



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

TÉCNICAS PARA ESTIMAÇÃO DE EXPOENTES DE LYAPUNOV EM
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Vanlex Gomes Galdino

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza
Cavalcante

João Pessoa
Janeiro de 2018

M21m Gomes Galdino, Vanlex
Técnicas para estimação de expoentes de Lyapunov em sistemas dinâmicos não-lineares / Vanlex Gomes Galdino. – João Pessoa, 2018.
60, f.: il.;
Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante
Dissertação (mestrado) – UFPB/CI/PPGMMC.
Referências Bibliográficas: p. 42 – 43.
1. Primeira palavra-chave. 2. Segunda palavra-chave. 3. Terceira palavra-chave.

UFPB/BC

CDU: 719.6(043)

TÉCNICAS PARA ESTIMAÇÃO DE EXPOENTES DE LYAPUNOV EM
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Vanlex Gomes Galdino

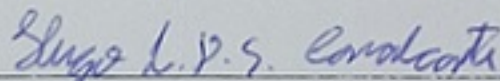
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Thierry Passerat de Silans, D.Sc.



Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra, Dr.



Prof. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, Dr.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
SETEMBRO DE 2017

*A minha esposa e filha, Flávia e
Ana Beatriz.*

Agradecimentos

Uma vitória, é algo que é conquistado por muitos, assim gostaria de agradecer à todos que contribuíram nesta etapa da minha vida:

Ao meu orientador Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante, que me incentivou a continuar, contribuindo para a conclusão desta etapa muito importante em minha trajetória profissional. Um professor que, além dos conceitos sobre os tópicos estudados, que ele tanto admira, me ensinou com atitudes o que é ser um profissional ético, comprometido e apaixonado pelo que faz;

Aos meus colegas do mestrado, em especial ao amigo/irmão Jairo, Fábio, Leopoldo Calssar, que formaram um vínculo de amizade e companheirismo;

Aos professores do corpo docente do mestrado em Modelagem Matemática Computacional-CI-UFPB, que foram muito mais que professores, foram educadores;

Ao professor Gilson Francisco de Oliveira Junior, UFCE. Este é um agradecimento especial, pois não sendo meu orientador, ajudou-me na obtenção de resultados importantes para as conclusões desta dissertação.

À minha família, em especial, ao meu pai Valdir Barbosa Galdino e minha mãe Maria Judimar Gomes, meu irmão Francisco de Assis Gomes Galdino e minha irmã Ramona Gomes Galdino, que nos momentos mais difíceis sempre deram muita força e incentivo para a conclusão desta pós-graduação, por seus pensamentos e orações em todos os momentos;

A professora Kátia Elizabeth Galdino - UEPB, que fora minha orientadora no curso de especialização de matemática pura e aplicada, posso dizer que foi quem me mostrou um outro lado da matemática, o numérico também é importante.

Ao professor Silvânio de Andrade - UEPB, pelas palavras de incentivo e dedicação no ensino de matemática essas ações me fizeram seguir em frente apesar das dificuldades, obrigado.

Ao professor Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG, que a partir de um curso de verão, me incentivou a procurar uma pós graduação e prosseguir no meio acadêmico.

Não posso deixar de mencionar o nome de Dona Carminha, dona dos alojamentos que ficamos nessa jornada, cheia de suas animosidades e disposição para com as dificuldades da vida.

À UFPB, por proporcionar através de toda a sua infra-estrutura e corpo docente, de forma gratuita um ensino de qualidade em graduação e agora em pós-graduação; Sobretudo, a Deus que rege com maestria todo o caos do universo.
A todos, muito obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

TÉCNICAS PARA ESTIMAÇÃO DE EXPOENTES DE LYAPUNOV EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Vanlex Gomes Galdino

Janeiro/2018

Orientador: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

A estabilidade de trajetórias no espaço de fase de um sistema dinâmico pode ser caracterizada com o uso dos expoentes característicos de Lyapunov. Em situações simples, estes expoentes correspondem aos autovalores da equação de movimento linearizada. Entretanto, para trajetórias complexas que aparecem em muitos sistemas não lineares, particularmente na ocorrência de caos, a determinação e a própria conceituação de estabilidade e dos valores destes expoentes é mais um elusiva, ao ponto de criar dificuldades técnicas.

Este trabalho faz uma revisão didática apresentando e explicando os conceitos de estabilidade e dos expoentes de Lyapunov, discutindo sua aplicação na caracterização de sistemas dinâmicos não-lineares e propõe um estudo sobre as técnicas de cálculo destes expoentes. Para ilustrar este estudo, analisamos alguns sistemas específicos, de Lorenz e Rössler, e discorreremos sobre as propriedades que podem ser inferidas a partir do estudo realizado.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TECHNIQUES FOR ESTIMATION OF LYAPUNOV EXPONENTS IN
NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

Vanlex Gomes Galdino

January/2018

Advisor: Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante

Program: Computational Mathematical Modelling

The stability of trajectories in the phase space of a dynamical system can be characterized through Lyapunov characteristic exponents. In simple situations, these exponents correspond to the eigenvalues of the linearized equation of motion. However, for complex trajectories occurring in many nonlinear systems, specially during the occurrence of chaos, the determination and the very concept of stability and of the values of those exponents becomes more elusive, creating technical difficulties. This work makes a pedagogical review, presenting and explaining the concepts of stability, and Lyapunov exponents, discusses its application to the characterization of nonlinear dynamical systems, and proposes a study about the techniques do evaluate those exponents. To illustrate this study, we analyze some specific systems, such as Lorenz's and Rössler, and discuss the properties that can be inferred from our study.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Sistemas de equações lineares diferenciais e não-lineares: conceitos básicos	4
2.1 Definindo variável e parâmetro	4
2.2 Sistemas de Equações Diferenciais	5
2.3 Sistemas dinâmicos autônomos e não-autônomos	6
2.4 Espaço de fase	8
2.5 Sistemas Conservativos e Dissipativos	8
2.6 Ponto Fixo	10
2.7 Estabilidade	11
2.8 Definição: Expoente de Lyapunov	13
3 O Expoente de Lyapunov	15
3.1 Expoente de Lyapunov para tempo discreto	15
3.2 O maior Expoente de Lyapunov	17
3.3 Espectro de Lyapunov	17
3.4 Mapas	20
3.5 Alguns métodos de cálculo do expoente de Lyapunov	25
3.5.1 O método padrão	26
3.5.2 O método do Wolf	27
3.5.3 O método do Sano e Sawada	28
3.6 O sistema de Lorenz	30
3.7 O sistema de Rössler	35
4 Resultados e Discussões	40
Referências Bibliográficas	42
A Algumas Demonstrações	44

Lista de Figuras

2.1	Pêndulo simples.	5
2.2	Trajectoria obtida pelo conjunto de pontos, $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, no espaço de fase. Fonte: Chaos in dynamical systems - Ott, Edward.	8
2.3	Trajectoria do plano de fase, em que os pontos \vec{x}_1 e \vec{x}_2 são os pontos fixos do sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$	10
2.4	Evolução de duas trajetórias próximas. Fonte: Strogatz	13
3.1	Esfera n-dimensional sofrendo deformações para outra forma geométrica, elipsóide.	18
3.2	Para $1.0 < r \leq 2.8$, para a equação de diferenças	22
3.3	Para $2.8 < r \leq 3.3$, para a equação de diferenças	22
3.4	Para $3.3 < r \leq 3.5$ para a equação de diferenças	22
3.5	Para $3.5 < r \leq 3.9$ para a equação de diferenças	22
3.6	O gráfico da esquerda refere-se a mapa de bifurcação, ambos mostram onde o caos acontece, isto é, quando $r \approx 3.54087$	23
3.7	Gráficos do Expoente de Lyapunov e Bifurcação sobrepostos.	23
3.8	Gráfico da função $f(x) = 2x \pmod{1}$ A imagem mostra um mapa em sua n-ésima iteração.	24
3.9	Solução do Mapa Shif Bernoulli com números em ponto flutuante.	24
3.10	Solução do Mapa Shif Bernoulli usando números com 1000 casas decimais(pacote Decimal do Python).	24
3.11	Fonte: Artigo do Wolf et. al. 1985	28
3.12	A imagem ilustra o atrator de Lorenz que, para valores de $\rho < 23.899$, observamos um comportamento estável, isto é, o sistema evolui para um dos dois lobulos. E a medida que ρ cresce observamos um comportamento caótico.	31
3.13	Evolução da n-esfera no espaço de fase, para um elipsóide, a deformação ocorre por que os menores expoentes seguem o maior expoente de Lyapunov.	34

3.14	Os dados que inserirmos foram: para a condição inicial $x_0 = (1.2, -0.5, 1.06)$ e os parâmetros $\sigma = 16.0$, $\rho = 28.0$ e $\beta = 4.0/5.7$. . .	34
3.15	Trajetoórias no espaço de fase, do sistema de Rössler, para valores de parâmetros $a = 0.313$, $b = 0.1370$. e $c = 14.09$ e com condições iniciais $x_0 = [0.0, -2.0, 0.3]$	35
3.16	Trajetoória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0, 2$ e $c = 3.794.0$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$	36
3.17	Trajetoória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0, 2$ e $c = 4.0$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$	36
3.18	Trajetoória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0, 2$ e $c = 4.99$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$	36
3.19	Trajetoória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0, 2$ e $c = 7.9$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$	36
3.20	Espectro de Lyapunov obtido para o sistema de Rössler	38
3.21	Espectro de Lyapunov obtido localmente para o sistema de Lorenz	39
3.22	Espectro de Lyapunov obtido localmente para o sistema de Rössler	39
A.1	Algoritmo que permite, ver os ciclos dobrarem a medida que varia $0 \leq r < 1$. Execute o algoritmo python.	46
A.2	Algoritmo que produz soluções e o diagrama de bifurcação.	47
A.3	Algoritmo que calcula soluções do Mapa logístico.	48

Nomenclature

λ	Expoente de Lyapunov
\ddot{x}	Derivada segunda
\dot{x}	Derivada primeira
$\dot{x} = f(x)$	Sistema dinâmico contínuo de equações não-lineares
$\dot{X} = F(X_n)$	Sistema dinâmico discreto de equações não-lineares
ρ	o número de Rayleigh
σ	O número de Prandtl
A	Matriz associada aos coeficientes dos sistema de equações diferenciais
$J(x)$	Jacobiana da matriz A , dos coeficientes dos sistema dinâmico
x^*	Ponto fixo

Capítulo 1

Introdução

A dinâmica começa com Newton no século XVII, que primeiro estabeleceu a conexão entre as leis de movimento e as forças que os causam, particularmente, demonstrando que as órbitas elípticas dos planetas decorrem da Lei Universal de Gravitação. Enquanto a abordagem utilizada até então ia no sentido de resolver as equações diferenciais do movimento, analítica ou numericamente, Poincaré propõe a utilização de ferramentas vindas de outras áreas, como a Topologia, a Geometria, a Álgebra e Análise, para obter uma descrição qualitativa e, quando possível, quantitativa do comportamento do sistema.

E. N. Lorenz também fez uso de uma análise qualitativa para explicar o comportamento de seu modelo meteorológico. O mesmo fez Rössler para o desenvolvimento do seu sistema, o qual define um sistema dinâmico em tempo contínuo que exhibe uma situação caótica, associada às propriedades de um fractal.

Neste trabalho, serão apresentados alguns métodos utilizados para determinar o expoente de Lyapunov, que serve para explicar e responder questões relativas às propriedades do movimento e, em particular, ao equilíbrio, conhecidos pelos termos estabilidade e instabilidade [11] no contexto de sistemas dinâmicos constituídos por equações diferenciais. O interesse de se calcular o valor em questão, expoente Lyapunov, se dá pelo fato de saber como se comportam as trajetórias ao longo do tempo no espaço de fase. Podemos verificar que, o comportamento do sistema de equações diferenciais é sensível a perturbações nas condições iniciais. É possível observar que a distância entre as trajetórias cresce muito rapidamente no espaço de fases. Tal comportamento orbital é caracterizado pelos expoentes Lyapunov, os quais permitem determinar a estabilidade, ou não, de um sistema dinâmico. Serão, pois, abordados os conceitos introdutórios sobre sistemas dinâmicos, tipos de sistemas, existência e unicidade da solução desse sistema, trajetória ou fluxo, caos determinístico e espaço de fase.

Este estudo teve contribuições consideráveis de alguns estudiosos da matemática do século XX, tais como Lyapunov, Andronov, Birkhoff e Kolmogorov. Neste pro-

cesso, o seu âmbito foi muito alargado, vindo a abranger outros modelos de evolução no tempo, além das equações diferenciais: iterações de transformações, equações às diferenças, equações diferenciais parciais de evolução, transformações e equações diferenciais estocásticas.

Nesse sentido, os Sistemas Dinâmicos possuem muitas aplicações, podendo ser aplicados em vários fenômenos complexos das diversas ciências, como na Química (reações químicas, processos industriais), Física (turbulência, transição de fase, ótica), Biologia (competição de espécies, neurobiologia), Economia (modelos de crescimento econômico, mercado financeiro) estudo que fora intensificado e ampliado ao longo dos anos[6].

No nosso estudo nos interessaremos por entender como surgem as trajetórias caóticas, para isso utilizaremos métodos já conhecidos na literatura. No entanto, não é em todo sistema que podemos observar a presença de caos, por exemplo, em sistemas bidimensionais não existe a presença de caos, isso é garantido pelo teorema de Poincaré-Bendixon. Mas como definir caos? A maioria dos autores afirma que um sistema dinâmico é caótico quando este segue ou atende as seguintes características:

- os sistemas possuem trajetórias aperiódicas, ou seja, não se estabelecem em pontos fixos, órbitas periódicas ou quasi-periódicas;
- os dados dos parâmetros não são aleatórios;
- sensibilidade das condições iniciais influenciam, isto é, trajetórias vizinhas separam-se exponencialmente, ou seja, o sistema possui um expoente de Lyapunov positivo.

