

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA: APLICAÇÃO DO MODELO DE DISTRIBUIÇÃO  
POISSON INFLACIONADA DE ZERO (ZIP) EM MODELOS DE LOCALIZAÇÃO COM  
DEMANDAS PROBABILÍSTICAS.

**WIDELENE MENEZES TAVARES SANTOS**

JOÃO PESSOA  
2018

WIDELENE MENEZES TAVARES SANTOS

OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA: APLICAÇÃO DO MODELO DE DISTRIBUIÇÃO  
POISSON INFLACIONADA DE ZERO (ZIP) EM MODELOS DE LOCALIZAÇÃO COM  
DEMANDAS PROBABILÍSTICAS

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGEPP do Centro de Tecnologia – CT da Universidade Federal da Paraíba.

**Orientador:** Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento

**Área de concentração:** Gestão e Otimização de Sistemas de Produção

**Subárea:** Pesquisa Operacional

JOÃO PESSOA  
2018

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S237o Santos, Widelene Menezes Tavares.

Otimização Probabilística: Aplicação do Modelo de Distribuição de Poisson Infalcionada de Zero (ZIP) em Modelos de Localização com Demandas Probabilísticas / Widelene Menezes Tavares Santos. - João Pessoa, 2018.  
86 f.

Orientação: Roberto Quirino do Nascimento.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT.

1. Otimização Probabilística. 2. Modelos de Localização. 3. Determinísticos Equivalentes. 4. Distribuição de Poisson. 5. Distribuição de Poisson ZIP. I. do Nascimento, Roberto Quirino. II. Título.

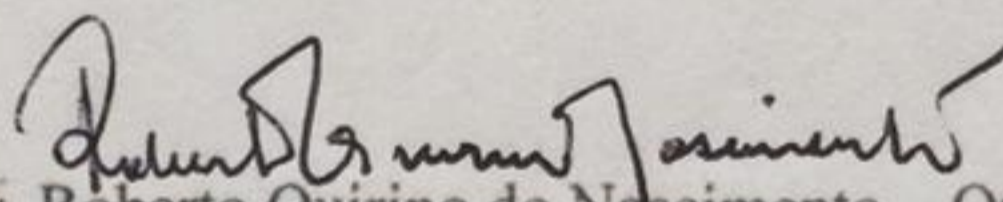
UFPB/BC

WIDELENE MENEZES TAVARES SANTOS

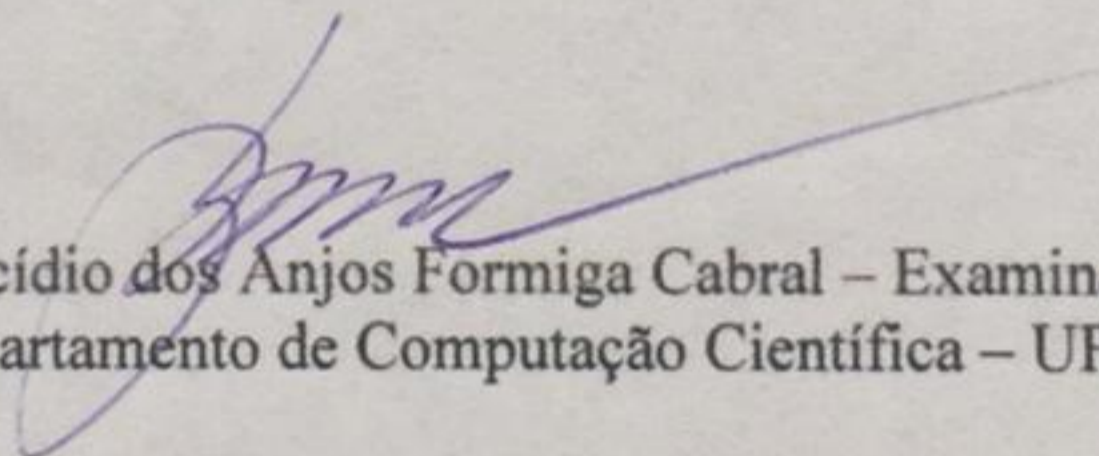
**OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA: APLICAÇÃO DO MODELO DE  
DISTRIBUIÇÃO POISSON INFLACIONADA DE ZERO (ZIP) EM MODELOS  
DE LOCALIZAÇÃO COM DEMANDAS PROBABILÍSTICAS**

Dissertação julgada e aprovada em 28 de agosto de 2018 como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção no Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba.

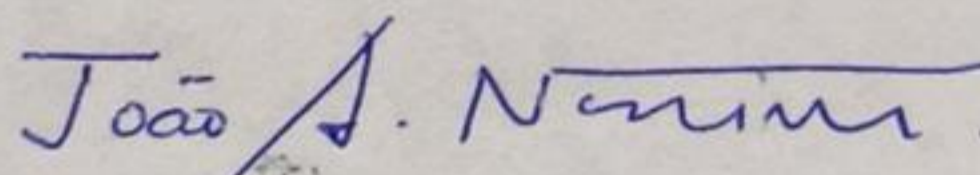
BANCA EXAMINADORA



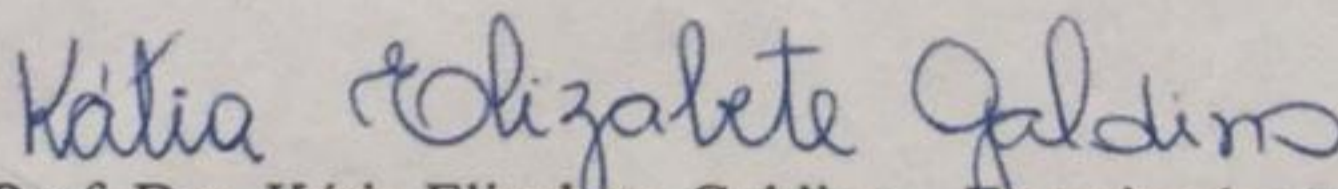
Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento – Orientador  
Departamento de Computação Científica - UFPB



Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral – Examinador Interno  
Departamento de Computação Científica – UFPB



Prof. Dr. João Agnaldo do Nascimento – Examinador Externo  
Departamento de Estatística - UFPB



Prof. Dra. Kátia Elizabete Galdino – Examinador Externo  
Núcleo de Tecnologias Estratégicas em Saúde – UEPB

JOÃO PESSOA – PB  
AGOSTO /2018

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir que eu nunca desistisse dos meus objetivos, por mais difíceis que estes se mostrassem.

Aos meus pais, Valdenice e Marinaldo, por sempre me educarem para que eu me tornasse uma pessoa responsável, assim como aos meus irmãos Wegley e Wellington, por me incentivarem diante de todas as dificuldades.

Aos professores, por serem mediadores do conhecimento que necessito como profissional e pessoa, em especial ao meu orientador, Professor Roberto Quirino, por me dar a oportunidade de trabalhar com a pesquisa, além de todo seu empenho como mediador de grande conhecimento, dedicação e amizade. Aos professores Lucídio, Kátia e João Agnaldo por todas as sugestões e contribuições de melhorias e ao Professor Pedro Rafael por todo conhecimento transmitido e colaboração com a pesquisa.

Aos estagiários Antônio e Raquel pelo auxílio e empenho no desenvolvimento do estudo em questão, bem como à Julyana pelo companheirismo e apoio na busca de novos dados e aprimoramento do estudo.

À secretaria de saúde do município de João Pessoa, pela presteza no atendimento e nos dados adquiridos.

À Secretária Ana, por todo carinho e atenção destinados a mim.

Às novas amigas da turma e principalmente da linha de pesquisa, em especial, Polyanna e Dielle, no qual compartilhei momentos preciosos.

Aos demais amigos e familiares por todo aparato de incentivos e contribuições diante dessa conquista.

*“Você nunca sabe que resultados virão de sua ação,  
mas se você não fizer nada, não existirão resultados.”*  
*Mahatma Gandhi*

## RESUMO

Este trabalho abordou problemas de localização e alocação das centrais de atendimento com demandas probabilísticas. Teve como proposta a utilização de um modelo probabilístico de otimização proposto por Beraldi, Bruni e Conforti (2004), no qual a aleatoriedade é identificada no processo de demanda assumindo que as variáveis envolvidas possuíam distribuição de Poisson. Neste trabalho, também admitimos demandas probabilísticas, porém com a distribuição de Poisson inflacionada de zeros (ZIP), com tal distribuição obtemos uma nova redistribuição que favoreça setores com maior demanda. O modelo de localização e alocação é um modelo de programação linear inteira, onde a parte probabilística é substituída por seus respectivos determinísticos equivalentes, os quais foram obtidos para ambas Distribuições. Como aplicação desta metodologia, encontramos a distribuição de serviços de urgência e emergência, onde foram coletadas chamadas ocorridas no ano de 2017 na cidade de João Pessoa, a partir desses dados, foram feitos teste de aderência através das estatísticas de comparação de Cramér Von-Mises e Anderson Darling, a matriz de distancias foi obtida através da API de distancia do Google maps e o modelo implementado foi resolvido usando o CPLEX. Como resultado houve diferença tanto na escolha de alguns postos de centrais de atendimento, como também em sua quantidade, diminuindo essa diferença com o aumento gradativo das distâncias ofertadas para cada cenário.

**Palavras-Chave:** Otimização Probabilística. Modelos de Localização. Determinísticos Equivalentes. Distribuição de Poisson. Distribuição de Poisson ZIP.

## ABSTRACT

This work addressed problems of location and allocation of call centers with probabilistic demands. It was proposed to use a probabilistic optimization model proposed by Beraldi, Bruni and Conforti (2004), in which randomness is identified in the demand process assuming that the variables involved had a Poisson distribution. In this work, we also admit probabilistic demands, but with the distribution of poisson inflated zeros (ZIP), with such distribution we obtain a new redistribution that favors sectors with greater demand. The localization and allocation model is an integer linear programming model, where the probabilistic part is replaced by its respective deterministic equivalents, which were obtained for both distributions. As an application of this methodology, we found the distribution of emergency and emergency services, where calls were collected in 2017 in the city of João Pessoa, from these data, were made adherence test through the comparison statistics of Cramér Von-Mises and Anderson Darling, the distances matrix was obtained through the Google maps Distance API and the implemented model was solved using CPLEX. As a result, there was a difference in the choice of some service centers, as well as in their quantity, reducing this difference with the gradual increase of the distances offered for each scenario.

**keywords:** Probabilistic Optimization. Location Models. Deterministic Equivalents. Poisson Distribution. Distribution of Poisson ZIP.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1– Sequência de decisões de um problema de localização. ....	20
Figura 2 - Transformação da restrição probabilística. ....	27
Figura 3 - Funcionamento para obtenção do ponto eficiente .....	51
Figura 4 - Funcionamento para obtenção do ponto eficiente .....	51
Figura 5 - Gráfico de ocorrências do Bairro Bancários com ajuste de Distribuição igual .....	61
Figura 6 – Gráfico de ocorrências do Bairro Jardim Cidade Universitária .....	62
Figura 7 - Centros dos bairros candidato a posto .....	64
Figura 8 – Bairros candidatos a posto de acordo com as Distribuições .....	64
Figura 9 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 1) .....	66
Figura 10 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 2) .....	67
Figura 11 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 3) .....	72
Figura 12 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 4) .....	73
Figura 13 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 5) .....	74
Figura 14 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 6) .....	75

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - EXTENSÃO DOS MODELOS PARA LIDAR COM INCERTEZA NA COBERTURA DA DEMANDA.....	22
QUADRO 2 - ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES TEÓRICA PARA A FERRAMENTA OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA. ....	28
QUADRO 3 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 1) .....	65
QUADRO 4 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 2) .....	66
QUADRO 5 - DEMANDAS ESPERADAS PARA CADA BAIRRO .....	68
QUADRO 6 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 3) .....	71
QUADRO 7 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 4) .....	72
QUADRO 8 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 5) .....	73
QUADRO 9 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 6) .....	75
QUADRO 10 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 7) .....	76
QUADRO 11 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 8) .....	76

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - PERCENTIS DA ESTATÍSTICA $S_1$ , COM BASE EM 5.000 AMOSTRAS DE TAMANHO $n$ DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON COM MÉDIA $\lambda$ E OS MESMOS PONTOS DE DISTRIBUIÇÃO $\chi^2(1)$ .....	41
TABELA 2 - CONJUNTO DE DADOS DE CONTAGEM DE DEFEITO NO PROCESSO DE FABRICAÇÃO .....	44
TABELA 3 - RESUMO DAS ESTATÍSTICAS DO TESTE ( $\alpha = 0,01$ ).....	44
TABELA 4 - DISTRIBUIÇÃO DAS AMBULÂNCIAS POSICIONADAS .....	54
TABELA 5 – NÚMERO DE OCORRÊNCIAS E PROPORÇÕES DE.....	54
TABELA 6 – PORCENTAGENS DE OCORRÊNCIAS POR DIA .....	56
TABELA 7 - MAIORES OCORRÊNCIAS POR DIA DE SEMANA.....	58
TABELA 8 - ESTATÍSTICAS DE ADEQUAÇÃO DE AJUSTE DE CRAMER-VON MISES ( $W^*$ ) E ANDERSON-DARLING ( $A^*$ ).....	59
TABELA 9 - PONTOS DE LATITUDE E LOGINTUDE DE CADA BAIRRO CANDIDATO A POSTO .....	62
TABELA 10 - OFERTA DOS BAIRROS CANDIDATOS A POSTO.....	68
TABELA 11 - DISTIBUIÇÃO DOS PONTENCIAS LOCAIS DE OCORRÊNCIA .....	70

## LISTA DE ABREVIACOES

FLP – *Facility Location Problem*

SAMU – Servio de Atendimento Móvel de Urgência

SME – Servios Médicos Emergenciais

ZIP – *Zero Inflated Poisson*

MLD – Modelo de Localizao Determinístico

MLP – Modelo de Localizao Probabilístico

OPRC – Otimizao Probabilística Conjunta

fdp – Funo de Distribuio de Probabilidade

fda – Funo de Distribuio Acumulada

EDF – *Empirical Distribution Function*

USA – Unidade de Suporte Avanado

USB – Unidade de Suporte Básico

NEP – Núcleo de Educao Permanente

HGSI – Hospital Geral Santa Isabel

UPA – Unidade de Pronto Atendimento

CAIS – Centro de Ateno Integral em Saúde

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>15</b>
<b>1.3</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>16</b>
1.3.1	OBJETIVO GERAL	16
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
<b>1.4</b>	<b>ESTRUTURA DO TRABALHO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>MODELOS DE LOCALIZAÇÃO</b>	<b>18</b>
2.1.1	MODELOS DE LOCALIZAÇÃO DETERMINÍSTICOS - MLD	19
2.1.2	MODELOS DE LOCALIZAÇÃO PROBABILÍSTICOS - MLP	22
<b>2.2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA COM RESTRIÇÕES PROBABILÍSTICAS CONJUNTAS (OPRC)</b>	<b>24</b>
<b>2.3</b>	<b>DETERMINÍSTICOS EQUIVALENTES</b>	<b>26</b>
2.3.1	DETERMINÍSTICOS EQUIVALENTES PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS	29
2.3.2	PONTOS EFICIENTES	30
2.3.3	PONTOS EFICIENTES E A DISTRIBUIÇÃO DE POISSON	31
2.3.4	LOGCONCAVIDADE E A DISTRIBUIÇÃO DE POISSON	33
2.3.5	O PROBLEMA DETERMINÍSTICO EQUIVALENTE	35
<b>2.4</b>	<b>MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE POISSON INFLACIONADO DE ZERO (ZIP)</b>	<b>37</b>
2.4.1	TESTE DO MODELO ZIP	40
2.4.2	LOGCONCAVIDADE E A DISTRIBUIÇÃO ZIP	47
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>48</b>
<b>3.1</b>	<b>CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA</b>	<b>48</b>
<b>3.2</b>	<b>COLETA E ANÁLISE DE DADOS</b>	<b>48</b>
3.2.1	OS DADOS	49
3.2.2	DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA	49
3.2.3	ANÁLISE DOS DADOS DE ACORDO COM A DISTRIBUIÇÃO POISSON ZIP	50
3.2.4	DETERMINAÇÃO DOS PONTOS EFICIENTE PARA A FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DE X	50
3.2.5	PONTOS DE DEMANDA DISTRIBUÍDOS POR BAIRRO E CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS	52
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO: O PROBLEMA DA REDISTRIBUIÇÃO DAS AMBULÂNCIAS</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>80</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão descritos os aspectos introdutórios desta pesquisa, com o objetivo de abordar o tema e o problema de pesquisa, destacando os motivos que levaram a sua elaboração. O capítulo está subdividido em: apresentação do tema e problema de pesquisa, justificativa e objetivos.

### 1.1 TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA

Problemas de localização, ou problemas de localização de facilidades - FLP (*facility location problem*) dizem respeito ao aspecto de logística referente à decisão de instalar, ou não, em local previamente selecionado, centros de atividade por uma utilidade ou fim específico. (LIMA JUNIOR, 2006).

Diversas aplicações deste problema têm sido observadas nos últimos tempos contribuindo de forma relevante com o desenvolvimento de problemas logísticos. Muitos problemas do mundo real não podem ter suas instâncias obtidas de forma exata sabendo-se apenas que ocorrências acontecem com certa frequência, tais eventos podem ser considerados incertos e, portanto, abordagens que envolvam algum tipo de incerteza serão mais apropriadas, neste sentido, alguns pesquisadores desenvolveram uma linha de pesquisa que tratam problemas com algum grau de incerteza.

Uma classe bem particular de problemas com essas características são os problemas de Otimização, que consistem em um grupo de equações ou inequações matemáticas que devem ser satisfeitas por um grupo de variáveis denominadas variáveis de decisão tendo como objetivo minimizar ou maximizar uma função denominada função objetivo. Quando algum destes problemas relaciona problemas de localização com incertezas e deseja-se encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função objetivo, temos, portanto, um problema de otimização sob incertezas, originando uma série de trabalhos que na literatura ficou conhecido como Otimização Probabilística.

A presença das incertezas nos ambientes produtivos levou Charnes e Cooper (1959) a formular, através de longos anos de pesquisa, uma modelagem matemática onde foram inseridas restrições probabilísticas, a qual foi transformada em uma função determinística, que pôde ser resolvida por técnicas de Otimização Convexa. Portanto, o objetivo que era

minimizar uma função sujeita a restrição probabilística, agora torna-se um problema totalmente determinístico cuja solução é resolvida para problema probabilístico.

Otimização Probabilística, no entanto, é uma técnica de otimização que pode ser aplicada em diferentes contextos, principalmente em problemas de redes, tais como transportes, sistema de energia e telecomunicações, bem como em problemas de localização de facilidades. (BERALDI; BRUNI, 2009).

Esta pesquisa consiste em estudar modelos de localização com demandas probabilísticas, tais problemas podem ser encontrados em postos de emergência, centrais de ambulâncias etc., cujas ofertas são constantes, mas a demanda é uma variável aleatória. Problemas deste tipo foram estudados por Carbone (1974), Alsalloum e Rand (2006), Mitropoulos *et al.*(2006), Beraldi e Bruni (2009), Schmid (2012).

No contexto de serviços públicos, este estudo tem o interesse em aplicar Otimização Probabilística nos Serviços de Atendimento Móveis de Urgência (SAMU), uma vez que esse tipo de problema tem sido objeto de estudo em diversas pesquisas, principalmente tratado como Modelos de Localização Facilidades (Facility Location), sendo estes modelos determinísticos ou probabilísticos, detalhes sobre tais modelagens podem ser estudadas nos trabalhos de Brotcorne, Laporte e Semet (2003) e Beraldi e Bruni (2009).

A capacidade de representar fielmente a aleatoriedade no processo de demanda fez surgir modelos em que as distribuições de probabilidade fossem combinadas com resultados das teorias das filas (LORENA, 2003). Apesar da escassez deste tipo de estudo, abordaremos um modelo probabilístico proposto por Beraldi, Brunie e Conforti (2004), no qual a aleatoriedade no processo de demanda ser semelhante a um processo de Poisson.

Para Beraldi e Bruni (2009), devido à aleatoriedade nos pedidos de emergência, tratar a incerteza sobre a demanda é uma maneira mais direta de lidar com o problema. Na realidade, o comportamento de chamadas de emergência muda dinamicamente devido a fatores tais como a sazonalidade ou a localização da população e as atividades durante um dia (por exemplo, escritório versus casa), uma semana (por exemplo, dia de semana versus fim de semana) ou um ano (dias úteis versus feriados). (ABOUELJINANE; SAHIN; JEMAI, 2013).

A utilização mais comum nos problemas de restrições probabilísticas ocorre quando as variáveis de decisão são variáveis aleatórias com distribuição normal, cujo determinístico equivalente, isto é, uma restrição determinística equivalente àquela probabilística é uma função convexa e, portanto, o problema é solucionado por meio de Otimização Convexa. Porém, existem pesquisas que apresentam a Otimização Probabilística com outras distribuições de probabilidades, essas teorias foram estudadas por Prekópa (2003), já a

distribuição Gama foi estudada por Atalay e Apadin (2011), as distribuições Binomial e de Poisson foram abordadas no trabalho de Janak, Lin e Floudas (2007). Pode-se observar que existem diversos meios para tratar as incertezas, o objetivo principal é identificar a restrição probabilística e modelá-la levando em consideração a função de distribuição de probabilidade do vetor aleatório.

Nesse contexto, a distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade discreta e tem a característica de medir a ocorrência de um determinado evento dentro de certo intervalo. No caso dos Serviços Médicos de Emergência (SME), essa distribuição pode ser utilizada por ser a distribuição do vetor de números de ocorrências que solicitam o serviço. Porém, em dados de contagem é razoável supor que a distribuição Poisson possa ser ajustada (SILVA, 2011), assumindo que os dados representem eventos de contagem com excessos de zeros, ou seja, nenhuma ocorrência pode ser solicitada pelo serviço de emergência, levando a uma superdispersão dos dados caso fossem tratados como uma distribuição Poisson padrão. Logo, um modelo que leve em consideração o excesso de zeros, ou seja, a inflação de zeros é mais indicada.

Portanto, pode-se então definir o problema de pesquisa desse trabalho com o seguinte questionamento:

Como resolver os problemas de localização quando as demandas probabilísticas seguem uma distribuição de Poisson Inflacionada de Zero?

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Nos ambientes produtivos, as incertezas estão cada vez mais presentes, tornando difícil o processo de tomada de decisão e sua busca por resultados confiáveis sem distorções que causem danos a estes sistemas.

