



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

ANIMAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

Olívia Sobreira Gomes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Sergio de Carvalho Bezerra
José Miguel Aroztegui Massera

João Pessoa
Agosto de 2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G633a Gomes, Olivia Sobreira.

ANIMAÇÃO E OTIMIZAÇÃO / Olivia Sobreira Gomes. - João
Pessoa, 2018.

81 f. : il.

Orientação: Sérgio de Carvalho Bezerra, José Miguel
Aroztegui Massera.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Computação Gráfica. 2. Otimização. 3. Probabilidade.
4. Animação. 5. Perseguição. I. Bezerra, Sérgio de
Carvalho. II. Massera, José Miguel Aroztegui. III.
Título.

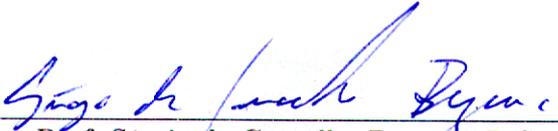
UFPB/BC

ANIMAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

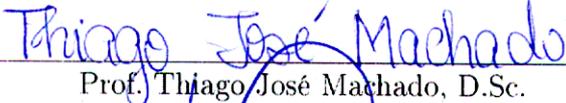
Olívia Sobreira Gomes

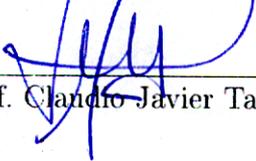
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:


Prof. Sérgio de Carvalho Bezerra, D.Sc.


Prof. José Miguel Aroztegui Massera, D.Sc.


Prof. Thiago José Machado, D.Sc.


Prof. Claudio Javier Tablada, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL
AGOSTO DE 2018

M21m Sobreira Gomes, Olívia
Animação e Otimização / Olívia Sobreira Gomes. – João
Pessoa, 2018.
81, f.: il.;
Orientadores: Sergio de Carvalho Bezerra, José Miguel
Aroztegui Massera
Dissertação (mestrado) – UFPB/CI/PPGMMC.
Referências Bibliográficas: p. 64 – 66.
1. Computação Gráfica. 2. Otimização. 3. Probabilidade.
4. Animação. 5. Perseguição.

UFPB/BC

CDU: 719.6(043)

*Ao meu querido Benjamin. Filho
muito amado*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que tem sido meu amparo Espiritual nos momentos difíceis.

À meu pai José Gomes e mãe Francisca Diassiza (In memorian), irmãos Otávio e Olga que sempre me apoiaram e incentivaram durante toda minha jornada acadêmica. Que compartilharam comigo momentos de tristeza e alegria, superando todos os desafios que a vida nos apresentou. Amo - os.

Ao meu amigo, companheiro e esposo João Paulo, também colega de mestrado, pelo conhecimento partilhado, pelas "nerdices", pelos risos e consolo, pelo apoio e voz da razão nos momentos que pensei em desistir. Te "gosto" muito.

Ao meu filho Benjamin, que apesar das inúmeras noites mal dormidas, tem sido minha maior motivação na busca pelos objetivos de vida. Mamãe te ama.

A família do meu esposo, em especial Naide Caraú (Mãe) e João Maria de Oliveira (Pai) pela compreensão, apoio e acolhimento no momento que precisamos.

Aos meus professores, em especial meus orientadores Sérgio de Carvalho Bezerra e José Miguel Aroztegui Massera, pela paciência e prontidão sempre que precisei. Pelo exemplo de profissional e humildade, são referenciais para mim.

Ao meu orientador da graduação em Matemática, professor Baldoino Sonildo da Nóbrega, grande incentivador da minha formação continuada, o qual sou grata pelo incentivo e iniciativa de ingresso no presente Mestrado.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu concluísse mais essa etapa da minha vida.

Eternamente grata!

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANIMAÇÃO E OTIMIZAÇÃO

Olívia Sobreira Gomes

Agosto/2018

Orientadores: Sergio de Carvalho Bezerra

José Miguel Aroztegui Massera

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Apresenta-se, nesta dissertação, uma pesquisa que envolve três grandes áreas da Matemática aplicada, Computação Gráfica (CG), Probabilidade e Otimização. O objetivo principal de desenvolver estratégias de movimentação entre personagens adversários numa perseguição onde cada movimentação dar-se-á a partir da solução de um problema de Otimização ou uma regra probabilística. A dinâmica da movimentação, dar-se-á por meio da formulação e implementação de problemas de otimização que governarão a perseguição. É feito um levantamento teórico apresentando os assuntos relacionados à CG, em especial: Animação; Otimização, por exemplo: Definição do Problema geral de Otimização e sua classificação referente às propriedades da função objetivo bem como às características do conjunto de soluções viáveis; Probabilidade, é definido modelo probabilístico, Variáveis Aleatórias, em especial, Uniforme, Exponencial e Normal, Esperança Matemática e Lei dos Grandes Números.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANIMATION AND OPTIMIZATION

Olivia Sobreira Gomes

August/2018

Advisors: Sergio de Carvalho Bezerra

José Miguel Aroztegui Massera

Program: Computational Mathematical Modelling

In this dissertation, we present a research that involves three major areas of Applied Mathematics, Computer Graphics (CG), Probability and Optimization. The main objective is to develop strategies of movement between adversary characters in a chase where each move will be based on the solution of an optimization problem or a probabilistic rule. The dynamics of the movement will be through the formulation and implementation of optimization problems that will govern the persecution. A theoretical presentation is presented presenting the subjects related to CG, in particular: Animation and Color; Optimization, for example: Definition of the general optimization problem and its classification regarding the properties of the objective function as well as the characteristics of the set of feasible solutions; Probability, is defined probabilistic model, Random Variables, in particular, Uniform, Exponential and Normal, Mathematical expectation and Law of large Numbers.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivos	2
1.3 Estrutura do Trabalho	3
2 Animação	4
2.1 Animação por Computador	5
2.2 Formas de Animação	6
2.3 Animação Aplicada a Jogos 2D	6
3 Otimização	8
3.1 Problema de Otimização	8
3.2 Classificação dos Problemas de Otimização	10
3.2.1 Problema de Otimização Contínuo	10
3.2.2 Problema de Otimização Discreto	11
3.3 Programação Linear	12
3.3.1 Problema de Otimização Convexo	12
3.3.2 Problemas de Otimização linear	14
3.4 Programação não Linear	14
3.4.1 Condições de Otimalidade	15
3.4.2 Problemas de Otimização quadrática	15
3.5 Métodos de Otimização	16
3.5.1 Métodos sequencias	16
3.5.2 Convergência assintótica	17

3.5.3	Direções viáveis	18
3.5.4	Métodos de descida	19
3.5.5	Método das direções viáveis	19
4	Probabilidade	22
4.1	Definições Preliminares	22
4.1.1	Modelo Probabilístico	22
4.2	Variável Aleatória	23
4.2.1	Tipos de variáveis aleatórias	23
4.2.2	Principais Modelos	24
4.3	Esperança	25
4.3.1	Esperança de uma função de uma variável aleatória discreta	26
4.3.2	Esperança de variáveis aleatórias contínuas	26
4.4	Lei dos Grandes Números	26
4.4.1	Lei Fraca de Khintchin	27
4.4.2	Lei Forte de Kolmogorov	27
5	Resultados numéricos	28
5.1	Modelos Determinísticos de perseguição	28
5.2	Variantes do modelo 1	30
5.2.1	Variante 1: semiplano	30
5.2.2	Variante 2: complemento de uma elipse	31
5.2.3	Variante 3: Complemento de duas elipses	31
5.3	Resultados numéricos dos modelos determinísticos	32
5.4	Modelos não determinísticos de Perseguição	38
5.4.1	Caso Unidimensional	38
5.4.2	Caso Bidimensional	38
5.5	Análise dos Algoritmos	39
5.5.1	Análise do Algoritmo que resolve os casos 1D e 2D	39
5.6	Resultados numéricos modelos não determinísticos	43
5.6.1	Caso unidimensional	43
5.6.2	Caso bidimensional	48
5.6.3	Outras simulações	56
6	Conclusões	62
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	63
	Referências Bibliográficas	64

Lista de Figuras

2.1	Sprite: Sequência de animação. Fonte: http://martindrapeau.github.io/backbone-game-engine/docs/hero-collisions.png	7
3.1	x^1 é o minimizador global (\bar{v} é o valor ótimo), x^2 é um minimizador local estrito e $[x^3, x^4]$ é um conjunto de minimizadores locais não estritos. Fonte: [14].	9
3.2	Regiões viáveis para os diferentes problemas apresentados. As variáveis de projeto podem assumir números reais.	11
3.3	Regiões viáveis para os diferentes problemas apresentados. As variáveis de projeto podem assumir números inteiros. Fonte: [2].	12
3.4	O conjunto S_1 é convexo; o conjunto S_2 não é convexo.	13
3.5	Ilustração da definição de função convexa. Fonte: [14]	13
5.1	Ilustração da Dinâmica da Perseguição	29
5.2	Modelo 1: sem restrições	33
5.3	Variante 1: semiplano.	34
5.4	Variante 2: complemento de uma elipse.	34
5.5	Variante 3: complemento de duas elipses.	35
5.6	Modelo 1: sem restrições.	36
5.7	Variante 2: complemento com uma elipse	37
5.8	Variante 3: complemento com duas elipses	37
5.9	Ilustração do Caso Bidimensional.	39
5.10	Reta contendo os pontos q , p e s	41
5.11	Teste 1: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 1D	45
5.12	Teste 2: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 1D	46
5.13	Teste 3: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 1D	47