Uma forma de distinguir caos em um sistema dinâmico, é avaliando a distância/afastamento exponencial entre as trajetórias, inicialmente próximas de uma trajetória de referência, conhecida como trajetória fiducial, ao longo do tempo. Para calcularmos esta distância/afastamento faremos a aplicação do método das perturbações descrito nos artigos do Wolf et al. e do Sano e Sawada.

Dessa maneira, para efeito de organização esta dissertação está distribuída em 4 capítulos, a saber: na introdução explanamos sobre como surgiu o interesse da teoria dos sistemas dinâmicos e das equações diferenciais. No capítulo 2, fazemos uma revisão bibliográfica sobre alguns dos conceitos que compõe o estudo de sistemas dinâmicos de equações diferenciais. No capítulo 3, apresentamos o modelo e ideia que Lyapunov teve para determinar, se um sistema de equações diferenciais produz caos. A princípio, este será o foco do referido estudo. No capítulo 4 apresentamos, uma forma diferente de se obter o expoente de Lyapunov, também discutiremos os nossos resultados, nos quais revelam a rica dinâmica do sistema estudado. Por fim,

no capítulo 4, apresentamos uma conclusão sobre todos os resultados obtidos nesta pesquisa. [9]

Capítulo 2

Sistemas de equações lineares diferenciais e não-lineares: conceitos básicos

Introduziremos as principais definições e conceitos sobre sistemas dinâmicos não-lineares e lineares, que serão úteis para um melhor entendimento, já que este assunto não é abordado em alguns cursos da área de exatas, a exemplo o curso de licenciatura em matemática, no qual temos apenas a disciplina de equações diferenciais. Inicialmente definiremos os conceitos básicos de parâmetros, pontos fixos, sistemas dinâmicos,

2.1 Definindo variável e parâmetro

Quando estamos estudando as equações diferenciais que descrevem sistemas dinâmicos nos deparamos com variáveis dinâmicas e parâmetros. É importante sabermos o que são parâmetros e o que são variáveis. Ao invés de apresentar definições formais, tentaremos mostrar de forma didática, com um exemplo de um modelo matemático para um pêndulo simples, não amortecido. Consideremos um pêndulo de comprimento l e massa m , sujeito apenas à ação da gravidade g , de acordo com figura 2.1. O movimento deste pode ser determinado com a equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0, \quad (2.1)$$

onde o ângulo θ , representa a posição angular do pêndulo relativa ao eixo que é paralelo à força gravitacional e passa pelo ponto de sustentação. Então determinar o movimento do pêndulo é determinar como o ângulo θ varia com o tempo.

As grandezas empregadas para este modelo através da equação diferencial são:

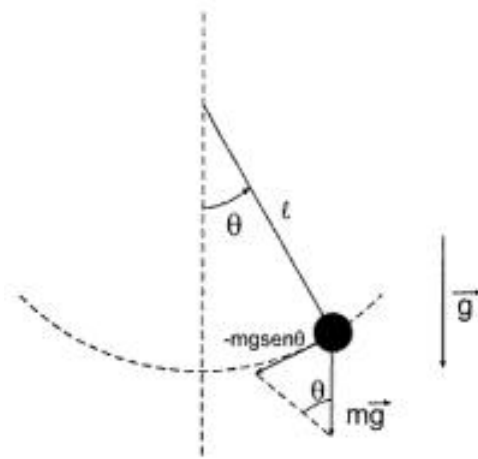


Figura 2.1: Pêndulo simples.

1. O tempo t que é uma variável que evolui sem interferência de nada, o que podemos fazer apenas é medi-lo, em segundos, horas, séculos, ... Então dizemos que t é uma *variável independente*.
2. No caso de θ , esta varia com o tempo. Portanto denominamos como sendo uma *variável dependente*, isto é, *depende do tempo*.
3. As grandezas comprimento l e aceleração da gravidade g são os *parâmetros* do sistema, que influenciam o comportamento do sistema mas não dependem do tempo ou posição angular.

Na seção seguinte, faremos uma revisão mais abrangente sobre definições e conceitos necessários para um melhor entendimento sobre sistemas dinâmicos e porque estudá-los.

2.2 Sistemas de Equações Diferenciais

Podemos entender por sistema dinâmico uma prescrição matemática determinística para a evolução do estado de um sistema ao longo de um tempo t , onde o t é uma variável que pode ser contínua ou discreta de valores inteiros, [20] [13]. Um sistema é dito discreto se é um sistema que depende de variáveis discretas, isto é, o domínio dessas entradas é finito ou enumerável. Um sistema contínuo pode ser entendido por um sistema que depende de variáveis de entrada contínua, como por exemplo: o conjunto de números reais.

Em nosso texto adotaremos a notação $\dot{x} = f(x)$ para representar um sistema dinâmico contínuo, e para sistema um sistema dinâmico discreto usaremos $X[n + 1] = F(X[n])$ ou $X_{n+1} = F(X_n)$.

Denotamos um sistema dinâmico de equações diferenciais lineares e equações diferenciais não-lineares, que possui o tempo t , como uma variável contínua pode ser escrito por:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.2}$$

ou, na notação vetorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}),\tag{2.3}$$

ou simplesmente por;

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}).\tag{2.4}$$

onde ;

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

onde f é uma matriz quadrada[7]. Em nosso texto adotaremos, por simplicidade de notação, a forma (2.4). Onde f é uma função definida por $f_j : B \times \mathbb{R} \mapsto A$, $j = 1, \dots, n$, sendo $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e \vec{x} é um vetor de dimensão n .

Um sistema dinâmico discreto pode ser escrito utilizando a forma:

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad X \in \mathbb{R}\tag{2.5}$$

onde a função F é conhecida. O estado deste sistema é alterado quando há uma mudança dos instantes $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, atenção para o intervalo de tempo entre estes instantes, pois, o estado do sistema permanecerá constante.

2.3 Sistemas dinâmicos autônomos e não-autônomos

Os sistemas dinâmicos de equações diferenciais ordinárias são equações cujas soluções são funções de uma variável independente, que normalmente denotamos por

t , onde t está associada muitas vezes ao tempo e $x(t)$ é a solução que estamos procurando. Existem dois tipos de sistemas dinâmicos, a saber:

i. Os sistemas autônomos, são escritos da forma:

$$\dot{x} = f(x), \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

onde a variável t não aparece explicitamente;

ii. Para sistemas não-autônomos, temos :

$$\ddot{x} = f(x, t), \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Exemplo: $\ddot{x} = -c\dot{x} - \text{sen}(x) + \pi \text{sen}(t)$ para os quais valores de t aparecem explicitamente na equação diferencial. [1] A abordagem que, iremos dar nesse trabalho, será voltada para os sistemas autônomos, mas podemos utilizar um truque para transformar um sistema de equações não-autônomas em uma sistema de equações autônomas, o processo consiste em atribuímos uma variável a um parâmetro do sistema.

Vejamos como se dá esta passagem de uma equação não-autônoma para uma equação autônoma, dada a equação não-autônoma, abaixo:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 = \mu \text{sen}(\Omega t), \quad (2.8)$$

podemos fazer uma mudança de variável $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ obtendo um novo sistema;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \Omega_0^2 x_1 + \mu \text{sen}(\Omega t), \end{cases}$$

agora, introduzindo uma nova variável $x_3 = \Omega t$ (lembrando que, Ω é uma constante, e portanto $\dot{\Omega t} = \Omega$). Conseguimos transformá-la em um sistema autônomo, como segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \Omega_0^2 \text{sen}(x_1) + \mu \text{sen}(x_3) \\ \dot{x}_3 = \Omega. \end{cases}$$

No entanto, dependendo da complexidade, nem sempre conseguiremos transformar uma equação diferencial não-autônoma em uma equação autônoma.

2.4 Espaço de fase

O espaço de fase, também chamado espaço de estados, é o conjunto de todos os vetores de estados que poderiam, em princípio, ser assumidos pelas variáveis dinâmicas do sistema. Para um sistema bidimensional a trajetória é chamada de plano de fase, ao passo que, em um sistema de equações diferenciais que ultrapassa as duas dimensões, damos o nome de espaço de fase [1]. De uma forma geral, o retrato de fase é o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de condições iniciais, isto é, escolhemos alguns pontos do espaço de fase como condições iniciais $x(0)$ e geramos trajetórias $x(t)$, de tal maneira que, o conjunto formado por todos os pontos (x_1, x_2, \dots, x_n) representam um possível comportamento para uma solução do sistema dinâmico. A seguir, veremos como fazer para distinguir quando um sistema dinâmico de equações diferenciais é dissipativo ou conservativo.

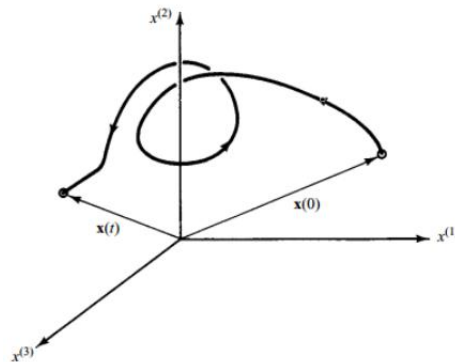


Figura 2.2: Trajetória obtida pelo conjunto de pontos, $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$, no espaço de fase. Fonte: Chaos in dynamical systems - Ott, Edward.

2.5 Sistemas Conservativos e Dissipativos

Um sistema dinâmico é dito conservativo quando um volume no espaço de fase é preservado sob a evolução tempo. Seja $V(t) = \int dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ o volume da superfície

Ω , em que sua variação é dada por :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \quad (2.9)$$

$$= \int \frac{d}{dt} (dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n) \quad (2.10)$$

$$= \int \frac{d}{dt} dx_1 (dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n) + \frac{d}{dt} dx_2 (dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n) + \dots + \quad (2.11)$$

$$+ \dots + \frac{d}{dt} dx_n (dx_2 \cdot \dots \cdot dx_{n-1}) \quad (2.12)$$

$$= \int \dot{x}_1 (dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n) + \dot{x}_2 (dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n) + \dots + \quad (2.13)$$

$$+ \dots + \dot{x}_n (dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_{n-1}) \quad (2.14)$$

$$= \int \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) (dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n) \quad (2.15)$$

pois,

$$\dot{x}_i = df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \quad (2.16)$$

assim temos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_V \nabla \cdot f dV \quad (2.17)$$

Então, se ocorrer $\nabla \cdot f dV < 0$, o sistema dinâmico é dissipativo.

Considerando o sistema de equações de Lorenz dado por, $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = \rho x - y - xz$, $\dot{z} = xy - bz$, vemos que este é dissipativo. Para isso mostremos que $\nabla \cdot f < 0$, temos::

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ e } f = [\dot{x} = \sigma(y - x), \dot{y} = \rho x - y - xz, \dot{z} = xy - bz]$$

$$\nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sigma(y - x)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho x - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - bz) \right) \quad (2.18)$$

derivando, temos:

$$\nabla \cdot f = -\sigma - 1 - b \quad (2.19)$$

Se $-\sigma - 1 - \beta < 0$, dizemos que o sistema de equações diferenciais é dissipativo. ivo. De fato para os parâmetros $\sigma = 28$, $b = \frac{8}{3}$ e $\rho = 10$, onde e são números de

Prandtl¹ e Rayleigh², respectivamente. Então, vemos que $\nabla \cdot f < 0$ e portanto, as equações de Lorenz denotam um sistema dinâmico dissipativo.

2.6 Ponto Fixo

Os sistemas dinâmicos de equações diferenciais citados anteriormente possuem soluções em cada situação citada, a seguir mostraremos que uma solução difere para cada sistema. Seja um sistema dinâmico de equações diferenciais não-lineares autônomo dado por;

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}), \text{ com } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

dizemos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de equilíbrio em \mathbb{R}^n , tal que:

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0,$$

ou seja, \vec{x}^* é uma solução que não muda no tempo. Outras nomenclaturas são atribuídas a esta solução, como por exemplo, ponto fixo, ponto estacionário, solução de equilíbrio, mas em nosso texto iremos adotar ponto fixo. Para um sistema não-autônomo pode ser um erro.

Graficamente, para um sistema 1-D, temos;

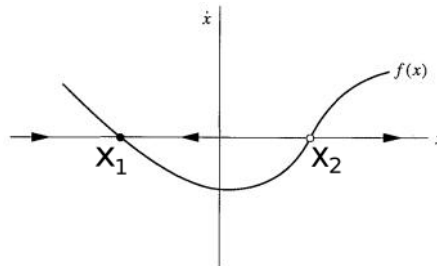


Figura 2.3: Trajetória do plano de fase, em que os pontos \vec{x}_1 e \vec{x}_2 são os pontos fixos do sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$.

Observação 1 *Em se tratando de sistemas de equações diferenciais, temos que, os sistemas não-lineares podem ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados.*

Veremos a seguir se estes pontos são pontos fixos estáveis ou instáveis.

¹ O número de Prandtl Pr é um número adimensional que aproxima a razão de difusividade de momento (viscosidade cinemática) e difusividade térmica de um fluido, expressando a relação entre a difusão de quantidade de movimento e a difusão de quantidade de calor dentro do próprio fluido, sendo uma medida da eficiência destas transferências nas camadas limites hidrodinâmica e térmica.

² Em mecânica dos fluidos, o número de Rayleigh para um fluido é um número adimensional associado com os fluxos conduzidos por empuxo (também conhecidos como convecção livre ou convecção natural).

