Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departmento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física
Doutorado Acadêmico em Física

Efeitos de torção e violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito a potenciais centrais

Ricardo Luís Lima Vitória

João Pessoa-PB
Agosto de 2018

Ricardo Luís Lima Vitória

Efeitos de torção e violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito a potenciais centrais

Tede de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Linha de pesquisa:
Gravitação e Cosmologia

Orientador

Dr. Knut Bakke Filho

PPGF – Programa de Pós-Graduação em Física
DEFIS – Departamento de Física
CCEN – Centro de Ciências Exatas e da Natureza
UFPB – Universidade Federal da Paraíba

João Pessoa-PB

Agosto de 2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V845e Vitoria, Ricardo Luis Lima.
Efeitos de torção e violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito a potenciais centrais / Ricardo Luis Lima Vitoria. - João Pessoa, 2018.
128 f. : il.

Orientação: Knut Bakke Filho.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. oscilador de Klein-Gordon. 2. deslocações tipo-espaço. 3. violação da simetria de Lorentz. I. Bakke Filho, Knut. II. Título.

UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Ricardo Luis Lima Vitória**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos dezessete dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Ricardo Luis Lima Vitória**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Knut Bakke Filho* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Herondy Francisco Santana Mota* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG) e *Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos de torção e violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito a potenciais centrais*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **17 de agosto de 2018**.

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
UFCG

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG

À minha mãe, Auseni.

Agradecimentos

Ao professor Knut Bakke, pela sua grandiosa paciência e execelente orientação para a formulação deste trabalho.

Aos professores Cláudio Furtado (UFPB) e Humberto Belich (UFES), pelas colaborações nos artigos publicados vinculados a este trabalho.

Ao departamento de física da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), pela estrutura e acolhimento acadêmicos fornecidos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro para a execução deste trabalho.

...

Take your time, don't live too fast, troubles will come and they will pass, go find a woman and you'll find love, and don't forget son there is someone up above

...

Lynyrd Skynyrd - Simple Man

Efeitos de torção e violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito a potenciais centrais

Autor: Ricardo Luís Lima Vitória
Orientador: Dr. Knut Bakke Filho

Resumo

Neste trabalho, investigamos a influência de potenciais centrais sobre o campo escalar em três diferentes cenários: o espaço-tempo de Minkowski, espaço-tempo com uma deslocação tipo-espaço e um espaço-tempo com uma anisotropia causada pela violação da simetria de Lorentz. No espaço-tempo de Minkowski, analisamos o campo escalar sujeito ao oscilador de Klein-Gordon mais os potenciais linear e tipo-Coulomb. No espaço-tempo com uma deslocação hélice, investigamos os efeitos de torção sobre o campo escalar. Discutimos o efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Além disso, analisamos os efeitos de rotação sobre o campo escalar no espaço-tempo com uma deslocação hélice e no espaço-tempo com uma deslocação espiral. Em seguida, lidamos com a interface entre uma teoria que vai além do Modelo Padrão e mecânica quântica. Consideramos um pano de fundo da violação da simetria de Lorentz determinado por um campo tensorial, e assim, analisamos efeitos sobre o campo escalar.

Palavras-chave: oscilador de Klein-Gordon, deslocações tipo-espaço, violação da simetria de Lorentz.

Effects of torsion and violation of Lorentz symmetry on a scalar field subject to central potentials

Author: Ricardo Luís Lima Vitória
Supervisor: Dr. Knut Bakke Filho

Abstract

In this work, we investigate the influence of central potentials on the scalar field in three different scenarios: the Minkowski spacetime, spacetime with a space-like dislocation and a spacetime with an anisotropy caused by the violation of the Lorentz symmetry. In the Minkowski spacetime, we analyse the scalar field subject to the Klein-Gordon oscillator plus the linear and Coulomb-type potentials. In the spacetime with a screw dislocation, we investigate the effects of torsion on the scalar field. We discuss the analogous effect to the Aharonov-Bohm effect for bound states. In addition, we analyse rotating effects on the scalar field in spacetime with a screw dislocation and in the spacetime with a spiral dislocation. Next, we deal with the interface between a theory that goes beyond the Standard Model and quantum mechanics. We consider a background of the violation of Lorentz symmetry determined by the tensor field, and thus, analyse effects on the scalar field.

Keywords: Klein-Gordon oscillator, space-like dislocations, violation of Lorentz symmetry.

Lista de figuras

1 O vetor infinitesimal ζ^{μ} é transportado paralelamente ao longo de χ^{μ}, e vice-versa, em um espaço-tempo onde o tensor de torção é não nulo (HAMMOND, 2002). . . . . p. 40

2 Da esquerda para a direita, onde o eixo claro indica a direção da deslocação: deslocação tipo espiral, onde o eixo z (escuro) de simetria do defeito é perpendicular ao eixo indicativo direcional radial da deslocação; delsocação tipo lateral, onde o eixo z (escuro) de simetria do defeito é perpendicular ao eixo indicativo direcional azimutal da deslocação; deslocação tipo-hélice, a qual eixo z (escuro) de simetria do defeito é paralelo ao eixo indicativo direcional em z da deslocação (PUNTIGAM; SOLENG, 1997). . . . . p. 41

3 Deslocação tipo-hélice (PUNTIGAM; SOLENG, 1997). . . . . p. 42

4 Arranjo experimental do efeito AB (FERREIRA, 2004). . . . . p. 43

5 Representação da deslocação espiral (PUNTIGAM; SOLENG, 1997). . . . p. 71

Lista de abreviaturas e siglas

EKG - Equação de Klein-Gordon

MP - Modelo Padrão

OKG - Oscilador de Klein-Gordon

AB - Aharonov-Bohm

VSL - Violação da Simetria de Lorentz

EMP - Extensão do Modelo Padrão

Lista de símbolos

$\mathcal{E}$ - energia relativística

ω - frequência angular do OKG

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - coordenada radial cilíndrica

b - constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb I

μ - constante que caracteriza o potencial escalar linear

ν - constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb II

χ - parâmetro associado à deslocação tipo-hélice

ω_0 - frequência de cíclotron

ϕ_0 - periodicidade dos autovalores da energia relativística em função da fase quântica geométrica de AB

$\bar{\chi}$ - parâmetro associado à deslocação tipo espiral

w - velocidade angular de um referencial em rotação uniforme

Sumário

1 Introdução p. 15

2 Campo escalar sujeito a potenciais centrais no espaço-tempo de Minkowski p. 19

2.1 Osciladores quânticos relativísticos: uma breve revisão . . . . . p. 19

2.2 Campo escalar sob efeitos do oscilador de Klein-Gordon e um potencial tipo-Coulomb I . . . . . p. 24

2.3 Campo escalar sob efeitos do oscilador de Klein-Gordon e um potencial linear . . . . . p. 29

2.4 Campo escalar sob efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb II . . . p. 33

2.5 Campo escalar sob efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb I . . . . p. 35

2.6 Sumário . . . . . p. 37

3 Campo escalar sujeito a potenciais centrais em um espaço-tempo com torção p. 38

3.1 Defeitos topológicos associados à torção: uma breve introdução . . . . . p. 38

3.2 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados: uma breve revisão . . . . p. 41

3.3 Quantização de Landau: uma breve revisão . . . . . p. 43

3.4 Campo escalar sob efeitos de um potencial linear no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice . . . . . p. 44

3.5 Campo escalar sob efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb I . . . . p. 47

3.6 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados sobre um campo escalar em um espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice . . . . . p. 49

3.6.1 Efeitos de um potencial linear . . . . . p. 50

3.6.2 Efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb II . . . . . p. 51
3.6.3 Efeitos dos potenciais tipo-Coulomb II e o oscilador de Klein-Gordon . . . . . p. 53
3.6.4 Efeitos do potencial tipo-Coulomb II . . . . . p. 55
3.6.5 Efeitos dos potenciais tipo-Coulomb I e II . . . . . p. 57
3.6.6 Efeitos associados com um campo magnético uniforme . . . . . p. 59
3.6.6.1 Quantização de Landau relativística . . . . . p. 60
3.6.6.2 Efeitos do potencial de paredes rígidas . . . . . p. 62
3.6.6.3 Efeitos do potencial linear . . . . . p. 63
3.6.6.4 Efeitos do potencial tipo Coulomb II . . . . . p. 65
3.6.7 Efeitos associados com um campo magnético uniforme e o oscilador de Klein-Gordon . . . . . p. 66
3.6.7.1 Quantização de Landau relativística . . . . . p. 67
3.6.7.2 Efeitos do potencial de paredes rígidas . . . . . p. 68
3.6.7.3 Efeitos do potencial linear . . . . . p. 69
3.7 Campo escalar sujeito ao potencial de parede rígida no espaço-tempo de deslocação tipo espiral . . . . . p. 71
3.8 Efeitos de rotação . . . . . p. 74
3.8.1 Campo escalar no espaço-tempo de deslocação tipo-hélice . . . . p. 75
3.8.2 Campo escalar no espaço-tempo de deslocação tipo espiral . . . p. 78
3.9 Sumário . . . . . p. 80

4 Campo escalar sujeito a potenciais centrais em um espaço-tempo com violação da simetria de Lorentz p. 81
4.1 Violação da simetria de Lorentz e a simetria CPT: uma breve revisão . p. 81
4.2 Setor do campo de calibre da Extensão do Modelo Padrão: uma breve revisão . . . . . p. 86
4.2.1 Setor do campo de calibre: extensão de CPT-ímpar . . . . . p. 87

4.2.2 Setor do campo de calibre: extensão de CPT-par . . . . . p. 87

4.3 Potenciais induzidos em possíveis cenários de violação da simetria de Lorentz: um breve comentário . . . . . p. 88

4.4 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao oscilador de Klein-Gordon . . . . . p. 89

4.5 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao potencial linear e o oscilador de Klein-Gordon . . . . . p. 92

4.6 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao potencial tipo-Coulomb II . . . . . p. 93

4.7 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao potencial tipo-Coulomb I . . . . . p. 95

4.8 Sumário . . . . . p. 98

5 Considerações finais p. 99

Referências p. 105

Apêndice A – Equação de Heun biconfluente p. 118

Apêndice B – Publicações p. 127

1 Introdução

No século XX houve uma evolução na física através do surgimento de duas teorias de grande importância no contexto científico e tecnológico: relatividade (especial e geral) e mecânica quântica. A primeira descreve objetos macroscópicos, enquanto a segunda descreve objetos microscópicos. Na escala macroscópica, a teoria da relatividade geral vem obtendo significativo sucesso na descrição do comportamento físico do sistema solar, planetas, buracos negros, estrelas, galáxias, etc, e a evolução do universo atual como um todo. Na escala microscópica, a teoria quântica consegue, de forma formidável, descrever processos referentes a átomos, moléculas, partículas elementares, etc. Entretanto, na busca pela a unificação dessas duas teorias, há dificuldades de incorporar efeitos quânticos na relatividade geral.

A mecânica quântica foi desenvolvida por volta de 1925 e foi uma teoria extremamente bem sucedida, pois, além de prevê autovalores, a mesma é capaz de prevê as autofunções das quais é possível obter propriedades de átomos[1] e moléculas, mesmo com a incompatibilidade com a relatividade geral de Eisntein[2]. Quando a teoria da relatividade especial foi testada experimentalmente e aceita como uma descrição correta em sitemas caracterizados por altas velocidades, ficou claro que, de algum modo, a teoria quântica deveria ser repensada, modificada ou generalizada para incorporar e corrigir o limite relativístico (GREINER; BROMLEY, 2000).

Com a intenção de formular e resolver uma teoria quântica puramente relativística que fosse capaz de descrever a interação entre elétrons e fótons, em um período de mais ou menos 20 anos, de forma independente, pesquisadores de renome como Dirac, Klein, Gordon, Dyson, Wick, Feynman, Schwinger, e muitos outros, desenvolveram um ferramental teórico o qual culminou na eletrodinâmica quântica. O sucesso da eletrodinâmica

[1] O átomo de hidrogênio tem uma importância histórica porque foi o primeiro sistema que Schrödinger tratou com sua teoria. Além disso, os autovalores previstos pela teoria para o átomo de hidrogênio estão de acordo com aqueles previstos pelo modelo atômico de Bohr e observados experimentalmente (GRIFFITHS, 2004).

[2] Apesar de historicamente Schrödinger ter tentado introduzir uma formulação quântica relativística sem sucesso, a sua formulacão quântica não relativística teve bastante êxito.

quântica tornou-se consolidado através da concordancia entre as medidas experimentais e as predições da mesma, onde, em muitos casos, giram em torno de uma parte em um milhão. Foi nesse período que surgiu a mecânica quântica relativística, a qual é objeto de estudo de equações de ondas relativísticas com intuito de substituir a equação não relativística de Schrödinger, ou seja, efeitos da relatividade restrita foram incorporados em equações de ondas de caráter quântico, tais como as equações quânticas relativísticas de Klein-Gordon e Dirac.

No caso da equação de Klein-Gordon (EKG), também conhecida como equação de Klein-Gordon-Fock[3], proposta em 1927, a mesma foi inicialmente interpretada como uma equação descrevendo uma partícula livre. Essa interpretação foi posteriormente substituída, pois, além da existência de densidades de probabilidades negativas, ou seja, a não existência de densidade de probabilidade positiva definida, em analogia ao formalismo de Schröndinger, surgem também energias negativas (GREINER; BROMLEY, 2000). A razão mais profunda para esse suposto "problema" é a presença de uma derivada temporal de segunda ordem na EKG. Com isso, a EKG foi considerada "sem sentido físico" quando a propuseram. Na verdade não havia problema algum, porém os conhecimentos daquele período não eram suficientes para compreender o mundo novo que começava a se revelar. Devido a esses "problemas", o trabalho de Klein[4] e Gordon[5] adentrou ao esquecimento por duas décadas.

De certa forma, esses "problemas" provindos da EKG que caracterizaram "discordâncias com a Natureza", foram interessantes no sentido de buscarem, na época, uma nova equação para a partícula relativística. Dirac[6] ganhou protagonismmo.

No caso da equação de Dirac, proposta em 1928, ela apresenta densidade de probabilidade positiva definida, porém, ainda ocorrem a presença de energias negativas. Foi assim que surgiu uma das maiores descobertas da física contemporânea: a existência de antipartículas, verificadas experimentalmente em 1932, ou seja, as soluções correspondentes à energia negativa estão conectadas com a antipartícula da partícula associada à energia positiva (GREINER; BROMLEY, 2000).

Dessa forma, a EKG tornou-se novamente objeto de estudo, porém, com uma nova interpretação, no que diz respeito a descrição de partículas, isto é, a EKG descreve apenas partículas sem *spin* ou *spin*-0 [7]. Partículas de *spin*-0 constituem algumas das partículas

[3] O "Fock"é referente ao físico russo Vladimir Aleksandrovich Fock.
[4] Oskar Benjamin Klein.
[5] Walter Gordon.
[6] Paul Adrien Maurice Dirac.
[7] Essa característica pode ser analisada tomando o limite não relativístico da EKG, o qual recai na

elementares descritas pelo Modelo Padrão (MP)[8], por exemplo, píons, káons e a famosa partícula de Higgs.

Vale ressaltar que, em teoria quântica de campos, as equações de ondas relativísticas de Klein-Gordon e Dirac passam a ser interpretadas como equações de campos bosônico de *spin*-0 e fermiônico de *spin*-1/2, respectivamente (MANDL; SHAW, 2010).

Apesar da necessidade das equações citadas acima serem consideradas equações de campo, no contexto de teoria quântica de campos, a interpretação como equações para partículas fornecem bons resultados, por exemplo, no caso da equação de Dirac, temos o valor redefinido, via correções radiativas, do momento magnético do elétron e dos níveis de energia do átomo de hidrogênio, conhecido como Lamb *shift* (MANDL; SHAW, 2010). Além disso, a EKG descreve, por exemplo, átomos piônicos, os quais consistem em um núcleo e um (ou mais) méson-π que está em torno dele (GREINER; BROMLEY, 2000). Em particular, a Ref. (GREINER; BROMLEY, 2000) fornece vários resultados de estados ligados no estudo de parículas de *spin*-0, ou campos escalares, no espaço-tempo de Minkowski, os quais nos motivou a investigar, para diferentes cenários e potenciais centrais, a EKG, com o intuito de buscar, de forma analítica, espectros de energia com possíveis correções e mudanças provinientes de efeitos externos.

A estrutura deste trabalho é a seguinte: no Cap. (2), fazemos uma breve introdução sobre a motivação e a importância do oscilador de Klein-Gordon (OKG) no estudo de estados ligados relativísticos, como, também, com base na Ref. (RAO; KAGALI, 2008), apresentamos o perfil energético do OKG em uma dimensão, mostrando que, no limite não relativítico, os níveis de energia recaem nos níveis de energia fornecidos pela equação de Schrödinger para o oscilador harmônico. Dado isso, apresentamos a primeira parte dos nossos resultados, onde o campo escalar interage com o OKG e diferentes potenciais centrais no espaço-tempo de Minkowski; no Cap. (3), apresentamos, de forma breve, o campo de torção no espaço-tempo e suas classificações, em particular as deslocações, ou seja, deslocações tipo-espaço conhecidas na literatura como deslocações tipo-hélice e tipo-espiral (PUNTIGAM; SOLENG, 1997; VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005; KATANAEV; VOLOVICH, 1992). Em seguida, revisamos brevemente o efeito Aharonov-Bohm (AB) (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989) e a quantização de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1981). Após essas revisões, apresentamos a segunda parte de nossos resultados através da análise de diferentes sistemas de estados ligados imersos no espaço-tempo com torção e em referenciais não-inerciais, ou seja, em um referencial em rotação uniforme

equação de Schrödinger para partículas sem *spin* (GREINER; BROMLEY, 2000).

[8]Falaremos mais sobre o MP, de forma conceitual e resumida, no Cap. (4).

(LANDAU; LIFSHITZ, 1980; BAKKE, 2014b); no Cap. (4), fazemos uma breve revisão da violação da simetria de Lorentz (VSL) e sua associação com a simetria CPT (BAKKE; BELICHE, 2015). Porsteriormente, apresentamos, resumidamente, o setor fotônico da Extensão do Modelo Padrão (EMP) e suas classificações referentes à conservação ou não da simetria CPT (BAKKE; BELICHE, 2015). Em seguida, através das Refs. (BAKKE; BELICH, 2015, 2016), enfatizamos a possibilidade de induzir potenciais de confinamento em um espaço-tempo com VSL, via acoplamento não-mínimo na EKG do termo fotônico CPT-par da EMP, fornecendo, então, vários cenários possíveis em um espaço-tempo anisotrópico. Após essas revisões, apresentamos a terceira parte de resultados que compõe este trabalho; no Cap. (5), apresentamos as nossas conclusões e pespectivas.

Com intuito de facilitar uma eventual consulta por parte de pesquisadores interessados nos assuntos aqui tratados, em particular, na equação de Heun biconfluente e suas principais características, juntamente com o método de Fröbenius usado para solucioná-la, mencionamos que as análises e manipulações matemáticas da mesma encontram-se no Apêndice (A).

2 Campo escalar sujeito a potenciais centrais no espaço-tempo de Minkowski

Na física, o oscilador harmônico simples é de grande importância, pois trata-se de um modelo ideal conveniente para a descrição de sistemas que envolvem oscilações. Na generalidade, o oscilador harmônico simples pode ser utilizado para representar muitos sistemas nos quais um corpo está executando pequenas víbrações em torno de um ponto de equilíbrio estável. No cenário da mecânica quântica não-relativística, é um dos poucos sistemas que podem ser resolvidos de forma exata. É de suma importância a extensão do oscilador harmônico para o cenário da mecânica quântica relativística, devido as várias situações onde os efeitos relativísticos são realmente significativos, por exemplo, o contexto subatômico. No entanto, as tentativas de descrever o oscilador harmônico no cenário relativístico através de métodos usuais, além da não obtenção do oscilador harmônico de Schrödinger correspondente ao limite não-relativístico, se convergiram somente em soluções por métodos aproximativos, como Lipas mostrou no caso de um campo escalar (LIPAS, 1970). Em particular, no caso de um campo escalar, descrito pela EKG, Bruce e Minning propuseram um modelo de oscilador relativístico que, além de ter soluções exatas, recai no oscilador harmônico representado pela equação de Schrödinger no limite não-relativístico, o qual tornou-se conhecido na literatura como o OKG (BRUCE; MINNING, 1993).

2.1 Osciladores quânticos relativísticos: uma breve revisão

Em 1970, Lipas (LIPAS, 1970), com intutuito de descrever o oscilador harmônico simples relativístico para um campo escalar, provou que, através do método usual de inserir potenciais de confinamento, soluções de estados ligados são possíveis somente com méto-

dos pertubativos. Além disso, tomando o limite não relativístico, não é possivel recuperar o oscilador harmônco simples descrito pela equação de Schrödinger, ou seja, a EKG unidimensional para um potencial vetor $A_\mu(x) = (A_0, -\vec{A} = 0)$[1] é dada (GREINER; BROMLEY, 2000):

$$\begin{aligned}
\left(\hat{p}_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)\left(\hat{p}^\mu - \frac{q}{c}A^\mu\right)\Phi(x,t) &= m^2c^2\Phi(x,t);\\
\left(\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu - \frac{q}{c}\hat{p}_\mu A^\mu - \frac{q}{c}A_\mu\hat{p}^\mu + \frac{q^2}{c^2}A_\mu A^\mu\right)\Phi(x,t) &= m^2c^2\Phi(x,t);\\
\left(\hat{p}_0\hat{p}^0 - \hat{p}_1\hat{p}^1 - \frac{q}{c}\hat{p}_0 A^0 - \frac{q}{c}A_0\hat{p}^0 + \frac{q^2}{c^2}A_0 A^0\right)\Phi(x,t) &= m^2c^2\Phi(x,t);\\
\left(\hat{p}_0\hat{p}^0 - \hat{p}_1\hat{p}^1 - \frac{2q\mathcal{E}A^0}{c^2} + \frac{q^2}{c^2}A_0^2\right)\Phi(x,t) &= m^2c^2\Phi(x,t), \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

onde $\hat{p}_\mu = (\hat{\mathcal{E}}/c, -\hat{p}_i) = i\hbar\partial_\mu$, com $\mu = 0, i = 1$, m é a massa de repouso da partícula e $qA_0 = V(x)$, logo, considerando soluções de estados estacionários $\Phi(x,t) = e^{-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}\phi(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \frac{2\mathcal{E}V(x)}{c^2} + \frac{V^2(x)}{c^2}\right)\phi(x) &= m^2c^2\phi(x);\\
\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(\mathcal{E}-V)^2 - m^2c^2}{\hbar^2c^2}\right]\phi(x) &= 0, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{E}$ é a energia relativística.

Podemos ir além, com a equação acima; podemos reescrever a Eq. (2.2) como uma equação tipo Schröndinger:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + (\mathcal{E}_{ef} - V_{ef})\phi(x) = 0, \qquad (2.3)$$

onde

$$\mathcal{E}_{ef} = \frac{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2}; \quad V_{ef} = \frac{2\mathcal{E}V(x) - V^2(x)}{c^2\hbar^2}. \qquad (2.4)$$

Considerando $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, com m sendo a massa da partícula e ω a frequência do oscilador, o potencial efetivo V_{ef} toma a forma:

$$V_{ef} = \frac{\mathcal{E}m\omega^2x^2 - (1/4)m^2\omega^4x^4}{c^2\hbar^2}, \qquad (2.5)$$

que tomando o limite não relativístico da Eq. (2.3), o termo quártico da Eq. (2.5) permanece, não fornecendo a equação de Schrödinger. Sendo assim, o problema não possui

[1] Vale ressaltar que, como estamos aqui tratando de discussões apresentadas na Ref. (RAO; KAGALI, 2008), estamos considerando a assinatura $(+---)$ utilizada na mesma.

solução analítica (LIPAS, 1970).

Em 1989, Moshinsky e Szczenpaniak (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1989), propuseram um acoplamento na equação de Dirac para assegurar a linearidade tanto no operador momento linear como na posição e, que, no limite não relativístico, possa ser interpretado como um hamiltoniano do oscilador harmônco descrito pela equação de Schrödinger. A equação de Dirac com esse acoplamento é dada por:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [c\vec{\alpha}.(\hat{p} - im\omega\vec{r}\beta) + mc^2\beta]\psi, \tag{2.6}$$

onde

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix};\ \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

com $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sendo as matrizes de Pauli, I a matriz identidade e ω a frequência angular do oscilador. Além deste acoplamento ter soluções analíticas de estados ligados, no limite não relativístico os autovalores do operador hamiltoniano correspondem aos autovalores do hamiltoniano do oscilador harmônico simples com frequência ω descrito pela equação de Schrödinger, porém, acrescidos de um termo de *spin*-órbita forte $-\frac{2\omega}{\hbar}$, onde $\omega \ll \hbar$.

Devido a este comportamento no limite não relativístico, a Eq. (2.6) tornou-se conhecida na literatura como o oscilador de Dirac (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1989). Nos últimos anos, o oscilador de Dirac tem atraído o interesse em estudos do modelo utilizado em óptica quântica de Jaynes-Cummings (ROZMEJ; ARVIEU, 1999; BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007a), transições de fase quântica (BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; LUIS, 2008a; BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007b), o efeito de interferometria de Ramsey (BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; LUIS, 2008b) e efeitos não-inerciais (BAKKE, 2012, 2013).

Outra proposta para a construção de um modelo relativístico para o oscilador harmônico foi feita por Bruce e Minning (BRUCE; MINNING, 1993), introduzindo um acoplamento na EKG, em analogia com o oscilador Dirac (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1989), de tal forma que se pode recuperar a equação de Schrödodinger para um oscilador harmônico no limite não relativístico e, por isso, ficou conhecido na literatura como o OKG. Esta análise é melhor discutida por Rao e Kagali (RAO; KAGALI, 2008), na descrição do perfil energético do OKG unidimensional, onde os mesmos seguiram a momencratura do acoplamento linear do operador momento, o qual dá origem ao oscilador relativístco de

Klein-Gordon, proposto por Mirza e Mohadesi (MIRZA; MOHADESI, 2004), $\hat{p}_x \to \hat{p}_x - im\omega x$ e $\hat{p}_x^\dagger \to \hat{p}_x + im\omega x$, onde $\hat{p}_x^\dagger$ é o adjunto do operador momento linear $\hat{p}_x$, m é a massa da partícula e ω é a frequência angular do OKG. Então, a EKG unidimensional para uma partícula livre, na presença deste tipo de acoplamento, após algumas manipulações matemáticas, torna-se

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2} + \frac{(\mathcal{E}^2 - m^2c^4)}{c^2\hbar^2}\right]\phi(x) = 0. \tag{2.8}$$

Se fizermos $\mathcal{E} = mc^2 + \varepsilon$, onde $\varepsilon = \hbar\omega$, e $mc^2 \gg \varepsilon$, o terceiro termo da Eq. (2.8) torna-se:

$$\frac{\mathcal{E}^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2} = \frac{m^2c^4 + 2mc^2\hbar\omega + \hbar^2\omega^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2} = \frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{\omega^2}{c^2} \simeq \frac{2m\omega}{\hbar}, \tag{2.9}$$

logo, a Eq. (2.8) é reescrita da seguinte forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \left(\varepsilon - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\right]\phi(x) = 0, \tag{2.10}$$

que nada mais é do que a equação do oscilador harmônico não relativístico, ou a equação de Schrödiger independente do tempo para o potencial do oscilador harmônico em uma dimensão, ou seja, no limite não relativístico, a Eq. (2.8), a qual representa o OKG em uma dimensão, recai na equação do oscilador harmônico não relativístico.

Após algumas passagens matemáticas na Eq. (2.10), para buscar por soluções de estados ligados, Rao e Kagali (RAO; KAGALI, 2008) definem os níveis de energia do sistema

$$\mathcal{E}_n \approx mc^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\frac{\hbar^2\omega^2}{mc^2}, \tag{2.11}$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ são os modos radiais. Note que no limite não relativístico, a energia de ligação do OKG toma a forma

$$\epsilon_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{2.12}$$

onde $mc^2 \gg \epsilon$ e, novamente, obtemos uma característica do oscilador harmônico não relativístico, ou seja, seus níveis de energia.

O OKG tem sido investigado em espaço não-comutativo (MIRZA; NARIMANI; ZARE, 2011; LIANG; YANG, 2012), em espaço de fase não-comutativo (XIAO; LONG; CAI, 2011) e em hamiltoniana $\mathcal{PT}$-simétrica (CHENG, 2011). Além dos efeitos quânticos relativisticos governados por oscilações harmônicas, o confinamento de uma partícula escalar relativís-

tica para diferentes potenciais de confinamento tem sido investigado em diversas áreas da física (DUTRA; JIA, 2006; QIANG; ZHOU; GAO, 2007; CASTRO, 2005; ALHAIDARI; BAHLOULI; AL-HASAN, 2006; DOMÍNGUEZ-ADAME, 1989; XU; HE; JIA, 2010). Um caso particular é o confinamento de uma partícula escalar relativística para o potencial de Coulomb (GREINER; BROMLEY, 2000; WEN-CHAO, 2003; MOTAVALLI; AKBARIEH, 2010; YASUK; DURMUS; BOZTOSUN, 2006; OLIVEIRA; MELLO, 2006). Como vimos acima, na Eq. (2.1), o procedimento padrão em introduzir um potencial escalar na EKG ocorre modificando o operador momento linear, $\hat{p}_\mu \to \hat{p}_\mu - qA_\mu$ (GREINER; BROMLEY, 2000). Outra maneira de introduzir um potencial escalar (potencial não-eletromagnético) na EKG tem sido discutida na literatura (GREINER; BROMLEY, 2000), na qual o termo de massa da equação de onda é reescrita da forma: $m \to m+V(\vec{r},t)$, onde $V(\vec{r},t)$ é o potencial escalar. Este segundo procedimento tem sido explorado na interação quark-antiquark (BAHAR; YASUK, 2013), na análise do comportamento de uma partícula de Dirac na presença de um potencial escalar estático e um potencial de Coulomb (SOFF et al., 1973) e em uma partícula escalar relativística no espaço-tempo com corda cósmica (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012).

Recentemente, Bakke e Furtado (BAKKE; FURTADO, 2015) descreveram a dinâmica quântica de um campo escalar com massa dependente da posição sujeito ao OKG e o potencial tipo-Coulomb em $(2+1)$ dimensões, onde, na busca por estados ligados de tal sistema, um efeito quântico é obtido: a dependência da frequência angular do OKG com os números quânticos do sistema, cujo significado é que nem todos os valores da frequência angular são permitidos. Em particular, o oscilador isotrópico de Klein-Gordon em $(2+1)$ dimensões nos permite escrever a EKG na forma:

$$(\mathcal{E}^2 - m^2)\phi = (\hat{p} + im\omega\rho\hat{\rho}).(\hat{p} - im\omega\rho\hat{\rho})\phi, \tag{2.13}$$

onde $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\hat{\rho}$ é o vetor unitário na direção radial.

Alguns pontos ainda não foram tratados na literatura, no que diz respeito ao OKG, como, por exemplo, a interação coulombiana, efeitos de potenciais de confinamento linear e tipo-Coulomb em sistema de massa dependente da posição, ambos no espaço-tempo de Minkowski. Portanto, baseado na Ref. (BAKKE; FURTADO, 2015), no decorrer deste capítulo, lidamos com o OKG sujeito a um potencial tipo-Coulomb provindo do acoplamento mínimo. Também analisamos um campo escalar com massa dependente da posição sob efeito de potenciais de confinamento linear e tipo-Coulomb, ambos provindos da modificação do termo de massa da EKG, sujeita ao OKG. Em particular, o interesse em incluir um potencial de confinamento linear vem através de estudos de física molecular atômica (AUS-

TIN, 1980; VRSCAY, 1985; KILLINGBECK, 1977, 1978; SAXENA; VARMA, 1982; CASTRO; MARTÍN, 2000), salto quântico (GIBBS, 1975; DESKO; BORD, 1983), movimento de uma partícula quântica em um campo de força uniforme (LANDAU; LIFSHITZ, 1981; BALLENTINE, 1998) e mecânica quântica relativística (SOFF et al., 1973; FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; PLANTE; ANTIPPA, 2005; NOBLE; JENTSCHURA, 2015; GLASSER; SHAWAGFEH, 1984; TEZUKA, 2013; GUNION; LI, 1975; FERREIRA, 1988; DOMÍNGUEZ-ADAME; GONZÁLEZ, 1990; VERĆIN, 1991; MYRHEIM; HALVORSEN; VERĆIN, 1992). Além disso, potenciais tipo-Coulomb têm sido investigados em sistemas de matéria condensada, como sistemas unidimensionais (GRIBI; SIGMUND, 1991; GESZTESY; THALLER, 1981; REYES; CASTILLO-MUSSOT, 1999; RAN et al., 2000; CHARGUI; DHAHBI; TRABELSI, 2015), moléculas (IKHDAIR; FALAYE; HAMZAVI, 2015; GUSEINOV; MAMEDOV, 2004; GUSEINOV, 2004), interações pseudo-harmônicas (DUTRA, 1993; IKHDAIR; HAMZAVI, 2012), o potencial de Kratzer (KRATZER, 1920; SETARE; KARIMI, 2007; MARQUES; BEZERRA, 2002) e defeitos topológicos em sólidos (FURTADO et al., 1994; MILSHTEIN, 1979; KITTLER et al., 2007; RAN; ZHANG; VISHWANATH, 2009). Outros estudos abordaram o potencial tipo-Coulomb na propagação de ondas gravitacionais (ASADA; FUTAMASE, 1997), modelos de quarks (CHRICHFIELD, 1976), um átomo com momento de quadrupólo elétrico (BAKKE, 2014a), momento de quadrupólo magnético (FONSECA; BAKKE, 2014), partícula com momento de dipólo magnético permanente (BARBOZA; BAKKE, 2015) e mecânica quântica relativística (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE; FURTADO, 2015; KHALILOV, 2005; CRATER; WONG, 2009).

2.2 Campo escalar sob efeitos do oscilador de Klein-Gordon e um potencial tipo-Coulomb I

Nesta seção, analismos a influência do potencial tipo-Coulomb sobre o espectro de energia do OKG. Seguindo a referência (GREINER; BROMLEY, 2000), o potencial de Coulomb é introduzido na EKG via acoplamento mínimo, ou seja, como a componente A_0 do quadrivetor $A_\mu = (-A_0, \vec{A} = 0)$[2], porém, devido a simetria adotada neste trabalho, o potencial considerado aqui é um potencial tipo-Coulomb, o qual pode ser produzido por uma distribuição uniforme de cargas elétricas dentro de um longo cilindro não condutor. Portanto, a EKG (2.1) (GREINER; BROMLEY, 2000) em unidades naturais ($c = \hbar = 1$) é

[2]Aqui, como em todos os nossos resultados apresentados neste trabalho, a assinatura utilizada é $(-+++)$.

reescrita:

$$[\hat{p}_\mu - qA_\mu][\hat{p}^\mu - qA^\mu]\phi - m^2\phi = 0, \tag{2.14}$$

onde o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski é dado na na forma

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \tag{2.15}$$

e o potencial tipo-Coulomb I[3] é dado por:

$$qA_0 = \frac{b}{\rho} = \pm\frac{|b|}{\rho}, \tag{2.16}$$

onde b é uma constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb I.