5.14	Teste 1: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura(em azul) no Caso 2D	49
5.15	Teste 2: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 2D	51
5.16	Teste 3: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 2D	52
5.17	Teste 4: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 2D	54
5.18	Evolução de capturas para diferentes valores de θ nos casos 1D e 2D.	56
5.19	Teste 5: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos	57
5.20	Teste 6: Valor médio de capturas (em vermelho)e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos	57
5.21	Teste 7: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos	58
5.22	Teste 8: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos	58
5.23	Teste 9: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos	59
5.24	Teste 10: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos	59
5.25	Teste 11: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos	60
5.26	Teste 12: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos	60
5.27	Teste 13: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos	61
5.28	Teste 14: Valor médio de capturas(em vermelho) e valor médio de movimentos com captura(em azul) em 1000 experimentos	61

Lista de Tabelas

5.1	Teste 1: modelos determinístico	35
5.2	Teste 2: modelos determinísticos	35
5.3	Teste 1: simulação do caso 1D com 100 experimentos	44
5.4	Teste 1: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 1D	46
5.5	Teste 2: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 1D	47
5.6	Teste 3: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 1D	48
5.7	Teste 1: simulação do caso 2D com 100 experimentos	49
5.8	Teste 1: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D	50
5.9	Teste 2: simulação do caso 2D com 100 experimentos	50
5.10	Teste 2: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D	51
5.11	Teste 3: simulação do caso 2D com 100 experimentos	52
5.12	Teste 3: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D	53
5.13	Teste 4: simulação do caso 2D com 100 experimentos	53
5.14	Teste 4: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D	54

Lista de Símbolos

Ω	Espaço amostral, p. 22
δ	Parâmetro de controle, p. 31
ϵ	Parâmetro de controle, p. 43
∞	Infinito, p. 43
λ	Vetor de multiplicadores de Lagrange, p. 15
$\mathbb{E}X$	Esperança de X , p. 43
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais, p. 8
\mathbb{R}^n	Espaço de dimensão n , p. 10
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros, p. 11
$\mathfrak{C}_{c,r}$	Círculo de centro c e raio r , p. 28
\bar{X}	Média das variáveis aleatórias, p. 43
θ	Ângulo de movimentação do ponto., p. 38
c_k	Posição do centro do círculo em k , p. 28
e	Número de Euler, p. 40
n_{sd}	Dimensão do espaço onde ocorre a perseguição, p. 28
p_k	Posição do ponto em k , p. 28
A	Evento probabilístico, p. 22
S	Conjunto viável, p. 8
α	Número pertencente ao intervalo $[0,1]$, p. 12
\mathcal{A}	Sigma Álgebra, p. 22

∇f	Gradiente da função f , p. 15
f	Função objetivo, p. 8
g	Restrições de desigualdade, p. 9
h	Restrições de igualdade, p. 9

Lista de Abreviaturas

<i>deltap</i>	Abreviação intervalar das esperanças, p. 40
<i>movmax</i>	Número de movimentos máximos para o ponto e para o círculo., p. 39
<i>nps</i>	Número total de esperanças, p. 40
<i>numexp</i>	Número máximo de movimentos., p. 39
<i>pmax</i>	Esperança máxima, p. 40
<i>pmin</i>	Esperança mínima, p. 40
1D	Unidimensional, p. 39
2D	Bidimensional, p. 39
Exp	Experimentos, p. 44
FAIPA	Feasible Arc Interior Point Algorithm., p. 32
FINV	Função inversa, p. 40
KKT	Condição de Karush-Kuhn-Tucker, p. 15
PL	Programação linear, p. 14
arg	Argumento, p. 30
i.i.d	Independentes e igualmente distribuídas, p. 43
max	Maximizar, p. 28
min	Minimizar, p. 29

Capítulo 1

Introdução

Computação gráfica (CG) é comumente definida como um conjunto de métodos e técnicas capazes de transformar dados em imagem através de um dispositivo gráfico [1]. Em síntese seus estudos resumem-se à geração, manipulação e interpretação de modelos e imagens de objetos por meio de um computador.

Segundo [19], a computação gráfica encontra aplicações em praticamente todas as áreas do conhecimento humano e pode-se observar em quaisquer que sejam as aplicações, pelo menos três das características listadas abaixo:

- Permite a visualização de objetos que ainda encontram-se em fase de elaboração;
- Torna possível a visualização de objetos que estão fora do alcance de visão;
- Permite a construção e visualização de objetos que estão fora da realidade dimensional.

A primeira característica é útil em áreas como arquitetura e engenharia facilitando a comunicação arquiteto-cliente uma vez que torna-se possível a análise espacial do projeto a ser desenvolvido. A segunda é fortemente presente nas ciências médicas onde é possível coletar dados a partir de imagens geradas através de exames como radiografias, tomografias e ultra-som. A última característica, por sua vez, pode ser vista nas grandes produções cinematográficas e mais recentemente na construção de jogos e animação, sendo esta última o objeto desta pesquisa.

Do latim, *Animare*, dar vida, movimento, coragem, entusiasmo, alma. A transcrição de dicionário acima não só define como também descreve os passos para produção de animação em computação gráfica. Primeiro tenta-se desenhar ou esculpir, depois capturar os movimentos e, por último, retratar o espírito da criatura ou cena a ser animada [18]. Dessa forma, Animação é um recurso gráfico de extrema importância e aqui tentaremos visualizá-la através de outras áreas: otimização e probabilidade.

1.1 Motivação

O fato da computação gráfica ser uma área amplamente aplicada, a junção de seus conceitos com outros conceitos das áreas clássicas e modernas da matemática, como Otimização e Probabilidade, torna-se uma proposta atraente para a formulação de métodos e resolução de problemas diversos.

Neste trabalho, intitulado Animação e Otimização, desenvolveu-se uma pesquisa que misturasse computação gráfica, otimização e probabilidade na construção de estratégias de movimentação (captura e sobrevivência) aplicadas a uma dinâmica de perseguição.

O uso das técnicas de otimização neste trabalho justifica-se pelo fato da mesma representar uma classe de problemas que consiste em realizar a melhor escolha dentre um conjunto de alternativas. Ou seja, diz respeito à seleção de um critério usado para escolher uma solução que geralmente é representada por uma função que deverá ser minimizada ou maximizada.

Já o uso dos conceitos probabilísticos justifica-se pelo fato de deixar a perseguição um tanto mais dinamizada atribuindo características aleatórias na movimentação. Desse modo os modelos apresentados estão agrupados em dois grupos: determinísticos e não determinísticos.

Partindo deste princípio foram construídas estratégias de movimentação que governam a dinâmica de uma animação cuja formulação inicial e suas variantes estão descritas nos capítulos adiante.

1.2 Objetivos

Os objetivos da pesquisa resumem-se a:

- Dissertar sobre os conceitos de animação, otimização e probabilidade, apresentando os pontos pertinentes à pesquisa;
- Aplicar os conceitos de otimização e probabilidade na construção de estratégias direcionadas a uma perseguição.
- Desenvolver estratégias de movimentação entre personagens adversários numa animação onde cada movimentação dar-se-á a partir de um problema de otimização e em alguns casos adotando características probabilísticas.
- Simular numericamente a dinâmica das perseguições.

1.3 Estrutura do Trabalho

Os próximos capítulos estão estruturados da seguinte forma.

Capítulo 2: é dissertado sobre Animação de um modo geral. É feito um breve levantamento histórico de sua evolução até os dias atuais destacando Walter Elias Disney como um grande contribuidor dessa evolução. Também são apresentadas as principais formas e técnicas de animação, sendo elas Animação por Quadros-chave, Animação Procedimental e Animação Estocástica.

Capítulo 3: neste capítulo é definido o Problema de Otimização e logo após são apresentadas as definições de minimizador local, minimizador global e valor ótimo. Na sequência classifica-se os problemas de otimização em discretos e contínuos. O capítulo encerra-se com uma breve abordagem sobre programação linear e programação não linear.

Capítulo 4: este capítulo destina-se à Probabilidade. São apresentados a definição de modelo probabilístico, classificação de variável aleatória em discretas e contínuas, define-se valor esperado e também alguns modelos probabilísticos como: exponencial, uniforme e normal. É também enunciada brevemente a lei dos grandes números.

Capítulo 5: neste capítulo são apresentados testes numéricos para os modelos definidos no capítulo 4. Eles estão organizados em dois grupos: determinísticos e não determinísticos. São exibidas as respectivas descrições bem como as variantes do Modelo 1. A sequência traz dois casos chamados de unidimensional e bidimensional onde são acrescentadas ao Modelo 1 peculiaridades aleatórias. Finaliza-se o capítulo com a apresentação das simulações numéricas, exposição dos resultados e discussões acerca dos mesmos.

Capítulo 6: são apresentadas as conclusões baseadas nos objetivos e resultados da pesquisa. Também são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Animação

Nos tópicos seguintes são retratados a Animação como recurso gráfico de extrema importância, bem como um breve levantamento histórico e todos os temas pertinentes para construção deste trabalho. Esses temas podem ser consultados nas bibliografias [18], [29], [30], [31], [32], [33] e [34].

Do latim, *Animare*, dar vida, movimento, coragem, entusiasmo, alma. Segundo [29], os primeiros registros de animação datam de 2000 a.C. quando os egípcios pintavam nas paredes sequências de lutas e cenas de adoração. Somente em 1828, a animação pôde ser explicada pelo entendimento do princípio fundamental do olho humano: a persistência da visão. Esse princípio foi demonstrado por Paul Roget Frenchman, com a invenção do thaumatrope, um disco colocado em uma haste que de um lado tinha pintado um pássaro e do outro uma gaiola vazia. Quando o disco girava o pássaro aparecia dentro da gaiola. *Thauma* é uma palavra grega que significa magia e deu origem a *thaumaturgy*, a arte de fazer magia ou arte miraculosa. No português, taumaturgo é aquele que faz milagres.