2.7 Estabilidade

O estudo do equilíbrio desempenha um papel central nas equações diferenciais ordinárias e nas suas aplicações. [12]. Consideremos um campo vetorial autônomo dado por 2.4. Dizemos que uma solução de equilíbrio para este sistema dinâmico, é um ponto $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

isto é, uma solução que não muda com o tempo. Anteriormente, definimos esta solução como ponto fixo. Agora vamos determinar sua estabilidade do sistema, podemos inserir perturbações ou pequenos estímulos próximos, ao ponto fixo, e ver se o sistema se reestabelece, se isso ocorrer, então, ele é dito um sistema dinâmico estável. Contudo, se aplicarmos perturbações de forma que o sistema tenha sua dinâmica alterada, e não consiga se restabelecer, denominamos de um sistema instável.

Para determinarmos esta estabilidade para um ponto fixo \vec{x}^* , suponhamos que \vec{x}^* satisfaça $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$, e perturbemos sua vizinhança em torno de \vec{x}^* , tal que:

$$\vec{\eta}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}^* \quad (2.20)$$

para sabermos se esta perturbação crescerá ou decrescerá calculamos sua derivada:

$$\frac{d}{dt}\vec{\eta} = \dot{\vec{\eta}} = \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{x}^*) = \dot{\vec{x}} \quad (2.21)$$

uma vez que \vec{x}^* seja constante, teremos:

$$\dot{\vec{\eta}} = \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}^* \quad (2.22)$$

usando a expansão em Série de Taylor para obter a função $\vec{f}(\vec{x})$, tem-se:

$$\vec{f}(\vec{x}^* + \vec{\eta}) = \vec{f}(\vec{x}^*) + \vec{f}'(\vec{x}^*)\vec{\eta} + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (2.23)$$

como $\mathcal{O}(\eta^2)$ produzem termos quadráticos pequenos em η . Finalmente note que \vec{x}^* é solução assim temos $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$. Consequentemente:

$$\dot{\vec{\eta}} = \vec{\eta}\vec{f}'(\vec{x}^*) + \mathcal{O}(\eta^2) \quad (2.24)$$

para $\vec{f}'(\vec{x}^*) \neq 0$ os termos de $\mathcal{O}(\eta^2)$ são desprezados e podemos esquecer a aproximação:

$$\vec{f}(\vec{x}^* + \vec{\eta}) = \vec{f}'(\vec{x}^*)\vec{\eta}. \quad (2.25)$$

esta equação é chamada de linearização sobre \vec{x}^* .

A equação (2.25) nos permite dizer se um ponto fixo é instável ou não.

Seja x^* um ponto fixo, ao perturbarmos sua vizinhança a direita, isto é, $\frac{df}{dx}|_{x^*=x^*+\delta} > 0$ e em seguida perturbarmos a sua esquerda e $\frac{df}{dx}|_{x^*=x^*-\delta} < 0$ então este ponto fixo é considerado estável. Se obtivermos os resultados contrários, ou seja, $\frac{df}{dx}|_{x^*=x_0+\delta} < 0$ e $\frac{df}{dx}|_{x^*=x^*-\delta} > 0$ então o ponto fixo é considerado instável. Embora o nosso trabalho tem um foco para discussões dos sistemas dinâmicos no fluxo, podemos abordar como analisar os pontos fixos para um sistema dinâmico de tempo discreto. E a ideia de linearização se dá de forma análoga.

Suponha que x^* satisfaça a condição $f(x^*) = x^*$, então encontramos a solução linearizada do mapa ou equação de diferença, dada por :

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n$$

com autovalor ou multiplicador $\lambda = |f'(x^*)|$. Podemos obter esta expressão desenvolvendo alguns termos, vejamos:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \lambda\eta_0 \\ \eta_2 &= \lambda\eta_1 = \lambda^2\eta_0 \\ &\vdots = \vdots \\ \eta_n &= \lambda\eta_{n-1} = \lambda^n\eta_0 \end{aligned}$$

a seguir temos a seguinte proposição que nos ajuda a analisar a estabilidade de um ponto.

Proposição 1 *Seja f um mapa suave, em \mathbb{R} , e que assume p como um ponto fixo para f .*

- *Se $|f'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo estável.*
- *Se $|f'(p)| > 1$, então p é uma ponto fixo instável.*
- *Para $|f'(p)| = 1$ temos o caso marginal, o qual não podemos afirmar nada.*
[20]

Observação 2 *Uma demonstração sobre esta proposição, está explicada na página 10 da referência [1]*

A seguir nós vamos introduzir uma definição sobre o expoente de Lyapunov, tal expoente pode determinar a existência de caos em certos sistemas dinâmicos ou equações de diferenças, podemos avaliar a sua divergência exponencial entre as trajetórias a partir das condições iniciais.

2.8 Definição: Expoente de Lyapunov

Quando estudamos sistemas dinâmicos, geralmente, deseja-se saber além de sua solução, como suas trajetórias se comportam ao longo do tempo. Para isto utilizamos a definição do expoente de Lyapunov, estes servem para medir a taxa exponencial média do afastamento entre trajetórias de um sistema no espaço de fase. Com este valor é possível caracterizar se um sistema dinâmico de equações não-lineares ou uma equação de diferença são caóticos ou não.

Para nossa melhor compreensão vamos supor que tenhamos duas trajetórias que iniciam seus percursos muito próximos, damos o nome de $x(t)$ e para a sua trajetória vizinha atribuímos $x(t) + \delta(t)$ onde δ é um vetor distância muito pequeno. Quando o sistema evolui no tempo, observa-se que estas trajetórias podem se afastar rapidamente a uma taxa exponencial. A figura abaixo nos fornece apenas uma ideia de como seriam estas curvas no espaço de fase [20]. A expressão que mostra como δ

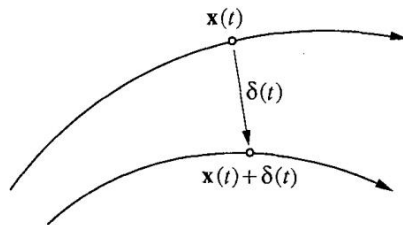


Figura 2.4: Evolução de duas trajetórias próximas. Fonte: Strogatz

crece, é descrita por:

$$|\delta(t)| = |\delta(0)|e^{\lambda t} \quad (2.26)$$

manipulando algebricamente a equação temos:

$$\begin{aligned} \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} &= e^{\lambda t} \\ \ln(e^{\lambda t}) &= \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \\ \lambda t &= \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \\ \therefore \lambda &= \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde λ indica a distância na n -ésima iteração, e este valor chama-se expoente de Lyapunov. A partir deste valor, identificamos que:

- se o valor de $\lambda > 0$ temos que as trajetórias se afastam;
- ao passo que $\lambda < 0$ essas trajetórias se aproximam.

No próximo capítulo, veremos que o expoente de Lyapunov, λ , depende da trajetória estudada, isto é, calcula-se uma média sobre vários pontos distintos desta trajetória para encontrarmos o verdadeiro valor do expoente Lyapunov. Já em um sistema dinâmico de equações diferenciais não-lineares, podemos determinar varios expoentes de Lyapunov, veremos que a partir de uma esfera infinitesimal de condições iniciais perturbadas sua evolução irá transaforma-se em um elipsóide infinitesimal.

Capítulo 3

O Expoente de Lyapunov

Vimos na seção (1.8) do capítulo anterior, uma introdução sobre o expoente de Lyapunov. O que de fato interessa é observar o comportamento das trajetórias, que começam inicialmente muito próximas e que rapidamente se afastam uma da outra divergindo exponencialmente, e isto ocorre pela dependência nas condições iniciais, isto é, se uma a condição inicial for levemente perturbada por uma distância δ , queremos determinar a evolução desta perturbação, ou seja, se ela vai ser amplificada ou atenuada pela dinâmica do sistema. Depois, veremos como se calcula o referido expoente no tempo discreto e contínuo, conceitos que estão bem definidos matematicamente pelo teorema ergódico de Oseledec [14].

3.1 Expoente de Lyapunov para tempo discreto

Nesta seção iremos definir, formalmente, como calcular o expoente de Lyapunov para sistemas de uma dimensão em tempo discreto. Vamos considerar uma aplicação

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

onde F é uma aplicação diferenciável.

Definição 3.1 *Seja F uma função que representa um mapa suave em \mathbb{R} . O expoente λ para uma órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é definido por*

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln |F'(x_1)| + \dots + \ln |F'(x_n)|]$$

desde que este limite exista.

O ponto é que, para órbitas periódicas ou , o número de Lyapunov e $\lambda(x_1)$ descreve o alongamento médio por iteração, perto de um ponto na órbita.

Definição 3.2 *Seja F um mapa suave. Uma órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é chamada assintoticamente periódica se converge para uma órbita periódica como $n \rightarrow \infty$; Isso significa que existe uma órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots\}$ de tal modo que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$$

Qualquer órbita atraída por um ponto fixo atrator é assintoticamente periódica.

Teorema 3.1 *Seja F um mapa da linha real \mathbb{R} . Se a órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ de F satisfaz $F'(x_i) \neq 0$ para todos i e é assintoticamente periódica para a órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$, então as duas órbitas possuem expoentes de Lyapunov idênticos, assumindo ambos existir.*

Prova 1 *Usa-se o fato de que uma média da seqüência converge para o limite de seqüência converge para o limite de seqüência; isto é, se S_n é uma seqüência infinita de números com $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = s.$$

Assuma $k = 1$ para começar, de modo que y_1 seja um ponto fixo. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_1$, o fato de que a derivada F' é uma função contínua que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F'(x_n) = F'(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = F'(y_1)$$

Além disso, desde $\ln|x|$ é uma função contínua para x positivo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln|F'(x_n)| = \ln|\lim_{n \rightarrow \infty} F'(x_n)| = \ln|F'(y_1)|$$

Esta equação nos dá o limite de uma seqüência infinita. Usando o fato de que a média da seqüência converge para o limite da seqüência, vemos que

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln|F'(x_i)| = \ln|F'(y_1)| = h(y_1)$$

Agora suponha que $k > 1$, de modo que y_1 não seja necessariamente um ponto fixo. Então, y_1 é um ponto fixo para F^k , e a órbita de x_1 é assintoticamente periódica em F^k para a órbita de y_1 . Pelo que provamos acima, o expoente de Lyapunov da órbita de x_1 em F^k é $\ln|F^k(y_1)|$.

Dizemos que perto de toda órbita caótica de tamanho finito existe uma órbita assintoticamente periódica, cujo Lyapunov tem o mesmo valor no limite $n \rightarrow \infty$, conforme mostrado.

3.2 O maior Expoente de Lyapunov

Dado um sistema de equações diferenciais não-lineares, com dimensão n , podemos calcular o expoente de Lyapunov, tal tarefa não é tão simples como nos Mapas, 1-dimensão, pois sistemas multidimensionais possuem n expoentes de Lyapunov que correspondem a n -trajetórias independentes no espaço de fases. A estas n -trajetórias estão associadas uma taxa média de divergência ou convergência a que definem de Expoente de Lyapunov. Por definição afirma-se que qualquer sistema dinâmico contendo pelos menos um expoente de Lyapunov positivo é caracterizado como sendo caótico [22].

Para o sistema dinâmico em questão, que gera um fluxo onde denotaremos por $\vec{f}: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e supondo uma condição inicial \vec{x}_0 e um ponto vizinho $\vec{x}_0 + \vec{d}_0$ no espaço de fase, onde \vec{d}_0 é uma perturbação para a condição inicial \vec{x}_0 com imagens $\vec{f}(\vec{x}_0)$ e $\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{d}_0)$, respectivamente. Temos portanto,

$$\vec{d}(t) = \vec{x}_p(t) - \vec{x}(t) = D_{x_0} \vec{f}(x_0) \cdot \vec{d}_0,$$

onde $\vec{x}_p(t)$ é a solução para a condição inicial $\vec{x}_0 + \vec{d}_0$ e $\vec{x}(t)$ é a solução para a condição inicial $\vec{x}(t)$. Temos que o termo anterior é obtido pela linearização de \vec{f} . Portanto a taxa média exponencial para divergência ou convergência para as duas trajetórias é definida por:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\vec{d}_t\|}{\|\vec{d}_0\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|D_{x_0} \vec{f}(x_0) \cdot \vec{d}_0\|,$$

onde $\|\vec{d}\|$ é o comprimento do vetor \vec{d} . Para uma perturbação típica, a trajetória perturbada tende a se alinhar na direção de mais rápido crescimento, e cálculo da expressão acima resultará no maior expoente de Lyapunov, λ_1 . Mas o número de autovalores associados à matriz jacobiana Df indica que há n expoentes a serem determinados, formando assim um espectro de expoentes, o qual será detalhado na seção a seguir.

3.3 Espectro de Lyapunov

Podemos calcular um conjunto formado por vários expoentes de Lyapunov, a este conjunto damos o nome de espectro de Lyapunov. O método utiliza a ideia desenvolvida por Benettin et al e Shimada e Nagashima [19], que determina o conjunto completo de expoentes de Lyapunov para um sistema de equações diferenciais.

Então, seja um conjunto de equações diferenciais com uma condição inicial x_0 , qualquer, obtendo uma trajetória fiducial passando no centro da esfera, e outras

trajetórias cujos pontos pertencem a superfície da esfera, que podem ser separados infinitesimalmente da trajetória fiducial, como mostra a figura(3.1).

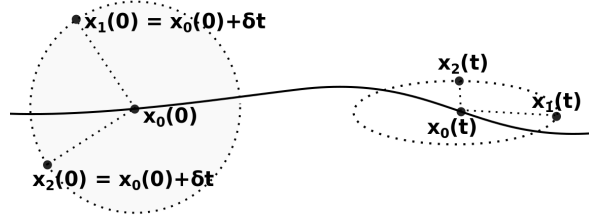


Figura 3.1: Esfera n-dimensional sofrendo deformações para outra forma geométrica, elipsóide.