À medida que as comunidades crescem e os dados demográficos mudam a aleatoriedade para satisfazer as crescentes demandas públicas de respostas de emergência passa a ser fator preponderante na manipulação de dados na busca por qualidade de serviço e cobertura de sua prestação.

Diante deste contexto, sabe-se que os modelos matemáticos determinísticos não modelam as incertezas, por isso Otimização Probabilística é de grande relevância nessa

modelagem, pois, além de abordar as incertezas inerentes ao processo, ela quantifica a relação entre a rentabilidade e a confiabilidade, ou seja, fornece informações completas sobre o desempenho econômico em função do nível de confiança desejado das restrições do processo.

Uma grande aplicação de Otimização Probabilística é o problema de otimização de sistemas de emergência e têm sido encontrados na literatura desde a década de 1970. Vários modelos com diferentes funções objetivas e restrições foram propostas na literatura acadêmica e técnicas de soluções foram desenvolvidas para fornecer boas soluções em tempo razoável. (BAŞAR; ÇATAY; UNLUVURT, 2011)

Aplicar Otimização Probabilística no serviço de emergência médica é bastante satisfatória, pois as restrições probabilísticas são capazes de modelar fenômenos aleatórios tais como as chamadas de urgências e ainda permite ao gestor buscar o equilíbrio entre o custo e a qualidade do serviço. (BERALDI; BRUNI, 2009).

De modo geral, este trabalho está inserido no contexto da Engenharia de Produção, por estudar uma técnica de Otimização inserida na linha de Pesquisa Operacional e propõe-se aplicar um modelo de Otimização Probabilística, com o intuito de estudar as demandas probabilísticas referentes à prestação de socorro solicitada para o município de João Pessoa. Vale ressaltar que o modelo (BERALDI; BRUNI; CONFORTI, 2004) foi apresentado como exemplo numérico e nesta pesquisa será aplicado o modelo no problema real.

Esse trabalho também encontra justificativa no fato de que ainda não foram desenvolvidos estudos sobre Otimização Probabilística onde a distribuição do vetor de números de ocorrências que solicitam serviços de emergência leva em consideração dados com ocorrências nulas.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo geral

Resolver um problema de localização cujas demandas são variáveis aleatórias que seguem uma distribuição de Poisson Inflacionada de Zero (ZIP).

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Estudar um modelo de localização, em particular os que capturam as incertezas que advém dos ambientes no processo de representação da realidade.
- Abordar a teoria da Otimização Probabilística com o objetivo de procurar transformar o ente incerto, representado no modelo por uma inequação probabilística, numa inequação determinística denominada determinístico equivalente.
- Aplicar o modelo de localização com demanda probabilística ao serviço de distribuição das ambulâncias na cidade de João Pessoa.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O restante desse trabalho será estruturado como segue:

- O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica sobre Modelos de Localização e a teoria da Otimização Probabilística. Este capítulo tem o intuito definir este tipo de otimização e sua importância no auxílio ao atendimento de ocorrências probabilísticas.
- Os procedimentos metodológicos são apresentados no capítulo 3.
- O Capítulo 4 refere-se ao experimento computacional, aplicações de Otimização Probabilística e ajustamento da distribuição Poisson ZIP no funcionamento do SAMU.
- Para finalizar, o capítulo 5 apresentará as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo será apresentada a revisão da literatura com o objetivo de fornecer uma base conceitual dos modelos de localização e Otimização Probabilística. Primeiramente, apresenta-se uma visão geral sobre modelos de localização, mostrando a evolução do conceito e algumas definições, bem como a modelagem do problema que será utilizado na manipulação dos dados. Posteriormente, expõem-se definições e práticas relacionadas à Otimização Probabilística. Segue, mostrando o uso da Distribuição Poisson e as alternativas propostas que permitem a aderência de dados com um número considerável de zeros.

### 2.1 MODELOS DE LOCALIZAÇÃO

Problemas de localização, ou problemas de localização de facilidades - FLP (*facility location problem*) dizem respeito ao aspecto de logística referente à decisão de instalar, ou não, em local previamente selecionado, centros de atividade por uma utilidade ou fim específico. (LIMA JUNIOR, 2006)

Os modelos de localização são representações de uma ampla variedade de situações concretas em que a problemática de decisão apresenta-se sob diversas formas, não sendo possível classificar com exatidão a posição ocupada por tais problemas de otimização.

As decisões que envolvem a melhor localização não passaram a constituir pesquisas somente nos anos recentes, seus primórdios têm contribuição dos estudiosos: Johann Heinrich Von Thunen (1780-1850); Alfred Weber (1868-1958) e Edgar M. Hoover (1948). Um passo importante do estudo relacionado à teoria de localização é marcado pela obra de Melvin L. Greenhut, 1956 - "Plant Location in Theory and Practice: The Economics of space" - na qual a inserção da demanda foi apreciada na análise de localização de um centro industrial, porém, com a hipótese ainda vigente de uma única solução para estes problemas. O marco moderno referente à localização levou L. Cooper (1963) à possibilidade de serem necessários múltiplos pontos de abastecimento para a satisfação dos mercados, provocando, inclusive, o surgimento de algoritmos eficientes.

Os modelos de localização têm seus modelos matemáticos classificados como: estático e dinâmico, determinísticos e estocásticos (OWEN; DASKIN, 1998). Nos modelos estáticos e

dinâmicos, o fator tempo é questão de análise. Ou seja, quando não depende do tempo, é dito estático; porém, fala-se em espaço-temporal (onde e quando localizar certa facilidade) nos modelos dinâmicos.

As incertezas inerentes do mundo real, tais como: demandas, custos e tempos de viagem, dividem seus estudos em: Modelos Determinísticos (sem restrições de incerteza) e Modelos Estocásticos (sujeitos à incerteza), estes podem ainda ser subdivididos em: probabilístico e planejamento do cenário. Nos modelos probabilísticos, consideram-se os parâmetros incertos como variáveis aleatórias com Distribuição de Probabilidade conhecida. Enquanto na abordagem de planejamento do cenário, atribuem-se possíveis valores futuros para as diversas variáveis geradas pelos tomadores de decisão.

Os modelos de localização de instalações têm sido utilizados como elementos auxiliares na tomada de decisão por longas décadas, fazendo com que gestores possam ter um controle dos parâmetros incertos. Diversos trabalhos foram desenvolvidos na tentativa de modelar as situações em que se deseja alocar facilidades sob diferentes perspectivas conforme abordado por Louveaux (1986) e Snyder (2006).

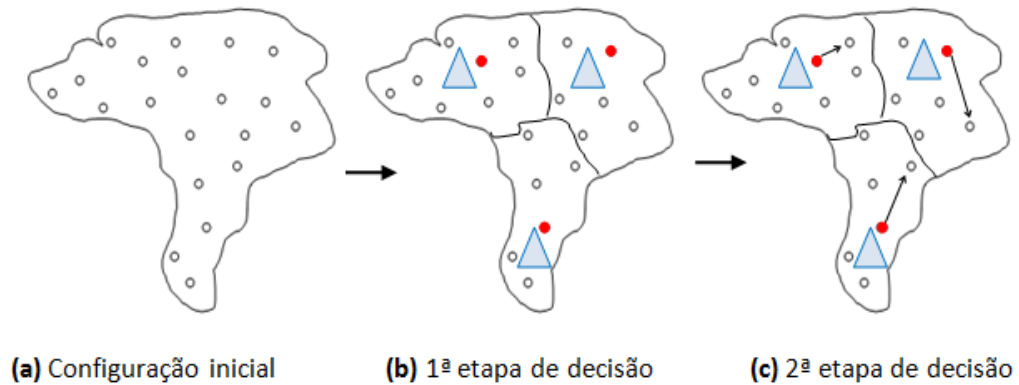
### 2.1.1 Modelos de localização determinísticos - MLD

Modelo Determinístico é um modelo matemático que determina os resultados, exatamente, a partir das condições iniciais – conjunto de entradas conhecido e do qual resultará um único conjunto de saídas. (FORATTINI, 1992).

No caso da modelagem determinística do problema de localização, informações como as potenciais posições para a localização de facilidades, a demanda de cada região, o tempo de viagem entre pontos de demanda e locais candidatos à localização de facilidades são de grande relevância neste processo.

Para o estudo proposto, questões como localizar e alocar certa facilidade (instalação) passa a ser fator essencial no que tange a tomada de decisão em projetos robustos de SME. Uma sequência de decisões para o problema de localização pode ser visto na Figura 1:

Figura 1– Sequência de decisões de um problema de localização.



Fonte: Adaptação Nickel, Reuter-Oppermann e Saldanha-da-Gama, (2016).

Para um determinado espaço geográfico, a partir da configuração inicial (a), assume-se que a solicitação de um SME está concentrada em um conjunto finito de pontos de demanda  $I$ . Na primeira etapa de decisão (b), considera-se um determinado conjunto finito  $J$  de potenciais localizações onde as facilidades (instalações) podem ser localizadas. Já no processo final de decisão – segunda etapa (c), tem-se que um candidato local  $j$  pode prestar serviço a um ponto de demanda (coberto por  $j$ ), somente se, a distância  $d_{ij}$ , entre  $i$  e  $j$ , está dentro de um certo limiar  $T$ .

Assim, o problema de localização, para atender a solicitação de serviço de toda área geográfica, pode ser escrito como um MLD de programação linear inteira definido da seguinte forma (BERALDI; BRUNI; CONFORTI, 2004):

$$\text{Min} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq h_i, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in M_j} x_{ij} \leq q_j y_j, \quad j = 1, \dots, J, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ inteiro}, \quad y_j \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \quad (4)$$

- Conjuntos do modelo:  $N_i \subset M_j$ 
  - ✓  $M_j$ : conjunto dos pontos de demanda que podem ser coberta pela localização  $j$ ,  
 $M_j = \{i \in I / d_{ij} \leq T\}$ ;
  - ✓  $N_i$ : conjunto de todos os locais candidatos que podem cobrir a demanda no ponto  $i$ ,  $N_i = \{j \in J / d_{ij} \leq T\}$ ,

onde:

$d_{ij}$ : distância do viajante, entre  $i$  e  $j$ , dentro de um certo limiar  $T$ ;

$T$ : limiar que depende principalmente as atuais leis regionais ou de padrão nacional e do protocolo médico adotado em casos de emergência.

- Dados do modelo:
  - ✓  $h_i$ : requisição de serviço/cobertura que assegura a demanda no ponto  $i$ ;
  - ✓  $q_j$ : capacidade da facilidade no ponto  $j$ ;
  - ✓  $C_{ij}$ : custo de atender a demanda no ponto  $i$  a partir de uma facilidade localizada em  $j$ ;
  - ✓  $f_j$ : custo fixo de instalação de uma facilidade no local  $j$ .
- Variáveis de decisão:
  - ✓  $x_{ij} \begin{cases} 1, \text{ se } i \in M_j \text{ é atendido por } j \in N_i. \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
  - ✓  $y_j \begin{cases} 1, \text{ se } j \in N_i \text{ é escolhido.} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Uma desvantagem dos modelos determinísticos é que eles partem da hipótese que os servidores estão disponíveis quando solicitados, o que nem sempre é aceitável em situações práticas. O desenvolvimento dos modelos de localização de instalações sob incerteza, tornou-se, no entanto, uma prioridade tanto na logística, quanto nas comunidades de otimização estocástica/robusta. (SNYDER, 2006)

### 2.1.2 Modelos de localização probabilísticos - MLP

Os modelos de localização probabilísticos tentam representar cuidadosamente os problemas reais capturando sua complexidade inerente, principalmente se estes lidam com serviços de emergência, tais como, postos de emergência, centrais de ambulância etc. em que a facilidade que cobre a demanda pode não estar disponível. Neste caso, considera-se a possibilidade de ocorrência deste tipo de evento incluindo no modelo medidas de probabilidades, sendo possível também, a consideração de filas no processo de atendimento. (LORENA, 2003)

A evolução dos modelos de localização relacionados a instalações de saúde levou Afshari e Peng (2014) a desenvolverem uma investigação acerca de desafios e métodos para a tomada de decisão eficaz. Os serviços de saúde por eles elencados são divididos em: emergência (instalações móveis), centros médicos (instalações físicas) e prevenção. Em particular, para lidar com o desafio da incerteza presente na cobertura da demanda destes tipos de serviços, alguns modelos e seus respectivos autores podem ser visto no Quadro 1.

**QUADRO 1 - EXTENSÃO DOS MODELOS PARA LIDAR COM INCERTEZA NA COBERTURA DA DEMANDA.**

<b>Autores</b>	<b>Modelo</b>
Daskin <i>et al.</i>	Problema máximo de localização da cobertura esperada (MEXCLP)
ReVelle e Hogan <i>et al.</i>	Problema de localização de disponibilidade máxima (MALP I & II)
	Confiabilidade $\alpha$ do problema P-centro
Batta <i>et al.</i>	MEXCLP Ajustado (AMEXCLP)
Goldberg <i>et al.</i>	
Ball e Lin <i>et al.</i>	Problema de cobertura de conjunto de localização (LSCM) Modificado
Repede e Bernardo <i>et al.</i>	Tempo dependente MEXCLP (TIMEXCLP)
Marianov e ReVelle <i>et al.</i>	Problema de cobertura de conjunto de localização probabilística de filas (QPLSCP)
Mandell <i>et al.</i>	Modelo de duas camadas (TTM)
Marianov e Serra <i>et al.</i>	Problema de localização-alocação de cobertura máxima (MCLAP)
Sorensen e Church <i>et al.</i>	Confiabilidade Local baseada no MEXCLP (LR-MEXCLP)
McLay <i>et al.</i>	MEXCLP2
Geroliminis <i>et al.</i>	Modelo de localização estocástico híbrido em fila (SHQLM)
	Modelo de fila espacial (SQM)
Galvão <i>et al.</i>	Problema de localização de disponibilidade máxima estendido (EMALP)

Karasakal e Karasakal <i>et al.</i>	MCLP com cobertura parcial (MCLP-P)
Drezner <i>et al.</i>	Modelo de Cobertura Gradual Estocástica
Berman <i>et al.</i>	Problema de Cobertura do Conjunto de Localização Cooperativa (CLSCP)
	Problema de Localização de Cobertura Máxima Cooperativa (CMCLP)
	Média da fila estocástica (SQM)
Carbone <i>et al.</i>	Mudança na restrição P-mediana
Hochbaum e Pathria <i>et al.</i>	P-centro estocástico

Fonte: Adaptação de Afshari e Peng (2014)

Como a restrição probabilística de demanda é questão de análise nessa pesquisa, tem-se que, para cada ponto de demanda há uma aleatoriedade associada, não sendo possível prever quando e onde ocorrerá certo evento de solicitação, dificultando assim o processo de tomada de decisão referente ao problema de localização.

Diante do exposto, reformulando o problema determinístico, visto na seção (2.1), para a Otimização Estocástica, a restrição (2) do modelo determinístico aparece com a seguinte restrição probabilística:

$$Prob\left(\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \xi_i\right) \geq p_i, i = 1, \dots, I, \quad (5)$$

onde  $Prob(A)$  “significa a probabilidade do evento A”

Observa-se que as demandas são consideradas variáveis aleatórias discretas denotadas por  $\xi_i$  e não mais por  $h_i$ . Onde  $p_i$  é nível de confiança para o ponto de demanda  $i$ , ou seja, a confiabilidade individual para cada ponto de demanda  $i$ .

Várias extensões de problemas de localização determinísticos podem ser tratadas no caso estocástico. Trabalhos deste tipo podem ser encontrados em Brandeau e Chiu (1989), Louveaux (1993), Daskin e Owen (1999), Current, Daskin e Schilling (2002). Para uma discussão detalhada sobre programação estocástica referenciamos o leitor à Birge e Louveaux (1997).

Aplicar o mesmo valor  $p$  para todos os pontos de demanda não garante alcançar a confiabilidade para toda a área geográfica, sendo assim o uso de uma Restrição Probabilística conjunta vista melhor na seção seguinte, assegura esta confiabilidade e torna o uso deste modelo original, sendo uma ferramenta flexível que permite modelar vastas situações.

Assim a restrição (5) foi reescrita como:

$$P\left(\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \xi_i, \forall i \in I(s)\right) \geq p_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (6)$$

onde  $S$  é denotada como o número de subáreas composta por um grupo de demandas e  $s$  é denotado como a subárea.

## 2.2 OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA COM RESTRIÇÕES PROBABILÍSTICAS CONJUNTAS (OPRC)

Os modelos de Otimização Probabilística são modelos matemáticos que consideram as incertezas do problema como uma função de probabilidade que aparecem nas restrições ou na função objetivo do modelo.

Na Otimização Probabilística, uma restrição probabilística aparece com uma única probabilidade e seu nível de confiabilidade determinado, quando nos deparamos com essas restrições de forma conjunta – Otimização Probabilística com Restrição Conjunta (OPRC) há a relação entre várias probabilidades com seus respectivos níveis de confiança e o chamado nível de confiabilidade global, podendo ser modeladas da seguinte forma:

$$\text{Min } c^t x$$

Sujeito a:

$$P[Ax \geq b] = P\left[\bigcap_{i=1}^m \{\tilde{a}_i^T x \geq bi\}\right] \geq \beta \quad (7)$$

$$x \geq 0$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{m \times n}$$

$$b = [b_1, \dots, b_m]^T \in \mathcal{R}^m$$

$$c = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathcal{R}^n$$

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n$$

Supondo que cada componente do vetor  $b$ , na restrição (7) é uma variável aleatória discreta. Temos:

$$\text{Min } c^t x$$

Sujeito a:

$$P[Ax \geq b] = P[\tilde{\alpha}_i^T x \geq bi] \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\prod_{i=1}^m \alpha_i \geq \beta$$

$$x \geq 0$$

Para o processo de tomada de decisão, antes de levar em consideração eventos subjacentes aleatórios, as restrições probabilísticas são de grande relevância quando ocorrem uma desigualdade comum no sistema e os parâmetros aleatórios são fatores críticos. (ALCKOOIJ *et. al.*, 2016)

Os problemas que envolvem restrições probabilísticas ainda recebem pouca atenção por parte dos pesquisadores, uma visão geral sobre esta teoria pode ser encontrada em Prékopa *et. al.* (1995, 2003). As primeiras abordagens de soluções foram baseadas em planos de corte (PRÉKOPA, 1978). Atualmente se lida com métodos de aproximação de cenários e abordagem de binarização (ALCKOOIJ *et. al.*, 2016) – emprega a programação booleana para detectar padrões combinatórios, a partir do qual reformulações exatas podem ser resolvidas sempre que o conjunto de suporte do vetor aleatório é finito.

De acordo com Beraldi, Bruni, Conforti (2004), todas as abordagens para solução de problemas envolvendo restrições probabilísticas baseiam-se na derivação de formulações de equivalentes determinísticos, no qual conceitos importantes sobre modelos e métodos que envolvem esta regularização podem ser encontrados no trabalho de Dentcheva e Martinez (2013) e Prékopa (2010).

Portanto, o conjunto de métodos que tratam das restrições probabilísticas e a noção de métodos baseados em pontos eficientes abordados em Prékopa (2010), serão estudados com

melhor ênfase nas seções seguintes para melhor entendimento e tratativa dos dados incertos e determinação de uma solução confiável.

### 2.3 DETERMINÍSTICOS EQUIVALENTES

Otimização Probabilística procura transformar o ente incerto, representado no modelo por uma inequação probabilística, numa inequação determinística denominada determinístico equivalente.

Com base no exposto, a Otimização Probabilística pode ser definida de duas formas (LI; GARCIA; WOZNY, 2006). A primeira definição foi proposta por Charnes e Cooper (1958) onde usaram restrições probabilísticas individuais. A segunda proposta foi apresentada por Mille e Wagner (1965) os quais modelaram as restrições probabilísticas conjuntas (OPRC). (ARAÚJO, 2012) De acordo com estas definições, podemos transformar uma restrição probabilística em funções determinísticas.

Charnes e Cooper (1958) limitou seu conceito para distribuições probabilísticas normais ou distribuições cujas mesmas podem ser aproximadas para distribuição normais, tais como, a distribuição de probabilidade Multinomial. Para exemplificar, sabe-se que o problema de programação linear é definido como:

$$\begin{aligned} & \text{Max } c^t x \\ \text{Sujeito a:} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

onde:

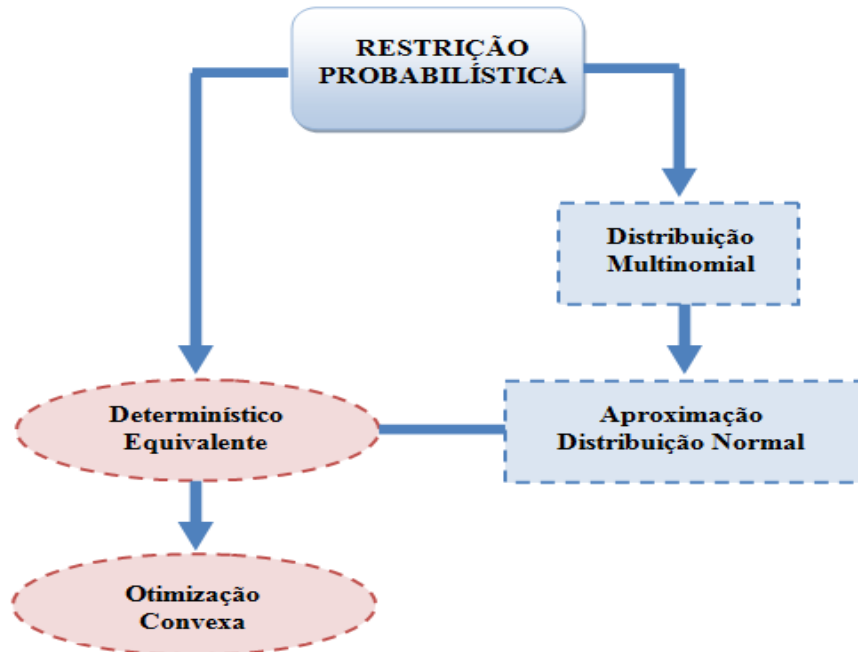
$$x \in \mathfrak{R}^n, c \in \mathfrak{R}^n, b \in \mathfrak{R}^m \text{ e } A \in \mathfrak{R}^{m \times n}.$$

Charnes e Cooper *et al.* (1958 e 1959) consideraram  $c$  como sendo parâmetro determinístico,  $A$  como sendo matriz composta de vetor aleatório e  $b$  variável aleatória com função de probabilidade acumulada conhecida  $\phi$ . Assim, para um parâmetro incerto  $b$ , pode-se adotar um nível de confiabilidade  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0; 1]$ . Desse modo, a restrição (8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P(Ax \leq b) \geq 1 - \alpha \tag{9}$$

Em resumo, a ideia principal de Charnes e Cooper, é melhor explicada na Figura 2.

