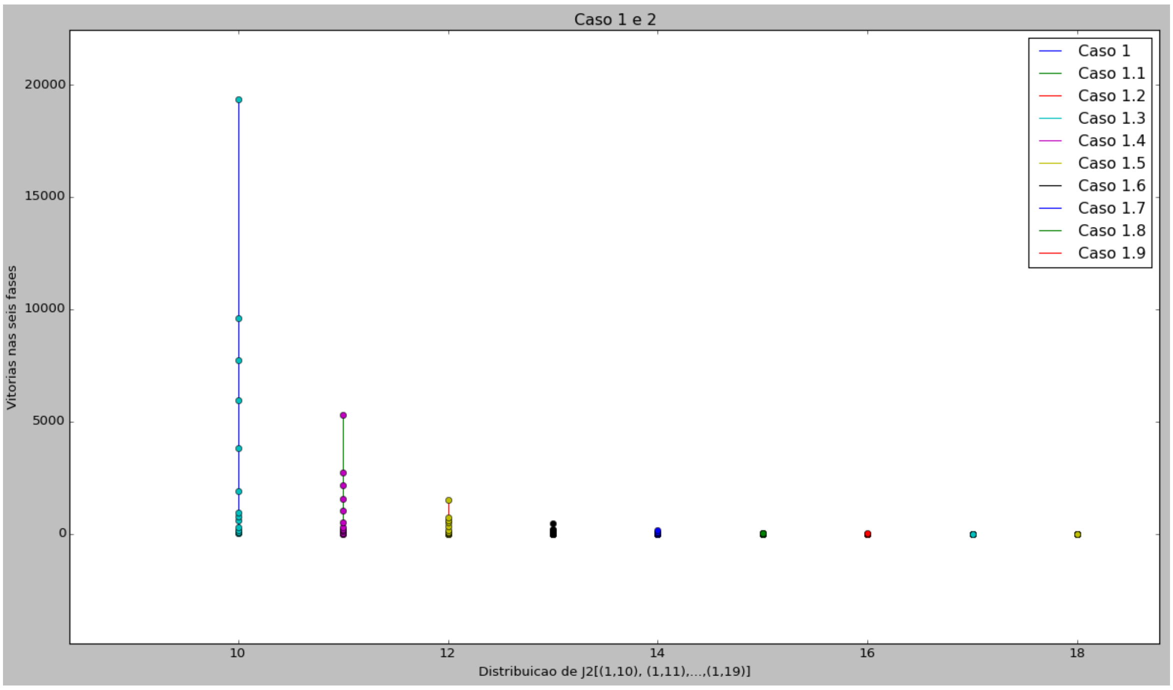

Figura 4.6: Gráfico do Caso 1 - Versão 2(Autoria própria)

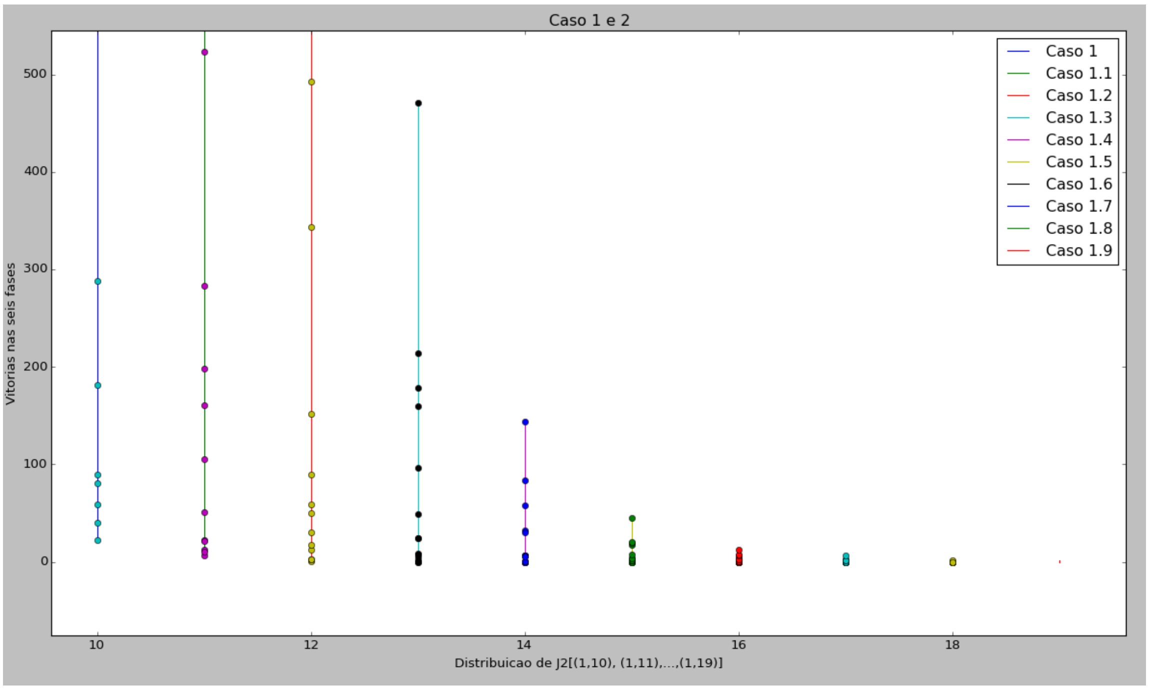

Figura 4.7: Gráfico do Caso 1 - Versão 2 Ampliado(Autoria própria)

Ainda para o caso 1 que contempla os 10 sub-casos acima descritos, paralelamente calcularam-se também as medidas de probabilidade para J1 vencer nas 6 fases sem a utilização da IESD que podem ser verificadas em A.6, esta tabela não contempla todas as medidas observadas, mas o máximo para cada caso/(número de simulações). Essa medida de probabilidade foi comparada à taxa de vitórias para cada caso/(número de simulações) que pode ser observado em A.5.

Logo observou-se que existem 59 situações[2] em que a taxa de vitórias para J1 nas seis fases superaram a probabilidade de vitória para para aquela mesma situação e 42 situações em que a taxa de vitórias foi superada pela probabilidade de vitórias sem o uso de IESD. Essas situações com a taxa de vitória foi melhor são as células sombreadas na tabela A.5. Além disso, essa superioridade se concentra no primeiro terço da tabela A.5. Nessas tabelas A.5 e A.6 as células vazias representam as situações onde não foram registradas vitórias para J1.

As simulações efetuadas conforme modelo descrito no caso 2.1 apresentam um elevado número de vitórias para J1 para pequenos valores de λ e diminuem conforme o valor de lambda aumenta. Para investigar tais números de vitórias, calcula-se para $lambda = 0.5$ a probabilidade de $a_j > 5$ que seria de 0.0000141649373223. As demais probabilidades para todos os valores de λ podem ser vistos na tabela abaixo:

	Lambda(λ)				
$\mathbb{P}(A > a)$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
a = 2	0.0143876	0.0803013	0.191153	0.3233235	0.456186
a = 3	0.00175162	0.0189881	0.0656424	0.1428765	0.2424238
a = 4	0.00017211	0.00365984	0.018575	0.0526530	0.108821
a = 5	0.000014164	0.00059418	0.004455	0.0165636	0.042021

Tabela 4.5: Tabela de probabilidades para λ diferentes(Autoria própria)

A tabela 4.5 mostra a chance que os elementos da matriz que utiliza essas distribuição tem de assumir certos valores. Por exemplo, para $\lambda = 1.0$ e a = 4, a chance de que um elemento dessa matriz possa assumir valores acima de 4 é de 0.00365984, ou seja, uma probabilidade de apenas 0.365984%.

Pode-se ver que conforme o valor de λ cresce também aumentaram as chances dos elementos de A_j assumirem valores mais altos, fato que explica o porquê da diminuição do número de vitórias de A_i. Uma outra maneira de observar esse comportamento segue nos gráficos abaixo.

No gráfico 4.8 permite-se notar que o aumento do lambda faz com que o número de vitórias de J1, pelo menos numa primeira impressão, caia linearmente no decorrer das 6 fases conforme o λ aumenta.

[2]considere situação um caso com uma determinada distribuição para J2 versus um número de simulações, ex: Situação 1:J2(1,10) e 1000 simulações; Situação 2:J2(1,10) e 2000 simulações, e assim por diante...

