UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LINCENCIATURA EM MATEMÁTICA

Israel Bezerra da Cruz

Modelos Matemáticos com o uso de EDOs de 1ª Ordem

Araruna - PB

2014

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

C957m Cruz, Israel Bezerra da.
Modelos matemáticos com o uso de EDOs de 1ª Ordem / Israel Bezerra da Cruz. – Araruna, PB, 2014.
56 p.

Monografia (Licenciatura em Matemática / EaD) – Universidade Federal da Paraíba.
Orientador: Profº Drº José Gomes de Assis.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Modelagem matemática. 3. Resolução de problemas matemáticos. I. Título.

UFPB/BS-CCEN CDU 517.91(043.2)

Israel Bezerra da Cruz

Modelos Matemáticas com o uso de EDOs de 1ª Ordem

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientado: Profº. Dr. José Gomes de Assis

Araruna - PB

2014

Modelos Matemáticas com o uso de EDOs de 1ª Ordem

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática

Orientador: Prof°. Dr. José Gomes de Assis

Aprovado em:____/____/____

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof°. Dr. José Gomes de Assis(Orientador)

Profª Ms. Cristiane Carvalho de Lima(Examinadora)

Prof° Ms. Francisco de Nascimento Lima(Examinador)

Dedico este trabalho a toda a minha família, pois sempre estimularam e incentivaram a minha caminhada, em especial ao meu pai Antonio Henrique e minha mãe Maria Celeste pelo fato de incentivo, carinho e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda.

Paulo Freire

Agradecimentos

A Deus, por todas as conquistas e pela sabedoria por Ele dada!

Ao meu pai, que sempre está ao meu lado me ajudando no que for preciso;

A minha mãe, que sempre está do meu lado me ajudando no que for preciso;

A minha esposa, que sempre está do meu lado me ajudando no que for preciso;

Ao meu orientador, pelo estímulo compreensão e colaboração nessa trajetória;

Aos meus amigos que sempre me apoiaram e no mais me motivaram a nunca desistir;

Aos meus colegas de curso João Leandro, Jussiliano, Jucemar e Genilson;

E finalmente a todos os professores e tutores da UFPB – Virtual.

Resumo

Nosso trabalho objetivou a busca do conhecimento, tendo em vista a resolução de problemas com o uso de Modelagem Matemática. Dentre todos os pontos relevantes destaca-se: o modelo matemático e o uso das Equações Diferenciais Ordniária.

Além disso, o projeto foi formado de meneira a ligar cada capítulo de forma a deduzir niveis de aprendizado necessário para o seguinte. Realizamos um breve estudo sobre equações diferenciais ordinária de 1ª, equações exatas, funções de variáveis separáveis.

Para isso usamos autores como: Dennis G. Zill, Sérgio Antonio Abunahman, Loudes M. W. Almeida, Jussara L. Araújo, Eleni Bisognin, Elaine C. Ferruzzi, Rodolfo E. Vertuan, Karina P. Silva e Paulo Sergio.

Para finalizar, o travalho apresentou 4(quatro) exemplos de modelagem matemática expondo de forma prática o objetivo. Logo, esse projeto apresentou vário pontos relevantes para o entendimento de Modelágem Matemática com o uso de EDOs de 1ª Ordem, tranzendo conceitos históricos, teóricos e práticos.

Palavras chave: Modelagem Matemática, Equações Diferencias, Matemática, Resolução de Problema.

ABSTRACT

Our study aimed to seek knowledge in order to solve problems with the use of Mathematical Modeling. Among all relevant points highlight the mathematical model and the use of Differential Equations Ordniária.

In addition, the project was formed meneira connecting each chapter in order to deduct learning levels required for the following. We conducted a brief study of ordinary differential equations of 1st, exact equations, variables separable functions.

For this we use authors as:. Dennis G. Zill, Sergio Antonio Abunahman, Loudes MW Almeida, L. Jussara Araújo, Eleni Bisognin, Elaine C. Ferruzzi, Rodolfo E. Vertuan, Karina P. Silva and Paulo Sergio.

Finally, the travalho presented four (4) examples of mathematical modeling exposing practically the goal. Therefore, this project presented various relevant for the understanding of Mathematical modeling using ODE 1st Order, tranzendo historical, theoretical and practical concepts.

Keywords: Mathematical modeling, Differential Equations, Mathematics, Problem Solving.

Sumário

1 Memorial Acadêmico

1.1 Histórico de Formação Escolar

Toda minha trajetória escolar antes de ingressar na universidade foi cursado em escolas particulares. Em especial na escola Monteiro Lobato, situada no município de Belém-PB interior da Paraíba na região do brejo paraibano, atualmente esta encontra-se extinta, cidade onde cresci e vivo até hoje.

Inicialmente posso citar no que me lembro sobre minha alfabetização foi iniciada na escola, passando por auxílios diários dos pais quando em casa. Não me lembro se tive dificuldade em matemática, mais em português sim.

O ensino básico foi todo ele cursando na escola Monteiro Lobato, tive bons professores que me deram um boa base para os ensinos posteriores. O ensino fundamenta tive mudanças em algumas séries, por exemplo, da 5a série (hoje 6a ano) até a 7a série (hoje 8a ano) cursei no colégio em minha cidade, Monteiro lobato. Posteriormente cursei a 8a séries (hoje 9a ano) no colégio Santo Antônio situado no município de Guarabira – PB, localizado a 25km do município em que moro.

Além disso, como temíno do ensino Fundamental ainda não tinha em mente o que queria estudar num possível faculdade, mesmo assim continuei com meus estudo focando como principal meta o término do ensino médio.

Dando inicio ao ensino médio tive a minha primeira e única experiência com o ensino público, estudei o 1^{o} ano do ensino médio na escolar José Rocha Sobrinho situada no município de Bananeira – PB, localizado a 20km do município que moro.

Posteriormente, voltei a estudar na escola Santo Antônio, concluindo assim o Ensino Médio em dezembro de 2004. Com o fim do ensino médio ainda não tinha em mente o que prestar no vestibular, fiquei indeciso por alguns anos. A princípio fiz vestibular para ciências da computação não obtendo exito.

1.2 Histórico de Formação Universitária

Em 2009 por incentivo de colegas decidi fazer vestibular para matemática. Com a admiração que sempre tive por matemática e com os incentivos dos colegas e ainda, foi quando assisti ao filme "Uma mente Brilhante" que relatava a vida acadêmica professor John Forbes Nash deixando-me ainda com mais admiração pela matéria.

O professor John Nash é uma matemático norte-americano ao longo de sua vida vem desenvolvento a teoria dos jogos, geometria diferencial e equações diferenciais. Sendo um dos motivos que me levou a cursar matemática e a dar inicio ao meu TCC. Equações diferenciais e padrões são paixões que tenho na área da matemática.

Iniciando o curso no segundo semestre de 2009, tive meu primeiro contato com o curso e posteriormente vieram as dificuldade. Mesmo trazendo boa bagagem do ensino médio, não foram suficiente. O primeiro semestre acabei abandonando por falta de tempo, e o segundo semestre também. Já estava decidido, iria desistir, mas como um anjo enviado por Deus o Colega Genilson Viana passou no vestibular e me motivou a voltar à estudar já que juntos seria mais motivante.

No segundo semestre de 2010 voltei, junto com o colega Genilson Viana. Por 2 (dois) anos consecutivos estudava e trabalhava em uma empresa de internet. Em meados de 2012 o meu trabalho começou a atrapalhar no meu estudo então tive que decidir em manter meu trabalho e continuar meus estudos.

Optei por continuar estudando, ou seja, fiquei desempregado iniciando assim um trabalho informal, pois como sou casado não podia me dar ao luxo de só estudar.

No fim do ano de 2012 resolvi estudar para concurso pois percebi que só com o trabalho de manutenção de computadores não estava dando para levar a vida. Mantive concentrado no curso de matemática.