Figura 2 - Transformação da restrição probabilística.



Fonte: Adaptação de Charnes e Cooper (1958) *apud* Araújo, (2011).

O caso mais geral para Otimização Probabilística foi proposto por Prékopa (1971) da seguinte forma:

$$\text{Min } h(x)$$

*Sujeito a:*

$$\begin{aligned} h_0(x) &= P(g_1(x, b) \geq 0, \dots, g_r(x, b) \geq 0) \geq \alpha_0 \\ h_0(x) &\geq p_1, \dots, h_m(x) \geq p_m, \end{aligned} \quad (10)$$

onde:

$x \in R^n$  é um vetor aleatório de decisão;

$\alpha = [\alpha \in \Omega: \alpha \subset \mathfrak{R}^q]$  é um vetor aleatório;

$h, h_0, h_1, \dots, h_m$  e  $g_1, \dots, g_r$  são definidas em  $\mathfrak{R}^n$  e  $\mathfrak{R}^{n+q}$ , respectivamente;  $\alpha_0$  é o nível de probabilidade estabelecido que garante a confiabilidade do sistema.

Note que, se  $g_i$  é uma função linear para  $x$  e  $\alpha$ , isto é,  $g_i(x, \varepsilon) = a_i x - b_i, i = 1, \dots, r$ . Assim, a restrição probabilística (10) é escrita como segue:

$$P(Ax \geq b) \geq 1 - \alpha \quad (11)$$

Diante do exposto, além de observar a aleatoriedade dos parâmetros inseridos no modelo, é de grande relevância definir o tipo de variável (discreta ou contínua), bem como a sua distribuição de probabilidade. Com relação à natureza do problema de programação, ou seja, após transformar a restrição probabilística em uma função determinística, o problema em questão pode torna-se um problema linear ou não linear. Para este estudo, a atenção será voltada para o Problema linear e será apresentada na seção (2.3.1) a teoria de Otimização Probabilística para variáveis aleatórias discretas.

Em resumo, para Araújo (2012) a Otimização Probabilística, faz parte da Otimização Estocástica e sua modelagem lida com restrições probabilísticas para variáveis contínuas ou discretas com o objetivo de solucionar de forma eficiente os problemas reais que são apresentados através de modelos matemáticos associados a parâmetros determinísticos ou incertos. Algumas contribuições e aplicações da Otimização Probabilística, podem ser vistos no Quadro 2.

#### QUADRO 2 - ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES TEÓRICA PARA A FERRAMENTA OTIMIZAÇÃO PROBABILÍSTICA.

Autores	Otimização Probabilística	Variáveis e Restrições
Charnes e Cooper (1958)	Transformou as restrições probabilísticas em determinísticos equivalentes, com tal transformação chegou a uma função convexa.	Considerou que as v.a são normais e independentes.
Charnes e Cooper (1959)	Transformou as restrições probabilísticas em problemas inteiro misto.	Considerou que as variáveis são normais e independentes.

Wagner e Mille (1965)	Apresentou otimização probabilística com restrições de probabilidades conjuntas	Considerou as variáveis aleatórias foram normais e independentes.
Sen e Hagle (1999)	Um tutorial introdutório de programação estocástica	Este tutorial mostra todas as técnicas inseridas na programação estocástica inclusive Otimização probabilística.
Prékopa (2003)	Apresentou a teoria log côncava para usar em otimização probabilística. Diversas contribuições no tempo	Considerou as variáveis independentes se apresentou diversas distribuições de probabilidade.
Li, Garcia e Wonzy (2006)	Apresentou que existe várias situações a ser considerada para aplicar otimização probabilística.	Este artigo é apresentado apenas discussões sobre a técnica para modelos lineares e não lineares. Afirma que a distribuição mais comum nos processos são as distribuições normais.
Attalay e Appadim (2011)	Apresentou uma modelagem probabilística baseado na desigualdade para buscar os equivalentes determinísticos	Trabalhou com as variáveis contínuas e distribuição gama.
Nascimento e Anjos (2009)	Apresentou determinísticos equivalentes usando a desigualdade de Markov	A única regra para aplicar otimização probabilística é que as variáveis aleatórias devem ser não negativas.

Fonte: Araújo, 2012.

### 2.3.1 Determinísticos equivalentes para variáveis aleatórias discretas

Para variáveis aleatórias discretas há escassez de proposta (LI; GARCIA; WOZNY, 2006). No entanto, Prékopa juntamente com outros autores têm dado uma relevante atenção durante anos para estas variáveis.

No caso das variáveis discretas independentes, Prékopa (2003) *apud* Araújo (2012) apresenta caracterizações de funções log côncava e  $\alpha$ -côncava para casos de algumas funções de variáveis aleatórias discretas univariadas, como também, apresentou teorema que permite

usar Distribuições Multivariadas discretas enfatizando que esta teoria ainda precisa ser muito explorada.

Dentcheva, Prékopa e Ruszczyński (2000) *apud* Araújo (2012) introduziram o conceito de distribuições da probabilidade e pontos eficientes para resolver problemas com restrições probabilísticas de distribuições de variáveis discretas.

Para este estudo, a teoria dos pontos eficientes e funções log-côncava proposta por Prékopa (2010) serão apresentadas com mais detalhe na seção seguinte.

### 2.3.2 Pontos eficientes

Os pontos eficientes são conceitos-chaves para tratar numericamente com restrições probabilísticas, que surgem em muitos problemas da vida real, tais como incerteza na demanda.

Neste contexto, a teoria de pontos eficientes é utilizada para propor um determinístico equivalente para o seguinte problema de Programação Linear (MLP):

$$\begin{aligned} & \text{Min } c^t x \\ \text{Sujeito a:} & \\ & \text{Prob}(Bx \geq \xi) \geq \alpha \\ & Ax \leq b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{12}$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes,  $\xi$  é um vetor aleatório e  $\alpha$  é o nível de confiança.

Para o caso discreto em que  $\xi$  possui distribuição discreta assume-se que  $\xi$  é um vetor aleatório com distribuição discreta. Primeiro é necessário apresentar a definição de pontos eficientes, que segundo Prékopa (2010), a definição é dada por:

**Definição 1:** Dada uma variável aleatória discreta com função distribuição  $F$  e  $0 < p < 1$ . Um ponto  $z \in \mathbb{R}$  é dito  $p$ -eficiente para a função de distribuição de probabilidade  $F$ , se  $F(z) \geq p$  e não existir um  $y$  tal que  $y \leq z$ ,  $F(y) \geq p$ .

**Lema 1:** Dado  $p \in (0,1)$  e  $l_i$  um ponto eficiente para a distribuição Marginal  $F_i$  unidimensional,  $i = 1, \dots, s$ . Então para todo  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(v) \geq p$  teremos  $v_i \geq l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### 2.3.3 Pontos eficientes e a distribuição de Poisson

A Distribuição de Poisson foi descoberta por Siméon-Denis Poisson e publicada conjuntamente com sua teoria de probabilidade, em 1837, no seu trabalho *Recherches sur la probabilité des jugements em matières criminelles et matrière civile* (RIZZATO, 2011). Esta distribuição de probabilidade tem a característica de medir a ocorrência de um determinado evento dentro de um certo intervalo de tempo. Este evento, que ocorrem em determinado período devem ser independentes. Dessa forma, a sua Função de Distribuição de Probabilidade é definida por

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad (13)$$

com  $\lambda > 0$ ,

onde:

$x = n^\circ$  de ocorrência.

$\lambda =$  taxa média de ocorrência

Por definição a função  $F$  é denominada de função de distribuição acumulada da variável aleatória  $X$ , ou seja,  $F(x) = P(X \leq x)$ . Assim, se  $X$  for uma variável aleatória discreta, então a  $F(x) = \sum_j p(x_j)$ , onde os índices satisfaça a desigualdade  $x_j \leq x$ .

Dessa forma, a função acumulada da Poisson é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} & x \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

A Distribuição discreta de Poisson possui média e variância iguais. Para tanto a esperança  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

A variância  $X$ , pode ser calculada da seguinte forma:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \lambda^2.$$

Mas,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} (x^2 + 0) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \lambda = \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \text{Var}(X) = E(X^2) - \lambda^2 = \lambda$$

Assim,  $\text{Var}(X) = \lambda$  e, portanto, para a Distribuição de Poisson  $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ . Contudo, na prática isso pode não ser observado, podendo caracterizar-se como um problema de superdispersão que será melhor abordado na seção 5.

**Definição 2:** Dada uma variável aleatória discreta  $\xi$ , uma sequência  $p_k \in \mathbb{R}$  é a função de densidade de  $\xi$  se:  $\sum_{i \in M} p_k = 1, p_k > 0$ . A função de distribuição de  $\xi$  é dada por:  $F(z) = \text{Prob}(\xi < z)$ .

**Definição 3:** Dado um vetor aleatório  $\Xi = (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n)$ , definimos a função Probabilidade Conjunta de  $\Xi$  por  $P_{\Xi}(\xi) = \text{Prob}(\Xi_1 = \xi_1, \Xi_2 = \xi_2, \dots, \Xi_n = \xi_n)$ , a Função de Distribuição Conjunta de  $\Xi$  por  $F(\xi) = \text{Prob}(\Xi_1 \leq \xi_1, \Xi_2 \leq \xi_2, \dots, \Xi_n \leq \xi_n)$  e a  $i$ -ésima Distribuição Marginal de  $\Xi$  por  $F_i(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\Xi)$ .

Assim, considerando que os vetores são independentes, a função de probabilidade conjunta é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = P\left(\frac{\lambda^{\xi_1} e^{-\lambda}}{\xi_1!}, \frac{\lambda^{\xi_2} e^{-\lambda}}{\xi_2!}, \dots, \frac{\lambda^{\xi_n} e^{-\lambda}}{\xi_n!}\right) \\ &= \frac{\lambda^{\xi_1} e^{-\lambda}}{\xi_1!} \cdot \frac{\lambda^{\xi_2} e^{-\lambda}}{\xi_2!} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{\xi_n} e^{-\lambda}}{\xi_n!} \end{aligned}$$

### 2.3.4 Logconcavidade e a distribuição de Poisson

**Definição 4:** Uma variável aleatória discreta com distribuição  $\{p_k, k = 1, 2, \dots\}$  é logcôncava se :

$$p_{(k)}^2 \geq p_{(k-1)}p_{(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

**Proposição 2:** Seja  $X$  uma variável aleatória tendo distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , então a função de densidade de  $X$  é logcôncava.

**Prova 1:** Se  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , então sua função densidade é dada por :  $\text{Prob}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ , para  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} p_{(k-1)}p_{(k+1)} &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= (e^{-\lambda})^2 (\lambda^k)^2 \frac{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{(k+1)!} \\ &= (e^{-\lambda} \lambda^k)^2 \cdot \frac{k}{k(k-1)!} \cdot \frac{1}{(k+1)k!} \\ &= \frac{(e^{-\lambda} \lambda^k)^2}{(k!)^2} \cdot \frac{k}{k+1} < \frac{(e^{-\lambda} \lambda^k)^2}{(k!)^2} = p(k)^2 \text{ pois } \frac{k}{k+1} < 1 \end{aligned}$$

Logo, a distribuição de Poisson é logcôncava.

**Proposição 3:** Seja  $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  um vetor aleatório com função de Distribuição  $F$ ,  $\xi_i$  variáveis aleatórias independentes com densidade de Poisson com parâmetro  $\lambda_i$  e distribuição conjunta  $F$ . Se  $l$  é um ponto  $p$ -eficiente para  $F$ ,  $T \in Z_+^n$  é tal que  $F(l_i + T_i) = 1 - \epsilon \gg p$  então existem  $z_{ik} \in \{0, 1\}$ , tais que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{T_i} a_{ik} z_{ik} \geq \alpha, \quad (15)$$

onde  $a_{ik} = \ln(F_i(l_i + k)) - \ln(F_i(l_i + k - 1))$  e  $\alpha = \ln(p) - \ln(F(l))$ , e

$$\text{Prob}\left(\xi_i \leq l_i + \sum_{k=1}^{T_i} z_{ik}\right) \geq p$$

**Prova 2:** A existência dos  $z_{ik} \in \{0,1\}$  satisfazendo (15) é devido à logconcavidade da função marginal, tal fato garante que a sequência  $a_{ik}$  é tal que  $a_{ik+1} \leq a_{ik}$ , portanto, para  $k$  suficientemente grande existe pelo menos um  $z_{ik}$  satisfazendo (t).

$$\sum_{k=1}^{T_i} a_{ik} z_{ik} = \left( \ln \prod_{k=1}^{T_i} \left( \frac{F_i(l_i + k)}{F_i(l_i + k - 1)} \right)^{z_{ik}} \right) = \ln \left( \frac{F_i(l_i + \sum_{k=1}^{T_i} z_{ik})}{F_i(l_i)} \right)$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{T_i} a_{ik} z_{ik} = \ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{F_i(l_i + \sum_{k=1}^{T_i} z_{ik})}{F_i(l_i)} \right) =$$

$$\ln \left( \prod_{i=1}^n \frac{F_i(l_i + \sum_{k=1}^{T_i} z_{ik})}{F(l)} \right) \geq \ln \left( \frac{p}{F(l)} \right)$$

Pela independência de  $\xi_i$  segue-se o resultado.

**Proposição 4:** Se uma função  $p(k)$  de distribuição de probabilidade (f.d.p) é logcôncava, então sua Função  $F_x(k)$  de distribuição acumulada (F.d.a) também é logcôncava.

$$k \mapsto F_x(k) = P(X = K) = \sum_i p(k_i), \quad k_i < k$$

Logo, a sequência dada por  $a_{ik} = \ln(F_i(l_i + k)) - \ln(F_i(l_i + k - 1))$ , com  $F_i$  sendo logcôncava garante que  $a_{ik}$  é não crescente.

**Prova 3:**  $a_{k+1} \leq a_k$

$$\begin{aligned}
 & a_{k+1} - a_k \leq 0 \\
 & = \log((F(l+k+1) - \log(F(l+k) - \log(F(l+k) + \log(F(l+k-1))) \\
 & = \log \frac{F(l+k+1) \cdot F(l+k-1)}{F(l+k) \cdot F(l+k)} \\
 & = \log \frac{F(l+k+1) \cdot F(l+k-1)}{F(l+k)^2}
 \end{aligned}$$

Como a sequência  $F_k = F(l+k)$  é logcôncava, então:

$$\log \frac{F(l+k+1) \cdot F(l+k-1)}{F(l+k)^2} \leq 0$$

Portanto,  $a_{k+1} - a_k \leq 0$ , ou seja,  $a_k$  é não crescente.

### 2.3.5 O problema determinístico equivalente

Diante da Proposição 2, visto na seção anterior, podemos construir um problema determinístico equivalente cuja solução também é solução para o problema determinístico em estudado.

$$\text{Min} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (1)$$

sujeito a:

$$\text{Prob} \left( \sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \xi_i \right) \geq p, \quad i = 1, \dots, I; \quad 0 < p < 1 \quad (16)$$

$$\sum_{i \in M_j} x_{ij} \leq q_j y_j, \quad j = 1, \dots, J, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ inteiro}, \quad y_j \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, I; \quad j = 1, \dots, J \quad (4)$$

A restrição (16) apresenta o caráter probabilístico do problema, tal conjunto de restrições pode ser descrito através da função de distribuição conjunta do vetor aleatório  $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  dado por:

$$F(\Xi) = \text{Prob} \left( \xi_1 \leq \sum_{j \in N_1} x_{1j}, \dots, \xi_I \leq \sum_{j \in N_I} x_{Ij} \right) \geq p, \quad (17)$$

Sob a hipótese de que as variáveis  $\xi$  são independentes, podemos reescrever a inequação probabilística (17) em função da distribuição marginal:

$$\prod_{i=1}^I \text{Prob} \left( \xi_i \leq \sum_{j=1}^J x_{ij} \right) \geq p \quad (18)$$

A partir da proposição 2 pode-se transformar inequação probabilística (17), em dois grupos de restrições (20) e (21) dadas a seguir, para tanto, introduzimos as variáveis  $z_i = \sum_{j=1}^J x_{ij}$ , obtendo-se assim, a inequação determinística:

$$\prod_{i=1}^I F_i(z_i) \geq p, \quad (19)$$

onde  $F_i$  é a distribuição marginal de  $\xi_i$ .

Logo, o problema determinístico equivalente dado para o modelo de localização determinístico diante da proposição 2, segue:

$$\text{Min} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{T_i} a_{ik} z_{ik} \geq \alpha \quad (20)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} - \sum_{k=1}^{T_i} z_{ik} = l_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (21)$$

$$\sum_{i \in M_j} x_{ij} \leq q_j y_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (22)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ inteiro}, \quad y_j \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \quad (4)$$

## 2.4 MODELO DE DISTRIBUIÇÃO DE POISSON INFLACIONADO DE ZERO (ZIP)

Com o avanço da tecnologia, a presença de um conjunto de dados com comportamento cada vez mais complexo têm requerido modelos estatísticos mais robustos com o objetivo de modelá-los de forma correta.

Na realização de um fenômeno aleatório é comum ter-se o interesse em descrever o comportamento dos dados de maneira probabilística, associando à variável aleatória um modelo de probabilidade e descrevendo o seu comportamento por meio de sua função de distribuição de probabilidade. (ROCHA, 2015)

Para uma variável aleatória discreta, existe uma série de distribuições na literatura responsáveis por descrever tais comportamentos, neste caso, o estudo proposto nessa pesquisa leva em consideração os dados de contagem e a distribuição mais comumente utilizada que é a Distribuição de Poisson. Porém, certas características inerentes desse fenômeno aleatório, fez surgir outras distribuições ou um conjunto delas com uma maior relevância no tratamento dos dados que são os chamados modelos inflacionados de zeros.

Os dados de contagem com excesso de zeros (inflação de zeros) têm sido discutidos em diversas áreas, como por exemplo, medicina (Van den Broek, 1995), saúde pública ou epidemiologia, agronomia, biologia (Nie *et al.*, 2006), engenharia, etc. Para estes dados, foram propostos vários modelos - *hurdle model* (Mullahy, 1986), *the two-part model* (Heilbron, 1994), *the semi-parametric model* (Gurmu, 1997) and *the zero-inflated Poisson (ZIP) model* (Lambert, 1992) (RODRIGUES BANDEIRA, 2015). Esta pesquisa concentra-se no modelo ZIP como alternativa ao Modelo Poisson Padrão e detalhes sobre os modelos que levam em consideração dados de contagem com excesso de zeros podem ser visto em Ridout, Demétrio e Hinde (1998).

A Distribuição de Poisson, como visto na seção (2.3.3), descreve a probabilidade que ocorra  $X = x$  eventos em um dado intervalo, considerando que os eventos ocorram de forma independente com uma taxa constante  $\lambda$ , a qual representa simultaneamente média e variância dessa variável aleatória  $X$ , ou seja,  $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ .

Para dados na forma de contagem é razoável supor que a distribuição Poisson possa ser ajustada (SILVA, 2011), assumindo que os dados representem eventos de contagem com excessos de zeros, levando a uma superdispersão dos dados caso fossem tratados como uma distribuição Poisson padrão. Segundo este autor, a superdispersão é definida como uma perturbação na amostra em que a variabilidade amostral é superior a variabilidade esperada pelo modelo, portanto, como alternativa é necessário um ajuste que contemple o excesso de

zeros. Logo, a presença de superdispersão, para dados em forma de contagem, em que  $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$  é verificada quando  $\text{Var}(X_i) > \lambda_i$ .

Sendo assim, o Modelo de Poisson Inflacionado de Zero é um modelo utilizado para dados de contagem quando observamos uma distribuição discreta de Poisson padrão com excessos de zero – maior quantidade de observações iguais a zero que o modelo permite.

**Definição 5:** Uma variável aleatória segue uma distribuição inflacionada de zeros se sua Função de Distribuição de Probabilidade (*fdp*) for dada por:

$$P(X = k) = f(k; p, \lambda) = \begin{cases} p + (1 - p)e^{-\lambda}, & k = 0 \\ (1 - p) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

onde:

$$0 \leq p < 1, \quad \lambda > 0,$$

$p$  = proporção de zeros

$\lambda$  = taxa média de ocorrência de eventos em uma unidade de tempo.

Notação:  $X \sim \text{ZIP}(p, \lambda)$ .

**Proposição 5:** Se  $X \sim \text{ZIP}(p, \lambda)$ , então  $E[X] = (1 - p)\lambda$  e  $\text{Var}[X] = \mu + \frac{p}{(1-p)}\mu^2$

**Prova 4:** Para  $k = 0$ ,  $kP(X = k) = 0$ , logo

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left[ (1 - p) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right] = (1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= (1 - p)\lambda \end{aligned} \tag{23}$$

Para calcular a Variância de X, consideramos inicialmente  $k = 0$ , logo:

$$k^2 [p + (1 - p)e^{-\lambda}] = 0$$

Quando  $k > 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-p) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x(x-1)!} = (1-p) \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x(x-1)!} \\ &= (1-p)(\lambda^2 + \lambda) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = (1-p)(\lambda^2 + \lambda) - (1-p)^2 \lambda^2 \quad (25) \\ &= (1-p)\lambda((\lambda + 1) - (1-p)\lambda) = \\ &= (1-p)\lambda(1 + p\lambda) = (1-p)\lambda + p \frac{(1-p)^2}{(1-p)} \lambda^2 = \\ &= E[X] + \frac{p}{1-p} E[X]^2. \end{aligned}$$

Note que,  $\text{Var}(X) = \mu + \frac{p}{(1-p)} \mu^2 > E(X) = (1-p)\lambda$ , ou seja, o modelo contempla a superdispersão gerada pelo excesso de zeros.

Logo, pode-se concluir:

- ✓ Quanto maior a probabilidade de excesso de zeros maior a variância da variável;
- ✓ À medida que  $p$  se aproxima de zero, a variância se aproxima de  $\lambda$ , ou seja, a distribuição ZIP se reduz ao modelo de Distribuição Poisson Padrão.