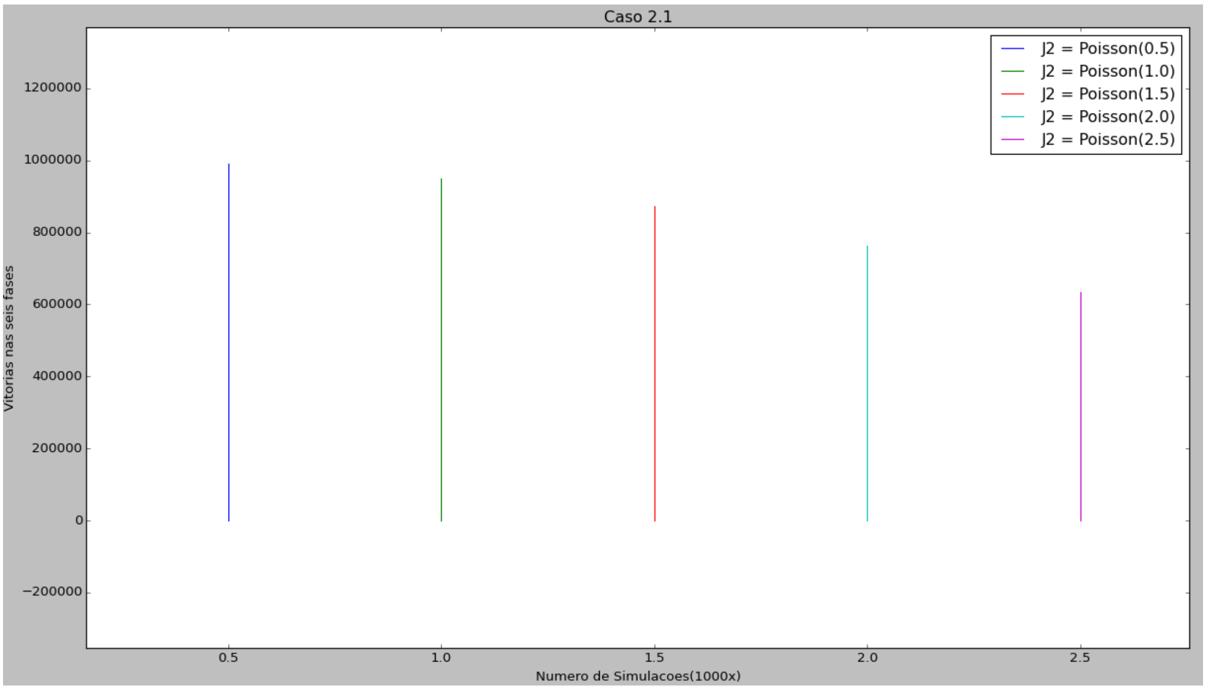

Figura 4.8: Tendências para caso 2.1(Autoria própria)

Já no gráfico 4.9, nota-se que, comparadas dentro das mesmas distribuições, à medida que o número de simulações aumentam, as vitórias para J1 aumentam linearmente. Uma noção mais abrangente contendo tanto o lambda quanto o número de simulações pode ser vista em 4.10

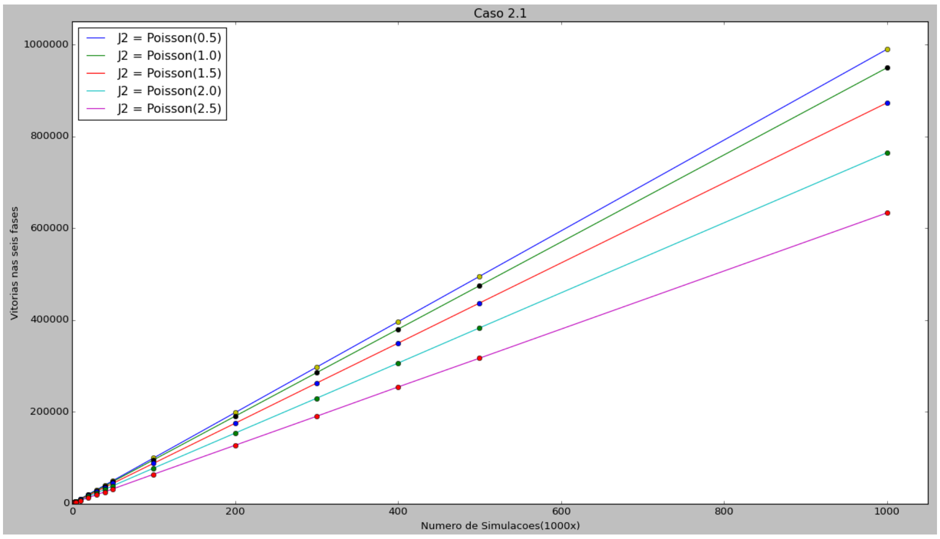

Figura 4.9: Tendências para caso 2.1(Autoria própria)

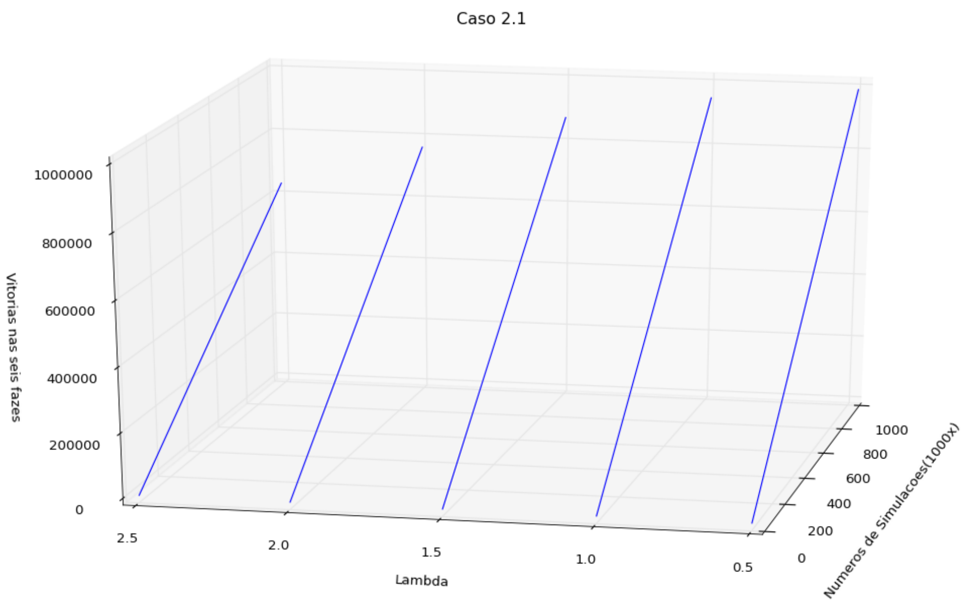

Figura 4.10: Tendências para caso 2.1-3D(Autoria própria)

Para o caso 2.2, tem-se uma perspectiva invertida do caso 2.1, mas com algumas ressalvas. No geral devido a que agora é A_i quem se distribui num modelo de Poisson, e conforme os valores de λ aumentam, as vitórias para J1 aumentam, apesar de que pela natureza de como se distribui A_j o número de vitórias para A_i aumenta, mas sem um padrão claro comparando com o casos 1.

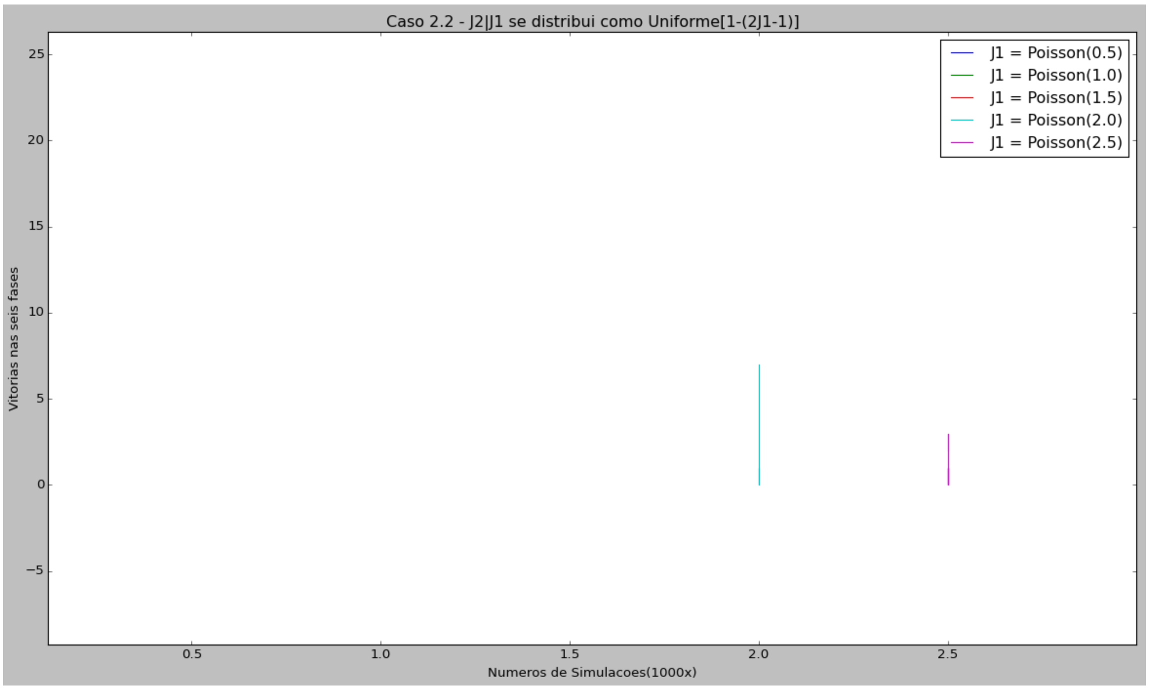

Figura 4.11: Tendências para caso 2.2 - versão 1(Autoria própria)