Tive uma decepção muito grande para com a administração do curso, pois fiquei reprovado em uma matéria por negligência. Negligência esta que me custo mais um semestre na matéria de "Introdução a Álgebra Linear", tornando assim uns dos pontos ruins que passei no decorrer do curso, no mais foi de grande excelência a caminhada.

No ano que inicie meu preparativos para a conclusão do curso comecei a receber os frutos das sementes plantadas anteriormente recebi minha primeira sala de aula o meu primeiro trabalho de verdade com o uso da matemática. Deste então continuei meus estudos firme e forte até o momento de hoje.

A escolha do tema "Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem" teve como princípio motivador o Professor Marivaldo e a tutora Sheilla, pessoas estas que deram ainda mais motivos para amar a matemática.

Em se tratando de educação gosto muito de uma citação do livro "Matemática no Ensino Fundamental Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula" do autor John A. Van de Walle que diz:

> O NCTM(National Council of Teachers of Mathematics) acredita que "A aprendizagem matemática é maximizada quando os professores concentram seus esforços sobre o pensamento e a argumentação matemática.(2009, Pág. 19)

Podemos perceber que a educação matemática trata-se de um união de pontos. Em um esforço convergente para um melhor desenvolvimento. Com a minha admiração com grandes mentes como John Nash, Dr. Marivaldo e a tutora Sheilla, pessoas estas que aprendi admirar pelo seu amor pela matemática, tive a ideia de fazer meu TCC sobre equações diferenciais. Logo concluo que serie muito grato a Deus e a minha família, em especia meus pais irmão e esposa, e a todos que direta ou indiretamente estão ligado a essa conquista, espero em breve iniciar um mestrado e posteriormente um doutorado.

2 *Introdução*

Desde o século XVII quando se iniciva o estudo das Equações Diferencias. Alguns de seus idealizadores como: Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, vislubraram as Equações Diferencias de forma a solucionar várias aplicações na área do cálculo e dentre outras ciências.

A busca de conhecimento tornou possível o desenvolvimento tecnologias que são usadas ainda hoje pelo homem. O uso das equações para prática de Modelagem Matemática vem se tornando a cada ano um grande ponto para o crescimento das ciências.

2.1 Justificativa

O tema foi escolhi por um interesse maior de aprofundar no assunto, ja que durante o curso tive uma simpatia sobre o tema. Com o discorrer de algumas leituras percebi que o assunto tende a uma abrangência bem maior.

2.2 Objetivos

2.2.1 Geral

Esta pesquisa teve por objetivo principal, a investigação do uso das Equações Diferencias como subsidiário de outras ciências. Tendo em vista ...

2.2.2 Específico

Coletar informações necessário para demonstrar que o uso das Equações Diferencias pode ir além da sala de aula. Mostrando que esse tema é importantíssimo para a solução de vários problemas encontrado na sociedade.

2.3 Estrutura do Trabalho

O trabalho é constituido de 7 capítulos.

O primeiro capítulo relata a trajetória acadêmica desde o ensino básico ao término da graduação, e suas esperiências como professor de matemática.

O segundo capítulo é a introdução. Onde é apresenta; o trabalho, a justificativa da escolha do tema, a problemática, os objetivos gerais e específicos, a metodologia e a estrutura do trabalho.

No terceiro capítulo faz-se uma apresentação da fundamentação teórica que está divida em: relatar de forma breve a história das Equações Diferencias e Modelagem Matemática.

O quarto capítulo contitui de um estudo sobre Equações Diferenciais Ordinária de 1ª Ordem. Onde foi apresentado algumas soluções das EDOs de 1ª Ordem. Também fez-se a apresentação da equação de Bernoulli e Riccate.

O quinto capítulo apresentamos as Equações Diferenciais Exatas. Onde fazemos o estudo das funções de variáveis separáveis e dos conceitos das Equações Diferencias Exatas.

No sexto capítulo apresentamos 4(quanto) modelos matemtáticos e suas soluções com o uso das Equações Diferencias.

O setemo capítulo trouxe em seu conteúdo a conclusão do trabalho, passando a seguir a descrição das referências.

3 Fundamentação Teórica

3.1 Um breve relato histórico das Equações Diferenciais

Vamos apresentar uma breve história sobre Equações Diferencias que tenho por base o texto Uma Breve História das Equações Diferenciais cujo o autor é "Prof. Paulo Sergio".

Para alguns matemáticos,"nos últimos 300 anos", as equações diferenciais são o coração da análise matemática bem como do Cálculo diferencial Integral. Com um papel bastante importante e tornando-se um objetivo de vários cursos de graduação envolvendo cálculo. Podemos citar que equações diferencias também tem grande importância para o campo das ciências físicas. A seguir faremos apontamentos relevantes sobre a história das equações diferencias num contexto geral, olhando a fundo seus colaboradores.

Por volta do século XVII Isaac Newton (Natural de Woolsthorpe-by- Colsterworth, Reino Unido) e Gottfried W. Leibniz (Natural de Hanôver, Alemanha) iniciaram o estudo das equações diferenciais no campo do cálculo. Isaac Newton por sua vez, atuou pouco nessa área, porem sua contribuição foi de grande relevância já que ele teve um papel importantíssimo para o desenvolvimento do cálculo e na elucidação de alguns princípios básicos na mecânica. Isaac Newton também foi importante para o desenvolvimento de uma base matemática para a aplicação das equações diferenciais no século XVII.

Isaac Newton estabeleceu soluções para as equações de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

onde $f(x,y)$ é um polinômio em x e y usando séries infinitas.

Em seguida o matemático Gottfried W. Leibniz aos 20(vinte) anos mais ou menos demonstrou o interesse pelo assunto. Leibniz entendia que uma notação matemática deveria ter uma boa notação, ou seja, a notação de derivada $\frac{dx}{dy}$, assim como na notação de integral.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(y)}{P(x)}.$$

Com a redução das equações homogêneas (é homogêneas se a função f(x,y) é homogênea, isto é, uma função homogênea é aquela que, se sofrer transformação em suas variáveis, resulta em uma outra função que é proporcional à função original) a equação de variáveis separáveis (é dita separável ou de variáveis separáveis se pode ser escrita na forma $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(x)}$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{v(y)}$) tem-se um conceito novo no procedimento para encontrar a resolução de equações lineares de primeira ordem do tipo $\frac{dx}{dy} + P(x)y = Q(x)$.

Durante o século XVII com suas viagens pela Europa, Leibniz manteve-se em correspondência com os irmãos Bernoulli (natural de Basileia, Suíça). No decorrer de suas viagens pela Europa entre uma carta e outra com os irmãos Bernoulli, Leibniz solucionou muitos problemas sobre equações diferenciais.

Os irmão Jakob Bernoulli e Joham Bernoulli tiveram um grande papel no desenvolvimento das equações diferenciais em suas aplicações. Os irmãos sempre se envolviam em brigas matemáticas, por causa do seus frequentes ciumes, mesmo assim tiveram um papel relevante para diversas áreas da matemática.

Por exemplo, Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial:

$$y' = \sqrt{\frac{a^3}{b^2y - a^3}},$$

foi através de Jakob que se ouviu pela primeira vez a palavra INTEGRAL em sentido moderno. Já seu irmão Joham Bernoulli foi brilhante na resolução do problema da Catenária que é a forma que os cabos suspensos adquirem sob seu próprio peso. A Catenária satisfaz a equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pg}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

onde, as constantes positivas p, g e H representam, respectivamente, a densidade uniforme do cabo, a aceleração devido à gravidade e a grandeza da tensão no cabo de medida no ponto mais baixo do cabo.