Doravante, consideremos uma partícula escalar relativística sujeita ao potencial tipo-Coulomb I (2.16) e ao OKG dado na Eq. (2.13). Assim, a EKG torna-se

$$m^2\phi = \left[i\frac{\partial}{\partial t} + qA_0\right]^2\phi - [\hat{p} + im\omega\rho\hat{\rho}].[\hat{p} - im\omega\rho\hat{\rho}]\phi. \tag{2.17}$$

Vale ressaltar que na Ref. (BAKKE; FURTADO, 2015) é introduzido um potencial tipo-Coulomb como uma modificação do termo em massa, portanto, difere do sistema descrito pela EKG (2.14). Assim, a EKG (2.17) no espaço-tempo de Minkowski, em $(2+1)$ dimensões, torna-se

$$m^2\phi = -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{2bi}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{b^2}{\rho^2}\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + m\omega\phi - m^2\omega^2\rho^2\phi. \tag{2.18}$$

No que se segue, consideremos uma solução particular para a Eq. (2.18) a qual é uma autofunção do operador $L_z = -i\partial_\varphi$. Portanto, podemos escrever uma solução particular para a Eq. (2.18) em termos dos autovalores da componente z do momento angular, $L_z = -i\partial_\varphi$, da seguinte forma:

$$\phi(\rho, \varphi, t) = e^{-i\mathcal{E}t}e^{il\varphi}R(\rho), \tag{2.19}$$

onde $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ e $R(\rho)$ é uma função da coordenada radial. Então, substituindo a Eq. (2.19) na Eq. (2.18), obtemos

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2}R + \frac{2\mathcal{E}b}{\rho}R - m^2\omega^2\rho^2R + \beta R = 0, \tag{2.20}$$

[3]Iremos, no decorrer deste trabalho, nos referi ao potencial tipo-Coulomb provindo do acoplamento mínimo desta forma.

onde definimos os seguintes parâmetros:

$$\beta = \mathcal{E}^2 - m^2 + m\omega; \qquad \gamma^2 = l^2 - b^2. \tag{2.21}$$

A partir de agora, consideremos a mudança de variável $r = \sqrt{m\omega}\rho$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\rho} &= \frac{dr}{d\rho}\frac{dR}{dr} = \sqrt{m\omega}\frac{dR}{dr}; \\ \frac{d^2R}{d\rho^2} &= \frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{d\rho}\right) = \frac{dr}{d\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\rho}\frac{dR}{dr}\right) = m\omega\frac{d^2R}{dr^2}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Assim, reescrevemos a Eq. (2.20) na forma:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\gamma^2}{r^2}R + \frac{\delta}{r}R - r^2R + \frac{\beta}{m\omega}R = 0, \tag{2.23}$$

onde definimos o novo parâmetro

$$\delta = \frac{2\mathcal{E}b}{\sqrt{m\omega}}. \tag{2.24}$$

O comportamento assintótico das possíveis soluções para a Eq. (2.23) é determinado para $r \to 0$ e $r \to \infty$. Através das Refs. (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; VERĆIN, 1991; MYRHEIM; HALVORSEN; VERĆIN, 1992), o comportamento das possíveis soluções para a Eq. (2.23) em $r \to 0$ e $r \to \infty$ nos permite escrever a função $R(r)$ em termos de uma função desconhecida $H(r)$ da seguinte maneira:

$$R(\varrho) = r^{|\gamma|}e^{-\frac{r^2}{2}}H(r), \tag{2.25}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= r^{|\gamma|}e^{-\frac{r^2}{2}}\left[\frac{dH}{dr} - \left(r - \frac{|\gamma|}{r}\right)H\right]; \\ \frac{d^2R}{dr^2} &= r^{|\gamma|}e^{-\frac{r^2}{2}}\left[\frac{d^2H}{dr^2} + 2\left(\frac{|\gamma|}{r} - r\right)\frac{dH}{dr} + \left(r^2 + \frac{\gamma^2}{r^2} - \frac{|\gamma|}{r^2} - 1 - 2|\gamma|\right)H\right] \end{aligned} \tag{2.26}$$

Substituindo as Eqs. (2.25) e (2.26) na Eq. (2.23), obtemos

$$\frac{d^2H}{dr^2} + \left[\frac{(2|\gamma|+1)}{r} - 2r\right]\frac{dH}{dr} + \left[\frac{\beta}{m\omega} - 2 - 2|\gamma| + \frac{\delta}{r}\right]H = 0. \tag{2.27}$$

A Eq. (2.27) corresponde à equação de Heun biconfluente[4] (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; RONVEAUX, 1995; BAKKE, 2014a) e a função $H(r)$ é a função de Heun biconfluente: $H(r) = H_B\left(2|\gamma|, 0, \frac{\beta}{m\omega}, 2\delta; -r\right)$. Para prosseguir com a nossa dis-

[4] Ver apândice A.

cussão sobre soluções de estados ligados, usemos o método Frobenius (ARFKEN; WEBER, 2005; FURTADO et al., 1994). Assim, a solução para a Eq. (2.27) pode ser escrita como uma expansão de série de potência em torno da origem:

$$H(r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j. \tag{2.28}$$

Substituindo a Eq. (2.28) na Eq. (2.27), obtemos a relação de recorrência

$$c_{j+2} = -\left[\frac{\delta c_{j+1} + (\alpha - 2j)c_j}{(j+2)(j+2+2|\gamma|)}\right], \tag{2.29}$$

e o coeficiente

$$c_1 = \frac{\delta}{(2|\gamma|+1)} c_0, \tag{2.30}$$

onde

$$\alpha = \frac{\beta}{m\omega} - 2 - 2|\gamma|. \tag{2.31}$$

Iniciando com $c_0 = 1$ e usando a relação (2.29), podemos calcular outros coeficientes da série de potência (2.28). Por exemplo,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\delta}{(1+2|\gamma|)} = -\frac{2b\mathcal{E}}{\sqrt{m\omega}(1+2|\gamma|)}; \\ c_2 &= \frac{2b^2\mathcal{E}^2}{m\omega(1+2|\gamma|)(2+2|\gamma|)} - \frac{\alpha}{2(2+2|\bar{\gamma}|)}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

A teoria quântica exige que a função de onda (2.19) seja normalizável, então, assumimos que a função $R(r)$ desaparece em $r \to 0$ e $r \to \infty$. Desta forma, soluções de estado ligado podem ser obtidas porque não há divergência da função de onda em $r \to 0$ e $r \to \infty$. Por outro lado, expressamos a função $H(r)$ como uma expansão de série de potência em torno da origem na Eq. (2.28). Deste modo, as soluções de estado ligado podem ser definidas impondo que a expansão da série de potência (2.28) ou a série Heun biconfluente se torne um polinômio de grau n. Desta forma, garantimos que $R(r)$ se comporta como $r^{|\gamma|}$ na origem e desaparece em $r \to 0$ (VERĆIN, 1991; MYRHEIM; HALVORSEN; VERĆIN, 1992). Através da relação de recorrência (2.29), podemos ver que a expansão da série de potência (2.28) torna-se um polinômio de grau n, impondo duas condições (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE; FURTADO, 2015; VERĆIN,

1991; MYRHEIM; HALVORSEN; VERĆIN, 1992; FURTADO et al., 1994):

$$\alpha = 2n; \qquad c_{n+1} = 0, \tag{2.33}$$

em que $n = 1, 2, 3, \ldots$. Através da condição $\alpha = 2n$, podemos obter a seguinte expressão :

$$\mathcal{E}_{l,n}^2 = m^2 + m\omega_{l,n}(1 + 2n + 2|\gamma|). \tag{2.34}$$

No entanto, nossa análise não está completa. Precisamos analisar a segunda condição dada na Eq. (2.33), isto é, $c_{n+1} = 0$. Com este objetivo, obtemos um polinômio de grau $n = 1$ para $H(r)$. Ao tomar $n = 1$, temos que $c_{n+1} = c_2 = 0$, com isso, suponhamos que a frequência angular ω do OKG possa ser ajustada de forma que a condição analisada seja satisfeita, não só para $n = 1$, mas para qualquer valor de n permetido. Por esta razão, rotulamos $\omega = \omega_{l,n}$ na Eq. (2.34). Desta forma, as condições estabelecidas na Eq. (2.33) estão satisfeitas e uma solução polinomial para a função $H(r)$ dada na Eq. (2.27) é calculada (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012). Portanto, para o estado de menor energia, obtemos a relação:

$$\omega_{l,1} = \frac{2b^2\mathcal{E}_{l,1}^2}{m(1 + 2|\gamma|)}, \tag{2.35}$$

a qual corresponde aos valores possíveis da frequência angular do OKG no estado correspondente ao modo radial $n = 1$, sendo este último o estado de menor energia. Através da Eq. (2.35), temos que os números quânticos do sistema $\{l, n\}$ e o parâmetro associado à interação de Coulomb restringem os valores possíveis da frequência angular do OKG. Portanto, existem valores da frequência angular do OKG que não são permitidos para que possam ser obtidas soluções de estados ligados relativísticos. Tomando $n = 1$ na Eq. (2.34) e, posteriormente, substituindo a Eq. (2.35) na última, as energias permitidas para o estado de menor energia do sistema são dadas por

$$\mathcal{E}_{l,1} = \pm\frac{m}{\sqrt{1 - 2b^2\frac{(3+2|\gamma|)}{(1+2|\gamma|)}}}. \tag{2.36}$$

Assim, ao introduzirmos o potencial escalar através do acoplamento mínimo, podemos ver na Eq. (2.36) que os níveis de energia relativistica do OKG são modificados pela influência do potencial tipo-Coulomb I. Essa influência produz o estado de menor energia do OKG a ser definido pelo número quântico $n = 1$ em contraste com o número quântico $n = 0$ conforme obtido nas Refs. (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008).

No que se segue, consideremos o caso mais simples da função $H(r)$ que corresponde

a um polinômio de primeiro grau. Neste caso, para $n = 1$, podemos escrever $H_{l,1}(r) = 1 + \frac{\delta}{(1+2|\gamma|)}$. Desta forma, a função de onda radial (2.25) associada ao estado de menor energia é dada na forma:

$$R_{l,1}(\varrho) = r^{|\gamma|} e^{-\frac{r^2}{2}} \left(1 + \frac{\delta}{(1+2|\gamma|)} r\right). \tag{2.37}$$

Portanto, a partir da introdução do potencial escalar, através do acoplamento mínimo, na EKG, temos que os efeitos do potencial tipo-Coulomb I sobre o espectro de energia do OKG revelam uma mudança dos níveis de energia, onde o estado de menor energia do sistema é definido pelo número quântico $n = 1$. Além disso, os valores da frequência angular do OKG são restritos a um conjunto de valores que nos permitem obter uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente. Do ponto de vista da mecânica quântica, este é um efeito caracterizado pela dependência da frequência angular do OKG com os números quânticos $\{l, n\}$ do sistema (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE; FURTADO, 2015).

2.3 Campo escalar sob efeitos do oscilador de Klein-Gordon e um potencial linear

Nesta seção, analisamos o comportamento do OKG (2.13) sujeito ao potencial de confinemanto linear em $(2 + 1)$ dimensões, portanto consideramos a simentria cilíndrica caracterizada pelo elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski dado na Eq. (2.15).

Como discutido na seção anterior, podemos inserir um potencial escalar na EKG modificando o termo de massa na forma: $m \to m + V(\vec{r}, t)$, onde $V(\vec{r}, t)$ é o potencial escalar (GREINER; BROMLEY, 2000). Consideremos um potencial escalar estático linear dado por

$$V(\rho) = \mu\rho, \tag{2.38}$$

onde μ é uma constante que caracteriza o potencial de confinamento linear. Desse modo, a forma geral da EKG que descreve a interação do OKG, Eq. (2.13), com o potencial escalar estático linear, Eq. (2.38), é dada por[5]

$$[m + V(\rho)]^2\phi = -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - [\hat{p} + im\omega\rho\hat{\rho}].[\hat{p} - im\omega\rho\hat{\rho}]\phi. \tag{2.39}$$

[5]É importante mencionar que a modificação do termo de massa é feita somente na massa de repouso da EKG, já que o produto da massa com a frequência angular, $m\omega$, que aparece no acoplamento que fornece o OKG, está relacionado com a "constante de mola" do modelo do oscilador relativístico.

Substituindo o potencial de confinamento linear (2.38) na EKG (2.39), temos

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+m\omega\phi-m^2\omega^2\rho^2\phi-m^2\phi-2m\mu\rho\phi-\mu^2\rho^2\phi=0. \quad (2.40)$$

Substituindo a Eq. (2.19) na Eq. (2.40), obtemos a equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{l^2}{\rho^2}R-\theta^2\rho^2R-2m\mu\rho R+\beta R=0, \quad (2.41)$$

onde β está definido na Eq. (2.21) e

$$\theta^2=m^2\omega^2+\mu^2. \quad (2.42)$$

De agora em diante, consideremos a mudança de variável $\varrho=\sqrt{\theta}\rho$, assim, a equação diferencial radial (2.41) toma a forma

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}-\frac{l^2}{\varrho^2}R-\varrho^2R-\varrho\lambda R+\frac{\beta}{\theta}R=0, \quad (2.43)$$

onde definimos o novo parâmetro

$$\lambda=\frac{2m\mu}{\theta^{3/2}}. \quad (2.44)$$

O comportamento assintótico das soluções possíveis para a Eq. (2.19) são determinados para $\varrho\to 0$ e $\varrho\to\infty$, então, através das referências (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; VERĆIN, 1991; MYRHEIM; HALVORSEN; VERĆIN, 1992), o comportamento das possíveis soluções para a Eq. (2.19) em $\varrho\to 0$ e $\varrho\to\infty$ nos permite escrever a função $R(\varrho)$ em termos de uma função desconhecida $G(\varrho)$ como segue:

$$R(\varrho)=\varrho^{|l|}e^{-\frac{1}{2}\varrho(\varrho+\lambda)}G(\varrho), \quad (2.45)$$

onde,

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\varrho} &= \varrho^{|l|}e^{-\frac{\varrho}{2}(\varrho+\lambda)}\left[\frac{dG}{d\varrho}-\frac{1}{2}\left(2\varrho+\lambda-\frac{2|l|}{\varrho}\right)G\right];\\ \frac{d^2R}{d\varrho^2} &= \varrho^{|l|}e^{-\frac{\varrho}{2}(\varrho+\lambda)}\left[\frac{d^2G}{d\varrho^2}+\left(\frac{2|l|}{\varrho}-2\varrho-\lambda\right)\frac{dG}{d\varrho}\right.\\ &+ \left.\left(\frac{l^2-|l|}{\varrho^2}-\frac{\lambda|l|}{\varrho}+\lambda\varrho+\varrho^2-2+\frac{\lambda^2}{4}\right)G\right].\end{aligned} \quad (2.46)$$

Substituindo as Eqs. (2.45) (2.46) na Eq. (2.43), obtemos

$$\frac{d^2G}{d\varrho^2}+\left[\frac{(2|l|+1)}{\varrho}-\lambda-2\varrho\right]\frac{dG}{d\varrho}+\left[g-\frac{h}{\varrho}\right]G=0, \tag{2.47}$$

onde definimos os parâmtros g e h:

$$g=\frac{\beta}{\theta}+\frac{\lambda^2}{4}-2-2|l|; \qquad h=\frac{\lambda}{2}(2|l|+1). \tag{2.48}$$

A equação diferencial de segunda ordem (2.47) corresponde à equação de Heun biconfluente[6] (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE, 2014a; RONVEAUX, 1995) e a função $G(\varrho)$ é a função de Heun biconfluente: $G(r)=G_B\left(2|l|,\lambda,\frac{\beta}{\theta}+\frac{\lambda^2}{4},0,\varrho\right)$.

Vamos prosseguir com a busca de soluções de estados ligados, portanto, devemos seguir os mesmos passos da Eq. (2.28) à (2.32), em que obtemos a relação de recorrência

$$c_{j+2}=-\frac{[h+\lambda(j+1)]c_{j+1}+(g-2j)c_j}{(j+2)(j+2+2|l|)}, \tag{2.49}$$

com

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda}{2}; \\ c_2 &= \frac{\lambda^2(2|l|+3)}{8(2|l|+2)}-\frac{g}{2(2|l|+2)}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde iniciamos a série com $c_0=1$.

Através da relação de recorrência (2.49), podemos ver que a expansão da série de Heun biconflunte torna-se um polinômio de grau n, impondo duas condições (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE; FURTADO, 2015; VERĆIN, 1991; MYRHEIM; HALVORSEN; VERĆIN, 1992; FURTADO et al., 1994; BAKKE, 2014a):

$$g=2n; \qquad c_{n+1}=0, \tag{2.51}$$

onde $n=1,2,3,\ldots$. Analisando a condição $g=2n$, dada na Eq. (2.51), obtemos a expressão:

$$\mathcal{E}_{l,n}^2=m^2+2m\sqrt{\omega^2+\frac{\mu^2}{m^2}}[n+|l|+1]-m\omega-\frac{\mu^2}{\left(\omega^2+\frac{\mu^2}{m^2}\right)}. \tag{2.52}$$

Vamos agora analisar a condição $c_{n+1}=0$, dada na Eq. (2.51). Para este objetivo, como feito na seção anterior, consideremos a frequência angular do OKG ω para ser

[6] Veja o apêndice A.

ajustada de forma que a condição $c_{n+1} = 0$ possa ser satisfeita. Vamos exemplificar a discussão sobre a condição $c_{n+1} = 0$, considerando primeiro o estado de menor energia do sistema $n = 1$; assim, a partir da condição $c_{n+1} = 0$, temos $c_2 = 0$. A condição $c_2 = 0$ produz

$$\omega_{l,1} = \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{2m}(2|l|+3)\right)^{2/3} - \frac{\mu^2}{m^2}}, \tag{2.53}$$

a qual corresponde aos possíveis valores da frequência angular do OKG no estado de menor energia. Este exemplo nos mostra que somente valores específicos da frequência angular são permetidos e dependem dos números quânticos $\{l, n\}$ para que os estados ligados relativisticos possam ser encontrados. Por este motivo, rotulamos $\omega = \omega_{l,n}$ na Eq. (2.53). Além disso, substituindo a Eq. (2.53) na Eq. (2.52), o nível de energia correspondente ao modo radial $n = 1$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2_{l,1} &= m^2 + 2m\left[\frac{\mu^2}{2m}(2|l|+3)\right]^{1/3}(2+|l|) - m\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{2m}(2|l|+3)\right)^{2/3} - \frac{\mu^2}{m^2}} \\ &- \frac{\mu^2}{\left[\frac{\mu^2}{2m}(2|l|+3)\right]^{2/3}}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

e a função de onda radial (2.45) associada com o estado de menor energia é escrita como

$$G_{l,1}(\varrho) = \varrho^{|l|} e^{-\frac{1}{2}\varrho(\varrho+\lambda)}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\varrho\right). \tag{2.55}$$

Podemos notar que o estado de menor energia do OKG (2.54) é definido pelo número quântico $n = 1$, em vez do número quântico $n = 0$ obtido nas Refs. (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008), devido a influência do potencial de confinamento linear. Além disso, a frequência angular do OKG é determinada pelos números quânticos $\{l, n\}$ cujo significado dessa restrição é que apenas valores específicos da freqüência angular ω são permitidos para que soluções de estados ligados relativísticos possam ser encontrados no sistema.

2.4 Campo escalar sob efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb II

Nesta seção, consideramos o OKG em $(2+1)$ dimensões dado na Eq. (2.39) sob a influência de potenciais linear e tipo-Coulomb:

$$V(\rho) = \mu\rho + \frac{\nu}{\rho}, \tag{2.56}$$

onde ν é uma constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb II[7]. Seguindo os mesmos passos da Eq. (2.39) para Eq. (2.43), temos

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} - \frac{\bar{\gamma}^2}{\varrho^2}R - \varrho^2 R - \lambda\varrho R - \frac{\bar{\delta}}{\varrho}R + \frac{\bar{\beta}}{\theta}R = 0, \tag{2.57}$$

onde definimos os parâmetros θ e λ estão definidos nas Eqs. (2.42) e (2.44), respectivamente, e os parâmetros $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ e $\bar{\delta}$ são

$$\bar{\beta} = \mathcal{E}^2 - m^2 + m\omega + \mu\nu; \quad \bar{\gamma}^2 = l^2 + \nu^2; \quad \bar{\delta} = \frac{2m\nu}{\theta^{1/2}}. \tag{2.58}$$

Analisando o comportamento assintótico das soluções possíveis para a Eq. (2.57), podemos escrever a função R em termos de uma função desconhecida $\bar{G}(r)$ como

$$R(\varrho) = \varrho^{|\bar{\gamma}|}e^{-\frac{1}{2}\varrho(\varrho+\lambda)}\bar{G}(\varrho). \tag{2.59}$$

Substituindo a Eq. (2.59) na Eq. (2.57), obtemos a equação de Heun biconflunte (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE, 2014a; RONVEAUX, 1995):

$$\frac{d^2\bar{G}}{d\varrho^2} + \left[\frac{(2|\bar{\gamma}|+1)}{\varrho} - \lambda - 2\varrho\right]\frac{d\bar{G}}{d\varrho} + \left[\bar{g} - \frac{\bar{h}}{\varrho}\right]\bar{G} = 0, \tag{2.60}$$

onde os parâmetros $\bar{g}$ e $\bar{h}$ são

$$\bar{g} = \frac{\bar{\beta}}{\theta} + \frac{\lambda^2}{4} - 2 - 2|\bar{\gamma}|; \qquad \bar{h} = \frac{\lambda}{2}(2|\bar{\gamma}|+1) + \bar{\delta}, \tag{2.61}$$

e a função de Heun biconfuente é determinada por $\bar{H} = \bar{H}_B\left(2|\bar{\gamma}|, \lambda, \frac{\bar{\beta}}{\theta} + \frac{\lambda^2}{4}, 2\bar{\delta}; r\right)$. Assim, utilisando o método de Fröbenius, como nas Eqs. (2.28) e (2.29), obtemos a seguinte relação de recorrência

$$c_{j+2} = -\frac{[\bar{h} + \lambda(j+1)]c_{j+1} + (\bar{g} - 2j)c_j}{(j+2)(j+2+2|\bar{\gamma}|)}, \tag{2.62}$$

[7] O potencial tipo-Coulomb provindo da modificação do termo de massa será nomeado desta forma no decorrer deste trabalho.

onde $\bar{h}$ e $\bar{g}$ são dados na Eq. (2.61). Novamente, iniciamos a série de potência com $c_0 = 1$ e calculamos coeficientes de ordem da expansão de série de potência (2.28)usando a relação de recorrência (2.62). No presente caso, os coeficientes c_1 e c_2 tornam-se

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda(2|\bar{\gamma}|+1)+2\bar{\delta}}{2(2|\bar{\gamma}|+1)} \\ c_2 &= \frac{\bar{h}(\bar{h}+\lambda)}{2(2|\bar{\gamma}|+2)(2|\bar{\gamma}|+1)} - \frac{\bar{g}}{2(2|\bar{\gamma}|+2)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Através da relação de recorrência (2.63), a expansão de série de Heun biconfluente torna-se um polinômio de grau n impondo que

$$\bar{g} = 2n; \qquad c_{n+1} = 0, \tag{2.64}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. A partir da condição $\bar{g} = 2n$, obtemos a expressão

$$\mathcal{E}^2_{l,n} = m^2 + 2\theta(n + |\bar{\gamma}| + 1) - m\omega - \frac{m^2\mu^2}{\theta^2} + 2\mu\nu. \tag{2.65}$$

Analisando a condição $c_{n+1} = 0$ para o estado ligado $n = 1$, onde, também, assumimos que a frequência angular do OKG pode ser ajustada de tal forma que a condição $c_{n+1} = 0$ possa ser satisfeita, então, para $n = 1$, $c_2 = 0$, e assim, através da Eq. (2.63), obtemos

$$\theta^3_{l,1} - \frac{2m^2\nu^2}{(2|\bar{\gamma}|+1)}\theta^2_{l,1} - 2m^2\mu\nu\theta_{l,1} - \frac{m^2\mu^2}{2}(2|\bar{\gamma}|+3) = 0. \tag{2.66}$$

Uma vez que o parâmetro θ depende da frequência angular do OKG, como estabelecido na Eq. (2.42), simplificamos nossa notação renomeando:

$$\theta_{l,n} = \pm m\sqrt{\omega^2_{l,n} + \frac{\mu^2}{m^2}}. \tag{2.67}$$

Portanto, a frequência angular $\omega_{l,1}$, associada ao estado de menor energia, satisfaz a equação algébrica do terceiro grau (2.66). Apesar da Eq. (2.66) ter pelo menos uma solução real, não a escrevemos porque sua expressão é muito longa. Além disso, para $n = 1$, a função de onda radial (2.59), associada ao estado de menor energia, é dada na forma

$$R_{l,1}(\varrho) = \varrho^{|\bar{\gamma}|}e^{-\frac{1}{2}\varrho(\varrho+\lambda)}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\varrho + \frac{\bar{\delta}}{(2|\bar{\gamma}|+1)}\varrho\right). \tag{2.68}$$

Novamente, o espectro de energia do OKG (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008) é modificado, onde o estado de menor energia do OKG torna-se definido pelo número quântico $n = 1$ ao invés do número quântico $n = 0$. Além disso, a influência dos potenciais

de confinamento tipo-Coulomb II e linear sobre o OKG restringe os valores da frequência angular do OKG para um conjunto de valores nos quais nos permitem obter uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente. Estes possíveis valores da frequência angular do OKG são determinados pelos números quânticos $\{l, n\}$ do sistema. Em particular, vimos que os possíveis valores da frequência angular relacionada ao modo radial $n = 1$ do sistema são determinados por uma equação algébrica de terceiro grau.

2.5 Campo escalar sob efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb I

De modo a estender nossa discussão, nesta seção analisamos a dinâmica quântica relativística de uma partícula eletricamente carregada com uma massa dependente da posição sob a influência do OKG e o potencial tipo-Coulomb I.

Assim, a forma geral da EKG, que descreve uma partícula eletricamente carregada com uma massa dependente da posição sob a influência do OKG e do potencial tipo-Coulomb I (2.17) é dada por

$$[m + V(\rho)]^2\phi = \left[i\frac{\partial}{\partial t} + qA_0\right]^2 \phi - [\hat{p} + im\omega\rho\hat{\rho}].[\hat{p} - im\omega\rho\hat{\rho}]\phi. \tag{2.69}$$

Substituindo as Eqs. (2.16) e (2.38) na Eq. (2.69), obtemos

$$\begin{aligned} m^2\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{2bi}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{b^2}{\rho^2}\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + m\omega\phi - m^2\omega^2\rho^2\phi \\ &- 2m\nu\rho\phi - \nu^2\rho^2\phi. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Seguindo os passos da Eq. (2.19) para Eq. (2.21), obtemos a equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{d\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2}R + \frac{2b\mathcal{E}}{\rho}R - 2m\mu\rho R - \theta^2\rho^2R + \beta R = 0 \tag{2.71}$$

onde os parâmetros β, γ e θ são definidos nas Eqs. (2.21) e (2.42), respectivamente. Utilizando a mudança de variável $\varrho = \sqrt{\theta}\rho$, a Eq. (2.71) é reescrita da forma

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} - \frac{\tilde{\delta}}{\varrho}R - \lambda\varrho R - \varrho^2R + \frac{\beta}{\theta}R = 0, \tag{2.72}$$

onde λ é definido na Eq. (2.44) e

$$\tilde{\delta} = \frac{2b\mathcal{E}}{\sqrt{\theta}}. \tag{2.73}$$

Note que a Eq. (2.72) é análoga à Eq. (2.57), logo, seguindo os passos da Eq. (2.59) à Eq. (2.63), obtemos a relação de recorrência da série de Heun biconfluente:

$$c_{j+2} = \frac{[\lambda(j+1)+\tilde{h}]c_{j+1} - (\tilde{g}-2j)c_j}{(j+2)(j+2+2|\gamma|)}, \tag{2.74}$$

e os coeficientes (com $c_0 = 1$)

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda}{2} - \frac{\tilde{\delta}}{(1+2|\gamma|)}; \\ c_2 &= \frac{\tilde{h}(\tilde{h}+\lambda)}{2(1+2|\gamma|)(2+2|\gamma|)} - \frac{\tilde{g}}{2(2+2|\gamma|)}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

onde

$$\tilde{g} = \frac{\beta}{\theta} + \frac{\lambda^2}{4} - 2 - 2|\gamma|; \quad \tilde{h} = \frac{\lambda}{2}(2|\gamma|+1) - \tilde{\delta}. \tag{2.76}$$

Como visto na Sec. (2.2), a série de potência representada pela função de Heun biconfluente, torna-se um polinômio de grau n impondo que (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; BAKKE, 2014a):

$$\tilde{g} = 2n; \qquad c_{n+1} = 0, \tag{2.77}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Através da condição $\tilde{g} = 2n$, obtemos

$$\mathcal{E}_{l,n}^2 = m^2 - m\omega + 2\theta(n + |\gamma| + 1) - \frac{m^2\mu^2}{\theta^2}. \tag{2.78}$$

Por outro lado, analisando a condição $c_{n+1} = 0$ para o estado de menor energia ($n = 1$), obtemos uma equação algébrica de terceiro grau

$$\theta_{l,1}^3 - \frac{2b^2\mathcal{E}_{l,1}^2}{(2+2|\gamma|)}\theta_{l,1}^2 + 2bm\mu\mathcal{E}_{l,1}\theta_{l,1} - m^2\mu^2\frac{(1+2|\bar{\gamma}|)(3+2|\bar{\gamma}|)}{2(2+|\bar{\gamma}|)} = 0, \tag{2.79}$$

onde renomeamos $\theta_{l,n}$ e é dado na Eq. (2.67) para estabelecer que estamos considerando a frequência angular do OKG como o parâmetro que pode ser ajustado para que a condição $c_{n+1} = 0$ possa ser satisfeita e uma solução polinomial para a função de Heun biconfuente possa ser determinada. Uma vez que, a Eq. (2.79) tem pelo menos uma solução real (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012), então, a expressão para o estado de menor energia $\mathcal{E}_{l,1}$ pode ser obtida a partir desta solução real.

2.6 Sumário

Neste capítulo, apresentamos as formas, já consagradas na literatura, de inserir potenciais de confinamento via acoplamento mínimo e modificação do termo de massa, no caso, na EKG. No que diz respeito a potenciais centrais, fizemos uma breve revisão do OKG, um potencial de central provindo de um acoplamento linear em $\vec{r}$ no operador momento linear introduzido por Bruce e Minning (BRUCE; MINNING, 1993), baseado no acoplamento definido por Moshinsky and Szczepaniak, o qual deu origem ao oscilador de Dirac (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1989). Revisamos o OKG em uma dimensão, como também seu perfil energético, mostrando que, no limite não relativístico, obtemos os aspectos gerais do oscilador harmônico descrito pela equação de Schröndiger (RAO; KAGALI, 2008). Em seguida, apresentamos os nossos primeiros resultados relacionados ao estudo de uma partícula escalar sob efeitos de potenciais centrais inseridos via modificação do termo de massa e acoplamento mínimo na EKG, onde, em ambos os casos o OKG atua. No capítulo a seguir, apresentaremos um outro cenário, para a análise de um campo escalar sob esfeitos de pontenciais centrais, onde o plano de fundo que engloba este sistema é caracterizado por um defeito topológico conhecido na literatura como torção.

3 Campo escalar sujeito a potenciais centrais em um espaço-tempo com torção

Em analogia a sistemas de matéria condensada, no que diz respeito à transição de fase, espera-se, segundo teorias de Universo primordial, que haja objetos no Universo, os quais denominamos defeitos topológicos, provindos do desacoplamento das interações fundamentais (transição de fase), embora, ainda, esses objetos não tenham sido observados. Exemplos bem conhecidos de defeitos topológicos são a corda cósmica (HISCOCK, 1985; LINET, 1985; VILENKIN, 1985), parede de domínio (VILENKIN, 1985, 1983) e monopólo global (BARRIOLA; VILENKIN, 1989). Do ponto de vista matemático, defeitos topológicos são soluções de equações diferenciais não-lineares (SOUZA et al., 2012). Defeitos topológicos no espaço-tempo e em física da matéria condensada podem ser associados com a presença de curvatura e torção.

3.1 Defeitos topológicos associados à torção: uma breve introdução

No interesse de descrever a diferenciação de um campo vetorial no espaço-tempo, surge a definição de transporte paralelo, onde este dispositivo se resume em assumir que um campo vetorial em um ponto qualquer é movido desse ponto para um outro ponto vizinho, paralelo a si mesmo, ou seja, como se sua magnitude e direção não mudasse (NARLIKAR, 2010). Esta metodologia é necessária para a definição de diferenciação de um campo vetorial, pois, a mesma[1] esteabelece que a diferença de dois vetores é um vetor desde que ambos estejam definidos no mesmo ponto.

[1] Para um campo vetorial B_i que varia com x^k, por exemplo, temos que $\frac{\partial B_i}{\partial x^n} = \lim_{\delta x^n \to 0} \left[\frac{B_i(x^k + \delta x^k) - B_i(x^k)}{\delta x^n} \right]$.

Pela definição geral, as mudanças nas componentes de um campo vetorial através do transporte paralelo serão proporcionais às componentes originais, e também ao deslocamento na posição entre os pontos vizinhos e, com isso, define-se a derivada covariante. Por exemplo, no caso do campo vetorial $B_i(x^k)$, temos que sua derivada covariante é dada por:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^k} = B_{i;k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l = B_{i,k} - \Gamma^l_{ik} B_l, \tag{3.1}$$

onde Γ^l_{ik} são denominadas de símbolos de três índices ou símbolos de Christoffel, e, em geral, são funções do espaço-tempo (NARLIKAR, 2010).

Enquanto a métrica nos diz como medir a distância entre dois pontos vizinhos, os símbolos de Christoffel nos fornecem a informação de como definir vetores paralelos em pontos vizinhos. Define-se como conexão afim esta propriedade de acoplar vetores vizinhos a partir do conceito de paralelismo local (NARLIKAR, 2010).

É importante resslatar que a teoria gravitacional de Einstein é desenvolvida através de uma geometria não-eucridiana, a qual introduz as seguintes especificações: $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$ e $g_{ik;l} = 0$, ou seja, os símbolos de Christoffel são simétricos e a derivada covariante da métrica é nula.

No entanto, o transporte paralelo de um campo vetorial ao longo de trajetórias diferentes pode levar a dois pontos não concidentes. Por exemplo, considere o transporte paralelo do campo vetorial infinitesimal ζ^α ao longo de χ^α cujas componentes são $A^\alpha = \zeta^\alpha + \chi^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\zeta^\mu\chi^\nu$ e compare isso ao transporte paralelo do campo vetorial infinitesimal χ^α ao longo de ζ^α com as componentes $B^\alpha = \chi^\alpha + \zeta^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\chi^\mu\zeta^\nu$, como mostrado na Fig. (1). Fazendo $C^\alpha = A^\alpha - B^\alpha$, temos:

$$C^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\zeta^\mu\chi^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\chi^\mu\zeta^\nu = 2S^\alpha_{\mu\nu}\zeta^\mu\chi^\nu, \tag{3.2}$$

onde

$$S^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}), \tag{3.3}$$

o qual é definido como o tensor de torção. Podemos observar, como mostra a Fig. (3.1) (HAMMOND, 2002), que os vetores A^α e B^α não formam um paralelogramo e esta não formação ou não fechamento do paralelogramo é proporcional à torção (3.3). Se as conexões desse espaço forem os símbolos de Christoffel, ou seja, conexões simétricas, tem-se $S^\alpha_{\mu\nu} = 0$ (SÁNCHES, 2011).

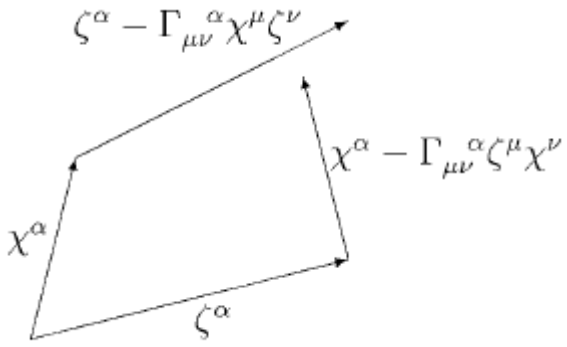

Figura 1: O vetor infinitesimal ζ^μ é transportado paralelamente ao longo de χ^μ, e vice-versa, em um espaço-tempo onde o tensor de torção é não nulo (HAMMOND, 2002).