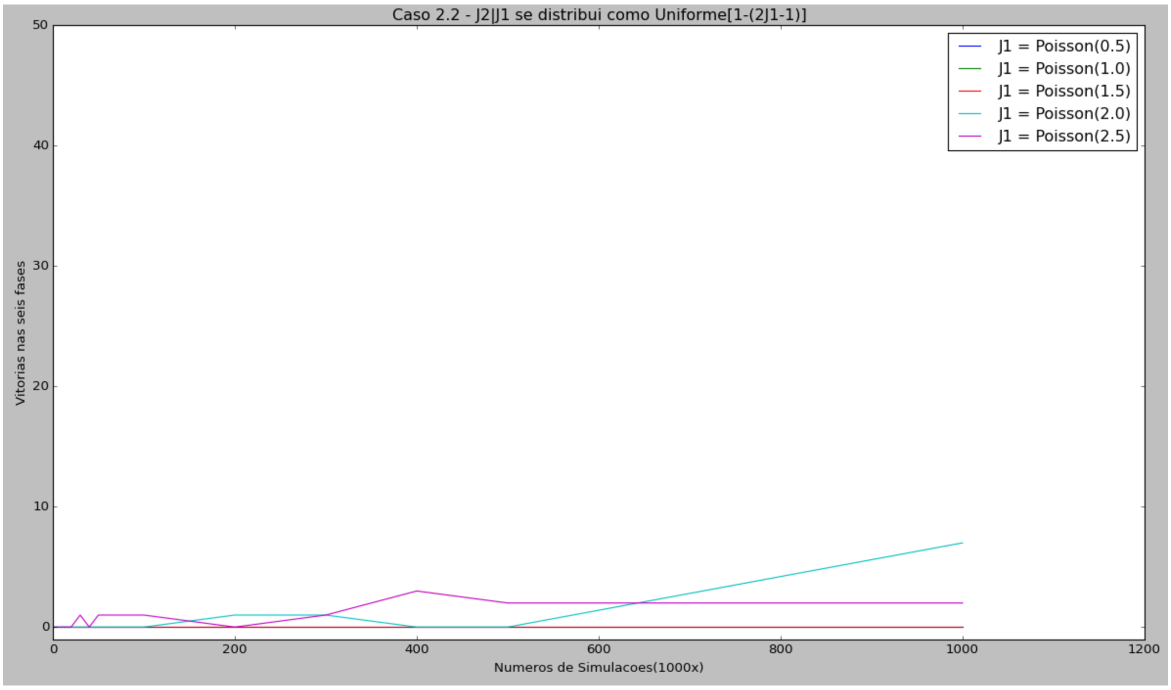

Figura 4.12: Tendências para caso 2.2 - versão 2(Autoria própria)

Nota-se no gráfico mostrado na figura 4.12 que as linhas das várias simulações se interceptam em alguns pontos, demonstrando um comportamento mais caótico se comparado ao dos modelos adotado nos casos anteriores. Já que os valores para as células de A_j são escolhidos de um grupo de valores que não contém os valores das células de A_i. E isso ocorre célula a célula entre as matrizes, temos aqui duas aleatoriedades agindo. Primeiro, a escolha aleatória da célula $a_i \in A_i$, e então, a célula a_j será escolhida a partir de um conjunto cuja formação depende do valor de a_i, mas qu não contém a_i. Nota-se ainda no mesmo gráfico e também num outro gráfico 4.13, que até o número de 500 mil simulações, percebe-se várias subidas e descidas, este comportamento é melhor observado pois tem uma discretização maior para o número de simulações efetuadas de 0 a 500 mil simulações, que são 15 no total. E para entre 500 mil e 1 milhão de simulações, este comportamento parece linear, mas as intersecções observadas na faixa entre mil e 500 mil simulações parecem indicar que devem ter comportamento diferente do linear.

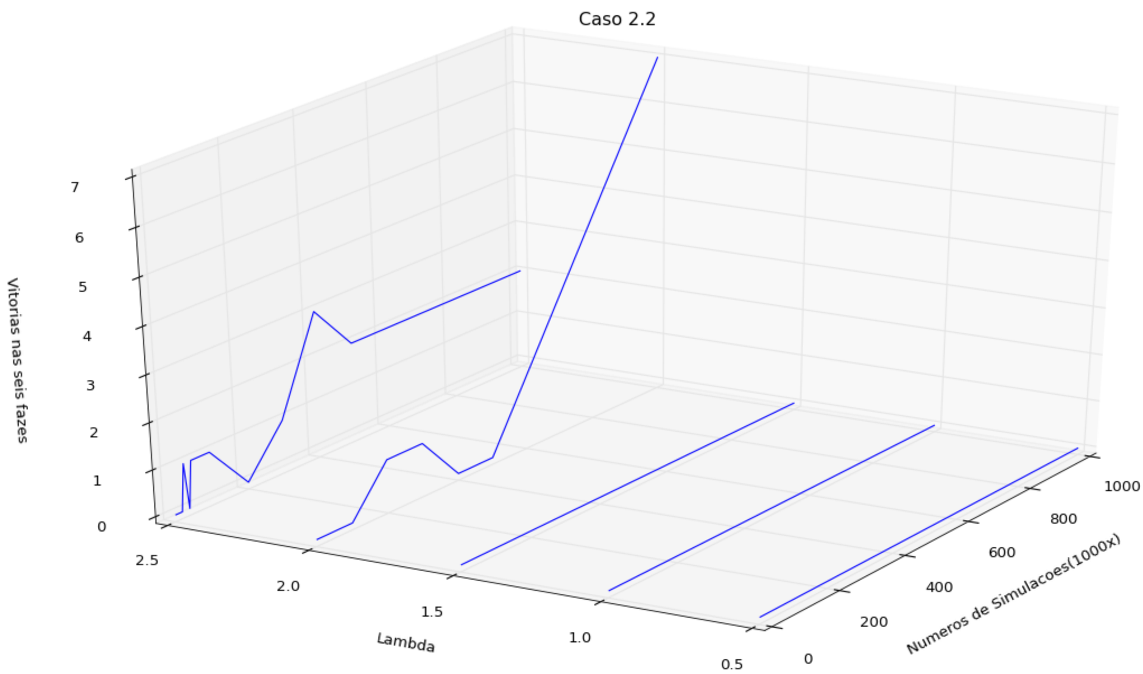

Figura 4.13: Tendências para caso 2.2-Versão 3D(Autoria própria)

Para o caso extra conforme dados exibidos em ??, ocorrem as mesmas tendências que no caso 1. Tem-se um número baixo de vitórias para J1, que vão crescendo conforme o número de simulações aumentam e diminuem significativamente conforme a distribuição para J2 também aumenta. Suas taxas de vitória estão em torno de 0,70% por cento, em relação a quantidade de simulações.

Capítulo 5

Conclusões

Os artigos com temas semelhantes e a própria literatura parece subestimar ou dar pouca importância para uma solução por eliminação de estratégias dominadas. Em parte isso ocorre por haver pouca aplicabilidade direta neste tipo de solução e também pelo motivo de que uma grande parte dos problemas reais, principalmente em economia, não se limitar a competição entre dois jogadores com objetivo final de alguém vencer.

Uma parte considerável dos modelos e soluções propostas utilizando teoria dos jogos visam tentar dar ao tomador de decisões opções para subsidiar decisões que em sua maioria podem ter consequências severas. Para o tomador de decisões, uma visão concreta ou mesmo uma antecipação dessas consequências pode representar uma enorme vantagem competitiva, seja na decisão sobre investimentos, qual rota uma transportadora deve adotar ou mesmo escolher o canto para se cobrar pênaltis ou arremessar bolas de baseball.