Por volta do século XVII, o brilhante matemático Leonhard Euler (natural de Basileia, Suíça) determinou a condição para que a equação de primeira ordem se torne exata. Euler publicou um artigo demonstrando a teoria do Fator de Integração, e também encontrou a solução geral para a solução das equações de segunda ordem com coeficientes constantes do tipo:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$$

Posteriormente, Euler usou série de potência para solucionar as equações diferenciais. E também apresento um procedimento numérico para a solução de problemas de valores iniciais do tipo:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Mais além deixou contribuições no que diz respeito a equações diferenciais parciais, desenvolvendo a equação.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Nos dias de hoje essa equação citada acima é conhecida por Laplaciano. Outro grande matemático que impulsionou essa história foi o matemático Joseph

Louis Lagrange (natural de Turim, Itália), demonstrou a solução geral de uma equação linear homogênea de *n* soluções diferentes.

No século XIX um matemático brilhante chamado Joseph Fourier (Natural de Auxerre, França) demonstrou solução das equações diferenciais parciais, que descreve a distribuição de calor em uma barra metálica por séries trigonométrica.

As soluções apresentada por Fourier mostrou-se bastante eficaz na resoluções de diversas equações parciais lineares, com estudos ainda mais dedicados e indo mais a fundo sobre suas convergências, trouxe um maior desenvolvimento das funções e novas teorias de integração.

Com o passar do tempo as equações diferencias parciais se tornaram importantíssimo ao campo da Física-Matemática. Daí foram sendo demostrando várias resoluções de certas equações diferenciais ordinária.

Em conseguência deste fato muitas das equações que iriam sendo desenvolvidas receberam o nome dos matemáticos que fizeram contribuições em seus campos de estudo, tais como Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel.

Nos últimos 50(cinquenta) anos, com o apoio de grandes computadores com características modernas e versáteis, ajudou no crescimento da investigação de variados problemas. Por meio de métodos numéricos tornando assim as investigações mais efetivas. Também foram desenvolvidos integradores numéricos refinadíssimos, com robustez e de fácil uso.

No século XX com o grande avanço tecnológico foi desenvolvidos métodos geométricos ou topológicos tendo em vista o estudo das equações parciais não-lineares. Com o objetivo a compreensão, ao menos qualitativamente, o comportamnto de soluções em uma visão mais geométrica, também com analítica. Com o auxílio de métodos numéricos a obtenção de detalhes em certas regiões era possível, se assim fosse necessário.

Nos útimos anos com o advento da computação grática, ficou evidente fenômenos inesperados conhecidos como atratores estranhos, caos e fractais, seu estudo está sendo desenvolvidos constantemente em diversas aplicações.

Em pleno século XXI vem sendo demonstrado vários problemas e ao ponto que os anos iram caminhando há de se falar que ainda existe estudos focados em soluções, por exemplo, procurar a solução das equações de Navier-Strokes.

3.2 Modelagem Matemática

No Livro "Modelagem Matemática na Educação Básica"dos autores Loudes Werle de Almeida, Karina Pessoa da Silva e Rodolfo Educardo Vertuan, apresentou conceitos etimológicos dos termos MODELO e MODELAGEM,

> Ainda que o termo **modelo** tenha sua origem do latim *modellum*, diminutivo de *modus*, que significa **medida em geral**, parece mais adquado. Quando considerarmos a caracterização apresentada para o termo no dicionário etimológico de Cunha (1989) como **representação de alguma coisa**. (2012, Pág. 13)

> Segundo o dicionário Houaiss (2009), o termo **modelagem** significa dar forma a algo por meio de um modelo. Seguindo esse entendimento podemos dizer que a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemático. (2012, Pág. 15)

Com essas definições citadas a cima, podemos dizer que, Modelagem Matemática pode ser definida como um processo para a construção de uma modelo. E o modelo matemático é a estrutura que demonstra de forma aproximada características de um fenômeno. Logo, no livro "Modelagem Matemática na Educação Básica"os autores cita que:

> Modelo matemático é um sistema conceitual, descrito ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e

> que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. (2012, Pág. 13)

Além disso, podemos nos ater que um modelo matemático tem-se, em vista, a representação da realidade numa ótica simples pelo os olhos de quem investiga. A modelagem matemática pode ser descrito em diferentes sistemas, tais como, por meio de uma equação, por um gráfico, por uma tabela, etc. A modelagem matemática tem um contexto interdisciplinar, mostrando que seu uso não está ligado somente a matemática.

> Bento de Jesus Caraça (1901-1948), matemática português, publicou em 1941 a primeira edição de seu livro *Fundamentos da Matemática*, e nessa obra argumenta que a atividade matemática se desenvolve impulsionada por duas buscas: a busca de respostas para questões oriunda da própria Matemática e a busca da compreensão de fenômenos ou de respostas para problemas da realidade física, social e cultural que envolve o homem. (2012, Pág. 15)

Se assim falando, a modelagem pegando pelo conceito da busca por soluções pertinentes a realidade física, social e cultural a modelagem tem-se encontrado bastante eficaz. Já que com as constantes mudanças no dia a dia da sociedade formular um modelo para estudar algo que acontece e por posterior prever de forma aproximada algo que possa acontecer, tem deixado o homem ainda mais entusiasmado pelo fato.

Dessa forma podemos citar algumas fases que caracteriza num contexto físico, cultural a modelagem matemática.

> Uma atividade de Modelagem Matemática, nesse contexto, envolve fase relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais

> caracterizamos como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. (2012, Pág. 15)

Compreende-se que a modelagem matemática e um conjunto de passos que por sua vez tem como objetivo descrever um dado fenômeno matemático no mundo real. Essa descrição, demonstrada na maioria dos casos por meio de equações, que é conhecida por modelo matemático.

A seguir, iremos conceituar as fase inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação segundo os autores Loudes Werle de Almeida, Karina Pessoa da Silva e Rodolfo Educardo Vertuan.

Primeira fase, interação: é o momento que remete-se em informar-se sobre a situação-problema, ou seja, é na fase interação onde começamos a entender o que se pretende estudar. É nesse momento que entendemos as características e especificidades da sistuação-problema.

Segunda fase, matematização: é nesta fase que começa a estruturar a situação-problema de uma linguagem natural para uma linguagem matemática. Tendo em vista a evidenciação do problema matemático a ser resolvido.

> Daí que a segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por "matematização", considerando esses processos de transição de liguagens, de visualizaçõa e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. (2012, Pág. 16)

Terceira fase, resolução: é nesta fase que se cria um modelo matemática para a resoluções dos problemas indagados nas fases anteriores, tem como finalidade descrever a situação-problema, permitindo assim uma análise dos aspectos relevantes.

Quarta fase, interpretação de resultados e validação: é nesta fase que se tem uma interpretação dos resultados obtidos pela construção do modelo matemático, ou seja, aplica-se uma análise dos procedimentos e se foi consistente.

> Essa fase visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações. (2012, Pág. 16)

Podemos perceber que a modelagem matemática vem passando por processos evolutivos de acordo com o comportamento real do mundo, logo podemos afirmar que esse tipo de modelo é essencial para estruturas físicas, sociais e culturas da sociedade de hoje.

Nos dias de hoje a modelagem é utilizada em diversas áreas, como por exemplo: no estudo da proliferação de doenças infecciosas, produção de matérias para construção civil, estratégias de pesca, efeitos biológicos de radiações , movimentação de animais, movimento de rios, estratégias de vacinação, teoria da decisão, crescimento de cidades, tráfego urbano, controle biológico de pragas, entre outros. Tornando o processo de modelagem em um processo de interdisciplina por natureza, já que utiliza os resultados e os instrumentos de outras áreas para o seu desenvolvimento.

Segundo Elaine Cristina Ferruzi (2003, p.35) em sua tese de Mestrado "A modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia"cita que podemos classificar as estruturas de modelagem matemática da seguinte maneiras;

> Modelo linear ou não linear, modelo estático, modelo estocástico ou modelo determinístico

Agora vou descrever em poucas palavras a carectirísticas de cada modelo.