Um dos artefatos mais curiosos e em uso até hoje são os Flipbooks. Os flipbooks são pequenos livros, ou cantos de livros usados para simular uma animação desenhando folha a folha. A animação ganha vida ao se folhear com rapidez essas páginas. Parece uma brincadeira de criança, mas em alguns países existe uma legião de fãs e compradores de histórias complexas deste tipo de animação [33].

A maior invenção no ramo da animação foi a câmera fotográfica. Quando inventadas, eram utilizadas somente para imagens paradas. Pouco e pode-se dizer que quase nada, era sabido como representar uma história a partir de imagens. No final de 1890, Méléis introduziu os primeiros conceitos e truques para contar histórias e dar vidas a coisas inanimadas, hoje conhecida como **Animação antropomórfica** [33].

Diversos outros acontecimentos marcaram a evolução da Animação em camadas e cores, mas nenhum nome é mais evidente na história da animação do que Walter Elias Disney (1901-1966) [31].

Walt Disney, como gostava de ser chamado, não só construiu novas técnicas e estúdios, como transformou a animação em uma forma de arte. Disney foi premiado 31 vezes com o Oscar, criou os *storyboards*¹, os *animatics* (pilotos de animação), planos de câmara, desenvolveu o uso de cores e som. Ele também promoveu a ideia de que a mente do personagem era a força motriz da ação e que uma chave para o movimento animado era a análise do movimento real [18]. Atualmente, a animação possui um mercado bem consolidado com um público de faixa etária bem variada e seu mercado segue em constante desenvolvimento.

2.1 Animação por Computador

Pode-se dizer que a história da animação por computador iniciou-se em 1974 por René Jodoin, com o primeiro filme *Hungh*. Esse filme foi gerado utilizando a técnica de interpolação de objetos [18]. Filmes de circuito comercial que marcaram a história são *Star Treck II* (1977, que usou a animação gerada por computador em poucos minutos), *Tron* (1982, que usou como parte integrante do filme), o *Exterminador do Futuro II*, *Jurassic Park*, *O segredo do abismo*, e recentemente a franquia *Matrix*, os desenhos animados 3D da série *Toy Story* da Pixar e os novos produtos resultantes da união pixar-Disney [31].

Uma animação por computador pode ser produzida por uma grande diversidade de métodos. Pode-se citar os produzidos a partir de desenho ou modelos físicos. No primeiro tipo, os artistas criam uma sequência de desenhos que são combinados em um filme [32]. No segundo método, é usado um modelo físico, por exemplo, um boneco com articulações ou até mesmo uma pessoa, onde cada movimento é registrado por uma fotografia quadro a quadro [30].

Basicamente, divide-se a animação por computador em duas categorias: animação assistida por computador e animação gerada por computador [18]. No primeiro caso, o animador cria o quadro (movimento) inicial e final enquanto o computador se encarrega de gerar os quadros intermediários. No segundo, apresenta-se um grupo maior de técnicas subdivididas em: técnicas de baixo nível (low level techniques - técnicas que ajudam o animador na especificação do movimento) e técnicas de alto nível (high level techniques - técnicas usadas para descrever como se comporta o personagem durante a animação) [18].

Uma forma de ilustrar essas duas aplicações técnicas, é imaginar um sistema que controle o movimento de um personagem como uma macrofunção que se resume ao comando "caminhe atenciosamente", isso é um sistema de alto nível. Quando

¹São organizadores gráficos tais como uma série de ilustrações ou imagens arranjadas em sequência com o propósito de pré-visualizar um filme, animação ou gráfico animado, incluindo elementos interativos em websites [35].

acontece a geração de todos os quadros correspondentes a cada movimento de andar do personagem, tem-se um sistema de baixo nível [30] e [35].

2.2 Formas de Animação

Dentre as várias formas, pode-se citar baseando-se em [18], [36] e [34]:

- **Animação por Quadros-chave (*Keyframe*)**

Corresponde a uma forma de animação assistida por computador, na qual o animador determina o que deve ser apresentado no quadro inicial e final sendo o computador uma ferramenta de apoio na determinação de quadros intermediários que ligarão os quadros-chave determinados pelo usuário. Tal sistema é bem eficiente, pois permite o controle quase por completo de uma cena, no entanto ele é bem trabalhoso [18].

- **Animação Procedimental**

Fundamenta-se na capacidade do computador em determinar a dinâmica de uma sequência baseando-se em instruções implícitas, onde o objetivo final de uma sequência é especificado pelo animador, sendo os movimentos consequentes determinados por algoritmos [36].

- **Animação Estocástica**

Este tipo de animação utiliza o processo estocástico ou randômico para controlar grupos de objetos, ou seja, os movimentos ocorrem aleatoriamente [18].

2.3 Animação Aplicada a Jogos 2D

O termo *sprite* é muito utilizado nos jogos 2D. Sprites são os personagens presentes no jogo, eles podem realizar vários movimentos como andar, saltar, lutar, voar, entre outros. Num jogo geralmente é fornecido um *sprite* representando o personagem principal contendo um controlador, enquanto os outros podem ser os inimigos que perseguem o jogador, ou objetos que o mesmo pode pegar [36].

Como mostrado na figura (2.1), um *sprite* pode executar diversos tipos de movimentos. A execução de vários movimentos acarreta realismo à animação [36]. Desta maneira, a estrutura de dados que representa os *sprites* deve permitir que vários quadros sejam armazenados para serem escolhidos no decorrer do jogo.

Os objetos que compõem o ambiente de um jogo possuem forma, assim como uma posição no espaço, característica que deve ser vista com bastante atenção [37]. A ocorrência de colisões entre objetos é uma das consequências existentes quando a posição dos objetos não é respeitada. Partindo do princípio de que cada elemento

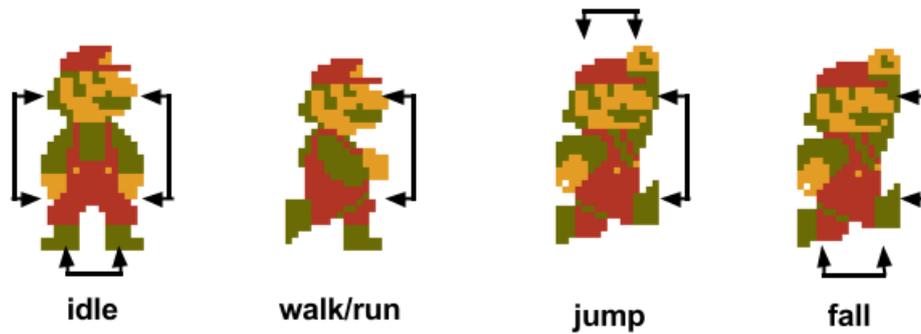


Figura 2.1: Sprite: Sequência de animação. Fonte: <http://martindrapeau.github.io/backbone-game-engine/docs/hero-collisions.png>.

possui uma posição (x, y) , uma largura e uma altura, ainda em [37], o método mais simples consiste em verificar se algum retângulo invade o espaço de outro.

Um outro método consiste em representar o espaço usado pelo objeto como sendo uma circunferência. Para verificar se houve ou não uma colisão, calcula-se a distância (distância entre pontos) entre os dois objetos. Para que exista uma colisão o resultado desse cálculo deve ser menor ou igual à soma dos raios dos objetos multiplicados por uma constante que representa o quanto da circunferência é utilizada pelos mesmos [37].

Como mostrado, o cálculo de distâncias entre pontos, embora represente um recurso simples, serve como método de verificação da existência de colisões. Usaremos esse recurso em parceria com otimização para montar estratégias de movimentação entre objetos, de modo a visualizar essa dinâmica que representará uma perseguição entre os mesmos. A animação da perseguição consiste na visualização das iterações dos algoritmos criados para solucionar cada caso.

Capítulo 3

Otimização

Otimização refere-se a uma área de conhecimento que aborda problemas que procuram encontrar a melhor escolha entre um conjunto de alternativas. Mesmo nessa declaração simples e imprecisa, é possível identificar dois elementos fundamentais presentes em um problema de otimização: *Melhor*, termo que diz respeito à seleção de um critério usado para escolher a solução que geralmente é representada por uma função que deverá ser minimizada ou maximizada; *Alternativa*, que se refere ao conjunto de possíveis soluções que devem ser satisfeitas por qualquer solução candidata.

Neste capítulo, são apresentadas definições importantes que auxiliaram a formulação dos problemas de otimização desta pesquisa. Posteriormente, são descritas as classificações dos problemas de otimização baseadas nas propriedades da função objetivo, bem como nas características de um conjunto S que define as alternativas.

3.1 Problema de Otimização

Do ponto de vista matemático, um problema de otimização tem como objetivo encontrar um objeto de um conjunto S com o melhor desempenho possível. A medida de desempenho é definida por uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Caso o melhor desempenho signifique minimizar f em S , escreve-se:

$$\min_{x \in S} f(x) \tag{3.1}$$

A fórmula (3.1) significa encontrar um $x^* \in S$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in S$. A função f de (3.1) é denominada função objetivo (função que se pretende maximizar ou minimizar) e seu domínio S é o conjunto de possíveis soluções, também chamado de região viável [15], que pode ser um conjunto de equações e/ou inequações [2].

Diante disso, o problema geral apresentado em (3.1) corresponde a

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O problema (3.2) é chamado de Problema de Otimização Geral, isto é, com restrições de igualdade e desigualdade, onde $h : S \rightarrow \mathbb{R}^p$ representa um conjunto de p funções chamadas restrições de igualdade e $g : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ um conjunto de m funções que, por sua vez, são as restrições de desigualdade. Na ausência de h e g o problema é dito sem restrições. As definições abaixo estão atreladas ao problema (3.2).