As simulações efetuadas utilizando estratégias IESD, se mostram vantajosas a escolha livre de estratégias para alguns casos e outros não. À medida que aumentamos o número de simulações, o número de vitórias nas 6 fases para J1, segue aumentando também de forma consistente nos casos 1 e mesmo nos desvantajosos casos 2.2 e no caso extra **??**. Esse aumento pode ser observado sempre quando compara-se o número de vitórias numa mesma distribuição. Apesar disso, o cruzamento das tabelas A.6 e A.5 trouxe uma nova perspectiva desses resultados, pois mesmo que numa mesma distribuição as vitórias aumentem, nem sempre isso pode ser considerado uma vantagem, pois essa comparação trouxe a informação que para algumas situações a taxa de sucesso encontrada foi muito inferior que a probabilidade de J1 vencer com escolhas aleatórias.

Portanto, os resultados acerca da utilização da IESD ou Eliminação iterada de estratégias ou ações dominadas nos indicam e corroboram a ideia inicial de que, dependendo do modelo adotado, do problema e objetivos definidos e da abordagem escolhida, esta opção pode ser bastante vantajosa, principalmente porque sua implementação computacional requerer quase que ao todo de comparações, o que pode representar uma menor complexidade do algoritmo.

Estudo sobre a complexidade do algoritmo implementado é a primeira sugestão para trabalhos futuros, bem como comparação dos mesmos modelos aqui simulados com outras estratégias envolvendo Probabilidade e Teoria dos Jogos.

As aplicações podem parecer limitadas num primeiro momento, mas com uma abordagem criativa, pode-se adaptar diversos problemas para serem resolvidos através da IESD.

5.1 Aplicações

Fundos de Investimento

Um tomador de decisões deve escolher entre duas opções de carteiras de investimentos. Cada carteira de investimentos poderia ser representada por uma matriz cujos elementos poderiam representar as rentabilidades esperadas de seus ativos ou os riscos envolvidos ou algum parâmetro que dimensione a relação risco-rentabilidade, ou ainda alguma outra preferência do tomador de decisões.

Rotas de Entrega-Caixeiro Viajante

Um certa transportadora deve decidir onde instalar um novo depósito visando diminuir seus custos e o tempo de entrega para seus contratos. Ao comparar pontos geográficos diferentes, para cada ponto geográfico, poderia ser associada uma matriz cujos elementos seriam uma associação dos custos e tempos das entregas para algumas rotas chave. A comparação dessas matrizes para definir qual ponto geográfico seria mais vantajoso poderia ser efetuada mediante IESD.

Cobrança de Pênaltis-Baseball

Em esportes como futebol e baseball, tanto defensores quanto atacantes ou arressador-rebatedor, estudam as preferências e índices de eficiências dos seus rivais, para decidir onde mandar a bola, ou onde para defender ou rebater no caso do baseball, transformando essas estatísticas em uma representação por zona(do gol para o futebol ou da zona de strike para o baseball). A IESD poderia ser utilizada para tentar estimar uma preferência dos envolvidos, ou mesmo um sistema de fases com atualização dos elementos com base nos resultados anteriores, visando o sucesso dos enfrentadores.

Referências Bibliográficas

[1] GOMES, J. e VELHO L., Fundamentos da Computação Gráfica, Rio de Janeiro - RJ, IMPA, 2015;

[2] AZEVEDO, Eduardo e CONCI, Aura, Computação Gráfica: geração e imagens, Rio de Janeiro - RJ, Campus, 2003;

[3] VELHO, Luiz e CARVALHO, Paulo C. P., Mathematical Optimization in Graphics and Vision, Rio de Janeiro - RJ, IMPA, 2003;

[4] GOMES, J., COSTA, B., DARSA, L., VELHO, L., Graphical Objects, Rio de Janeiro - RJ, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1996;

[5] SHOEMAKE, Ken, Animating Rotation with Quaternion Curves, San Francisco - CA, SIGGRAPH, 1985;

[6] HAMILTON, Sir William Rowan, On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra, Philosophical Magazine XXV pp. 10-13, 1844;

[7] DURAND, Frédo, 3D Visibility: Analytical Study and Applications, Grenoble University - France, 1999;

[8] HaRARI, Yuval Noah, Sapiens - Uma breve história da humanidade, tradução Janaína Marcoantonio - 28º edição, Editora L&PM. Porto Alegre - RS, 2017;

[9] Kockesen, Levent e Ok, Efe A., An Introduction to Game Theory, Koc¸ University e New York University, 2007;

[10] Myerson, Roger B., An Introduction to Game Theory - Discussion Paper n. 623, Northwestern University, Illinois, 1984;

[11] Osborne, Martin j., An Introduction to Game Theory - Department of Economics, University of Toronto, Toronto, Canada, 2000;

[12] Ross, Sheldon, Probabilidade: Um Curso moderno com aplicações; tradutor: Alberto Resende De Conti. - 8ª Edição, Bookman, Porto Alegre-RS, 2010;

[13] James, Barry R., Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário, IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-RJ;

[14] Almeida, Alecsandra. Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos. UNIMESP, São Paulo, 2006;

[15] Gintis, Herbert. Game Theory Evolving: A problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interation. Princeton University Press, Princeton, New jersey, 2000;

[16] Batabyal, Amitrajet A. e Beladi, Hamid, Advertising and Competition for MarketShare between a New Good Producer and aRemanufacturer, German Economic Review, 2016;

[17] Sobel, Joel, Iterated weak dominance and interval-dominance supermodular games, Theoretical Economics, 2018;

[18] Souidi, Mohammed El Habib, e Piao, Songhao, A New Decentralized Approach of Multiagent Cooperative Pursuit Based on the Iterated Elimination of Dominated Strategies Model. Mathematical Problems in Engineering Volume 2016, Article ID 5192423, 2016;

[19] Borgers, Tilman. Iterated Elimination of Dominated Strategies in a Bertrand- Edgeworth Model, University College London, 1990;

Apêndice A

APÊNDICES

Prova da proposição 2.1.1

Hipótese: Ambos os jogadores tem ações estritamente dominantes.

Tese: Ações IESD levam a um equilíbrio de estratégia dominante única.

Seja um jogo G em forma estratégica dado por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Onde os elementos de A, são pares do tipo $(a^1_{11}, a^2_{11}), (a^1_{12}, a^2_{12})...(a^1_{nm}, a^2_{nm})$, sendo que a^1_{nm} são números associados a J1 e a^2_{nm} são números associados a J2. Agora considere o jogo G, e que:

- 1) J1 pode escolher entre linhas;
- 2) J2pode escolher entre coluna;
- 3) O resultado é dado pela intersecção da linha escolhida por J1 e pela coluna escolhida por J2;
- 4) Um jogador racional irá escolher a opção que melhor segundo suas preferências.

Então, reescrevendo G com a adição de suas preferências, tem-se:

$$A = \begin{array}{c|cccc|} & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array}$$

Onde $[b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ é um vetor que representa as preferências nas escolhas das linhas por J1, e $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ representa as preferências das colunas por J2, sendo que

$$b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq \dots \neq b_n$$

e

$$c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq \dots \neq c_m$$

.

Então como ações IESD eliminam as ações de menor preferência por J1 e J2 iterativamente e que como os elementos de $[b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ e $[c_1, c_2, \ldots, c_m]$ são todos diferentes e representam um ordem na preferência das escolhas para J1 e J2, sendo que quanto maior o número em $[b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ e $[c_1, c_2, \ldots, c_m]$ menor a sua preferência como escolha por J1 e J2, então por IESD tem-se:

Demonstração. 1) Elimina linha correspondente a posição em que se encontra $max([b_1, b_2, \ldots, b_n]^T)$

2) Elimina coluna correspondente a posição em que se encontra $max([c_1, c_2, \ldots, c_m])$

3) Elimina linha correspondente a posição em que se encontra
$max([b_1, b_2, \ldots, b_n]^T - max([b_1, b_2, \ldots, b_n]^T))$

4) Elimina coluna correspondente a posição em que se encontra
$max([c_1, c_2, \ldots, c_m] - max([c_1, c_2, \ldots, c_m]))$

5) Elimina linha correspondente a posição em que se encontra
$max([b_1, b_2, \ldots, b_n]^T - max([b_1, b_2, \ldots, b_n]^T) - max([c_1, c_2, \ldots, c_m] - max([c_1, c_2, \ldots, c_m])))$