O modelo ZIP teve seus primórdios nos trabalhos desenvolvidos por Cohen (1960); Johnson e Kotz (1969); Johnson, Kotz e Kemp (1992), em que levaram em consideração processos de fabricação em unidades conformes e não-conformes. Já no estudo de Xie e Goh (1993) o monitoramento das conformidades no processo de fabricação seguiam distúrbios aleatórios nos quais confrontavam com uma série de problemas, dentre eles, o controle esperado.

Lambert (1992) aplicou ao modelo ZIP o efeito de covariáveis em um estudo de defeitos ocasionado na manufatura e teve seus estudos bem sucedidos seguidos em diversos outros campos práticos, como por exemplo, Hall (2000) que o adaptou e aplicou efeitos mistos e superdispersão em dados de horticultura.

Sabendo que as observações nulas podem afetar substancialmente a análise de dados de contagem, é de suma importância verificar inicialmente o quanto o modelo de distribuição utilizado para uma variável aleatória discreta, neste caso o modelo de Poisson Padrão, suporta observações nulas.

O ajuste dos modelos inflacionados à sua respectiva distribuição faz parte de uma generalização e só deve ser usado quando necessário. Portanto, testes de hipóteses são imprescindíveis para verificar, a partir dos dados, se há alguma evidência que pode apoiar tal ajuste/decisão. Diversos testes foram desenvolvidos com o passar dos anos, porém, o interessante é testar a hipótese  $H_0 : X \sim Poisson(\lambda)$ , ou seja,  $p = 1$ . Logo, quando a hipótese não pode ser rejeitada, não é necessário usar o modelo ZIP, pois a distribuição de Poisson simplifica as expressões analíticas do problema (HE, 2004). Vários testes serão resumidos na próxima seção (XIE; HE; GOH, 2001).

#### 2.4.1 Teste do Modelo ZIP

Nesta subseção será apresentado uma série de testes, que podem ser utilizados para verificar a adequabilidade no tratamento da variável resposta nula que surgem na modelagem dos sistemas.

##### 2.4.1.1 Teste de Pontuação

Vandenbroek (1995) apresentou um teste de pontuação para a hipótese de interesse ( $H_0: Y \sim Poisson(\lambda)$ ). Para a estatística do teste, tem-se:

$$S_1 = \frac{(n_0 - np_0)^2}{np_0(1 - p_0) - n\bar{y}p_0^2}$$

Onde:

$n$  = número total de observações;

$n_0$  = número de zeros observados sem covariáveis;

$\bar{y}$  = média das observações;

$p_0 = e^{-\hat{\lambda}_1}$ , em que  $-\hat{\lambda}_1$  é a estimativa do parâmetro de Poisson sob-hipótese nula.

De acordo com a simulação realizada pelo autor na verificação da aproximação qui-quadrado, cada amostra teve sua estatística escore calculada, bem como seus percentis,

comparando-os posteriormente, com os percentis de uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade (Tabela 1).

**TABELA 1 - PERCENTIS DA ESTATÍSTICA  $S_1$ , COM BASE EM 5.000 AMOSTRAS DE TAMANHO  $n$  DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON COM MÉDIA  $\lambda$  E OS MESMOS PONTOS DE DISTRIBUIÇÃO  $\chi^2(1)$**

	Percentis de uma $\chi^2(1)$				
	$P_{0,7}=1,07$	$P_{0,8}=1,64$	$P_{0,9}=2,71$	$P_{0,95}=3,84$	$P_{0,99}=6,63$
$n=100$ e $\lambda = 0,5$	1,13	1,66	2,73	3,86	6,77
$n=100$ e $\lambda = 1$	1,11	1,68	2,75	3,97	6,87
$n=200$ e $\lambda = 0,5$	1,13	1,37	2,67	3,73	6,52
$n=200$ e $\lambda = 1$	1,02	1,58	2,56	3,68	6,61

Fonte: Silva (2011)

Com base nos resultados descritos na Tabela 1, o autor afirma existir uma concordância em considerar a Distribuição  $\chi^2(1)$  como uma regra de decisão do teste escore ( $S_1$ ) associado ao nível de significância ( $\alpha$ ), tomando em particular o valor de  $P_{0,95}=3,84$ , sendo este obtido da Distribuição  $S_1$  sob hipótese nula e interpretado como o valor que proporciona 95% de observações abaixo de 3,84. Percebe-se ainda que em percentil é aproximado pela média de uma Distribuição  $\chi^2(1)$  acumulada. Portanto, sugere-se, empiricamente, assumir que a rejeição de  $H_0$  deverá ocorrer quando  $S_1 < \chi^2(1)$ .

Logo, conclui-se: quando a hipótese nula é rejeitada, então o modelo com Distribuição Poisson não é viável, levando o modelo com Distribuição ZIP a ser considerado no ajuste dos dados.

#### 2.4.1.2 Teste de Razão de Verossimilhança

Este teste também pode ser utilizado, é calculado da seguinte forma:

$$-2 \ln \Lambda = 2 \left\{ n_0 \ln \left( \frac{n_0}{n} \right) + (n - n_0) \left( \ln \left( \frac{\bar{y}}{\hat{\lambda}_2} \right) - \hat{\lambda}_2 \right) + n\bar{y} (\ln \hat{\lambda}_2 + 1 - \ln \bar{y}) \right\} = S_2$$

Sob hipótese nula, a estatística do teste  $S_2$  segue aproximadamente a Distribuição Qui-Quadrado com um grau de liberdade.

#### 2.4.1.3 Teste Qui-Quadrado

$$X^2 = \sum_{i=1}^c \frac{(f_i - m_i)^2}{m_i} = S_3,$$

onde:

$c$  = número de classes decididas para um certo conjunto de dados;

$f_i$  = frequência observada;

$m_i$  = frequência esperada sob hipótese nula da  $i$ -ésima classe;

#### 2.4.1.4 Teste baseado em um intervalo de tempo $t$

Teste baseado na normalidade assintota da estimativa dos parâmetros. De acordo com as propriedades do modelo ZIP, pode-se obter:

$$E(\bar{Y}) = E(Y) = p\mu,$$

e

$$Var(\bar{Y}) = \frac{1}{n} Var(Y) = \frac{1}{n} \{p\mu + p\mu(\mu - p\mu)\}$$

Pelo teorema do limite central, a distribuição de  $Z = (\bar{Y} - p\mu) \sqrt{p\mu + p\mu(\mu - p\mu)}/n$  será a distribuição normal quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, um intervalo  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança assintota de  $p$  pode ser obtido posteriormente como:

$$\frac{\bar{Y} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\{E(Y) + E(Y)[\mu - E(Y)]\}/n}}{\mu} \leq p \leq \frac{\bar{Y} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\{E(Y) + E(Y)[\mu - E(Y)]\}/n}}{\mu}$$

Quando se tem um conjunto de dados, pode-se calcular a confiança acima do intervalo substituindo  $\mu$  e  $E(Y)$  pela estimativa de máxima verossimilhança de  $\mu$ , ou seja  $\hat{\mu}_2$  e a média da amostra  $\bar{y}$ . Assim, o intervalo de confiança pode ser escrito como:

$$\frac{\bar{y} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\{\bar{y} + \bar{y} [\hat{\mu}_2 - \bar{y}]\}/n}}{\hat{\mu}_2} \leq p \leq \frac{\bar{y} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\{\bar{y} + \bar{y} [\hat{\mu}_2 - \bar{y}]\}/n}}{\hat{\mu}_2}$$

Logo, uma estatística de teste baseada no intervalo de confiança para  $p$  pode ser obtido:

$$S_4 = \frac{\bar{y} + Z_\alpha \sqrt{\{\bar{y} + \bar{y} [\hat{\mu}_2 - \bar{y}]\}/n}}{\hat{\mu}_2}$$

A região crítica do deste método é simples  $\{S_4 > 1\}$ . Assim:

- Quando  $S_4 < 1$  rejeita-se a hipótese nula, com nível de significância  $\alpha$  o modelo ZIP deve ser utilizado ao invés do Poisson Padrão.
- Enquanto que,  $S_4 \geq 1$  a hipótese nula não pode ser rejeitada e deve-se utilizar o modelo Poisson Padrão.

#### 2.4.1.5 Teste de Cochran

Este teste foi proposto por Cochran (1954) e ficou conhecido como teste C, podendo ser escrita por:

$$C = \frac{(n_0 - ne^{-\bar{y}})}{[ne^{-\bar{y}}(1 - e^{-\bar{y}} - \bar{y}e^{-\bar{y}})]^{1/2}} \hat{=} S_5$$

Logo, sob hipótese nula, a estatística do teste  $C \hat{=} S_5$  é uma distribuição aproximadamente normal, com média zero e variância unitária.

#### 2.4.1.6 Teste de Rao-Chakravarti

De acordo com Rao e Chakravarti (1956) esse teste, também chamado de teste R, foi proposto para saber a adequabilidade dos modelos expostos anteriormente. A fórmula da estatística do teste R é dado por:

$$R = \frac{n_0 - n((n-1)/n)^{n\bar{y}}}{\{n((n-1)/n)^{n\bar{y}} - n^2((n-1)/n)^{2n\bar{y}} + n((n-1)(n-2)/n)^{n\bar{y}}\}^{1/2}} \hat{=} S_6$$

Logo, sob hipótese nula, a estatística do teste  $R \hat{=} S_6$  é uma distribuição aproximadamente normal, com média zero e variância unitária.

É possível fazer uma comparação dos testes no trabalho desenvolvido por Xie, Goh (1992) *apud* Xie, He e Goh (2001), em que utiliza-se um conjunto de dados com relação aos erros de leitura e escrita descobertos em um disco rígido de computador em um processo de fabricação, nos quais abordam dados de contagem (Tabela 2) e as estatísticas do teste (Tabela 3).

**TABELA 2 - CONJUNTO DE DADOS DE CONTAGEM DE DEFEITO NO PROCESSO DE FABRICAÇÃO**

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	6	0	9
11	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	5	0	15	6
0	0	0	4	2	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
0	0	1	0	0	0	0	0												

Fonte: Xie, Goh (1992) *apud* Xie, He e Goh (2001).

**TABELA 3 - RESUMO DAS ESTATÍSTICAS DO TESTE ( $\alpha = 0,01$ )**

Métodos do teste	Estatística do teste	Região crítica	Aceitar/Rejeitar Hipótese nula ( $H_0$ )
Teste de pontuação, $S_1$	628.135	$S_1 > 6.6349$	Rejeitado
Teste de razão, $S_2$	806.243	$S_2 > 6.6349$	Rejeitado
Qui-quadrado <sup>a</sup> , $S_3$	0.1933	$S_3 > 15.0863$	Rejeitado
Intervalo de confiança, $S_4$	25.0925	$S_4 < 1$	Rejeitado
Teste C, $S_5$	806.243	$ S_5  > 2.5758$	Rejeitado
Teste R, $S_6$	0.1933	$ S_6  > 2.5758$	Rejeitado

<sup>a</sup>Em um teste Qui-quadrado, as classes para esse exemplo são definidas como  $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5 \text{ e acima}\}\}$

Fonte: Xie, Goh (1992) *apud* Xie, He e Goh (2001).

Para os dados apresentados acima (Tabela 3), na aplicação do modelo ZIP, observa-se que  $H_0 : X \sim Poisson(\lambda)$  é rejeitada apresentando excesso de zero nos dados de contagem. Logo, o modelo ZIP deve ser utilizado ao invés do modelo Poisson padrão. Assim, pela Tabela 2, tem-se:  $n = 208$ ;  $\bar{Y} = 242/208$ ;  $\hat{p} = 0.1346$ ;  $\hat{\lambda} = 8.6413$  podem ser substituídos em:

$$f(x; p, \lambda) = \begin{cases} 0.1346 + (1 - 0.1346)e^{-8.6413}, & x = 0 \\ 0.1346 \frac{e^{-8.6413} 8.6413^x}{x!}, & x = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

O ajuste às Distribuições tem um papel importante na análise de dados e confiabilidade dos experimentos, em que muitas vezes parâmetro desconhecidos deve ser calculado a partir de dados da amostra a fim de testar se os dados vêm de uma determinada família de Distribuição. Chen e Balakrishnan (1995) propuseram as estatísticas descritivas de Cramér-von Mises ( $W^*$ ) e Anderson-Darling ( $A^*$ ). Essas estatísticas são teste de adequação de ajuste aproximado de uso geral, que requer muito poucos pontos críticos, é fácil de realizar e pode ser usado para testar a validade das diferentes famílias de distribuições. São estatísticas bastante utilizadas na literatura para medir a adequação de ajuste e realizar a comparação.

Se tivermos uma amostra aleatória  $(x_1, \dots, x_n)$  com a função de distribuição empírica  $F_n(x)$ , usamos essa estatísticas para testar se a amostra vem de uma distribuição específica. São dadas por:

$$W^* = \left\{ n \int_{-\infty}^{+\infty} \{F_n(x) - F(x; \hat{\theta}_n)\}^2 dF(x; \hat{\theta}_n) \right\} \left(1 + \frac{0.5}{n}\right) = W^2 \left(1 + \frac{0.5}{n}\right), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A^* &= \left\{ n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{F_n(x) - F(x; \hat{\theta}_n)\}^2}{\{F(x; \hat{\theta}_n)(1 - F(x; \hat{\theta}_n))\}} dF(x; \hat{\theta}_n) \right\} \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right) \\ &= A^2 \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

O procedimento é baseado em uma ligação entre a hipótese composta geral  $H_0$  acima e o problema de testar a normalidade quando a média e a variância são desconhecidas.

Seja  $F$ , para  $x$  real, denote a função de distribuição empírica da amostra, ou seja,

$$F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I[x_i \leq x]$$

onde  $I[a \leq b] = 1$  se  $a \leq b$ , e  $I[a \leq b] = 0$  se  $a > b$ . Qualquer estatística que mede a diferença entre  $F_n$  e  $F$  é referida como uma estatística EDF (*Empirical Distribution Function*).

Com base nas recomendações de Stephens (1986), optamos por usar duas estatísticas do EDF. Seja  $\hat{\theta}$  uma estimativa de  $\theta$ , então as estatística Cramér-von Mises e Anderson-Darling são, respectivamente:

$$W^* = n \int_{-\infty}^{+\infty} \{F_n(x) - F(x; \hat{\theta}_n)\}^2 dF(x; \hat{\theta}_n) \quad (26)$$

$$A^* = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{F_n(x) - F(x; \hat{\theta}_n)\}^2}{\{F(x; \hat{\theta}_n)(1 - F(x; \hat{\theta}_n))\}} dF(x; \hat{\theta}_n) \quad (27)$$

Para obter uma amostra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  defina  $u_i = F(x_i; \hat{\theta})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sem perda de generalidade, suponha que os  $x_i$  e os  $u_i$  tenham sido organizados em ordem ascendente. Então,

$$W^2 = \sum_{i=1}^n [u_i - \{(2i - 1)/(2n)\}]^2 + 1/(12n) \quad (28)$$

$$A^2 = -n - n^{-1} \sum_{i=1}^n \{(2i - 1) \ln u_i + (2n + 1 - 2i) \ln(1 - u_i)\} \quad (29)$$

Mais detalhes pode ser encontrado em Stephens (1986) *apud* Chen e Balakrishnan (1995).

Para testar,  $H_0 = X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória de uma distribuição contínua com função de distribuição cumulativa  $F(x; \theta)$ , onde a forma de  $F$  é conhecida, mas  $\theta$  (um vetor real  $p$ -dimensional) é desconhecido, proceda como abaixo:

1. Estimar  $\theta$  (eficientemente) por  $\hat{\theta}$  e computar  $v_i = F(x_i; \hat{\theta}_n)$ , onde os  $x_i$  estão em ordem crescente;
2. Compute  $y_i = \Phi^{-1}(v_i)$ , onde  $\Phi$  é a Função de Distribuição Acumulada (fda) normal padrão e  $\Phi^{-1}$  sua inversa;
3. Calcular  $W^2$  e  $A^2$  de acordo com (28) e (29), respectivamente; e
4. Modificar  $W^2$  por  $W^* = W^2(1 + 0.5/n)$  e  $A^2$  por  $A^*(1 + 0.75/n + 2.25/n^2)$  onde  $n$  é o tamanho da amostra. Rejeitar  $H_0$  com um nível de significância  $\alpha$  se as estatísticas modificadas excederem os pontos de significância da cauda superior dados pelos pontos críticos das estatísticas de modificação de  $W^*$  e  $A^*$  extraídos de Stephens (1986).

### 2.4.2 Logconcavidade e a Distribuição ZIP

**Proposição 6:** Baseada na Definição 4, visto na seção 2.3.4, a distribuição de Poisson ZIP é logcôncava.

**Prova 5:** Se  $X \sim \text{ZIP}(p, \lambda)$ , então sua função densidade é dada por :

$$f(k) = \text{Prob}(X = k) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda}, & \text{se } k = 0 \\ (1-p)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, & \text{se } k > 0 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} f(0) \cdot f(2) &= (p + (1-p)e^{-\lambda})(1-p)\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \\ &= p(1-p)\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2} + (1-p)^2e^{-\lambda}\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2} = \frac{pe^\lambda}{1-p}\frac{f(1)^2}{2} + \frac{f(1)^2}{2} \end{aligned}$$

Se  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} f(k-1) \cdot f(k+1) &= (1-p)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}(1-p)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \left(\frac{(1-p)e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right)^2 \frac{k}{k+1} < f(k)^2 \end{aligned}$$

Logo, ZIP é logcôncava se  $\frac{pe^\lambda}{1-p} < 1$ .

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos que serão adotados para que se possa desenvolver e atingir os objetivos da pesquisa. Buscou-se caracterizar a pesquisa a ser desenvolvida a fim de estabelecer a metodologia mais adequada para que se alcance resultados sólidos e confiáveis, apresentando o tipo de pesquisa e sua classificação quanto à natureza, abordagens e tipos de fontes de dados que serão utilizados. Por fim, aborda-se o método de coleta e análise de dados do estudo.

#### 3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Muitas são as definições com relação às classificações das pesquisas científicas de acordo com sua natureza, abordagens e procedimentos, com o objetivo de direcionar e validar o objetivo proposto.

Segundo a classificação proposta por Silva e Menezes (2005), esta pesquisa é classificada: a) Quanto à natureza: aplicada, pois tem o propósito de contribuir para fins práticos; b) Quanto à abordagem: quantitativa, essencial para traduzir em valores os dados coletados; c) Quanto aos objetivos: bibliográfica e exploratória. É bibliográfica para poder analisar a teoria de Otimização Probabilística e apresentar as contribuições dadas por diversos autores durante décadas e é exploratória devido à proposta de aplicação da teoria a um problema real incluindo a incerteza em sua modelagem; d) Quanto aos procedimentos técnicos: modelagem matemática, aplicação de um modelo robusto com profundidade em um cenário real.

#### 3.2 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Para aplicabilidade do modelo ZIP com o objetivo de ajustar dados inflacionados (excesso de zero) à sua respectiva distribuição, foi necessário ter acesso à pesquisa realizada por Araújo (2012), a qual teve por objetivo propor uma reorganização dos pontos das ambulâncias para assistir a população do município de João Pessoa, em que foi solucionado pelo método proposto por Beraldi, Bruni e Conforti (2004), no qual a aleatoriedade é identificada no processo de demanda devido à natureza de Poisson.

O objetivo de garantir um nível de serviço que assegura a capacidade de cobrir as solicitações aleatórias nos pontos de demanda, leva em consideração as seguintes premissas:

- As demandas em intervalos de tempo diferentes são variáveis aleatórias independentes;
- Assume-se que a distribuição de Probabilidade, associada à chamada originada em cada ponto de demanda, é uma Distribuição de Poisson ou uma Distribuição ZIP;

A coleta e análise de dados para assegurar que a capacidade de cobertura das solicitações aleatórias nos pontos de demanda, são expostas a seguir.

### 3.2.1 Os dados

As informações para construção do modelo, realizadas no estudo de Araújo (2012) com o objetivo de propor uma reorganização dos pontos das ambulâncias para assistir a população do município de João Pessoa foram coletadas na base de dados do SAMU no período de Junho de 2011 a Julho de 2012 e foram utilizadas as ocorrências apenas dos finais de semana.

Portanto, houve a necessidade em realizar um estudo descritivo e avaliar o comportamento das chamadas tanto do final de semana, quanto dos dias da semana devido ao comportamento, das chamadas nos pontos de demanda, mudar dinamicamente por diversos fatores, tais como, sazonalidade, localização da população, bem como as atividades diárias, semanais ou anuais.

Logo, o atual estudo contemplou as demandas anuais de cada bairro a partir de dados coletados na mesma unidade de estudo no período de Janeiro de 2017 a Dezembro de 2017.

### 3.2.2 Distribuição de Frequência

A delimitação da demanda pela distribuição de ocorrências é fundamental para definição dos pontos estratégicos e o posicionamento das ambulâncias. Sendo assim, foi realizada a distribuição do número de ocorrência por mês, dia, dia do ano e dia da semana, e assim gerados as frequências das chamadas anuais em um primeiro momento inclusive de zero ocorrência, como também das chamadas semanais, sendo calculadas suas respectivas

porcentagens. Após esta etapa, foram feitos testes de aderência, para que se pudesse averiguar a qualidade de ajuste da Distribuição de Probabilidade deste evento de chamadas.

### 3.2.3 Análise dos dados de acordo com a Distribuição Poisson ZIP

Os fenômenos aleatórios, na solicitação dos serviços de emergência, podem ocasionar um número excessivo de zeros nos dados. Logo, um teste de qualidade de ajuste ou o que chamamos de teste de aderência para os bairros foi aplicado utilizando um código de comparação entre a Distribuição de Poisson Padrão e sua versão inflacionada através do pacote *AdequacyModel* do R (Marinho *et. al.*, 2016). Em particular, foram estimados os parâmetros para ambas as distribuições onde foi possível obter as estatísticas de comparação de Cramér Von-Mises e Anderson Darling, e assim, a escolha pelo que apresentasse o menor valor entre a Distribuição de Poisson e a Distribuição ZIP.

### 3.2.4 Determinação dos pontos eficiente para a função de distribuição acumulada de X

Após confirmar qual Distribuição de probabilidade as ocorrências de Serviço de Atendimento de Urgência e Emergência iriam, foi necessário calcular a função de distribuição acumulada para cada bairro.

Portanto, os meios para o tratamento dos dados inflacionados e obtenção dos resultados foram obtidos com auxílio do Matlab. As figuras 3 e 4 descrevem uma rotina para encontrar o ponto eficiente da Distribuição de Poisson e da Distribuição ZIP, respectivamente.