O **modelo linear** ou **não linear** possui como carecterística mais marcante as estruturas de suas equações.

O **modelo estático** representa objetos que não varia ou modelo dinâmico. Como exemplo do uso desse modelo, o crescimento de uma população, análise de consumo, etc.

Já o **modelo estocástico** ou **modelo determinístico** utiliza de forma mais relevante nos dias atuais. Caracterizado por utilizar ou não fatores aleatórios.

De posse da citação acima, podemos concluir que modelo matemático é um estrutura(usado na prática do dia a dia) para solucionar problemas em n situações. Tornando o seu uso bastante eficaz na realização de experimentos com objetivo de expor um situação de sistema a ser investigado. Elaine Cristina Ferruzi (2003, p.36) cita que:

> ... uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Neste sentido, relações entre realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados.

Podemos compreender que atividade com Modelagem Matemática passa por várias indagações de forma a produzir o modelo a ser seguido na obtenção de um resultado final desejado.Em se tratando de "como fazer"Modelagem matemática na sala de aula, Lourdes Maria, Jussara e Eleni (2001, pag.15), há essencialmente, três aspectos a ser seguido

> i) o espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática ii) a familiarização dos estudantes com a atividades de Modelagem Matemática iii)o que "compete"ao professor e aos alunos em atividade de Modelagem Matemática.

Vejamos um breve relato de cada característica que Lourdes Maria, Jussara e Eleni (2001) demonstrou em seu livro que foi citado acima.

O espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática, de acordo com Lourdes Maria, Jussara e Eleni (2001), possue quatro carecterística

a) a alternativa da sepração: realizar curso extracurricular com o foco em modelagem.

b) a alternativa da combinação: Uso de Modelagem Matemárica, em sala de aula, no auxilio a introdução de conceitos matemáticos.

c) alternativa da integração curricular: O problema seria o ponto de partida e a matemática necessária para resolvê-los.

d) a alternativa interdisciplinar integrada: integração entre atividades extra-matemáticas e matemática.

A familiarização dos estudantes com a atividades de Modelagem Matemática é a apresentação do tema de forma teorica e prática aos alunos. Segundo Lourdes Maria, Jussara e Eleni (2001), nesta fase deve-se responder certas indagações

> O que é uma situação-problema? Qual é o problema que preciso resolver? o que preciso para resolver este problema? Como abordar este problema no âmbito da Matemática? Que matemática usar para resolver este problema? Como chegar a um modelo matemático? O modelo obtido é adequado para esta situação?

Questionamento desta natureza deve ser realizadas e posteriormente respondido para uma melhor compreensão de atividades de modelagem matemática. De acordo com Almeida e Dias (2004) o processo de familiarização com modelegam matemática é gradativo.

Onde o professor pode dividir esse processo em 3 etapas. A primeira etapa seria um **primeiro contato do aluno com modelagem matemática**, a segunda etapa seria uma **maior independência do aluno em relação aos procedimentos** e por último, a terceira etapa é quando **o aluno fica responsável pela condução da atividade**.

Nas duas primeiras etapas deve existir uma colaboração e orientação do professor para com os alunos, tornando os alunos mais confiantes para a atepa seguinte.

> Esta introdução gradativa está alinhada com teorias que, ao caracterizar "rotas de modelagem"para os alunos, estabelecem que o que o alunos faz e o que o aluno aprende em atividades de modelagem depende, em grande medida, da sua familiarização com a modelagem (Ferri, 2010)

No que diz respeito a etapa *o que "compete"ao professor e aos alunos em atividades de Modelagem Matemática*, as autoras Lourdes Maria, Jussara e Eleni (2001), demonstra de forma direta. Tendo em vista que nesta etapa divisão de forma coerente de quais atribuições os professores e alunos devem ser responsáveis.

Onde o professor tem papel essencial no desenvolvimento da atividade, Barbosa (2001) demonstra que a eleboração de situação problemas, simplificaçao, dados qualitativos e quantitativos e resolução, em certos casos especificos pode ser atribuição só do professor, mas também o aluno e o professor podem exercer de forma conjunta.

4 Equações Diferenciais Ordinária Lineares

4.1 Equação Linear de 1ª Ordem

Uma equação linear de 1ª ordem na forma padrão é uma equação diferencial na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{4.1}$$

onde P(x) e f(x) são funções da variável x, continuas ou constantes. Lembramos que a solução da equação (1) é uma função y(x) que satisfaz a equação. Tal solução é da forma

$$y = y_p + y_h$$

onde y_p é a solução de uma equação particular e y_h é a solução da equação homogênia.

Um método de solução para (1) é devido a Lagrange e é feito via substituição, o qual apresentaremos agora.

Substituindo y(x) por $Z \cdot t$ em (1), onde $\begin{cases} t = \phi(x) \\ Z = \Psi(x) \end{cases}$ sendo Z a nova função incógnita e t a função a determinar. Assim, y=$Z \cdot t$.

Derivando em relação a x, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = Z\frac{dt}{dx} + t\frac{dZ}{dx}. \tag{4.2}$$

Substituindo, em (1), $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor em (4.2):

$$Z\frac{dt}{dx} + t\frac{dZ}{dx} + P(x) \cdot Z \cdot t = f(x)$$

$$Z\left(\frac{dt}{dx} + P(x) \cdot t\right) + t\frac{dZ}{dx} = f(x) \tag{4.3}$$

Para integrar a equação (4.3), examina-se dois casos particulares da equação (4.1), a saber:

1º) $\frac{dy}{dx} = f(x)$, o que implica em $P(x) = 0$

$$dy = f(x)dx$$

$$y = \int f(x)dx + C$$

2º) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$, o que corresponde a $f(x) = 0$ (equação linear incompleto).

Multiplicando todos os membros por dx:

$$dy + P(x)ydx = 0$$

as variáveis:

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

Integrando:

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x)dx = C$$

$$ln(y) + \int P(x)dx = C$$

$$ln(y) = C - \int P(x)dx$$

Pela definição de logaritmo, pode-se escrever:

$$y = e^{C - \int P(x)dx} = e^{C} \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Se $e^C = K$

$$y = K \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

que é a solução de uma equação linear homogênea ou incompleto.

Assim, retornando à equação (4.3):

$$Z\left(\frac{dt}{dx} + P(x)t\right) + t\frac{dZ}{dx} = f(x)$$

Se conseguir-mos obter os valores de t e Z, obviamente se terá a solução da equação (4.1) que é a linear dita completa, já que y=Zt. Assim, pesquise em (4.3) um modo de calcular essas duas funções. Se igualar o coeficiente de Z em (4.3) a um determinado fator, o valor daí obtido será levado ao resto da equação, possibilitando o cálculo de Z, já que t foi calculado da forma citada. Deste modo, iguale-se o coeficiente a zero (condição imposta).

$$\frac{dt}{dx} + P(x)t = 0 \tag{4.4}$$

Observamos que a equação (4.4) é do tipo citado no 2º caso, onde t funciona como y e cuja solução é:

$$t = K \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Assim, levando o valor de t em $t\frac{dZ}{dx} = f(x)$, obtém-se o valor de Z:

$$Ke^{-\int P(x)dx}\frac{dZ}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{K}e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

$$dZ = \frac{1}{K}e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)dx$$

Integrando:

$$Z = \frac{1}{K}\int e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)dx + C. \tag{4.5}$$

Como $y = Z \cdot t$ tem-se:

$$y = Ke^{-\int P(x)dx}\left[\frac{1}{K}\int e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)dx + C\right]$$

Assim:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)dx + C_1\right]. \tag{4.6}$$

A equação (4.6) é a solução geral da equação (4.1).

Outra maneira de resolver (4.1) é via o método do Fator Integrante, o qual passamos a descrever.