6) Elimina coluna correspondente a posição em que se encontra
$max([c_1, c_2, \ldots, c_m] - max([c_1, c_2, \ldots, c_m])) - max([c_1, c_2, \ldots, c_m] - max([c_1, c_2, \ldots, c_m]))$

$$\vdots$$

i) Continua até sobrar 1 linha e 1 coluna:

$$A^{ij} = \begin{array}{c|c|} & c_j \\ \hline b_i & a_{ij} \end{array}$$

, A^{ij} é solução única do jogo G. $\square$

Casos 1.0 - 1.9

Simul.	Resultado	Casos									
		1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
1000	Vic. 6 fases	22	7	2	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 1	450	537	602	668	700	759	780	832	826	847
	Derrota 2	16	14	7	7	0	0	0	0	0	0
	Derrota 3	24	17	12	4	6	1	1	1	0	0
	Derrota 4	36	28	18	20	9	10	5	5	3	2
	Derrota 5	55	55	48	38	25	20	18	9	7	12
	Derrota 6	113	103	90	98	78	63	60	42	50	53
	Ambíguo	284	239	221	165	182	147	136	111	114	86
2000	Vic. 6 fases	40	13	1	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 1	844	1099	1206	1354	1435	1523	1567	1606	1678	1738
	Derrota 2	35	24	14	8	2	1	0	0	0	0
	Derrota 3	43	42	23	16	11	1	3	2	1	0
	Derrota 4	79	59	49	38	24	9	4	8	3	2
	Derrota 5	131	108	74	74	51	47	33	29	13	20
	Derrota 6	224	219	212	160	172	153	110	111	107	69
	Ambíguo	604	436	421	350	305	266	283	244	198	171
3000	Vic. 6 fases	59	11	3	1	1	0	0	0	0	0
	Derrota 1	1332	1604	1852	1994	2173	2253	2378	2454	2482	2573
	Derrota 2	64	34	24	22	3	3	1	0	0	0
	Derrota 3	75	44	49	31	7	6	6	4	1	0
	Derrota 4	106	100	75	33	24	21	16	7	3	3
	Derrota 5	186	153	122	123	77	55	50	38	28	23
	Derrota 6	341	330	289	241	223	214	206	154	145	125
	Ambíguo	837	724	586	555	492	448	343	343	341	276
4000	Vic. 6 fases	81	22	3	1	0	0	0	0	0	0
	Derrota 1	1777	2123	2447	2678	2860	2997	3180	3292	3360	3468
	Derrota 2	70	44	28	16	7	1	2	3	0	1
	Derrota 3	114	58	55	32	24	11	9	8	4	0
	Derrota 4	123	127	84	59	39	28	23	15	12	7
	Derrota 5	240	219	185	139	113	112	61	51	38	25
	Derrota 6	461	463	388	357	339	282	215	201	182	162
	Ambíguo	1134	944	810	718	618	569	510	430	404	337
5000	Vic. 6 fases	90	21	13	1	0	1	0	0	0	0
	Derrota 1	2250	2679	2963	3352	3606	3834	3950	4093	4175	4303
	Derrota 2	98	64	36	25	9	8	2	4	0	0
	Derrota 3	134	96	68	40	17	12	8	2	1	2
	Derrota 4	195	151	106	73	52	37	20	17	16	4
	Derrota 5	306	289	229	173	133	105	87	54	46	33
	Derrota 6	497	566	508	424	363	338	321	283	254	205
	Ambíguo	1430	1134	1077	912	820	665	612	547	508	453
10000	Vic. 6 fases	181	51	17	5	0	0	0	0	0	0
	Derrota 1	4443	5305	6134	6629	7195	7586	7892	8122	8502	8612
	Derrota 2	178	112	69	31	23	13	2	3	3	1
	Derrota 3	261	211	134	79	45	30	16	9	7	6
	Derrota 4	414	353	189	156	110	54	58	29	19	17
	Derrota 5	618	559	474	374	264	233	161	144	81	77
	Derrota 6	1026	1068	988	890	815	727	611	542	443	400
	Ambíguo	2879	2341	1995	1836	1548	1357	1260	1151	945	887
20000	Vic. 6 fases	388	105	30	9	1	2	0	0	0	0
	Derrota 1	8954	10633	12159	13440	14342	15114	15765	16409	16842	17236
	Derrota 2	422	247	145	82	48	19	7	6	3	2
	Derrota 3	493	400	220	140	77	53	39	18	15	9
	Derrota 4	764	612	424	269	190	155	101	63	32	28
	Derrota 5	1230	1125	921	654	522	421	321	233	171	155
	Derrota 6	2157	2151	2062	1808	1603	1364	1210	1039	912	845
	Ambíguo	5592	4727	4039	3598	3217	2872	2557	2232	2025	1725
30000	Vic. 6 fases	601	161	50	8	7	4	0	1	0	0
	Derrota 1	13255	15915	18233	19941	21435	22694	23699	24476	25249	25841
	Derrota 2	550	365	183	135	52	31	27	10	6	6
	Derrota 3	773	531	346	210	122	67	35	34	14	7
	Derrota 4	1151	957	714	451	306	238	139	89	60	32
	Derrota 5	1934	1645	1357	1079	808	671	498	348	295	218
	Derrota 6	3133	3178	2975	2810	2433	2034	1905	1604	1318	1237
	Ambíguo	8603	7248	6142	5366	4837	4261	3697	3438	3058	2659
40000	Vic. 6 fases	754	198	59	24	7	2	1	1	0	0
	Derrota 1	17616	21448	24364	26673	28751	30361	31591	32616	33629	34351
	Derrota 2	696	494	271	117	89	34	19	10	8	4
	Derrota 3	1069	727	444	271	155	100	54	38	27	14
	Derrota 4	1597	1228	891	645	425	290	158	134	76	68
	Derrota 5	2470	2271	1783	1449	1104	795	629	495	370	316
	Derrota 6	4302	4140	3923	3646	3164	2847	2507	2144	1864	1580
	Ambíguo	11496	9494	8265	7175	6295	5581	5041	4562	4026	3667
50000	Vic. 6 fases	933	273	90	24	7	2	1	0	0	0
	Derrota 1	22373	26674	30299	33250	35735	37846	39499	40922	42090	42953
	Derrota 2	865	587	336	171	89	53	28	28	11	3
	Derrota 3	1310	934	605	382	224	125	77	40	26	13

	Derrota 4	1909	1464	1110	841	519	312	236	161	118	84
	Derrota 5	3066	2784	2273	1718	1417	988	851	599	439	370
	Derrota 6	5264	5416	5017	4556	4007	3501	3086	2602	2306	2043
	Ambíguo	14280	11868	10270	9058	8002	7173	6222	5648	5010	4534
100000	Vic. 6 fases	1904	523	152	49	6	4	4	1	0	0
	Derrota 1	44274	53400	61027	66831	71536	75666	78995	81756	84116	86220
	Derrota 2	1789	1160	688	349	170	105	52	34	16	9
	Derrota 3	2540	1790	1171	744	409	266	168	104	57	31
	Derrota 4	3844	3089	2144	1536	1081	648	470	321	228	145
	Derrota 5	6128	5460	4497	3617	2730	1995	1622	1225	967	710
	Derrota 6	10526	10797	9977	8918	8084	7116	6205	5308	4655	3956
	Ambíguo	28995	23781	20344	17956	15984	14200	12484	11251	9961	8929
200000	Vic. 6 fases	3830	1046	343	96	32	8	3	3	0	0
	Derrota 1	88383	106545	121179	133662	143441	151272	157747	163406	168066	171998
	Derrota 2	3705	2316	1379	741	348	169	115	42	18	13
	Derrota 3	5207	3681	2417	1440	839	497	285	178	109	58
	Derrota 4	7592	6287	4497	3008	2084	1391	901	647	417	279
	Derrota 5	12472	11130	9040	7077	5514	4112	3231	2277	1889	1439
	Derrota 6	21199	21317	20099	18002	15958	14128	12304	10868	9325	8277
	Ambíguo	57612	47678	41046	35974	31784	28423	25414	22579	20176	17936
300000	Vic. 6 fases	5945	1563	493	160	30	17	3	0	0	0
	Derrota 1	132270	160438	181896	199915	214792	227361	237216	245854	252621	257922
	Derrota 2	5326	3606	1993	1063	578	309	156	82	49	27
	Derrota 3	7802	5448	3562	2163	1263	765	450	288	177	81
	Derrota 4	11811	9230	6647	4701	3082	2088	1300	921	622	430
	Derrota 5	18645	16450	13621	10620	8294	6147	4707	3616	2805	2139
	Derrota 6	32169	32083	30053	27239	24267	21022	18310	15835	13758	12197
	Ambíguo	86032	71182	61735	54139	47694	42291	37858	33404	29968	27204
400000	Vic. 6 fases	7714	2156	614	178	58	19	7	2	0	0
	Derrota 1	176982	213251	241953	266927	286049	302427	316009	327417	336621	344051
	Derrota 2	7081	4770	2597	1478	739	399	185	102	78	26
	Derrota 3	10329	7524	4782	2857	1712	1024	609	322	190	123
	Derrota 4	15505	12368	8914	6188	4147	2763	1761	1247	818	584
	Derrota 5	25107	21907	17942	14464	10913	8430	6314	4931	3755	2869
	Derrota 6	42705	42541	40117	36162	32257	28203	24498	21153	18399	15961
	Ambíguo	114577	95483	83081	71746	64125	56735	50617	44826	40139	36386
500000	Vic. 6 fases	9610	2716	726	214	84	20	8	2	0	2
	Derrota 1	221258	265653	302857	333078	358404	378294	394938	409371	420257	430290
	Derrota 2	8939	5991	3422	1828	963	446	234	124	65	32
	Derrota 3	13012	9337	5860	3640	2173	1273	756	427	279	152
	Derrota 4	19374	15370	11116	7687	5294	3427	2232	1573	994	672
	Derrota 5	30689	27856	22639	17875	13383	10326	7778	5926	4688	3674
	Derrota 6	53723	53704	50234	45142	40244	35125	30674	26468	23214	20125
	Ambíguo	143395	119373	103146	90536	79455	71089	63380	56109	50503	45053
1E+06	Vic. 6 fases	19353	5316	1505	471	144	45	13	7	1	0
	Derrota 1	442020	532470	606199	667066	716549	757689	790388	817964	840877	860184
	Derrota 2	18304	11729	6771	3598	1886	1012	505	269	135	92
	Derrota 3	26188	18667	11795	7327	4283	2462	1497	883	508	326
	Derrota 4	38710	31145	22472	15242	10261	6873	4595	3077	2007	1374
	Derrota 5	61654	55009	45261	35446	27413	20700	15914	12030	9355	7276
	Derrota 6	106100	107130	100307	90646	80193	70069	61554	53102	46116	40556
	Ambíguo	287671	238534	205690	180204	159271	141150	125534	112668	101001	90192