Definição 1. Um ponto $\bar{x} \in S$ é

- minimizador global de (3.2), se

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in S; \quad (3.3)$$

- minimizador local de (3.2), se existe uma vizinhança U de \bar{x} tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in S \cap U. \quad (3.4)$$

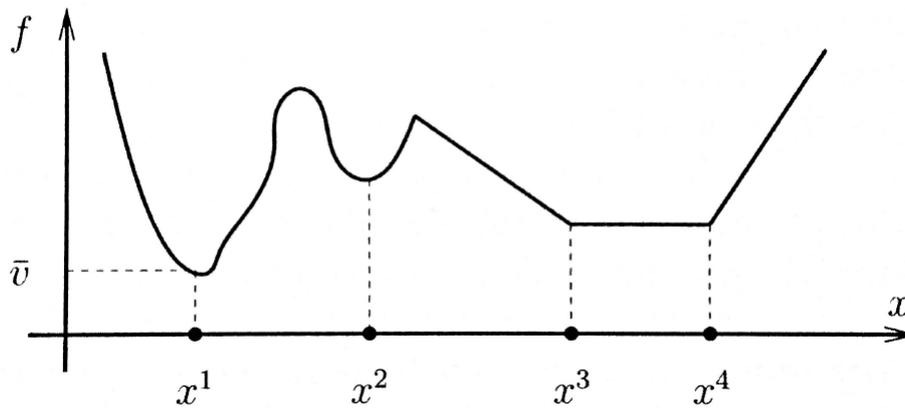


Figura 3.1: x^1 é o minimizador global (\bar{v} é o valor ótimo), x^2 é um minimizador local estrito e $[x^3, x^4]$ é um conjunto de minimizadores locais não estritos. Fonte: [14].

Definição 2. Diz-se que $\bar{v} \in]-\infty, +\infty[$ definido por

$$\bar{v} = \inf_{x \in S} f(x) \quad (3.5)$$

é o valor ótimo do problema (3.2). Mais detalhes destas definições podem ser vistos nas literaturas [3], [5], [8], [14] e [15].

3.2 Classificação dos Problemas de Otimização

A classificação dos problemas de otimização é muito importante uma vez que a caracterização dos problemas auxiliam na formulação de estratégias e técnicas que buscam solucionar um dado problema. Os mesmos podem ser classificados de acordo com vários critérios relacionados às propriedades da função objetivo como também do conjunto viável S . Assim, as classificações possíveis levam em consideração:

- A natureza do conjunto viável S ;
- As propriedades da função objetivo f .

A classificação comumente utilizada é a que baseia-se na natureza das soluções. Dentre as várias classes de problemas existentes, são apresentados aqui os problemas de otimização Contínuo e Discreto. A seguir é feita uma breve abordagem para cada um dos casos. Esta classificação é sugerida na literatura [2], [7] e [9].

3.2.1 Problema de Otimização Contínuo

O problema de otimização (3.2) é chamado Contínuo quando o conjunto de soluções viáveis é um subconjunto contínuo do \mathbb{R}^n . Quando $m = p = 0$, o conjunto de soluções é todo o espaço do \mathbb{R}^n . Os casos mais comuns ocorrem quando S é uma superfície diferenciável de dimensão n (com ou sem fronteira), ou $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma região desse espaço. Seguem abaixo alguns exemplos de problemas contínuos apresentados em [2]:

1. Maximize a função $f(x, y)$ no conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.
O conjunto de solução S é o círculo unitário S^1 , que é uma curva de \mathbb{R}^2 , isto é, uma superfície unidimensional.
2. Maximize a função $f(x, y)$ no conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
O conjunto de soluções é um disco de \mathbb{R}^2 , uma superfície bidimensional contendo a fronteira.
3. Maximize a função $f(x, y)$ no conjunto S , definido pelas inequações $x^2 + y^2 \leq 1$ e $y - x^2 \geq 0$.
O conjunto de soluções é uma região definida pela intersecção de duas superfícies com fronteira.

Na Figura 3.2 estão as ilustrações das regiões viáveis para cada um destes exemplos.

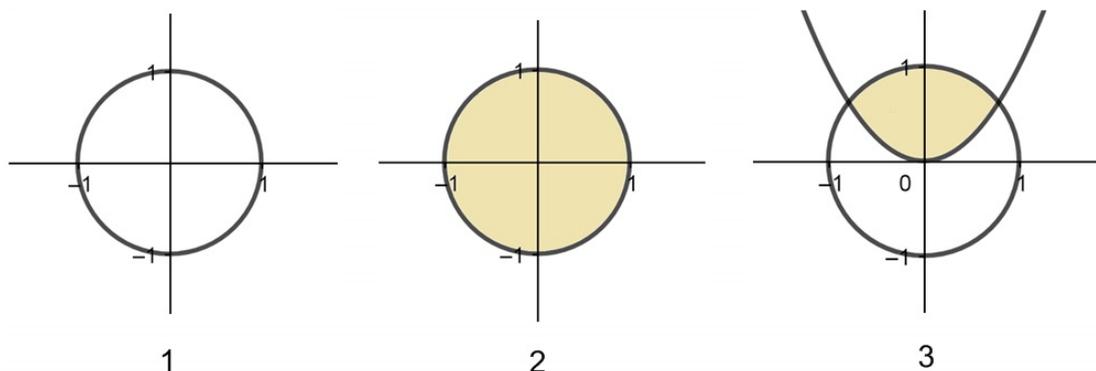


Figura 3.2: Regiões viáveis para os diferentes problemas apresentados. As variáveis de projeto podem assumir números reais.

3.2.2 Problema de Otimização Discreto

Um problema de otimização é chamado discreto quando S corresponde a um conjunto discreto, isto é, S é um conjunto de pontos isolados. O caso mais frequente nas aplicações ocorre para $S \subseteq \mathbb{Z}^n = \{(i_1, \dots, i_n), i_n \in \mathbb{Z}\}$. Segue abaixo alguns exemplos de problemas discretos apresentados em [2] cuja ilustração pode ser vista na Figura 3.3.

1. Maximize a função $f(x, y)$, sujeito ao conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; 6x + 7y \leq 21, x \geq 0, y \geq 0\}$.
O conjunto solução S é finito e corresponde ao conjunto de pontos com coordenadas inteiras dentro do triângulo cujos lados são os eixos e a reta $6x + 7y = 21$.
2. Minimize a função $f(x, y) = (x - 1)^2 + (x - 6)^2$, sujeito a $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; y \leq x, x \geq 0, y \geq 0\}$.
O conjunto S é infinito, o problema consiste em encontrar, entre todos os pontos com coordenadas inteiras em um cone, o que é mais próximo do ponto $(1, 6)$.

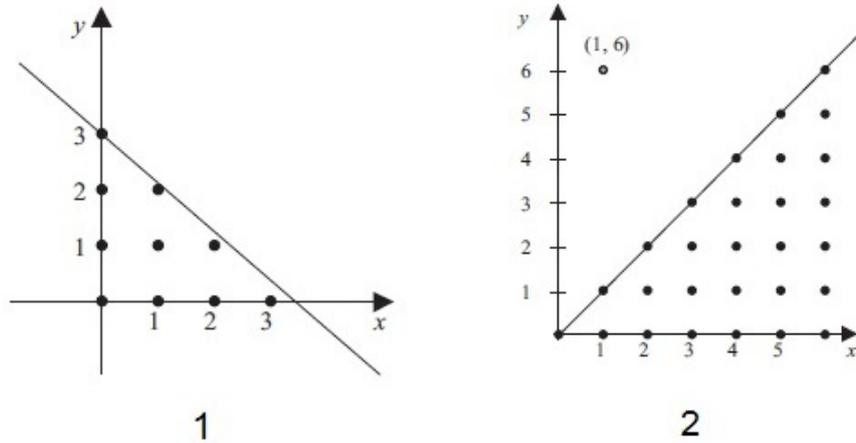


Figura 3.3: Regiões viáveis para os diferentes problemas apresentados. As variáveis de projeto podem assumir números inteiros. Fonte: [2].

3.3 Programação Linear

As propriedades da função objetivo também são fundamentais na elaboração de estratégias para solucionar os problemas de otimização. Os casos especiais que levam a estratégias de soluções particulares são aquelas em que a função objetivo é, dentre outras, convexa, linear e quadrática. O material apresentado nesta seção é baseado na literatura [4], [6], [11], [14] e [15].

3.3.1 Problema de Otimização Convexo

Para definir o problema de otimização convexo faz-se necessário apresentar algumas definições preliminares, sendo elas correspondentes a conjuntos convexos e funções convexas.

Um conjunto convexo caracteriza-se por conter todos os segmentos cujos extremos pertencem ao conjunto. Ver Figura 3.4.

Definição 1. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado convexo se para quaisquer pontos $x \in S$, $y \in S$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$. O ponto $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$, onde $\alpha \in [0, 1]$, se chama combinação convexa de x e y (com o parâmetro α).

O conjunto vazio, o espaço \mathbb{R}^n é um conjunto que contém um ponto só são trivialmente convexas.