Dada a equação:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x),$$

podemos colocá-la na forma

$$(P(x)y - f(x))dx + dy = 0 \tag{4.7}$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{\int P(x)dx}$, tem-se:

$$e^{\int P(x)dx}(P(x)y - f(x))dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0.$$

Seja,

$$M = e^{\int P(x)dx}(P(x)y - f(x))$$

e

$$N = e^{\int P(x)dx}dx$$

Derivando então M em relação a y:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x)e^{\int P(x)dx}$$

O mesmo com N em relação a x:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = P(x)e^{\int P(x)dx}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, a equação transforma-se em equação diferencial exata, no próximo capítulo iremos detalhar melhor.

Exemplo 4.1.1

Resolva a equação $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2$

a) pelo método de Lagrange

Solução

a)$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2$

Substituindo:

$$y = z \cdot t \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = z\frac{dt}{dx} + t\frac{dz}{dx}$$
$$z\frac{dt}{dx} + t\frac{dz}{dx} - \frac{z \cdot t}{x} = x - 2$$
$$z\left(\frac{dt}{dx} - \frac{t}{x}\right) + t\frac{dz}{dx} = x - 2$$

Calculando t:

$$\frac{dt}{dx} - \frac{t}{x} \Longrightarrow \frac{dt}{t} - \frac{dx}{x} = 0$$

Integrando:

$$ln(t) = ln(x) \Longrightarrow t = x$$

Calculando z:

$$t\frac{dz}{dx} = x - 2$$

Mais $t = x \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = x - 2$

$$dz = \left(1 - \frac{2}{x}\right)dx \Longrightarrow z = x - 2ln(x) + C$$

Solução geral

$$y = z \cdot t = x[(x - 2ln(x) + C)]$$

$$y = x(x - ln(x) + C)$$

4.2 Equação de Bernoulli

Apresentaremos uma equação diferencial de bastante utilização que é a equação de Bernoulli [1], uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

onde P(x) e f(x) são funções de x ou constantes e $n \in Z$, $n \neq 0 \quad n \neq 1$. Caso $n \neq 0$ e $n \neq 1$, temos equação lineares.

Para resolver a equação de Bernoulli vamos reduzir a equação a uma linear.

Vamos a equação:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \tag{4.8}$$

onde

$$n \neq 0 \quad \text{e} \quad n \neq 1$$

[1] Nicolau Bernaulli (1687-1759) - Sobrinho de Jacques e Jão Bernoulli, foi professor de Matemática da Universidade de Pádua, na Itália, e professor de Direito da Universidade de Basiléia na Suíça.

Dividindo ambos os membros por y^n, tem-se:

$$y^{-n}\frac{dy}{x} + P(x)y^{1-n} = f(x) \tag{4.9}$$

Fazendo agora a substituição

$$y^{1-n} = t \tag{4.10}$$

sendo t uma função de x. Derivando (10) em relação a x, tem-se:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{dt}{dx}$$

Levando em (9):

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dt}{dx} + P(x)t = f(x)$$

Multiplicando por (1-n):

$$\frac{dt}{dx} + P(x)(1-n)t = (1-n)f(x)$$

que é uma equação linear e resolve-se como as anteriores.

Exemplo 4.2.1

1) $\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2$

Solução

Dividindo por y^2:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y^{-1} = 3x$$

Substituindo:

$$y^{-1} = t \quad \Rightarrow \quad -y^2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dt}{dx}$$

Equação transformanda:

$$-\frac{dt}{dx} - \frac{2}{x}t = 3x$$

$$\frac{dt}{dx} + \frac{2}{x}t = -3x$$

Fazendo $t = u \cdot v$, $\frac{dt}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$u\frac{du}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x}\right) = -3x$$

Calculando u:

$$\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = 0$$

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln(u) = -2ln(x) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x^2}$$

Calculando v:

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dv}{x} = -3x$$

$$dv = -3x^3 dx \Rightarrow v = -\frac{3x^4}{4} + C$$

Como $t = u \cdot v$, tem-se:

$$t = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^4}{4} + C\right)$$

$$t = \frac{-3x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

Reduzindo ao mesmo denominador:

$$t = \frac{4C - 3x^4}{4x^2}$$

Como $y^{-1} = t$, pode-se escrever, já que AC=K:

$$y = \frac{4x^2}{K - 3x^4}$$

Obs.: A solução da equaçao de Bernoulli pode ser obtida de forma análoga à linear, ou seja, pela substituição $y = z \cdot t$

4.3 Equação de Riccate

Outra equação que é bastante utilizada é a equação de Riccat[2] é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R$$

onde P, Q e R são funções de x.

Podemos perceber que a equação linear e a equação de Bernoulli são casos particulares da equação de Riccati, a primeira com P=0, e a segunda com R=0.

Vamos exibir um método para resoluçãoda equação de Riccate

Adminta-se uma solução particular y_0 da equação:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R \tag{4.11}$$

Fazendo

$$y = y_0 + z \tag{4.12}$$

[2]Jacopo Francisco Riccati - Matemático italiano, nasceu em Veneza em 1676 e morreu em Treviso em 1754.

sendo z uma função a determinar.

Se y_0 é solução, pode-se escrever:

$$\frac{dy_0}{dx} = Py_0^2 + Qy_0 + R \tag{4.13}$$

Derivando (12), tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_0}{dx} + \frac{dz}{dx} \tag{4.14}$$

Substituindo esse valor na equação (11), assim como o de y obtido em (12), tem-se:

$$\frac{dy_0}{dx} + \frac{dz}{dx} = P(y_0 + z)^2 + Q(y_0 + z) + R$$

$$\frac{dy_0}{dx} + \frac{dz}{dx} = Py_0^2 + 2Py_0z + Pz^2 + Qy_0 + Qz + R$$

$$\frac{dy_0}{dx} + \frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_0 + Q)z + Py_0^2 + Qy_0 + R \tag{4.15}$$

Mas a relação (13) mostra que $\frac{dy_0}{dx} = Py_0^2 + Qy_0 + R$, donde (15) se transforma em:

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_0 + Q)Z$$

Ou, agrupando:

$$\frac{dz}{dx} - (2Py_0 + Q)z = Pz^2 \tag{4.16}$$

que é uma equação de Bernoulli em z, de resolução já conhecida.

Exemplo 4.3.1

Resolva a equação $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 3$

1) Verefique que y=x é uma solução particular da equação $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 3$.

Solução

Se y=x, tem-se $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}=1+1+1=3$, logo y=x é solução particular da equação.

Substituindo:

$$y=x+z \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=1+\frac{dz}{dx}$$

Substituindo na Equação dada:

$$1+\frac{dz}{dx}+\frac{x+z}{x}+\frac{x^2+2xz+z^2}{x^2}=3$$

$$1+\frac{dz}{dx}+1+\frac{z}{x}+1+\frac{2z}{x}+\frac{z^2}{x^2}=3$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=-\frac{1}{x^2}z^2$$

que é uma equação de Bernoulli em z.