Em particular, os eixos principais são definidos pela evolução, através das equações lineares de um quadro de vetor inicialmente ortonormal ancorado à trajetória fiduciária. Então o que ocorre é que, simultaneamente, as equações linearizadas de movimento são integradas para n-condições internas diferentes, definindo uma estrutura arbitrariamente orientada de n-vetores ortonormais. Observamos que, cada vetor divergirá em magnitude, mas há uma singularidade adicional em um sistema caótico, cada vetor tende a cair na **direção local** do crescimento mais rápido.

A ideia é que, para tempo contínuo vamos calcular o espectro dos expoentes de Lyapunov fazendo uma discretização do tempo, de modo que $x(t) \rightarrow x_i$.

Então para o sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, onde $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ e o expoente de Lyapunov é fornecido por:

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Upsilon_j|, \quad j=1, \dots, n,$$

sendo $|\Upsilon|$ são os módulos dos auto-valores da matriz definida por

$$M = \prod_{i=1}^N J(x_i),$$

onde os J_i são as matrizes Jacobianas [7]. Neste procedimento a divergência entre as trajetórias é muito grande, apesar de executá-lo para poucas iterações. Além disso a dificuldade desses métodos é calcular o produto;

$$M = \prod_{i=1}^N J(x_i) = J(x_{N-1})J(x_{N-2}) \cdots J(x_1) \quad (3.1)$$

e os autovalores associados. A ideia é mostrar que uma matriz M pode ser expressa na forma de produto entre matrizes triangulares e tem-se como resultado uma matriz triangular. Portanto, os autovalores de uma matriz triangular é o produto dos elementos de sua diagonal principal.

Se a matriz J é invertível então $J'_i = J_i O_{i-1}$ segue que:

$$J_1 = O_i T_1 \quad (3.2)$$

$$J_i O_{i-1} = O_i T_i \quad (3.3)$$

onde O_i é uma matriz ortogonal, e T_i é uma matriz triangular. Então equivale a escrevermos:

$$J_1 = O_i T_1 \quad (3.4)$$

$$J_i = O_i T_i O_{i-1}^{-1} \quad (3.5)$$

a equação (3.1) fica escrita como,

$$\prod_{i=1}^N J(x_i) = O_N T_N O_{N-1}^{-1} O_N T_N O_{N-2}^{-1} \cdots O_1 T_1 \quad (3.6)$$

$$= O_N T_N T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_1. \quad (3.7)$$

A parcela O_N não é utilizada no produto, isto está demonstrado em [14]. Então chegamos a equação

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Upsilon_j| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \ln |T_{jj}| \text{ com } j = 1, \dots, p, \quad (3.8)$$

onde T_{jj} é o elemento da diagonal principal da matriz triangular. Então podemos calcular os λ_j com a média em m iterações [7]

$$\lambda_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln |T_{jj}|, \quad (3.9)$$

que convergirá para um valor médio.

Em um sistema dinâmico dissipativo contínuo tridimensional, os únicos espectros possíveis, e os atratores que podem surgir durante a evolução, são os seguintes:

- i. (+,0,-) um atrator estranho - podemos definir um atrator estranho como o conjunto de comportamentos característicos para o qual evolui um sistema dinâmico independentemente do ponto de partida, isto é, independe de sua condição inicial;
- ii. (0,0,-) toro duplo (quaseperiódico) - Consideremos uma coleção de k osciladores com frequências w_1, \dots, w_k (sem relações racionais entre os w_i : nenhuma combinação linear com coeficientes inteiros diferentes de zero desa-

parece). O movimento dos osciladores é descrito por:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + w_i t \pmod{2\pi}, \quad \text{com } i = 1, \dots, k,$$

e este movimento ocorre no produto de k círculos, ($k > 1$) que é um toro T^k de dimensão k . Assintoticamente o sistema dinâmico será descrito por:

$$x(t) = f^t x = \Phi[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)] \quad (3.10)$$

$$= \Psi(w_1(t), w_2(t), \dots, w_k(t)) \quad (3.11)$$

onde Ψ é periódico, de período 2π ;

- iii. (0,-,-) um ciclo limite (órbitas periódicas) - Um órbita periódica é uma solução f tal que $f^t(x) = f^{t+T}(x)$ para alguma contante $T > 0$ e todo tempo t . O conjunto limite corresponde a solução periódica é uma curva fechada traçada por $f^t(x)$ ao longo de um período, que é topologicamente equivalente a um círculo [17].
- iii. (0,-,-) um ciclo limite (órbitas periódicas) - Suponha que existe um ponto x^* e um $T > 0$, tal que $f^T \bar{x} = \bar{x}$ mas $f^t \bar{x} = x^*$ quando $0 < t < T$. Então \bar{x} é um ponto periódico de período T e $Y = \{f^t \bar{x} : 0 \leq t < T\}$, é a órbita periódica correspondente (ou órbita fechada). A derivada $D_{\bar{x}} f^T$ tem autovalor 1 correspondendo a direção tangente de Y em \bar{x} . Se o resto do espectro está em $\{z : |z| < \alpha\}$ com $\alpha < 1$, então Y é um atrator de órbita periódica;
- iv. (-,-,-) um ponto fixo - Seja x^* um ponto fixo para o sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, isto é:

$$f(x^*) = x^*, \forall t$$

a derivada $D_x f$ de f , no primeiro tempo, como o ponto fixo é uma matriz $m \times m$ ou um operador no espaço de Hilbert¹. Se o seu espectro estiver em um disco $\{z : |z| < \alpha\}$ com $\alpha < 1$, então x^* é um conjunto atrator. [21]

Na próxima seção, iremos ver um tipo especial de equação, que não foge da linha principal deste trabalho, pois possui um comportamento autônomo.

3.4 Mapas

Descreveremos neste segmento, algumas propriedades produzidas por equações simples, tais como as Equações de Diferenças, que possuem um rico comportamento

¹É um espaço vetorial dotado de produto interno, ou seja, com noções de distância e ângulos. Esse espaço obedece uma relação de completude, que garante que os limites existem quando esperados, o que permite e facilita diversas definições da Análise.

dinâmico, como, pontos estáveis, cascatas de ciclos estáveis e até comportamento, que em muitos casos são caóticos. Um exemplo de sistema descrito por uma Equação de Diferenças é o mapa logístico. O mais surpreendente, é que estes mapas geram uma série de previsões, bem sucedidas, como por exemplo, rotas para o caos em semicondutores, convexão de fluidos, populações biológicas e lasers. [15]. Equações de diferença de primeira ordem são equações do tipo:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

onde $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o valor de x na n -ésima iteração e F é uma função dependente das combinações não lineares de x_n , a sequência gerada por esta equação $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é chamada de órbita a partir de de uma condição inicial x_0 . Uma equação de diferença pode descrever um modelo de uma população de insetos, por exemplo. A ideia é analisar a magnitude da população na geração $t+1$, ou seja, x_{t+1} , com à magnitude da população na geração t , x_t , podemos expressar essa relação por $F(x)$, e denominá-la de "densidade dependente". A função não-linear, $F(x)$, tem frequentemente as seguintes propriedades:

- i. $F(0) = 0$;
- ii. $F(x)$, aumenta monotonicamente, à medida que x aumenta através do intervalo $0 < x < A$, com $F(x)$ atingindo seu valor máximo em $x = A$;
- iii. $F(x)$, diminui monotonicamente, à medida que x aumenta além de $x = A$;

Além disso, a função $F(x)$ possui um ou mais parâmetros que qualificam a gravidade do comportamento não-linear. Estes parâmetros geralmente tem algum significado biológico, econômico ou econômico. Apesar de simples, a equação de diferença não-linear possui desvantagem na prática, pois x deve pertencer ao intervalo $0.0 < x < 1.0$, caso x exceda este intervalo as iterações seguintes divergem para $-\infty$, este resultado pode ser interpretado, como a extinção de uma determinada população.

Um exemplo de equação de diferença, que foi bastante estudado na literatura, e que nos interessa por apresentar caos é:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (3.13)$$

que é conhecido conhecida como mapa logístico, cujo comportamento torna-se interessante quando $3.57 \leq r < 4.0$. Esta equação de diferença, mapa logístico, apresenta situações interessantes quando resolvemos modificar os valores do parâmetro r . Vamos supor que, a equação (3.13) esteja modelando, matematicamente, como uma população de seres vivos se comporta. Então, quando atribuímos valores para $r < 1.0$, observamos graficamente, figura(3.2), que a população sempre se extingue,

$x \rightarrow 0$. Caso tenhamos $1.0 < r < 3.0$, o mapa, tem um atrator em $x = \frac{(r-1)}{r}$, uma vez que a magnitude da derivada é inferior a 1, isto é, $|F'(X)| < 1$. As populações pequenas, crescem para um estado estável de $x = \frac{(r-1)}{r}$, isto é, a população tende a estabilizar-se, ver Figura(3.3).

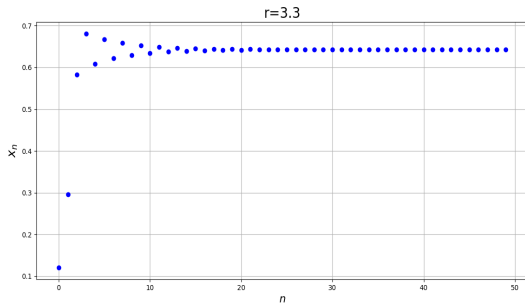


Figura 3.2: Para $1.0 < r \leq 2.8$, para a equação de diferenças

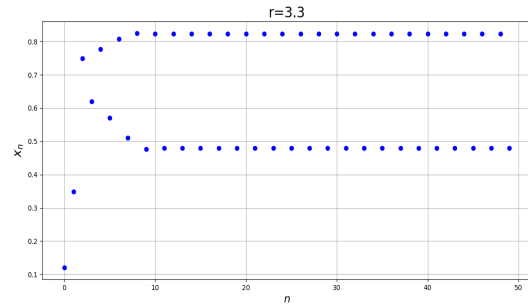


Figura 3.3: Para $2.8 < r \leq 3.3$, para a equação de diferenças

Para valores de $r > 3.0$, o ponto fixo $X = \frac{(r-1)}{r}$ é instável desde que $|F'(X)| > 1$, e um atrator de período de ciclo dois, ocupa seu lugar, como mostrado na Figura(3.3). Quando r cresce acima de 3.5, o período dois também se torna instável, se aproximando de um ciclo que agora se repete a cada quatro, isto é, o ciclo anterior duplicou seu período. [20]

Quando o valor de $r = 3.9$ esse efeito de instabilidade acontece, veja que ao traçarmos um eixo vertical que passa por r esta intersecta o gráfico, da Figura (3.6), em quatro pontos.

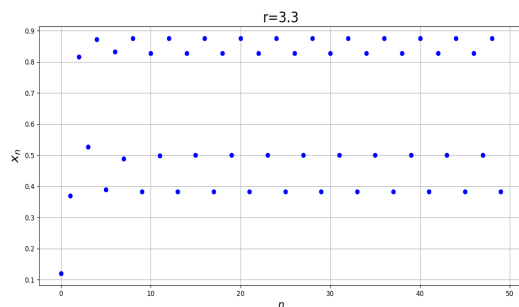


Figura 3.4: Para $3.3 < r \leq 3.5$ para a equação de diferenças

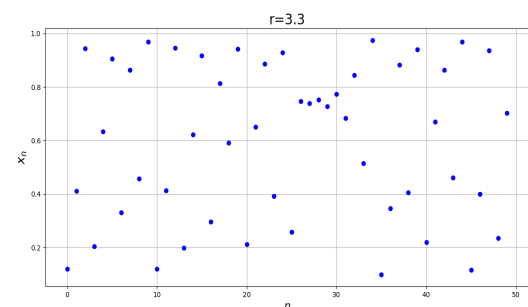


Figura 3.5: Para $3.5 < r \leq 3.9$ para a equação de diferenças

O gráfico da Figura(3.6), é obtido computando valores de λ versus r do mapa logístico, a imagem indica de onde a função deixa de ter órbitas periódicas e pontos fixos, entrando em um estágio aperiódico.

Quando λ atinge o valor 0 ocorre uma bifurcação. Observamos ainda, que a ocorrência da primeira bifurcação acontecem $r = 3.0$ e que, a partir de valores de $r = 3.6847$ temos um estado caótico. O expoente de Lyapunov geralmente aumenta,

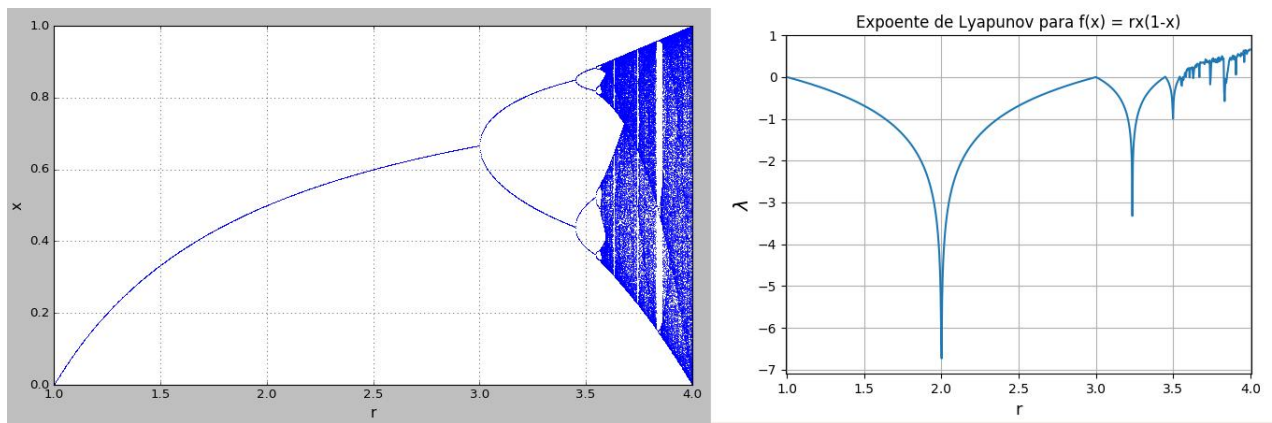


Figura 3.6: O gráfico da esquerda refere-se a mapa de bifurcação, ambos mostram onde o caos acontece, isto é, quando $r \approx 3.54087$.

exceto nos pontos aonde o logaritmo é negativo, causando janelas de comportamento periódico. Para uma melhor visualização do que expomos anteriormente, na imagem da figura(3.4) sobrepomos o gráfico de bifurcação e o gráfico do expoente de Lyapunov.