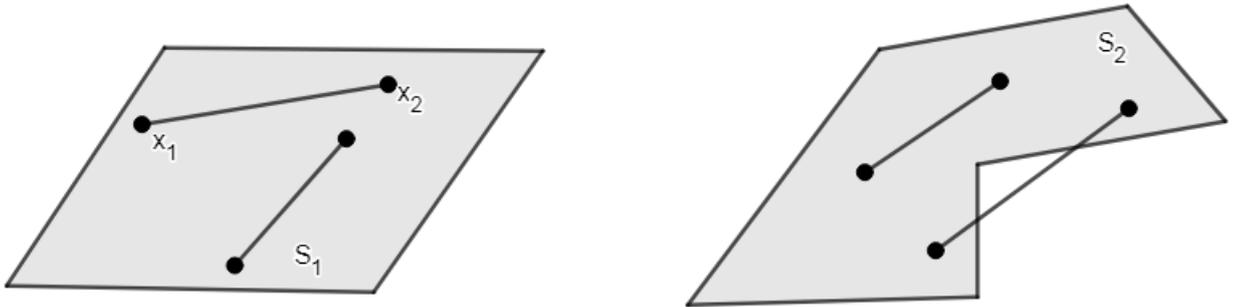


Figura 3.4: O conjunto S_1 é convexo; o conjunto S_2 não é convexo.

Definição 2. Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, diz-se que a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em S quando para quaisquer $x \in S$, $y \in S$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (3.6)$$

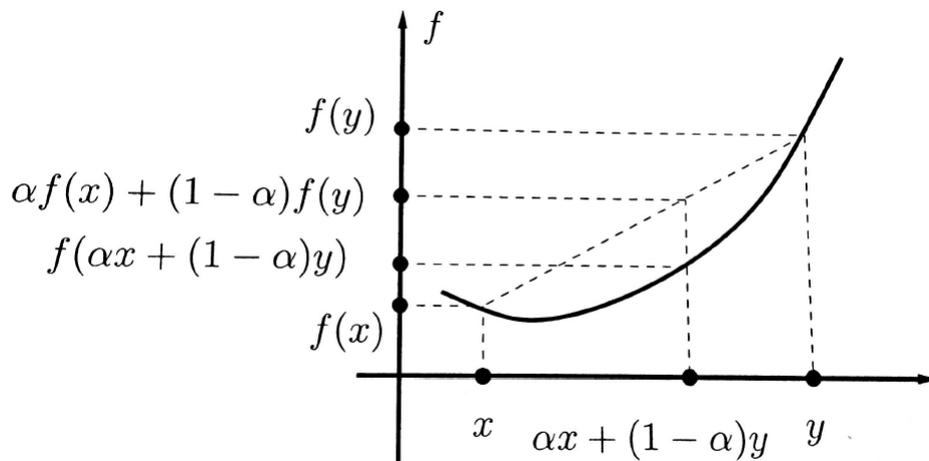


Figura 3.5: Ilustração da definição de função convexa. Fonte: [14]

Definição 3. (Problema de minimização convexo) Dizemos que

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in S. \quad (3.7)$$

é um problema de minimização convexo quando $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa no conjunto S . A importância da convexidade já

pode ser vista no resultado seguinte, cuja demonstração encontra-se em [14].

Teorema 1 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa em S . Então todo minimizador local do problema (3.7) é global. Além disso, o conjunto de minimizadores é convexo. Se f é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.*

3.3.2 Problemas de Otimização linear

Programação Linear (PL) é uma subárea da Otimização que compreende uma classe de problemas no qual a função objetivo é linear nas incógnitas e as restrições consistem em igualdades e desigualdades também lineares. Em particular, tal problema é convexo [14]. Logo, pelo Teorema 1, toda solução local é global. A forma padrão de um problema de otimização linear é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 \text{sujeito a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
 \text{e} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde b_i 's, c_i 's e a_{ij} 's são constantes reais fixas, e x_i 's são os números reais a serem determinados.

Em uma notação vetorial mais compacta, (3.8) torna-se:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Onde \mathbf{x} e \mathbf{c} são vetores coluna de dimensão n , \mathbf{c}^T é um vetor linha de dimensão n . \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$ e \mathbf{b} é um vetor coluna de dimensão m . A desigualdade do vetor $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ significa que cada componente do vetor é não negativo.

3.4 Programação não Linear

Assim como programação linear, a programação não linear é uma classe de subproblemas que aparecem em vários métodos para solucionar problemas de otimização mais gerais. Em grande parte das aplicações, modelos lineares refletem apenas aproximações dos modelos reais. Os fenômenos, numa visão geral, são melhor representados por modelos não lineares.

Segundo [14], o problema de otimização (3.2) quando não linear, define-se de tal maneira onde f e g_i são funções não lineares, apresentando a seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{x \in S} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde f é a função objetivo e a função g é restrição de desigualdade.

Definição 4. Mínimo local *O ponto x^* é um mínimo local do problema 3.10, se existe $x^* \in S$ e existe uma vizinhança V de x^* tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in V \cap S$. Quando $f(x) > f(x^*)$, x^* é dito mínimo local estrito.*

3.4.1 Condições de Otimalidade

Estão descritas abaixo as condições necessárias para um mínimo local do problema (3.10).

Teorema 2. Condições necessárias

Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um mínimo local do problema (3.10), então existe um vetor $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\nabla_x l(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0 \tag{3.11}$$

$$G(x^*)\lambda^* = 0 \tag{3.12}$$

$$g(x^*) \geq 0 \tag{3.13}$$

$$\lambda^* \leq 0 \tag{3.14}$$

Onde $G(x^*) = \text{diag}(g(x^*))$.

Os pontos (x^*, λ^*) que verificam as condições (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) se denominam pontos de Karush-Kuhn-Tucker, ou ponto KKT. Os algoritmos de otimização geram uma sequência de pontos (x^k, λ^k) que convergem para pontos (x^*, λ^*) de KKT.

O teorema 2 está demonstrado em [11].

3.4.2 Problemas de Otimização quadrática

Um caso especial da programação não linear é a programação quadrática. Em um problema de programação quadrática a função objetivo é uma função quadrática e as restrições são lineares. Segundo [15], um problema de programação quadrática

escreve-se da seguinte forma:

$$\min f(x) \quad \text{sujeito a } x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, \quad (3.15)$$

onde

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\langle Cx, x \rangle + \langle c, x \rangle \quad (3.16)$$

$C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva ¹, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e S corresponde à região viável. O formato das restrições não reduz a generalidade, já que quaisquer restrições lineares podem ser transformadas nesta forma.

3.5 Métodos de Otimização

Seja o problema (3.2). Segundo [15] todo método para resolução numérica do problema (3.2) faz uso de cálculo de valores da função objetivos e das restrições, assim como das derivadas destas funções. Um método é dito sequencial, quando cada ponto define-se com base na informação obtida nos pontos anteriores. A grande maioria dos métodos computacionais são deste tipo e vale salientar que eles geralmente são bem mais eficientes em relação aos métodos passivos, onde as informações dos pontos anteriores não são considerados.

3.5.1 Métodos sequencias

De acordo com [15], um método sequencial gera uma sequência de pontos no \mathbb{R}^n , x^1, \dots, x^k, \dots , que são chamados de aproximações à solução do problema, ou ainda, os iterandos do método. Esta sequência x^k , conhecida ainda como trajetória, pode conter ou não todos os pontos em que os valores das funções e das derivadas são calculados, isto é, ela pode conter somente pontos selecionados arbitrariamente. Comumente, algoritmos são expressos em formato de um esquema iterativo, como

$$x^{k+1} = \psi_k(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.17)$$

onde ψ_k é o operador com valores em \mathbb{R}^n , definido num conjunto $U_k \subset \mathbb{R}^n$. Naturalmente, supõe-se que na iteração $k + 1$ este operador é conhecido. Ao fixar-se um esquema iterativo, a escolha do chute inicial $x^0 \in U_0$ estabelece uma única trajetória se, e só se:

$$\psi_{k-1}(\psi_{k-2}(\dots\psi_0(x^0)\dots)) \in U_k \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

¹Uma matriz C é dita definida positiva se é simétrica e seus auto valores são maiores que zero. Ou ainda, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é positiva definida se $x^T C x > 0, \forall x \neq 0$.

A ordem do método baseia-se na derivada de maior ordem da função objetivo e das restrições que compõe o processo realizado em uma iteração.

Quando qualquer ponto inicial $x^0 \in U_0$ define uma trajetória tal que x^k é uma solução do problema para algum k finito, trata-se de um método com convergência finita. Algoritmos com esta propriedade existem para problemas relativamente simples, como os citados nos tópicos acima, programação linear e programação quadrática. Já para problemas com estruturas mais gerais recorre-se a métodos com convergência assintótica.

3.5.2 Convergência assintótica

Em métodos com convergência assintótica não há garantias de que um elemento x^k da trajetória seja uma solução exata do problema. Portanto, a tarefa é provar que para k suficientemente grande, x^k é uma boa aproximação da solução. Em [15] mostra que dependentemente da natureza, exemplifica-se diferentes tipos de convergência:

- Se $x^k \rightarrow \bar{x}$ ($k \rightarrow \infty$), onde \bar{x} é solução do problema, trata-se de convergência em relação às variáveis do problema.
- Quando não é possível provar a convergência de uma solução específica, mas apenas de uma propriedade mais fraca como

$$\text{dist}(x^k, D) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

onde D é o conjunto solução do problema, têm-se uma convergência ao conjunto de soluções.

- Quando

$$\text{dist}(x^k, S) \rightarrow 0, f(x^k) \rightarrow \bar{v} \quad (k \rightarrow \infty),$$

onde \bar{v} é o valor ótimo do problema, têm-se uma convergência em relação à função objetivo.

- Para o problema irrestrito, quando vale

$$\nabla f(x^k) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

trata-se de uma convergência em relação ao gradiente.

- Quando $U_0 = \mathbb{R}^n$ e tem-se convergência a partir de qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$, diz-se ter uma convergência global.

- Quando algum tipo de convergência pode ser garantido somente a partir de pontos suficientemente próximos a uma solução, fala-se em convergência local do problema.

Uma estratégia comumente utilizada para a resolução de um problema que presente um certo grau de dificuldade, é baseada na redução deste problema a uma sequência (finita ou infinita) de problemas mais simplificados. Portanto, problemas mais básicos devem ser previamente estudados.