Dividindo ambos os membros por z^2, tem-se:

$$z^{-2}\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z^{-1}=-\frac{1}{x^2}$$

Fazendo $z^{-1}=t \qquad \Rightarrow \qquad -z^{-2}\frac{dz}{dx}=\frac{dt}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad z^{-2}\frac{dz}{dx}=-\frac{dt}{dx}$

$$-\frac{dt}{dx}+\frac{3}{x}t=-\frac{1}{x^2}$$

ou

$$-\frac{dt}{dx}+\frac{3}{x}t=\frac{1}{x^2}$$

Já que se recaiu numa linear, faz-se t=uv

$$\frac{dt}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-\frac{3}{x}u\cdot v=\frac{1}{x^2}$$
$$u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v\right)+v\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{3}{x}v=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{v}=3\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$ln(v)=3ln(x) \qquad \Rightarrow \qquad v=x^3$$

Calculando u:

$$x^3\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad du=\frac{dx}{x^5}$$

Integrando:

$$u=-\frac{x^{-4}}{4}+C \qquad \Rightarrow \qquad u=-\frac{1}{4x^4}+C$$

Como $t=u\cdot v$, tem-se:

$$t=\left(-\frac{1}{4x^4}+C\right)\cdot x^3$$

$$t=-\frac{1}{4x}+Cx^3=\frac{-1+4Cx^4}{4x}$$

Mas $t=z^{-1}$

$$z=\frac{4x}{4Cx^4-1}$$

Com y=x+z, tem-se:

$$y = x + \frac{4x}{4Cx^4 - 1}$$

$$y = \frac{4Cx^5 - x + 4x}{4Cx^4 - 1} = \frac{4Cx^5 + 3x}{4Cx^4 - 1}$$

Portanto, a Solução Geral é:

$$y = \frac{Kx^5 + 3x}{Kx^4 - 1}$$

5 *Equações Diferenciais Exatas*

5.1 Variáveis Separáveis

Vamos apresentar agora alguns métodos de resolução para Equações Direnciais Ordinária de 1ª Ordem.

Vamos considerar a equação do tipo $y' = f(x)$ na forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.1}$$

Se conseguimos coloca-la na forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{5.2}$$

onde $M(x)$ e $N(y)$ a equação é dita de variável separável e pode ser integrada sobre a variável. Assim

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

determinando as soluções para (18)

Exemplo 5.1.1

Resolva a equação $ydx + xdy = 0$.

$$ydx + xdy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

Integrando temos

$$ln(x) + ln(y) = ln(c)$$

Exemplo 5.1.2

Resolva, $x(y+1)^2dx + (x^2+1)ye^ydy = 0.$

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{ye^y}{(y+1)^2}dy = 0$$

Integrando temos

$$\frac{1}{2}ln(x^2+1) + \frac{e^y}{(y+1)} = C.$$

Apresentaremos agora a definição de uma função homogênea.

Definição 5.1.1 *Uma função $f(x)$ é dita homogênea de grau λ se para todo número real t, $f(tx,ty) = t^{\lambda} f(x,y)$*

Veja exemplo a seguir:
a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, daí $f(tx,ty) = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2,y^2) = t^2 f(x,y)$ é homogêna de grau $\lambda = 2$.

Suponhamos que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ de (17) sejam homogêneas de grau λ. Fazendo a multiplicação $y = vx$, temos

$$M(x,vx)dx + N(x,vx)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^{\lambda}M(1,0)dx + x^{\lambda}N(1,0)(vdx + xdv) = 0$$

$$M(v)dx + N(v)(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{dx}{x}\frac{N(v)}{M(v)+N(v)}dv = 0$$

que é de variável separáveis.

Algumas técnicas para resolver uma EDO de 1ª Ordem estão baseadas no conceito de Diferencial Total, lembramos que a diferencial de uma função $F(x,y)$ é

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y)dy, \tag{5.3}$$

com $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ existindo.

Como $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ são funções de x,y então (19)pode ser posta na forma

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

.

5.2 Equações Exatas

Uma expressão da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

e dita uma **diferencial exta** se existir uma função diferenciável $F(x,y)$ definida em $D \subset R^2$ tal que $dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, neste caso a equação de 1ª ordem

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.4}$$

é dita exata, e a expressão $F(x,y) = C$ chama-se integral geral da equação.

O lema a seguir no fornece as resoluções para equações diferenciais exatas.

Lema 5.2.1 *Seja*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.5}$$

definida na região $D \subset R^2$ e supondo que exista uma função diferencial F tal que $M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$ em D. Então a expressão $F(x,y) = C$, C constante define uma solução geral de (20).

Demonstração: Vide literatura.

Assim, pelo lema a integral geral é uma solução de (21)

Exemplo 5.2.1

A equação $xdx + ydy = 0$ é uma diferencial exata.

Pois sendo $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ temos $dF = xdx + ydy$. Logo a equação $xdx + ydy = 0$ tem a função integral $x^2 + y^2 = C^2$,, $C \neq 0$, solução $y = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$.

A garantia da existência da solução para uma equação exata não é muito útil se não soubermos se uma dita equação é exata quando à vemos. Precisamos de um critério para reconhecer se da equação é exata e que também ajude na exibição de $F(x,y)$. Tal situação é resolvida pelo teorema.(vide literatura)

Teorema 5.2.1

A equação

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.6}$$

onde M e N são funções contínuas e deriváveis, é diferencial exata, se e somente se, ocorrer a relação

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{5.7}$$

A relação (23) é condição necessária e suficiente para que a equação (22) seja uma diferencial exata.

Demonstração:

1) **A condição é necessária** Será mostrado que se o primero membro da equação (22) é uma diferencial total, a relação (23) será verificada, ou seja, se $Mdx+Ndy=0$ é diferencial total, então:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Dizer que o primeiro membro de (17) é a diferencial total de determinada função f(x,y) é dizer que $Mdx+Ndy=dF$, ou seja:

$$Mdx+Ndy=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

o que leva a escrever que

$$M=\frac{\partial F}{\partial x} \qquad (a)$$

e

$$N=\frac{\partial F}{\partial y} \qquad (b)$$

Derivando (a) em relação a y e (b) em relação a x, tem-se respectivamente:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$$

O que o teorema de Schwartz[1] permite dizer:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}$$

Logo, a condição (23) é necessária para que (22) seja a diferencial total de $F(x,y)$.

2)**A condição é suficiente**

Será mostrado agora que se a relação (23) se verifica, (22) é a diferencial total de $F(x,y)$.

Seja a relação:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$$

---

[1]O teorema de Schwartz diz que, em existindo uma função Z=f(x,y) e esta, assim como as suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, são contínuas num determinado intervalo, então a igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ é verdadeira.

isto é, supóe-se uma função $F(x,y)$ construida de modo que M seja igual a $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Para se obter F é necessário que se integre a igualdade anterior em relação a x.

Assim:

$$F = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \phi(y) \tag{5.8}$$

Se x_0 a abcissa de um ponto arbitrário no campo de definição da função f e $\phi(y)$ uma função arbitrária de y, resta-nos calcular a função $\phi(y)$. Para tanto, deriva-se a igualdade (24) em relação a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \phi'(y). \tag{5.9}$$

Mais pelo teorema de Leibniz[2] permite escrever:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx + \phi'(y). \tag{5.10}$$

Sendo $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx + \phi'(y). \tag{5.11}$$

Integrando:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) - N(x_0,y) + \phi'(y).$$

Observe-se que $N(x_0,y)$ é função apenas de y, já que $x_0 = constante$. Dessa maneira pode-se afirmar que $-N(x_0,y) + \phi'(y)$ é uma função arbitrária de y (a diferença entre duas funções de y, sendo uma delas arbitrária, é também uma função arbitrária de y).

Pode-se então chamar de θ a diferença

$$-N(x_0,y) + \phi'(y)$$

[2]O teorema de Leibniz mostra que, para as integrais dependentes de um parâmetro, tem-se:

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]' = \left[\int_a^b f'(x,\alpha)dx\right]$$

.

$$\theta(y) = -N(x_0, y) + \phi'(y)$$

Como $\theta(y)$ é arbitrária, pode-se fazê-la igual a zero, o que implica em escrever:

$$\phi'(y) = N(x_0, y). \tag{5.12}$$

Integrando (28), obtém-se $\phi'(y)$.

Assim:

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C$$

sendo y_0 a ordenada de um ponto arbitrário no campo de existência de f(x,y).

Então:

$$f = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C$$

Como $F(x, y) =$Constante, tem-se, finalmente

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = K$$

que é a solução geral de uma equação diferencial exata, sendo x_0 e y_0 constantes arbitrárias.