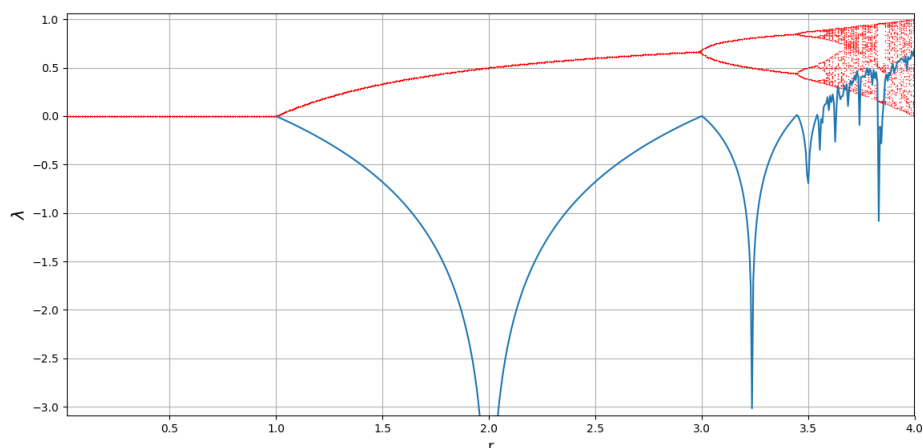


Figura 3.7: Gráficos do Expoente de Lyapunov e Bifurcação sobrepostos.

Observação 3 *Para o leitor, acompanhar o desenvolvimento do exemplo disponibilizamos um algoritmo que encontra-se no apêndice deste trabalho.*

Um outro exemplo que podemos observar o expoente de Lyapunov positivo, isto é, a presença de caos, é o comportamento da equação de diferença $f(x) = 2x \pmod{1}$.

O que vemos na imagem figura(3.9), é uma sequência de números, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, gerada por $2x \pmod{1}$, para obtermos a sequência, multiplicase 2 por x_0 , onde $x_0 \in [0, 1]$, e se o resultado for maior do que 1, subtraímos uma unidade, de forma que o próximo valor, x_1 , pertença ao intervalo entre 0 e 1. Ob-

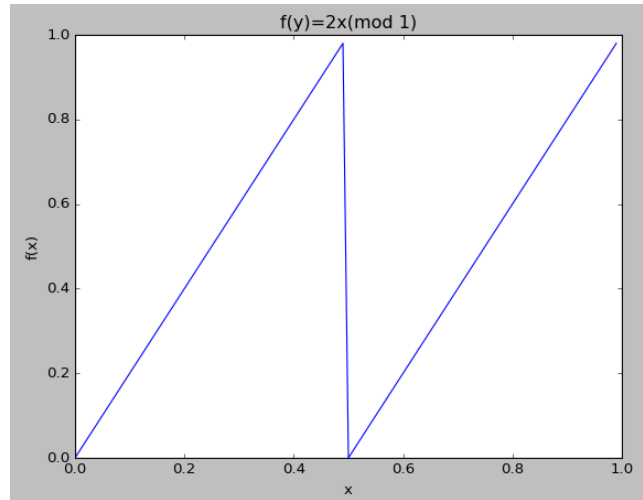


Figura 3.8: Gráfico da função $f(x) = 2x \pmod{1}$. A imagem mostra um mapa em sua n -ésima iteração.

servamos que este mapa não é contínuo em $x = \frac{1}{2}$, mas o que nos interessa não é esta descontinuidade, e sim a ideia de círculo.

Comparando os gráficos anteriores, referente ao mapa logístico, vimos que quando r varia constatamos a evolução da população em ciclos referentes até a condição de caos, no gráfico de Shift Bernoulli, não existe um parâmetro r a ser variado, mas podemos identificar que não há formação de órbitas periódicas observando o comportamento de x em função de n apenas olhando pois est nos dá apenas dois segmentos paralelos, o que vamos fazer é plotar os dados $x[n]$ por $x[n + 1]$,

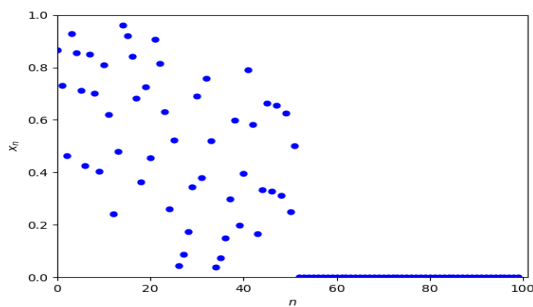


Figura 3.9: Solução do Mapa Shift Bernoulli com números em ponto flutuante.

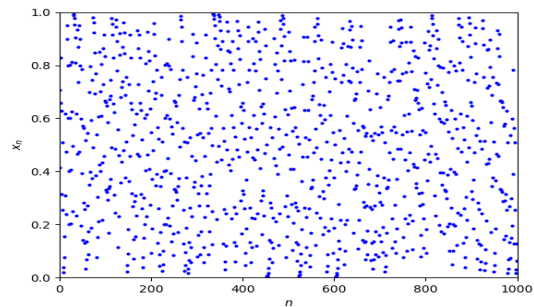


Figura 3.10: Solução do Mapa Shift Bernoulli usando números com 1000 casas decimais (pacote Decimal do Python).

"Ao gerarmos o gráfico a função $f(x) = 2x \pmod{1}$, encontramos um problema como podemos visualizar a Figura 3.9, pois a cada iteração no mapa um bit de informação sobre a condição inicial é perdido, então depois de 52 iterações (no máximo) o número cai em 0 e fica neste ponto fixo. isso ocorre por um problema de implementação numérica em ponto flutuante. Só conseguimos a representação gráfica correta como a Figura

3.10, usando o pacote Decimal do Python, que permite aumentar o número de bits usado na representação de ponto flutuante arbitrariamente. A figura fora calculada usando 1000 casas decimais. (Hugo Cavalcante, comunicação pessoal).

e cada um desses números tem uma ação externa binária $0.a_1a_2a_3\dots$ onde para cada i , $a_i = 0$ ou 1 definimos o mapa $f : T^1 \rightarrow T^1$ com segue:

$$f(x) = 2x \pmod{1} \quad (3.14)$$

O que ocorre é que, a função f substitui a sequência $0.a_1a_2a_3\dots$ por um nova sequência $0.a_2a_3a_4\dots$, onde o termo a_1 , binário, é deslocado um bit, portanto, devido a este deslocamento atribuiu o nome de "shift" Bernoulli. Obtemos a forma numérica dos expoentes de Lyapunov, mas também podemos obter este valor de forma analítica. Lembrando que nem sempre é possível o cálculo analítico do expoente de Lyapunov pois este depende das particularidades do mapa. Então podemos escrever a equação $x_{n+1} = 2x \pmod{1}$ como $x_{n+1} = F(x_n)$ e aplicando na equação (2.27) obtemos o expoente de Lyapunov para o mapa de Bernoulli, exceto em $x = \frac{1}{2}$, onde a derivada não está definida, então;

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_n \ln |F'(x)| \\ &= \frac{n}{n} \sum_n \ln |2| \\ &= \ln |2| \\ \therefore \lambda &\approx 0.6931 > 0 \end{aligned}$$

A partir do próximo tópico, iremos nos dedicar aos sistemas não-lineares autônomos, veremos como se comportam tais sistemas ao variarmos os parâmetros e suas condições iniciais.

3.5 Alguns métodos de cálculo do expoente de Lyapunov

Antes de apresentarem-se os resultados obtidos neste trabalho, é interessante revermos como funcionam alguns métodos a exemplo do método padrão ou clássico, o método do Wolf e o método do Sandri, para calcular o expoente de Lyapunov em sistemas dinâmicos não lineares, os métodos mais conhecidos são:

- método das trajetórias ou método direto;

- método das perturbações ou espaços tangentes (matriz Jacobiana).

este último método se mostra mais promissor para o calculo do expoente em séries temporais. Utilizaremos o sistema de equações não lineares de Lorenz e de Rössler para aplicar os algoritmos desenvolvido no método do Wolf [22] e em seguida aplicaremos o método desenvolvido por Sano e Sawada [18].

3.5.1 O método padrão

O método consiste em evoluirmos um sistema dinâmico de equações diferenciais não-lineares, a partir de uma condição inicial x_0 no tempo para obtermos uma solução, onde esta solução será chamada de trajetória fiducial. O algoritmo construído para analisar o sistema, foi implementado linearizando as equações diferenciais em torno da trajetória fiducial, dada por $x = x(t)$.

$$\dot{\eta} = DF(X)\eta \quad (3.15)$$

onde η são as equações linearizadas e $DF(X)$ é a matriz jacobiana do tipo $n \times n$,

$$D_x F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Para aplicarmos a equação (3.15), temos a notação:

$$\eta = \begin{bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{yx} & \delta_{zx} \\ \delta_{xy} & \delta_{yy} & \delta_{zy} \\ \delta_{xz} & \delta_{yz} & \delta_{zz} \end{bmatrix}$$

onde δ_{xy} é o componente da variação x [4], o método clássico ou padrão consiste em construir o espaço tangente subjacente a dinâmica, com isso é possível acompanhar a distância entre as trajetórias linearizadas e a trajetória fiducial. Consegue-se resolver um sistema de equações diferenciais não-lineares, resolvendo de forma simultânea todas as n equações linearizadas, então para as n direções ortogonais, temos:

$$[\dot{\delta}] = D_x \vec{F}[\delta]$$

A equação acima irá nos fornecer doze equações incluindo as equações do sistema diferencial não-linear. E trabalhamos com o vetor de estado aumentado $n(n + 1)$

Durante a execução das trajetórias se faz necessário ortonormalizar os vetores, corrigindo os vetores que tendem a crescer rapidamente. [5] Para contornar este

problema de direção, utilizamos o método de Gram-Schmidt (GSR), que admite-se uma base ortonormal que forma cada componentes do vetor. Dada uma condição inicial qualquer, utilizamos o processo de re-ortonormalização de Gram-Shmidt, [2], [22], para gerar uma base alinhada com as direções dos eixos principais da esfera do sistema dinâmico. Então o processo de GRS, partindo de uma base $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$, podemos obter uma base ortonormal $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ o seguinte conjunto de vetores ortonormais obtidos a partir de:

$$u_j = \nu_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle q_i, \nu_j \rangle q_i \quad \text{onde} \quad q_j = \frac{u_j}{\|u_j\|} \quad (3.16)$$

com $j = 2, \dots, m$ e \langle, \rangle sendo o produto vetorial.

Durante a evolução usamos um Δt como passo entre as ortonormalizações e se desejar verifica-se a aproximação dos expoentes de Lyapunov. O valor de u_j é armazenado antes do processo de ortonormalização:

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{k\Delta t} \sum_{j=1}^k \ln \|u_i(j\Delta t)\| \quad (3.17)$$

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{ik} \quad (3.18)$$

3.5.2 O método do Wolf

Esse método detecta se em um sistema dinâmico há presença de expoentes negativos e/ou positivos de Lyapunov, caso ocorra ao menos um expoente positivo este sistema caracteriza-se como caótico. Segundo [22], dado uma série temporal $x(t)$, um espaço de estados m -dimensional é reconstruído com coordenadas de atraso, um ponto sobre o atrator é dado por $\{x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)\}$, onde τ é o tempo de atraso, devendo ser bem escolhido. Um ponto próximo é localizado (pela distância euclidiana, por exemplo) ao ponto inicial $\{x(t_0), x(t_0 + \tau), \dots, x(t_0 + (m - 1)\tau)\}$ denotamos a distância entre estes dois ponto por $L(t_0)$. Para um tempo t_1 teremos uma distância $L(t_1)$. No esquema da figura(3.5.2) que mostra a evolução das trajetórias, o maior expoente de Lyapunov é calculado a partir do crescimento dos elementos de comprimento. Quando a distância entre dois pontos cresce, um novo ponto é escolhido perto da trajetória funducial, minimizando o comprimento de substituição e a mudança de orientação do vetor. Aplicando a equação (2.15) temos [22]:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \ln \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}, \quad (3.19)$$

e esta irá nos fornecer a divergência exponencial com relação ao comprimento. Usamos um procedimento análogo para obter os dois maiores expoentes de Lyapunov, este

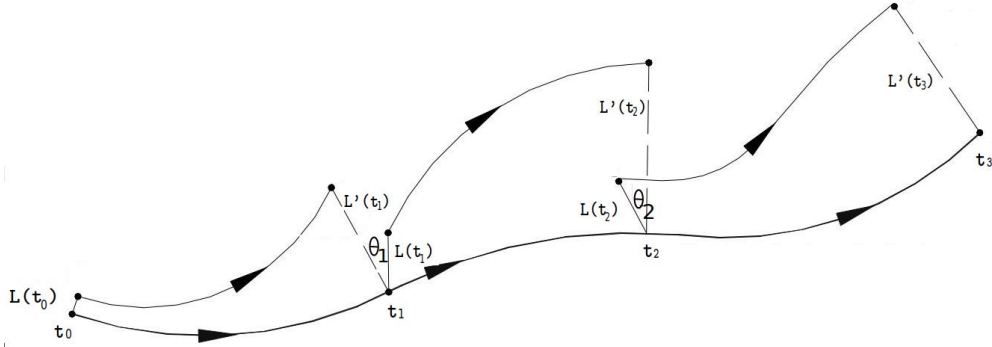


Figura 3.11: Fonte: Artigo do Wolf et. al. 1985

será obtido pelo crescimento dos elementos de área. Portanto, quando o elemento de área torna-se grande ou distorcido, então, escolhe-se dois novos pontos perto da trajetória de referência, minimizando a área de substituição e a orientação do espaço de fase entre os elementos da área original e de substituição. Novamente aplicamos a equação (2.15) teremos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \ln \frac{A'(t_k)}{A(t_{k-1})}, \quad (3.20)$$

esta soma de $\lambda_1 + \lambda_2$, nós dará a divergência com relação a área.