Em um extenso trabalho sobre elasticidade de objetos tridimensionais (objetos cilíndricos ocos), Vito Volterra introduziu o conceito de distorções (VOLTERRA, 1907) as quais provenieram do processo que leva o seu nome ou, também conhecido por processo de "cortar e colar". Posteriormente, as distorções foram bastante utilizadas em investigações de sólidos contínuos (KLÉMAN, 1980; KRÖNER, 1981) e em cristais (NABARRO, 1967). O processo de Volterra produz tipos diferentes de objetos os quais são caracterizados por deslocações e descrinações. Em particular, como mostra a Fig. (2), as deslocações são decompostas, considerando o sistema de coordenadas cilíndricas, onde o eixo z coincide com o eixo de simetria, em (PUNTIGAM; SOLENG, 1997; BAKKE, 2009):

- *tipo espiral* – defeitos resultantes de translações perpendiculares ao eixo z, ou seja, translações na direção radial;
- *tipo lateral* – defeitos resultantes de translações perpendiculares ao eixo z, porém, translações na direção azimutal;
- *tipo-hélice* – defeitos resultantes de translações paralelas ao eixo z.

Efeitos topológicos associados com torção têm sido investigado em sólidos cristalinos com uso de geometria diferencial (KATANAEV; VOLOVICH, 1992; KLEINERT, 1989). Recentes estudos exploraram os efeitos de torção em sistemas de matéria condensada (FILGUEIRAS et al., 2016; MA et al., 2016; WANG et al., 2015; FILGUEIRAS; SILVA, 2015). Vale a pena mencionar alguns trabalhos que trataram com um defeito topológico relacionado à torção tipo deslocação. Dentre eles, temos o efeito AB para estados ligados (MARQUES et al., 2005) e o espalhamento quântico (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001).

Putingam e Soleng adaptaram de forma sistemática, através de sistemas de matéria

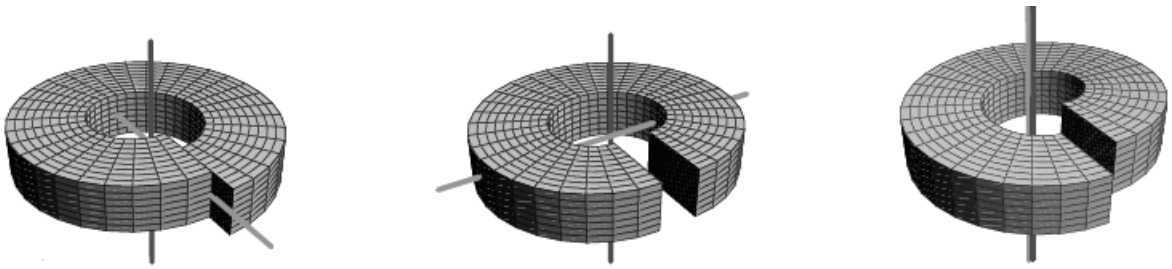

Figura 2: Da esquerda para a direita, onde o eixo claro indica a direção da deslocação: deslocação tipo espiral, onde o eixo z (escuro) de simetria do defeito é perpendicular ao eixo indicativo direcional radial da deslocação; delsocação tipo lateral, onde o eixo z (escuro) de simetria do defeito é perpendicular ao eixo indicativo direcional azimutal da deslocação; deslocação tipo-hélice, a qual eixo z (escuro) de simetria do defeito é paralelo ao eixo indicativo direcional em z da deslocação (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

condensada, as distorções provindas do processo de Volterra em (3+1) dimensões usando métodos geométricos diferenciais, onde os mesmos construíram dez possíveis espaços-tempos distorcidos, ou seja, com defeitos topológicos associados à torção (PUNTIGAM; SOLENG, 1997). Em particular, tem-se o espaço-tempo com deslocação tipo-espaço caracterizando uma deslocação tipo-hélice (PUNTIGAM; SOLENG, 1997), como mostra a Fig. (3). Este tipo de pano de fundo de defeito topológico tem sido utilizado em estudos do efeito AB para estados ligados (BEZERRA, 1997), oscilador de Dirac (BAKKE; FURTADO, 2013), efeitos não-inerciais (BAKKE, 2014b) e a descrição do OKG na teoria de Kaluza-Klein (CARVALHO et al., 2016). O elemento de linha que descreve um espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice é dada por (PUNTIGAM; SOLENG, 1997):

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + (dz + \chi d\varphi)^2, \tag{3.4}$$

onde χ é uma constante que caracteriza a deslocação (torção). Na Eq. (3.4), a torção corresponde a uma singularidade no origem (KATANAEV; VOLOVICH, 1992; KLEINERT, 1989; FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001; PUNTIGAM; SOLENG, 1997). Em comparação com a teoria elástica na física da matéria condensada (KATANAEV; VOLOVICH, 1992; KLEINERT, 1989), o parâmetro χ está relacionado ao vetor de Burgers $\vec{b}$ via $\chi = \frac{b}{2\pi}$.

3.2 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados: uma breve revisão

Em eletromagnetismo clássico, o potencial vetor $\vec{A}$ é apenas uma conveniência matemática na descrição eletromagnética dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$. Entretanto,

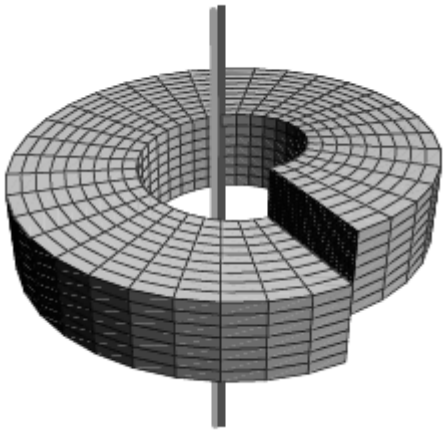

Figura 3: Deslocação tipo-hélice (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

Aharonov[2] e Bohm[3] apresentaram uma descrição quântica para uma partícula sensível à presença de um potencial vetor $\vec{A}$ não nulo em regiões onde o campo magnético é nulo, $\vec{B} = 0$, ou seja, o potencial vetor em um cenário quântico passa a ser um campo real, ao invés de um mero artifício matemático, como descrito no cenário clássico. Esse preocedimento ficou conhecido como efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959).

O efeito AB pode ser testado experimentalmente. Um arranjo experimental que mostra um efeito físico direto do potencial eletromgnético sobre elétrons quânticos, ao contrário dos elétrons clássicos, é apresentado na Fig. (4), onde elétrons são emitidos de uma fonte para chegar ao detector. Um obstáculo é colocado de tal forma que o feixe de elétrons tomará o caminho um ou dois. Depois desse obstáculo, um solenoide, é colocado entre o caminho da fonte de elétrons e o detector.

No caso não relativístico, as energia permitidas de um partícula restrita a um anel de raio r_0 (raio fixo) sujeita ao efeito AB são (GRIFFITHS, 2004):

$$\mathcal{E}_l = \frac{\hbar^2}{2mr_0}\left(l - \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar}\right)^2, \tag{3.5}$$

onde $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ são os autovalores do operador momento angular $\hat{L}_z$, q a carga da partícula e Φ_B é o fluxo quântico de AB.

Note que os níveis de energia são influenciados pelo fluxo quântico Φ_B, onde essa influência é explicitada através de uma redefinição dos autovalores do momento angular através de um momento angular effetivo $l_{ef} = l - \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar}$. Essa característica será bastante

[2]Yakir Aharonov.
[3]David Joseph Bohm.

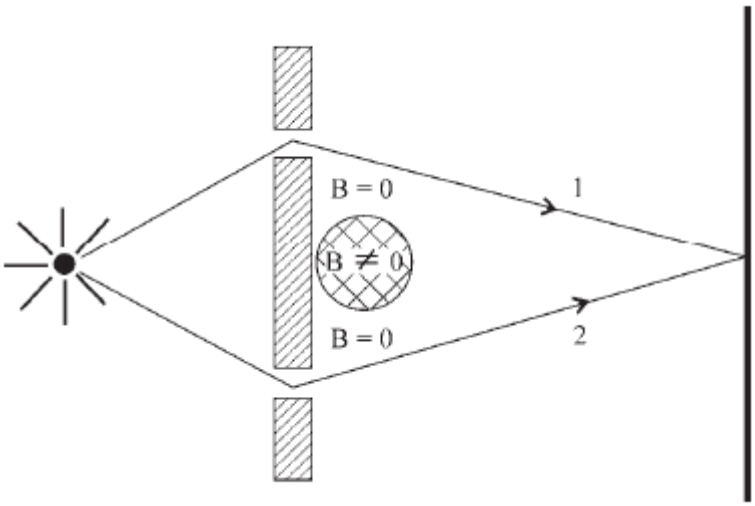

Figura 4: Arranjo experimental do efeito AB (FERREIRA, 2004).

necessária no decorrer deste capítulo.

3.3 Quantização de Landau: uma breve revisão

A quantização de Landau ocorre quando uma partícula carregada eletricamente interage com um campo magnético uniforme, o qual é perpendicular ao plano de movimento da partícula. Este sistema particular é caracterizado por um espectro discreto de energia, onde cada nível de energia tem uma degenerescência infinita (LANDAU; LIFSHITZ, 1981).

Em um sistema onde a partícula de massa m carregada eletricamente com uma carqa q se encontra no plano xy descrito por cooordenadas polares e sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$, proveniente do potencial vetor $\vec{A} = -\frac{B_0\rho}{2}\hat{\varphi}$, o qual está atuando na direção perpendicular a este plano, caracterizando uma simetria cilíndrica, os níveis de energia da partícula são dados da forma (LANDAU; LIFSHITZ, 1981):

$$E_{k,l,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\omega_0\left(n + \frac{l}{2} + \frac{|l|}{2} + \frac{1}{2}\right), \tag{3.6}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$ são os modos radiais, $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ os autovalores do operador momneto angular $\hat{L}_z$, $-\infty \leq k \leq \infty$ os autovalores do operador momento linear $\hat{p}_z$, ω_0 é a frequência de cíclotron

$$\omega_0 = \frac{qB_0}{mc}, \tag{3.7}$$

e c a velocidade da luz no vácuo.

Note que, para qualquer valor de n, temos uma degenerescência infinita. Esta característica da quantização de Landau será necessária para nossas análises futuras neste capítulo.

3.4 Campo escalar sob efeitos de um potencial linear no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice

Nesta seção, analisamos o comportamento de uma partícula escalar relativística com a massa dependente da posição, como já visto no Cáp. (2), em um espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice sujeita ao potencial escalar linear. Na presente abordagem, assumimos que a partícula escalar relativística possui uma massa dependente da posição $m(\rho) \to m + V(\rho)$, onde $V(\rho)$ é o potencial escalar estático (GREINER; BROMLEY, 2000). Sendo assim, a descrição quântica relativística deste sistema de massa dependente da posição em um espaço-tempo no cenário definido pela métrica (3.4) é dado pela EKG em sua forma covariante:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu)\phi - [m + V(\rho)]^2\phi = 0, \tag{3.8}$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico inverso.

As componentes do tensor métrico dado na Eq. (3.4) são: $g_{00} = -1$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2 + \chi^2$, $g_{23} = g_{32} = \chi$ e $g_{33} = 1$. Com isso, utilizando a regra do cofator, podemos calcular o determinate g:

$$g = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2+\chi^2 & \chi \\ 0 & 0 & \chi & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2+\chi^2 & \chi \\ 0 & \chi & 1 \end{vmatrix} = -\rho^2, \tag{3.9}$$

e o tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$ pode ser definido utilizando a relação $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = I_4$, onde I_4 é a matriz identidade de ordem 4, a qual nos fornece de forma direta as componentes $g^{00} = -1$, $g^{0\nu} = 0$ para $\nu \neq 0$, $g^{11} = 1$, $g^{1\nu} = 0$ para $\nu \neq 1$, e as componetes restantes são definidas através dos quatro sistemas de duas equações seguintes:

$$\begin{cases} (\rho^2+\chi^2)g^{20} + \chi g^{30} = 0 \\ \chi g^{20} + g^{30} = 0 \end{cases} \Rightarrow g^{20} = g^{30} = 0,$$

$$\begin{cases} (\rho^2+\chi^2)g^{21} & + & \chi g^{31}=0 \\ \chi g^{21} & + & g^{31}=0 \end{cases} \Rightarrow g^{21}=g^{31}=0,$$

$$\begin{cases} (\rho^2+\chi^2)g^{22} & + & \chi g^{32}=1 \\ \chi g^{22} & + & g^{32}=0 \end{cases} \Rightarrow g^{22}=\frac{1}{\rho^2};\ g^{32}=-\frac{\chi}{\rho^2},$$

$$\begin{cases} (\rho^2+\chi^2)g^{23} & + & \chi g^{33}=0 \\ \chi g^{23} & + & g^{33}=1 \end{cases} \Rightarrow g^{23}=-\frac{\chi}{\rho^2},\ g^{33}=\frac{\rho^2+\chi^2}{\rho^2}.$$

Logo, o tensor métrico inverso na sua forma matricial é definido

$$g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & -\frac{\chi}{\rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\chi}{\rho^2} & \frac{\rho^2+\chi^2}{\rho^2} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Então, substituindo as Eqs. (3.9) e (3.10) na Eq. (3.8), obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\chi\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-[m+V(\rho)]^2\phi=0. \tag{3.11}$$

Com a Eq. (3.11) podemos, então, analisar o campo escalar de massa dependente da posição para diferentes potenciais escalares de confinamento. Portanto, consideremos o potencial escalar estático linear dado na Eq. (2.38).

Uma solução para a Eq. (3.11) pode ser escrita através do *Ansatz*

$$\phi(\rho,\varphi,z,t)=e^{-i\mathcal{E}t}e^{il\varphi}e^{ikz}R(\rho), \tag{3.12}$$

onde $l=0,\pm1,\pm2,\ldots$, $-\infty\leq k\leq\infty$ e $R(\rho)$ é uma função da coordenada radial. Então, substituindo as Eqs. (2.38) e (3.12) na Eq. (3.11), temos

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{1}{\rho^2}(l-k\chi)^2R-2m\mu\rho R-\mu^2\rho^2R+(\mathcal{E}^2-m^2-k^2)R=0. \tag{3.13}$$

Fazendo a mudança de variável $\xi=\sqrt{\mu}\rho$, a Eq. (3.13) torna-se

$$\frac{d^2R}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dR}{d\xi}-\frac{\gamma^2}{\xi^2}R-\alpha\xi R-\xi^2R+\beta R=0, \tag{3.14}$$

onde definimos

$$\alpha = \frac{2m}{\sqrt{\mu}}; \quad \beta = \frac{1}{\mu}(\mathcal{E}^2 - m^2 - k^2); \quad \gamma^2 = (l - k\chi)^2. \tag{3.15}$$

Podemos perceber que a Eq. (3.14) é análoga à Eq. (2.43), logo, seguindo os passos da Eq. (2.45) à Eq. (2.49), com $R(\xi) = \xi^{|\gamma|}e^{-\frac{1}{2}\xi(\xi+\alpha)}G(\xi)$, onde $G(\xi)$ é a série de Heun biconfluente, obtemos a relação de recorrência

$$c_{j+2} = \frac{[\alpha(j+1)+\tau]c_{j+1} - (\lambda - 2j)c_j}{(j+2)(j+2+2|\gamma|)}, \tag{3.16}$$

e a relação

$$c_1 = \frac{\alpha}{2}c_0, \tag{3.17}$$

na qual

$$\lambda = \beta + \frac{\alpha^2}{4} - 2 - 2|\gamma|; \quad \tau = \frac{\alpha}{2}(2|\gamma|+1). \tag{3.18}$$

Note que soluções polinomiais para a função $G(\xi)$ são encontradas impondo que a série de Heun biconfluente torna-se um polinômio de grau n. Através da relação de recorrência (3.16), temos que a série de Heun biconfluente torna-se um polinômio de grau n impondo que (BAKKE; FURTADO, 2015; FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012):

$$\lambda = 2n; \qquad c_{n+1} = 0, \tag{3.19}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Com a condição $\lambda = 2n$, obtemos

$$\mathcal{E}_{k,l,n} = \pm\sqrt{2\mu(n + |l - k\chi| + 1) + k^2}. \tag{3.20}$$

Por outro lado, se quisermos analisar a condição $c_{n+1} = 0$, precisamos definir alguns coeficientes da expansão da série de potência. Comecemos com $c_0 = 1$, então, das Eqs. (3.16) e (3.17), obtemos $c_1 = \frac{\alpha}{2}$ e $c_2 = \frac{\alpha^2(2|\gamma|+3)}{8(2+2|\gamma|)} - \frac{\lambda}{2(2+2|\gamma|)}$. Neste caso, se considerarmos o estado de menor energia ($n = 1$), temos $c_{n+1} = c_2 = 0$, e então,

$$\mu_{k,l,1} = m^2\left(|l - k\chi| + \frac{3}{2}\right), \tag{3.21}$$

isto é, para determinar soluções polinomiais para a função $G(\xi)$, assumimos que o parâmetro μ associado ao potencial escalar linear na Eq. (2.38) deve ser escolhido com o objetivo de satisfazer a condição $c_{n+1} = 0$, portanto, rotulamos $\mu = \mu_{k,l,n}$ na Eq. (3.21). Com a relação dada na Eq. (3.21), temos que os valores possíveis do parâmetro μ são

determinados pelos parâmetros associados com a torção e os números quânticos $\{k, l, n\}$ do sistema. Substituindo a Eq. (3.21) na Eq. (3.20), as energias permitidas para o estado de menor energia são dados por

$$\mathcal{E}_{k,l,1} = \pm m\sqrt{(2|l - k\chi| + 3)(|l - k\chi| + 2) + \frac{k^2}{m^2}}. \tag{3.22}$$

Podemos observar a influência da torção na Eq (3.21) e, consequentemente, na Eq. (3.22) através da presença do parâmetro χ. Tal parâmetro produz uma mudança no momento angular que dá origem a um número quântico de momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi$. Conforme indicado na Ref. (BEZERRA, 1997), essa mudança é análoga ao efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989), onde a mudança no momento angular é dada por $\bar{l} = l - \frac{e\Phi}{2\pi}$ (AHARONOV; BOHM, 1959; GRIFFITHS, 2004), como visto na Sec. (3.2). Tomando $\chi = 0$, então, obtemos na Eq. (3.21) as energias permetidas do estado de menor energia do sistema de massa dependente da posição confinado em um potencial escalar linear no espaço-tempo de Minkowski.

3.5 Campo escalar sob efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb I

O potencial de Coulomb pode ser introduzido na EKG através do acoplamento mínimo (GREINER; BROMLEY, 2000), como visto na Sec. (2.2). Então, nesta seção, analisamos o sistema de massa dependente da posição discutido na Sec. (3.4), sujeito ao potencial tipo-Coulomb I. Portanto, para uma partícula eletricamente carregada de massa dependente da posição que interage com o campo eletromagnético em um espaço-tempo curvo, a EKG é escrita na forma (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}[(\partial_\mu - iqA_\mu)(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})(\partial_\nu - iqA_\nu)]\phi - [m + V(\rho)]^2\phi = 0. \tag{3.23}$$

Então, considerando a configuração de calibre utilizada na Sec. (2.2), $A_\mu = (-A_0, \vec{A} = 0)$, e substituindo as Eqs. (2.16), (2.38), (3.3) e (3.10) na Eq. (3.23), obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ \frac{2ib}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{b^2}{\rho^2}\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \chi\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\ &- (m + \mu\rho)^2\phi = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Utilizando a solução geral dada na Eq. (3.12), como também a mudança de variável

$\xi = \sqrt{\mu}\rho$, feita na Sec. (3.4), obtemos a equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\xi} - \frac{\bar{\gamma}^2}{\xi^2}R + \frac{\delta}{\xi}R - \alpha\xi R - \xi^2 R + \beta R = 0, \tag{3.25}$$

onde α está definido na Eq. (3.15) e

$$\bar{\gamma}^2 = (l - k\chi)^2 - b^2; \qquad \delta = \frac{2b\mathcal{E}}{\sqrt{\mu}}. \tag{3.26}$$

Em analogia à Sec. (3.4), com $R(\xi) = \xi^{|\bar{\gamma}|}e^{-\frac{1}{2}\xi(\xi+\alpha)}\bar{G}(\xi)$, obtemos a relação de recorrência para os coeficientes da série de potência

$$c_{j+2} = \frac{[\alpha(j+1) + \bar{\tau}]c_{k+1} - (\bar{\lambda} - 2j)c_k}{(j+2)(j+2+2|\bar{\gamma}|)}, \tag{3.27}$$

com

$$c_1 = \frac{\bar{\tau}}{(1+2|\eta|)}; \quad c_2 = \frac{\bar{\tau}(\alpha+\bar{\tau})}{2(2+2|\eta|)(1+2|\eta|)} - \frac{\bar{\lambda}}{2(2+2|\eta|)}, \tag{3.28}$$

onde consideramos $c_0 = 1$ e

$$\bar{\lambda} = \beta + \frac{\alpha^2}{4} - 2 - 2|\bar{\gamma}|; \quad \bar{\tau} = \frac{\alpha}{2}(2|\bar{\gamma}| + 1) - \delta. \tag{3.29}$$

Novamente, temos que soluções polinomiais para a função $\bar{G}(\xi)$ são determinadas impondo que a série de Heun biconfluente torne-se um polinômio de grau n. Através da relação de recorrência (3.27), necessitamos impor que $\bar{\lambda} = 2n$ e $c_{n+1} = 0$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$. Além disso, com a condição $\bar{\lambda} = 2n$, obtemos a expressão:

$$\mathcal{E}_{k,l,n} = \pm\sqrt{2\mu_{k,l,n}(n + |\bar{\gamma}| + 1) + k^2}, \tag{3.30}$$

onde renomeamos $\mu = \mu_{k,l,n}$, como visto na Sec. (3.4). Analisando a condição $c_{n+1} = 0$ para $n = 1$, modo radial corresponde ao estado de menor energia, para qual temos que $c_{n+1} = c_2 = 0$, e então, os valores possíveis de μ são determinados por

$$\mu_{k,l,1} = \frac{m^2}{2}(2|\bar{\gamma}| + 3) - 2mb\frac{(2|\bar{\gamma}| + 2)}{(2|\bar{\gamma}| + 1)}\mathcal{E}_{k,l,1} + \frac{2b^2}{(2|\bar{\gamma}| + 1)}\mathcal{E}^2_{k,l,1}. \tag{3.31}$$

Nesta última, podemos notar que os possíveis valores de μ são determinados pelos parâmetros associados com a torção e o potencial tipo-Coulomb I. Com o resultado dado na

Eq. (3.31), consequentemente, as energias obtidas para o estado de menor energia são

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,l,1} &= \frac{2mb(|\bar{\gamma}|+2)(2|\bar{\gamma}|+2)}{(4b^2|\bar{\gamma}|+8b^2-2|\bar{\gamma}|-1)} \\ &\times \left[1 \pm \sqrt{1-\frac{(4b^2|\bar{\gamma}|+8b^2-2|\bar{\gamma}|-1)[m^2(|\bar{\gamma}|+2)(2|\bar{\gamma}|+3)+k^2](2|\bar{\gamma}|+1)}{4m^2b^2(|\bar{\gamma}|+2)^2(2|\bar{\gamma}|+2)^2}}\right].\end{aligned} \tag{3.32}$$

A Eq. (3.32) corresponde a expressão para os valores permitidos de energia relativística do sistema de massa dependente da posição para o estado de menor energia definido pelo potencial escalar dado na Eq. (2.38) sob a influência do potencial tipo-Coulomb I (2.16) no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Comparando a expressão para o estado de menor energia relativística (3.32) com os valores permetidos de menor energia relativística obtidos na Sec. (3.4) (Eq. (3.22)) podemos notar que a presença do potencial tipo-Coulomb I modifica o espectro de energia do sistema de massa dependente da posição. Além disso, da Eq. (3.31) e, consequentemente, na Eq. (3.32), percebemos que os efeitos de torção existem nos níveis de energia relativística através da presença do parâmetro χ que caracteriza a deslocação tipo-hélice. É interessante ressaltar que, fazendo $\chi = 0$ na Eq. (3.32), obtemos a expressão para as energias permetidas do estado de menor energia no espaço-tempo de Minkowski.

3.6 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados sobre um campo escalar em um espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice

Nesta seção, investigamos efeitos topológicos em sistemas quânticos relativísticos que decorrem do pano de fundo do espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice descrito pela Eq. (3.4), onde analisamos o efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989). Neste caso, assumimos que o defeito topológico tem um campo magnético interno com um fluxo Φ_B (MARQUES et al., 2001). Assim, nossa configuração de calibre é $A_\mu = (0, 0, A_\varphi, 0)$, com

$$A_\varphi = \frac{\Phi_B}{2\pi}, \tag{3.33}$$

onde Φ_B denota o fluxo quântico de AB (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989; MARQUES et al., 2001; OLIVEIRA; MELLO, 2006). Há um grande número de trabalhos que têm investigado o efeito AB, onde alguns podem ser vistos nas Refs. (JACKIW et al., 2009; KHALILOV, 2014; ANACLETO et al., 2015; DOLAN; OLIVEIRA; CRISPINO, 2011;

BERRY et al., 1980; CERDA; LUND, 1993; COSTE; LUND; UMEKI, 1999; VIVANCO et al., 1999; NESHEV; NEPOMNYASHCHY; KIVSHAR, 2001; LEONHARDT; ÖHBERG, 2003; STONE, 2000). No entanto, não há ainda na literatura a investigação da dinâmica quântica relativística de uma partícula de spin-0 no espaço-tempo de deslocação tipo-hélice sujeita ao efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989) e sob efeitos de potenciais de confinamento como os potenciais tipo-Coulomb I e II, linear, parede rígida (condição de contorno de Dirichlet) e o OKG (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008).

3.6.1 Efeitos de um potencial linear

Nesta subseção, analisamos os efeitos de um potencial de confinamento escalar estático linear dado na Eq. (2.38) sobre um campo escalar sujeito ao efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959), onde o mesmo se encontra no espçao-tempo com uma deslocação tipo-hélice (3.4). Neste caso, utilizando as Eqs. (2.38), (3.9), (3.10), (3.33) na Eq. (3.23), obtemos a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem:

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\chi\frac{\partial}{\partial z}-iq\frac{\Phi_B}{2\pi}\right)^2\phi+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-(m+\mu\rho)^2\phi=0. \quad (3.34)$$

Observe que, ao substituir $\gamma^2=(l-k\chi)^2$ por

$$\iota^2=\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2, \quad (3.35)$$

podemos seguir os mesmos passos da Eq. (3.12) à Eq. (3.19) para resolver a EKG (3.34). Sendo assim, obtemos a seguinte expressão

$$\mathcal{E}_{k,l,n}=\pm\sqrt{2\mu_{k,l,n}(n+|\iota|+1)+k^2}. \quad (3.36)$$

Ao lidarmos com o estado de menor energia do sistema ($n=1$), seguimos os passos da Eq. (3.16) à Eq. (3.21) e obtemos

$$\mu_{k,l,1}=m^2\left(\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|+\frac{3}{2}\right). \quad (3.37)$$

Consequentemente, os valores possíveis do parâmetro μ dependem da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), o parâmetro associado com a torção e os números quânticos $\{k,l,n\}$ do sistema, de modo que as soluções polinomiais para a função de onda radial possam ser definidas. Substituindo a Eq. (3.37) na Eq. (3.36), as energias

permetidas para o estado de menor energia são dadas por

$$\mathcal{E}_{k,l,1}=\pm m\sqrt{\left(2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}+3\right|\right)\left(\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}+2\right|\right)+\frac{k^2}{m^2}}. \tag{3.38}$$

onde percebemos que há influência da fase quântica geométrica de AB (Φ_B) e do defeito topológico sobre os valores permetidos de menor energia relativística. Esta dependência dos níveis de energia relativística da fase quântica geométrica corresponde a um análogo relativístico do efeito AB para estados ligados (BAKKE; FURTADO, 2013; PESHKIN; TONOMURA, 1989; BAKKE; FURTADO, 2012).

Tomando $\chi=0$ nas Eqs. (3.37) e (3.38), obtemos o análogo relativístico do efeito AB para estados ligados no espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, tomando $\Phi_B=0$ nas Eqs. (3.37) e (3.38), recuperamos os resultados obtidos nas Eqs. (3.21) e (3.22), respectivamente.

Perceba que, se fizermos $\Phi_B\rightarrow\Phi_B\pm\frac{2\pi}{q}$ na Eq. (3.38), obtemos a expressão para os valores permetidos do estado de menor energia relativística do sistema da forma

$$\mathcal{E}_{k,l,1}=\pm m\sqrt{\left(2\left|l\mp1-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}+3\right|\right)\left(\left|l\mp1-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}+2\right|\right)+\frac{k^2}{m^2}}. \tag{3.39}$$

Fazendo $l\rightarrow l\mp1$ na Eq. (3.38), obtemos a Eq. (3.39), ou seja, temos que $\mathcal{E}_{k,l,1}\left(\Phi_B\pm\frac{2\pi}{q}\right)=\mathcal{E}_{k,l\mp1,1}\left(\Phi_B\right)$, que significa que o estado de menor energia relativística é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), onde a periodicidade é $\phi_0=\frac{2\pi}{q}$.

3.6.2 Efeitos dos potenciais linear e tipo-Coulomb II

Com o objetivo de generalizar nossas análises, investigamos nesta subseção o caso em que a partícula relativística de massa dependente da posição está confinada no potencial visto na Eq. (2.56). Neste caso, a equação diferencial radial é escrita como

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\bar{\iota}}{\rho^2}R-\frac{2m\nu}{\rho}R-2m\mu\rho R-\mu^2\rho^2R+\Lambda R=0, \tag{3.40}$$

onde

$$\Lambda=\mathcal{E}^2-m^2-k^2-2\mu\nu;\quad \bar{\iota}=\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2+\lambda^2. \tag{3.41}$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = \sqrt{\mu}\rho$, obtemos

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dR}{d\xi} - \frac{\bar{\iota}^2}{\xi^2}R - \frac{\bar{\delta}}{\xi}R - \alpha\xi R - \xi^2 R + \frac{\Lambda}{\mu}R = 0, \tag{3.42}$$

onde α está definido na Eq. (3.15) e

$$\bar{\delta} = \frac{2m\nu}{\sqrt{\mu}}. \tag{3.43}$$

Note que a Eq. (3.42) é análoga à Eq. (2.57), logo, seguindo os passos da Eq. (2.57) à Eq. (2.64), obtemos a expressão

$$\mathcal{E}^2 = k^2 + 2\mu(1 + n + |\bar{\iota}| + \nu). \tag{3.44}$$

No caso do estado de menor energia, e escolhendo o parâmetro que caracteriza o potencial escalar estático linear como parâmetro de ajuste para a segunda condição de truncamento da série de Heun biconfluente, como já vistos em casos anteriores, obtemos os possíveis valores permitidos para o mesmo

$$\mu_{k,l,1} = \frac{m^2(2 + 2|\bar{\iota}| + 2\nu)(1 + 2\nu + 2|\bar{\iota}|)}{2(2|\bar{\iota}| + 1)}. \tag{3.45}$$

A relação (3.45) nos fornece os valores permitidos do parâmetro μ nos quais podemos obter um polinômio de primeiro grau para a função de Heun biconfluente. Devido à dependência dos números quânticos $\{k, l, n\}$, renomeamos $\mu = \mu_{k,l,n}$.

A partir das Eqs. (3.44) e (3.45), podemos determinar os valores permitidos da energia relativística do sistema de massa dependente da posição. Como observado nas seções anteriores, o modo radial correspondente ao estado de menor energia ($n = 1$), ou seja,

$$\mathcal{E}_{k,l,1} = \pm m\sqrt{\frac{(3 + 2|\bar{\iota}| + 2\nu)(1 + 2\nu + 2|\bar{\iota}|)(2 + |\bar{\iota}| + \nu)}{(2|\bar{\iota}| + 1)} + \frac{k^2}{m^2}}. \tag{3.46}$$

Note que os valores permetidos para a energia relativística correspondente ao modo radial $n = 1$ dados na Eq. (3.46) sofrem mudanças em comparação aos valores permetidos de energia relativística para o estado de menor energia calaculados na Subse. (3.6.1), vide a Eq. (3.38). Perceba que, se fizermos $\nu \to 0$ na Eq. (3.46), recuperamos a Eq. (3.38). Por outro lado, analogamente ao caso da Subse. (3.6.1), existe o momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$ nos níveis de energia (3.46). Isto nos mostra um análogo do efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959) devido a dependência dos níveis de energia com a fase geométrica Φ_B.

Fazendo $\Phi_B = 0$ e $\chi \neq 0$ na Eq. (3.46) obtemos os autovalores permitidos de menor energia de um campo escalar de massa dependente da posição sob efeitos de confinamento dos potenciais escalares linear e tipo-Coulomb II no espaço-tempo com torção. Por outro lado, tomando $\Phi_B \neq 0$ e $\chi = 0$ na Eq. (3.46), obtemos os autovalores permitidos da energia relativística correspondente ao modo radial $n = 1$ de um campo escalar confinado em potenciais linear e tipo-Coulomb II, sujeito ao efeito AB no espaço-tempo de Minkowski. Há também o caso particular em que tomando $\Phi_B = \chi = 0$ na Eq. (3.46), o que significa a obtenção dos autovalores permitidos do estado de menor energia de um campo escalar sujeito aos efeitos de potenciais de confinamento linear e tipo-Coulomb II no espaço-tempo de Minkowski.

Além disso, podemos notar que as energias relativísticas permetidas do estado de menor energia é uma função periódica do fluxo quântico de AB, ou seja, $\mathcal{E}_{k,l,1}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,1}(\Phi_B)$, onde a periodicidade é $\phi_0 = \frac{2\pi}{q}$.

3.6.3 Efeitos dos potenciais tipo-Coulomb II e o oscilador de Klein-Gordon

Consideremos um campo escalar de massa dependente da posição eletricamente carregado interagindo com o OKG (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008) e um potencial tipo-Coulomb II dado por[4]

$$V(\rho) = \frac{\nu}{\rho}, \tag{3.47}$$

onde, como visto no Cap. (2), ν é uma constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb II. Assim, a EKG com o termo de massa dependente da posição no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice (3.4) pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}[(\partial_\mu + m\omega x_\mu - iqA_\mu)(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})(\partial_\nu + m\omega x_\nu - iqA_\nu)]\phi - [m + V(\rho)]^2\phi = 0, \tag{3.48}$$

onde $x_\mu = (0, \rho, 0, 0)$ é o quadrivetor e, como visto no Cap. (2), ω é a frequência angular do OKG (BRUCE; MINNING, 1993).

Então, substituindo as Eqs. (3.9), (3.10) e (3.47) na Eq. (3.48), obtemos a seguinte

[4] Aqui, fizemos $\mu = 0$ na Eq. (2.56).

equação diferencial parcial

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\chi\frac{\partial}{\partial z}-iq\frac{\Phi_B}{2\pi}\right)^2\phi+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - m^2\omega^2\rho^2\phi-2m\omega\phi-\left(m+\frac{\nu}{\rho}\right)^2\phi=0. \tag{3.49}$$

Agora, considerando a Eq. (3.12) na Eq. (3.49), obtemos a equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{\rho}-\frac{\bar{\iota}}{\rho^2}R-\frac{2m\nu}{\rho}R-m^2\omega^2\rho^2R+\bar{\Lambda}R=0, \tag{3.50}$$

onde $\bar{\iota}$ está definido na Eq. (3.41) e

$$\bar{\Lambda}=\mathcal{E}^2-m^2-k^2-2m\omega. \tag{3.51}$$

A equação diferencial radial (3.50) é análoga à Eq. (2.20), logo, seguindo os passos da Eq. (3.20) à Eq. (2.33), obtemos a expressão

$$\mathcal{E}^2_{k,l,n}=m^2+k^2+2m\omega(2+n+|\bar{\iota}|). \tag{3.52}$$

Na análise para o estado de menor energia representado pelo modo radial $n=1$, e escolhendo a frequência angular do OKG (BAKKE; FURTADO, 2015) como parâmetro de ajuste para que a condição de truncamaneto da série de Heun biconfluente $c_{n+1}=0$ seja válida, obtemos os seguintes valores permetidos

$$\omega_{k,l,1}=\frac{2m\nu^2}{\left(1+2\sqrt{\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2+\nu^2}\right)}. \tag{3.53}$$

Na Eq. (3.53) temos os valores permitidos da frequência angular do OKG, onde renomeamos $\omega=\omega_{k,l,n}$, os quais nos permite obter um polinômio de primeiro grau para a série de Heun biconfluente.