3.5.3 Direções viáveis

Dada uma aproximação x^k à solução do problema, uma ideia inicial consiste em definir uma direção que, ao mesmo tempo, é viável em x^k em relação ao conjunto S e é de descida para a função objetivo f . Em [14], tem-se a seguinte definição:

Definição 5. Um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ chama-se uma direção viável no ponto $x \in S$ em relação a S , se para todo $t > 0$ suficientemente pequeno tem-se que $x + td \in S$.

Ainda em [14] é visto que o conjunto de todas as direções viáveis em $x \in S$ em relação a S é um cone que é denominado $\mathcal{V}_S(x)$. Então, $d \in \mathcal{V}_S(x)$ se, e somente se, todo passo suficientemente curto a partir de x na direção d resulta em um ponto que pertence a S .

Lema 1. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Então

$$y - x \in \mathcal{V}_S(x) \quad \forall x, y \in S.$$

Lema 2. Seja

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq 0\}$$

onde a função $g; \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $y \in S$.

Então:

(a) Para todo $d \in \mathcal{V}_S(y)$ tem-se que $\langle \nabla g_i(y), d \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I(y)$, onde

$I(y) = \{g_i(y) = 0\}$ é o conjunto de índices das restrições ativas de y .

(b) Se $d \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $\langle \nabla g_i(y), d \rangle < 0 \quad \forall i \in I(y)$, tem-se que $d \in \mathcal{V}_S(y)$.

O resultado em (a) define uma condição necessária para uma direção viável, já o resultado em (b) fornece uma condição suficiente. Suas respectivas demonstrações encontram-se em [14].

3.5.4 Métodos de descida

Métodos de descida podem ser definidos para um problema do tipo (3.1), onde o conjunto viável $S \subset \mathbb{R}^n$ não precisa ser nem convexo nem fechado e a função objetivo não precisa apresentar diferenciabilidade. O esquema geral apresenta-se em [15] da seguinte forma:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k, \quad d^k \in \mathcal{S}_f(x^k) \cap \mathcal{V}_S(x^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.19)$$

sendo $\mathcal{S}_f(x^k)$ o conjunto de direções de descida da função f a partir do ponto x^k , onde $x^0 \in S$ e os parâmetros de comprimento do passo $\alpha_k > 0$ tem que satisfazer, pelo menos, as condições

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad x^{k+1} \in S. \quad (3.20)$$

Como $d^k \in \mathcal{S}_f(x^k) \cap \mathcal{V}_S(x^k)$ pela definição, as condições (3.20) serão satisfeitas para todo $\alpha_k > 0$ suficientemente pequeno. Entende-se que quando $\mathcal{S}_f(x^k) \cap \mathcal{V}_S(x^k) = \emptyset$, o método encerra-se.

Se S é um conjunto convexo e fechado, a segunda condição em (3.20) satisfaz-se para todo $\alpha_k \in [0, \hat{\alpha}_k]$, onde

$$0 < \hat{\alpha}_k = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ | x^k + \alpha d^k \in S\} \quad (3.21)$$

Podem ser utilizadas as mesmas técnicas de minimização uni-dimensional para determinar α_k que garanta a diminuição da f , desde que leve-se em consideração a restrição adicional $\alpha_k \leq \hat{\alpha}_k$. Quando α_k pode ser determinado explicitamente os cálculos são bem mais simples, ou quando uma cota inferior para $\hat{\alpha}_k$ pode ser facilmente obtida.

3.5.5 Método das direções viáveis

No que diz respeito a problemas mais complexos, o aconselhável é recorrer à aproximações locais de todos os dados do problema. Segundo [15], esta é a ideia básica dos métodos de direções viáveis, que são métodos de descida para problemas com restrições de desigualdade.

Seja o problema (3.10) cujo esquema geral é (3.19) onde $x^0 \in S$, e os parâmetros de comprimento do passo $\alpha_k > 0$ tem que satisfazer, pelo menos, a condição (3.20). As relações a seguir retiradas de [15] são feitas para restrições de desigualdade, podendo ser estendidas analogamente para casos onde têm-se restrições de igualdade, contanto que elas sejam lineares.

Seja $x^k \in S$ que resolve o problema

$$\min \max \{ \langle \nabla f(x^k), d \rangle; \max_{i \in I_k} \{ \langle \nabla g_i(x^k), d \rangle \} \} \quad \text{sujeito a} \quad \|d\|_\infty \leq 1,$$

onde $I_k = I(x^k) = \{i = 1, \dots, m \mid g_i(x^k) = 0\}$ é o conjunto dos índices das restrições do problema (3.10) que são ativas no ponto x^k . Este problema pode ser resolvido como o problema de programação linear

$$\min t \quad \text{sujeito a} \quad (t, d) \in U_k, \quad (3.22)$$

$$U_k = \begin{cases} u = (t, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \langle \nabla f(x^k), d \rangle \leq t, \\ & \langle \nabla g_i(x^k), d \rangle \leq t, i \in I_k, \\ & -1 \leq d_j \leq 1, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.23)$$

Na definição do conjunto U_k , as restrições $-1 \leq d_j \leq 1$ garantem que o subproblema (3.22), (3.23), apresente solução. Seja $u^k = (t_k, d^k)$ uma solução de (3.22), (3.23). Dessa forma, $t_k \leq 0$, pois no ponto viável $(0, 0)$ a função objetivo do problema (3.22), (3.23), é igual a zero. Quando $t_k = 0$, o método encerra-se.

A essência do subproblema (3.22), (3.23), é a seguinte: conforme t diminui, o componente d do ponto viável (t, d) para este subproblema obtém características cada vez mais claras de uma direção viável de descida. De modo particular, quando $I(x^k) = \emptyset$, d^k fica na oposta ao gradiente da f no ponto x^k . Se o conjunto S é convexo, então o número $\hat{\alpha}_k$ é dado pela fórmula

$$\hat{\alpha}_k = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid x + \alpha d \in S \}$$

Quando o conjunto S não é convexo, dificilmente pode existir uma estratégia razoável para calcular o comprimento do passo para esquemas desta natureza.

Vale salientar que podem não haver garantias de convergência para o método das direções viáveis discutido acima. A dificuldade mais notória vista em [15] é a seguinte. Para $I_k = I(x^k)$, o subproblema (3.22), (3.23), não leva em consideração as restrições do problema original (3.10) que não são ativas em x^k , mas são "quase-ativas" neste ponto. Esta situação pode fazer com que, para a direção d^k escolhida, o valor de $\hat{\alpha}_k$ seja muito pequeno, mesmo existindo outras direções viáveis e de descida que permitam passos bem mais longos. A diminuição inadequada dos valores de $\hat{\alpha}_k$ pode ocasionar na convergência do método a pontos não-estacionários do problema.

Segundo [15], a ideia de levar em conta restrições quase-ativas pode ser imple-

mentada da maneira seguinte. Fixa-se $\delta_0 > 0$ e $\theta \in (0, 1)$. Para todo k , define-se

$$I_k = \{i = 1, \dots, m \mid g_i(x^k) \geq -\delta_k\}.$$

Se para a solução $u^k = (t_k, d^k)$ do subproblema corresponde (3.22), (3.23), tem-se que $t_k \leq -\delta_k$, aceita-se d^k como a direção viável de descida. Caso contrário, troca-se δ_k por $\theta\delta_k$ e repete-se o cálculo de d^k , com novo I_k . Esta modificação possibilita a prova da convergência ao conjunto de pontos estacionários do problema.

Para resolver numericamente os modelos determinísticos desta dissertação é utilizado o FAIPA (Algoritmo de Pontos Interiores para Arcos Viáveis), um método programação não Linear desenvolvido por Herskovits que segundo [45] trata-se de uma classe de algoritmos de direção viável que utilizam iterações de pontos fixos para resolver equações não-lineares, nas variáveis primal e dual, dadas pelas igualdades incluídas nas condições de otimalidade de Karush-Khun-Tucker (KKT). Com o objetivo de garantir a convergência aos pontos KKT, o sistema é resolvido de forma a ter as desigualdades satisfeitas nas condições de KKT em cada iteração. Mais detalhes deste algoritmo podem ser consultados em [45].

Capítulo 4

Probabilidade

4.1 Definições Preliminares

4.1.1 Modelo Probabilístico

Segundo [39], suponha-se que um experimento seja realizado sob certas condições fixas. Seja Ω o conjunto de resultados possíveis, onde por "resultado possível" entende-se elementar e indivisível do experimento. Ω será chamado de *espaço amostral* do experimento.

As definições a seguir podem ser vistas em [38] e [39].

Definição 1. *Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado evento.*

Definição 2. *Um evento A ao qual atribuímos uma probabilidade será chamado evento aleatório.*

Definição 3. *Uma classe $\mathcal{A} \neq \emptyset$ fechada em relação às operações de união, intersecção, complemento e diferença é chamada de Álgebra dos eventos.*

Definição 4. *Uma álgebra \mathcal{A} é uma σ -Álgebra se satisfaz a seguinte condição*

$$A_i \in \mathcal{A}; i = 1, 2, \dots \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Definição 5. *Dada uma função σ -Álgebra \mathcal{A} de subconjuntos de Ω , chama-se $\mathcal{P} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma medida de probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas de Kolmogorov:*

1. $\forall A \in \mathcal{A}, \mathcal{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.
3. Se $\{A_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de eventos disjuntos dois a dois, então $\mathcal{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$.

Apresentadas as definições acima e ainda segundo [39], tem-se a seguinte definição para um modelo probabilístico:

Definição 6. Um espaço de probabilidade ou modelo probabilístico é definido por $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, onde:

1. Ω é um conjunto não vazio;
2. \mathcal{A} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω
3. \mathcal{P} é uma medida de probabilidade de \mathcal{A} .