Se  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , temos:

Figura 3 - Funcionamento para obtenção do ponto eficiente  
(Distribuição Poisson)

<p><b>Function</b> <math>Z = \text{efic}(\lambda, p)</math></p> <p><math>k=0</math></p> <p><math>P_0 = e^{-\lambda}</math></p> <p>Se</p> <p><math>P_0 \geq p</math></p> <p><math>Z = 0</math> <i>Fim</i></p> <p><b>Caso Contrário</b></p> <p><b>Enquanto</b> <math>P_0 &lt; p</math></p> <p><math>k = k + 1</math></p> <p><math>P_0 = P_0 + \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}</math></p> <p><b>Fim</b></p> <p><math>Z = k</math></p>
---

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Se  $X \sim \text{ZIP}(p, \lambda)$ , temos:

Figura 4 - Funcionamento para obtenção do ponto eficiente  
(Distribuição ZIP)

<p><b>Function</b> <math>Z = \text{efic}(\lambda, p_0, p)</math></p> <p><math>k=0</math></p> <p><math>Q_0 = p_0 + (1 - p_0)e^{-\lambda}</math></p> <p>Se</p> <p><math>Q_0 \geq p</math></p> <p><math>Z = 0</math> <i>Fim</i></p> <p><b>Caso Contrário</b></p> <p><b>Enquanto</b> <math>Q_0 &lt; p</math></p> <p><math>k = k + 1</math></p> <p><math>Q_0 = Q_0 + (1 - p_0)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}</math></p> <p><b>Fim</b></p> <p><math>Z = k</math></p>
--

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

### 3.2.5 Pontos de demanda distribuídos por bairro e cálculo das distâncias

Inicialmente foi necessário saber os dados relacionados a cada bairro, como por exemplo, quantidade, nome, o que era bairro e o que era comunidade inserida no bairro e através do Google Maps foram coletados seus pontos de latitude e longitude, a fim de obter os contornos dos bairros através da geração de pontos que formassem o polígono da região e, cálculos dos seus respectivos centros obtidos pela média desses pontos.

Foi construído um código em JavaScript para calcular as distâncias entre os bairros usando a API de distâncias do Google Maps, gerando assim matrizes de distância e tempo.

Por fim, o método de resolução do problema é pela formulação de um modelo de otimização linear inteira utilizando o CPLEX, onde juntamente com as matrizes de distância e tempo e com os dados de ocorrências obtidos na base de dados do SAMU, foi implementado o modelo e obtidos as soluções, sendo o estudo analisado por meio de cenários, no qual se justifica pelo fato de tornar o problema mais adequado à realidade pelo efeito de modificação dos conjuntos de centrais de ambulâncias na configuração da rede de prestação de serviço ofertado pelo SAMU.

#### **4 RESULTADOS E DISCUSSÃO: O PROBLEMA DA REDISTRIBUIÇÃO DAS AMBULÂNCIAS**

Este capítulo tem como objetivo apresentar todo o estudo descritivo e computacional do número de ocorrências solicitadas à unidade do SAMU no município de João Pessoa e propor uma reorganização dos pontos das ambulâncias para assistir a população do município de João Pessoa assegurando a capacidade de cobertura das solicitações aleatórias nos pontos de demanda.

O SAMU de João Pessoa foi criado em 2 de julho de 2004. No início, a sede provisória funcionava nas instalações físicas do atual Batalhão de Atendimento Pré-Hospitalar do Corpo de Bombeiros Militar da Paraíba, operando com a frota de 1 Unidade de Suporte Avançado (USB) e 3 Unidades de Suporte Básico (USB).

No ano de 2006 foi inaugurada a sede própria localizada no Centro Administrativo Municipal. No mesmo ano foi firmado um convênio entre o Ministério da Justiça e o Ministério da Saúde, habilitando 2 Unidades de Resgate e 1 Helicóptero para resgate e transporte aeromédico, este último operou até o ano 2008.

Os principais desafios para expansão e qualidade dos serviços do SAMU são:

- Obter a qualificação do SAMU 192 Regional de João Pessoa;
- Implantar o Núcleo de Educação Permanente (NEP) para treinamento e pesquisa;
- Ampliar a frota de veículos, inserindo o transporte aeromédico;
- Reduzir o Tempo-Resposta;
- Otimizar o Sistema de rádio e comunicação da macro região;
- Promover a Integração entre a Rede de Atenção as Urgências e o SAMU 192;
- Desenvolver projetos de prevenção e promoção à saúde.

Em meio a esses desafios e para assegurar que a capacidade de cobertura das solicitações aleatórias nos pontos de demanda seja mantida acima do nível de probabilidade  $p$ , foi necessário apresentar a distribuição das bases descentralizadas do SAMU para atender a demanda do município de João Pessoa. A frota total atual é composta por 14 motolância, 32 USB, 13 USA, 2 Resgate/PRF. Contudo, para atendimento à demanda apenas em João pessoa estão sendo usadas 06 USB, 05 USA, 06 motolâncias, como visto na Tabela 4.

**TABELA 4 - DISTRIBUIÇÃO DAS AMBULÂNCIAS POSICIONADAS PARA ATENDER AS CHAMADAS DE OCORRÊNCIAS NO MUNICÍPIO DE JOÃO PESSOA**

<b>Bases</b>	<b>Bairro</b>	<b>Veículos</b>
HGSI - Base Geral Hospital Santa Isabel	Tambiá	1 USA 1 USB
UPA	Valentina	1 USB
CAIS	Cruz das Armas	1 USB 1 dupla de motolância
Unidade Praia	Tambaú	1 USB 1 dupla de motolância
SAMU 192	Água Fria	4 USA 2 USB

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

As informações sobre o quantitativo de ocorrências realizadas no ano de 2017, tiveram que passar por um ajustamento e organização na base de dados. A relevância maior, no primeiro momento foi retirar informações que pertenciam a outros municípios, e assim realizar uma pesquisa no Google Maps para identificação certa do bairro correspondente a cada ponto de referência e endereço.

A Distribuição de ocorrências das chamadas para cada bairro foi realizada e assim, calculados suas respectivas porcentagens anuais e semanais. Na Tabela 5, verifica-se que em alguns bairros a quantidade de ocorrências nulas superou os demais números de chamadas, o que não ocorre com bairros como Centro, Cristo e Mangabeira, este com 0% de zeros no ano.

**TABELA 5 – NÚMERO DE OCORRÊNCIAS E PROPORÇÕES DE ZEROS NO ANO PARA CADA BAIRRO**

<b>Bairros</b>	<b>Nº de Ocorrência/Ano</b>	<b>Zeros(%)/Ano</b>
<b>Aeoroclube</b>	41	89,32%
<b>Água Fria</b>	359	38,90%
<b>Altiplano</b>	177	62,74%
<b>Alto do Céu</b>	9	97,53%
<b>Alto do Matheus</b>	361	39,45%
<b>Bairro das Industrias</b>	478	26,85%
<b>Bairro dos Estados</b>	343	38,08%
<b>Bairro dos Ipês</b>	182	62,19%
<b>Bancários</b>	647	16,71%
<b>Barra de gramame</b>	16	95,62%
<b>Bessa</b>	563	22,47%
<b>Brisamar</b>	38	89,59%
<b>Cabo Branco</b>	262	49,32%
<b>Castelo Branco</b>	406	33,70%

<b>Centro</b>	1230	5,48%
<b>Cidade dos Colibris</b>	44	89,04%
<b>Costa do Sol</b>	38	90,41%
<b>Costa e Silva</b>	299	48,22%
<b>Cristo Redentor</b>	1123	6,58%
<b>Cruz das Armas</b>	905	10,68%
<b>Cuiá</b>	131	70,96%
<b>Distrito Industrial</b>	104	77,53%
<b>Ernani Sátiro</b>	344	39,73%
<b>Ernesto Geisel</b>	687	16,99%
<b>Expedicionário</b>	90	78,63%
<b>Funcionários</b>	552	22,74%
<b>Gramame</b>	708	18,63%
<b>Grotão</b>	228	55,89%
<b>Ilha do Bispo</b>	172	65,21%
<b>Jaguaribe</b>	690	21,37%
<b>Jardim Cid. Universitária</b>	194	64,38%
<b>Jardim Oceania</b>	67	83,01%
<b>Jardim São Paulo</b>	36	95,62%
<b>Jardim Veneza</b>	408	36,44%
<b>João Agripino</b>	48	88,77%
<b>João Paulo II</b>	207	56,44%
<b>José Américo</b>	533	26,30%
<b>Manaíra</b>	572	24,66%
<b>Mandacaru</b>	437	30,96%
<b>Mangabeira</b>	2289	0,00%
<b>Miramar</b>	190	59,73%
<b>Muçumagro</b>	110	75,07%
<b>Mumbaba</b>	6	98,90%
<b>Oitizeiro</b>	627	21,10%
<b>Padre Zé</b>	118	72,60%
<b>Paratibe</b>	252	49,86%
<b>Pedro Gondim</b>	113	73,70%
<b>Penha</b>	39	90,14%
<b>Planalto Boa Esperança</b>	56	86,03%
<b>Ponta dos Seixas</b>	24	94,79%
<b>Portal do Sol</b>	143	67,40%
<b>Roger</b>	301	48,49%
<b>São José</b>	107	76,71%
<b>Tambaú</b>	346	42,19%
<b>Tambauzinho</b>	177	62,19%
<b>Tambiá</b>	171	63,29%
<b>Torre</b>	591	22,19%

<b>Treze de Maio</b>	118	71,78%
<b>Trincheiras</b>	46	88,77%
<b>Valentina</b>	866	9,32%
<b>Varadouro</b>	489	27,40%
<b>Varjão</b>	584	23,84%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Observou-se também a demanda por dia da semana, como o objetivo de saber o conjunto de bairros que teriam maiores chamadas para facilitar o atendimento àquela região, como observado na Tabela 6, e seu resumo na Tabela 7.

**TABELA 6 – PORCENTAGENS DE OCORRÊNCIAS POR DIA DE SEMANA**

<b>Bairro</b>	<b>Dias da semana</b>							<b>Total</b>
	<b>Seg</b>	<b>Ter</b>	<b>Qua</b>	<b>Qui</b>	<b>Sex</b>	<b>Sáb</b>	<b>Dom</b>	
<b>Aeoroclube</b>	15%	5%	27%	17%	17%	7%	12%	100%
<b>Água Fria</b>	16%	14%	16%	16%	17%	11%	11%	100%
<b>Altiplano</b>	19%	19%	11%	11%	16%	12%	12%	100%
<b>Alto do Céu</b>	33%	22%	11%		11%	11%	11%	100%
<b>Alto do Matheus</b>	14%	11%	15%	15%	16%	13%	17%	100%
<b>Bairro das Industrias</b>	15%	12%	13%	13%	13%	18%	15%	100%
<b>Bairro dos Estados</b>	11%	18%	19%	15%	17%	10%	10%	100%
<b>Bairro dos Ipês</b>	13%	11%	12%	19%	15%	13%	16%	100%
<b>Bancários</b>	15%	14%	14%	13%	16%	13%	14%	100%
<b>Barra de gramame</b>	6%	19%	6%	6%		13%	50%	100%
<b>Bessa</b>	18%	14%	13%	13%	14%	15%	14%	100%
<b>Brisamar</b>	5%	11%	16%	11%	26%	13%	18%	100%
<b>Cabo Branco</b>	10%	11%	17%	12%	13%	18%	19%	100%
<b>Castelo Branco</b>	17%	13%	14%	19%	16%	11%	11%	100%
<b>Centro</b>	16%	14%	15%	17%	15%	14%	9%	100%
<b>Cidade dos Colibris</b>	11%	23%	9%	7%	11%	25%	14%	100%
<b>Costa do Sol</b>	18%	11%	13%	8%	13%	26%	11%	100%
<b>Costa e Silva</b>	16%	15%	10%	9%	18%	14%	17%	100%
<b>Cristo Redentor</b>	15%	12%	16%	13%	14%	15%	15%	100%
<b>Cruz das Armas</b>	15%	12%	14%	14%	13%	16%	15%	100%
<b>Cuiá</b>	14%	11%	19%	11%	16%	16%	14%	100%
<b>Distrito Industrial</b>	18%	17%	13%	13%	13%	13%	12%	100%
<b>Ernani Sátiro</b>	15%	17%	17%	12%	14%	10%	16%	100%

<b>Ernesto Geisel</b>	17%	12%	15%	12%	15%	13%	16%	100%
<b>Expedicionário</b>	16%	20%	13%	16%	9%	9%	18%	100%
<b>Funcionários</b>	18%	11%	12%	15%	15%	14%	14%	100%
<b>Gramame</b>	18%	11%	15%	14%	13%	11%	18%	100%
<b>Grotão</b>	15%	14%	12%	10%	17%	18%	14%	100%
<b>Ilha do Bispo</b>	16%	20%	12%	13%	15%	8%	16%	100%
<b>Jaguaribe</b>	15%	15%	17%	14%	17%	12%	11%	100%
<b>Jardim Cid. Univ.</b>	12%	15%	15%	15%	16%	11%	15%	100%
<b>Jardim Oceania</b>	15%	12%	13%	21%	18%	13%	7%	100%
<b>Jardim São Paulo</b>	25%	19%	19%	8%	14%	3%	11%	100%
<b>Jardim Veneza</b>	15%	14%	14%	13%	16%	9%	18%	100%
<b>João Agripino</b>	13%	19%	6%	31%	13%	2%	17%	100%
<b>João Paulo II</b>	16%	17%	12%	12%	11%	16%	15%	100%
<b>José Américo</b>	16%	15%	15%	11%	15%	15%	14%	100%
<b>Manaíra</b>	15%	14%	16%	12%	15%	14%	14%	100%
<b>Mandacaru</b>	16%	12%	15%	14%	12%	16%	15%	100%
<b>Mangabeira</b>	15%	14%	15%	14%	14%	15%	13%	100%
<b>Miramar</b>	19%	12%	14%	16%	16%	13%	9%	100%
<b>Muçumagro</b>	17%	8%	16%	12%	14%	15%	18%	100%
<b>Mumbaba</b>	0%	33%	0%	17%	0%	33%	17%	100%
<b>Oitizeiro</b>	13%	17%	15%	14%	12%	12%	17%	100%
<b>Padre Zé</b>	13%	14%	14%	15%	16%	15%	13%	100%
<b>Paratibe</b>	17%	11%	15%	11%	17%	13%	15%	100%
<b>Pedro Gondim</b>	14%	17%	19%	15%	12%	16%	8%	100%
<b>Penha</b>	21%	13%	10%	13%	3%	15%	26%	100%
<b>Planalto Boa Esperança</b>	18%	16%	21%	11%	18%	4%	13%	100%
<b>Ponta dos Seixas</b>	4%	13%	0%	4%	13%	13%	54%	100%
<b>Portal do Sol</b>	22%	13%	14%	15%	11%	12%	12%	100%
<b>Roger</b>	18%	12%	13%	11%	11%	16%	19%	100%
<b>São José</b>	25%	14%	11%	11%	7%	14%	18%	100%
<b>Tambaú</b>	10%	11%	18%	14%	15%	12%	21%	100%
<b>Tambauzinho</b>	20%	11%	12%	14%	21%	10%	12%	100%
<b>Tambiá</b>	13%	14%	15%	20%	13%	13%	12%	100%
<b>Torre</b>	15%	15%	16%	15%	13%	14%	12%	100%
<b>Treze de Maio</b>	16%	13%	12%	15%	16%	16%	12%	100%
<b>Trincheiras</b>	22%	4%	11%	11%	20%	15%	17%	100%

<b>Valentina</b>	15%	14%	14%	13%	14%	15%	15%	100%
<b>Varadouro</b>	14%	15%	16%	13%	14%	13%	13%	100%
<b>Varjão/Rangel</b>	15%	15%	16%	11%	12%	15%	16%	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**TABELA 7 - MAIORES OCORRÊNCIAS POR DIA DE SEMANA**

<b>Dia da Semana</b>	<b>Demanda</b>
<b>Segunda</b>	Valentina , Trincadeiras, Treze de Maio, São José, Portal do Sol, Paratibe, Miramar, José Américo, Giesel, Funcionários, Distrito Industrial, Bessa, Água Fria, Altiplano , Alto do céu, Jardim São Paulo
<b>Terça</b>	Oitizeiro, Mumbaba, João Paulo II, Ilha do Bispo, Expedicionários, Ernani Sátiro
<b>Quarta</b>	Varadouro, Torre, Planalto Boa Esperança, Pedro Gondim, Mangaberia, Manaíra, Bairro dos Estados, Ernani Sátiro, Cuiá, Cristo, Aeroclube, Água Fria
<b>Quinta</b>	Tambiá, João Agripino, Jardim São Paulo, Jardim Oceania, Centro , Castelo Branco, Bairro dos Ipês, Água Fria
<b>Sexta</b>	Treze de Maio, Tambauzinho, Paratibe, Padre Zé, , Jardim Cidade Universitária, Jaguaribe, Costa e Silva, Brisamar, Bancários
<b>Sábado</b>	Treze de Maio, Mumbaba, Mandacaru, Grotão , Cruz das Armas, Costa do Sol, Cidade dos Colibris, Bairro das Indústrias
<b>Domingo</b>	Varjão, Tambaú, Roger, Ponta dos Seixas, Penha, Muçumagro, Jardim Veneza, Gramame , Cabo Branco, Alto do Matheus

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Os resultados referentes à Tabela 5 na solicitação do serviço de emergência foram conclusivos com a hipótese inicial de um grande número de não ocorrências anual. Para a modelagem do problema, no entanto, que procura tratar a aleatoriedade existente, houve a necessidade de verificar se o número de zeros pode ser representado pela Distribuição de Poisson, ou se existiu alguma evidência para apoiar a suposição de que a Distribuição ZIP é realmente mais adequada.

Verificou-se na Tabela 8 qual distribuição se ajusta melhor aos conjuntos de dados através do resultado das estatísticas de Cramér-Von Mises ( $W^*$ ) e Anderson - Darling ( $A^*$ ), bem como os resultados do parâmetro  $\lambda$  para ambas as Distribuições, que neste caso obtiveram o mesmo valor pela grande aproximação de ajuste.

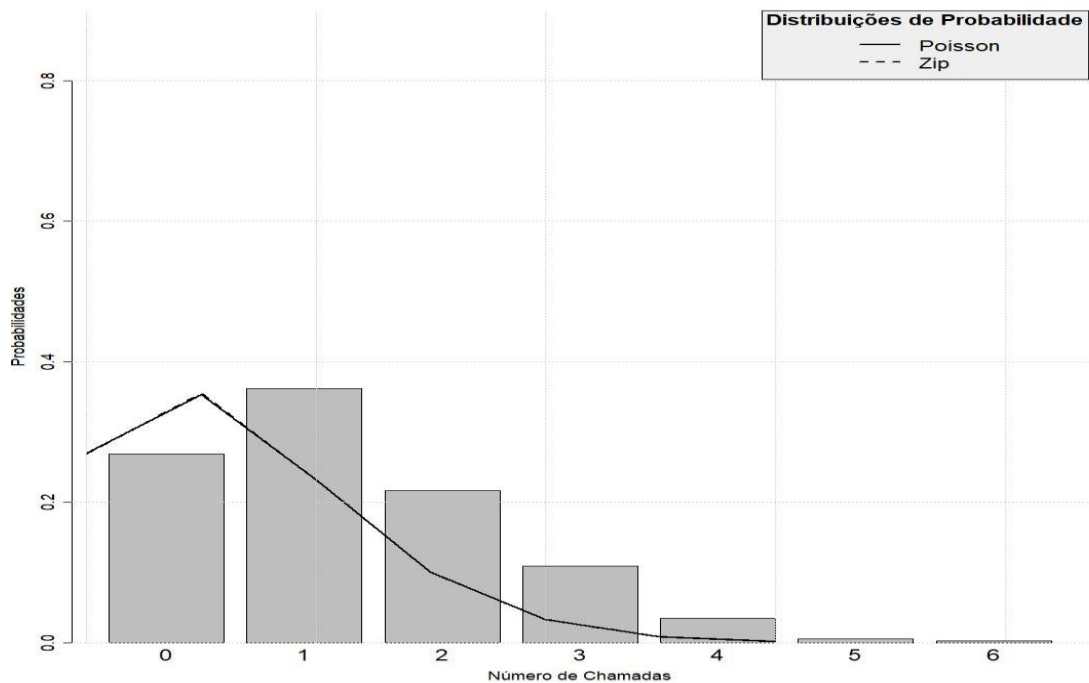
**TABELA 8 - ESTATÍSTICAS DE ADEQUAÇÃO DE AJUSTE DE CRAMER-VON MISES ( $W^*$ ) E ANDERSON-DARLING ( $A^*$ )**

Bairro	$\lambda$	Poisson		ZIP		Distribuição Adequada
		$A^*$	$W^*$	$A^*$	$W^*$	
Aeroclube	0,112328	119,11	24,5	119,13	24,5	Poisson
Água Fria	0,983561	24,13	3,81	24	3,8	ZIP
Altiplano	0,484931	52,88	9,91	52,57	9,85	ZIP
Alto do Céu	0,024657	140	29,77	140	29,77	ZIP
Alto do Matheus	0,989041	22,43	3,63	22,41	3,64	ZIP
Bairro das Indústrias	1,309589	15,42	2,57	15,42	2,57	Poisson
Bairro dos Estados	0,939726	23,54	3,92	23,62	3,93	Poisson
Bairro dos Ipês	0,498630	49,83	9,25	49,53	9,18	ZIP
Bancários	1,772602	10,4	1,82	10,4	1,82	Poisson
Barra de Gramame	0,043835	133,39	28,01	133,39	28,01	ZIP
Bessa	1,542465	12,28	2,01	12,26	2,01	ZIP
Brisamar	0,104109	119,41	24,19	119,41	24,19	ZIP
Cabo Branco	0,717808	33,18	5,61	33,11	5,6	ZIP
Costa e Silva	0,819178	29,54	4,99	29,71	5,04	Poisson
Castelo Branco	1,112328	19,12	3,07	19,09	3,07	ZIP
Centro	3,369863	4,14	0,73	4,39	0,76	Poisson
Cidade dos colibris	0,120547	113,97	23,66	113,71	23,64	ZIP
Costa do Sol	0,104109	118,13	24,56	117,93	25,54	ZIP
Cristo	3,076712	4,98	0,89	4,98	0,9	Poisson
Cruz das armas	2,479452	6,32	1,1	6,57	1,15	Poisson
Cuiá	0,358904	65,18	12,91	64,73	12,83	ZIP
Distrito Industrial	0,284931	79,24	16,29	78,23	16,12	ZIP
Geisel	1,882191	9,55	1,65	9,78	1,7	Poisson
Ernani Sátiro	0,942465	23,78	3,84	23,72	3,83	ZIP
Expedicionários	0,246575	85,61	17,36	85,4	17,33	ZIP
Funcionários	1,512328	12,48	2,09	12,49	2,1	Poisson
Gramame	1,939726	8,6	1,38	8,75	1,43	Poisson