A seguir descreveremos o método de Sano e Sawada, que também se propõe a estimar de forma quantitativa o espectro de Lyapunov em séries temporais

3.5.3 O método do Sano e Sawada

Este método faz parte da família dos métodos das trajetórias perturbadas, bem como o do Wolf. Consideremos a trajetória $x(t)$ para o sistema $\dot{x} = f(x)$ sendo uma solução do sistema dinâmico no espaço de fase. Por outro lado a evolução do vetor tangente ξ no espaço tangente para $x(t)$ é dada pela linearização:

$$\dot{\xi} = T(x)\xi,$$

onde $T = Df$ é a matriz jacobiana e cada elemento $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, e a solução do sistema não autônomo é dada por:

$$\xi(t) = A^t \xi(0), \quad (3.21)$$

onde a matriz A^t é o operador linear que mapeia o vetor tangente $\xi(0)$ para $\xi(t)$.

A taxa média exponencial de divergência é escrita como segue:

$$\lambda(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\xi(t)\|}{\|\xi(0)\|}, \quad (3.22)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma do vetor ξ . Como nem sempre conseguimos saber quais são as equações diferenciais não-lineares que produzem uma trajetória no espaço de fase, este método possibilita estimar um fluxo linearizado do mapa A^t do espaço tangente a partir dos dados observados [18]. Tomando um conjunto de pontos $\{x_j\}$ com $j = (1, 2, \dots)$ denotando uma série temporal para algum sistema físico no intervalo de tempo discreto Δt , ou seja, $x_j = x(t_0 + (j - 1)\Delta t)$. Considere agora uma bola de raio ϵ centrada no órbita do ponto x_j

$$\{y^i\} = \{x_{k_i} - x_j : \|x_{k_i} - x_j\| \leq \epsilon\}, \quad (3.23)$$

onde y_i é o vetor substituição entre x_{k_i} e x_j . Usando a norma euclidiana usual $\|s\| = (s_1^2 + \dots + s_n^2)^{1/2}$ para algum vetor $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Após a evolução no tempo o ponto orbital x_j irá avançar para x_{j+m} e os pontos vizinhos x_{k_i} avançarão para x_{k_i+m} . O vetor substituição será mapeado por:

$$\{z^i\} = \{x_{k_i+m} - x_{j+m} : \|x_{k_i} - x_j\| \leq \epsilon\}, \quad (3.24)$$

Se o raio da bola for suficientemente pequeno para os vetores de substituição $\{y^i\}$ e $\{z^i\}$, então são considerados uma boa aproximação para os vetores tangentes no espaço tangente, a evolução de $\{y^i\}$ para $\{z^i\}$ pode ser representada pela matriz A_j como sendo:

$$z^i = A_j y^i, \quad (3.25)$$

onde a matriz A_j é uma aproximação do fluxo do mapa A^t em x_j na equação (3.21). Aplicando o método dos mínimos quadrados para onde este irá minimizar o erro quadrado em z^i e $A_j y^i$ em relação a todos os elementos da matriz A_j como segue:

$$\min S = \min \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|z^i - A_j y^i\|^2 \quad (3.26)$$

cada elemento da matriz A será denotado por $a_{kl}(j)$ e aplicando na condição (3.26) obteremos $d \times d$ equações para resolver, $\frac{\partial S}{\partial a_{kl}(j)} = 0$. Encontramos a matriz A_j por:

$$A_j V = C, \quad (3.27)$$

com,

$$(V)_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{ik} y^{il}, \quad (3.28)$$

e

$$(C)_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{ik} y^{il}, \quad (3.29)$$

onde C e V são matriz de ordem $d \times d$, chamada matizes de covariância, e $\{y^{ik}\}$ $\{z^{ik}\}$ são os k -componentes dos vetores y^i e z^i , respectivamente. como já determinmos a equações variacional no espaço de fase o expoente de Lyapunov pelo método de Sano e Sawada é dado por:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^N \ln \|Ae_j^i\|, \quad (3.30)$$

onde a matriz A_j é solução da equação (3.27), com $\{i = 1, 2, \dots, d\}$ e $\{e_j^i\}$ é um conjunto de bases ortonormais no espaço tangente em x_j .

A seguir faremos uma análise do método descrito pelo Wolf nos sistemas de Lorenz e Rössler e, posteriormente, aplicaremos o método de Sano e Sawada aos mesmos sistemas, para verificar o comportamento temporal destas series. Espera-se, de fato, que possamos classificar os sistemas em: atrator estranho, toro, ciclo periódico e ponto fixo. Queremos evidenciar, entretanto, que, apesar de diversas tentativas, não foi possível analisar os sistemas de Lorenz e Rössler, aplicando o método do Sano e Sawada, por não obter a implementação de um algoritmo que calculasse as trajetórias da serie temporal, pois tivemos a impressão de existir lacunas no esclarecimento dos intervalos a serem escolhidos.

3.6 O sistema de Lorenz

Um dos sistemas mais estudados na literatura da movimentação caótica, é o sistema de Lorenz, de dimensão 3, apresentando trajetórias caóticas, sendo também um sistema dissipativo. A seguir escrevemos o sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $\sigma, \rho, e, b > 0$ são os parâmetros das equações do sistema, . Para plotarmos a figura (3.5) a seguir, utilizamos como parâmetro de entrada os valores de $\sigma = 10.0$, $\rho = 45.95$, e $\beta = 8/3.0$, com uma condição inicial $x_0 = (1.0, -0.8, 1.04)$, este por sua vez, assemelha-se com a geometria do sistema original. Os parâmetros do modelo original do sistema de Edward Lorenz são $\sigma = 10$, $\rho = 28$, e $\beta = \frac{8}{3}$.

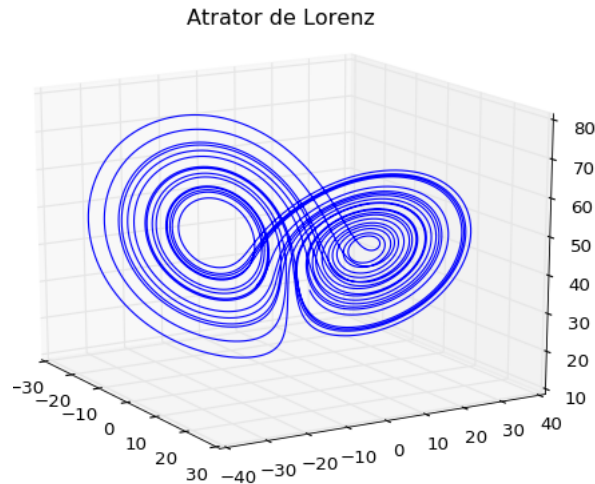


Figura 3.12: A imagem ilustra o atrator de Lorenz que, para valores de $\rho < 23.899$, observamos um comportamento estável, isto é, o sistema evolui para um dos dois lobulos. E a medida que ρ cresce observamos um comportamento caótico.

O atrator produzido, pelo sistema de equações de Lorenz, não pertence a nenhuma categoria de axiomas da matemática. Algo de fundamental importância, no estudo de sistemas dinâmicos, são os conjuntos limites que dividem-se em quatro, a saber:

1. Ponto fixo - um ponto fixo é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$ para todo t .
2. Ciclo periódico - um movimento periódico é uma solução f tal que $x(t) = x(t + T)$, $\forall t$ e algum $T > 0$;
3. Ciclos quasi-periódicos - uma solução quasi-periódica para um sistema dinâmico é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que pode ser representada por:

$$x(t) = \phi(w_1 t, \dots, w_n t)$$

onde H é uma função de período 2π , para cada argumento, e os $w'_i s \in \mathbb{R}$.

5. movimentos caóticos - podemos dizer sem muita formalidade que, um sistema caótico atende aos itens:
 - a) são limitados aleatoriamente como trajetórias de estado permanente distintos do Ponto fixo e Ciclo quasi-periódico;

- b) convergem para um conjunto no espaço de fase chamado de atrator estranho, cuja estrutura é complexa;
- c) dependendo das condições iniciais suas trajetórias caóticas divergem localmente, isto é, pequenas mudanças nas condições iniciais se desenvolvem exponencialmente muito rapidamente causando mudanças em sua evolução.

Como a aplicação deste trabalho é baseada nos expoentes de Lyapunov, então podemos investigar a estabilidade desses conjuntos limites por estes conceitos. Portanto vamos considerar duas órbitas, x_0 e $x_0 + \delta$, e que após certo tempo, produzem imagens $f(x_0)$ e $f(x_0 + \delta)$, com δ , sendo uma perturbação escrita como:

$$\delta_n = f(x_0 + \delta) - f(x_0) = J(x_0) \cdot \delta_0 \quad (3.32)$$

onde obtemos os termos anteriores pela linearização f . Assim, a taxa média de divergência ou convergência entre, as duas trajetórias descritas, é dada por:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta_n\|}{\|\delta_0\|} \quad (3.33)$$

Então, para prevermos o espectro de Lyapunov em um sistema dinâmico, com equações diferenciais com uma condição inicial, façamos:

$$\dot{\phi}(x_0) = J(x) \cdot \phi(x_0), \quad \text{onde } \phi_0(x_0) = I. \quad (3.34)$$

onde $\phi_t(x_0)$ é a derivada com respeito a x_0 de f com x_0 e $J(x)$ é a matriz jacobiana com respeito ao sistema de equações diferenciais. Que será, $\phi(x_0) = D_{x_0} f(x_0)$ é uma equação diferencial linear variando tempo com matriz, cujos coeficientes dependem da evolução do sistema original (1). Portanto, para calcular a trajetória, devemos integrar a combinação do sistema. [17].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x) \\ J(x) \cdot \phi \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ \phi(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

dada a matriz, $J(x)$, associada ao sistema (3.31):

$$J(x) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + \rho & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}$$

onde J , é a matriz jacobiana, e que o traço, τ , é dado por::

$$\tau = \begin{bmatrix} -\sigma & -1 & -\beta \end{bmatrix}$$

O traço determina a variação do volume de uma pequena região no espaço de fase, como cada ponto no deslocamento de acordo com o sistema (3.31) [10]. esta situação nos fornece o resultado, $\sum_{k=1}^3 l^{(k)} = -1 - \sigma - \beta$, independente da órbita. Um outro resultado interessante é que:

$$0 \geq l^{(2)} \geq -\frac{1}{2}(-1 + \sigma + \beta).$$

Esta equação descreve como as perturbações (ou volumes de espaço de estado) evoluem ao longo de uma trajetória. Esse tipo de informação é essencial para qualquer tipo de compreensão aprofundada das paisagens dos sistemas dinâmicos. [4] Os parâmetros que foram usados para determinar os expoentes de Lyapunov foram: $\sigma = 16.0$, $\rho = 28.0$ e $\beta = 4/5.7$, e os expoentes $\lambda_1 = 4.3263$, $\lambda_2 = -0.0467$ e $\lambda_3 = -9.7268$, com um passo de 0.001 para a integração, usando o odeint do python, como isso, constatamos que o sistema possui um comportamento caótico.

Tomamos uma n-esfera infinitesimal, com condições iniciais, x_0 , no centro da esfera, acompanharemos a evolução, ao longo da trajetória, a mudança de comprimento e a orientação de cada vetor dependem da inclinação diferencial em torno da trajetória. A imagem da figura(3.13) mostra na prática o que fora dito anteriormente, quando definimos o espectro de Lyapunov, no qual o uso do algoritmo descrito por Wolf nos fornece uma análise gráfica da evolução dos sistemas de equações diferenciais não-lineares, que possuem em sua dinâmica vetores que se contraem e expandem em diferentes direções no espaço de fase.

Obtendo os expoentes de Lyapunov através de um resultado numérico, podemos calcular a extensão linear do elipsóide por $e^{\lambda t}$, a área será calculada pelos dois eixos principais, cuja expressão será $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ e o volume do elipsóide será fornecido pelos três primeiros eixos, $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$, como afirmou Wolf em seu artigo et al 1985. Desenvolvendo o algoritmo, conseguimos o seguinte espectro para a condição inicial $x_0 = (1.2, -0.5, 1.06)$, cujos valores dos parâmetros do sistema de Lorenz são $\sigma = 16.0$, $\rho = 28.0$ e $\beta = 4.0/5.7$:

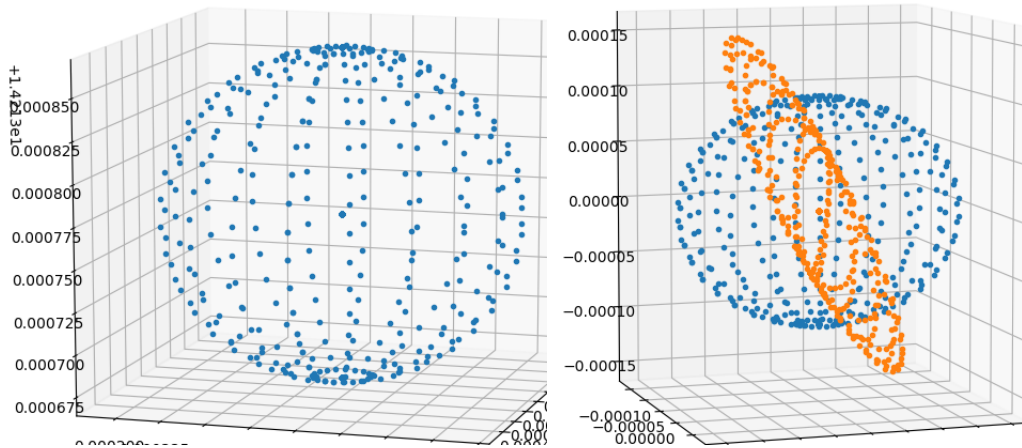


Figura 3.13: Evolução da n-esfera no espaço de fase, para um elipsóide, a deformação ocorre por que os menores expoentes seguem o maior expoente de Lyapunov.