4.2 Variável Aleatória

Tanto [39] como [40], apresentam a seguinte definição para uma variável aleatória:

Definição 7. Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ é uma função real definida no espaço Ω tal que $[X \leq x]$ é evento aleatório para todo $x \in \mathbb{R}$; i.e., $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é variável aleatória se $[X \leq x] \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, em que $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$

4.2.1 Tipos de variáveis aleatórias

De fato existem mais de dois tipos de variáveis aleatórias, mas os mais importantes são as discretas e contínuas. Em [38] o autor define uma *variável aleatória discreta* como sendo uma função que pode assumir no máximo um número contável de valores possíveis. Para uma variável discreta X define-se a *função discreta de probabilidade* $p(a)$ de X como

$$p(a) = P[X = a]$$

Ainda em [38] a função de probabilidade $p(a)$ é positiva para no máximo um número contável de valores de a . Isto é, se X deve assumir um dos valores x_1, x_2, \dots , então

- $p(x_i) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots$
- $p(x) = 0$ para todos os demais valores de x .

Como X deve receber um dos valores de x_i , temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

É visto em [39] que uma variável aleatória é contínua se existe uma função f que satisfaça:

- $f(x) \geq 0$, para todo $x \in (-\infty, \infty)$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Para calcular probabilidades, temos que para $a \leq b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Ou seja, é uma função X que pode assumir valores em um determinado intervalos de números reais. De (4.1) tem-se que f é dita *função de densidade de probabilidade* de X ou simplesmente *densidade* de X .

4.2.2 Principais Modelos

Definiremos alguns dos principais modelos. As definições abaixo podem ser melhor analisadas em [40].

Definição 8. Modelo Uniforme Discreto

Seja X uma variável aleatória assumindo valores $1, 2, \dots, k$. Dizemos que X segue o modelo Uniforme Discreto se atribui a mesma probabilidade $\frac{1}{k}$ a cada um desses k valores. Ou seja, a sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = J) = \frac{1}{k}, J = 1, 2, \dots, k.$$

Usa-se a notação $X \sim U_D[1, k]$ para indicar que uma variável aleatória X segue o modelo Uniforme Discreto com valores de 1 a k .

Definição 9. Modelo Uniforme contínuo

Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, $a < b$, se sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usa-se a notação $X \sim U[a, b]$ para indicar que X segue o modelo uniforme contínuo no intervalo dado. Esse modelo pressupõe que se $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a, b], x_1 < x_2; y_1 < y_2$ tais que $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$, então $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(y_1 \leq X \leq y_2)$.

Definição 10. Modelo exponencial

Uma variável aleatória contínua X , assumindo valores não negativos, segue o modelo exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Adota-se a notação $X \sim Exp(\lambda)$ para indicar que X tem Distribuição Exponencial de parâmetro λ .

Definição 11. Modelo Normal

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 , se sua função densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ para } -\infty < x < \infty. \quad (4.2)$$

Usa-se a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para indicar que X tem distribuição Normal com parâmetro μ e σ^2 .

4.3 Esperança

Um dos conceitos mais importantes e utilizados no cálculo das probabilidades é o valor esperado de uma variável aleatória. Em [38] sua definição é apresentada da seguinte forma:

Definição 12. Se X é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(x)$ então a esperança, ou valor esperado, de X representada por $\mathbb{E}[X]$, é definida por

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x) \quad (4.3)$$

4.3.1 Esperança de uma função de uma variável aleatória discreta

Suponha-se que é conhecida uma variável aleatória discreta e sua função de probabilidade e que deseja-se calcular o valor esperado de alguma função de X , seja ela, $g(X)$. Como é feito isso?

Proposição 1. *Se X é uma variável aleatória discreta que pode receber os valores $x_i, i \geq 1$, com respectivas probabilidades $p(x_i)$, então, para qualquer função real g ,*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i) \quad (4.4)$$

A demonstração da **Proposição 1** pode ser vista em [39].

O valor esperado de uma variável aleatória X , $\mathbb{E}[X]$, também é chamado de média ou primeiro momento de X . A grandeza $\mathbb{E}[X^n]$, $n \geq 1$ é chamada de n-ésimo momento de X . Ou seja:

$$\mathbb{E}[X^n] = \sum_{x:p(x)>0} x^n p(x). \quad (4.5)$$

4.3.2 Esperança de variáveis aleatórias contínuas

Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então o valor esperado de X é

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (4.6)$$

Proposição 2. *Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então, para qualquer função de valor real g ,*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \quad (4.7)$$

A demonstração desta proposição encontra-se em [38].

4.4 Lei dos Grandes Números

Consideremos certo experimento, com a variável aleatória X representando o valor de um característico numérico do resultado. Pensemos na realização desse experimento n vezes e n grande, de tal maneira que as realizações sejam independentes.

Suponhamos que depois do "ensaio" do experimento registra-se o valor característico numérico; chamemos esse valor de *observado*. A Lei dos Grandes Números afirma que a média aritmética dos n valores observados é aproximadamente igual a $\mathbb{E}[X]$, quando n é grande; de fato, afirma que esta média aritmética das observações converge, em certo sentido, para $\mathbb{E}[X]$, quando $n \rightarrow \infty$ [39].

Em [39], o autor apresenta a seguinte versão da Lei dos Grandes Números em termos de variável aleatória:

Proposição 3. *Se X_1, X_2, \dots são independentes, igualmente distribuídas e integráveis, então*

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}[X_1]. \quad (4.8)$$

A convergência afirmada pela Lei dos Grandes Números é caracterizada por dois tipos: convergência em probabilidade (a Lei Fraca de Khintchin) e convergência quase certa (Lei Forte de Kolmogorov).

4.4.1 Lei Fraca de Khintchin

Sejam Y, Y_1, Y_2, \dots variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Definição 14. Y_n converge para Y em probabilidade se para todo $\epsilon > 0$,

$$P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

4.4.2 Lei Forte de Kolmogorov

Sejam Y, Y_1, Y_2, \dots variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Definição 15. Y_n converge para Y quase certamente se

$$P(Y_n \rightarrow Y \quad \text{quando } n \rightarrow \infty) = 1 \quad (4.10)$$

Isto é, se o evento $A_0 = \{\omega : Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)\}$ é de probabilidade 1.

Capítulo 5

Resultados numéricos

As implementações dos códigos para execução das simulações numéricas foram realizadas em OCTAVE versão 4.2.1, uma linguagem computacional desenvolvida para computação matemática. Optou-se por seu uso pelo fato de ser um software livre e com linguagem bastante compatível com o MATLAB.

Todos os testes foram executados em um computador com as seguintes características técnicas: processador Intel Core i7 de 2.2 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7.0 de 64 bits.

5.1 Modelos Determinísticos de perseguição

O primeiro modelo estudado e apresentado nesta dissertação é denominado **Modelo 1** e carrega a seguinte descrição:

Seja $n_{sd} \in \{1, 2, 3\}$. Considere uma região $S \subseteq \mathbb{R}^{n_{sd}}$, um ponto $p_0 \in S$ e um círculo $\mathfrak{C}_{c,r} \subset S$ de centro c e raio r . O círculo e o ponto se movem como solução de um problema de otimização, dando início a uma perseguição.

A perseguição é uma sequência $(p_k, c_k)_{k \in \mathbb{N}}$. No instante k , $p_k \in S$ é a posição do ponto e $c_k \in S$ é a posição do centro do círculo. O objetivo do círculo é capturar o ponto. Em contra partida, o ponto procura fugir do círculo. Tanto o ponto como o círculo, realizam movimentos para atingirem seus objetivos.

Neste trabalho define-se movimento a uma direção $d \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$.

O movimento do ponto em k define-se por $d \equiv p_{k+1} - p_k$. O ponto p_{k+1} é escolhido de modo que seja solução do seguinte problema de otimização denominado PROBLEMA 1 (ou problema do movimento do ponto):

$$\begin{aligned} \max \quad & |p_{k+1} - c_k|^2 \\ \text{sujeito a} \quad & p_{k+1} \in S \\ & |p_{k+1} - p_k|^2 = u^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

O problema (5.1) significa mover o ponto para a posição p_{k+1} de modo que esteja em S , se afaste de p_k uma distância u e maximize a distância ao centro do círculo c_k .

De igual forma, o movimento do círculo \mathfrak{C} em k define-se por $d \equiv c_{k+1} - c_k$. Por sua vez, o movimento do círculo deve verificar $\mathfrak{C}_{c_k, r} \subset S$, para todo k . Ou seja, dado que em certo instante é a vez do círculo se mover, deseja-se saber qual é o novo centro c_{k+1} . Ele é escolhido como um ponto da fronteira do círculo, de forma a resolver o que chamaremos de PROBLEMA 2 (ou problema do movimento do círculo):

$$\begin{aligned} \min \quad & |c_{k+1} - p_{k+1}|^2 \\ \text{sujeito a} \quad & |c_{k+1} - c_k|^2 = r^2 \\ & C_{c_{k+1}, r} \subset S. \end{aligned} \tag{5.2}$$

O problema (5.2) significa mover o centro do círculo para a posição c_{k+1} de modo que o círculo de centro em c_{k+1} e raio r esteja em S , se afaste de c_k uma distância r e minimize a distância ao ponto p_{k+1} .

A perseguição é finita quando existe K tal que $p_K \in \mathfrak{C}_{c_K, r}$.

Os problemas de otimização (5.2) e (5.1) governam a dinâmica da perseguição. A figura 5.1 ilustra essa situação.