Caso 2.1

Simul.	Resultado	Lambda =				
		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
1000	Vic. 6 fases	988	939	864	780	648
	Derrota 1	0	0	6	17	24
	Derrota 2	0	0	0	4	10
	Derrota 3	0	0	2	7	10
	Derrota 4	1	0	1	7	13
	Derrota 5	0	2	1	6	15
	Derrota 6	0	0	3	4	29
	Ambíguo	11	59	123	175	251
2000	Vic. 6 fases	1978	1915	1731	1474	1264
	Derrota 1	0	0	8	28	72
	Derrota 2	0	1	9	15	23
	Derrota 3	0	2	3	13	15
	Derrota 4	0	0	6	21	30
	Derrota 5	0	0	4	21	30
	Derrota 6	0	0	8	12	40
	Ambíguo	22	82	231	416	526
3000	Vic. 6 fases	2972	2823	2595	2317	1848
	Derrota 1	0	0	7	36	117
	Derrota 2	0	0	8	24	27
	Derrota 3	0	3	11	17	35
	Derrota 4	0	1	10	17	61
	Derrota 5	0	3	12	15	57
	Derrota 6	0	3	6	27	65
	Ambíguo	28	167	351	547	790
4000	Vic. 6 fases	3966	3799	3502	3074	2542
	Derrota 1	0	1	16	49	127
	Derrota 2	0	2	9	26	64
	Derrota 3	0	5	10	23	47
	Derrota 4	0	3	11	25	52
	Derrota 5	0	2	11	28	54
	Derrota 6	0	3	12	34	77
	Ambíguo	34	185	429	741	1037
5000	Vic. 6 fases	4951	4757	4368	3841	3128
	Derrota 1	0	6	16	59	155
	Derrota 2	0	1	9	37	43
	Derrota 3	0	3	11	33	55
	Derrota 4	0	2	14	29	63
	Derrota 5	0	2	11	36	69
	Derrota 6	1	3	14	36	105
	Ambíguo	48	226	557	929	1382
10000	Vic. 6 fases	9894	9511	8717	7637	6333
	Derrota 1	0	5	39	130	372
	Derrota 2	0	5	17	61	94
	Derrota 3	0	3	12	69	111
	Derrota 4	0	1	19	68	150
	Derrota 5	0	5	20	73	162
	Derrota 6	0	3	29	75	160
	Ambíguo	106	467	1147	1887	2618
20000	Vic. 6 fases	19781	18977	17507	15310	12619
	Derrota 1	0	14	72	265	677
	Derrota 2	0	10	38	107	208
	Derrota 3	1	14	47	111	249

	Derrota 4	0	8	38	144	249
	Derrota 5	0	11	44	162	279
	Derrota 6	0	8	49	154	334
	Ambíguo	218	958	2205	3747	5385
30000	Vic. 6 fases	29711	28510	26192	22969	18898
	Derrota 1	0	21	112	424	1076
	Derrota 2	0	10	62	172	323
	Derrota 3	0	10	73	180	355
	Derrota 4	0	9	56	196	410
	Derrota 5	0	13	73	210	475
	Derrota 6	0	9	74	226	568
	Ambíguo	289	1418	3358	5623	7895
40000	Vic. 6 fases	39581	38007	35020	30588	25227
	Derrota 1	2	19	120	500	1407
	Derrota 2	0	11	94	220	447
	Derrota 3	0	15	87	233	494
	Derrota 4	2	15	74	252	540
	Derrota 5	1	17	93	286	600
	Derrota 6	0	15	87	288	738
	Ambíguo	414	1901	4425	7633	10547
50000	Vic. 6 fases	49507	47516	43744	38377	31630
	Derrota 1	2	20	188	632	1660
	Derrota 2	0	20	107	297	511
	Derrota 3	2	12	118	277	620
	Derrota 4	0	25	122	327	703
	Derrota 5	1	19	119	382	721
	Derrota 6	1	21	125	424	916
	Ambíguo	487	2367	5477	9284	13239
100000	Vic. 6 fases	98997	95002	87443	76909	63544
	Derrota 1	1	57	336	1288	3308
	Derrota 2	0	42	225	538	1110
	Derrota 3	0	40	191	605	1180
	Derrota 4	0	50	233	691	1390
	Derrota 5	0	52	248	739	1543
	Derrota 6	0	40	244	798	1729
	Ambíguo	1002	4717	11080	18432	26196
200000	Vic. 6 fases	197950	190074	174711	153238	126743
	Derrota 1	2	97	714	2621	6761
	Derrota 2	1	81	422	1120	2166
	Derrota 3	2	79	432	1203	2396
	Derrota 4	4	80	479	1266	2658
	Derrota 5	3	77	498	1483	3053
	Derrota 6	5	86	514	1584	3670
	Ambíguo	2033	9426	22230	37485	52553
300000	Vic. 6 fases	297057	285011	262259	229229	189962
	Derrota 1	6	143	1093	3906	9964
	Derrota 2	3	106	618	1636	3223
	Derrota 3	3	132	659	1927	3618
	Derrota 4	6	123	703	2042	3979
	Derrota 5	2	158	736	2176	4669
	Derrota 6	1	109	791	2499	5437
	Ambíguo	2922	14218	33141	56585	79148
	Vic. 6 fases	396092	379818	349376	305921	253843
	Derrota 1	7	229	1458	5228	13253

400000

	Derrota 2	4	170	771	2306	4252
	Derrota 3	6	151	952	2433	4707
	Derrota 4	3	157	889	2638	5198
	Derrota 5	6	160	988	2869	6135
	Derrota 6	3	146	998	3241	7097
	Ambíguo	3879	19169	44568	75364	105515
500000	Vic. 6 fases	495013	474669	436851	382704	316631
	Derrota 1	11	240	1789	6587	16576
	Derrota 2	3	178	1063	2891	5487
	Derrota 3	10	186	1094	3025	6068
	Derrota 4	5	206	1213	3344	6678
	Derrota 5	4	208	1205	3740	7564
	Derrota 6	4	196	1256	4066	9125
	Ambíguo	4950	24117	55529	93643	131871
1E+06	Vic. 6 fases	990036	949718	873285	764433	633372
	Derrota 1	12	531	3619	13151	33055
	Derrota 2	9	393	2054	5573	10709
	Derrota 3	10	372	2167	6192	11966
	Derrota 4	11	410	2352	6739	13488
	Derrota 5	12	453	2469	7481	15334
	Derrota 6	12	407	2646	8203	17843
	Ambíguo	9898	47716	111408	188228	264233