Substituindo a Eq. (3.53) na Eq. (3.52), temos

$$\mathcal{E}_{k,l,1}=\pm m\sqrt{1+4\nu^2\frac{\left(3+\sqrt{\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2+\nu^2}\right)}{\left(1+2\sqrt{\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2+\nu^2}\right)}+\frac{k^2}{m^2}}. \tag{3.54}$$

Consequentemente, através da interação do campo escalar com um potencial tipo-Coulomb II mais o OKG, temos que souluções para a EKG podem ser determinadas. A expressão (3.54) nos dá os níveis de energia associados com o modo radial $n=1$. Para

outros modos radiais, outras expressões para os níveis de energia relativística podem ser obtidos.

Na Eq. (3.54), podemos notar o efeito AB para estados ligados devido a presença do momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$, isto é, existe a influência da fase quântica geométrica Φ_B sobre os níveis de energia relativística associados com o modo radial $n = 1$. Tomando $\Phi_B = 0$ e $\chi \neq 0$ na Eq. (3.54), obtemos os as energias relativísticas permetidas para o estado de menor energia do sistema de massa dependente da posição sob efeitos dos potenciais de confinamento tipo-Coulomb II e o OKG no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice (torção). No caso em que $\Phi_B \neq 0$ e $\chi = 0$ na Eq. (3.54) definimos os autovalores das energias permitidas para o estado de menor energia do sistema de massa dependente da posição sob os efeitos de confinamento do potencial tipo Coulomb II e do OKG onde há a presença do fluxo quântico de AB no espaço-tempo de Minkowski. Tomando $\Phi_B = \chi = 0$ na Eq. (3.54), definimos os autovalores permitidos da energia relativística do estado de menor energia de um campo escalar com massa dependente da posição sob os efeitos de confinamento dos potenciais tipo-Coulomb II e o OKG.

Note que os autovalores permitidos da energia relativística do estado de menor energia (3.54) é uma função periódica do fluxo quântico de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), ou seja, $\mathcal{E}_{k,l,1}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,1}(\Phi_B)$, onde a periodicidade é $\phi_0 = \frac{2\pi}{q}$.

3.6.4 Efeitos do potencial tipo-Coulomb II

Consideremos agora um campo escalar com massa dependente da posição sob o efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959) sujeita aos efeitos de confinamento do potencial tipo-Coulomb II dado na Eq. (3.47). Neste caso, substituindo as Eqs. (3.9), (3.10), (3.33) e (3.47) na Eq. (3.23), temos a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \chi\frac{\partial}{\partial z} - iq\frac{\Phi_B}{2\pi}\right)^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \left(m + \frac{\nu}{\rho}\right)^2\phi = 0. \quad (3.55)$$

Inserindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.55), obtemos a equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\bar{\iota}^2}{\rho^2}R - \frac{2m\nu}{\rho}R - \bar{\beta}^2R = 0, \quad (3.56)$$

onde definimos o parâmetro $\bar{\iota}$ na Eq. (3.41) e

$$\bar{\beta}^2 = m^2 + k^2 - \mathcal{E}^2. \quad (3.57)$$

Façamos a consideração que $\nu = -|\nu|$, e então, mudamos a variável dada por $r = 2\bar{\beta}\rho$, onde temos

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\rho} &= \frac{dr}{d\rho}\frac{dR}{dr} = 2\bar{\beta}\frac{dR}{dr}; \\ \frac{d^2R}{d\rho^2} &= \frac{dr}{d\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\rho}\frac{dR}{dr}\right) = 4\bar{\beta}^2\frac{d^2R}{dr^2}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Logo, a Eq.(3.56) torna-se

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\bar{\iota}^2}{r^2}R + \frac{\bar{\alpha}}{r}R - \frac{1}{4}R = 0, \tag{3.59}$$

onde

$$\bar{\alpha} = \frac{m|\nu|}{\bar{\beta}}. \tag{3.60}$$

Impondo que $R(r) \to 0$ (a função radial $R(r)$ é bem comportada), obtemos a possível solução em $r \to 0$ e $r \to \infty$

$$R(r) = r^{|\bar{\iota}|}e^{-\frac{1}{2}r^2}f(r), \tag{3.61}$$

onde a função $f(r)$ é a solução para a equação diferencial de segunda ordem:

$$r\frac{d^2f}{dr^2} + (2|\bar{\iota}| + 1 - r)\frac{df}{dr} + \left(\bar{\alpha} - |\bar{\iota}| - \frac{1}{2}\right)f = 0. \tag{3.62}$$

A Eq. (3.62) é conhecida como a equação hipergeométrica confluente (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972; ARFKEN; WEBER, 2005), e assim, $f(r) = {}_1F_1\left(|\bar{\iota}| + \frac{1}{2} - \bar{\alpha}, 2|\bar{\iota}| + 1; r\right)$ é a função hipergeométrica confluente. É importante observar que, o comportamento assintótico da função hipergeométrica confluente para grandes valores de seu argumento é dado por (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972)

$${}_1F_1 = (a, b; x) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^x x^{a-b}[1 + \mathcal{O}(|x|^{-1})]. \tag{3.63}$$

Consequentemente, a Eq. (3.63) revela que ${}_1F_1$ quando $x \to \infty$.

Com o objetivo de determinar soluções de estados ligados relativísticos, podemos impor que $a = -\bar{n}$ ($\bar{n} = 0, 1, 2, \ldots$). Desta forma, a função hipergeométrica confluente torna-se bem comportada quando $x \to \infty$. Ao trabalharmos com $a = |\bar{\iota}| + \frac{1}{2} - \bar{\alpha}$, portanto,

a condição $|\bar{\iota}| + \frac{1}{2} - \bar{\alpha} = -\bar{n}$ fornece

$$\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}} = \pm \sqrt{m^2 + k^2 - \frac{m^2|\nu|^2}{\left(\frac{1}{2} + \bar{n} + \sqrt{\left(l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2 + \nu^2}\right)^2}}. \tag{3.64}$$

Os níveis de energia (3.64) surgem através da interação entre o campo escalar e o potencial tipo-Coulomb (definido na Eq. (3.47)) no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Observe que a contribuição dada por $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$, a qual significa que tanto o fluxo magnético e a torção do espaço-tempo modifica o momento angular fornecendo um momento angular efetivo. Esta modificação nos números quânticos do momento angular dada pelo fluxo magnético quântico Φ_B dá origem ao efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959).

Note que, na Eq. (3.64), se fizermos $\Phi_B = 0$ e $\chi \neq 0$ definimos os níveis de energia relativística de um campo escalar de massa dependente da posição sob os efeitos de confinamento de um potencial tipo-Coulomb II no espaço-tempo com torção. Por outro lado, se fizermos $\Phi_B \neq 0$ e $\chi = 0$ definimos o espectro energético de um campo escalar com massa dependente da posição confinada em um potencial tipo-Coulomb II sujeita ao efeito AB no espaço-tempo de Minkowski.

Além disso, podemos notar que o nível de energia relativística (3.64) é uma função periódica da fase quântica geométrica, ou seja, $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$, onde a periodicidade é dada por $\phi_0 = \frac{2\pi}{q}$.

3.6.5 Efeitos dos potenciais tipo-Coulomb I e II

Vamos incluir a interação tipo-Coulomb I dada na Eq. (2.16)[5] no sistema estudado na subseção anterior (Subse. (3.6.4)). Ao incluir o potencial tipo-Coulomb I, as componentes não nulas do quadripotencial eletromagnético são dadas por $A_\mu = \left(-A_0, 0, \frac{\Phi_B}{2\pi}, 0\right)$. Neste caso, a partir da Eq. (3.32) temos a seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ \frac{2ib}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{b^2}{\rho^2}\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \chi\frac{\partial}{\partial z} - iq\frac{\Phi_B}{2\pi}\right)^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\ &- \left(m + \frac{\nu}{\rho}\right)^2\phi = 0. \end{aligned} \tag{3.65}$$

[5] Aqui, nós assumimos que $|\nu| > |b|$.

Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.65), obtemos a equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\tilde{\iota}}{\rho^2}R+\frac{\tilde{\alpha}}{\rho}R-\bar{\beta}^2R=0, \tag{3.66}$$

onde $\bar{\beta}^2$ está definido na Eq. (3.57) e definimos os novos parâmetros

$$\tilde{\alpha}=2(\mathcal{E}b-m\nu); \qquad \tilde{\iota}^2=\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)^2+\nu^2-b^2. \tag{3.67}$$

Façamos a mudança de variável $r=2\bar{\beta}\rho$, e então, temos

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{\tilde{\iota}^2}{r^2}R+\frac{\tilde{\alpha}}{2\bar{\beta}r}R-\frac{1}{4}R=0. \tag{3.68}$$

A Eq. (3.68) é análoga à Eq. (3.59), logo, seguindo os passos da Eq. (3.61) à Eq. (3.64), obtemos a seguinte equação algébrica de segundo grau na energia:

$$\mathcal{E}^2-\frac{2mb\nu}{\left[\left(\bar{n}+|\tilde{\iota}|+\frac{1}{2}\right)^2+b^2\right]}\mathcal{E}-\frac{\left[\left(n+|\tilde{\iota}|+\frac{1}{2}\right)^2(m^2+k^2)-m^2\nu^2\right]}{\left[\left(\bar{n}+|\tilde{\iota}|+\frac{1}{2}\right)^2+b^2\right]}=0. \tag{3.69}$$

Neste caso, resolvendo a Eq. (3.69), temos a expressão geral para o espectro de energia do sistema de massa dependente da posição

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,l,n} &= \frac{mb\nu}{\left[\left(\bar{n}+|\tilde{\iota}|+\frac{1}{2}\right)^2+b^2\right]} \\ &\times \left\{1\pm\sqrt{1+\frac{\left[\left(\bar{n}+|\tilde{\iota}|+\frac{1}{2}\right)^2+b^2\right]}{m^2b^2\nu^2}\left[\left(\bar{n}+|\tilde{\iota}|+\frac{1}{2}\right)^2(m^2+k^2)-m^2\nu^2\right]}\right\},\end{aligned} \tag{3.70}$$

o qual representa as energias permitidas do sistema provenientes da intereção entre o campo escalar e os potenciais tipo-Coulomb I e II no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Nos níveis de energia relativística (3.70), podemos observar o momento angular efetivo $l_{ef}=l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}$. Portanto, devido a dependência dos níveis de energia do fluxo magnético Φ_B (fase quântica geométrica), temos o efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959).

Note que, tomando $\Phi_B=0$ e $\chi\neq 0$ na Eq. (3.70), obtemos os níveis de energia de um campo escalar carregado eletricamente de massa dependente da posição submetida aos efeitos de confinamento dos potenciais tipo-Coulomb I e II no espaço-tempo com torção. Por outro lado, tomando $\Phi_B\neq 0$ e $\chi=0$ na Eq. (3.70) definimos o espectro energético relativístico de um campo escalar carregado eletricamente de massa dependente

da posição sob efeitos dos potenciais de confinamento tipo-Coulomb I e II sujeito ao efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959) no espaço-tempo de Minkowski. Para $\Phi_B = \chi = 0$ na Eq. (3.70) determinamos os níveis de energia relativística de um campo escalar eletricamente carregado de massa dependente da posição sujeito aos efeitos dos potenciais de confinamento tipo-Coulomb I e II no espaço-tempo de Minkowski.

Note também que o nível de energia raltivística (3.70) é uma função periódica do fluxo quântico de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), ou seja, $\mathcal{E}_{k,l,n}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,n}(\Phi_B)$, onde a periodicidade é $\phi_0 = \frac{2\pi}{q}$.

3.6.6 Efeitos associados com um campo magnético uniforme

A quantização de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1981), como já discutida brevemente na Seç. (3.3), ocorre quando uma partícula carregada eletricamente intereage com um campo magnético uniforme, o qual é perpendicular ao plano de movimento da partícula. Esse sistema é caracterizado por um espectro de energia, onde cada nível de energia tem uma degenerecência infinita. A quantização de Landau tem sido bastante investigada na literatura, como, por exemplo, sistemas de partículas neutras (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001; RIBEIRO; FURTADO; NASCIMENTO, 2006; FURTADO; NASCIMENTO; RIBEIRO, 2006), e na presença de defeitos topológicos (MARQUES et al., 2001; FURTADO et al., 1994). No contexto relativístico de mecânica quântica, a quantização de Landau foi discitida nas Refs. (RABI, 1928; SCHAKEL, 1991; HALDANE, 1988; JACKIW, 1984; BALATSKY; VOLOVIK; KONYSHEV, 1986; BERESTETSKII E. M. LIFSHITZ, 1982). Na presença de defeitos topológicos, alguns estudos da quantização relativística de Landau foram desenvolvidos no espaço-tempo com corda cósmica (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012), no espaço-tempo com corda cósmica giratória (CUNHA et al., 2016), no grafeno (BUENO; FURTADO; CARVALHO, 2012), em teorias de Kaluza-Klein (FURTADO; MORAES; BEZERRA, 1999) e nos sistemas de partículas neutras (BAKKE; FURTADO, 2010). Então, consideremos que o quadripotencial vetor possua a seguinte componente não nula (MARQUES et al., 2001; FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; CUNHA et al., 2016):

$$A_\varphi = -\frac{1}{2}B_0\rho^2 + \frac{\Phi_B}{2\pi}, \tag{3.71}$$

onde B_0 é uma constante e Φ_B denota o fluxo quântico de AB (AHARONOV; BOHM, 1959; MARQUES et al., 2001). Note que, através da Eq. (3.71), temos um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -B_0\hat{z}$.

3.6.6.1 Quantização de Landau relativística

Tomando $V(\rho) = 0$ na Eq. (3.23), obtemos a EKG que descreve um campo escalar eletricamente carregado que interage com o campo eletromagnético em um espaço-tempo curvo:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu - iqA_\mu)(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})(\partial_\nu - iqA_\nu)\phi - m^2\phi = 0. \tag{3.72}$$

Neste caso, através das Eqs. (3.9), (3.10) e (3.71), a EKG (3.72) torna-se

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \chi\frac{\partial}{\partial z} - iq\frac{\Phi_B}{2\pi}\right)^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\ &+ iqB_0\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \chi\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi + \frac{q^2B_0\Phi_B}{2\pi}\phi - \frac{q^2B_0^2}{4}\rho^2\phi - m^2\phi = 0, \end{aligned} \tag{3.73}$$

a qual descreve a interação de um campo esclar eletricamente carregado com um campo magnético uniforme no espaço-tempo com deslocação tipo-hélice. A solução para a Eq. (3.73) está definida na Eq. (3.12), que nos fornece a seguinte equação diferencial radial:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\iota^2}{\rho^2}R - \frac{m^2\omega_0^2}{4}\rho^2R + \epsilon R = 0, \tag{3.74}$$

onde ω_0 (frequência de cíclotron) e ι estão definidos nas Eqs. (3.7) e (3.35), respectivamente. Além disso,

$$\epsilon = \mathcal{E}^2 - m^2 - k^2 - m\omega_0\left(l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right). \tag{3.75}$$

Agora, considere a mudança de variável $x = \frac{m\omega_0}{2}\rho^2$, então a Eq. (3.38) torna-se

$$x\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{dR}{dx} - \frac{\iota^2}{4x}R - \frac{x}{4}R + \frac{\epsilon}{2m\omega_0}R = 0. \tag{3.76}$$

A solução para a Eq. (3.76) é dada por

$$R(x) = x^{\frac{|\iota|}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \times_1 F_1\left(\frac{|\iota|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2m\omega_0}, |\iota| + 1; x\right), \tag{3.77}$$

onde, como já vimos anteriormente, ${}_1F_1\left(\frac{|\iota|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2m\omega_0}, |\iota| + 1; x\right)$ é a função hipergeométrica confluente (ARFKEN; WEBER, 2005; MACHADO, 2012), e a série hipergeométrica confluente torna-se um polinômio de grau $\bar{n}$ impondo que $\frac{|\iota|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2m\omega_0} = -\bar{n}$, na qual

$\bar{n} = 0, 1, 2, \ldots$. Com essa condição em mãos, obtemos

$$\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}} = \pm\sqrt{m^2 + 2m\omega_0\left(\bar{n} + \frac{\left|l - k\chi - \frac{q\Phi_b}{2\pi}\right|}{2} + \frac{\left(l - k\chi - \frac{q\Phi_b}{2\pi}\right)}{2}\right) + k^2}. \tag{3.78}$$

Consequentemente, tornando $\Phi_B = 0$ na Eq. (3.78), a mesma corresponde aos níveis de energia relativística de uma partícula carregada eletricamente que interage com um campo magnético uniforme no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Esse espectro de energia corresponde aos níveis de Landau relativísticos no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Observe que, fazendo $\chi = 0$, obtemos os níveis de Landau relativísticos no espaço-tempo de Minkowski (RABI, 1928; BERESTETSKII E. M. LIFSHITZ, 1982). Então, comparando os níveis de Landau relativísticos no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice (3.78) com o caso do espaço-tempo de Minkowski, podemos ver que os efeitos de torção modificam os níveis de energia, quebrando a degenerescência dos níveis de Landau relativísticos.

Além disso, com $\Phi_B \neq 0$ e $\chi = 0$, podemos observar na Eq. (3.78) que existe um momento angular efetivo $\bar{l}_{ef} = l - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$, e assim os níveis de energia relativística dependem da fase geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959). Esta dependência da fase quântica geométrica resulta no surgimento de um efeito análogo ao efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959). Além disso, temos que $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$, o que significa que o espectro relativístico de energia é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), cuja periodicidade é $\phi_0 = \frac{2\pi}{q}$.

Finalmente, com $\Phi_B \neq 0$ e $\chi \neq 0$, podemos observar na Eq. (3.78) que o momento angular efetivo é definido por $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$, isto é, é definido pelo fluxo magnético Φ_B e o parâmetro de deslocamento espacial χ (torsão). Portanto, há uma dependência da fase quântica geométrica, que também dá origem ao efeito análogo do efeito AB para os estados ligados. Neste caso, temos que tanto a torção quanto a fase quântica geométrica modificam os níveis de energia e quebram a degenerescência dos níveis relativísticos de Landau.

Novamente, temos que $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$, portanto, o espectro relativístico de energia (3.78) é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB, cuja periodicidade é $\phi_0 = \frac{2\pi}{q}$. Os efeitos de torção alteram o padrão de oscilações do espectro de energia.

3.6.6.2 Efeitos do potencial de paredes rígidas

Deixe-nos restringir o movimento da partícula escalar relativística à uma região onde um potencial de confinamento de paredes rígidas está presente. Esse tipo de confinamento é descrito pela seguinte condição de contorno:

$$R(\rho_0) = 0, \tag{3.79}$$

o que significa que a função de onda radial desaparece em um raio fixo ρ_0. Consideremos $\frac{\epsilon}{2m\omega_0} = \frac{\epsilon}{2qB_0} \gg 1$. Com o raio fixo ρ_0 e um valor constante para o parâmetro da função hipergeométrica confluente $b = \left|l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right| + 1$, podemos considerar o parâmetro da função hipergeométrica confluente $a = \frac{\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2m\omega_0}$ sendo grande, e então, a função hipergeométrica confluente pode ser escrita na forma (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972; BAKKE, 2013)

$${}_1F_1 = (a, b; x_0) \propto \cos\left(\sqrt{2bx_0 - 4ax_0} - \frac{b\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{3.80}$$

Assim, substituindo as Eqs. (3.77) e (3.80) na Eq. (3.79), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}} \approx \; \pm \; & \left[m^2 + \frac{1}{\rho_0^2}\left(\bar{n}\pi + \frac{\pi}{2}\left|l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right| + \frac{3\pi}{4}\right)^2\right. \\ & \left. + \; m\omega_0\left(l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right) + k^2\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.81}$$

Consequentemente, a Eq. (3.81) nos dá os níveis de energia relativística de um campo escalar carregado eletricamente, que interage com um campo magnético uniforme, sujeita a um potencial de confinamento de paredes rígidas no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Podemos observar também que existe a influência de torção e o fluxo magnético nos níveis de energia relativística (3.81) devido a presença do momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$. Assim, com a dependência dos níveis de energia relativística (3.81) com a fase quântica geométrica Φ_B, temos um análogo relativístico do efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989). Por outro lado, tomando $\Phi_B \neq 0$ e $\chi = 0$ na Eq. (3.81), temos a dependência dos níveis de energia com a fase geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), a qual corresponde ao análogo do efeito AB para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989) no espaço-tempo de Minkowski. Comparando os níveis de energia relativística no espaço-tempo de Minkowski ($\chi = 0$) com o espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice ($\chi \neq 0$), podemos observar que os efeitos de torção

alteram o padrão de oscilações do espectro de energia.

Podemos ver que $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$, portanto, o espectro de energia (3.81) é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), onde a periodicidade é $\phi_0 = \pm\frac{2\pi}{q}$.

3.6.6.3 Efeitos do potencial linear

Nesta subseção introduzimos o potencial escalar linear, definido na Eq. (2.38), através da modificação do termo de massa, como visto na Sec. (2.3) ou na Sec. (3.4). Então, substituindo as Eqs. (2.38), (3.9), (3.10) e (3.71) na Eq. (3.23), e seguindo os mesmos passos da Eq. (3.11) à Eq. (3.13), obtemos a seguinte equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{\iota^2}{\rho^2}R - \varsigma^2\rho^2R - 2m\mu\rho R + \epsilon R = 0, \tag{3.82}$$

onde ι e ϵ estão definidos nas Eqs. (3.35) e (3.75), respectivamente, e

$$\varsigma^2 = \frac{m^2\omega_0^2}{4} + \mu^2. \tag{3.83}$$

Fazemos agora a mudança de variável dada por $\bar{x} = \sqrt{\varsigma}\rho$, então, a Eq. (3.83) torna-se

$$\frac{d^2R}{d\bar{x}^2} + \frac{1}{\bar{x}}\frac{dR}{d\bar{x}} - \frac{\iota^2}{\bar{x}^2}R - \bar{x}^2R - \tilde{\delta}\bar{x}R + \frac{\epsilon}{\varsigma}R = 0, \tag{3.84}$$

onde definimos o novo parâmetro

$$\tilde{\delta} = \frac{2m\mu}{\varsigma^{3/2}}. \tag{3.85}$$

Podemos notar que a Eq. (3.84) é análoga à Eq. (3.14), logo, seguindo os mesmos passos da Eq. (3.14) à (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^2_{k,l,n} &= m^2 + \sqrt{m^2\omega_0^2 + 4\mu^2}\left(n + 1 + \left|l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right) \\ &+ m\omega_0\left(l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right) + k^2 - \frac{m^2\mu^2}{\frac{m^2\omega_0^2}{4} + \mu^2}.\end{aligned} \tag{3.86}$$

Na análise para o estado de menor energia, representado pelo modo radial $n = 1$, escolhemos a frequência de cíclotron (campo magnético) como parâmetro de ajuste. Deste modo, para que a condição de truncamaneto da série de Heun biconfluente $c_{n+1} = 0$ seja

válida, obtemos os seguintes valores permitidos da frequência ω_0

$$\omega_{0k,l,1}=\sqrt{\frac{4}{m^2}\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{2/3}-\frac{4\mu^2}{m^2}}. \tag{3.87}$$

A relação apresentada em Eq. (3.87) revela os possíveis valores da frequência de cíclotron $\omega_{0k,l,1}$ (consequentemente, o campo magnético B_0) associados com o nível de energia correspondente ao modo radial $n=1$. Consequentemente, o polinômio de primeiro grau para a série de Heun biconfluente é definido. Note que o valor da frequência de cíclotron muda para cada número quântico n e também para l e k. Por essa razão devemos renomear $\omega_0=\omega_{0k,l,n}$. Em seguida, substituindo $n=1$ e a Eq. (3.87) na Eq. (3.86), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^2_{k,l,1} &= m^2+2\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{1/3}\left(2+\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\\ &+ m\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{4}{m^2}\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{2/3}-\frac{4\mu^2}{m^2}}\\ &+ k^2-\frac{m^2\mu^2}{\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{2/3}}.\end{aligned} \tag{3.88}$$

Assim sendo, a Eq. (3.88) é a expressão dos níveis de energia permitida do estado de menor energia ($n=1$) para um campo escalar carregado, que interage com um campo magnético uniforme, sujeita a um potencial escalar linear no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Comparando as Eqs. (3.87) e (3.88) com a Eq. (3.78), temos que a presença do potencial escalar linear (2.38) modifica os níveis de energia relativística. Além disso, temos também a influência de torção e o fluxo magnético nos níveis de energia permitida (3.88), os quais podem ser vistos com a presença do momneto angular efetivo $l_{ef}=l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}$ no estado de menor energia (PESHKIN; TONOMURA, 1989).

A energia para o modo readial $n=1$ (3.88) é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), ou seja, $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B\pm\frac{2\pi}{q}\right)=\mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$, onde a periodicidade é $\phi_0=\pm\frac{2\pi}{q}$.

Note que, fazendo $\chi=0$, obtemos as energias permitidas correspondentes ao modo radial $n=1$ para uma partícula de *spin*-0 carregada eletricamente que interage com um campo magnético uniforme e sujeita a um potencial escalar linear no espaço-tempo de Minkowski. Assim, nós também temos que a presença do defeito topológico muda o padrão de oscilações do espectro de energia, neste caso, o padrão de oscilação do estado de menor energia.

3.6.6.4 Efeitos do potencial tipo Coulomb II

Consideremos agora os efeitos do potencial escalar de confinamento tipo-Coulomb II dado na Eq. (3.47) sobre o campo escalar eletricamente carregado de massa dependente da posição sujeito ao campo magnético uniforme. Neste caso, substituindo as Eqs. (3.9), (3.10), (3.47) e (3.71) na Eq. (3.23), e, seguindo os mesmos passos da Eq. (3.11) à Eq. (3.13), obtemos

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\bar{\imath}^2}{\rho^2}R-\frac{2m\nu}{\rho}R-\frac{m^2\omega_0^2}{4}\rho^2R+\epsilon R=0, \tag{3.89}$$

onde os parâmetros ω_0, $\bar{\imath}$ e ϵ estão definidos nas Eqs. (3.7), (3.41) e (3.75), respectivamente.

Façamos a mudança de variável $\varrho=\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\rho$, então, a Eq. (3.89) torna-se

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho}-\frac{\bar{\imath}^2}{\varrho^2}R-\frac{\Delta}{\varrho}R-\varrho^2R+\frac{2\epsilon}{m\omega_0}R=0, \tag{3.90}$$

onde

$$\Delta=\frac{2m\nu}{\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}}. \tag{3.91}$$

A Eq. (3.90) é análoga à Eq. (2.23), logo, seguindo os mesmos passos da Eq. (2.23) à Eq. (2.34), temos a seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_{k,l,n}=\pm\sqrt{m^2+k^2+m\omega_0\left(1+n+|\bar{\imath}|+l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)}. \tag{3.92}$$

Como visto na Subse. (3.6.6.3), a frequência de cíclotron ω_0, para o modo radial $n=1$, é dada por

$$\omega_{0k,l,1}=\frac{4m\nu^2}{2|\bar{\imath}|+1}. \tag{3.93}$$

A relação dada na Eq. (3.93) fornece os possíveis valores da frequência angular que nos permite construir um polinômio de de primeiro grau para a série de Heun biconfluente.

Através das Eqs. (3.92) e (3.93), temos

$$\mathcal{E}_{k,l,1}=\pm\sqrt{m^2+k^2+\frac{4m^2\nu^2}{(2|\bar{\imath}|+1)}\left(2+|\bar{\imath}|+l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)}, \tag{3.94}$$

a qual corresponde aos níveis de energia associados com o modo radial $n=1$. Esses níveis de energia surgem da interação do campo escalar com o potencial tipo-Coulomb II e um campo magnético uniforme no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Em

contraste à Eq. (3.64), podemos observar que a presença do campo magnético uniforme modifica os níveis de energia assoaciados com o modo radial $n = 1$. Além disso, podemos notar na Eq. (3.94) a presença do momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$. Isso nos mostra a influência do fluxo magnético e da torção do espaço-tempo sobre os níveis de energia. Em particular, a dependência dos níveis de energia do fluxo magnético (a fase quântica geométrica Φ_B) que pode ser interpretado como o análogo relativístico do efeito AB para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989). Por outro lado, tomando $\Phi_B = 0$, temos somente a influência da topologia do defeito sobre os níveis de energia (3.94). Como não existe interação entre o defeito topológico e o campo escalar, esta influência do defeito topológico nos níveis de energia também corresponde a um análogo do efeito AB para estados ligados (BEZERRA, 1997; MARQUES et al., 2005).

Em adição à nossa análise, vale ressaltar que o nível de energia (3.94) é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB, ou seja, $\mathcal{E}_{k,l,1}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,1}(\Phi_B)$, onde a periodicidade é $\phi_0 = \pm\frac{2\pi}{q}$.

3.6.7 Efeitos associados com um campo magnético uniforme e o oscilador de Klein-Gordon

Como visto no Cap. (2), seguindo a ideia do oscilador de Dirac (MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1989), Bruce e Minning propuseram um modelo para um oscilador quântico relativístico que interage com uma partícula escalar, o qual se tornor conhecido na literatura como o OKG (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008; MIRZA; MOHADESI, 2004). O OKG é descrito introduzindo um acoplamento na EKG como $\hat{p}_\mu \to \hat{p}_\mu + im\omega x_\mu$, onde m é massa de repouso da partícula escalar, ω é a frequência angular do OKG e $x_\mu = (0, \rho, 0, 0)$ (CARVALHO et al., 2016). Consideremos, então, que o OKG interage com o campo eletromagnético, assim, a EKG no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice (3.4) pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu + m\omega x_\mu - iqA_\mu)(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})(\partial_\nu + m\omega x_\nu - iqA_\nu)\phi - m^2\phi = 0, \tag{3.95}$$

Nesta subseção, investigamos o efeito AB para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989) quando o OKG (BRUCE; MINNING, 1993) interage com um campo magnético uniforme no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Também, assumimos que o defeito topológico tem um campo magnético uniforme (MARQUES et al., 2005; BEZERRA, 1997), como visto nas subseções anteriores.

3.6.7.1 Quantização de Landau relativística

Consideremos o quadripotencial vetor (3.71) e o OKG (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008), portanto, a equação radial de Klein-Gordon no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice (3.4) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\iota^2}{\rho^2}R-\frac{m^2\varpi^2}{4}\rho^2R+\bar{\epsilon}R=0, \tag{3.96}$$

onde o parâmetro ι está definido na Eq. (3.35) e

$$\varpi^2=4\omega^2+\omega_0;\quad \bar{\epsilon}=\mathcal{E}^2-m^2-k^2-2m\omega-m\omega_0\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right). \tag{3.97}$$

Definimos, agora, a mudança de variável $y=\frac{m\varpi\rho^2}{2}$, então, a Eq. (3.97) é reescrita da forma

$$y\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{dR}{dy}-\frac{\iota^2}{4y}R-\frac{y}{4}R+\frac{\bar{\epsilon}}{2m\varpi}R=0. \tag{3.98}$$

A solução para a Eq. (3.98) é análoga à Eq. (3.77), isto é

$$R(y)=y^{\frac{|\iota|}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\times_1 F_1\left(\frac{|\iota|}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\bar{\epsilon}}{2m\varpi},|\iota|+1;y\right), \tag{3.99}$$

e, portanto, seguindo a discussão feita em Eq. (3.77) e Eq. (3.78), os níveis de energia relativística são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^2_{k,l,\bar{n}} &= m^2+2m\sqrt{4\omega^2+\omega_0^2}\left(\bar{n}+\frac{\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &+ m\omega_0\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)+2m\omega+k^2.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Então, a Eq. (3.100) ilustra os níveis de energia relativística decorrentes da interação do OKG com um campo magnético uniforme no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Com a presença do momento angular efetivo $l_{ef}=l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}$, podemos também observar a influência do defeito topológico e a fase quântica geométrica sobre os níveis de energia relativística. Consequentemente, a dependência dos níveis de energia relativística (3.100) de Φ_B produz o análogo do efeito AB para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989), onde o espectro de energia é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B\pm\frac{2\pi}{q}\right)=\mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$, com periodicidade $\phi_0=\pm\frac{2\pi}{q}$. Note que fazendo $\omega\to0$, recuperamos os resultado dado na Eq. (3.78). Por outro lado, fazendo $\omega_0=0$ e $\Phi_B=0$, recuperamos os resultados obtidos na Ref.

(CARVALHO et al., 2016).

Tomando $\chi = 0$ na Eq. (3.100), temos os níveis de energia relativística que surgem através da interação do OKG com um campo magnético uniforme no espaço-tempo de Minkowski. Em contraste, temos que a presença de torção no espaço-tempo modifica a degenerescência dos níveis de energia relativística. Além disso, a presença de torção no espaço-tempo modifica o padrão de oscilações dos níveis de energia.

3.6.7.2 Efeitos do potencial de paredes rígidas

Analisemos o OKG que interage com um campo magnético uniforme no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice quando está sujeito à condição de limite dada na Eq. (3.79). A condição de limite (3.79) é escrita na forma

$$R\left(y_0 = \frac{m\varpi\rho_0^2}{2}\right) = 0. \tag{3.101}$$

Consideremos inicialmente o caso particular $\frac{\bar{\epsilon}}{2m\varpi} \gg 1$. Então, substituindo a Eq. (3.99) na Eq. (3.101), podemos usar a relação dada em Eq. (3.80) para obter os níveis de energia relativística

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}} &\approx \pm\Bigg[m^2 + \frac{1}{\rho_0^2}\left(\bar{n}\pi + \frac{\pi}{2}\left|l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right| + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \\ &+ 2m\omega + m\omega_0\left(l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}\right) + k^2\Bigg]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Na Eq. (3.102), temos a influência do defeito topológico e da fase quântica geométrica sobre o espectro de energia através do momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$. Podemos também observar o efeito análogo do efeito AB para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989) e periodicidade $\left(\phi_0 = \pm\frac{2\pi}{q}\right)$ dos níveis de energia (3.61), onde $\mathcal{E}_{k,l,\bar{n}}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,\bar{n}}(\Phi_B)$. Em contraste com a Eq. (3.81), temos uma nova contribuição para os níveis de energia relativística dada pelo termo $2m\omega$ que decorre do OKG. Note que, tomando $\omega \to 0$, recuperamos o resultado dado na Eq. (3.81).

Fazendo $\chi = 0$ na Eq. (3.102), definimos os níveis de energia relativística da interação do OKG com um campo magnético uniforme sujeito ao potencial de confinamento de paredes rígidas no espaço-tempo de Minkowski. Consequentemente, a presença de torção no espaço-tempo também modifica a degenerescência dos níveis de energia e o padrão de oscilação dos mesmos.