λ_1	λ_2	λ_3
4.32613425	-0.0466372	-9.898263

onde $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ formam o espectro de Lyapunov.

Na imagem seguinte, observamos que os valores obtidos numericamente dos expoentes λ_i , nos fornece um conjunto chamado de Espectro de Lyapunov, de forma que os expoentes se ordenam numa ordem decrescente, isto é, $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3)$ e respectivamente temos os sinais $(+, 0, -)$, que são condizentes com a definição de atrator caótico, conforme mostrado no gráfico da figura(3.12):

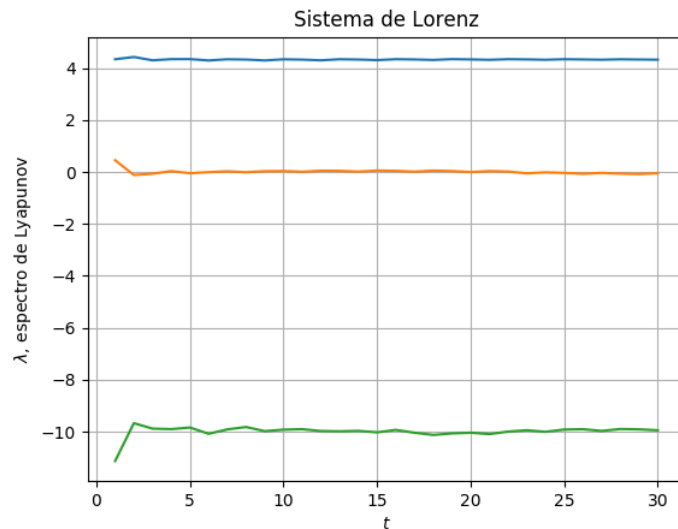


Figura 3.14: Os dados que inserirmos foram: para a condição inicial $x_0 = (1.2, -5, 1.06)$ e os parâmetros $\sigma = 16.0$, $\rho = 28.0$ e $\beta = 4.0/5.7$

3.7 O sistema de Rössler

O sistema de equações diferenciais não-lineares a seguir foi apresentado em 1976, por O. E. Rössler, esse sistema contém apenas um termo não linear, xz , diferente do sistema de Lorenz, que possui dois termos não lineares. As equações a seguir descrevem o sistema dinâmico autônomo de Rössler:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{3.37}$$

onde a , b e c são parâmetros reais. A forma gráfica gerada pelo o fluxo do sistema, é conhecida como o atrator de Rössler, este por sua vez tem a forma de uma espiral única, em que a parte externa retorna para o centro após uma torção apropriada.[16]. Observando detalhadamente o fluxo do sistema Rössler, através da

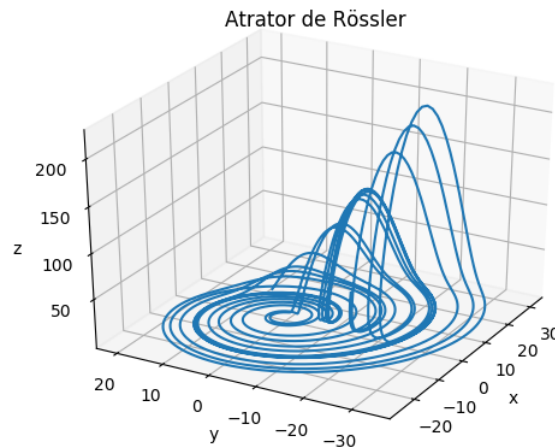


Figura 3.15: Trajetórias no espaço de fase, do sistema de Rössler, para valores de parâmetros $a = 0.313$, $b = 0.1370$. e $c = 14.09$ e com condições iniciais $x_0 = [0.0, -2.0, 0.3]$

figura (3.15), temos a impressão que o fluxo não está em uma superfície dobrada, mas sim, um disco dobrado de largura finita. Portanto, cada seção transversal observada, é bidimensional. [16]. A dinâmica caótica, então, fica por conta da variável z , pois se negligenciarmos z , desprezando-a, ficaremos com um sistema de duas equações lineares. A seguir, exibiremos gráficos em que restringiremos os valores de $a = 0.2$ e $b = 0.2$ e atribuiremos valores ao parâmetro c , o qual gerou ciclos limites diferenciados.

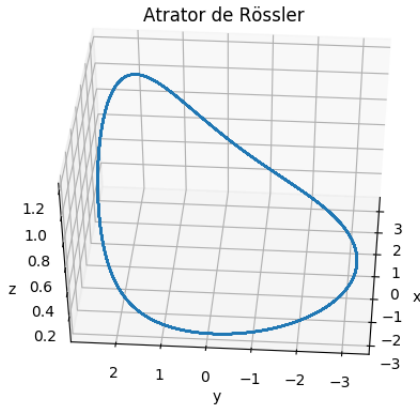


Figura 3.16: Trajetória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0,2$ e $c = 3.794.0$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$

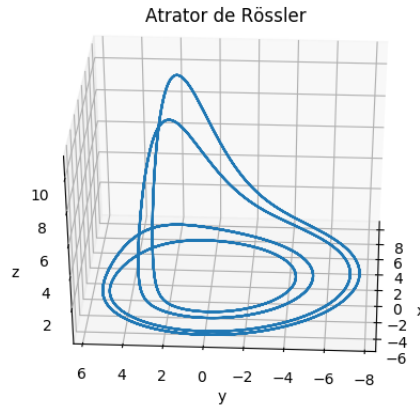


Figura 3.17: Trajetória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0,2$ e $c = 4.0$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$

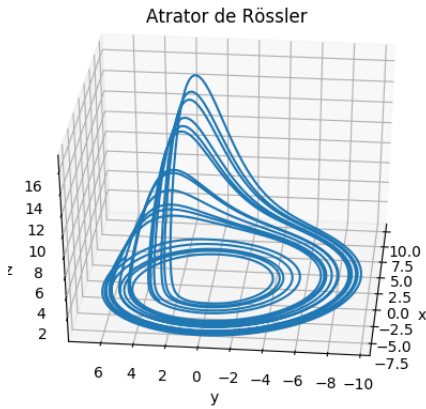


Figura 3.18: Trajetória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0,2$ e $c = 4.99$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$

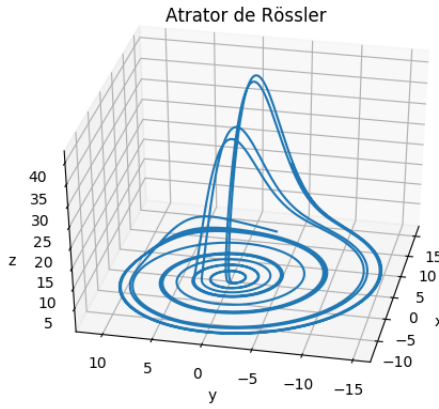


Figura 3.19: Trajetória no espaço de fase para o Sistema de Rössler, $a = b = 0,2$ e $c = 7.9$ e com condição inicial $x_0 = [0.0, 2.0, 08]$

Assim como o sistema Lorenz, é difícil provar resultados específicos sobre este sistema, pois essa exploração se concentrará na experiência numérica e na construção de um modelo. [12]. Neste modelo, sistema de Rössler, podemos observar as contrações, as expansões e uma re-injeção que parece percorrer uma trajetória muito próxima, percebemos também que, em uma direção há compressão para proteger o atrator e, na outra direção, há divergências ao longo do atrator.[20]

O que vemos na figura (3.15) são trajetórias que permanecem, confinadas, no atrator, onde este está limitado no espaço de fase. O gráfico acima pode ter outras variações à medida que variamos o parâmetro c , vejamos alguns exemplos: Uma forma compacta de descrevê-la é através do espectro de expoentes de Lyapunov. Esse espectro caracteriza localmente as direções. Utilizando o método desenvolvido no artigo do Wolf et al 1985, conseguimos obter os dados referentes ao espectro de

Lyapunov para o sistema de Rössler.

Como podemos verificar, os sistemas de equações diferenciais não-lineares possuem um comportamento em sua dinâmica de contração e expansão em diferentes direções, conforme vimos na evolução da esfera para o elipsoide. Como isso, temos a certeza da presença de um expoente de Lyapunov positivo.

Desenvolvendo o algoritmo, conseguimos o seguinte espectro, para a condição inicial $x_0 = (0.1, -0.8, 1.04)$ e parâmetros do sistema com valores $a = 0.15$, $b = 0.20$ e $c = 10.0$:

λ_1	λ_2	λ_3
3.85543479333	-0.0688409774921	-4.18511692778

onde $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ formam o espectro de Lyapunov. Uma visão geométrica deste conjunto está descrita na figura(3.13), abaixo, permitindo, portanto, maiores detalhes do espectro.

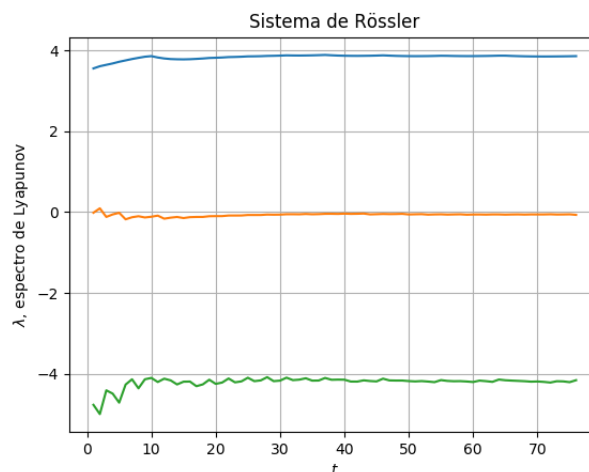


Figura 3.20: Espectro de Lyapunov obtido para o sistema de Rössler

Como dissemos anteriormente, o expoente de Lyapunov é um número que representa a taxa de divergência que nos permite diagnosticar se um sistema dinâmico é instável ou estável, essa medida até agora fora determinada de forma global, mas as vezes precisa-se entender como o sistema se comporta próximo a um ponto x_0 no espaço de fase, ou seja, é necessário determinar essa taxa em um tempo finito local. Uma aproximação dos expoentes de Lyapunov são avaliados ao longo de uma trajetória seguido pelo sistema conduzido por uma sequência de valores reais [8]. Podemos obter este resultado através dos autovalores da matriz Jacobiana definida por $D_x F$ avaliado em x_0 .

Conseguimos então validar os resultados abaixo, a partir do algoritmo desenvolvido em Python aplicando ao sistemas já conhecidos, Lorenz e Rössler, estimando o expoente de Lapunov a partir da média temporal dos expoentes de Lyapunov locais ao longo da trajetória. Portanto, para o sistema de Lorenz as nossas simulações

numéricas obtidas foram $\lambda_1 = 8.52021$ e $\lambda_2 = -22.6860$ cujo gráfico desses dados esta representado na imagem a seguir:

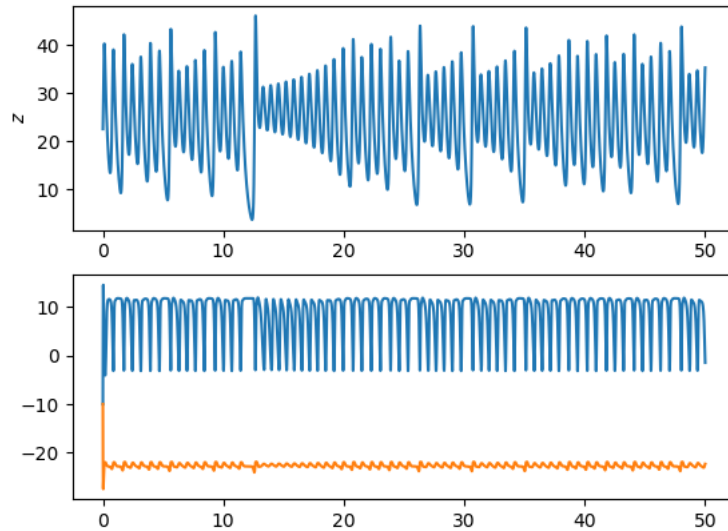


Figura 3.21: Espectro de Lyapunov obtido localmente para o sistema de Lorenz

para o sistema dinâmico de Rössler obtivemos o maior expoente de Lyapunov Local ao longo da trajetória dado por $\lambda_1 = 0.83719$ e o menor expoente sendo estimado por $\lambda_2 = -14.274$

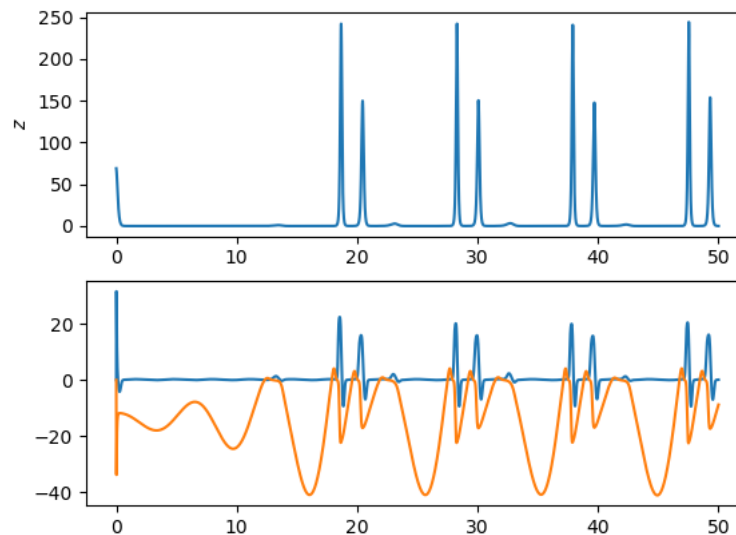


Figura 3.22: Espectro de Lyapunov obtido localmente para o sistema de Rössler

Assim verifica-se que os dados obtidos, mostram que um sistema dinâmico é considerado ser localmente instável (caótico) se $\lambda > 0$ e localmente estável se $\lambda < 0$.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Neste trabalho estudamos o comportamento de sistemas dinâmicos com equações diferenciais não lineares, através de alguns resultados numéricos, já que a resolução de forma analítica torna-se extremamente inviável. Portanto usam-se métodos numéricos para estimar alguns resultados, bem como a análise gráfica do espaço de fase que fornece muitas informações sobre o sistema, a exemplo de pontos fixos, bifurcações, estabilidades e instabilidade. Para tanto, usamos como ferramenta/software a linguagem de programação Python, e o pacotes numpy que é uma biblioteca numérica para manipular vetores, a biblioteca matplotlib que nos auxiliou em algumas visualizações gráficas e o odeint que é um integrador de uso geral usando LSODA (Livermore Solver para Equações Diferenciais Ordinárias com o método automático de comutação para problemas rígidos e não-rígidos de sistemas).