<b>Grotão</b>	0,624657	39,57	7,03	39,33	6,97	<b>ZIP</b>
<b>Ilha do Bispo</b>	0,471232	53,82	10,24	53,27	10,11	<b>ZIP</b>
<b>Jaguaribe</b>	1,890411	9,16	1,45	10,13	1,64	<b>Poisson</b>
<b>Jardim Cid. Univers.</b>	0,531506	51,16	9,64	50,9	9,55	<b>ZIP</b>
<b>Jardim Oceania</b>	0,183561	98,22	19,96	98,35	19,98	<b>Poisson</b>
<b>Jardim SP</b>	0,098630	inf	27,72	inf	27,45	<b>ZIP</b>
<b>Jardim Veneza</b>	1,117808	19,48	3,15	19,79	3,24	<b>Poisson</b>
<b>João Paulo II</b>	0,567123	19,48	3,15	19,79	3,24	<b>Poisson</b>
<b>João Agripino</b>	0,131506	110,43	23,28	109,41	23,19	<b>ZIP</b>
<b>José Américo</b>	1,460274	13,3	2,15	13,54	2,22	<b>Poisson</b>
<b>Manaíra</b>	1,567123	11,79	1,85	11,83	1,89	<b>Poisson</b>
<b>Mandacaru</b>	1,197260	17,22	2,76	17,19	2,76	<b>ZIP</b>
<b>Mangabeira</b>	6,271232	2,83	0,51	x	x	<b>Poisson</b>
<b>Miramar</b>	0,520547	47,43	8,62	47,36	8,6	<b>ZIP</b>
<b>Mumbaba</b>	0,016438	inf	29,91	inf	29,88	<b>ZIP</b>
<b>Muçumagro</b>	0,301369	74,91	15,14	74,42	15,06	<b>ZIP</b>
<b>Oitizeiro</b>	1,717808	10,53	1,71	10,77	1,77	<b>Poisson</b>
<b>Padre Zé</b>	0,323287	71,65	14,16	71,57	14,14	<b>ZIP</b>
<b>Paratibe</b>	0,690411	34,7	5,88	34,75	5,89	<b>Poisson</b>
<b>Pedro Gondim</b>	0,309589	73,49	14,64	73,35	14,62	<b>ZIP</b>
<b>Penha</b>	0,106849	117,45	24,38	117,27	24,37	<b>ZIP</b>
<b>Planalto Boa Esp.</b>	0,153424	105,86	21,78	105,71	21,77	<b>ZIP</b>
<b>Ponta do Seixas</b>	0,065753	128,26	27,33	127,41	27,26	<b>ZIP</b>
<b>Portal do Sol</b>	0,391780	61,47	11,77	61,53	11,78	<b>Poisson</b>
<b>Varjão</b>	1,600000	11,68	1,87	11,96	1,95	<b>Poisson</b>
<b>Roger</b>	0,824657	30,8	5,22	31,37	5,35	<b>Poisson</b>
<b>São José</b>	0,293150	78,09	15,93	77,27	15,79	<b>ZIP</b>
<b>Tambaú</b>	0,947945	24,15	3,92	24,16	3,95	<b>Poisson</b>
<b>Tambauzinho</b>	0,484931	50,18	9,34	50,01	9,31	<b>ZIP</b>
<b>Tambiá</b>	0,468493	52,35	9,8	52,17	9,76	<b>ZIP</b>
<b>Treze de Maio</b>	0,323287	70,82	13,88	71,07	13,91	<b>Poisson</b>
<b>Torre</b>	1,619178	11,45	1,84	11,32	1,84	<b>ZIP</b>
<b>Trincheiras</b>	0,126027	112,63	23,46	112,22	23,43	<b>ZIP</b>
<b>Valentina</b>	2,372602	7,6	1,31	7,6	1,3	<b>ZIP</b>
<b>Varadouro</b>	1,339726	14,99	2,38	14,95	2,38	<b>ZIP</b>

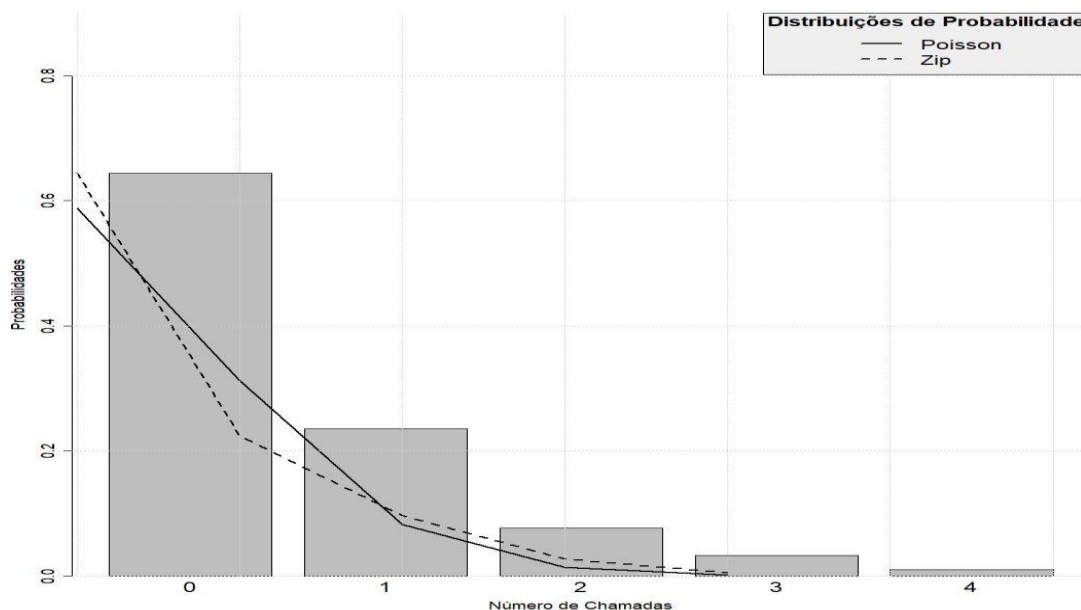
Esses testes são independentes, ou seja, pode ser escolhido apenas um deles e fazer a comparação pelo que apresente menor valor de ajuste. Observou-se que os Bairros Valentina, Mandacaru, Funcionários, Barra de Gramame, Cristo e Castelo Branco apresentaram uma proximidade maior no valor do teste, e que os bairros Alto do Céu, Bairro das Indústrias, Bancários, Brisamar e Barra de Gramame obtiveram valores iguais, admitindo ZIP para o desempate com proporções de zero maior que 70%. Podemos visualizar melhor a igualdade do ajuste no Figura 5, como também a proximidade de ajuste de ambas as Distribuições em um caso que não foi igual no Figura 6.

Figura 5 - Gráfico de ocorrências do Bairro Bancários com ajuste de Distribuição igual



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Figura 6 – Gráfico de ocorrências do Bairro Jardim Cidade Universitária com ajuste de Distribuição diferente



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Na tabela 9 têm-se os pontos de latitude e longitude de cada bairro, que foram essenciais para geração dos contornos dos bairros e seus respectivos centros, como mostra a Figura 7.

**TABELA 9 - PONTOS DE LATITUDE E LOGINTUDE DE CADA BAIRRO CANDIDATO A POSTO**

Bairro	Latitude	Longitude
<b>Aeroclube</b>	-7.086.099.874.999.990	-34.842670125000005
<b>Água fria</b>	-7.158.795.400.000.000	-34.852794300000006
<b>Altiplano</b>	-7.133110862068965	-34.830853034482757
<b>Alto do Céu</b>	-7.094213176470588	-34.864288705882359
<b>Alto do Mateus</b>	-7.135710888888889	-34.913010814814818
<b>Bairro das Industrias</b>	-7.179528058823530	-34.919499705882352
<b>Bairro dos Estados</b>	-7.110388578947368	-34.856404842105270
<b>Bairro dos Ipês</b>	-7.102505916666665	-34.853288666666657
<b>Bancários</b>	-7.146646647058823	-34.837562470588239
<b>Barra de Gramame</b>	-7.224347799999999	-34.811879079999997
<b>Bessa</b>	-7.066521538461539	-34.844527230769231
<b>Brisamar</b>	-7.114480499999999	-34.839742142857141
<b>Cabo Branco</b>	-7.138398	-34.818777
<b>Costa e Silva</b>	-7.179391352941177	-34.896329235294111

<b>Castelo Branco</b>	-7.136911250000001	-34.844209333333332
<b>Centro</b>	-7.120236785714285	-34.880188214285717
<b>Cidade dos Colibris</b>	-7.162466739130435	-34.848462695652174
<b>Costa do Sol</b>	-7.182870347826087	-34.813560826086970
<b>Cristo Redentor</b>	-7.156883703703705	-34.878863666666668
<b>Cruz das Armas</b>	-7.144590636363637	-34.889432484848484
<b>Cuia</b>	-7.184047055555555	-34.861055222222227
<b>Distrito Industrial</b>	-7.189501387096775	-34.909961258064513
<b>Ernesto Geisel</b>	-7.181538461538462	-34.869675384615384
<b>Ernani Sátiro</b>	-7.170896214285714	-34.893041214285709
<b>Expedicionários</b>	-7.124784636363637	-34.853588000000002
<b>Funcionários</b>	-7.184305909090909	-34.885692909090913
<b>Gramame</b>	-7.203383972972972	-34.872173135135128
<b>Grotão</b>	-7.187861400000000	-34.883839500000001
<b>Ilha do Bispo</b>	-7.135265666666666	-34.897715435897432
<b>Jaguaribe</b>	-7.133931500000000	-34.878300499999995
<b>Cidade Jardim Universitária</b>	-7.156343299999999	-34.836585499999998
<b>Jardim Oceania</b>	-7.085524500000000	-34.835806124999998
<b>Jardim São Paulo</b>	-7.150009625000000	-34.845330745833337
<b>Jardim Veneza</b>	-7.164103363636364	-34.906491181818190
<b>João Paulo II</b>	-7.184281764705882	-34.878622882352929
<b>João Agripino</b>	-7.105245166666667	-34.843996083333330
<b>José Américo</b>	-7.172999812500000	-34.853178874999998
<b>Manaíra</b>	-7.104394399999999	-34.837501199999998
<b>Mandacaru</b>	-7.102884174679486	-34.868595407051284
<b>Mangabeira</b>	-7.179797968750001	-34.836383218749994
<b>Miramar</b>	-7.120690500000000	-34.835470099999995
<b>Mumbaba</b>	-7.174479550000001	-34.926052800000001
<b>Muçumagro</b>	-7.216378	-34.836306
<b>Oitizeiro</b>	-7.156539965517244	-34.894846344827577
<b>Padre Zé</b>	-7.105044499999999	-34.869725428571428
<b>Paratibe</b>	-7.202357363636363	-34.830566818181815
<b>Pedro Gondim</b>	-7.115406833333334	-34.845323999999998
<b>Penha</b>	-7.163718900000001	-34.798280249999998
<b>Planalto Boa Esperança</b>	-7.193537769230768	-34.861869576923070
<b>Ponta dos Seixas</b>	-7.156924185185186	-34.797342481481479
<b>Portal do Sol</b>	-7.153659281250000	-34.817168750000008
<b>Varjão</b>	-7.148677559999999	-34.873931920000004
<b>Roger</b>	-7.108850111111110	-34.879524644444444
<b>São José</b>	-7.108151812500001	-34.839291124999995
<b>Tambaú</b>	-7.114661699999999	-34.826019500000001
<b>Tambauzinho</b>	-7.126629000000000	-34.849858181818178
<b>Tambiá</b>	-7.115786000000001	-34.873309043478258
<b>Treze de Maio</b>	-7.112778411764706	-34.865860176470591
<b>Torre</b>	-7.128731687500000	-34.861865812500000

<b>Trincheiras</b>	-7.129129636363637	-34.887120575757578
<b>Valentina</b>	-7.195411552631579	-34.847665763157885
<b>Varadouro</b>	-7.115177	-34.888561

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

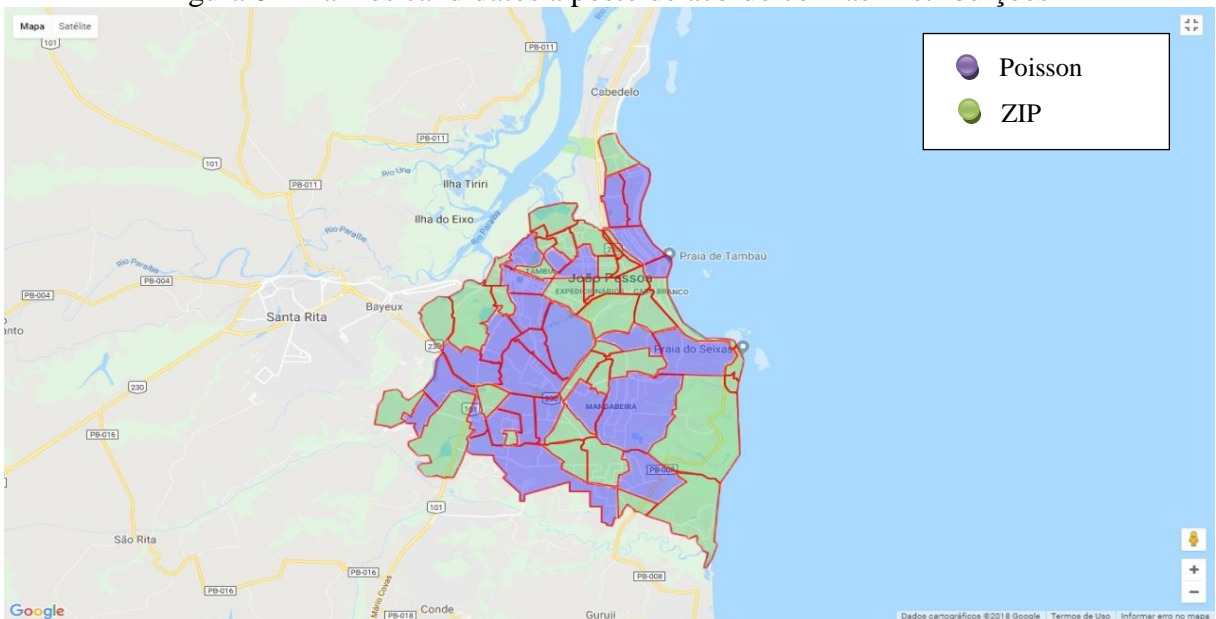
Figura 7 - Centros dos bairros candidato a posto



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Na Figura 8 é possível visualizar quais bairros se ajustaram à Distribuição ZIP como também à Distribuição Poisson.

Figura 8 – Bairros candidatos a posto de acordo com as Distribuições



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Logo, a delimitação da demanda pela distribuição de ocorrências juntamente com as distâncias entre os bairros, no qual através destes foi possível gerar as matrizes de distância e tempo, alimentaram o modelo para obter as possíveis soluções e verificar se as proximidades de ajuste às Distribuições iriam modificar a escolha do bairro que seria o posto base de atendimento.

Após confirmar qual a Distribuição recomendada para o quantitativo de ocorrências, utilizou-se a teoria de pontos eficientes para permitir a transformação da restrição probabilística em um Determinístico Equivalente. Para os resultados, foram construídos cenários que averiguassem a redistribuição das ambulâncias no atendimento à demanda probabilística. Percebe-se que houve diferença tanto na escolha de alguns postos, como também na quantidade, diminuindo esta diferença com o aumento gradativo das distâncias.

**Cenário 1:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 3000 m de distância do posto por dia.

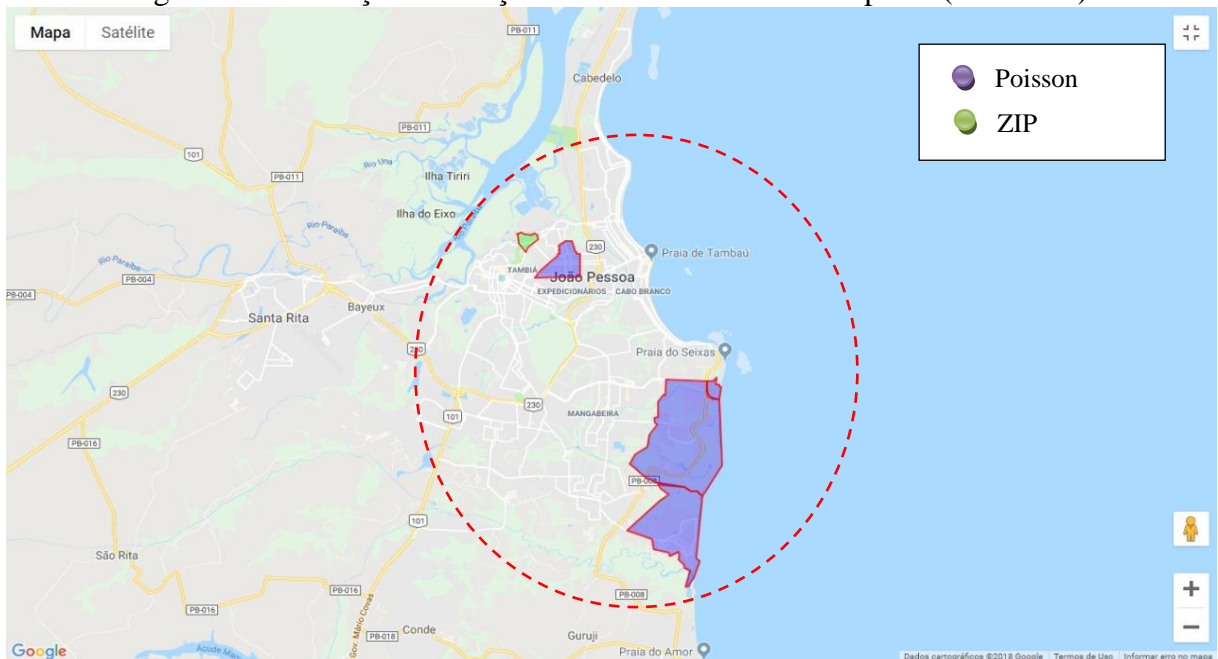
**QUADRO 3 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 1)**

ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Alto do Mateus	20	Alto do Mateus	20
Bairro das Indústrias	20	Bairro das Indústrias	20
Bessa	16	Bairro dos estados	18
Cabo Branco	24	Barra de Gramame	16
Castelo Branco	20	Bessa	16
Cristo Redentor	24	Cabo Branco	24
Cruz das Armas	20	Castelo Branco	20
Cuia	28	Costa do Sol	18
Grotão	24	Cristo Redentor	24
Jardim São Paulo	24	Cruz das Armas	20
Jardim Veneza	24	Cuia	28
Jose Americo	28	Grotão	24
Manaira	18	Jardim São Paulo	24
Mangabeira	22	Jardim Veneza	24
Miramar	22	Jose Americo	28
Muçumagro	18	Manaira	18
Padre Zé	16	Mangabeira	22
Paratibe	18	Miramar	22
Portal do Sol	24	Muçumagro	18
Torre	22	Paratibe	18
Varadouro	18	Penha	20
		Portal do Sol	24
		Torre	22
		Varadouro	18

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Com a Distribuição ZIP o posto Padre Zé foi a diferença da escolha, com uma capacidade de responder 16 ocorrências para diferentes bairros, além de menos 03 postos em sua seleção. Enquanto que a Distribuição Poisson alocou mais bairros, e em sua diferença têm-se os postos Bairro dos Estados, Barra de Gramame, Costal do Sol e Penha, com capacidade de atendimento diária de 18, 16, 18, 20, respectivamente. Na Figura 9 é possível visualizar a diferença na seleção dos postos de ambas as Distribuições na região de João Pessoa.

Figura 9 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 1)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Cenário 2:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 4000 m de distância do posto por dia.

**QUADRO 4 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 2)**

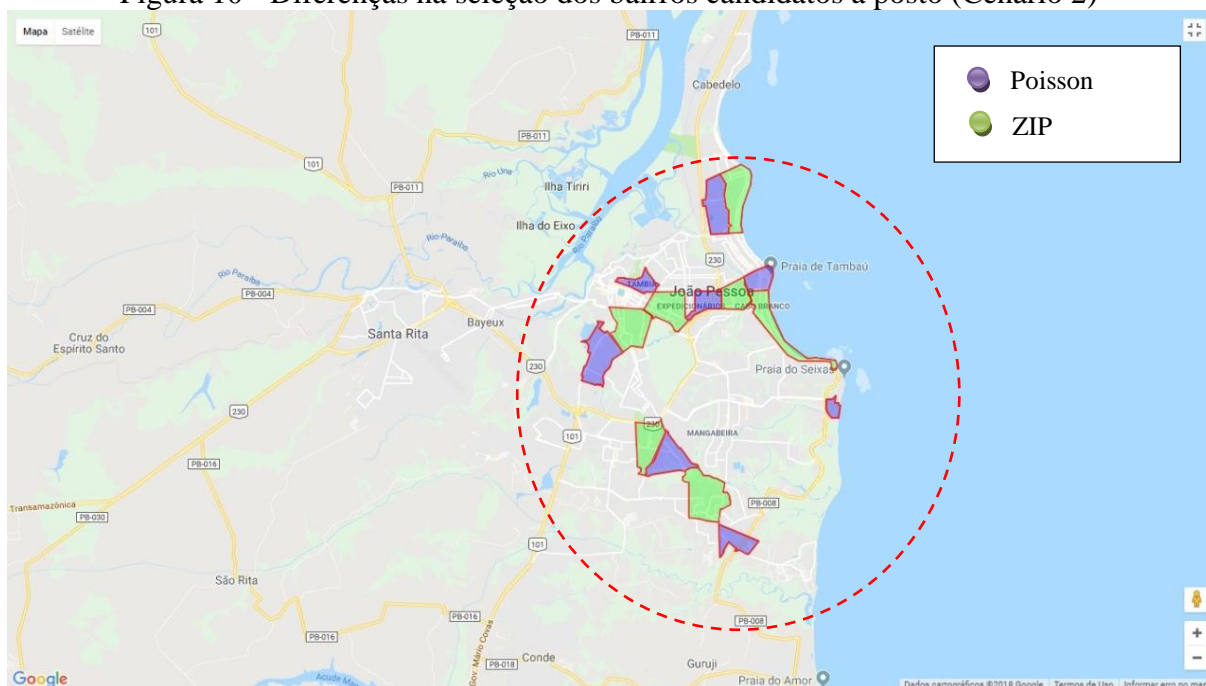
ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Alto do Mateus	20	Aeroclube	16
Cabo Branco	24	Alto do Mateus	20
Costa e Silva	26	Costa e Silva	26
Cristo Redentor	24	Cristo Redentor	24
Ernesto Geisel	28	Cruz das Armas	20
Jaguaribe	18	Cuia	28

Jardim Oceania	16	Jardim São Paulo	24
Jardim São Paulo	24	Mangabeira	22
Mangabeira	22	Muçumagro	18
Miramar	22	Penha	20
Torre	22	Tambau	22
Valentina	22	Tambauzinho	24
		Tambiá	18
		Varadouro	18

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Neste cenário houve a redução na quantidade de postos selecionados para ambas as Distribuições. Porém a diferença na escolha dos postos aumentou. Enquanto no cenário 1 existiu uma única diferença com a Distribuição ZIP, nesse cenário temos os postos do Cabo Branco, Ernesto Geisel, Jaguaribe, Jardim Oceania, Miramar, Torre e Valentina. Para a Distribuição Poisson os postos escolhidos e que diferem da Distribuição ZIP foram: Aeoroclube, Cruz das armas, Cuiá, Muçumagro, Penha, Tambau, Tambauzinho, Tambiá e Varadouro. Na Figura 10 é possível visualizar a diferença seleção dos postos de ambas as Distribuições na região de João Pessoa.