3.6.7.3 Efeitos do potencial linear

Agora, consideremos o campo escalar eletricamente carregado interagindo com o OKG e um potencial escalar linear $V(\rho)$, dado na Eq. (2.38), sob efeitos de um campo magnético uniforme no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice (3.4). Este sistema nos fornece a seguinte equação diferencial radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\iota^2}{\rho^2}-\bar{\varsigma}^2\rho^2R-2m\mu\rho R+\bar{\epsilon}R=0, \tag{3.103}$$

onde ι e $\bar{\epsilon}$ estão definidos nas Eqs. (3.35) e (3.77), respectivamente, e definimos o parâmetro $\bar{\varsigma}$ como

$$\bar{\varsigma}^2=\frac{m^2\varpi^2}{4}+\mu^2=m^2\omega^2+\frac{m^2\omega_0^2}{4}+\mu^2. \tag{3.104}$$

Fazendo a mudança de variável $\bar{y}=\sqrt{\bar{\varsigma}}\rho$, reescrevemos a Eq. (3.104) na forma

$$\frac{d^2R}{d\bar{y}^2}+\frac{1}{\bar{y}}\frac{dR}{d\bar{y}}-\frac{\iota^2}{\bar{y}^2}R-\tilde{\Delta}\bar{y}R-\bar{y}^2R+\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\varsigma}}R=0, \tag{3.105}$$

onde

$$\bar{\Delta}=\frac{2m\mu}{\bar{\varsigma}^{3/2}}. \tag{3.106}$$

A Eq. (3.105) é análoga à Eq. (2.43), logo, seguindo os mesmos passos da Eq. (2.43) à (2.52), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{k,l,n}^2 &= m^2+\sqrt{4m^2\omega^2+m^2\omega_0^2+4\mu^2}\left(n+1+\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\\ &+ m\omega_0\left(l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right)+k^2-\frac{m^2\mu^2}{\left(m^2\omega^2+\frac{m^2\omega_0^2}{4}+\mu^2\right)}+2m\omega.\end{aligned} \tag{3.107}$$

No intuito de determinar um polinômio de primeiro grau ($n=1$) para a função de Heun biconfluente, verificamos a necessidade da condição $c_{n+1}=0$ dada na Eq. (3.67), implicando em $c_2=0$. Assim, utilizando os mesmos argumentos para a definição da Eq. (3.87), obtemos

$$\omega_{0k,l,1}=\sqrt{\frac{4}{m^2}\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{2/3}-\frac{4\mu^2}{m^2}-4\omega}, \tag{3.108}$$

onde, também, assumimos que o campo magnético B_0 pode ser ajustado para validar a condição $c_2=0$. Neste caso, os valores possíveis da frequência de cíclotron associada com o estado de menor energia ($\omega_{0k,l,1}$) (e também o campo magnético B_0) são determinados

pela relação (3.108) e um polinômio de primeiro grau para a série de Heun biconfluente é definido. Comparando as Eqs. (3.108) e (3.87), temos uma nova contribuição para $\omega_{0k,l,1}$ dada por $-4\omega^2$, provinda do OKG. Assim, substituindo $n = 1$ e a Eq. (3.108) na Eq. (3.107), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^2_{k,l,1} &= m^2 + 2\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{1/3}\left(2+\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\\ &+ m\left(\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\sqrt{\frac{4}{m^2}\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{2/3}-\frac{4\mu^2}{m^2}-4\omega}\\ &+ k^2-\frac{m^2\mu^2}{\left[\frac{m^2\mu^2}{2}\left(3+2\left|l-k\chi-\frac{q\Phi_B}{2\pi}\right|\right)\right]^{2/3}}+2m\omega, \qquad (3.109)\end{aligned}$$

a qual nos fornece as energias permitidas do estado de menor energia para um sistema que consiste na interação do OKG com um campo magnético uniforme e um potencial escalar linear no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. Em contraste com os níveis de energia (3.100), as Eqs. (3.108) e (3.109) mostram que a presença do potencial escalar linear produz outro espectro de energia.

Nós podemos também observar o efeito AB para estados ligados (PESHKIN; TONOMURA, 1989) nas enegias permetidas correspondentes ao modo radial $n = 1$ devido à dependência dos níveis de energia da fase geométrica quântica Φ_B. Note que a energia para $n = 1$ é também uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959), onde $\mathcal{E}_{k,l,1}\left(\Phi_B \pm \frac{2\pi}{q}\right) = \mathcal{E}_{k,l\mp1,1}(\Phi_B)$ (a periodicidade é também $\phi_0 = \pm\frac{2\pi}{q}$).

Podemos notar também que a influência do defeito topológico sobre os níveis de energia é caracterizada pela presença do momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi - \frac{q\Phi_B}{2\pi}$. Com $\chi = 0$, temos que as energias permitidas correspondentes ao modo radial $n = 1$ (3.109) decorrem da interação do OKG (BRUCE; MINNING, 1993) com um campo magnético e um potencial escalar linear no espaço-tempo de Minkowski, que também é uma função periódica da fase quântica geométrica de AB (AHARONOV; BOHM, 1959). Assim, a topologia do espaço-tempo também altera o padrão de oscilações das energias correspondentes ao modo radial $n = 1$.

3.7 Campo escalar sujeito ao potencial de parede rígida no espaço-tempo de deslocação tipo espiral

Na Ref. (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005), exemplos de defeitos topológicos em sólidos associados com torção são dados. Iniciamos esta seção considerando uma generalização de um defeito topológico em gravitação. Consideremos a distorção de um cículo em uma espiral, como mostra a Fig. (5), que corresponde à uma deslocação tipo espiral. Então, o elemento de linha correspondente desse defeito topológico no contexto de gravitação é (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005; PUNTIGAM; SOLENG, 1997):

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + 2\bar{\chi}d\rho d\varphi + (\bar{\chi}^2 + \rho^2)d\varphi^2 + dz^2, \tag{3.110}$$

onde $\bar{\chi}$ é uma constante ($\bar{\chi} > 0$) associada com a distorção do defeito.

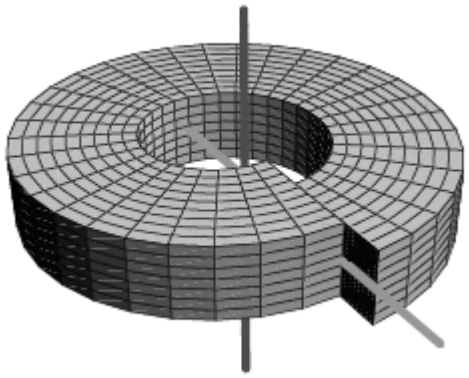

Figura 5: Representação da deslocação espiral (PUNTIGAM; SOLENG, 1997).

O determinante $g = \det(g_{\mu\nu})$ provindo da Eq. (3.110) pode ser encontrado pela regra do cofator, ou seja,

$$g = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \bar{\chi} & 0 \\ 0 & \bar{\chi} & \rho^2 + \bar{\chi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 1 & \bar{\chi} & 0 \\ \bar{\chi} & \rho^2 + \bar{\chi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho^2. \tag{3.111}$$

Através da relação $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = I_4$, onde I_4 é a matriz identidade de ordem quatro, podemos encontrar as componentes do tensor métrico inverso, das quais, algumas são encontradas de forma direta, como $-g^{00} = g^{33} = 1$ e $g^{0\nu} = g^{3\nu} = 0$ com $\nu \neq 0, 3$. O restante das componetes são determinadas através dos seguintes sistemas de duas equações

com duas variáveis:

$$\left\{\begin{array}{ccc} g^{10} & + & \bar{\chi}g^{20}=0 \\ \bar{\chi}g^{10} & + & (\bar{\chi}^2+\rho^2)g^{20}=0 \end{array}\right. \Rightarrow g^{10}=g^{20}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} g^{11} & + & \bar{\chi}g^{21}=1 \\ \bar{\chi}g^{11} & + & (\rho^2+\bar{\chi}^2)g^{21}=0 \end{array}\right. \Rightarrow g^{11}=1+\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^2};\ g^{21}=-\frac{\bar{\chi}}{\rho^2},$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} g^{12} & + & \chi g^{22}=0 \\ \bar{\chi}g^{12} & + & (\rho^2+\bar{\chi}^2)g^{22}=1 \end{array}\right. \Rightarrow g^{12}=-\frac{\bar{\chi}}{\rho^2};\ g^{22}=-\frac{1}{\rho^2},$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} (\rho^2+\chi^2)g^{13} & + & \chi g^{23}=0 \\ \chi g^{13} & + & g^{23}=0 \end{array}\right. \Rightarrow g^{13}=g^{23}=0.$$

Logo, o tensor métrico inverso, na sua forma matricial, é definido como

$$g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^2} & -\frac{\bar{\chi}}{\rho^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\chi}}{\rho^2} & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Dado isso, investiguemos os efeitos topológicos do espaço-tempo com uma deslocação tipo espiral sobre o campo escalar quando este está sujeito a um potencial de confinamento de parede rígida. Logo, substituindo as Eqs. (3.111) e (3.112) e fazendo $V(\rho)=0$ na Eq. (3.8), obtemos a equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ \left(1+\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\rho}-\frac{2\bar{\chi}}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\bar{\chi}}{\rho^3}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \\ &+ \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-m^2\phi=0. \end{aligned} \tag{3.113}$$

A solução para a Eq. (3.113) tem a mesma forma da Eq. (3.12), portanto, da Eq. (3.113), obtemos a equação diferencial radial

$$\left(1+\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^2}\right)\frac{d^2R}{d\rho^2}+\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^3}-i\frac{2\bar{\chi}l}{\rho^2}\right)\frac{dR}{d\rho}-\frac{l^2}{\rho^2}R+i\frac{\bar{\chi}l}{\rho^3}R+\theta^2R=0, \tag{3.114}$$

onde

$$\theta^2=\mathcal{E}^2-m^2-k^2. \tag{3.115}$$

Com intuito de resolver a Eq. (3.114), consideremos a seguinte solução em termos de uma

função radial desconhecida $u(\rho)$:

$$R(\rho) = e^{il\arctan\left(\frac{\rho}{\bar{\chi}}\right)}u(\rho), \tag{3.116}$$

a qual nos fornece as expressões

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{d\rho} &= e^{il\arctan\left(\frac{\rho}{\bar{\chi}}\right)}\left[\frac{du}{d\rho} + i\frac{l\bar{\chi}}{(\rho^2+\bar{\chi}^2)}u\right]; \\
\frac{d^2R}{d\rho^2} &= e^{il\arctan\left(\frac{\rho}{\bar{\chi}}\right)}\left[\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{2il\bar{\chi}}{(\rho^2+\bar{\chi}^2)}\frac{du}{d\rho} - \frac{2il\bar{\chi}\rho}{(\rho^2+\bar{\chi}^2)}u - \frac{l^2\bar{\chi}^2}{(\rho^2+\bar{\chi}^2)}u\right].
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Logo, substituindo as Eqs. (3.116) e (3.117) na Eq. (3.114), temos a equação diferencial

$$\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\bar{\chi}^2}{\rho^3}\right)\frac{du}{d\rho} - \frac{l^2}{(\bar{\chi}^2+\rho^2)}u + \theta^2 u = 0. \tag{3.118}$$

Procedemos com a mudança de variável dada por $s = \theta\sqrt{\rho^2+\bar{\chi}^2}$, a qual nos concede as equações

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\rho} &= \frac{\theta^2}{s}\left(\frac{s^2}{\theta^2} - \bar{\chi}^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{du}{ds}; \\
\frac{d^2u}{d\rho^2} &= \frac{\theta^4}{s^2}\left(\frac{s^2}{4\theta^2} - \bar{\chi}^2\right)\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\theta^4\bar{\chi}^2}{s^2}\frac{du}{ds}.
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Então, substituindo a Eq. (3.119) na Eq. (3.118), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{du}{ds} - \frac{l^2}{s^2}u + u = 0. \tag{3.120}$$

A Eq. (3.120) é a bem conhecida equação diferencial de Bessel (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972; ARFKEN; WEBER, 2005). A solução geral para a Eq. (3.120) é dada na forma: $u(s) = AJ_{|l|}(s) + BN_{|l|}(s)$, onde $J_{|l|}(s)$ e $N_{|l|}(s)$ são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e A e B são constantes. Com o propósito de ter uma solução regular na origem, devemos tomar $B = 0$ na solução geral, uma vez que a função de Neumann[6] diverge na origem. Assim, a solução regular para a Eq. (3.120) na origem é dada por

$$u(s) = AJ_{|l|}(s). \tag{3.121}$$

Consideremos o confinamento de parede rígida caracterizado pela condição de con-

[6] A função de Bessel de segundo tipo é também conhecida na literatura por função de Neumann (ARFKEN; WEBER, 2005).

torno mencionada em Eq. (3.79) cuja forma é

$$u(s_0 = \theta\sqrt{\rho_0^2 + \bar{\chi}^2}) = 0. \tag{3.122}$$

Consideremos um caso particular onde $s_0 \gg 1$[7]. Neste caso particular, podemos escrever (BAKKE, 2014b; AHARONOV; BOHM, 1959; ARFKEN; WEBER, 2005):

$$J_{|l|}(s_0) \approx \cos\left(s_0 - \frac{|l|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{3.123}$$

Consequentemente, substituindo a Eq. (3.123) na Eq. (3.121), obtemos, através da condição de contorno (3.122) que

$$\mathcal{E}_{k,l,n} \approx \pm\sqrt{m^2 + k^2 + \frac{\pi^2}{(\rho_0^2 + \bar{\chi}^2)}\left(n + \frac{|l|}{2} + \frac{3}{4}\right)^2}, \tag{3.124}$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Portanto, apresentamos na Eq. (3.124) o espectro relativístico de energia para o campo escalar sujeito ao potencial de confinamento de parede rígida no espaço-tempo com uma deslocação tipo espiral. O efeito da topologia desse espaço-tempo pode ser visto pela presença do parâmetro $\bar{\chi}$ que dá origem a um raio efetivo $\varrho_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \bar{\chi}^2}$. Em discordância aos resultados anteriores fornecidos neste capítulo, temos que os autovalores do momento angular permanecem inalterados, isto é, não existe efeito da topologia do espaço-tempo que forneça um momento angular efetivo. Consequentemente, não há análogo do efeito AB para estados ligados (MARQUES et al., 2005; AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989) neste sentido. Note que, tomando $\bar{\chi} = 0$ obtemos o espectro de energia no espaço-tempo de Minkowski.

3.8 Efeitos de rotação

Dois pontos interessantes levantados por Landau e Lifshitz (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) são os efeitos da rotação no espaço-tempo de Minkowski. Um deles é o comportamento singular a grandes distâncias para um sistema em um referencial em rotação uniforme, enquanto o outro é o efeito sobre os relógios no referencial em rotação. Em particular, esse comportamento singular em grandes distâncias significa que existe uma restrição nas coordenadas espaciais devido aos efeitos de rotação. Por exemplo, tomando o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas cilíndricas, temos: $ds^2 = -c^2dt^2 +$

[7] ρ_0 é um raio fixo.

$d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2$; assim, tomando $\varphi \to \varphi+wt$, onde w é a velocidade angular constante do referencial em rotação, então, o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski torna-se

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{w^2\rho^2}{c^2}\right)+2w\rho^2 d\varphi dt + d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2. \tag{3.125}$$

Portanto, podemos ver que a coordenada radial se torna determinada no intervalo $0 \leq \rho < \frac{c}{w}$, caso contrário, implicaria que a velocidade de rotação é maior que a velocidade da luz no vácuo, o que é um absurdo, levando em conta um dos princípios da relatividade especial. Esta restrição na coordenada radial em um referencial com velocidade angular uniforme chamou a atenção para a interface entre relatividade geral e mecânica quântica relativística (HEHL; NI, 1990; BAKKE, 2010; STRANGE; RYDER, 2016; AMBRUS; WINSTANLEY, 2016).

No entanto, um ponto que não foi tratado na literatura é o efeito de rotação no campo escalar considerando o espaços-tempos com deslocações tipo-hélice e tipo espiral, ambos como pano de fundo.

3.8.1 Campo escalar no espaço-tempo de deslocação tipo-hélice

Nós iniciamos esta seção considerando um espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice representado pela métrica (3.4). A fim de estudar os aspectos do referencial de rotação uniforme, vamos realizar uma transformação de coordenadas dada por $\varphi = \varphi+wt$, onde w é a velocidade angular constante do referencial em rotação. Desse modo, o elemento de linha (3.4) torna-se (BAKKE, 2014b):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1-w^2\rho^2-w^2\chi^2)dt^2+2w(\rho^2+\chi^2)d\varphi dt+d\rho^2+(\rho^2+\chi^2)d\varphi^2 \\ &+ 2w\chi dz dt+2\chi d\varphi dz+dz^2. \end{aligned} \tag{3.126}$$

Consequentemente, podemos ver que a coordenada radial está restrita no intervalo

$$0 \leq \rho < \frac{\sqrt{1-\chi^2 w^2}}{w}. \tag{3.127}$$

Observe que a restrição na coordenada radial é determinada pela velocidade angular e pelo parâmetro associado à torção do defeito. Nesse caso, se $\rho \geq \frac{\sqrt{1-\chi^2w^2}}{w}$ nós teríamos uma partícula colocada fora do cone de luz. Observe que, tomando $\chi = 0$, recuperamos a discussão feita na Ref. (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) no espaço-tempo de Minkowski.

O determinate do tensor métrico correspondente à Eq. (3.126) é dado por

$$
\begin{aligned}
g &= \begin{vmatrix} -(1-w^2\rho^2-\chi^2w^2) & 0 & w(\rho^2+\chi^2) & w\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ w(\rho^2+\chi^2) & 0 & \rho^2+\chi^2 & \chi \\ w\chi & 0 & \chi & 1 \end{vmatrix}, \\
g &= (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -(1-w^2\rho^2-w^2\chi^2) & w(\rho^2+\chi^2) & w\chi \\ w(\rho^2+\chi^2) & \rho^2+\chi^2 & \chi \\ w\chi & \chi & 1 \end{vmatrix} = -\rho^2. \qquad (3.128)
\end{aligned}
$$

O tensor métrico inverso é definido pela relação $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = I_4$, onde obtemos, de forma direta, as componentes $g^{11} = 1$ e $g^{1\nu} = 0$ para $\nu \neq 1$, e as componentes restantes são calculadas através dos seguintes sistemas de equações:

$$
\begin{cases}
-(1-w^2\rho^2-w^2\chi^2)g^{00} + w(\rho^2+\chi^2)g^{20} + w\chi g^{30} = 1 \\
w(\rho^2+\chi^2)g^{00} + (\rho^2+\chi^2)g^{20} + \chi g^{30} = 0 \\
w\chi g^{00} + \chi g^{20} + g^{30} = 0
\end{cases}
$$

com $g^{00} = -1$, $g^{20} = w$ e $g^{30} = 0$;

$$
\begin{cases}
-(1-w^2\rho^2-w^2\chi^2)g^{01} + w(\rho^2+\chi^2)g^{21} + w\chi g^{31} = 0 \\
w(\rho^2+\chi^2)g^{01} + (\rho^2+\chi^2)g^{21} + \chi g^{31} = 0 \\
w\chi g^{01} + \chi g^{21} + g^{31} = 0
\end{cases}
$$

com $g^{01} = g^{21} = g^{31} = 0$;

$$
\begin{cases}
-(1-w^2\rho^2-w^2\chi^2)g^{02} + w(\rho^2+\chi^2)g^{22} + w\chi g^{32} = 0 \\
w(\rho^2+\chi^2)g^{02} + (\rho^2+\chi^2)g^{22} + \chi g^{32} = 1 \\
w\chi g^{02} + \chi g^{22} + g^{32} = 0
\end{cases}
$$

com $g^{02} = w$, $g^{22} = \frac{1}{\rho^2} - w^2$ e $g^{32} = -\frac{\chi}{\rho^2}$;

$$
\begin{cases}
-(1-w^2\rho^2-w^2\chi^2)g^{03} + w(\rho^2+\chi^2)g^{23} + w\chi g^{33} = 0 \\
w(\rho^2+\chi^2)g^{03} + (\rho^2+\chi^2)g^{23} + \chi g^{33} = 0 \\
w\chi g^{03} + \chi g^{23} + g^{33} = 1
\end{cases}
$$

com $g^{03}=0$, $g^{23}=-\frac{\chi}{\rho^2}$ e $g^{33}=\frac{\rho^2+\chi^2}{\rho^2}$. Logo, o tensor métrico inverso é

$$g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ w & 0 & \frac{1-w^2\rho^2}{\rho^2} & -\frac{\chi}{\rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\chi}{\rho^2} & \frac{\rho^2+\chi^2}{\rho^2} \end{bmatrix}. \tag{3.129}$$

Escrevendo a EKG (3.8), com $V(\rho)=0$, no espaço-tempo descrito pelo elemento de linha (3.126), temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ 2w\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\partial t}-w^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}-\frac{2\chi}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\partial z} \\ &+ \frac{\chi^2}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-m^2\phi=0. \end{aligned} \tag{3.130}$$

Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.130), obtemos a equação radial

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\gamma^2}{\rho^2}R+\bar{\theta}^2R=0, \tag{3.131}$$

onde γ está definido na Eq. (3.15) e

$$\bar{\theta}^2=(\mathcal{E}+lw)^2-m^2-k^2. \tag{3.132}$$

Note que a Eq. (3.131) trata-se da equação diferencial de Bessel (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972). Seguindo os passos da Eq. (3.120) à Eq. (3.121), temos que $R(\rho)=AJ_{|\gamma|}(\bar{\theta}\rho)$.

Como apontamos na Eq. (3.127), a restrição na coordenada radial impõe que o campo escalar deve desaparecer em $\rho\to\rho_0=\frac{\sqrt{1-\chi^2w^2}}{w}$. Isso significa que a função de onda radial $R(\rho)$ deve satisfazer a condição de contorno:

$$R\left(\rho\to\rho_0=\frac{\sqrt{1-w^2\chi^2}}{w}\right)=0, \tag{3.133}$$

a qual corresponde a um campo escalar sujeito a um potencial de confinamento de parede rígida. Considerando o caso particular em que $\bar{\theta}\rho_0\gg 1$, obtemos

$$\mathcal{E}_{k,l,n}\approx -lw\pm\sqrt{m^2+k^2+\frac{w^2\pi^2}{(1-w^2\chi^2)}\left(n+\frac{1}{2}|l-k\chi|+\frac{3}{4}\right)^2}, \tag{3.134}$$

onde $n=0,1,2,\ldots$.

Consequentemente, os níveis de energia (3.134) correspondem a um campo escalar sujeito a um potencial de confinamento de parede rígida sob os efeitos de rotação no

espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice. As contribuições para os níveis de energia relativística (3.134) decorrentes da topologia do defeito são dadas pelo momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi$, e pela presença do raio fixo $\rho_0 = \frac{\sqrt{1-w^2\chi^2}}{w}$. Devido aos efeitos da torção no espaço-tempo, temos uma mudança no momento angular que produz o momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi$. Conforme discutido na Ref. (BEZERRA, 1997), essa mudança no momento angular corresponde a um efeito análogo ao efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989). Note que, para $\chi = 0$, a contribuição da torção no espaço-tempo desaparece, e assim, recuperamos os níveis de energia relativística no espaço-tempo de Minkowski em um referencial com rotação uniforme. Além disso, podemos observar um efeito do tipo Sagnac (SAGNAC, 1913; POST, 1967) pela presença do acoplamento entre a velocidade angular w e o número quântico do momento angular l.

3.8.2 Campo escalar no espaço-tempo de deslocação tipo espiral

Consideremos, agora, a transformação de coordenadas $\varphi \to \varphi + wt$ no elemento de linha dado na Eq. (3.110), a qual é reescrita da forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 - w^2\bar{\chi}^2 - w^2\rho^2)dt^2 + 2\bar{\chi}wd\rho dt + 2\omega(\bar{\chi}^2 + \rho^2)d\varphi dt + d\rho^2 \\ &+ 2\bar{\chi}d\rho d\varphi + (\bar{\chi}^2 + \rho^2)d\varphi^2 + dz^2. \end{aligned} \tag{3.135}$$

Neste caso, temos que a coordenada radial é restrita pelo intervalo:

$$0 \leq \rho < \frac{\sqrt{1 - \bar{\chi}^2 w^2}}{w}. \tag{3.136}$$

Consequentemente, a restrição sobre a coordenada radial é determinada pela velocidade angular do referencil não-inercial e o parâmetro associado com a distorção de um círculo dentro de uma espiral (torção). Esta restrição sobre a coordenada radial é análoga ao do espaço-tempo com deslocamento tipo-hélice, dada na Eq. (3.127). Portanto, se $\rho > \frac{\sqrt{1-\bar{\chi}^2w^2}}{w}$, temos uma partícula fora do cone de luz. Note que tomando $\bar{\chi} = 0$, também recuperamos a discussão feita na Ref. (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) no espaço-tempo de Minkowski.

Assim, a EKG (3.8), com $V(\rho) = 0$, no espaço-tempo descrito pelo elemento de linha

(3.135) é dada por

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2w\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi\partial t} + \left(1+\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho}-\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^3}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \frac{2\bar{\chi}}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho\partial\varphi} + \frac{\bar{\chi}}{\rho^3}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \left(\frac{1}{\rho^2}-w^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - m^2\phi = 0. \tag{3.137}$$

A solução para a Eq. (3.137) tem a mesma forma da Eq. (3.113), portanto, a equação radial torna-se

$$\left(1+\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^2}\right)\frac{d^2R}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho}-\frac{\bar{\chi}^2}{\rho^3} - i\frac{2\bar{\chi}l}{\rho^2}\right)\frac{dR}{d\rho} - \frac{l^2}{\rho^2}R + i\frac{\bar{\chi}l}{\rho^3}R + \bar{\theta}^2R = 0, \tag{3.138}$$

onde $\bar{\theta}^2$ está definido na Eq. (3.132). Seguindo os passos da Eq. (3.116) à Eq. (3.120), mas com a mudança de variável dada por $\bar{s} = \theta\sqrt{\rho^2+\bar{\chi}^2}$, obtemos

$$\frac{d^2u}{d\bar{s}^2} + \frac{1}{\bar{s}}\frac{du}{d\bar{s}} - \frac{l^2}{\bar{s}^2}u + u = 0. \tag{3.139}$$

Logo, seguindo os passos da Eq. (3.121) à Eq. (3.122), temos que $u(\bar{s}) = AJ_{|l|}(\bar{s})$. Com $\bar{\rho}_0 = \frac{\sqrt{1-\bar{\chi}^2w^2}}{w}$, a condição de contorno (3.122) torna-se

$$u\left(\bar{s}\to\bar{s}_0 = \frac{\bar{\theta}}{w}\right) = 0, \tag{3.140}$$

a qual, também, corresponde a um campo escalar sujeito ao potencial de confinamento de parede rígida, como visto na subseção anterior. Consideremos também o caso particular $\bar{s}_0 \gg 1$, obtemos

$$\mathcal{E}_{k,l,n} \approx -lw \pm \sqrt{m^2+k^2+w^2\pi^2\left(n+\frac{|l|}{2}+\frac{3}{4}\right)^2}. \tag{3.141}$$

Na Eq. (3.141), temos o espectro relativístico de energia para o campo escalar sujeito ao potencial de confinamento de parede rígida sob os efeitos de rotação no espaço-tempo com uma deslocação tipo espiral. Em oposição aos resultados obtidos neste capítulo, não há influência da topologia do espaço-tempo sobre os níveis de energia no referencial em rotação uniforme. Apesar de ter efeitos da topologia do espaço-tempo na coordenada radial, como vimos na Eq. (3.136), para $\bar{\rho}_0 = \frac{\sqrt{1-\bar{\chi}^2w^2}}{w}$, só temos efeitos de rotação nos níveis de energia relativística. O efeito tipo Sagnac (SAGNAC, 1913; POST, 1967) pode ser observado na Eq. (3.141) devido a presença do acoplamento entre a velocidade angular w e o número quântico do momento angular l. Além disso, não há efeito análogo ao efeito AB para estados ligados (BEZERRA, 1997; MARQUES et al., 2005; AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989), dado que os autovalores do momento angular permanecem

inalterados. Portanto, o espectro de energia (3.141) é análogo ao obtido na Eq. (3.134) para $\chi = 0$, ou seja, no espaço-tempo de Minkowski.

3.9 Sumário

Neste capítulo, apresentamos uma breve definição sobre torção e seus efeitos geométricos no espaço-tempo. Posteriormente, especificamos os tipos de defeitos associados à torção em analogia ao processo de Volterra, conhecidas como discrinações e deslocações, onde esta última é decomposta nos tipos espiral e hélice. Feitas essas apresentações, utilizamos esse pano de fundo de defeitos topológicos associados à torção, no caso, deslocações tipo-hélice e espiral, para a descrição de um campo escalar massivo sujeito a potenciais centrais com intuito de definir os níveis de energia relativística. Em seguida, acoplamos o campo escalar massivo ao campo de calibre através do acoplamento mínimo e, com isto, analismos a dinâmica quântica relativística para o potencial tipo-Coulomb I e as configurações que fornecem os análogos da quantização de Landau e do efeito AB, onde analisamos seus efeitos sobre os níveis de energia relativística. Além disso, investigamos os efeitos de rotação sobre um campo escalar em um caso particular, onde fizemos da condição de contorno imposta pelo referencial não-inercial sobre a coordenada radial, um efeito de confinamento do potencial de parede rígida. Tal efeito nos permitiu definir os níveis de energia relativística de desses sistemas. No capítulo seguinte, analisaremos os efeitos da VSL na interação de um campo escalar sujeito a potenciais centrais.

4 Campo escalar sujeito a potenciais centrais em um espaço-tempo com violação da simetria de Lorentz

A união entre a relatividade especial e a mecânica quântica, juntamente com a sua maturação e consistência, possibilitou a formulação do MP, o qual descreve, de forma unificada, as interações fundamentais (eletromagnética, nucleares fraca e forte) entre partículas, com exceção da interação gravitacional. No entanto, há vários questionamentos sobre o MP de cunhos teórico e experimental, por exemplo, uma possível variação na constante de estrutura fina (SONGAILA; COWIE, 1999, 2004; DAVIES; DAVIES; LINEWEAVER, 2002). Com isso, ao longo das últimas décadas, surgiram teorias com a intenção de estender o MP, as quais tornaram-se conhecidas como EMP. Dentre essas propostas, tem-se a quebra espontânea da simetria através de campos não-escalares (campos vetoriais e tensoriais).

4.1 Violação da simetria de Lorentz e a simetria CPT: uma breve revisão

A união entre a Relatividade Restrita e a mecânica quântica nos forneceu uma teoria capaz de descrever partículas fundamentais, a qual ficou conhecida como Teoria Quântica de Campos, que, com o passar do tempo e maturção de ideias levantadas e relacionadas à mesma, formulou-se o MP, o qual descreve, de maneira unificada, as interações fundamentais eletromagnética e nucleares forte e fraca, com exceção da interação gravitacional.

Com base no modelo cosmológico *Lambda-Cold Dark Matter*[1] (ΛCDM) (WEINBERG, 2008), pautado no princípio cosmológico, e que, até o momento, melhor explica a origem e a evolução do Universo atual, é de se esperar que, em um cenário de altas energia e

[1] Em tradução literal significa Lambda-matéria escura fria.

temperatura, cenário análogo aos momentos iniciais da evolução do Universo, tenhamos uma teoria que descreva, de forma unificada, todas as interações fundamentais conhecidas da Natureza. No entanto, na tentativa de incorporar a Relatividade Geral no MP, a simetria de Lorentz[2] é quebrada naturalmente (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989).

Além disso, há questionamentos de caráter observacional sobre as estimativas teóricas do MP, como, por exemplo, evidências de que a constante de estrutura fina, $\alpha = \frac{e^2}{c\hbar}$, esteja variando lentamente (SONGAILA; COWIE, 1999, 2004; DAVIES; DAVIES; LINEWEAVER, 2002). As partículas que compõem os raios cósmicos observados no limite Greisen-Zatsepin-Kuzmin ($\mathcal{E}_{GZK} = 4.10^{19} eV$) podem ter uma velocidade maior do que a velocidade da luz no vácuo como uma possível explicação para o tempo de vida que essas partículas possuem (KOSTELECKÝ; MEWES, 2001, 2002). Recentemente, pesquisadores consideraram um muón em órbita em torno de um próton e mostraram que o raio do próton é diferente, ou seja, algo que não deveria ter acontecido (POHL et al., 2016). Além disso, o MP não conseguiu explicar a origem do momento dipolo elétrico do elétron (BERNREUTHER; SUZUKI, 1991). Teorias que vão além de MP prevêem um momento de dipolo elétrico pequeno, mas potencialmente mensurável ($d_e \leq 10^{-19}$e.cm) (BARON et al., 2014). As medidas experimentais foram melhoradas e atingiram o nível de $d_e \approx 10^{-31}$e·cm (BERNREUTHER; SUZUKI, 1991; BARON et al., 2014; ENGFER; WALTER, 1986; REGAN et al., 2002; HUDSON et al., 2011; KARA et al., 2012).

Esses exemplos citados acima nos levam a crer que, apesar do grande sucesso do MP para dar uma visão geral dos processos microscópicos através de uma teoria de campo que unifica as interações fraca, frote e eletromagnética, o mesmo tem algumas limitações. Nos últimos anos, o interesse em investigar a possibilidade de uma física além de MP foi intensificado com a necessidade de entender o setor escuro do Universo: matéria e energia escuras. Há uma falta de explicação da natureza da matéria escura a qual motivou novos propósitos de descrever a interação entre os setores escuro e visível, o que poderia induzir a detecção de uma quinta força. Isso é investigado em decaimentos de um estado excitado de ^{8}Be (FENG et al., 2016). Além disso, temos o desequilíbrio entre a matéria-antimatéria que não foi esclarecida pelo MP (KIM, 1987; CHENG, 1988; KIM; CAROSI, 2010; PIGNOL, 2015; STADNIK; FLAMBAUM, 2014; ROBERTS et al., 2014; POSPELOV; RITZ, 2005).

Uma proposta interessante para investigar a física além do MP foi feita por Kostelecký

[2]Um sistema é caracterizado pela simetria de Lorentz se as leis da física não são modificadas por transformações de Lorentz dos seguintes tipos: *boosts* e rotações. No caso da primeira transformação, *boosts*, os quais são divididos em três tipos, onde cada um se sucede em um dos eixos espaciais, é determinada pela mudança de velocidades, enquanto que a segunda transformação, as rotações, correspondem aos três tipos básicos de rotações em torno dos três eixos espaciais.

e Samuel (KOSTELECKÝ; SAMUEL, 1989), onde trataram a quebra espontânea da simetria através de campos não-escalares, ou seja, vácuo de campos que têm uma natureza tensorial, com base na teoria de cordas. Uma descrição consistente das flutuações em torno deste novo vácuo é obtida se as componentes do campo de fundo forem constantes e pelo fato de que este novo mínimo, para ser um campo de fundo não escalar, viola a simetria de Lorentz espontaneamente. Esta possibilidade de extensão do MP foi considerada para campos que pertencem a uma teoria mais fundamental, o que pode induzir a violação espontânea da simetria de Lorentz com base em um potencial específico. Vale ressaltar que esta extensão de MP mantém a invariância de calibre, a conservação de energia e momento e a covariância sob rotações e *boosts* de observadores, onde esta extensão é chamada de EMP (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997, 1998). Neste contexto, é bem conhecido que a presença de termos que violam a simetria de Lorentz impõe pelo menos uma direção privilegiada no espaço-tempo. Nas últimas décadas, estudos sobre a VSL foram feitos em vários ramos da física dados nas Refs. (BELICH et al., 2006; GAZZOLA et al., 2012; BELICH et al., 2009; CASANA et al., 2015; CASANA; FARIAS; FERREIRA, 2015; CASANA; FERREIRA; SANTOS, 2014; CASANA et al., 2014, 2013; BELICH et al., 2005; AJAIB, 2012; GRUSHIN, 2012; BELICH et al., 2012; CASANA et al., 2013; BELICH et al., 2011; RIBEIRO et al., 2015; BAKKE; BELICH, 2013, 2012; RIBEIRO; FURTADO; PASSOS, 2012; BAILEY; KOSTELECKÝ, 2006; KOSTELECKÝ; TASSON, 2009; KOSTELECKÝ, 2004; BAKKE; BELICHE, 2015).

É importante mencionar que a EMP é caracterizada não só pela VSL, mas também pela violação da simetria CPT, uma propriedade importante do MP que é obtida via teoria quântica. A sigla CPT significa conjugação da carga, paridade e mudança de direção no fluxo do tempo, respectivamente. Uma breve discussão das suas principais características pode ser apreciada nessa Ref. (BAKKE; BELICHE, 2015). Vemos que:

- *Inversão espacial ou operação paridade* – trata-se de uma invariância sob a troca de, por exemplo, direita $\leftrightarrows$ esquerda, ou seja, reflexões espaciais:

$$\vec{r} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{r}.$$

  Sob estas transformações, pseudo-escalares e vetores, como a velocidade da partícula, o campo elétrico, o potencial vetor, etc, são transformados pela operação de reversão espacial P, enquanto que, sob esta mesma transformação, pseudovetores, como campo magnético, momento angular, etc, permanecem inalterados.