Caso 2.2

Simul.	Resultado	Lambda =				
		0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
1000	Vic. 6 fases	988	939	864	780	648
	Derrota 1	0	0	6	17	24
	Derrota 2	0	0	0	4	10
	Derrota 3	0	0	2	7	10
	Derrota 4	1	0	1	7	13
	Derrota 5	0	2	1	6	15
	Derrota 6	0	0	3	4	29
	Ambíguo	11	59	123	175	251
2000	Vic. 6 fases	1978	1915	1731	1474	1264
	Derrota 1	0	0	8	28	72
	Derrota 2	0	1	9	15	23
	Derrota 3	0	2	3	13	15
	Derrota 4	0	0	6	21	30
	Derrota 5	0	0	4	21	30
	Derrota 6	0	0	8	12	40
	Ambíguo	22	82	231	416	526
3000	Vic. 6 fases	2972	2823	2595	2317	1848
	Derrota 1	0	0	7	36	117
	Derrota 2	0	0	8	24	27
	Derrota 3	0	3	11	17	35
	Derrota 4	0	1	10	17	61
	Derrota 5	0	3	12	15	57
	Derrota 6	0	3	6	27	65
	Ambíguo	28	167	351	547	790
4000	Vic. 6 fases	3966	3799	3502	3074	2542
	Derrota 1	0	1	16	49	127
	Derrota 2	0	2	9	26	64
	Derrota 3	0	5	10	23	47
	Derrota 4	0	3	11	25	52
	Derrota 5	0	2	11	28	54
	Derrota 6	0	3	12	34	77
	Ambíguo	34	185	429	741	1037
5000	Vic. 6 fases	4951	4757	4368	3841	3128
	Derrota 1	0	6	16	59	155
	Derrota 2	0	1	9	37	43
	Derrota 3	0	3	11	33	55
	Derrota 4	0	2	14	29	63
	Derrota 5	0	2	11	36	69
	Derrota 6	1	3	14	36	105
	Ambíguo	48	226	557	929	1382
10000	Vic. 6 fases	9894	9511	8717	7637	6333
	Derrota 1	0	5	39	130	372
	Derrota 2	0	5	17	61	94
	Derrota 3	0	3	12	69	111
	Derrota 4	0	1	19	68	150
	Derrota 5	0	5	20	73	162
	Derrota 6	0	3	29	75	160
	Ambíguo	106	467	1147	1887	2618
20000	Vic. 6 fases	19781	18977	17507	15310	12619
	Derrota 1	0	14	72	265	677
	Derrota 2	0	10	38	107	208
	Derrota 3	1	14	47	111	249

	Derrota 4	0	8	38	144	249
	Derrota 5	0	11	44	162	279
	Derrota 6	0	8	49	154	334
	Ambíguo	218	958	2205	3747	5385
30000	Vic. 6 fases	29711	28510	26192	22969	18898
	Derrota 1	0	21	112	424	1076
	Derrota 2	0	10	62	172	323
	Derrota 3	0	10	73	180	355
	Derrota 4	0	9	56	196	410
	Derrota 5	0	13	73	210	475
	Derrota 6	0	9	74	226	568
	Ambíguo	289	1418	3358	5623	7895
40000	Vic. 6 fases	39581	38007	35020	30588	25227
	Derrota 1	2	19	120	500	1407
	Derrota 2	0	11	94	220	447
	Derrota 3	0	15	87	233	494
	Derrota 4	2	15	74	252	540
	Derrota 5	1	17	93	286	600
	Derrota 6	0	15	87	288	738
	Ambíguo	414	1901	4425	7633	10547
50000	Vic. 6 fases	49507	47516	43744	38377	31630
	Derrota 1	2	20	188	632	1660
	Derrota 2	0	20	107	297	511
	Derrota 3	2	12	118	277	620
	Derrota 4	0	25	122	327	703
	Derrota 5	1	19	119	382	721
	Derrota 6	1	21	125	424	916
	Ambíguo	487	2367	5477	9284	13239
100000	Vic. 6 fases	98997	95002	87443	76909	63544
	Derrota 1	1	57	336	1288	3308
	Derrota 2	0	42	225	538	1110
	Derrota 3	0	40	191	605	1180
	Derrota 4	0	50	233	691	1390
	Derrota 5	0	52	248	739	1543
	Derrota 6	0	40	244	798	1729
	Ambíguo	1002	4717	11080	18432	26196
200000	Vic. 6 fases	197950	190074	174711	153238	126743
	Derrota 1	2	97	714	2621	6761
	Derrota 2	1	81	422	1120	2166
	Derrota 3	2	79	432	1203	2396
	Derrota 4	4	80	479	1266	2658
	Derrota 5	3	77	498	1483	3053
	Derrota 6	5	86	514	1584	3670
	Ambíguo	2033	9426	22230	37485	52553
300000	Vic. 6 fases	297057	285011	262259	229229	189962
	Derrota 1	6	143	1093	3906	9964
	Derrota 2	3	106	618	1636	3223
	Derrota 3	3	132	659	1927	3618
	Derrota 4	6	123	703	2042	3979
	Derrota 5	2	158	736	2176	4669
	Derrota 6	1	109	791	2499	5437
	Ambíguo	2922	14218	33141	56585	79148
400000	Vic. 6 fases	396092	379818	349376	305921	253843
	Derrota 1	7	229	1458	5228	13253

	Derrota 2	4	170	771	2306	4252
	Derrota 3	6	151	952	2433	4707
	Derrota 4	3	157	889	2638	5198
	Derrota 5	6	160	988	2869	6135
	Derrota 6	3	146	998	3241	7097
	Ambíguo	3879	19169	44568	75364	105515
500000	Vic. 6 fases	495013	474669	436851	382704	316631
	Derrota 1	11	240	1789	6587	16576
	Derrota 2	3	178	1063	2891	5487
	Derrota 3	10	186	1094	3025	6068
	Derrota 4	5	206	1213	3344	6678
	Derrota 5	4	208	1205	3740	7564
	Derrota 6	4	196	1256	4066	9125
	Ambíguo	4950	24117	55529	93643	131871
1E+06	Vic. 6 fases	990036	949718	873285	764433	633372
	Derrota 1	12	531	3619	13151	33055
	Derrota 2	9	393	2054	5573	10709
	Derrota 3	10	372	2167	6192	11966
	Derrota 4	11	410	2352	6739	13488
	Derrota 5	12	453	2469	7481	15334
	Derrota 6	12	407	2646	8203	17843
	Ambíguo	9898	47716	111408	188228	264233

Caso Extra

Simul.	Resultado	Distribuição J2						
		Uni(1,10)	Uni(1,11)	Uni(1,12)	Uni(1,13)	Uni(1,14)	Uni(1,15)	Uni(1,16)
1000	Vic. 6 fases	13	0	0	0	0	0	0
	Derrota 1	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 2	3	0	0	0	0	0	0
	Derrota 3	2	0	0	0	0	0	0
	Derrota 4	10	1	1	1	0	0	0
	Derrota 5	17	3	0	2	0	0	0
	Derrota 6	921	988	996	992	1000	1000	999
	Ambíguo	34	8	3	5	0	0	1
2000	Vic. 6 fases	19	1	1	0	0	0	0
	Derrota 1	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 2	3	1	0	0	0	0	
	Derrota 3	6	1	0	0	0	0	0
	Derrota 4	12	3	1	1	0	0	0
	Derrota 5	25	11	5	1	0	0	0
	Derrota 6	1875	1964	1987	1993	1996	1995	1997
	Ambíguo	60	19	6	5	4	5	3
3000	Vic. 6 fases	17	3	0	0	0	0	0
	Derrota 1	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 2	1	2	0	0	0	0	0
	Derrota 3	11	5	2	1	0	0	0
	Derrota 4	16	4	1	0	0	0	0
	Derrota 5	36	14	2	1	0	0	0
	Derrota 6	2830	2947	2988	2993	2993	2996	2994
	Ambíguo	89	25	7	5	7	4	6
4000	Vic. 6 fases	26	9	2	0	0	0	0
	Derrota 1	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 2	4	0	0	0	0	0	0
	Derrota 3	15	7	1	0	0	0	0