Podemos mostrar a condição de suficiencia e, respectivamente, a solução da equação da mandeira a seguir:

Se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad Mdx + Ndy = 0$$

é diferencial exta.

se a integral

$$\int Mdx = P \tag{5.13}$$

Será provado que se a relação $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ se verifica, então existe uma função $Q(y)$ tal que:

$$F(x, y) = P(x, y) + Q(y) \tag{5.14}$$

é solução da equação.

Para tanto, deriva-se (30) em relação a x e y respectivamente. Tem-se então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = M \qquad (c)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + Q'(y) = N \qquad (d)$$

De (d), escreve-se:

$$Q'(y) = N - \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (e)$$

Veja-se que $Q'(y)$ não depende de x, e, como consequência, também o segundo membro da igualdade (e), como se pode verificar.

Assim, derive-se o segundo membro de (e) em relação a x:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \qquad (f)$$

Mas (c) mostra que $\frac{\partial P}{\partial x} = M$ logo, derivando em relação a y, tem-se:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (g)$$

Deste modo

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Como se supôs $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \qquad (h)$$

Então, pela integração de (e), tem-se:

$$Q(y) = \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \qquad (i)$$

Substituindo (i) e (29) tem-se a solução f.

Assim:

$$f(x,y) = \int M dx + \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = C$$

Observe que a demonstração da condição suficiente exibimos a solução geral de uma equação diferencial exata.

Exemplo 5.2.2

Resolva a seguinte equação diferencial exata:

1) $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$

Solução

1º Método: $U = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \phi(y)$ onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária de y, a se determinar.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo é diferencial exata.

$$U = \int_{x_0}^{x} (x^2 - y^2)dx + \phi(y) = \left[\frac{x^3}{3} - y^2 x\right]_{x_0}^{x} + \phi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2yx + \phi'(y)$$

Mas como $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$, tem-se:

$$-2yx + \phi'(y) = -2xy$$

$$\phi'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi'(y) = C$$

Assim

$$U = \frac{x^3}{3} - y^2x + C$$

2º Método: $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$

$$U = P(x,y) + Q(y)$$

$$U = \int Mdx + \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = C$$

$$P = \int Mdx = \int (x^2 - y^2)dx = \frac{x^3}{3} - y^2x$$

$$Q = \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = \int (-2xy + 2yx)dy = 0$$

Assim:

$$U = \frac{x^3}{3} - y^2x = C$$

$$U = \frac{x^3}{3} - y^2x + K$$

6 *Modelagem matemática*

6.1 Modelo 1 - Crescimento de Bactéria

Vimos num primeiro momento Equações Diferencias qualitativamente e analiticamente. Agora iremos exibir exemplos de EDOs de primeira ordem no uso de modelagem matemática.

Antes de iniciar o exemplo propriamente dito, iremos dizer algo sobre **crescimento** e **decaimento** exponencial.

O problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad , \qquad x(t_0) = x_0 \tag{6.1}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade, server como modelo para diversos fenômenos que envolve crescimento e decaimento. Tendo como pressuposto o conhecimento da população (bactéria, etc) num instante arbitráio t_0, a solução de (31) pode nos remeter a predição da população no futuro. Um instante onde $t > t_0$. De forma análoga, podemos encontrar a constante de proporcionalidade de k com base na solução de (31), solução do problema do valor inicial, determinando uma medida de x em um instante $t_1 > t_0$.
Segue o modelo propriamente dito.

Uma cultura tem inicialmente P_0 bactéria. Em t=1h, o número de bactéria é de $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias presentes no instante t, P(t), determine o tempo necessário para tripicar o número de bactérias.

Solução

Em primeiro lugar, resolvendo a equação diferencial em (31), substituindo x por P. Tomando $t_0 = 0$, a condição inicial é $P(0) = P_0$. Usamos a observação epírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar a constante de proporcionalidade k.

Observe que a equação diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ é ao mesmo tempo separável e linear. Colocando-a na forma padrão de um EDO linear de primeira ordem,

$$\frac{dP}{dt} - P = 0,$$

podemos ver por inspeção que o fator integrante é e^{-kt}. Multiplicando ambos os lados da equação por esse termo integrante, obtemos

$$\tfrac{d}{dt}\left[e^{-kt}P\right] = 0 \qquad \text{e} \qquad e^{-kt}P = c.$$

Portanto $P(t) = ce^{kt}$. Em t=0. Segue que $P_0 = ce^0 = c$. Assim sendo, $P(t) = P_0e^{kt}$. Em t=1 temos $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^k$ ou $e^k = \frac{3}{2}$. Da última equação, obtemos $k = ln\frac{3}{2} = 0,4055$ e portanto, $P(t) = P_0e^{0,4055t}$. Para encontrar o instante no qual o número de bactérias triplicou, resolvemos $3P_0 = P_0e^{0,4055}$ para t. Segue que 0,4055t=ln3 ou

$$t = \frac{ln3}{0,4055} \approx 2,71h$$

Veja a figura 6.1

obeserve que no Modelo 1 o número de bactérias presentes no instante $t = 0$, P_0, não desempenha nenhum papel na determinação do tempo necessário para triplicar se número na cultura. O tempo necessário para uma população inicial de, digamos, 100 ou 1.000.000 de bactérias triplicar é de aproximadamente 2,71 horas.

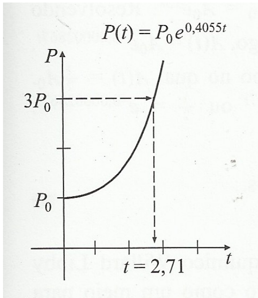


Figura 6.1: crescimento de bactéria Fonte: Equações Diferenciais com aplicação em modelagem, Dennis G. Zill

Conforme visto na figura 6.2, a função exponencial e^{kt} cresce à medida que t cresce para $k > 0$ e decresce à medida que t cresce para $k < 0$. Assim, problemas que descrevem crescimento (população, bactéria ou até mesmo capital) são caracterizados por um valor positivo k, enquanto problemas que envolvem decaimento (como na desintegração radioativa) dão lugar a um valor negativo k. Dessa forma, dizemos que k é ou uma **constante de crescimento** (k $>$ 0) ou uma **constante de decaimento** (k $<$ 0).

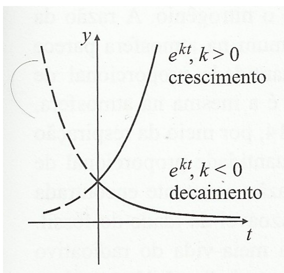


Figura 6.2: crescimento e decaimento de bactéria Fonte: Equações Diferenciais com aplicação em modelagem, Dennis G. Zill

6.2 Modelo 2 - Meia-vida de Plutônio

Na Física **meia-vida** é a forma de calcular a estabilidade de uma substância radioativa. Em outra palavras é o tempo necessária para a metade os átomos em uma quantidade inicial A_0 desintegrar ou transformar em átomos de outros elementos. Vamos a exemplos do livro "Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem"do autor Dennis G. Zill:

> Por exemplo, a meia vida do rádio altamente radioativa, Ra-226, é mais ou menos 1700 anos, logo em 1700 anos metade da quantidade de uma da quantidade de Ra-226 é transformada em radônio, Rn-222.

Eis o problema.

Um reator regenerador converte urânio 238 relativamente estável no isótopo de plutônio 239. Depois de 15 anos determinou-se que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio desintegrou-se. Ache a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração for proporcional à quantidade remanescente.

Solução

Seja A(t) a quantidade de plutônio remanescente no tempo t. Como no exemplo 1, a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad , \qquad A(0) = A_0$$

é $A(t) = A_0 e^{kt}$. Se 0,043% dos átomos de A_0 tiverem se desintegrado, restaram 99,957% de substância. Para encontrar a constante de decaimento k, usamos $0,99957A_0 = A(15)$, isto é, $0,99957A_0 = A_0 e^{15k}$. Resolvendo para k, temos $k = \frac{1}{15} ln 0,99957 = -0,00002867$.