O que avaliamos foi como relacionar a evolução do sistema do ponto de vista da dinâmica, verificando as propriedades contidas na literatura de sistemas dinâmicos de equações não-lineares. Apesar de que a presença de um expoente de Lyapunov positivo, como dito anteriormente, determina ou caracteriza o sistema em caótico, para determinados valores dos parâmetros, bem como a condição inicial, conforme apresentado no sistema de Lorenz utilizando o método do Wolf et. al. 1985. Conseguimos obter o conjunto formado por todos os expoentes de Lyapunov, ou seja, o espectro de Lyapunov que contém, além o expoente positivo, o expoente nulo e o negativo.

Verificamos, na aboradagem do estudo de Equações de Diferenças ou Mapas, que podemos encontrar um conjunto de dinâmicas não-lineares apesar de simples, esta equação de diferença ou mapa produz estabilidade, oscilações periódicas ou até mesmo caos para diferentes valores do parâmetro taxa de crescimento que denotamos por r . Como motivação usamos a equação de diferença para modelar uma população biológica, e podemos acompanhar que pequenas variações no parâmetro r influenciaram drasticamente no comportamento desta população, conforme verificado nos gráficos da seção 3.5.

Entretanto, o método proposto por Sano e Sawada não permitiu que chegássemos a resultados satisfatórios, devido a possíveis ausências de informações que pudessem esclarecer e contribuir para o desenvolvimento do algoritmo capaz de calcular o espectro de Lyapunov. Por fim, nem todo trabalho científico se pauta em verdades absolutas, mas em métodos com limitações reais e/ou hipóteses as vezes incertas.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., YORKE, J. A., 1996, *Chaos - An introduction to Dynamical Systems*. 1 ed. Velarg New York, Springer.
- [2] BOLDRINI, J. L., COSTA, S., RIBEIRO, V. L., W. H., 2011, *Álgebra Linear* . 3ª edição ed. ICMC-USP, São Paulo, Harbra ltda.
- [3] BORGES, L. E., 2010, *Python para Desenvolvedores* . 2 ed. Rio de Janeiro-RJ.
- [4] BRADLEY, L., 1999, “ **The Variational Equation Notes for CSCI4446/5446**”, p. 4.
- [5] DA SILVA, R. D., 2012, “ **Estudo numérico e experimental da dinâmica não-linear de um giroscópio** ”, .
- [6] E MATEMÁTICA PURA E APLICADA, I. “ **Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica** ”. Disponível em: <<https://impa.br/pesquisa/sistemas-dinamicos-e-teoria-ergodica>>.
- [7] FIEDLER-FERRARA, N., DO PRADO, C. P. C., 1994, *Caos: Uma introdução*. 1 ed. São Paulo, Blücher.
- [8] GALLICCHIO, C., MICHELI, A., SILVESTRI, L., 2017, “ **Local Lyapunov Exponents of Deep RNN**”, *Department of Computer Science, University of Pisa, Italy*, (April).
- [9] Houaiss, A. (Ed.), 1996, *Novo dicionário Folha Webster's*. São Paulo, Folha da Manhã. Edição exclusiva para o assinante da Folha de S. Paulo.
- [10] LORENZ, E. N., 1962, “ **Deterministic Nonperiodic Flow** ”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 16D, n. 2 (Novembro), pp. 285–317.
- [11] LYAPUNOV, A. M., 1992, *The general problem of the Stability of Motion:* . Taylor and Francis Ltd.

- [12] MORRIS W. HIRSCH, S. S., DEVANEY, R. L., 2004, *Differential Equations, Dynamical Systemas: An Introdtction to Chaos*. 2 ed. EUA, ELSEVIER.
- [13] OTT, E., 1992, *Chaos in Dynamical Systems* . 2 ed. Univerity of Mayland College Park, USA, Cambridge.
- [14] P., E. J., D., R., 1985, “ **Ergodic theory of chaos and strange attractores** ”, *Reviews of modern Physics*, v. 57, n. 3 (Julho), pp. 617–656.
- [15] ROBERT M, M., 1976, “ **Simple mathematical models with very complicated dynamics**”, *Nature*, v. 1 (Fevereiro), pp. 86–93.
- [16] ROSSLER, O. E., 1976, “ **An equation for continuos chaos**”, *Institut für physikalische und theoretische Chemie der lfniversit lit Tubingen, Germany*, v. 57A, n. 2 (Julho).
- [17] SANDRI, M., 1996, “ **Numerical Calculation Lyapunov Exponents** ”, *The Mathematica Journal*, pp. 9–20.
- [18] SANO, M., SAWADA, Y., 1985, “ **Measurement of the Lyapunov from a Chaotic Time Series** ”, *Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University, Sendai 980, Japan*, v. 55, n. 10 (September), pp. 1082–1085.
- [19] SHIMADA, I., NAGASHIMA, T., 1978, “ **A numerical approach to Ergodic problem of dissipative dynamical systems**”, v. 61, n. 6 (Novembro), pp. 1605–1616.
- [20] STROGATZ, S. H., 1994, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With applications to Physics, Biology, Chemstry and Engineering*. 1 ed. Massachusetts, PRESEUS BOOKS.
- [21] WIGGINS, S., 2000, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems an chaos*. 2 ed. School of Mathematics University of Bristol, UK, Springer.
- [22] WOLF, A., JACK, B. S., SWINNEY, H. L., et al., 1984, “ **Determining Lyapunov Exponents from a time series** ”, *North Holand, Amsterdam*, v. 16D, n. 2 (Outubro), pp. 285–317.

Apêndice A

Algumas Demonstrações

Demonstração do teorema 2.1 Existência Defina a sequência de funções $x_n(t)$ por

$$x_0(t) = x_0$$

Teorema: Seja f um mapa suave, em \mathbb{R} , e que assume p como um ponto fixo para f .

- i. Se $|f'(p)| < 1$, então p é um dissipador.
- ii. Se $|f'(p)| > 1$, então p é uma fonte.

Prova: Prova teorema ponto fixo Seja a um número qualquer entre $|f'(p)|$ e 1; por exemplo, a poderia ser escolhido como $\frac{1 + |f'(p)|}{2}$. Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(p)|$$

exite uma vizinhança $N_\epsilon(p)$ para algum $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} < a$$

para $x \in N_\epsilon(p)$, $x \neq p$.

Em outras palavras, $f(x)$ está mais próximo de p do que de x , pelo menos um fator de a (que é menor que 1). Isso implica duas coisas:

1. se $N_\epsilon(p)$, então $f(x) \in N_\epsilon(p)$; Isso significa que se x está dentro ϵ para p , então assim é $f(x)$, e repetindo o argumento, assim são $f^2(x)$, $f^3(x)$, e assim por diante.
2. Em segundo lugar, segue que:

$$|f^k(x) - p| \leq a^k |x - p|$$

para todo $k \geq 1$. Assim p é um dissipador.

Prova do teorema de estabilidade para equações de diferenças.

Teorema A.1 *Seja F um mapa (suave) em \mathbb{R} e suponha que p seja um ponto fixo de F . 1. Se $|F'(p)| < 1$, então p é um dissipador. 2. Se $|F'(p)| > 1$, então p é uma fonte.*

Demonstração (Parte 1.) Seja a um número qualquer entre $|F'(p)|$ e 1; por exemplo a poderia ser do tipo $\frac{1+|F'(p)|}{2}$. Desde que,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{|F(x) - F(p)|}{|x - p|} = |F'(p)|,$$

exista uma vizinhança $N_\epsilon(p)$ para alguma $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{|F(x) - F(p)|}{|x - p|} < a$$

para x em $N_\epsilon(p)$, $x \neq p$.

Em outras palavras, $F(x)$ é mais próximo de p do que x é, pelo menos, um fator de a (que é menor que 1). Isso implica duas coisas: primeiro, se $x \in N_\epsilon(p)$, então $F(x) \in N_\epsilon(p)$; Isso significa que se x estiver dentro de $N_\epsilon(p)$, então $F(x)$ também está dentro de $N_\epsilon(p)$, e ao repetir o argumento, então são $F^2(x)$, $F^3(x)$, e assim por diante. Segundo, segue-se que

$$|F^k(x) - p| \leq a^k |x - p|$$

para todo $k \geq 1$. Assim, p é um atrator.

A parte 2, do teorema, deixamos para o leitor como exercício.

Definição A.1 *Um conjunto invariante fechado $L \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de atrator se existe uma vizinhança U de L tal que:*

$$\forall x \in U \quad e \quad \forall t \geq 0 \implies \phi(x, t) \in U \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) \rightarrow L.$$

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Algoritmo desenvolvido em python que modela uma população
5 utilizando Mapa logístico,  $x = r*x(1-x)$ 
6 """
7
8 from numpy import *
9 from matplotlib.pyplot import *
10 import matplotlib.pyplot as plt
11
12 #Função do mapa logístico
13 def mapa(x,r):
14     return r*x*(1-x)
15
16 #Parâmetro  $0 \leq r < 1$ . Atribua valores a
17 #r=[1.0, 2.8, 3.3, 3.5, 3.5644, 3.568759, ]
18 r=3.7893
19 #r = 1+5.3**1/2#r=3.449489742783178
20 x = zeros(80)
21 x[0] = 0.92
22
23 for i in range(len(x)-1):
24     x[i+1] = mapa(x[i],r)
25
26 #Descarte do transiente
27 xx = zeros(30)
28 xx[0] = x[-1]
29
30 for l in range(len(xx)-1):
31     xx[l+1] = mapa(xx[l],r)
32
33 grid(True)
34 plot(xx, '-')
35
36 xlabel("x[l]")
37 ylabel("x[l+1]")
[3] 38 show()

```

Figura A.1: Algoritmo que permite, ver os ciclos dobrarem a medida que varia $0 \leq r < 1$. Execute o algoritmo python.

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Algoritmo que plota o mapa de bifurcações para a equação
4 de diferença  $f(x)=rx(1-x)$ 
5 """
6 from numpy import *
7 from matplotlib.pyplot import *
8
9 def mapa(x,r):
10     return r*x*(1-x)
11
12 T = 5000
13 xt = zeros(T)
14 x = zeros(400)
15
16 #r = linspace(3.84, 3.8571, 3000) #r=0.5 , r=3.3 , r=3.97
17 r = linspace(1.0, 4.0, 1500)
18 k = 0
19
20 xplot=zeros(len(r)*(len(x)-1))
21 yplot=zeros(len(r)*(len(x)-1))
22
23 xt[0]=0.4
24 for t in range(len(r)):
25     for n in range(len(xt)-1):
26         xt[n+1] = mapa(xt[n],r[t])
27
28     x[0]=xt[-1]
29     for n in range(len(x)-1):
30         x[n+1] = mapa(x[n],r[t])
31         xplot[k]=r[t]
32         yplot[k]=x[n]
33         k=k+1
34
35 fig=figure(1)
36 plot(xplot, yplot, '.', markersize=0.65)
37 xlabel('r', fontsize=14)
38 ylabel('x', fontsize=14)
39 grid(True)
40 show()

```

[3]

Figura A.2: Algoritmo que produz soluções e o diagrama de bifurcação.

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Algoritmo que plota o expoente de Lyapunov, para a equação
5 de diferença  $f(x)=rx(1-x)$ 
6 """
7 from numpy import *
8 from matplotlib.pyplot import *
9 |
10 def f(x,r):
11     return r*x*(1-x)
12 def dt(x,r):
13     return log(abs(r-2*x*r))
14
15 T = 5000
16 xt = zeros(T)
17 x = zeros(100)
18
19 r = linspace(1.0, 4.0, 900) #r=0.5 , r=3.3 , r=3.97
20 k = 0
21
22 l = zeros(len(r))
23 xp = zeros(len(l)*(len(x)-1))
24 yp = zeros(len(l)*(len(x)-1))
25
26 xt[0]= 0.34
27 for t in range(len(r)):
28     for n in range(len(xt)-1):
29         xt[n+1] = f(xt[n],r[t])
30
31     x[0]=xt[-1]
32     for n in range(len(x)-1):
33         x[n+1]=f( x[n],r[t] )
34         l[t] += dt( x[n],r[t] )/len(x)
35
36 grid(True)
37 title('Expoente de Lyapunov para  $f(x) = rx(1-x)$ ')
38 xlabel('r', fontsize='13')
39 ylabel('$\lambda$', fontsize='15')
40 plot(r,l)
41
42 show()

```

Figura A.3: Algoritmo que calcula soluções do Mapa logístico.