Figura 10 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Para a Distribuição ZIP observou-se nesse cenário as demandas esperadas para cada bairro, a oferta de cada bairro candidato a posto, como também, a Distribuição dos pontencias locais de ocorrência, como visto no Quadro 5, Tabela 10 e Tabela 11, respectivamente.

**QUADRO 5 - DEMANDAS ESPERADAS PARA CADA BAIRRO**

ZIP			
Bairro	Demanda	Bairro	Demanda
Aeroclube	2	Jardim Oceania	3
Aguafria	5	Jardim São Paulo	1
Altiplano	3	Jardim Veneza	6
Alto do Ceu	0	Joao Paulo II	4
Alto do Mateus	11	Joao Agripino	2
Bairro das Indust.	6	Jose Americo	6
Bairro dos estados	5	Manaira	7
Bairro dos Ipes	3	Mandacaru	5
Bancarios	7	Mangabeira	14
Barra de Gramame	0	Miramar	4
Bessa	6	Mumbaba	0
Brisamar	1	Muçumagro	2
Cabo Branco	4	Oitizeiro	7
Costa e Silva	5	Padre Zé	2
Castelo Branco	5	Paratibe	4
Centro	9	Pedro Gondim	3
Cidade dos Colibris	2	Penha	0
Costa do Sol	1	Plan. Boa Esperança	2
Cristo Redentor	9	Ponta dos Seixas	0
Cruz das Armas	8	Portal do Sol	4
Cuia	3	Rangel	6
Distrito Industrial	2	Roger	4
Ernesto Geisel	7	Sao José	3
Ernani Sátiro	5	Tambau	5
Expedicionarios	2	Tambauzinho	3
Funcionarios	6	Tambia	3
Gramame	7	Treze de Maio	3
Grotão	3	Torre	7
Ilha do Bispo	3	Trincheiras	1
Jaguaribe	7	Valentina	8
Jardim Cid Univer.	4	Varadouro	5

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**TABELA 10 - OFERTA DOS BAIRROS CANDIDATOS A POSTO**

Posto	Demanda	Chamadas	Distancia (m)	Tempo (minuto)
<b>Alto do Matheus</b>	Alto do Mateus	11	0	0
	Jardim Veneza	6	3846	7.48
<b>Cabo Branco</b>	Altiplano	3	3479	7.38
	Bancarios	7	3999	7.38
	Cabo Branco	4	0	0
	Miramar	1	3955	9.35
	Portal do Sol	4	3593	8.55
	Tambau	5	3371	8.38
<b>Costa e Silva</b>	Bairro das Indust.	6	3349	8.71
	Costa e Silva	5	0	0
	Distrito Industrial	2	3431	7.8
	Ernani Sátiro	5	1283	4.53
	Funcionarios	1	1728	6.12
	Oitizeiro	7	3240	6.48

<b>Cristo Redentor</b>	Cristo Redentor	3	0	0
	Cruz das Armas	8	2734	8.68
	Jaguaribe	7	3430	9.83
	Rangel	6	1335	5.28
<b>Ernesto Geisel</b>	Cristo Redentor	6	3742	10.55
	Ernesto Geisel	7	0	0
	Funcionarios	5	2224	6.76
	Grotão	3	2317	7.36
	Joao Paulo II	4	1455	4.75
	Jose Americo	3	3688	10.38
<b>Jaguaribe</b>	Centro	5	2201	8.43
	Ilha do Bispo	3	3235	12.43
	Roger	4	3628	13.16
	Trincheiras	1	2096	6.92
	Varadouro	5	3288	10.03
	<b>Jardim Oceania</b>	Aeroclube	2	1726
Bairro dos Ipes		3	3916	10.95
Bessa		6	3223	7.65
Jardim Oceania		3	0	0
Manaira		2	2873	8.53
<b>Jardim São Paulo</b>		Aguafría	5	2267
	Castelo Branco	5	3626	9.78
	Cidade dos Colibris	2	2119	7.45
	Jardim Cid Univer.	4	1916	6.35
	Jardim São Paulo	1	0	0
	Torre	7	3950	8.5
	<b>Mangabeira</b>	Costa do Sol	1	3452
Jose Americo		3	3243	9.63
Mangabeira		14	0	0
Paratibe		4	3522	9.88
<b>Miramar</b>	Bairro dos estados	5	3746	11.58
	Brisamar	1	1521	5.633
	Joao Agripino	2	2221	7.08
	Manaira	5	2875	9.62
	Miramar	3	0	0
	Pedro Gondim	3	1709	5.91
	Sao José	3	3040	9.96
	<b>Torre</b>	Centro	4	3044
Expedicionarios		2	1511	4.46
Mandacaru		5	3640	12.25
Padre Zé		2	3596	13.21
Tambauzinho		3	1505	3.56
Tambia		3	2839	8.63
Treze de Maio		3	2712	10.26
<b>Valentina</b>		Cuia	3	2807
	Gramame	7	3706	11.2
	Muçumagro	2	3697	11.85
	Plan. Boa Esperança	2	1912	8.5
	Valentina	8	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**TABELA 11 - DISTRIBUIÇÃO DOS PONTÊNCIAS LOCAIS DE OCORRÊNCIA**

<b>Lugar de Ocorrência</b>	<b>Posto</b>	<b>Nº máx. Ocorrências</b>	<b>Distancia (m)</b>	<b>Tempo (minuto)</b>
<b>Aeroclube</b>	Jardim Oceania	2	1195	3.92
<b>Aguafria</b>	Jardim São Paulo	5	1624	5.75
<b>Altiplano</b>	Cabo Branco	3	4044	10.9
<b>Alto do Mateus</b>	Alto do Mateus	11	0	0
<b>Bairro das Indust</b>	Costa e Silva	6	3311	8.48
<b>Bairro dos Ipes</b>	Jardim Oceania	3	4184	11.72
<b>Bairro dos estado</b>	Miramar	5	3499	11.18
<b>Bancarios</b>	Cabo Branco	7	6870	12.85
<b>Bessa</b>	Jardim Oceania	6	3264	7.9
<b>Brisamar</b>	Miramar	1	1194	4.95
<b>Cabo Branco</b>	Cabo Branco	4	0	0
<b>Castelo Branco</b>	Jardim São Paulo	5	3958	10.28
<b>Centro</b>	Jaguaribe	5	1895	6.23
<b>Centro</b>	Torre	4	2805	8.42
<b>Cidade dos Colibr</b>	Jardim São Paulo	2	2108	7.37
<b>Costa do Sol</b>	Mangabeira	1	3452	9.5
<b>Costa e Silva</b>	Costa e Silva	5	0	0
<b>Cristo Redentor</b>	Cristo Redentor	3	0	0
<b>Cristo Redentor</b>	Ernesto Geisel	6	3721	11.48
<b>Cruz das Armas</b>	Cristo Redentor	8	2484	8.53
<b>Cuia</b>	Valentina	3	2807	7.43
<b>Distrito Industri</b>	Costa e Silva	2	3352	8.27
<b>Ernani Sátiro</b>	Costa e Silva	5	1283	4.05
<b>Ernesto Geisel</b>	Ernesto Geisel	7	0	0
<b>Expedicionarios</b>	Torre	2	1536	5.8
<b>Funcionarios</b>	Costa e Silva	1	1728	5.78
<b>Funcionarios</b>	Ernesto Geisel	5	2240	6.9
<b>Gramame</b>	Valentina	7	3742	11.12
<b>Grotão</b>	Ernesto Geisel	3	2323	7.1
<b>Ilha do Bispo</b>	Jaguaribe	3	3311	12.3
<b>Jaguaribe</b>	Cristo Redentor	7	3701	9.38
<b>Jardim Cid Univer</b>	Jardim São Paulo	4	1865	6.68
<b>Jardim Oceania</b>	Jardim Oceania	3	0	0
<b>Jardim São Paulo</b>	Jardim São Paulo	1	0	0
<b>Jardim Veneza</b>	Alto do Mateus	6	7814	11.57
<b>Joao Agripino</b>	Miramar	2	2501	8.25
<b>Joao Paulo II</b>	Ernesto Geisel	4	1471	4.9
<b>Jose Americo</b>	Ernesto Geisel	3	4023	11.55
<b>Jose Americo</b>	Mangabeira	3	3216	10.03
<b>Manaira</b>	Jardim Oceania	2	2867	8.58
<b>Manaira</b>	Miramar	5	3489	11.52
<b>Mandacaru</b>	Torre	5	8982	12.62
<b>Mangabeira</b>	Mangabeira	14	0	0
<b>Miramar</b>	Cabo Branco	1	4356	12.17
<b>Miramar</b>	Miramar	3	0	0
<b>Muçumagro</b>	Valentina	2	3521	12.02
<b>Oitizeiro</b>	Costa e Silva	7	3895	9.07
<b>Padre Zé</b>	Torre	2	3832	12.8
<b>Paratibe</b>	Mangabeira	4	3390	9.15
<b>Pedro Gondim</b>	Miramar	3	2684	8.8
<b>Plan. Boa Esperança</b>	Valentina	2	1934	8.22
<b>Portal do Sol</b>	Cabo Branco	4	5480	11.08
<b>Rangel</b>	Cristo Redentor	6	1348	4.12
<b>Roger</b>	Jaguaribe	4	3793	14.43
<b>Sao José</b>	Miramar	3	2966	10.02
<b>Tambau</b>	Cabo Branco	5	3745	10.42
<b>Tambauzinho</b>	Torre	3	1790	4.75

<b>Tambia</b>	Torre	3	2680	9.85
<b>Torre</b>	Jardim São Paulo	7	4081	9.03
<b>Treze de Maio</b>	Torre	3	2391	9.17
<b>Trincheiras</b>	Jaguaribe	1	2207	6.07
<b>Valentina</b>	Valentina	8	0	0
<b>Varadouro</b>	Jaguaribe	5	3494	12.05

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Observou-se que o tempo máximo de resposta da ambulância pelo serviço ofertado foi 13,21 minutos. Foi possível observar também, que o tempo gasto de atendimento saindo dos Bancários e voltando para o posto Cabo Branco, foi de 12,85 minutos. Logo, o tempo que leva para uma ambulância sair do posto Cabo Branco e socorrer uma vítima nos Bancários e voltar para o respectivo posto é de 20,23 minutos.

**Cenário 3:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 5000 m de distância do posto por dia.

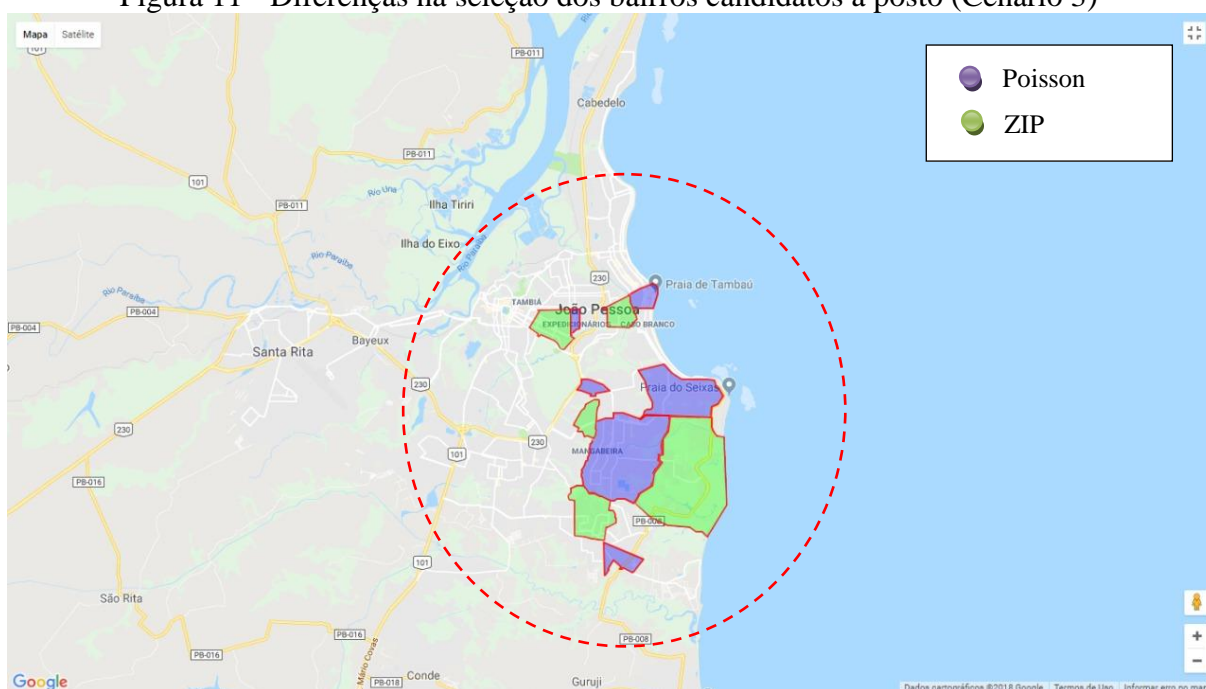
#### QUADRO 6 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 3)

ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Aeroclube	16	Aeroclube	16
Costa e Silva	26	Costa e Silva	26
Cidade dos Colibris	28	Cristo Redentor	24
Costa do Sol	18	Cruz das Armas	20
Cristo Redentor	24	Ernesto Geisel	28
Cruz das Armas	20	Expedicionarios	22
Ernesto Geisel	28	Jardim São Paulo	24
Miramar	22	Mangabeira	22
Tambauzinho	24	Muçumagro	18
Torre	22	Portal do Sol	24
Valentina	22	Tambau	22
		Tambauzinho	24

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

No cenário 3, os bairros que tiveram diferença na escolha com a Distribuição ZIP foram: Cidade dos colibris, Costa do Sol, Miramar, Torre, Valentina. Com a Distribuição Poisson têm-se: Expedicionários, Jardim São Paulo, Mangabeira, Muçumagro, Portal do Sol, Tambaú. Observa-se também, que diminuiu 01 posto para a Distribuição Zip e 02 postos para a Distribuição Poisson do cenário 2 para o cenário 3. Na Figura 11 é possível visualizar a diferença na seleção dos postos de ambas as Distribuições na região de João Pessoa.

Figura 11 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Cenário 4:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 6000 m de distância do posto por dia.

**QUADRO 7 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 4)**

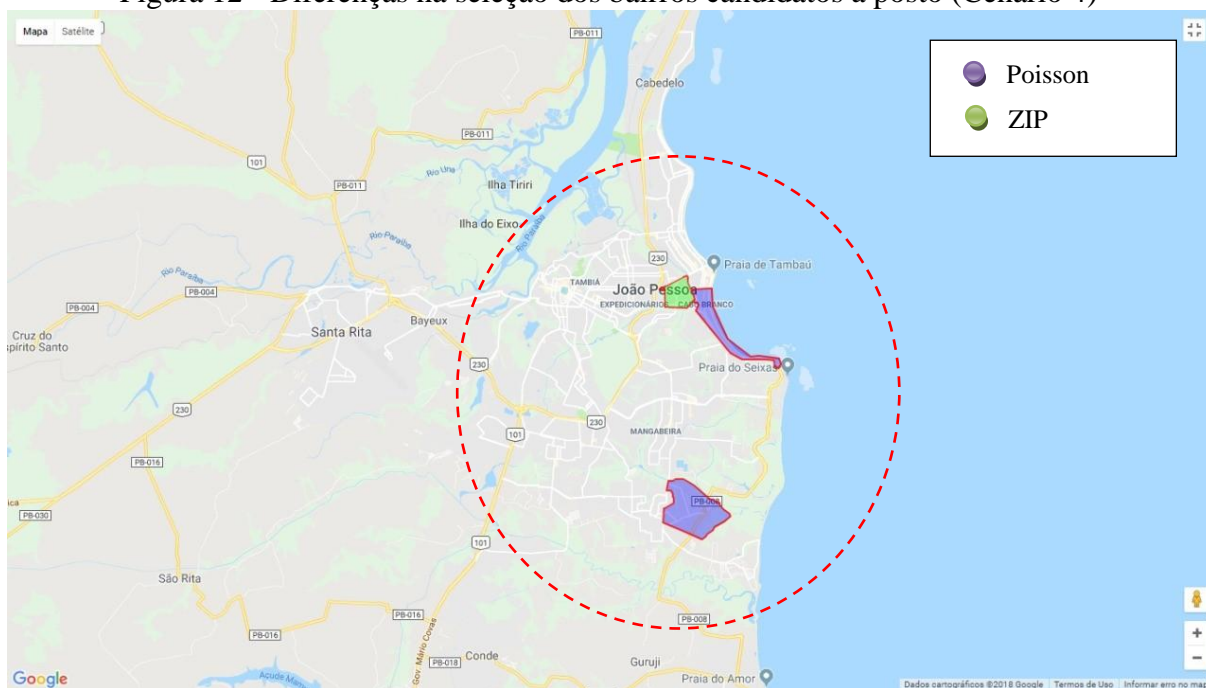
ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Costa e Silva	16	Cabo Branco	24
Cuia	26	Costa e Silva	26
Ernesto Geisel	28	Cuia	28
Jardim Cid. Univer.	18	Ernesto Geisel	28
Jose Americo	24	Jardim Cid Univer.	28
Miramar	20	Jose Americo	28
Oitizeiro	28	Oitizeiro	22
Sao José	22	Paratibe	18
Tambauzinho	24	Sao José	20
Torre	22	Tambauzinho	24
		Torre	22

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Esse cenário tem o bairro Miramar seguindo a Distribuição ZIP como o único que diferiu na escolha dentre os bairros que coincidem com a Distribuição Poisson, enquanto que para a Distribuição Poisson teve a seleção de novos bairros como Cabo Brando e Paratibe. E, mais uma vez, houve a diminuição de postos comparado com o cenário anterior, com 01 posto

a menos para ambas as Distribuições. Na Figura 12 é possível visualizar a diferença na seleção dos postos de ambas as Distribuições na região de João Pessoa.

Figura 12 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 4)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Cenário 5:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 7000 m de distância do posto por dia.

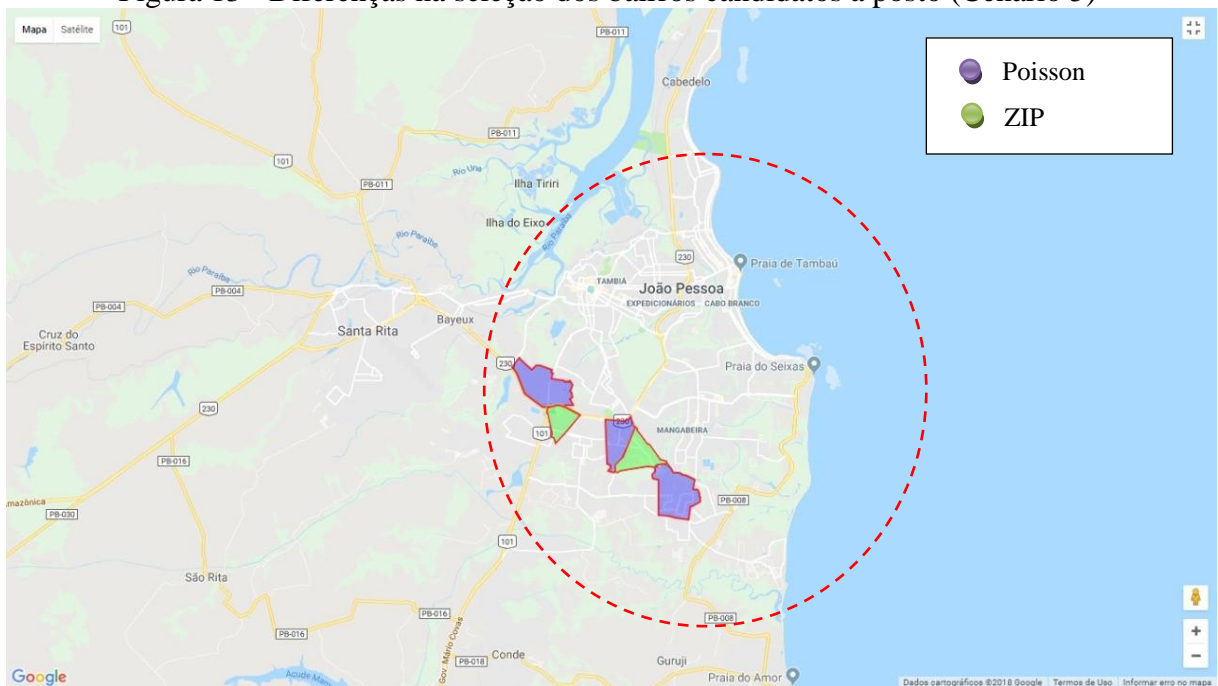
#### QUADRO 8 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 5)

ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Brisamar	22	Brisamar	22
Costa e Silva	26	Costa e Silva	26
Cristo Redentor	24	Cristo Redentor	24
Cuia	28	Ernesto Geisel	28
Ernani Sátiro	24	Jardim Cid. Univer.	28
Jardim Cid Univer.	28	Jose Americo	28
Jose Americo	28	Oitizeiro	22
Tambau	22	Tambau	22
Tambauzinho	24	Tambauzinho	24
Torre	22	Torre	22
		Valentina	22

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O cenário 5 mostrou-se estável no número de postos comparado com o cenário 4, porém na seleção dos bairros candidatos a posto observou-se ainda uma diferença de escolha entre as Distribuições, além do fato de quase nenhuma repetição na seleção dos postos em virtude do aumento gradativo das distâncias. Sendo assim, os bairros selecionados para a Distribuição ZIP foram: Cuiá e Ernani Sátiro. Já para a Distribuição Poisson têm-se: Ernesto Geisel, Oitizeiro e Valentina. Na Figura 13 é possível visualizar a diferença na seleção dos postos de ambas as Distribuições na região de João Pessoa

Figura 13 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 5)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Cenário 6:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 8000 m de distância do posto por dia.