  Além disso, o operdor gradiente $\vec{\nabla}$ e a derivada temporal ∂_t, quando submetidos à operação de paridade, são definidos da forma $\vec{\nabla} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{\nabla}$ e $\partial_t \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial_t$, respectivamente.

Escolhendo o tensor métrico sendo $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-,-)$, temos $\partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial^\mu$, e assim, o quadripotencial vetor e a quadridensidade de corrente são transformados pelo operador de reversão temporal como $A_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} A^\mu$ e $J_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} J^\mu$.

No caso do tensor métrico ter a assinatura $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-,+,+,+)$, é válida a operação de paridade $\partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} -\partial^\mu$, logo, temos mudanças no quadripotencial vetor e na quadricorrente;

- *Inversão temporal* – esta operaçao faz basicamente

$$t \xrightarrow{\mathcal{T}} -t,$$

onde, consequentemente $\partial_t \xrightarrow{\mathcal{T}} -\partial_t$. O operador de reversão temporal $\mathcal{T}$ age sobre os vetores posição, velocidade e acelaração[3] como

$$\vec{r} \xrightarrow{\mathcal{T}} \vec{r}; \quad \vec{v} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\vec{v}; \quad \vec{a} \xrightarrow{\mathcal{T}} \vec{a}.$$

Consequentemente, o operador gradiente permanece inalterado sob a transformação de reversão temporal, ou seja, $\vec{\nabla} \xrightarrow{\mathcal{T}} \vec{\nabla}$.

Escolhendo a assinatura do tensor métrico como sendo $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-,-)$, temos as seguintes transformações: $A_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} A^\mu$, $J_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} J^\mu$ e $\partial_\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} -\partial^\mu$;

- *Conjugação da carga* – esta operaçao de simetria inverte a carga elétrica,

$$q \xrightarrow{\mathcal{C}} -q$$

ou seja, essa operaçao transforma uma partícula na sua antipartícula. A quadridensidade de corrente, sob esta transformação, é dada como $J_\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -J_\mu$.

Além disso, o operador de conjugação de carga age sobre as componentes do quadripotencial vetor da forma

$$A_0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -A_0; \quad \vec{A} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\vec{A},$$

nos fornecendo, então, que os campos elétrico e magnético, quando submetidos à transformação de conjugação de carga, são definidos da forma

$$\vec{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\vec{E}; \quad \vec{B} \xrightarrow{\mathcal{C}} -\vec{B}.$$

Portanto, vetores como momento linear, aceleração e força permanecem inalterados

[3] As leis de Newton sao invariantes sob este tipo de transformaçao, pois envolvem derivadas segundas no tempo: $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

sob a operação de conjugação de carga, ou seja, $\vec{p} \overset{\mathcal{C}}{\to} \vec{p}$, $\vec{a} \overset{\mathcal{C}}{\to} \vec{a}$ e $\vec{F} \overset{\mathcal{C}}{\to} \vec{F}$.

Além disso, trabalhando com a assinatura do tensor métrico $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-,-)$ ou $g_{\mu\nu} = (-,+,+,+)$ temos que o operador ∂_μ permanece inalterado sob a operação de conjugação de carga: $\partial_\mu \overset{\mathcal{C}}{\to} \partial_\mu$.

Em particular, uma simetria que é bastante analisada no formalismo de teoria de campos consiste em uma transformação que combina as três simetrias discretas discutidas acima, e, por isso, é conhecida como a simetria CPT. O operador associado à simetria CPT é determinado pelo produto dos operadores $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ e atua nos potenciais escalares e vetoriais eletromagnéticos como (BAKKE; BELICHE, 2015)

$$A_0 \overset{\mathcal{CPT}}{\to} -A_0; \quad \vec{A} \overset{\mathcal{CPT}}{\to} -\vec{A},$$

logo, o operador $\mathcal{CPT}$ agindo sobre os campos elétrico e magnético nos fornece

$$\vec{E} \overset{\mathcal{CPT}}{\to} \vec{E}; \quad \vec{B} \overset{\mathcal{CPT}}{\to} \vec{B},$$

respectivamente. Considerenado a assinatura do tensor métrico $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-,-)$, o quadripotencial vetor e o operador ∂_μ, quando submetidos à operação do operador $\mathcal{CPT}$, transformam-se como

$$A_\mu \overset{\mathcal{CPT}}{\to} -A_\mu; \quad \partial_\mu \overset{\mathcal{CPT}}{\to} -\partial_\mu.$$

Além disso, o teorema CPT afirma que qualquer teoria de campo quântico é invariante em relação à simetria CPT se as seguintes condições são satisfeitos (BAKKE; BELICHE, 2015):

- a teoria deve ser local e invariante sob as transformações de Lorentz;
- a teoria deve respeitar a conexão de estatística-*spin*, ou seja, os campos com *spins* inteiros devem satisfazer as relações de comutação associadas com bósons, enquanto que as partículas de *spins* semi-inteiros devem satisfazer as relações de anticomutação associadas com férmions.

Portanto, o teorema CPT estabelece que, embora uma teoria quântica possa violar as simetrias C, P e T separadamente, mas se satisfizer as duas condições acima, portanto, é invariante sob as transformações CPT.

Além disso, a invariância de uma teoria em relação à simetria de Lorentz é uma suposição fundamental da validade do teorema CPT. A densidade de Lagrangiana da

EMP que satisfaz o teorema $\mathcal{CPT}$ também é invariante sob as transformações de Lorentz. No entanto, se a simetria CPT for quebrada em um sistema, a simetria de Lorentz também é quebrada. Para resumir, se uma teoria efetiva em (3+1) dimensões quebra a simetria CPT, então, também há a quebra da simetria de Lorentz. No entanto, o inverso não é verdade (BAKKE; BELICHE, 2015), que é o que veremos na próxima seção.

4.2 Setor do campo de calibre da Extensão do Modelo Padrão: uma breve revisão

O setor de campo de calibre[4] da EMP tem dois termos que modificam as propriedades de transporte do espaço-tempo, uma vez que estes termos quebram a simetria de Lorentz. Com base na eletrodinâmica de Maxwell, a densidade de lagrangeana do setor de calibre da EMP é dada por (BAKKE; BELICHE, 2015):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^{\mu}A^{\nu}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - qA_{\mu}J^{\mu}, \tag{4.1}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ é o tensor eletromagnético, A_{μ} é o qudripotencial vetor, J^{μ} é a quadridensidade de corrente, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita e q é a carga elétrica.

A Eq. (4.1) é composta pelo termo da teoria livre de Maxwell, no caso, o primeiro termo, enquanto que os dois termos seguintes violam a simetria de Lorentz, onde os mesmo são divididos em dois grupos: um viola a simetria CPT-ímpar, representando, assim, o setor fotônico CPT-ímpar, enquanto o outro viola a simetria CPT-par, representando o setor fotônico CPT-par. Vale lembrar que estas caracterísiticas estão diretamente relacionadas as simetrias, ou transformações, discretas C, P, T, onde teorias de campos que descrevem partículas não-interagentes são invariantes sob estas transformações, caso contrário, a presença de interações na teoria pode violar estas simetrias, e do teorema CPT, formado pela combinação das mesmas.

Dadas essas definições, voltemos à Eq. (4.1), na qual fazemos $J^{\mu} = 0$, e a analisemos pelos setores separadamente (BAKKE; BELICHE, 2015).

[4]Há também o setor fermiônico da EMP, porém, por não ser objeto de estudo ou de aplicação neste trabalho, não abordamos o mesmo. Na Ref. (BAKKE; BELICHE, 2015) pode ser vista uma apresentação deste setor e várias aplicações no estudo de fases geométricas.

4.2.1 Setor do campo de calibre: extensão de CPT-ímpar

Considere a densidade de lagrangeana de Maxwell-Carrol-Field-Jakiw (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^{\mu}A^{\nu}F^{\alpha\beta}. \tag{4.2}$$

onde, $F_{0i} = -E_i$ e $F_{kl} = \varepsilon_{klm}B_m$. Esta densidade de lagrangeana é definida pela presença de um campo de fundo vetorial $b_\mu = (b_0, \vec{b})$ que viola a simetria de Lorentz e pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{1}{2}[b^0(\vec{A}.\vec{B}) - A^0(\vec{b}.\vec{B}) - \vec{b}.(\vec{A}\times\vec{E})]. \tag{4.3}$$

Sob a transformação CPT, $\mathcal{L} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathcal{L}'$, a densidade de lagrangeana 4.3 torna-se

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - \frac{1}{2}b^0(\vec{A}.\vec{B}) + \frac{1}{2}A^0(\vec{b}.\vec{B}) + \frac{1}{2}\vec{b}.(\vec{A}\times\vec{E}), \tag{4.4}$$

onde podemos notar que ela não é invariante sob a transformação CPT. Logo, a simetia CPT é quebrada pela presença do campo vetorial fixo b_μ, o qual viola a simetia de Lorentz, e, portanto, a Eq. (4.2) é o setor de calibre conhecido como o setor CPT-ímpar da EMP.

4.2.2 Setor do campo de calibre: extensão de CPT-par

Agora, consideremos o caso em que o setor de calibre da EMP é definido pela presença de um campo de fundo tensorial $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ que viola a simetria de Lorentz, ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}. \tag{4.5}$$

O campo de fundo tensorial $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ é composto por dezenove coeficientes, onde nove destes coeficientes são não-birrefrigentes e dez são birrefrigentes. Além disso, possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann e um traço nulo duplo:

$$\begin{aligned}
(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} &= -(K_F)_{\nu\mu\alpha\beta};\\
(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} &= -(K_F)_{\mu\nu\beta\alpha};\\
(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} &= -(K_F)_{\alpha\beta\mu\nu};\\
(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} &+ (K_F)_{\mu\alpha\beta\nu} + (K_F)_{\mu\beta\nu\alpha} = 0;\\
(K_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Podemos reescrever a Eq. (4.5) na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - (K_F)_{0i0j}E^iE^j + (K_F)_{oilm}\varepsilon_{lmp}E^iB^p \\ &+ \frac{1}{4}(K_F)_{ablm}\varepsilon_{abq}\varepsilon_{lmp}B^qB^p.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Sob a transformação CPT, $\mathcal{L} \overset{\mathcal{CPT}}{\rightarrow} \mathcal{L}'$, a densidade de Lagrangeana, Eq. (4.7), permanece inalterada, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, consequentemente a presença do campo tensorial $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ fixo, que viola a simetria de Lorentz, não viola a simetria CPT, e, por isso, este setor de calibre da EMP é conhecido como o setor CPT-par.

4.3 Potenciais induzidos em possíveis cenários de violação da simetria de Lorentz: um breve comentário

Recentemente, inspirados nas Refs. (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997, 1998; SCARPELLI et al., 2004; KOSTELECKÝ; MEWES, 2001, 2002), Bakke e Belich estudaram a dinâmica quântica relativística de uma partícula escalar sob efeitos da VSL introduzindo um acoplamento não-mínimo na EKG dado por $p_\mu p^\mu \rightarrow p_\mu p^\mu + \frac{g}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}(x)F^{\alpha\beta}(x)$ (BAKKE; BELICH, 2015, 2016), onde g é uma constante e $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, como visto na seção anterior, corresponde ao tensor que governa a VSL além do MP. É importante mencionar que o acoplamento entre o campo escalar e o campo tensorial $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ descreve a anisotropia do espaço-tempo criando as direções preferenciais no espaço-tempo por um termo de VSL.

Na Ref. (BAKKE; BELICH, 2015), Bake e Belich mostraram que um potencial tipo-Coulomb, com a configuração de campo $\vec{E} = \frac{\lambda}{\rho}\hat{\rho}$ e $\vec{B} = B_0\hat{z}$ via acoplamento não-mínimo, pode ser induzido por efeitos de quebra da simetria de Lorentz e, com isso, obtiveram soluções de estados ligados para a EKG. Já na Ref. (BAKKE; BELICH, 2016), os autores mostraram que potenciais de confinamento do tipo-harmônico e linear podem se originar dos efeitos de quebra da simetria de Lorentz, através da configuração de campo $\vec{E} = \frac{\bar{\lambda}\rho}{2}\hat{\rho}$ e $\vec{B} = B_0\hat{z}$, obtendo, assim, as soluções de estados de ligados relativísticos para o campo escalar, onde λ, $\bar{\lambda}$ e B_0 são constantes[5].

É importante mencionar que esse procedimento de induzir potenciais de confinamento via acoplamento não-mínimo na EKG, o qual viola a simetria de Lorentz, até então, não foi aplicado no OKG (BRUCE; MINNING, 1993), em sistemas com massa dependente

[5] λ e $\bar{\lambda}$, neste caso, representam distribuições uniformes lineares de cargas elétricas.

da posição, onde é possível inserir potenciais de confinamento, como os potencial tipo-Coulomb II e linear. Portanto, nas seções posteriores, com base nas Refs. (BAKKE; BELICH, 2015, 2016), consideramos um plano de fundo de VSL determinada pelo tensor $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ o qual descreve a VSL além do MP, o qual dá origem a potenciais tipo-Coulomb e tipo-harmônico, onde expandimos essa análise para sistemas de massa dependente da posição e para um campo esclar interagindo com o campo de calibre via acoplamento mínimo.

4.4 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao oscilador de Klein-Gordon

Como visto no Cáp. (2), o acoplamento do oscilador relativístico proposto por Bruce e Mining (BRUCE; MINNING, 1993) nos permite escrever a EKG em (3+1) dimensões como segue ($c = \hbar = 1$):

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - (\hat{p} + im\omega\rho\hat{\rho}).(\hat{p} - im\omega\rho\hat{\rho})\phi - m^2\phi = 0, \tag{4.8}$$

onde m é massa de repouso do campo escalar, ω é a frequência angular do OKG, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ é a coordenada radial e $\hat{\rho}$ é um vetor unitário na direção radial. Note que escrevemos a EKG (4.1) utilizando a métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \tag{4.9}$$

Seguindo as Refs. (BAKKE; BELICH, 2015, 2016), ao introduzir o acoplamento não-mínimo $p_\mu p^\mu + \frac{g}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}(x)F^{\alpha\beta}(x)$ na Eq. (4.8), temos

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - (\hat{p} + im\omega\rho\hat{\rho}).(\hat{p} - im\omega\rho\hat{\rho})\phi + \frac{g}{4}(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}(x)F^{\alpha\beta}(x)\phi - m^2\phi = 0. \tag{4.10}$$

Uma outra propriedade do campo tensorial $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ é que ele pode ser escrito em termos de matrizes 3×3, κ_{DE}, κ_{DB}, κ_{HE}, κ_{HB}, definidas nas Refs. (KOSTELECKÝ; MEWES, 2001, 2002, 2006) como:

$$\begin{aligned}
(\kappa_{DE})_{ij} &= -2(K_F)_{0i0j}; \\
(\kappa_{HB})_{jk} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{jpq}\varepsilon_{klm}(K_F)^{pqlm}; \\
(\kappa_{DB})_{jk} &= -(\kappa_{HE})^{j}{}_{k} = \varepsilon_{kpq}(K_F)^{0jpq}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Note que as matrizes $(\kappa_{DE})_{jk}$ e $(\kappa_{HB})_{jk}$ são simétricas e as matrizes $(\kappa_{DB})_{jk}$ e $(\kappa_{HE})_{kj}$

não têm simetria. Neste caso, podemos reescrever a Eq. (4.10) na forma

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &- (\hat{p}+im\omega\rho\hat{\rho}).(\hat{p}-im\omega\rho\hat{\rho})\phi - \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{ij}E^iE^j\phi + \frac{g}{2}(\kappa_{HB})_{ij}B^iB^j\phi \\ &- g(\kappa_{DB})_{ij}E^iB^j\phi - m^2\phi = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Doravante, consideremos um possível cenário da VSL determinado por apenas uma componente não-nula do tensor $(\kappa_{DB})_{ij}$ como sendo $(\kappa_{DB})_{13} = \kappa = \text{const.}$ e por uma configuração de campo dada por (BAKKE; BELICH, 2015):

$$\vec{B} = B_0\hat{z}; \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{\rho}\hat{\rho}, \tag{4.13}$$

onde B_0 é uma constante, $\hat{z}$ é um vetor unitário na direção z e λ é uma constante associada com a distribuição linear de cargas elétricas sobre o eixo axial z. Então, a EKG (4.12) torna-se

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - m^2\omega^2\rho^2\phi - \frac{B_0g\lambda\kappa}{\rho}\phi + m\omega\phi - m^2\phi = 0. \tag{4.14}$$

Utilizando a Eq. (3.12), em termos de uma função radial $f(\rho)$, como solução da Eq. (4.14), e utilizando a mudança de variável $r = \sqrt{m\omega}\rho$, obtemos

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{l^2}{r^2}f - \frac{\alpha}{r}f - r^2f + \beta f = 0, \tag{4.15}$$

onde

$$\alpha = \frac{B_0g\lambda\kappa}{\sqrt{m\omega}}; \qquad \beta = \frac{\mathcal{E}^2 - m^2 - k^2 + m\omega}{m\omega}. \tag{4.16}$$

Note que a Eq. (4.15) é análoga à Eq. (2.23), logo, podemos seguir os passos da Eq. (2.25) à Eq. (2.29) e, assim, definir a relação de recorrência dos coeficientes da solução dada em série de potências:

$$c_{j+2} = \frac{\alpha c_{j+1} - (\beta - 2|l| - 2 - 2j)b_j}{(j+2)(j+2+2|l|)}, \tag{4.17}$$

com $c_1 = \frac{\alpha}{(1+2|l|)}$, onde consideramos o coeficiente $c_0 = 1$.

Como visto nos capítulos anteriores, na procura de soluções polinomiais para a série de potências, no caso, a série de Heun biconfluente torna-se um polinômio de grau n quando

$$\beta - 2|l| - 2 = 2n; \qquad c_{n+1} = 0, \tag{4.18}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Portanto, a condição $\beta - 2|l| - 2 = 2n$ produz a seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_{k,l,n} = \pm\sqrt{m^2 + k^2 + 2m\omega\left(\frac{1}{2} + |l| + n\right)}. \tag{4.19}$$

No entanto, precisamos analisar a condição $c_{n+1} = 0$ para determinar as soluções polinomiais para a equação de Heun biconfluente. Para isso, precisamos definir alguns coeficientes da expansão da série de potências. Então, da Eq. (4.17) juntamente com as definições de c_1 e $c_0 = 1$, resulta em

$$c_2 = \frac{\alpha^2 - (\beta - 2|l| - 2)(2|l| + 1)}{2(2|l| + 1)(2|l| + 2)}. \tag{4.20}$$

Assim, ao lidarmos com o estado de menor energia do sistema ($n = 1$), temos que $c_{n+1} = c_2 = 0$, então, obtemos a relação

$$\omega_{k,l,1} = \frac{B_0^2 g^2 \lambda^2 \kappa^2}{2m(1 + 2|l|)}, \tag{4.21}$$

ou seja, valores específicos da frequência angular do OKG são permitidos se quisermos determinar uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente. Em particular, a Eq. (4.21) corresponde aos possíveis valores da frequência angular do OKG associados ao estado de menor energia do sistema ($n = 1$) que produzem uma solução polinomial para a série de potências e, portanto, satisfazem o comportamento assintótico da função de onda radial quando $r \to 0$ e $r \to \infty$. Além disso, temos que os possíveis valores da frequência angular dependem dos parâmetros que estabelecem o cenário da VSL $(g, B_0, \kappa, \lambda)$ e os números quânticos do sistema $\{k, l, n\}$. Portanto, a expressão para a energia do estado de menor energia do sistema torna-se

$$\mathcal{E}_{k,l,1} = \pm m\sqrt{1 + \frac{k^2}{m^2} + \frac{(B_0 g \lambda \kappa)^2(3 + 2|l|)}{2m^2(1 + 2|l|)}}. \tag{4.22}$$

Assim, os efeitos do pano de fundo da quebra de simetria de Lorentz no OKG são caracterizados pela presença de um potencial tipo-Coulomb que modifica o espectro de energia e impõe uma restrição aos possíveis valores da frequência angular do OKG. Esta restrição nos mostra que os parâmetros associados ao pano de fundo da VSL e os números quânticos do sistema determinam os valores permitidos da frequência angular que produzem uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente.

4.5 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao potencial linear e o oscilador de Klein-Gordon

Nesta subseção, analisamos os efeitos quânticos relativísticos de um potencial escalar linear e a VSL no OKG. O potencial escalar linear (2.38) é introduzido na EKG (4.12) através da modificação do termo de massa dada na Eq. (2.39) (GREINER; BROMLEY, 2000). Portanto, considerando o pano de fundo da VSL da seção anterior, Sec. (4.4), então, a EKG (4.14) torna-se

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-m^2\omega^2\rho^2\phi-\frac{B_0 g\lambda\kappa}{\rho}\phi+m\omega\phi \\ &- (m+\mu\rho)^2\phi=0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Note que a Eq. (4.23) é análoga à Eq. (2.40), logo, seguindo os mesmos passos da Eq. (2.40) à Eq. (2.54), e utilizando os argumentos da seção anterior, Sec. (4.4), para a frequência angular do OKG como parâmetro de ajuste para as condições de truncamento da série, obtemos a equação algébrica de terceiro grau

$$\begin{aligned} (m^2\omega_{k,l,1}^2 &+ \mu^2)^{3/2}-\frac{(B_0 g\lambda\kappa)^2}{2(2|l|+1)}(m^2\omega_{k,l,1}^2+\mu^2) \\ &+ \frac{2m\mu B_0 g\lambda\kappa(|l|+1)}{(2|l|+1)}(m^2\omega_{k,l,1}^2+\mu^2)^{1/2}-\frac{m^2\mu^2}{2}(2|l|+3)=0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde temos que os possíveis valores da frequência angular do OKG, que produzem uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente, são determinados pela solução real da Eq. (4.24). Em particular, a solução real para a Eq. (4.24) é muito longa, portanto, não a escrevemos. Também podemos ver, a partir da Eq. (4.24), que os possíveis valores da frequência angular do OKG dependem dos números quânticos do sistema e dos parâmetros associados ao pano de fundo da VSL. Portanto, para cada nível de energia relativística, temos uma relação diferente da frequência angular do OKG com os parâmetros da VSL e os números quânticos do sistema.

Assim, a presença do potencial escalar linear e do potencial tipo-Coulomb induzido pelos efeitos do pano de fundo da VSL modifica o espectro de energia do OKG e também impõe uma restrição aos valores da frequência angular deste oscilador quântico relativístico. Portanto, para cada nível de energia relativística, a relação da frequência angular desse oscilador quântico relativístico, que depende dos parâmetros da VSL e dos números quânticos do sistema, é diferente. Em particular, vimos que os valores possíveis da frequên-

cia angular associada ao estado de menor energia do sistema são determinados pela Eq. (4.24), e assim, é encontrada uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente.

4.6 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao potencial tipo-Coulomb II

Nesta subseção, consideramos uma partícula escalar relativística com massa dependente da posição sujeita a um potencial escalar proporcional ao inverso da distância radial, inserido na EKG via modificação do termo de massa,

$$m(\rho) = m + \frac{\nu}{\rho}, \tag{4.25}$$

em um espaço-tempo definido pela métrica (4.9), assim, investigamos os efeitos de um potencial tipo-harmônico produzido por um ambiente anisotrópico gerado por um termo de VSL neste sistema.

Consideremos um pano de fundo da VSL determinada pela presença do campo elétrico (BAKKE; BELICH, 2016)

$$\vec{E} = \frac{\vartheta\rho}{2}\hat{\rho}, \tag{4.26}$$

onde ϑ é uma constante relacionada a uma distribuição uniforme de volume de cargas elétricas. Desta forma, uma vez que a componente do tensor de VSL $(\kappa_{DE})_{11}$ pode ser considerado uma constante, enquanto todas as componentes dos outros tensores são nulas, a EKG (4.12), tomando $\omega \to 0$, torna-se:

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{g(\kappa_{DE})_{11}\vartheta^2\rho^2}{8}\phi - \left(m + \frac{\nu}{\rho}\right)^2\phi = 0. \tag{4.27}$$

Observe que o penúltimo termo do lado esquedo da Eq. (4.27) dá origem a um potencial tipo-harmônico (BAKKE; BELICH, 2016).

Substituindo a Eq. (3.12), em termos de uma função radial $G(\rho)$, na Eq. (4.27), e, posteriormente, fazendo a mudança de variável $\xi = \sqrt{\varpi}\rho$, obtemos a equação diferencial:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dG}{d\xi} - \frac{(l^2+\nu^2)}{\xi^2}G - \xi^2 G - \frac{\theta}{\sqrt{\varpi}\xi}G + \frac{\bar{\beta}}{\varpi}G = 0, \tag{4.28}$$

onde

$$\varpi^2 = \frac{g(\kappa_{DE})_{11}\vartheta^2}{8}; \quad \theta = 2m\nu; \quad \bar{\beta} = \mathcal{E}^2 - m^2 - k^2. \tag{4.29}$$

Note que a Eq. (4.29) é análoga à Eq. (2.23), logo, podemos utilizar os passos da Eq. (2.23) à Eq. (2.29) e definir a relação de recorrência para os coeficientes da série de Heun biconfluente:

$$c_{j+2} = \frac{\theta c_{j+1} + \sqrt{\varpi}(2j+2+2\sqrt{l^2+\nu^2} - \bar{\beta}/\varpi)c_j}{\sqrt{\varpi}(j+2)(j+2+2\sqrt{l^2+\nu^2})}, \tag{4.30}$$

com

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\theta}{\sqrt{\varpi}(1+2\sqrt{l^2+\nu^2})}; \\ c_2 &= \frac{\theta^2}{2\varpi(2+2\sqrt{l^2+\nu^2})(1+2\sqrt{l^2+\nu^2})} \\ &- \frac{(\bar{\beta}/\varpi - 2 - 2\sqrt{l^2+\nu^2})}{2(2+2\sqrt{l^2+\nu^2})}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde consideramos $c_0 = 1$.

Estamos interessados em buscar soluções de estados ligados; assim, devemos impor que a série de Heun biconfluente seja truncada. Isso ocorre, da Eq. (4.28), como já vimos em casos anteriores, quando

$$\frac{\bar{\beta}}{\varpi} - 2 - 2\sqrt{l^2+\nu^2} = 2n; \quad c_{n+1} = 0, \tag{4.32}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$, o que significa que a série de Heun biconfluente torna-se um polinômio de grau n quando as duas condições dadas em (4.32) são satisfeitas. Da condição $\frac{\bar{\beta}}{\varpi} - 2 - 2\sqrt{l^2+\nu^2} = 2n$, obtemos a expressão

$$\mathcal{E}_{k,l,n} = \pm\sqrt{m^2 + k^2 + 2\varpi(n + \sqrt{l^2+\nu^2} + 1)}, \tag{4.33}$$

Observe que n é o número quântico relacionado aos modos radiais. Assim, ao lidar com o estado de menor energia do sistema $n = 1$, temos que $c_{n+1} = c_2 = 0$. A partir desta condição, podemos expressar o parâmetro ν, o qual caracteriza o potencial tipo-Coulomb II, em termos dos parâmetros da VSL, a massa da partícula e os números quânticos $\{k, l, n\}$. Esta relação é obtida tomando as soluções para a seguinte equação algébrica do quarto grau, ou equação algébria biquadrada, para ν:

$$\nu_{k,l,1}^4 - \left(\frac{\varpi}{m^2} + \frac{\varpi^2}{m^4}\right)\nu_{k,l,1}^2 - \frac{\varpi^2}{m^4}\left(l^2 - \frac{1}{4}\right) = 0, \tag{4.34}$$

onde rotulamos $\nu = \nu_{k,l,n}$ para enfatizar que os valores possíveis deste parâmetro dependem dos números quânticos $\{k, l, n\}$. Deste modo, os quatro valores permitidos do

parâmetro $\nu_{k,l,1}$ que está associado com o estado de menor energia do sistema, são

$$\begin{aligned}
\nu^{(1)}_{k,l,1} &= \frac{\sqrt{2}}{2m^2}\sqrt{m\varpi+\varpi^2+\varpi\sqrt{2m^2\varpi+\varpi^2+4m^2l^2}};\\
\nu^{(2)}_{k,l,1} &= -\frac{\sqrt{2}}{2m^2}\sqrt{m\varpi+\varpi^2+\varpi\sqrt{2m^2\varpi+\varpi^2+4m^2l^2}};\\
\nu^{(3)}_{k,l,1} &= \frac{\sqrt{2}}{2m^2}\sqrt{m\varpi+\varpi^2+\varpi\sqrt{2m^2\varpi+\varpi^2+4m^2l^2}};\\
\nu^{(4)}_{k,l,1} &= -\frac{\sqrt{2}}{2m^2}\sqrt{m\varpi+\varpi^2+\varpi\sqrt{2m^2\varpi+\varpi^2+4m^2l^2}}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Desta forma, ambas as condições estabelecidas na Eq. (4.32) são satisfeitas, e assim, obtemos uma solução polinomial para a função de Heun biconfluente. Com esta informação, a expressão para o nível de menor energia do sistema $n = 1$ é dada por

$$\mathcal{E}_{k,l,1} = \pm\sqrt{m^2+k^2+\sqrt{\frac{g(\kappa_{DE})_{11}\vartheta^2}{2}}(2+\sqrt{l^2+\nu^2_{k,l,1}})}. \tag{4.36}$$

Através das Eqs. (4.35) e (4.36), podemos observar que os efeitos da VSL modificam os níveis de energia relativística do potencial tipo-Coulomb II (BAKKE; BELICH, 2015; GREINER; BROMLEY, 2000). A influência do pano de fundo da VSL na interação do potencial tipo-Coulomb II restringe o parâmetro ν a um conjunto de valores permitidos para determinar uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente. Como exemplo, para o estado de menor energia do sistema, o conjunto dos valores permitidos de ν foi definido em (4.35).

4.7 Efeitos da violação da simetria de Lorentz sobre um campo escalar sujeito ao potencial tipo-Coulomb I

Nesta seção, analisamos a interação de um campo escalar com o potencial tipo-Coulomb I em um pano fundo caracterizado pela VSL estabelecida pelo campo tensorial $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, como visto nas seções anteriores, em um espaço-tempo definido pela métrica (4.2). Como visto no Sec. (2.2), o potencial tipo-Coulomb I, (2.16), pode ser introduzido na EKG através do acoplamento mínimo, $\hat{p}_\mu \to \hat{p}_\mu - qA_\mu(x)$ (GREINER; BROMLEY, 2000), onde $A_\mu = (-A_0, \vec{A})$. Neste caso, a EKG com o acoplamento não-mínimo, em sua forma covariante, é dada da forma:

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_\mu &- qA_\mu(x)][\hat{p}^\mu - qA^\mu(x)]\phi - \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{ij}E^iE^j\phi + \frac{g}{2}(\kappa_{HB})_{ij}B^iB^j\phi\\
&- g(\kappa_{DB})_{ij}E^iB^j\phi - m^2\phi = 0,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde utilizamos a Eq. (4.11).

Consideremos um pano de fundo da VSL determinada por um campo magnético e apenas uma componente não nula do tensor de quebra da simetria de Lorentz: $(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi} =$ const., ou seja, $(\kappa_{DE})_{ij} = (\kappa_{HB})_{jk} = 0$. O campo magnético que constrói o fundo da VSL é

$$\vec{B} = \eta\rho\hat{\varphi}, \tag{4.38}$$

onde $\eta = \mu_0\sigma$ é uma constante. Esse campo magnético é produzido por uma magnetização dada por $\vec{M} = \sigma\rho\hat{z}$. Portanto, o campo magnético (4.38) e a componente do tensor de VSL $(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi} =$ const. fornecem uma contribuição para a EKG (4.37).

A partir de agora, façamos uma discussão a partir de um ponto de vista teórico, onde uma partícula escalar interage com um potencial tipo-Coulomb I em um meio cujos efeitos da VSL podem ser observáveis. Assim, considerando a configuração de calibre $A_\mu = (-A_0, \vec{A} = 0)$ e a Eq. (2.16), a EKG (4.37) torna-se

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &+ 2i\frac{b}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{b^2}{\rho^2}\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{g(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi}\eta^2\rho^2}{2}\phi \\ &- m^2\phi = 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Note que o penúltimo termo da Eq. (4.39) corresponde à contribuição do pano de fundo da VSL determinada pelo campo magnético (4.38) e a componente do tensor de quebra da simetria de Lorentz $(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi} =$ const.. Substituindo a Eq. (3.12), em termos de uma função radial $F(\rho)$, na Eq. (4.39), obtemos

$$\frac{d^2F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2}F + \frac{2\mathcal{E}b}{\rho}F + \frac{1}{2}(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi}\eta^2\rho^2F + \bar{\beta}F = 0, \tag{4.40}$$

onde $\gamma = l^2 - b^2$ e $\bar{\beta}$ é definido na Eq. (4.29).

Para obter soluções de estados ligados, suponhamos que $|l| > |b|$ e que $(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi} = -a$, onde $a > 0$. Observe que este é um cenário particular da VSL. A única suposição feita na componente do tensor de quebra de simetria de Lorentz (κ_{HB}) é que o mesmo deve ser uma constante no sistema de coordenadas determinado pelo elemento de linha (4.2), isto é, em coordenadas cilíndricas. Por outro lado, devemos observar que, se fizermos uma mudança no sistema de coordenadas (por exemplo, para coordenadas cartesianas), essa componente do tensor de quebra da simetria de Lorentz torna-se um termo que depende da posição. Portanto, com $(\kappa_{HB})_{\varphi\varphi} = -a$, podemos chamar $\tau^2 = \frac{1}{2}gb\eta^2$ e reescrever a Eq.

(4.40) da seguinte forma

$$\frac{d^2F}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho}-\frac{\gamma^2}{\rho^2}F+\frac{2\mathcal{E}b}{\rho}F-\tau^2\rho^2F+\bar{\beta}F=0. \tag{4.41}$$

Utilizando a mudança de variável $x=\sqrt{\tau}\rho$ e, posteriormente seguindo os mesmos passos da Eq. (2.22) à Eq. (2.29), obtemos a relação de recorrência dos coeficientes da série de Heun biconfluente

$$c_{j+2}=-\frac{[\bar{\theta}c_{j+1}+(\frac{\bar{\beta}}{\tau}-2-2|\gamma|-2j)c_j]}{(j+2)(j+2+2|\gamma|)}, \tag{4.42}$$

onde $\bar{\theta}=\frac{2\mathcal{E}b}{\sqrt{\tau}}$ e os coeficientes c_1 e c_2 (para $j=0$) em termos de $c_0=1$ são

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{2b\mathcal{E}}{\sqrt{\tau}(1+2|\gamma|)}, \\ c_2 &= -\frac{1}{4(2+|\gamma|)}\left[-\frac{4b^2\mathcal{E}^2}{\tau(1+2|\gamma|)}+\frac{\bar{\beta}}{\tau}-2-2|\gamma|\right]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Devemos construir uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente, portanto, a série é limitada quando impomos as duas condições:

$$\frac{\bar{\beta}}{\tau}-2-2|\gamma|=2n; \qquad c_{n+1}=0 \tag{4.44}$$

com $n=1,2,3,\ldots$. Além disso, através da relação $\frac{\bar{\beta}}{\tau}-2-2|\gamma|=2n$, obtemos a expressão

$$\mathcal{E}^2_{k,l,n}=m^2+k^2+\sqrt{2ag}\eta(1+n+|\bar{\gamma}|). \tag{4.45}$$

Precisamos analisar a segunda condição dada na Eq. (4.44), isto é, $c_{n+1}=0$, onde possamos construir um polinômio de grau $n=1$ para a função de Heun biconfluente. Ao tomarmos $n=1$, temos que $c_{n+1}=c_2=0$, portanto, obtemos a relação:

$$\eta_{k,l,1}=2\sqrt{\frac{2}{ag}}\frac{\mathcal{E}^2_{k,l,1}b^2}{(1+2|\gamma|)} \tag{4.46}$$

o que significa que os valores permitidos do parâmetro η que caracterizam o campo magnético (4.38) são determinados pela relação (4.46) de modo a resultar em um polinômio de primeiro grau para a função de Heun biconfluente. Note que, para outros valores de n, podemos obter expressões diferentes deη. Por esse motivo, rotulamos $\eta=\eta_{k,l,n}$, o que significa que os valores permitidos do parâmetro η são determinados pelos números quânticos $\{k,l,n\}$. Dando continuidade à nossa análise, substituindo a Eq. (4.46) na Eq. (4.45),

resultando em

$$\mathcal{E}_{k,l,1} = \pm\sqrt{\frac{m^2+k^2}{1-\frac{4b^2(2+|\gamma|)}{(1+2|\gamma|)}}}, \tag{4.47}$$

que são as energias relativísticas permetidas do estado de menor energia. Note que, apesar de não ter uma dependência explícita das energias permitidas (4.47) sobre os parâmetros da VSL, os efeitos da VSL modificam a energia do estado fundamental de uma partícula carregada sob os efeitos de um potencial tipo-Coulomb I. A relação explícita dos parâmetros que determinam o pano de fundo da VSL às energias permitidas é dada pela Eq. (4.46), em relação ao estado de menor energia. Para outros níveis de energia, podemos estabelecer outras relações análogas à Eq. (4.46). A origem desses estados ligados relativísticos pode ser vista observando a Eq. (4.41). Nessa equação observamos que o termo associado à VSL desempenha o papel de um potencial tipo-harmônico[6], portanto, produz soluções de estados ligados relativístiscos na presença do potencial tipo-Coulomb I atrativo ou repulsivo (2.16).