	Derrota 4	29	7	4	0	0	0	0
	Derrota 5	50	30	3	2	0	0	0
	Derrota 6	3760	3918	3978	3990	3994	3988	3994
	Ambíguo	116	29	12	8	6	12	6
5000	Vic. 6 fases	34	8	0	0	0	0	0
	Derrota 1	0	0	0	0	0	0	0
	Derrota 2	9	0	0	0	0	0	0
	Derrota 3	18	5	1	0	0	0	0
	Derrota 4	36	9	4	0	0	0	0
	Derrota 5	75	18	9	4	1	0	0
	Derrota 6	4674	4919	4974	4989	4990	4997	4992
	Ambíguo	154	41	12	7	9	3	8
10000	Vic. 6 fases	67	19	3	2	0	0	0
	Derrota 1	0	0	0	0	0	1	0
	Derrota 2	13	3	0	0	0	0	0
	Derrota 3	37	9	2	0	0	0	0
	Derrota 4	73	17	6	4	0	0	0
	Derrota 5	138	56	15	3	1	0	1
	Derrota 6	9348	9820	9947	9965	9978	9978	9981
	Ambíguo	324	76	27	26	21	21	18
20000	Vic. 6 fases	134	32	4	2	1	0	0
	Derrota 1	0	0	1	0	0	0	1
	Derrota 2	29	2	1	0	0	0	0
	Derrota 3	98	17	1	3	1	0	0
	Derrota 4	142	30	10	2	1	0	0
	Derrota 5	241	105	19	6	2	5	0
	Derrota 6	18769	19659	19892	19947	19954	19957	19968
	Ambíguo	587	155	72	40	41	38	31
30000	Vic. 6 fases	224	36	14	5	2	0	0
	Derrota 1	0	1	0	0	0	0	0
	Derrota 2	41	7	3	0	0	0	0
	Derrota 3	121	32	9	0	1	0	0
	Derrota 4	220	47	11	3	0	0	0
	Derrota 5	414	156	40	5	5	2	2
	Derrota 6	28041	29485	29832	29924	29924	29936	29944
	Ambíguo	939	236	91	63	68	62	54
40000	Vic. 6 fases	274	63	17	5	1	0	0
	Derrota 1	0	0	1	0	0	0	0
	Derrota 2	38	5	1	0	0	0	0
	Derrota 3	161	35	10	3	0	0	0
	Derrota 4	300	69	16	3	5	2	0
	Derrota 5	535	183	67	15	5	0	1
	Derrota 6	37544	39353	39770	39893	39918	39941	39916
	Ambíguo	1148	292	118	81	71	57	83
50000	Vic. 6 fases	357	48	16	2	1	0	0
	Derrota 1	0	0	1	1	0	1	0
	Derrota 2	53	15	0	2	1	0	0
	Derrota 3	195	41	9	2	3	0	0
	Derrota 4	364	73	28	12	1	1	0
	Derrota 5	637	229	64	23	8	3	1
	Derrota 6	46878	49215	49730	49852	49878	49905	49932
	Ambíguo	1516	379	152	106	108	90	67
100000	Vic. 6 fases	684	153	27	6	4	2	0
	Derrota 1	1	2	2	0	0	1	1
	Derrota 2	123	24	3	2	2	0	0

	Derrota 3	399	80	28	7	2	0	0
	Derrota 4	656	151	56	13	5	2	1
	Derrota 5	1398	490	135	34	7	5	0
	Derrota 6	93555	98314	99421	99727	99798	99802	99807
	Ambíguo	3184	786	328	211	182	188	191
200000	Vic. 6 fases	1378	309	76	10	3	2	0
	Derrota 1	5	1	5	4	3	2	2
	Derrota 2	233	46	10	9	2	1	1
	Derrota 3	783	125	43	11	3	0	1
	Derrota 4	1412	351	90	30	4	2	0
	Derrota 5	2654	946	281	72	24	2	2
	Derrota 6	187240	196651	198884	199424	199597	199617	199631
	Ambíguo	6295	1571	611	440	364	374	363
300000	Vic. 6 fases	2052	449	78	20	5	4	0
	Derrota 1	6	5	0	7	2	2	6
	Derrota 2	330	75	15	6	2	1	1
	Derrota 3	1188	222	64	17	10	1	0
	Derrota 4	2071	516	129	46	15	7	1
	Derrota 5	4012	1419	396	133	42	14	3
	Derrota 6	281026	295074	298378	299090	299334	299452	299433
	Ambíguo	9315	2240	940	681	590	519	556
400000	Vic. 6 fases	2704	563	119	36	4	3	0
	Derrota 1	3	2	6	4	7	8	6
	Derrota 2	461	87	20	14	0	1	2
	Derrota 3	1527	298	75	36	10	2	0
	Derrota 4	2822	704	223	47	16	5	6
	Derrota 5	5308	1870	550	163	58	15	7
	Derrota 6	374733	393418	397752	398861	399168	399242	399280
	Ambíguo	12442	3058	1255	839	737	724	699
500000	Vic. 6 fases	3499	766	149	34	11	5	0
	Derrota 1	3	4	5	4	9	7	6
	Derrota 2	558	105	33	6	2	2	1
	Derrota 3	1904	369	104	41	9	2	1
	Derrota 4	3411	891	249	68	24	4	4
	Derrota 5	6523	2354	670	217	66	23	10
	Derrota 6	468433	491698	497309	498537	498917	499040	499045
	Ambíguo	15669	3813	1481	1093	962	917	933
1E+06	Vic. 6 fases	6833	1417	309	89	22	11	3
	Derrota 1	7	21	19	16	9	9	18
	Derrota 2	1111	227	70	22	9	5	2
	Derrota 3	3806	775	196	64	18	9	7
	Derrota 4	6925	1743	489	157	43	14	5
	Derrota 5	13277	4796	1370	362	126	33	17
	Derrota 6	936992	983491	994361	997107	997902	998094	998191
	Ambíguo	31049	7530	3186	2183	1871	1825	1757

Tabela A.5: Taxas de vitória para J1 através de IESD

Simul.	Taxas de vitórias nas seis fazes para J1									
	Uni(1,10)	Uni(1,11)	Uni(1,12)	Uni(1,13)	Uni(1,14)	Uni(1,15)	Uni(1,16)	Uni(1,17)	Uni(1,18)	Uni(1,19)
1000	2,200%	0,700%	0,200%							
2000	2,000%	0,650%	0,050%							
3000	1,967%	0,367%	0,100%	0,033%	0,033%					
4000	2,025%	0,550%	0,075%	0,025%						
5000	1,800%	0,420%	0,260%	0,020%		0,020%				
10000	1,810%	0,510%	0,170%	0,050%						
20000	1,440%	0,525%	0,150%	0,045%	0,005%	0,010%				
30000	2,003%	0,537%	0,167%	0,027%	0,023%	0,013%		0,003%		
40000	1,885%	0,495%	0,148%	0,060%	0,018%	0,005%	0,003%	0,003%		
50000	1,866%	0,546%	0,180%	0,048%	0,014%	0,004%	0,002%			
100000	1,904%	0,523%	0,152%	0,049%	0,006%	0,004%	0,004%	0,001%		
200000	1,915%	0,523%	0,172%	0,048%	0,016%	0,004%	0,002%	0,002%		
300000	1,982%	0,521%	0,164%	0,053%	0,010%	0,006%	0,001%			
400000	1,929%	0,539%	0,154%	0,045%	0,015%	0,005%	0,002%	0,001%		
500000	1,922%	0,543%	0,145%	0,043%	0,017%	0,004%	0,002%	0,000%		0,000%
1000000	1,935%	0,532%	0,151%	0,047%	0,014%	0,005%	0,001%	0,001%	0,000%	

Tabela A.6: Max. Probabilidades de Vitórias para J1 sem o uso de IESD

Simul.	Máx. Probabilidade de Vitória nas seis fazes para J1									
	Uni(1,10)	Uni(1,11)	Uni(1,12)	Uni(1,13)	Uni(1,14)	Uni(1,15)	Uni(1,16)	Uni(1,17)	Uni(1,18)	Uni(1,19)
1000	0,06766%	0,01204%	0,01204%							
2000	0,06766%	0,03037%	0,01204%							
3000	0,13717%	0,03037%	0,03037%	0,00019%	0,00403%					
4000	0,06766%	0,06766%	0,01204%	0,00106%						
5000	0,13717%	0,06766%	0,03037%	0,01204%		0,00403%				
10000	0,13717%	0,06766%	0,03037%	0,03037%						
20000	0,13717%	0,06766%	0,03037%	0,01204%	0,00106%	0,01204%				
30000	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,01204%	0,03037%	0,01204%		0,01204%		
40000	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,03037%	0,03037%	0,03037%	0,00403%	0,00403%		
50000	0,13717%	0,06766%	0,06766%	0,06766%	0,03037%	0,03037%	0,01204%			
100000	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,06766%	0,03037%	0,03037%	0,03037%	0,00403%		
200000	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,06766%	0,01204%	0,01204%	0,01204%		
300000	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,06766%	0,03037%	0,03037%			
400000	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,06766%	0,03037%	0,03037%	0,01204%		
500000	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,06766%	0,03037%	0,01204%		0,00106%
1000000	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,13717%	0,06766%	0,03037%	0,01204%	0,01204%	0,00106%	