Logo, $A(t) = A_0 e^{-0,00002867t}$. Agora, a meia-vida corresponde ao valor do tempo no qual $A(t) = \frac{1}{2}A_0$. Resolvendo para t, obtemos $\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0,00002867t}$ ou $\frac{1}{2} = e^{-0,00002867t}$. A última equação fornece

$$t = \frac{ln 2}{0,00002867} = 24,180 anos.$$

A datação por carbono foi inventa por volta de 1950 pelo químico Willard Libby, criando um método de usar o carbono radioativo como meio para determinar a idadde dos fósseis de forma aproximada. Esse método de datação baseia-se no fato que o isótopo de carbono 14 é produzido na atmosfera pela ação da radiação cósmica sobre nitrogênio. Dennis G. Zill em seu livro cita:

> ... a quantidade proporcional C-14 presente, digamos, em um fóssil com a razão constante encontrada na atmosfera, é possivel obter uma estimativa razoável da idade do fóssil. C-14 é aproximadamente 5600 anos. Por seu trabalho Libby ganhou o prêmio nobel de química em 1960. O método de Libby tem sido usado para datar móveis de madeira em túmulos egípcios, o tecido de linho que envolvia os pergaminhos do Mar Morto e o tecido de enegmático sudário de Turim

6.3 Modelo 3 - Idade de um Fóssil

Foi encontrado um osso fossilizado que contém um milésimo da quantidade original de C-14. Determine a idade do fóssil.

Solução

O ponto de partida é novamente $A(t) = A_0 e^{kt}$.Para determinar o valor da constante de decaimento k, usamos o fato de que $\frac{A_0}{2} = A(5600)$ ou $\frac{1}{2}A_0 = e^{5600k}$. De $5600k = ln\frac{1}{2} = -ln2$, obtemos $k = \frac{-(ln2)}{5600} = -0,00012378$.
Logo, $A(t) = A_0 e^{-0,00012378t}$. De $A(t) = \frac{1}{1000}A_0$, temos $\frac{1}{1000}A_0 = A_0 e^{-0,00012378t}$; Assim, $-0,00012378t = ln\frac{1}{1000} = -ln1000$. Assim sendo,

$$t = \frac{ln1000}{0,00012378} \approx 55.800 \text{ anos}$$

A idade encontrada no Modelo 3 está realmente no limite da precisão para esse método. A técnica usual do carbono 14 está limitada a cerca de 9 meiasvidas do isótopo, ou a cerca de 50.000 anos. Uma das razões dessa limitação é que a análise química necessária para obter uma medida precisa do C-14 remanescente torna-se de alguma forma muito grande em torno do ponto 1/1.000 de A_0. Além disso, essa análise requer a destruição de uma amostra muito grande do espécime. Se essa medida for obtida indiretamente, com base na radioatividade real do espécime, será muito difícil distinguir entre a radiação do fóssil e a radiação normal de fundo. [1]

Porém, recentemente, o uso de um acelerador de partículas possibilitou aos cientistas separar diretamente o C-14 do estável C-12. Quanto o valor preciso da razão de C-14 para C-12 é computado, a precisão do método pode ser estendida para 70.000 - 100.000 anos. Outras técnicas com isótopos, como o uso do potássio 40 e do argônio 40, podem determinar idades de vários milhões de anos.[2] Metódo não isotópicos baseados no uso de aminoácidos são também possíveis algumas vezes.

Foi encontrado um osso fossilizado que contém ...

6.4 Modelo 4 - Esfriamento de um Bolo

Lei de esfriamento de Newton:
A formulação matemática da lei empírica de Newton do resfriamento de um objeto é dada pela equação diferencial linear de primeiro ordem

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm), \tag{6.2}$$

onde K é uma constante de proporcionalidade, $T(t)$ é a temperatura do objeto para $t > 0$ e T_m é a temperatura ambiente - isto é, a temperatura do meio em

[1] O número de desintegrações por minitu por grama de carbono é registrado com um contador Geiger. O nível mais baixo para o qual a detecção é possível é cerca de 0,1 desintegração por minuto por grama.

[2] A datação por potássio-argônio é usado em materiais terrestres, como minerais, pedras e lavas, e materiais extraterrestres, como meteoritos e pedras lunares. A idade de um fóssil pode ser estimada determinando-se a idade do extrato de pedra no qual foi encontrado.

torno do objeto. Vamos ao problema, supomos que T_m seja constante.

Quanto um bolo é tirado do forno, sua temperatura é 300F. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200F. Quanto tempo levará para o bolo resfriar até a temperatura ambiente de 70F

Solução

Vamos fazer em (27) a identificação $T_m = 70$. Precisamos então resolver o problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = K(T-70), \qquad T(0) = 300 \tag{6.3}$$

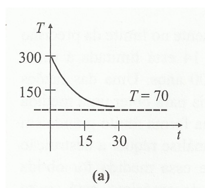
e determinar o valor de K de tal forma que $T(3) = 200$.

A equação (28) é ao mesmo tempo linear e separável. Separando variáveis,

$$\frac{dT}{T-70} = Kdt,$$

temos $ln|T-70| = Kt + C_1$ e, portanto, $T = 70 + C_2 e^{kt}$. Quando $t = 0$, $T = 300$ e, portanto, $300 = 70 + C_2$ resulta em $C_2 = 230$. Dessa forma, $T = 70 + 230e^{kt}$. Finalmente, a medição $T(3) = 200$ leva a $e^{3k} = \frac{13}{23}$ ou $k = \frac{1}{3}\, ln\frac{13}{23} = -0,19018$. Assim

$$T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}. \tag{6.4}$$



T(t)	t (min)
75°	20,1
74°	21,3
73°	22,8
72°	24,9
71°	28,6
70,5°	32,3

(b)

Figura 6.3: Fonte: Equações Diferenciais com aplicação em modelagem, Dennis G. Zill

Observamos que (29) não fornece uma solução finita para $T(t) = 70$, uma vez que $\lim_{t\to\infty} T(t) = 70$. Intuitivamente, porém, esperamos que o bolo atinja a temperatura ambiente após um período razoavelmente longo. Qual é o significado de "longo"? Naturalmente, não deveríamos interrogar o raciocínio pelo fato de o modelo (28) não estar inteiramente de acordo com nossa intuição física. As partes (a) e (b) da figura 6.3 mostram claramente que o bolo terá aproximadamente a temperatura ambiente em mais ou menos meia hora.

7 Conclusão

Estudamos as Equações Diferencias de 1ª Ordem com a finalidade de usálas em modelagem matemática. O trabalho tem como objetivo a demonstração de forma mais prática o uso de modelagem e equações diferenciais. Em 4 modelos demostramos de forma menos abstrata o uso de conceitos estudados no decorrer do curso de licenciatura em matemática, mostrando que tudo que se é apresentado no decorrer do curso tem-se no curso tem relevância. A beleza desse estudo nos provoca a necessidade e vontade de aprofundar nosso estudo nesta área de conhecimento, nos remetendo para a banca a vontande de posteriormente fazer um mestrado na área.

Referências

ZILL, Dennis G.

Equações diferenciais com aplicações em modelagem; Tradução Cyro de Carvalho Patarra; Revisão técnica Antônio Luiz Pereira. – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

ABUNAHMAN, Sérgio Antonio

Equações diferenciais. – Rio de Janeiro: EDC - Editora Didática e Científica, 1989.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; ARAÚJO, Jussara L.; BISOGNIN, Eleni Práticas de modelagem matemática na educação matemática. – Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

FERRUZZI, Elaine C.

A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos superiores de tecnologia. – Florianópolis, 2003.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; VERTUAN, Rodolfo E.; SILVA, Karina P. da

Práticas de modelagem matemática na educação matemática. – Londrina: Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011.

Prof^{o}.: Sergio, Paulo

http://sociedaderacionalista.org/