4.8 Sumário

Neste capítulo, fizemos uma breve revisão sobre o MP e suas limitações em explicar alguns problemas físicos previstos pelo mesmo. Por isso, na busca por modelos teóricos para solucionar problemas ou justificar discrepâncias entre previsões teóricas e resultados experimentais (ou observacionais), surge a EMP, o qual é caracterizado pela VSL. Essa quebra de simetria emerge através da presença de campos de fundos não-escalares na teoria, ou seja, campos de fundo de natureza vetorial ou tensorial. Esses campos estão presentes na EMP em dois setores: fermiônico e fotônico. Em particular, através do setor de campo de calibre e o opeador $\mathcal{CPT}$, pudemos notar o vínculo entre a VSL com a simetria CPT, que, por sua vez, nos fornece a qualificação do setor fotônico em CPT-ímpar e CPT-par, o que indica a violação e conservação da simetria CPT. Dado isso, fizemos um breve comentário sobre o estudo de um campo escalar em um pano de fundo de VSL proveniente do termo que caracteriza o setor fotônico CPT-par, via acoplamento não-mínimo, proposto por Bakke e Belich (BAKKE; BELICH, 2015, 2016). Então, inspirados neste estudo, apresentamos nossas análises de possíveis cenários de VSL no estudo de um campo escalar interagindo com diferentes potenciais de confinamento e, com isso, definimos, analiticamente, os perfis energéticos relativísticos de cada sistema analisado.

[6] Caso análogo ao que foi visto na Sec. (2.2).

5 Considerações finais

Este trabalho, no que diz respeito a fundamentação teórica e resultados, está dividido em três partes, caracterizando três panos de fundo diferentes: espaço-tempo de Minkowski, espaço-tempo com defeito topológico (torção) e espaço-tempo com VSL. Em todos os casos, discutimos a interação de um campo escalar interagindo com diferentes potenciais de confinamento, como o OKG (BRUCE; MINNING, 1993), potenciais escalares tipo Coulomb e linear, ambos inseridos na EKG via modificação do termo de massa, potencial tipo Coulomb inserido na EKG via acoplamento mínimo (GREINER; BROMLEY, 2000) provindo de uma distribuição de cargas em um não condutor de simetria cilíndrica e o potencial de parede rígida, onde, em todos os casos, foi possível determinar analiticamente soluções de estados ligados para tais sistemas.

No Cap. (2), descrevemos a interação do campo escalar com o OKG (BRUCE; MINNING, 1993) sob os efeitos dos potenciais de confinamento tipo Coulomb I. Também analisamos o OKG interagindo com os potenciais escalares de confinamento linear e tipo Coulomb II, ambos inseridos na EKG via modificação do termo de massa, ou seja, uma partícula de massa dependente da posição; primeiramente analisamos individualmente o potencial escalar linear e depois o potencial escalar linear mais o potencial tipo-Coulomb II. Em todos os casos, obtemos a equação diferencial de Heun biconfluente, onde a mesma tem dois pontos singulares, no caso, a origem e o infinito. Dado que a origem é um ponto singular regular, enquanto o infinito é um ponto singular irregular, podemos utilizar o método de Fröbenius em torno da origem e, na busca por soluções de estados ligados, um efeito interessante foi observado: a dependência da frequência angular do OKG dos números quânticos do sistema $\{l, n\}$, em contraste com os resultados obtidos nas Refs. (BRUCE; MINNING, 1993; RAO; KAGALI, 2008). A ocorrência deste efeito se deve pela presença dos potenciais de confinamento interagindo com o campo escalar sob efeitos do oscilador relativístico. Além disso, percebemos que os autovalores de energia relativística dos sistemas analisados só podem ser definidos individualmente, uma característica de obtenção dos polinômios de Heun biconfluente.

No Cap. (3), analisamos os efeitos da presença de torção do espaço-tempo sobre a interação de um campo escalar sob efeitos de diferentes potenciais de confinamento; com base nas Refs. (PUNTIGAM; SOLENG, 1997; VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005), descrevemos os efeitos quânticos de um campo escalar para dois tipos de espaço-tempo com uma deslocação tipo-espaço: tipo-hélice e tipo espiral.

No caso da deslocação tipo-hélice, na obtenção dos espectros de energia relativística analisados, observamos um efeito explícito do defeito topológico sobre os autovalores da energia relativística, através da redefinição dos autovalores do momento angular l, fornecendo, então, um momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi$, onde χ é o parâmetro associado à torção do espaço-tempo. Logo, inspirados na Ref. (BEZERRA, 1997), pudemos concluir que esta mudança nos autovalores do momento angular dos sistemas analisados é um efeito análogo ao efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989). Além disso, como forma de enriquecimento, aplicação e extensão de nossas análises, através da interação do campo escalar com o campo de calibre, estudamos soluções de estados ligados de um campo escalar na presença de um campo magnético uniforme, nos fornecendo, portanto, a quantização de landau relativística (LANDAU; LIFSHITZ, 1981), como também os efeitos de um fluxo quântico provindo do defeito (MARQUES et al., 2005) caracterizando o efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989). Em particular, em sistemas onde o fluxo quântico atuam, notamos que os níveis de energia relativística definidos são funções periódicas com periodicidade $\frac{2\pi}{q}$. Em alguns casos analisados, a constante que caracteriza o potencial escalar linear μ e a frequência de cíclotron ω_0 (campo magnético uniforme) passaram a ter valores permetidos devido a dependência dos números quânticos do sistema $\{k, l, n\}$, que, por sua vez, dependem também do defeito, já que os autovalores do momento angular são redefinidos pela presença do parâmetro associado à torção do espaço-tempo.

No caso da deslocação tipo espiral, descrevemos a interação de um campo escalar sujeito ao potencial de confinamento de parede rígida, condição de contorno de Dirichlet, onde, através de um caso particular da função de Bessel de primeiro tipo, pudemos definir os níveis de energia relativística do sistema. Percebemos que o efeito da topologia deste espaço-tempo pode ser visualizado pela presença de um raio efetivo redefinido pelo parâmetro associado à torção, $\varrho_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \bar{\chi}^2}$, com $\bar{\chi}$ sendo o parâmetro associado à deslocação tipo espiral. Diferentemente dos sistemas analisados no espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice, os autovalores do momento angular permanecem inalterados, ou seja, não há um análogo do efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989; MARQUES et al., 2005; BEZERRA, 1997).

Vale ressaltar que, em todos os casos acima, tomando os parâmetros associados aos defeitos iguais a zero, recuperamos os níveis de energia relativística no espaço-tempo de Minkowski.

Investigamos também efeitos de rotação sobre um campo escalar imerso no espaço-tempo com deslocação tipo-espaço. Neste caso, nos baseamos na Ref. (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) para descrever um campo escalar confinado a um potencial de parede rígida em dois espaços-tempos de defeitos topológicos: o espaço-tempo com uma deslocação tipo-hélice e o espaço-tempo com uma deslocação tipo espiral. Começamos nossa discussão nesses dois casos através da restrição da coordenada radial que surge do referencial em rotação uniforme e da topologia do espaço-tempo. Então, usamos essa informação sobre a restrição na coordenada radial para impor a condição de contorno que corresponde a um potencial de confimento de parede rígida, condição de contorno de Dirichlet. Mostramos em ambos os casos que um espectro discreto de energia pode ser definido.

No caso do espaço-tempo de deslocação tipo-hélice, vimos que o espectro de energia depende do raio fixo $\rho_0 = \frac{\sqrt{1-w^2\chi^2}}{w}$, onde w é a velocidade angular do referencial em rotação uniforme, e do momento angular efetivo $l_{ef} = l - k\chi$. Assim, devido a esta presença do momento angular efetivo, temos um análogo do efeito AB para estados ligados (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989; MARQUES et al., 2005; BEZERRA, 1997). No caso de $\chi = 0$, recuperamos o espectro energético do sistema no espaço-tempo de Minkowski.

No caso do espaço-tempo com uma deslocação tipo espiral, vimos também que existe uma restrição na coordenada radial que surge do referencial de rotação uniforme e da topologia do espaço-tempo $\bar{\rho}_0 = \frac{\sqrt{1-w^2\bar{\chi}^2}}{w}$ que determina a condição de contorno do potencial de confinamento de parede rígida. Porém, ao contrário do caso analisado no espaço-tempo com deslocação tipo espiral, não há nenhuma dependência dos níveis de energia relativística com o parâmetro associado à deslocação tipo espiral. Além disso, não existe efeito analógo ao efeito AB para estados ligados. Portanto, os níveis de energia relativísticos obtidos no espaço-tempo com uma deslocação tipo espiral em um referencial em rotação uniforme são análogos ao caso do espaço-tempo de Minkowski. Vale ressaltar que, nos dois casos analisados, onde há efeitos de rotação, também observamos um efeito do tipo Sagnac (SAGNAC, 1913; POST, 1967).

No Cap. (4), investigamos a interação de um campo escalar com um meio que caracteriza a VSL, através do acoplamento não mínimo do termo CPT-par do setor de campo de calibre, porém conserva a simetria CPT.Essa cracterística é analisada pela atuação

do operador $\mathcal{CPT}$ sobre o setor do campo de calibre da EMP (BAKKE; BELICHE, 2015). Com esse acoplamento, é possível teorizar possíveis cenários para a dinâmica quântica relativística de um campo escalar mediante a indução de potenciais de confinamento via configurações de campos eletromagnéticos.

Guiados pelas Refs. (BAKKE; BELICH, 2015, 2016), propusemos três cenários possíveis de VSL através de configurações de campos eletromagnéticos induzindo, assim, potenciais de confinamento tipo-Coulomb e tipo-harmônico. No caso do potencial tipo-Coulomb induzido pela VSL, analisamos o OKG, onde vimos que os níveis de energia deste oscilador quântico relativítico são modificados pelo meio da VSL. Extendemos essa análise inserindo na EKG o potencial escalar de confinamento linear via modificação do termo de massa. Em ambas as análises, vimos também que há uma restrição sobre os possíveis valores da frequência angular do OKG para que uma solução polinomial da série de Heun biconfluente possa ser determinada. Essa restrição nos mostra que, para cada nível de energia relativística, há uma relação da frequência angular desse oscilador quântico relativístico com os parâmetros da VSL e os números quânticos do sistema. No segundo caso, o potencial de confinamento tipo-harmônico induzido pela VSL, analisamos os efeitos do potencial de confinamento tipo-Coulomb I e II. Para o campo escalar de massa dependente da posição, a influência do pano de fundo da VSL na interação do potencial tipo-Coulomb II restringe o parâmetro que caracteriza o mesmo a um conjunto de valores permitidos determinados pelos números quânticos $\{k, l, n\}$ que geram uma solução polinomial para a série de Heun biconfluente. Como exemplo, obtivemos os valores permitidos deste parâmetro para o estado de menor energia do sistema, enquanto para a intereção tipo-Coulomb I, com o propósito de satisfazer as condições de construir o polinômio de primeiro grau para a série de Heun biconfluente, vimos que o parâmetro que caracteriza o campo magnético, provindo da VSL, tem um conjunto de valores permitidos determinados também pelos números quânticos do sistema.

Com a pretenção de dar continuidade e extender nossas análises, para cada capítulo que compõe o presente trabalho, apresentamos os seguintes pontos a serem analisados futuramente:

- a interação de um campo escalar com o OKG, tipo-Coulomb e potencial linear pode ser de interesse na teoria de Kaluza-Klein (FURTADO; MORAES; BEZERRA, 1999; CARVALHO et al., 2016), no pano de fundo caracterizado pelo monopólo global (OLIVEIRA; MELLO, 2006), nos espaços-tempos de Gödel, Kerr-Newman e Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FERNANDES; MARQUES; BEZERRA, 2006);

- sobre os defeitos topológicos lineares apresentados no Cap. (3), torção, até o momento, analisamos somente os efeitos de deslocações tipo-espaço, como a deslocação tipo-hélice e a deslocação tipo-espiral. No entanto, é de nosso interesse investigar a dinâmica quântica relativísitica de um campo escalar sujeito aos potenciais centrais no espaço-tempo com uma deslocação tipo-espiral dada na Eq. (3.110), como também em generalizações dos defeitos topológicos apresentados na Ref. (VALANIS; PANOSKALTSIS, 2005) no contexto gravitacional. Na Ref. (PUNTIGAM; SOLENG, 1997) é apresentada a deslocação tipo tempo, a qual ainda, até o momento, não foi objeto de estudo na interação de um campo escalar sujeito a efeitos de diferentes potenciais centrais. Além disso, em todas essas perspectivas apresentadas, através da interação do campo escalar com o campo de calibre, podemos investigar a quantização Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1981) e o efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989);

- no caso de VSL, ainda há muito a ser explorado no acoplamento não-mínimo utilizado nas Refs. (BAKKE; BELICH, 2015, 2016) e no Cap. (4) deste trabalho, por exemplo, configurações de campos eletromagnéticos que forneçam termos de caráter centrífugo na EKG, com uma possibilidade da VSL fornecer uma mudança nos autos valores do momento angular, potencial linear, onde possamos utiliza-los no confinamento de um campo escalar sob efeitos de potenciais centrais. Também há um interesse de analisarmos o acoplamento não-mínimo na EKG do termo CPT-ímpar do setor de calibre da EMP, o qual viola a simetria CPT, conhecido como termo de Carrol-Field-Jackiw (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990; BAKKE; BELICHE, 2015). Além disso, temos também interesse em analisar a interação de um campo escalar massivo em um cenário de VSL caracterizado pela presença de um campo vetorial de fundo constante inserido na EKG dando surgimento ao termo $\lambda(u^{\mu}\partial_{\mu})^2$, onde λ é uma constante e u^{μ} é o campo de fundo que viola a simetria de Lorentz (CRUZ; MELLO; PETROV, 2017). Com este acoplamento, podemos analisar o campo escalar sujeito a vários potenciais centrais e outros efeitos quânticos que fornecem estados ligados, como a quantização de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1981) e o efeito AB (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989);

- em algumas das pespectivas apresentadas acima, estudaremos a possibilidade de aplicar efeitos de rotação (LANDAU; LIFSHITZ, 1980) nas métricas correspondentes aos espaços-tempos que definem o pano de fundo que o campo escalar está imerso;

- e, por fim, inspirados nas Refs. (SONG; WANG; JIA, 2017; HASSANABADI; HOSSEIN-

POUR, 2016; ESHGHI; MEHRABAN, 2017; IKOT et al., 2016; HASSANABADI; SARGOLZAEIPOR; YAZARLOO, 2015; CASTELLANO, 2003), temos interesse em investigar propriedades termodinâmicas dos sistemas analisados no presente trabalho e nos sistemas propostos nas pespectivas acima com intuito de descrever os efeitos topológicos, como a torção no espaço-tempo, e anisotropias no espaço-tempo provenientes da VSL sobre grandezas termodinâmicas extraídas do valor médio do número de ocupação provindo da estatística de Bose-Einstein (SALINAS, 2001).

Referências

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. 10. ed. [S.l.]: NBS, 1972.

AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, v. 115, p. 485–491, 1959.

AJAIB, M. A. Understanding lorentz violation with rashba interaction. *International Journal of Modern Physics A*, v. 27, n. 24, p. 1250139, 2012.

ALHAIDARI, A. D.; BAHLOULI, H.; AL-HASAN, A. Dirac and klein-gordon equations with equal scalar and vector potentials. *Physics Letters A*, v. 349, n. 1, p. 87–97, 2006.

AMBRUS, V. E.; WINSTANLEY, E. Rotating fermions inside a cylindrical boundary. *Physical Reviel D*, v. 93, p. 104014, 2016.

ANACLETO, M. A. et al. Analogue aharonov-bohm effect in neo-newtonian theory. *Physical Review D*, v. 92, p. 125010, 2015.

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 6. ed. [S.l.]: Elsevier, 2005.

ASADA, H.; FUTAMASE, T. Propagation of gravitational waves from slow motion sources in a coulomb-type potential. *Physical Review D*, v. 56, p. R6062, 1997.

AUSTIN, E. J. Perturbation theory and padé approximants for a hydrogen atom in an electric field. *Molecular Physics*, v. 40, p. 893, 1980.

BAHAR, M. K.; YASUK, F. Exact solutions of the mass-dependent klein-gordon equation with the vector quark-antiquark interaction and harmonic oscillator potential. *Advances in High Energy Physics*, v. 2013, p. 6, 2013.

BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. A. Signals for lorentz violation in post-newtonian gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 045001, 2006.

BAKKE, K. *Fases Geométricas, Quantização de Landau e Computação Quântica Holonômica para Partículas Neutras na Presença de Defeitos Topológicos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009.

BAKKE, K. Relativistic bounds states for a neutral particle confined to a parabolic potential induced by noninertial effects. *Physics Letters A*, v. 374, n. 46, p. 4642–4646, 2010.

BAKKE, K. Noninertial effects on the dirac oscillator in a topological defect spacetime. *The European Physical Journal Plus*, v. 127, n. 7, p. 82, 2012.

BAKKE, K. Rotating effects on the dirac oscillator in the cosmic string spacetime. *General Relativity and Gravitation*, v. 45, n. 10, p. 1847–1859, 2013.

BAKKE, K. Bound states for a coulomb-type potential induced by the interaction between a moving electric quadrupole moment and a magnetic field. *Annals of Physics*, v. 341, n. Supplement C, p. 86–93, 2014.

BAKKE, K. Torsion and noninertial effects on a nonrelativistic dirac particle. *Annals of Physics*, v. 346, n. Supplement C, p. 51–58, 2014.

BAKKE, K.; BELICH, H. Abelian geometric phase for a dirac neutral particle in a lorentz symmetry violation environment. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 39, n. 8, p. 085001, 2012.

BAKKE, K.; BELICH, H. Quantum holonomies based on the lorentz-violating tensor background. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 40, n. 6, p. 065002, 2013.

BAKKE, K.; BELICH, H. On a relativistic scalar particle subject to a coulomb-type potential given by lorentz symmetry breaking effects. *Annals of Physics*, v. 360, p. 596–604, 2015.

BAKKE, K.; BELICH, H. On the harmonic-type and linear-type confinement of a relativistic scalar particle yielded by lorentz symmetry breaking effects. *Annals of Physics*, v. 373, p. 115–122, 2016.

BAKKE, K.; BELICHE, H. *Spontaneous Lorentz Symmetry Violation and Low Energy Scenarios*. 1. ed. Saarbrücken: [s.n.], 2015.

BAKKE, K.; FURTADO, C. Relativistic landau-aharonov-casher quantization in topological defect space-time. *International Journal of Modern Physics D*, v. 19, n. 01, p. 85–96, 2010.

BAKKE, K.; FURTADO, C. On the confinement of a dirac particle to a two-dimensional ring. *Physics Letters A*, v. 376, n. 15, p. 1269–1273, 2012.

BAKKE, K.; FURTADO, C. On the interaction of the dirac oscillator with the aharonovcasher system in topological defect backgrounds. *Annals of Physics*, v. 336, n. Supplement C, p. 489–504, 2013.

BAKKE, K.; FURTADO, C. On the kleingordon oscillator subject to a coulomb-type potential. *Annals of Physics*, v. 355, n. Supplement C, p. 48–54, 2015.

BALATSKY, A. V.; VOLOVIK, G. E.; KONYSHEV, A. V. On the chiral anomaly in superfluid 3he-a. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 90, p. 2038–2056, 1986.

BALLENTINE, L. E. *Quantum mechanics - a modern development*. 1. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1998.

BARBOZA, P. M. T.; BAKKE, K. An angular frequency dependence on the aharonovcasher geometric phase. *Annals of Physics*, v. 361, n. Supplement C, p. 259–265, 2015.

BARON, J. et al. Order of magnitude smaller limit on the electric dipole moment of the electron. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 343, n. 6168, p. 269–272, 2014.

BARRIOLA, M.; VILENKIN, A. Gravitational field of a global monopole. *Physical Review Letters*, v. 63, p. 341, 1989.

BELICH, H. et al. Magnetic moment generation from non-minimal couplings in a scenario with lorentz-symmetry violation. *The European Physical Journal C*, v. 62, n. 2, p. 425–432, 2009.

BELICH, H. et al. Lorentz-violating corrections on the hydrogen spectrum induced by a nonminimal coupling. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 065009, 2006.

BELICH, H. et al. Non-minimal coupling to a lorentz-violating background and topological implications. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, v. 41, n. 3, p. 421–426, 2005.

BELICH, H. et al. Investigation of the K_F-type lorentz-symmetry breaking gauge models with vortexlike configurations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 125037, 2012.

BELICH, H. et al. Aharonov-bohm-casher problem with a nonminimal lorentz-violating coupling. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 83, 2011.

BERESTETSKII E. M. LIFSHITZ, L. P. P. V. B. *Quantum Electrodynamics*. 2. ed. [S.l.]: Pergamon Press, 1982. (Course of theoretical physics, v. 4).

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; LUIS, A. Chirality quantum phase transition in the dirac oscillator. *Physical Review A*, v. 77, p. 063815, 2008.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; LUIS, A. Nonrelativistic limit in the (2+1) dirac oscillator: A ramsey-interferometry effect. *Physical Review A*, v. 77, p. 033832, 2008.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; SOLANO, E. . Exact mapping of the (2+1) dirac oscillator onto the jaynes-cummings model: Ion-trap experimental proposal. *Physical Review A*, v. 76, p. 041801(R), 2007.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; SOLANO, E. Mesoscopic superposition states in relativistic landau levels. *Physical Review Letters*, v. 99, p. 123602, 2007.

BERNREUTHER, W.; SUZUKI, M. The electric dipole moment of the electron. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 63, p. 313–340, 1991.

BERRY, M. V. et al. Wavefront dislocations in the aharonov-bohm effect and its water wave analogue. *European Journal of Physics*, v. 1, n. 3, p. 154, 1980.

BEZERRA, V. B. Global effects due to a chiral cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 38, p. 2553, 1997.

BRUCE, S.; MINNING, P. The klein-gordon oscillator. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, v. 106, n. 5, p. 711–713, 1993.

BUENO, M. J.; FURTADO, C.; CARVALHO de A. M. M. Landau levels in graphene layers with topological defects. *The European Physical Journal B*, v. 85, n. 2, p. 53, 2012.

CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 41, p. 1231–1240, 1990.

CARVALHO, J. et al. Klein–gordon oscillator in kaluza–klein theory. *The European Physical Journal C*, v. 76, n. 7, p. 365, 2016.

CASANA, R.; FARIAS, C. F.; FERREIRA, M. M. Topological self-dual configurations in a lorentz-violating gauged $o(3)$ sigma model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 92, p. 125024, 2015.

CASANA, R. et al. Radiative generation of the cpt-even gauge term of the sme from a dimension-five nonminimal coupling term. *Physics Letters B*, v. 726, n. 4, p. 815–819, 2013.

CASANA, R. et al. Generation of geometrical phases and persistent spin currents in 1-dimensional rings by lorentz-violating terms. *Physics Letters B*, v. 746, p. 171 – 177, 2015.

CASANA, R. et al. Maxwell–chern–simons vortices in a cpt-odd lorentz-violating higgs electrodynamics. *The European Physical Journal C*, v. 74, n. 9, 2014.

CASANA, R. et al. New *cpt*-even and lorentz-violating nonminimal coupling in the dirac equation. *Phys. Rev. D*, v. 87, p. 047701, 2013.

CASANA, R.; FERREIRA, M. M.; SANTOS, F. E. P. dos. Gupta-bleuler quantization of the anisotropic parity-even and *cpt*-even electrodynamics of a standard model extension. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 105025, 2014.

CASTELLANO, G. Thermodynamic potentials for simple magnetic systems. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 260, n. 1, p. 146–150, 2003.

CASTRO, A. S. de. Kleingordon particles in mixed vectorscalar inversely linear potentials. *Physics Letters A*, v. 338, n. 2, p. 81–89, 2005.

CASTRO, E.; MARTÍN, P. Eigenvalues of the schrödinger equation with coulomb potentials plus linear and harmonic radial terms. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 33, n. 30, p. 5321, 2000.

CERDA, E.; LUND, F. Interaction of surface waves with vorticity in shallow water. *Physical Review Letters*, v. 70, p. 3896–3899, 1993.

CHARGUI, Y.; DHAHBI, A.; TRABELSI, A. Exact analytical treatment of the asymmetrical spinless salpeter equation with a coulomb-type potential. *Physica Scripta*, v. 90, n. 1, p. 015201, 2015.

CHENG, H.-Y. The strong cp problem revisited. *Physics Reports*, v. 158, n. 1, p. 1–89, 1988.

CHENG, J.-Y. $\mathcal{PT}$-symmetric klein-gordon oscillator. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 50, n. 1, p. 228–232, 2011.

CHRICHFIELD, C. L. Scalar potentials in the dirac equation. *Journal of Mathematical Physics*, v. 17, p. 261, 1976.

COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 55, p. 6760–6774, 1997.

COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 58, p. 116002, 1998.

COSTE, C.; LUND, F.; UMEKI, M. Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the aharonov-bohm effect. i. shallow water. *Physical Review E*, v. 60, p. 4908–4916, 1999.

CRATER, J.-H. Y. H. W.; WONG, C.-Y. Singularity structures in coulomb-type potentials in two-body dirac equations of constraint dynamics. *Physical Review D*, v. 79, p. 034011, 2009.

CRUZ, M. B.; MELLO, E. R. B. de; PETROV, A. Y. Casimir effects in lorentz-violating scalar field theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 96, p. 045019, 2017.

CUNHA, M. S. et al. Relativistic landau levels in the rotating cosmic string spacetime. *The European Physical Journal C*, v. 76, n. 9, p. 512, 2016.

DAVIES, P. C. W.; DAVIES, T. M.; LINEWEAVER, C. H. Cosmology: Black holes constrain varying constants. *Nature*, v. 418, p. 602, 2002.

DESKO, R. D.; BORD, D. J. The quantum bouncer revisited. *American Journal of Physics*, v. 51, p. 82, 1983.

DOLAN, S. R.; OLIVEIRA, E. S.; CRISPINO, L. C. B. Aharonovbohm effect in a draining bathtub vortex. *Physics Letters B*, v. 701, n. 4, p. 485–489, 2011.

DOMÍNGUEZ-ADAME, F. Bound states of the klein-gordon equation with vector and scalar hulthén-type potentials. *Physics Letters A*, v. 136, n. 4, p. 175–177, 1989.

DOMÍNGUEZ-ADAME, F.; GONZÁLEZ, M. A. Solvable linear potentials in the dirac equation. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 13, n. 3, p. 193, 1990.

DUTRA, A. de S.; JIA, C.-S. Classes of exact kleingordon equations with spatially dependent masses: Regularizing the one-dimensional inversely linear potential. *Physics Letters A*, v. 352, n. 6, p. 484–487, 2006.

DUTRA, A. S. Conditionally exactly soluble class of quantum potentials. *Physical Review A*, v. 47, p. R2435, 1993.

ENGFER, R.; WALTER, H. K. Muon decay experiments. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 36, p. 327, 1986.

ERICSSON, M.; SJÖQVIST, E. Towards a quantum hall effect for atoms using electric fields. *Physical Review A*, v. 65, p. 013607, 2001.

ESHGHI, M.; MEHRABAN, H. Study of a 2d charged particle confined by a magnetic and ab flux fields under the radial scalar power potential. *The European Physical Journal Plus*, v. 132, n. 3, p. 121, 2017.

FENG, J. L. et al. Protophobic fifth-force interpretation of the observed anomaly in ^{8}Be nuclear transitions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 117, p. 071803, 2016.

FERNANDES, S. G.; MARQUES, G. de A.; BEZERRA, V. B. Scalar solutions in spacetimes containing a cosmic string. *Classical and Quantum Gravity*, v. 23, n. 23, p. 7063, 2006.

FERREIRA, G. F. L. Argumentando sobre a realidade dos potenciais. *Revista Brasileira de Ensino de FÂsica*, v. 26, p. 27–31, 2004.

FERREIRA, P. L. Two-body dirac equation with a scalar linear potential. *Physical Review D*, v. 38, p. 2648, 1988.

FIGUEIREDO MEDEIROS, E. R.; BEZERRA DE MELLO, E. R. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *The European Physical Journal C*, v. 72, n. 6, p. 2051, 2012.

FILGUEIRAS, C. et al. Landau quantization, aharonovbohm effect and two-dimensional pseudoharmonic quantum dot around a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 380, n. 45, p. 3847–3853, 2016.

FILGUEIRAS, C.; SILVA, E. O. 2deg on a cylindrical shell with a screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 379, n. 36, p. 2110–2115, 2015.

FONSECA, I. C.; BAKKE, K. Quantum aspects of a moving magnetic quadrupole moment interacting with an electric field. *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, p. 062107, 2014.

FURTADO, C.; BEZERRA, V. B.; MORAES, F. Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation. *Physics Letters A*, v. 289, n. 3, p. 160–166, 2001.

FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, v. 195, n. 1, p. 90–94, 1994.

FURTADO, C.; MORAES, F.; BEZERRA, V. Global effects due to cosmic defects in kaluza-klein theory. v. 59, p. 107504, 1999.

FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. R.; RIBEIRO, L. R. Landau quantization of neutral particles in an external field. *Physics Letters A*, v. 358, n. 5, p. 336–338, 2006.

GAZZOLA, G. et al. Qed with minimal and nonminimal couplings: on the quantum generation of lorentz-violating terms in the pure photon sector. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 39, n. 3, p. 035002, 2012.

GESZTESY, F.; THALLER, B. Born expansions for coulomb-type interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 14, n. 3, p. 639, 1981.

GIBBS, R. L. The quantum bouncer. *American Journal of Physics*, v. 43, p. 25, 1975.

GLASSER, M. L.; SHAWAGFEH, N. Dirac equation for a linear potential. *Journal of Mathematical Physics*, v. 25, p. 2533, 1984.

GREINER, W.; BROMLEY, D. A. *Relativistic quantum mechanics: wave equations*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2000.

GRIBI, P.; SIGMUND, E. Exact solutions for a quasi-one-dimensional coulomb-type potential. *Physical Review B*, v. 44, p. 3537, 1991.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Benjamin Cummings, 2004.

GRUSHIN, A. G. Consequences of a condensed matter realization of lorentz-violating qed in weyl semi-metals. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 045001, 2012.

GUNION, J. F.; LI, L. F. Relativistic treatment of the quark-confinement potential. *Physical Review D*, v. 12, p. 3583, 1975.

GUSEINOV, I. I. Unified treatment of multicenter integrals of integer and noninteger u yukawa-type screened coulomb type potentials and their derivatives over slater orbitals. *The Journal of Chemical Physics*, v. 120, p. 9454, 2004.

GUSEINOV, I. I.; MAMEDOV, B. A. Evaluation of multicenter one-electron integrals of noninteger u screened coulomb-type potentials and their derivatives over noninteger n slater orbitals. *The Journal of Chemical Physics*, v. 121, p. 1649, 2004.

HALDANE, F. D. M. Model for a quantum hall effect without landau levels: Condensed-matter realization of the "parity anomaly". *Physical Review Letters*, v. 61, p. 2015, 1988.

HAMMOND, R. T. Torsion gravity. *Reports on Progress in Physics*, v. 65, n. 5, p. 599, 2002.

HASSANABADI, H.; HOSSEINPOUR, M. Thermodynamic properties of neutral particle in the presence of topological defects in magnetic cosmic string background. *The European Physical Journal C*, v. 76, n. 10, p. 553, 2016.

HASSANABADI, H.; SARGOLZAEIPOR, S.; YAZARLOO, B. H. Thermodynamic properties of the three-dimensional dirac oscillator with aharonov–bohm field and magnetic monopole potential. *Few-Body Systems*, v. 56, n. 2, p. 115–124, 2015.

HEHL, F. W.; NI, W.-T. Inertial effects of a dirac particle. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 42, p. 2045–2048, 1990.

HISCOCK, W. A. Exact gravitational field of a string. *Physical Review D*, v. 31, p. 3288, 1985.

HUDSON, J. J. et al. Improved measurement of the shape of the electron. *Nature*, v. 473, p. 493, 2011.

IKHDAIR, S. M.; FALAYE, B. J.; HAMZAVI, M. Nonrelativistic molecular models under external magnetic and ab flux fields. *Annals of Physics*, v. 353, n. Supplement C, p. 282–298, 2015.

IKHDAIR, S. M.; HAMZAVI, M. Effects of external fields on a two-dimensional kleingordon particle under pseudo-harmonic oscillator interaction. *Physica B*, v. 407, p. 419, 2012.

IKOT, A. N. et al. Klein-gordon equation particles in exponential-type molecule potentials and their thermodynamic properties in d dimensions. *The European Physical Journal Plus*, v. 131, n. 12, p. 419, 2016.

JACKIW, R. Fractional charge and zero modes for planar systems in a magnetic field. *Physical Review D*, v. 29, p. 2375, 1984.

JACKIW, R. et al. Induced current and aharonov-bohm effect in graphene. *Physical Review B*, v. 80, p. 033413, 2009.

KARA, D. M. et al. Measurement of the electron's electric dipole moment using ybf molecules: methods and data analysis. *New Journal of Physics*, v. 14, n. 10, p. 103051, 2012.

KATANAEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, v. 216, n. 1, p. 1–28, 1992.

KHALILOV, V. R. Relativistic aharonov-bohm effect in the presence of planar coulomb potentials. *Physical Review A*, v. 71, p. 012105, 2005.

KHALILOV, V. R. Effect of vacuum polarization of charged massive fermions in an aharonov-bohm field. *The European Physical Journal C*, v. 74, n. 9, p. 3061, 2014.

KILLINGBECK, J. Quantum-mechanical perturbation theory. *Reports on Progress in Physics*, v. 40, n. 9, p. 963, 1977.

KILLINGBECK, J. Perturbation theory without wavefunctions. *Physics Letters A*, v. 65, n. 2, p. 87–88, 1978.

KIM, J. E. Light pseudoscalars, particle physics and cosmology. *Physics Reports*, v. 150, n. 1, p. 1–177, 1987.

KIM, J. E.; CAROSI, G. Axions e o forte *cp* problem. *Rev. Mod. Phys.*, v. 82, p. 557–601, 2010.

KITTLER, M. et al. Regular dislocation networks in silicon as a tool for nanostructure devices used in optics, biology, and electronics. *Small*, v. 3, n. 6, p. 964–973, 2007.