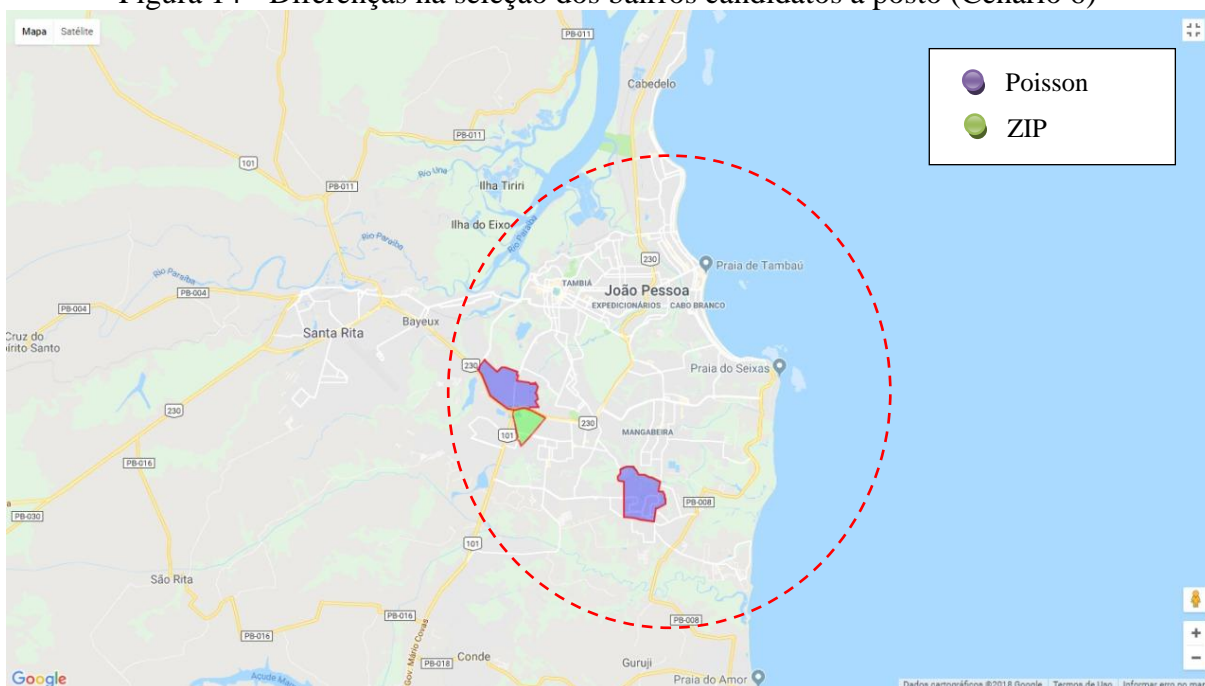
**QUADRO 9 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 6)**

ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Brisamar	22	Brisamar	22
Costa e Silva	26	Costa e Silva	26
Cristo Redentor	24	Cristo Redentor	24
Ernesto Geisel	28	Ernesto Geisel	28
Ernani Sátiro	24	Jardim Cid Univer.	28
Jardim Cid Univer.	28	Jose Americo	28
Jose Americo	28	Oitizeiro	22
Tambau	22	Tambau	22
Tambauzinho	24	Tambauzinho	24
Torre	22	Torre	22
		Valentina	22

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Para o cenário 6 a estabilidade na quantidade de postos continuou e a diferença de postos diminuiu. A partir desse cenário observou-se uma maior repetição na escolha do bairro candidato a posto, continuando assim, Ernani Sátiro para a Distribuição ZIP e os bairros de Oitizeiro e Valentina para a Distribuição Poisson. Na Figura 14 é possível visualizar a diferença na seleção dos postos de ambas as Distribuições na região de João Pessoa.

Figura 14 - Diferenças na seleção dos bairros candidatos a posto (Cenário 6)



Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

**Cenário 7:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 9000 m de distância do posto por dia.

**QUADRO 10 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 7)**

ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Brisamar	22	Brisamar	22
Costa e Silva	26	Costa e Silva	26
Cristo Redentor	24	Cristo Redentor	24
Ernesto Geisel	28	Ernesto Geisel	28
Ernani Sátiro	24	Jardim Cid Univer.	28
Jardim Cid Univer.	28	Jose Americo	28
Jose Americo	28	Oitizeiro	22
Tambau	22	Tambau	22
Tambauzinho	24	Tambauzinho	24
Torre	22	Torre	22
		Valentina	22

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Com o aumento da distância proposta nesses cenários, identificou-se uma diminuição dos postos, como também, diferentes seleções para as Distribuições. A partir de 9000 m, como observado nesse cenário, já não foram observados modificações de quantidade e seleção.

**Cenário 8:** Candidato a posto contém 02 ambulâncias e socorre apenas ocorrências de até 10000 m de distância do posto por dia.

**QUADRO 11 - CANDIDATOS PARA POSICIONAR AMBULÂNCIAS DE ACORDO COM AS DISTRIBUIÇÕES ZIP E POISSON (CENÁRIO 8)**

ZIP		Poisson	
Posto	Capacidade	Posto	Capacidade
Brisamar	22	Brisamar	22
Costa e Silva	26	Costa e Silva	26
Cristo Redentor	24	Cristo Redentor	24
Ernesto Geisel	28	Ernesto Geisel	28
Ernani Sátiro	24	Jardim Cid Univer.	28
Jardim Cid Univer.	28	Jose Americo	28
Jose Americo	28	Oitizeiro	22
Tambau	22	Tambau	22
Tambauzinho	24	Tambauzinho	24
Torre	22	Torre	22
		Valentina	22

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O último cenário não teve diferenças de acordo com os dois cenários anteriores, continuando o bairro Ernani Sátiro para a Distribuição ZIP e para a Distribuição Poisson Oitizeiro e Valentina.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento de um vasto número de aplicações dos problemas de localização observados nos últimos tempos, juntamente com as incertezas advindas do mundo real, a Otimização Probabilística torna-se uma teoria de grande relevância na busca por resultados confiáveis.

Dessa forma, o estudo do conjunto de métodos que lidam com as restrições probabilísticas, ou seja, os Determinísticos Equivalentes, bem como a noção de métodos baseados em Pontos Eficientes teve por objetivo lidar com a complexidade inerente dos parâmetros aleatórios presentes nos Modelos de Localização onde as demandas probabilísticas são governadas pela Distribuição de Poisson.

Diante desse contexto, a presença de dados com comportamento cada vez mais incerto têm requerido modelos estatísticos mais robustos com o objetivo de modelá-los de forma correta. Sendo assim, a metodologia utilizada foi fundamentada assumindo que os dados de uma aplicação real nos serviços médicos de emergência representassem eventos de contagem com excessos de zeros e, portanto, esse foi o maior diferencial do estudo da Otimização Probabilística nessa pesquisa, devido ao fato de não existir estudo sobre a distribuição do vetor de números de ocorrências que solicitam o serviço levando em consideração a Inflação de Zeros para a Distribuição.

Com a aplicação para redistribuir os bairros candidatos a postos de atendimento do Serviço de Atendimento Médico de Urgência (SAMU) da Cidade de João Pessoa foi visto que as chamadas eram variáveis aleatórias que seguiam a Distribuição de Poisson no qual 54,84% dos Bairros seguem uma inflação de zeros em seus dados. Com tais distribuições e com a teoria dos pontos eficientes, foi possível modelar o problema em Otimização Probabilística proposto por Beraldi, Bruini e Conforti (2004) e como solução houve diferença tanto na escolha de alguns bairros candidatos a postos de atendimento, como também em sua quantidade, diminuindo essa diferença com o aumento gradativo das distâncias ofertadas para cada cenário.

As estatísticas de comparação foram de grande relevância nesse estudo, apesar de ambas Distribuições serem próximas, a conversão em restrições probabilísticas de demanda no tratamento de um caso real possibilitou a inserção de novos parâmetros advindos da Distribuição ZIP e ajuste ao modelo utilizado.

Algumas possibilidades de trabalhos futuros é a modelagem do problema para cada dia da semana, para propiciar um melhor tempo de resposta de acordo com os bairros que mais solicitarão os serviços de emergência, nessa pesquisa nos preocupamos apenas com as maiores ocorrências e não com a modelagem nesse aspecto.

Nossa preocupação nessa pesquisa, no entanto, foi saber qual família de Distribuição seria utilizada pela suposição de um vasto número de dias sem a solicitação do serviço emergencial e conseqüentemente, se existiria alguma diferença na escolha do posto de atendimento para atender a demanda no município de João Pessoa. Assim, esta aplicação serviu para compreender melhor a técnica e apresentou diversas soluções que cabe ao gestor decidir a melhor estratégia por meio dos recursos existentes.

## REFERÊNCIAS

- ABOUELJINANE, L.; SAHIN, E.; JEMAI, Z. A review on simulation models applied to emergency medical service operations. **Computers & industrial Engineering**, v. 66, n. 4, p. 734–750, 2013.
- AFSHARI, H.; PENG, Q. Challenges and Solutions for Location of Healthcare Facilities. **Industrial Engineering e Management**, v. 3, n. 2, p. 1-12, 2014.
- ALCKOOIJ VAN, W.; BERGE, V.; OLIVEIRA DE, W.; SAGASTIZÁBAL, C. Probabilistic Optimization via approximate  $p$ -efficient points and bundle methods, *Computer e Operation Research*, v. 16, n. 1, p. 1-26, 2016.
- ALSALLOUM, O. I.; RAND, G. K. Extensions to emergency vehicle location models and proteomic data of *desulfovibrio vulgaris*: zero-inflated poisson regression models to predict abundance of undetected proteins. **Bioinformatics**, v. 22, n. 13, p. 1641-1647, 2006.
- ARAÚJO, J. K. T. **Otimização Probabilística: Teoria e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.
- ATALAY, K. D.; APAYDIN, A. Gamma distribution approach in chance constrained stochastic programming model. **Journal of inequalities and applications**, v. 2011, n. 1, p.1, 2011.
- BAŞAR, A.; ÇATAY, B.; ÜNLÜVURT, T. A taxonomy for emergency service station location Problem. **Optimization Letters**, v. 6, n. 6, p.1147, 2011.
- BERALDI, P., BRUNI, M. E.; CONFORTI, D. Designing robust emergency medical service via stochastic programming. **European Journal of Operational Research**, v. 158, n. 1, p. 183-193, 2004.
- BERALDI, P.; BRUNI, M. E. A probabilistic model applied to emergency service vehicle location. **European Journal of Operational Research**, v.196, n. 1, p. 323-331, 2009.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. Introduction to Stochastic Programming. **Springer-Verlag**, New York, NY, 1997.
- BRANDEAU, M. L.; CHIU, S. S. Discrete stochastic location models. **Annals of Operations**
- BROTCORNE, L.; LAPORTE G.; SEMET, F. Ambulance location and relocation models. . **European Journal of Operational Research**, v. 147, p. 451-463, 2003.
- CARBONE, R. Public facilities location under stochastic demand. **INFOR Journal**, v. 12, n. 2, p. 61–70, 1974.
- CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A General Purpose Appoximate Goodness-of-Fit Test. **Jornal of Quality Technology**, v. 27, n. 2, p. 154-161,1995.

- CHARNES, A.; COOPER W. W. Chance-Constrained programming. **Management science**, v. 6, n. 1, p. 73-79, 1959.
- CHARNES, A.; COOPER W. W. Chance-Constrained programming. *Management science*, v.6, n 1, p, 73-79, 1959.
- CHARNES. A.; COOPER W. W.; SYMONDS, G. H. Cost Horizons and Certainty Equivalents: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil. **Symonds Management Science**, v. 4, n.3, p.235-263, 1958.
- COHEN, A. C. Estimating the parameteres of modified Poisson distribution. *Journal of the American Statistical Association*, v. 55, n. 1, p. 139-143, 1960.
- COOPER, L. Location-allocation Problemas. *Operations Research*, v. 11, n. 1, p. 331-343, 1963.
- CURRENT, J.; DASKIN, M. S., e SCHILLING, D. (2002). Discrete network location models. **In Facility Location: Applications and Theory**, New York, NY. Springer-Verlag, p. 81–118, 2002.
- DASKIN, M. S.; OWEN, S. H. Location models in transportation. In **Handbook of Transportation Science**, Boston, MA. Kluwer, p. 311–360, 1999.
- DENTCHEVA, D.; MARTINEZ, G. Regularization methods for optimization problem with probabilistic constraints. *Math Programming*, v. 138, n. 1-2, p. 223-251, 2013.
- DENTCHEVA, D.; PREKÓPA, A.; RUSZCZYŃKI, A. Concavity and efficient points of discrete distributions inprobabilistic programming. **Mathematical Programming**, v. 89, n. 1, p. 55-77, 2000.
- FORATTINI, O. P. Ecologia, epidemiologia e sociedade. In **Ecologia, epidemiologia e sociedade**. Artes Médicas/Edusp. 1992
- HALL, D. B. Zero-inflated Poisson and Binomial regression with radom effects: a case study. **Biometrics**, v. 56, n. 4, p.1030-1039, 2000.
- HE, B. **Extension of the zero-inflated Poisson (ZIP) Distribution**. Chapter 3, 2004. Disponível em [http://scholarbank.nus.edu.sg/bitstream/handle/10635/13739/c3-chap\\_3.pdf?sequence=8](http://scholarbank.nus.edu.sg/bitstream/handle/10635/13739/c3-chap_3.pdf?sequence=8) . Acesso em: 25 de maio de 2017.
- JANAK, S. L.; LIN, X.; FLOUDAS, A. C. A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty: Uncertainty with know probability distribution. **Computers and Chemical Engineering**, v. 31, n. 3, p. 171-195, 2007.
- JOHNSON, N.; KOTZ, S. Distribution in statistic: Discrete Distribution. Wiley, 1969.
- JOHNSON, N.; KOTZ, S.; KEMP, A. W. Univariate Discret Distribution. Wiley, New York, 2<sup>nd</sup> ed., 1992.
- LAMBERT, D. Zero-inflated Poisson regression model, with na application to defects in manufacturing. *Technometrics*, Washington, v. 34, n. 1, p. 1-14, 1992.

- LI, P.; GARCIA, H. A.; WOZNY, G. Chance Constrained programming approach to process optimization under uncertainty. **Computers and Chemical Engineering**, v. 32, n. 2, p. 25-45, 2008.
- LIMA JUNIOR, E. F. **Uma estratégia contínua para solução de problemas de localização**. 2006. 139f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.
- LORENA, L. A.N. **Análise Espacial de Redes com Aplicações em Sistemas de informações Geográficas**, INPE, São José dos Campos. Disponível em: [www.lac.inpe.br/~lorena/producao/Analiseredes.pdf](http://www.lac.inpe.br/~lorena/producao/Analiseredes.pdf), 4, 2013. Acesso em: 10 de abril de 2017.
- LOUVEAUX, F. V. Stochastic location analysis. **Location Science**, v. 1, n. 1, p. 127–154, 1993.
- MARINHO, PRD, BOURGUIGNON, M, DIAS, CRB: R Package – AdequacyModel (2016). <https://cran.r-project.org/web/package/AdequacyModel/AdequacyModel.pdf>
- MITROPOULOS, P.; MITROPOULOS, I.; GIANNICOS, I.; SISSOURAS, A. A biobjective model for the locational planning of hospitals and health centers. **Health Care Manag Sci**, v. 9, n. 1, p. 171–179, 2006.
- NICKEL, S.; REUTER-OPPERMANN, M.; SALDANHA-DA-GAMA, F. Ambulance location under stochastic demand: A sampling approach. **Operation Research for Health Care**, v. 8, n.1, p. 24-32, 2016.
- NIE, L.; WU, G.; BROCKMAN, F. J.; ZHANG, W. Integrated analysis of transcriptomic
- OWEN, S. H.; DASKIN, M. S. An overview of representative problems in location research. **Management Science**, v. 35, n. 1, p. 423–447, 1998.
- PRÉKOPA, A. Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. **Acta Scientiarum Mathematicarum**, v. 32, p. 301-316, 1971.
- PRÉKOPA, A. **Probabilistic Programming** Eds, In: Ruszczyński, A.; Shapiro, A. Stochastic Programming. Handbooks in OR & MS, Elsevier, Amsterdam, v.10, n.1, p. 267-351, 2003.
- PRÉKOPA, A. **Stochastic Programming**, Kluwer, Dordrecht, 1995
- PRÉKOPA, A. **Stochastic Programming**. Mathematics na Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, v. 324, 2010.
- PRÉKOPA, A; SZÁNTAI, T. Flood control reservoir system design using stochastic programming. **Math. Programming Study**, v. 9, n. 1, p. 138-151, 1978.
- RIDOUT, M.; DEMTRIO, C. G. B.; HINDE, J. Models for count data for many zeros. In: **International Biometric Conference**, 19., 1998, Cape Town. **Anais...** Cape Town: [s. n.], 1998. p. 179-190.

RIZZATO, F. B. Modelos para análise de dados discretos longitudinais com superdispersão. 2011. 143f. Tese (Doutorado em Ciências) – Escola Superior de Agricultura “Luiz Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2011.

ROCHA, E. B. da; **Modelos para Análise de dados de contagens longitudinais com superdispersão**: Estimção INLA.2015. 155f. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) – Escola Superior de Agricultura “Luiz Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2015.

RODRIGUES BANDEIRA, C. Z. **Modelando dados de contagem com inflação de zeros, sobredispersão e dependência espacial**. 2015. 80f. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Programa de Pós Graduação em Matemática. Universidade Federal do Amazonas para obtenção do grau de mestre. Manaus, 2015.

SCHIMID, V. (2012). Solving the dynamic ambulance relocation and dispatching problem using approximate dynamic programming. **European Journal of Operational Research**, v. 219, n. 1, p. 611-621, 2012.

SILVA, E. L. DA; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**, UFSC, 4. ed., Florianópolis, 2005.

SILVA, V. S. P. **Modelo com Distribuição Poisson Inflacionada de zero**: Estudo do teste de Vandebroek e aplicação usando inferência Bayesiana. Dissertação (Mestrado em estatística) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

SNYDER, L. V. Facility location under uncertainty: a review. **IIE Transactions**, v. 38, n. 1, p. 537–554, 2006.

VANDENBROEK, J. A score test for zero inflation in a Poisson-distribution. **Biometrics**, Washington, v. 51, n. 2, p. 738-743, 1995.

XIE, M.; HE, B.; GOH, T. N. SPC of a near zero-defect process subject to random shock. **Quality Reliability Engrg. Internant**, v. 9, n. 1, p. 89-93, 1993.

XIE, M.; HE, B.; GOH, T. N. Zero-inflated Poisson model in statistical process control. **Computational Statistics & Data Analysis**, Amsterdam, v.38, n. 1, p. 191-201, 2001.

**APÊNDICE A**

```
rm(list=ls(all=TRUE))

library("AdequacyModel")
library("VGAM")

setwd("C:\\Users\\Widelene\\Desktop\\DISSERTAÇÃO WIDELENE\\codigo_R\\dados")

nome <- "bairro_dos_estados.txt"
dados <- read.table(as.character(nome))
dados <- dados$V1

cdf_poisson <- function(par,x){
  lambda = par[1]
  ppois(q = x, lambda = lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
}

pdf_poisson <- function(par,x){
  lambda = par[1]
  dpois(x = x, lambda = lambda, log = FALSE)
}

cdf_zip <- function(par,x){
  lambda = par[1]
  phi = par[2]

  pzipois(q = x, lambda = lambda, pstr0 = phi)
}

pdf_zip <- function(par,x){
  lambda = par[1]
```

```

phi = par[2]

dzipois(x = x, lambda = lambda, pstr0 = phi, log = FALSE)
}

# RODANDO AS ESTATISTICAS
resultado_poisson = goodness.fit(pdf = pdf_poisson, cdf = cdf_poisson, starts = 1, data =
dados, method = "BFGS", domain = c(0,Inf),
      mle = NULL)

resultado_zip = goodness.fit(pdf = pdf_zip, cdf = cdf_zip, starts = c(1,0), data = dados,
method = "BFGS", domain = c(0,Inf),
      mle = NULL)

# CRAMER VON MISSES E ANDERSON DARLING PARA POISSON
resultado_poisson$A
resultado_poisson$W

# CRAMER VON MISSES E ANDERSON DARLING PARA ZIP
resultado_zip$A
resultado_zip$W

#### CONSTRUINDO UM GRAFICO ####

result <- table(dados)

jpeg(filename      =      paste("C:\\Users\\Widelene\\Desktop\\DISSERTAÇÃO
WIDELENE\\codigo_R\\graficos\\plot_",
      nome, ".jpeg", sep = ""), width = 1080, height = 1080,
      pointsize = 12, quality = 75)
barplot(result/sum(result), ylim = c(0, 0.9), xlab = "Número de Chamadas",
      ylab = "Probabilidades", cex.lab = 1.5, cex.axis = 1.5, cex.names=1.9)
x <- 0:max(dados)
lines(x,pdf_poisson(par = resultado_poisson$mle, x = x), lwd = 2)

```

```
lines(x,pdf_zip(par = resultado_zip$mle, x = x), lwd = 2, lty = 2)
grid()
legend("topright", title = expression(bold("Distribuições de Probabilidade")),
      lty = c(1,2), lwd = c(2,2), legend = c("Poisson", "Zip"),
      box.lwd = 0, bg = "#EFEFEF", cex = 1.8)
dev.off()
resultado_poisson
resultado_zip
```