KLEINERT, H. *Gauge fields in condensed matter*. 1. ed. Singapore: World Scientific, 1989.

KLÉMAN, M. *The general theory of disclinations*. North-Holland, Amsterdam: [s.n.], 1980.

KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 69, p. 105009, May 2004.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Cosmological constraints on lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 87, p. 251304, 2001.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Signals for lorentz violation in electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 66, p. 056005, 2002.

KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Sensitive polarimetric search for relativity violations in gamma-ray bursts. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 97, p. 140401, 2006.

KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 39, p. 683–685, 1989.

KOSTELECKÝ, V. A.; TASSON, J. D. Prospects for large relativity violations in matter-gravity couplings. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 102, p. 010402, 2009.

KRATZER, A. Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe. *Zeitschrift für Physik*, v. 3, n. 5, p. 289–307, 1920.

KRÖNER, E. *Continuum theory of defects*. NorthHolland, Amsterdam: [s.n.], 1981.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The classical theory of fields*. 4. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 1980. ISBN 0750627689,9780750627689.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. 3. ed. [S.l.]: Pergamon Pr, 1981. (Course on Theoretical Physics, Vol 3, v. 3).

LEONHARDT, U.; ÖHBERG, P. Optical analog of the iordanskii force in a bose-einstein condensate. *Physical Review A*, v. 67, p. 053616, 2003.

LIANG, M.-L.; YANG, R.-L. Three-dimensional kleingordon oscillator in a background magnetic field in noncommutative phase space. *International Journal of Modern Physics A*, v. 27, n. 10, p. 1250047, 2012.

LINET, B. The static metrics with cylindrical symmetry describing a model of cosmic strings. *General Relativity and Gravitation*, v. 17, n. 11, p. 1109–1115, 1985.

LIPAS, P. O. Relativistic quantal oscillator. *American Journal of Physics*, v. 38, p. 85, 1970.

MA, K. et al. Hall conductivity in the cosmic defect and dislocation spacetime. *Chinese Physics Letters*, v. 33, n. 10, p. 100401, 2016.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 1. ed. Ponta Grossa, Paraná: Toda Palavra, 2012.

MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum Field Theory*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2010.

MARQUES, G. D. A. et al. Quantum effects due to a magnetic flux associated to a topological defect. *International Journal of Modern Physics A*, v. 20, n. 26, p. 6051–6064, 2005.

MARQUES, G. de A.; BEZERRA, V. B. Non-relativistic quantum systems on topological defects spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, n. 5, p. 985, 2002.

MARQUES, G. de A. et al. Landau levels in the presence of topological defects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, n. 30, p. 5945, 2001.

MILSHTEIN, S. Application of dislocation-induced electric potentials in si and ge. *J. Phys. Colloques*, v. 40, p. C6–207–C6–211, 1979.

MIRZA, B.; MOHADESI, M. The klein-gordon and dirac oscillators in a non-commutative space. *Communications in Theoretical Physics*, v. 42, n. 5, p. 664, 2004.

MIRZA, B.; NARIMANI, R.; ZARE, S. Relativistic oscillators in a noncommutative space and in a magnetic field. *Communications in Theoretical Physics*, v. 55, n. 3, p. 405, 2011.

MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 22, p. L817, 1989.

MOTAVALLI, H.; AKBARIEH, A. R. Klein gordon equation for the coulomb potential in noncommutative space. *Modern Physics Letters A*, v. 25, n. 29, p. 25232528, 2010.

MYRHEIM, J.; HALVORSEN, E.; VERĆIN, A. Two anyons with coulomb interaction in a magnetic field. *Physics Letters B*, v. 278, n. 1, p. 171–174, 1992.

NABARRO, F. R. N. *Theory of Crystal Dislocations*. Oxford: Oxford University Press, 1967.

NARLIKAR, J. V. *An Introduction to Relativity*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521514975,9780521514972.

NESHEV, D.; NEPOMNYASHCHY, A.; KIVSHAR, Y. S. Nonlinear aharonov-bohm scattering by optical vortices. *Physical Review Letters*, v. 87, p. 043901, 2001.

NOBLE, J. H.; JENTSCHURA, U. D. Dirac equations with confining potentials. *International Journal of Modern Physics A*, v. 30, n. 01, p. 1550002, 2015.

OLIVEIRA, A. L. C. de; MELLO, E. R. B. de. Exact solutions of the kleingordon equation in the presence of a dyon, magnetic flux and scalar potential in the spacetime of gravitational defects. *Classical and Quantum Gravity*, v. 23, n. 17, p. 5249, 2006.

PESHKIN, M.; TONOMURA, A. *The Aharonov-Bohm Effect, in: Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

PIGNOL, G. Probing dark energy models with neutrons. *International Journal of Modern Physics A*, v. 30, n. 24, p. 1530048, 2015.

PLANTE, G.; ANTIPPA, A. F. Analytic solution of the schrödinger equation for the coulomb-plus-linear potential. i. the wave functions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 46, p. 062108, 2005.

POHL, R. et al. Laser spectroscopy of muonic deuterium. *Science*, v. 353, n. 6300, p. 669–673, 2016.

POSPELOV, M.; RITZ, A. Electric dipole moments as probes of new physics. *Annals of Physics*, v. 318, n. 1, p. 119–169, 2005.

POST, E. J. Sagnac effect. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 39, p. 475–493, 1967.

PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 5, p. 1129, 1997.

QIANG, W.-C.; ZHOU, R.-S.; GAO, Y. Any l-state solutions of the kleingordon equation with the generalized hulthén potential. *Physics Letters A*, v. 371, n. 3, p. 201–204, 2007.

RABI, I. I. Das freie elektron im homogenen magnetfeld nach der diracschen theorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 49, n. 7, p. 507–511, 1928.

RAN, Y. et al. On the coulomb-type potential of the one-dimensional schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 33, n. 50, p. 9265, 2000.

RAN, Y.; ZHANG, Y.; VISHWANATH, A. One-dimensional topologically protected modes in topological insulators with lattice dislocations. *Nature Physics*, v. 5, p. 298, 2009.

RAO, N. A.; KAGALI, B. A. Energy profile of the one-dimensional kleingordon oscillator. *Physica Scripta*, v. 77, n. 1, p. 015003, 2008.

REGAN, B. C. et al. New limit on the electron electric dipole moment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 071805, 2002.

REYES, J. A.; CASTILLO-MUSSOT, M. del. 1d schrödinger equations with coulomb-type potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 10, p. 2017, 1999.

RIBEIRO, L. R.; FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. R. Landau levels analog to electric dipole. *Physics Letters A*, v. 348, n. 3, p. 135–140, 2006.

RIBEIRO, L. R.; FURTADO, C.; PASSOS, E. An analogy of the quantum hall conductivity in a lorentz-symmetry violation setup. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, v. 39, n. 10, p. 105004, 2012.

RIBEIRO, L. R. et al. Geometric phases modified by a lorentz-symmetry violation background. *International Journal of Modern Physics A*, v. 30, n. 14, p. 1550072, 2015.

ROBERTS, B. M. et al. Interações violadoras de paridade de campos cósmicos com átomos, moléculas e núcleos: conceitos e cálculos para pesquisas de laboratório e limites de extração. *Phys. Rev. D*, v. 90, p. 096005, 2014.

RONVEAUX, A. *Heuns Differential Equations*. 1. ed. Oxford: [s.n.], 1995.

ROZMEJ, P.; ARVIEU, R. The dirac oscillator. a relativistic version of the jaynes-cummings model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 28, p. 5367, 1999.

SAGNAC, G. L'ether lumineux demontre par l'effet du vent relatif d'ether dans un interferometre en rotation uniforme. *C. R. Acad. Sci.*, v. 157, p. 708–710, 1913.

SALINAS, S. *Introduction to statistical physics*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2001.

SÁNCHES, E. *Cálculo Tensorial*. 2. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2011.

SAXENA, R. P.; VARMA, V. S. Polynomial perturbation of a hydrogen atom. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 15, n. 4, p. L149, 1982.

SCARPELLI, A. P. B. et al. Remarks on the causality, unitarity and supersymmetric extension of the lorentz and cpt-violating maxwell-chern-simons model. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, v. 127, p. 105–109, 2004.

SCHAKEL, A. M. J. Relativistic quantum hall effect. *Physical Review D*, v. 43, p. 1428, 1991.

SETARE, M. R.; KARIMI, E. Algebraic approach to the kratzer potential. *Physica Scripta*, v. 75, n. 1, p. 90, 2007.

SOFF, G. et al. Solution of the dirac equation for scalar potentials and its implications in atomic physics. *Zeitschrift für Naturforschung A*, v. 28, n. 9, p. 1389–1396, 1973.

SONG, X.-Q.; WANG, C.-W.; JIA, C.-S. Thermodynamic properties for the sodium dimer. *Chemical Physics Letters*, v. 673, p. 50–55, 2017. ISSN 0009-2614.

SONGAILA, A.; COWIE, L. L. Astronomy: Fine-structure variable? *Nature*, v. 398, p. 667, 1999.

SONGAILA, A.; COWIE, L. L. Astrophysics: The inconstant constant? *Nature*, v. 428, p. 132, 2004.

SOUZA, M. A. M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Latin-American Journal of Physics Education*, v. 6, n. 1, p. 47–54, 2012.

STADNIK, Y. V.; FLAMBAUM, V. V. Axion-induced effects in atoms, molecules, and nuclei: Parity nonconservation, anapole moments, electric dipole moments, and spin-gravity and spin-axion momentum couplings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 89, p. 043522, 2014.

STONE, M. Iordanskii force and the gravitational aharonov-bohm effect for a moving vortex. *Physical Review B*, v. 61, p. 11780–11786, 2000.

STRANGE, P.; RYDER, L. H. The dirac oscillator in a rotating frame of reference. *Physics Letters A*, v. 380, n. 42, p. 3465–3468, 2016.

TEZUKA, H. Analytical solutions of the dirac equation with a scalar linear potential. *AIP Advances*, v. 3, p. 082135, 2013.

VALANIS, K. C.; PANOSKALTSIS, V. P. Material metric, connectivity and dislocations in continua. *Acta Mechanica*, v. 175, n. 1, p. 77–103, 2005.

VERĆIN, A. Two anyons in a static uniform magnetic field. exact solution. *Physics Letters B*, v. 260, n. 1, p. 120–124, 1991.

VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls. *Physics Letters B*, v. 133, n. 3, p. 177–179, 1983.

VILENKIN, A. Cosmic strings and domain walls. *Physics Reports*, v. 121, n. 5, p. 263–315, 1985.

VIVANCO, F. et al. Surface wave scattering by a vertical vortex and the symmetry of the aharonov-bohm wave function. *Physical Review Letters*, v. 83, p. 1966–1969, 1999.

VOLTERRA, V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, v. 24, p. 401–517, 1907.

VRSCAY, E. R. Algebraic methods, bender-wu formulas, and continued fractions at large order for charmonium. *Physical Review A*, v. 31, p. 2054, 1985.

WANG, J. et al. Deformations of the spin currents by topological screw dislocation and cosmic dispiration. *Annals of Physics*, v. 362, n. Supplement C, p. 327–335, 2015.

WEINBERG, S. *Cosmology*. Oup. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2008. ISBN 9780198526827,0198526822.

WEN-CHAO, Q. Bound states of the klein-gordon and dirac equations for potential $v(r) = ar^{-2} - br^{-1}$. *Chinese Physics*, v. 12, n. 10, p. 1054, 2003.

XIAO, Y.; LONG, Z.; CAI, S. Klein-gordon oscillator in noncommutative phase space under a uniform magnetic field. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 50, n. 10, p. 3105, 2011.

XU, Y.; HE, S.; JIA, C.-S. Approximate analytical solutions of the klein-gordon equation with the pöschlteller potential including the centrifugal term. *Physica Scripta*, v. 81, n. 4, p. 045001, 2010.

YASUK, F.; DURMUS, A.; BOZTOSUN, I. Exact analytical solution to the relativistic klein-gordon equation with noncentral equal scalar and vector potentials. *Journal of Mathematical Physics*, v. 47, p. 082302, 2006.

APÊNDICE A – Equação de Heun biconfluente

A forma geral da equação diferencial de Heun, na sua forma canônica, é a seguinte (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; RONVEAUX, 1995)

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \left[\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{(x-1)} + \frac{\varepsilon}{(x-a)}\right]\frac{dH}{dx} + \left[\frac{\alpha\sigma x - q}{x(x-1)(x-a)}\right]H = 0, \tag{A.1}$$

onde ε é um parâmetro definido em termos de outros parâmetros, $\varepsilon = \alpha + \sigma + 1 - \lambda - \mu$.

Os pontos singulares regulares e (ou) irregulares podem ser calculados com a seguinte definição: seja a equação diferencial de segunda ordem linear homogênea com coeficientes variáveis

$$b_0(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + b_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + b_2(x)y(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{dx^2} + \mathcal{P}_1(x)\frac{dy}{dx} + \mathcal{P}_2(x)y = 0, \tag{A.2}$$

com $\mathcal{P}_1(x) = \frac{b_1(x)}{b_0(x)}$ e $\mathcal{P}_2(x) = \frac{b_2(x)}{b_0(x)}$ sendo funções que, se são ambas analíticas em um ponto x_0, este sendo um ponto ordinário. Se pelo menos uma das funções $\mathcal{P}_1(x)$ e $\mathcal{P}_2(x)$ não é analítica em x_0, este ponto é considerado um ponto singular (ARFKEN; WEBER, 2005; MACHADO, 2012). Os pontos singulares podem ser de dois tipos, singular regular e singular irregular, e são caracterizados pelas funções

$$\mathcal{Q}_1(x) = (x - x_0)\mathcal{P}_1(x); \qquad \mathcal{Q}_2(x) = (x - x_0)\mathcal{P}_2(x), \tag{A.3}$$

que se forem ambas analíticas em x_0, caracterizam um ponto singular; se pelo menos uma não for analítica em x_0, então é um ponto singular irregular (MACHADO, 2012).

No caso de $x_0 \to \infty$, estabelecemos $x = \frac{1}{z}$ na Eq. (A.2), a qual é reescrita da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \bar{\mathcal{P}}_1(z)\frac{dy}{dx} + \bar{\mathcal{P}}_2(x)y = 0, \tag{A.4}$$

ou seja, temos novos coeficientes variáveis, $\bar{\mathcal{P}}_1(z)$ e $\bar{\mathcal{P}}_2(z)$, para a análise de $x_0 \to \infty (z \to 0)$

(ARFKEN; WEBER, 2005):

$$\bar{\mathcal{P}}_1(z) = \frac{2z - \mathcal{P}_1(z^{-1})}{z^2}; \qquad \bar{\mathcal{P}}_2(z) = \frac{\mathcal{P}_2(z^{-1})}{z^4}. \tag{A.5}$$

Se para $x_0 \to \infty (z \to 0)$ as equações acima permanecerem finitas, x_0 é um ponto ordinário. Se elas divergirem, mas não mais rapidamente que $1/z$ e $1/z^2$, respectivamente, x_0 trata-se de um ponto singular regular; caso contrário, ele é um ponto singular irregular (ARFKEN; WEBER, 2005).

Dado isso, podemos definir os pontos regulares e (ou) irregulares da Eq. (A.1), onde seus coeficientes são

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{(x-1)} + \frac{\varepsilon}{(x-a)}; \quad \mathcal{P}_2 = \frac{\alpha\sigma x - q}{x(x-1)(x-a)}. \tag{A.6}$$

Temos quatro pontos singulares: $x = 0$, $x = 1$, $x = a$ e $x \to \infty$. Devemos, agora, analisar se são regulares e (ou) irregulares. Para isso, utilizamos das Eqs. (A.3) e (A.5), onde obtemos:

- Para $x_0 = 0$:

$$\mathcal{Q}_1 = x\mathcal{P}_1 = \lambda + x\left[\frac{\mu}{(x-1)} + \frac{\varepsilon}{(x-a)}\right]; \quad \mathcal{Q}_2 = x^2\mathcal{P}_2 = \frac{x[\alpha\sigma x - q]}{(x-1)(x-a)}, \tag{A.7}$$

de modo que estas funções são analíticas em $x_0 = 0$. Portanto, o ponto $x_0 = 0$ é singular regular.

- Para $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= (x-1)\mathcal{P}_1 = \mu + (x-1)\left[\frac{\lambda}{x} + \frac{\varepsilon}{(x-a)}\right]; \\ \mathcal{Q}_2 &= (x-1)^2\mathcal{P}_2 = (x-1)\left[\frac{\alpha\sigma x - q}{x(x-a)}\right], \end{aligned} \tag{A.8}$$

ou seja, as funções acima são analíticas em $x_0 = 1$, logo, o mesmo é um ponto singular regular.

- Para $x_0 = a$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= (x-a)\mathcal{P}_1 = \varepsilon + (x-a)\left[\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{(x-1)}\right]; \\ \mathcal{Q}_2 &= (x-a)^2\mathcal{P}_2 = (x-a)\left[\frac{\alpha\sigma x - q}{x(x-1)}\right]; \end{aligned} \tag{A.9}$$

onde é notável que $x_0 = a$ trata-se de um ponto singular regular, já que as funções acima são analíticas neste ponto.

•Para $x_0 \to \infty$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_1(z) &= \frac{(2-\lambda)}{z} - \frac{\mu}{z(1-z)} - \frac{\varepsilon}{z(1-az)}; \\ \bar{\mathcal{P}}_2(z) &= \frac{\alpha\sigma - qz}{z^2(1-z)(1-az)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{(1-z)} + \frac{D}{1-az} \end{aligned} \tag{A.10}$$

com $A = (1+a)\alpha\sigma - q, B = \alpha\sigma, C = \alpha\sigma\frac{1+2a}{(1-a)} - \frac{q}{(1-a)}, D = (1-a)a\alpha\sigma - qa + \frac{q-\alpha\sigma(1+2a)}{(1-a)}$. Observando as equações acima, Eq. (A.10), percebemos que as mesmas divergem com $1/z$ e $1/z^2$, o que nos induz a concluir que o ponto singular $z = 0$ ($x \to \infty$) é regular.

Sendo assim, a equação diferencial de Heun geral (A.1) possui quatro pontos singulares regulares (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012; RONVEAUX, 1995).

A equação diferencial de Heun (A.1) tem quatro formas confluentes contendo pontos singulares irregulares em zero e (ou) no infinito, que são conhecidas na literatura como (RONVEAUX, 1995):

•Equação confluente de Heun:

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \left[\varepsilon + \frac{\gamma}{x} - \frac{\delta}{(x-1)}\right]\frac{dH}{dx} + \frac{(\sigma\varepsilon x - \tau)}{x(x-1)}H = 0; \tag{A.11}$$

•Equação duplamente confluente de Heun:

$$\begin{aligned} \left(x\frac{d}{dx}\right)^2 H &+ \rho\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x\frac{d}{dx}\right)H \\ &+ \left[\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)\rho x + \left(\frac{\rho^2}{2} - \gamma\right) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\frac{\rho}{x}\right]H = 0; \end{aligned} \tag{A.12}$$

•Equação biconfluente de Heun:

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \left[\frac{1+\alpha}{x} - \sigma - 2x\right]\frac{dH}{dx} + \left[\lambda - \alpha - 2 - \frac{1}{2x}[\mu + \sigma(1+\alpha)]\right]H = 0; \tag{A.13}$$

•Equação triconfluente de Heun:

$$\frac{d^2H}{dx^2} - (\gamma + 3x^2)\frac{dH}{dx} + [\sigma + (\rho - x)x]H = 0. \tag{A.14}$$

Aqui, damos ênfase somente na equação de Heun biconfluente (A.13), já que foi objeto de aplicação no decorrer do presente trabalho. Sendo assim, considere a Eq. (A.13)

reescrita de forma conveniente

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \left[\frac{1+\alpha}{x} - \sigma - 2x\right]\frac{dH}{dx} + \left[\theta - \frac{\kappa}{x}\right]H = 0, \tag{A.15}$$

onde

$$\theta = \lambda - \alpha - 2; \qquad \kappa = \frac{1}{2}[(1+\alpha)\sigma + \mu]. \tag{A.16}$$

Observando a Eq. (A.15), temos dois pontos singulares, $x = 0$ e $x \to \infty$. Devemos analisar se os mesmos são regulares ou irregulares. Neste caso, os coeficientes $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ da Eq. (A.15) são

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1+\alpha}{x} - \sigma - 2x; \quad \mathcal{P}_2 = \theta - \frac{\kappa}{x}. \tag{A.17}$$

Logo, utilizando a Eq. (A.3) (MACHADO, 2012), para $x_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= x\mathcal{P}_1 = 1 + \alpha - \sigma x - 2x^2; \\ \mathcal{Q}_2 &= x^2\mathcal{P}_2 = x(\theta x - \kappa), \end{aligned} \tag{A.18}$$

ou seja, as equações acima, Eq. (A.18), são analíticas na origem, tornando-a um ponto singular regular. Para $x \to \infty$ ($z = 0$), devemos recorrer aos coeficientes determinados na Eq. (A.5) (ARFKEN; WEBER, 2005), que, para a Eq. (A.15) tornam-se

$$\bar{\mathcal{P}}_1 = \frac{2-1-\alpha}{z} + \frac{\sigma}{z^2} + \frac{2}{z^3}; \quad \bar{\mathcal{P}}_2 = \frac{\theta}{z^4} - \frac{\kappa}{z^3}. \tag{A.19}$$

Podemos notar que os coeficientes $\bar{\mathcal{P}}_1$ e $\bar{\mathcal{P}}_2$ divergem mais rapidamente com os termos $1/z^3$ e $1/z^4$ para $z = 0$ ($x \to \infty$), respectivamente. Com isso, concluí-se que o ponto $x \to \infty$ é um ponto singular irregular.

Como a origem é um ponto singular regular da Eq. (A.15), existe pelo menos uma solução em seu entorno da forma (ARFKEN; WEBER, 2005; MACHADO, 2012)

$$H(x) = x^r \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^{j+r}, \tag{A.20}$$

onde c_j são os coeficientes constantes da série de potência e r um parâmtro a ser definido. Esse procedimento é conhecido como método de Fröbenius (ARFKEN; WEBER, 2005).

Da Eq. (A.20), obtemos as seguintes operações:

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(j+r)r^{j+r-1}; \quad \frac{d^2H}{dx^2} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(j+r)(j+r-1)r^{j+r-2}. \tag{A.21}$$

Logo, substituindo as Eqs. (A.20) e (A.21) na Eq. (A.15), temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)(j+r+\alpha)c_j r^{j+r-2} &- \sum_{j=0}^{\infty}[\sigma(j+r)+\kappa]c_j r^{j+r-1} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty}[\theta-2(j+r)]c_j r^{j+r}=0. \end{aligned} \tag{A.22}$$

Nota-se que as potências da variável dentro dos somatórios não são iguais, o que não nos permite reunir os termos em um único somatório. Portanto, precisamos reescrever os dois primeiros termos da Eq. (A.22). No caso do primeiro termo, façamos $k = j - 2$, ou seja,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)(j+r+\alpha)c_j r^{j+r-2} = \sum_{k=-2}^{\infty}(k+2+r)(k+2+r+\alpha)c_{k+2}r^{k+r}. \tag{A.23}$$

No entanto, agora temos um somatório em k, e não mais em j. Vale lembrar que os índices j e k são índices "mudos", pois indicam apenas onde inicia e finaliza a soma, podendo ser trocado um pelo outro sempre que haver necessidade. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)(j+r+\alpha)c_j r^{j+r-2} &= r(r+\alpha)c_0 x^{r-2} \\ &+ (1+r)(1+r+\alpha)c_1 x^{r-1}+\ldots; \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^{\infty}(k+2+r)(k+2+r+\alpha)c_{k+2}r^{k+r} &= r(r+\alpha)c_0 x^{r-2}+ \\ &+ (1+r)(1+r+\alpha)c_1 x^{r-1}+\ldots. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Percebe-se, então, que os somatórios (A.24) e (A.25) são iguais, isto é, são somente formas diferentes de escrever matematicamente a mesma coisa. Assim, podemos mudar o índice novamente de k para j, onde a Eq. (A.23) é reescrita como segue

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)(j+r+\alpha)c_j r^{j+r-2} = \sum_{j=-2}^{\infty}(j+2+r)(j+2+r+\alpha)c_{j+2}r^{j+r}. \tag{A.26}$$

De forma análoga, o segundo termo da Eq. (A.22) é redefinido:

$$\sum_{j=0}^{\infty}[\sigma(j+r)+\kappa]c_j r^{j+r-1} = \sum_{j=-1}^{\infty}[\sigma(j+1+r)+\kappa]c_{j+1}r^{j+r}. \tag{A.27}$$

Substituindo as Eqs. (A.26) e (A.27) na Eq. (A.22), obtemos

$$\sum_{j=-2}^{\infty}(j+2+r)(j+2+r+\alpha)c_{j+2}r^{j+r} - \sum_{j=-1}^{\infty}[\sigma(j+1+r)+\kappa]c_{j+1}r^{j+r} + \sum_{j=0}^{\infty}[\theta-2(j+r)]c_j r^{j+r}=0. \quad \text{(A.28)}$$

Resolvemos o impasse das potências da variável dentro dos somatórios tornando-os iguais, porém, com índices dos somatórios diferentes, ou fora da faixa, o que nos impõe a explicitar os termos correspondentes a esses índices fora da faixa. Então, somando a série de potência (A.28), de modo a explicitar os termos que se encontram fora da faixa, obtemos

$$\begin{aligned} & r \quad (r+\alpha)c_0x^{r-2}+[(1+r)(1+r+\alpha)c_1-(\sigma r+\kappa)c_0]x^{r-1} \\ & + \quad \sum_{j=0}^{\infty}\{(j+2+r)(j+2+r+\alpha)c_{j+2}r^{j+r}-[\sigma(j+1+r)+\kappa]c_{j+1}r^{j+r} \quad \text{(A.29)} \\ & + \quad [\theta-2(j+r)]c_j r^{j+r}\}=0. \end{aligned}$$

A Eq. (A.29) estabelece uma igualdade de polinômios, e considerando o coeficiente $c_0 \neq 0$, temos as seguintes equações:

$$r(r+\alpha)=0; \quad \text{(A.30)}$$

$$c_1=\frac{(\sigma r+\kappa)}{(1+r)(1+r+\alpha)}c_0; \quad \text{(A.31)}$$

$$c_{j+2}=\frac{[\sigma(j+1+r)+\kappa]c_{j+1}-[\theta-2(j+r)]c_j}{(j+2+r)(j+2+r+\alpha)}, \quad \text{(A.32)}$$

onde temos a condição indicial, que relaciona os coeficientes c_0 e c_1 e a relação de recorrência da série de potência, respectivamente, com $j=0,1,2,\ldots$.

Da Eq. (A.30), a condição indicial, temos as seguintes raízes para r, $r_1=0$ e $r_2=-\alpha$. Para darmos continuidade, devemos seguir propriedades relacionadas a essas raízes.

Sendo x_0 um ponto singular regular da Eq. (A.2) e sendo r_1 e r_2 as raízes da equação indicial associada ao ponto x_0, com $Re(r_1) \geq Re(r_2)$[1], as soluções provindas da equação diferencial via série de Fröbenius em torno de x_0 são dadas de acordo com os seguintes casos (MACHADO, 2012):

[1] Componentes reais de r_1 e r_2.

(1) – se $r_1 - r_2 \neq N$, onde N é um número natural, as duas soluções LI em série são

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - x_0)^j; \quad y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j (x - x_0)^j; \tag{A.33}$$

(2) – se $r_1 - r_2 = N$, com $N \neq 0$, as duas soluções LI em série são

$$\begin{aligned} y_1(x) &= |x - x_0|^{r_1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - x_0)^j; \\ y_2(x) &= e y_1(x) ln|x - x_0| + |x - x_0|^{r_2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j (x - x_0)^j, \end{aligned} \tag{A.34}$$

onde e é uma constante;

(3) – se $r_1 = r_2$, as duas soluções LI em série ficam

$$\begin{aligned} y_1(x) &= |x - x_0|^{r_1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - x_0)^j; \\ y_2(x) &= y_1(x) ln|x - x_0| + |x - x_0|^{r_1+1} \sum_{j=0}^{\infty} d_j (x - x_0)^j. \end{aligned} \tag{A.35}$$

Nas soluções (A.33), (A.34) e (A.35), percebe-se que sempre há uma série comum para o valor maior de r, r_1, dada por $y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - x_0)^j$, onde a mudança ocorre na solução $y_2(x)$. Dependendo da equação diferencial do problema, encontrar $y_2(x)$ pode ser muito complicado , e não existe um método padrão para encontrá-la (MACHADO, 2012).

Dadas essas propriedades, podemos retornar ao nosso caso, a equação biconfluente de Heun, e analisar em qual dos casos ela se enquadra. Então, o módulo da diferença entre r_1 e r_2 é dado por:

$$|r_1 - r_2| = |0 - (-\alpha)| = |\alpha|. \tag{A.36}$$

Vale lembrar que o parâmetro α, no decorrer desta tese, é dado por $\alpha = 2|\gamma|$ ou $\alpha = 2|l|$, onde $|\gamma| \sim |l|$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ou seja, no caso de $\alpha = 2|\gamma|$, temos a primeira propriedade; no caso de $\alpha = 2|l|$, temos a segunda propriedade. Todavia, em ambos os casos, para que não percamos a informação, de suma importância de nossos problemas apresentados, no que diz respeito ao comportamento assintótico das suas respectivas equações diferenciais radiais, das quais obtemos soluções analíticas na origem e no infinito, é necessário que descartemos soluções para $r_2 = -\alpha = -2|\gamma|, \ -2|l|$, pois vimos que, através da análise do comportamento assintótico das equações diferenciais radiais na origem, obtemos uma

solução polinomial para as autofunções, do tipo $R(x) \sim x^{|\gamma|}$, que, no caso de soluções para r_2, teríamos uma autofunção do tipo $R(x) \sim x^{|\gamma|} y_2(x) \sim x^{|\gamma|} x^{-2|\gamma|} \sim x^{-|\gamma|}$, que se torna divergente na origem, fazendo com que percamos condições necessárias para obtenção de informações físicas dos sistemas analisados. Então, a partir de agora, devido às condições de analiticidade das autofunções dos problemas apresentados no presente trabalho, consideraremos somente a solução correspondente a $r_1 = 0$, que, por sua vez, nos impõe a reescrever as Eqs. (A.31) e (A.32) como seguem

$$c_1 = \frac{\kappa}{(1+\alpha)} c_0; \tag{A.37}$$

$$c_{j+2} = \frac{[\sigma(j+1)+\kappa]c_{j+1} - (\theta - 2j)c_j}{(j+2)(j+2+\alpha)}. \tag{A.38}$$

Uma forma de definir polinômios biconfluentes de Heun de grau finito n, $j \to n$, é impondo $c_{n+1} = 0$, fazendo com que os polinômios posteriores ao polinômio de grau n inexistam devido os seus respectivos coeficientes nulos. Com isso, através da Eq. (A.38), na busca por polinômios de grau finito, devemos ter as seguintes condições simultâneas:

$$\theta = 2n; \qquad c_{n+1} = 0, \tag{A.39}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$. Note que n não inicia de 0, pois, para $n = 0$ ($j = 0$), temos um polinômio de grau 0, ou seja, uma função constante, onde esta constante é o coeficiente c_0, $H(x) = c_0$, a qual não satisfaz a Eq. (A.15).

Uma outra maneira de mostrar que $n = 1$ após truncar a série biconfluente de Heun, porém, equivalente ao caso anterior, é fazermos $j = n - 1$ na Eq. (A.38) (FURTADO et al., 1994), a qual nos fornece as condições simultâneas

$$\theta = 2n; \qquad c_n = \frac{2}{(\kappa + \sigma n)} c_{n-1}, \tag{A.40}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Os polinômios $H(x)$ são conhecidos como funções biconfluentes de Heun e têm a forma geral (RONVEAUX, 1995; FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012)

$$H(x) = H_B(\alpha, \sigma, \lambda, \mu; x). \tag{A.41}$$

Tomando os limites $\sigma \to 0$ e $\mu \to 0$ na Eq. (A.15), obtemos

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \left[\frac{(1+\alpha)}{x} - 2x\right]\frac{dH}{dx} + (\lambda - \alpha - 2)H = 0. \tag{A.42}$$

Agora, façamos a mudança de variável $x = \sqrt{u}$, a qual nos fornece

$$\frac{dH}{dx} = 2\sqrt{u}\frac{dH}{du}; \quad \frac{d^2H}{dx^2} = 4u\frac{d^2H}{du^2} + 2\frac{dH}{du}, \tag{A.43}$$

que, por sua vez, obtemos

$$\frac{d^2H}{du^2} + \left(\frac{\alpha}{2} + 1 - u\right)\frac{dH}{du} + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}\right)H = 0, \tag{A.44}$$

a qual se trata da equação diferencial hipergeométrica confluente, onde sua solução é a função hipergeométrica confluente $H(x) =_1 F_1(x^2)$, ou seja, a equação diferencial hipergeométrica confluente é um caso particular da equação diferencial biconfluente de Heun, como também nas suas soluções, representadas pela seguinte relação (FIGUEIREDO MEDEIROS; BEZERRA DE MELLO, 2012)

$$H_B(\alpha, 0, \lambda, 0; x = \sqrt{u}) =_1 F_1\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} + 1; u = x^2\right), \tag{A.45}$$

a qual já é bem conhecida e reproduzida na literatura (ARFKEN; WEBER, 2005; MACHADO, 2012; ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972).

APÊNDICE B – Publicações

Os artigos publicados e associados ao presente trabalho são:

1. VITÓRIA, R. L. L.; BAKKE, K. Relativistic quantum effects of confining potentials on the Klein-Gordon oscillator. *European Physical Journal Plus*, v. 131, p. 36, 2016.

2. VITÓRIA, R. L. L.; FURTADO, C.; BAKKE, K. On a relativistic particle and a relativistic position-dependent mass particle subject to the Klein-Gordon oscillator and the Coulomb potential. *Annals of Physics*, v. 370, p. 128â136, 2016.

3. VITÓRIA, R. L. L.; BAKKE, K. Torsion effects on a relativistic position-dependent mass system. *General Relativity and Gravitation*, v. 48, p. 161, 2016.

4. VITÓRIA, R. L. L.; BELICH, H.; BAKKE, K. A relativistic quantum oscillator subject to a Coulomb-type potential induced by effects of the violation of the Lorentz symmetry. *European Physical Journal Plus*, v. 132, p. 25, 2017.

5. VITÓRIA, R. L. L.; BELICH, H.; BAKKE, K. Coulomb-Type Interaction under Lorentz Symmetry Breaking Effects. *Advances in High Energy Physics*, v. 2017, ID 6893084, 2017.

6. VITÓRIA, R. L. L.; BAKKE, K. Aharonov-Bohm effect for bound states in relativistic scalar particle systems in a spacetime with a spacelike dislocation. *International Journal of Modern Physics D*, v. 27, p. 1850005, 2018.

7. VITÓRIA, R. L. L.; BAKKE, K. Rotating effects on the scalar field in the cosmic string spacetime, in the spacetime with space-like dislocation and in the spacetime with a spiral dislocation. *European Physical Journal C*, v. 78, p. 175, 2018.

Os artigos ainda em análise para publicação associados ao presente trabalho são:

1. VITÓRIA, R. L. L.; BAKKE, K. On the interaction of the scalar field with a Coulomb-type potential in a spacetime with a screw dislocation and the Aharonov-Bohm effect for bound states.

2. VITÓRIA, R. L. L.; BELICH, H.; BAKKE, K. On the effects of the Lorentz symmetry violation yielded by a tensor field on the interaction of a scalar particle and a Coulomb-type field.

Um outro trabalho desenvolvido que não foi incluído nesta tese de doutoramento é:

- VITÓRIA, R. L. L.; FURTADO, C.; BAKKE, K. Linear confinement of a scalar particle in a Gödel-type spacetime. *European Physical Journal C*, v. 78, p. 44, 2018.