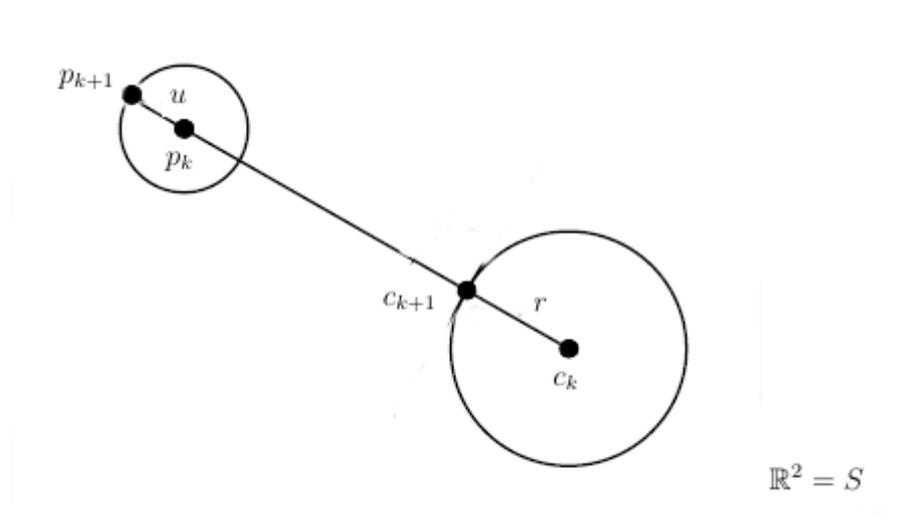


Figura 5.1: Ilustração da Dinâmica da Perseguição

A perseguição do modelo 1 tem os seguintes dados fixos:

1. S : região de $\mathbb{R}^{n_{sd}}$.
2. $p_0 \in S$ posição inicial do ponto.
3. $c_0 \in S$ posição inicial do centro do círculo.

4. $u > 0$ comprimento do movimento do ponto, para qualquer k .
5. $r > 0$ comprimento do movimento do círculo, para qualquer k .

Uma perseguição consiste na repetição dos seguintes passos:

PASSO 1) Movimento do ponto: no tempo k o ponto está em p_k e se move para p_{k+1} , solução do PROBLEMA 1.

PASSO 2) Movimento do círculo: no tempo k o centro do círculo está em c_k e se move para c_{k+1} , solução do PROBLEMA 2.

A perseguição termina no tempo K quando $p_K \in \mathfrak{C}_{c_K, r}$.

5.2 Variantes do modelo 1

Nesta seção apresentam-se algumas variantes do modelo 1. Na primeira delas a perseguição acontece sem restrições, a segunda acontece em um semiplano gerado por uma reta. Na terceira e quarta variante consideram-se obstáculos na forma de elipse.

5.2.1 Variante 1: semiplano

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : a^\top x \leq d\}$, $a = (1, -7)$, $d = 10r$, $r = 1$, $u = 0.5$.

Movimento do ponto:

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= \arg \max_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} |x - c_k|^2 \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &|x - p_k|^2 \leq u^2 \\
 &\frac{(a^\top x - d)^2}{a^\top a} \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

A segunda restrição de (5.3) exige que a distância de x à reta seja maior ou igual a zero. Isto significa que p_{k+1} está em um semiespaço definido pela reta.

Movimento do círculo:

$$\begin{aligned}
 c_{k+1} &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} |x - p_{k+1}|^2 \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &|x - c_k|^2 \leq r^2 \\
 &\frac{(a^\top x - d)^2}{a^\top a} \geq r^2
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

A segunda restrição de (5.4) consiste em pedir que a distância de x a reta seja maior ou igual a r^2 . Isto faz com que c_{k+1} (o centro do próximo círculo) esteja em uma distância r da reta. Desta forma o círculo estaria dentro de S .

5.2.2 Variante 2: complemento de uma elipse

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |a - x| + |b - x| \geq |a - b| + 2\delta\}$, $a = (5r, -1)$, $b = (10r, 1)$, $r = 0.7$, $u = 0.5$, $\delta = |a - b|/500$.

Movimento do ponto:

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= \arg \max_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} |x - c_k|^2 \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &|x - p_k|^2 \leq u^2 \\
 &|x - a| + |x - b| \geq |a - b| + 2\delta
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Movimento do círculo:

$$\begin{aligned}
 c_{k+1} &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} |x - p_{k+1}|^2 \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &|x - c_k|^2 \leq r^2 \\
 &|x - a| + |x - b| \geq |a - b| + 2\delta
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Neste caso a restrição $\mathfrak{C}_{c_k, r} \subset S$ não é verificada para todo k . Isto é, o círculo pode se sobrepor à elipse. Contudo $c_k \in S$ para todo k .

5.2.3 Variante 3: Complemento de duas elipses

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |a_1 - x| + |b_1 - x| \geq |a_1 - b_1| + 2\delta, |a_2 - x| + |b_2 - x| \geq |a_2 - b_2| + 2\delta\}$, $a_1 = (5r, -1)$, $b_1 = (10r, 1)$, $a_2 = (10r, 4)$, $b_2 = (13r, 0)$, $r = 0.6$, $u = 0.5$, $\delta = |a_1 - b_1|/500$.

Movimento do ponto:

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= \arg \max_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} |x - c_k|^2 \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &|x - p_k|^2 \leq u^2 \\
 &|x - a_1| + |x - b_1| \geq |a_1 - b_1| + 2\delta \\
 &|x - a_2| + |x - b_2| \geq |a_2 - b_2| + 2\delta
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Movimento do círculo:

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{n_{sd}}} |x - p_{K+1}|^2 \\
&\textit{sujeito a :} \\
&|x - c_k|^2 \leq r^2 \\
&|x - a_1| + |x - b_1| \geq |a_1 - b_1| + 2\delta \\
&|x - a_2| + |x - b_2| \geq |a_2 - b_2| + 2\delta
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A restrição $\mathfrak{C}_{c_k, r} \subset S$ não é verificada para todo k . Contudo $c_k \in S$ para todo k .

5.3 Resultados numéricos dos modelos determinísticos

Estão listados abaixo os resultados e simulações dos testes realizados. As primeiras análises observadas dizem respeito aos modelos determinísticos e em seguida são feitas considerações a cerca dos resultados obtidos nos casos não determinísticos.

As **variantes 1, 2 e 3** foram resolvidos numericamente com a rotina `faipa.m` no OCTAVE. A rotina `faipa.m` resolve o problema de programação matemática:

$$\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\
&\textit{sujeito a :} \\
&g(x) \leq 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções suaves. Para executar a rotina `faipa.m` é necessário fornecer $f, g, \nabla f, \nabla g$ e x_0 tal que $g(x_0) < 0$.

Para simular a perseguição nesses casos são necessárias as seguintes rotinas:

1. `caso_N.m`: configura os dados iniciais e executa o `faipa.m`.
2. `fun_circulo_N.m`, `dfun_circulo_N.m`: função e derivada de f e g em x para definir o movimento do círculo em (5.4), (5.6), (5.8).
3. `fun_ponto_N.m`, `dfun_ponto_N.m`: função e derivada de f e g em x para definir o movimento do ponto em (5.3), (5.5), (5.7).
4. pasta `faipamat`: contém rotinas necessárias para executar `faipa.m`.
5. `cicle.m`, `desenha_1reta.m`, `desenha_1elipse`: rotinas para desenhar círculo, reta e elipse.

Em todas as variantes, a movimentação do círculo e o ponto é definida a partir dos seguintes dados:

- S ;
- r, u ;
- c_0, p_0 ;
- movimento do círculo;
- movimento do ponto.

Em todas as situações tem-se $kmax = 100$ $p_0 = (0, 0)$, $c_0 = (5r, 0)$ e $n_{sd} = 2$.
Foram obtidos os seguintes resultados:

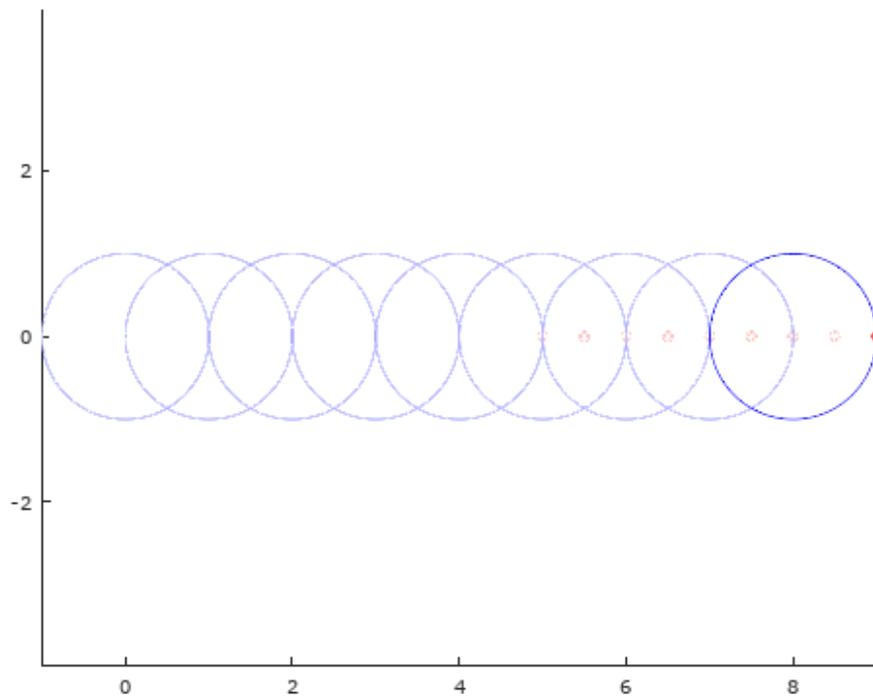


Figura 5.2: Modelo 1: sem restrições

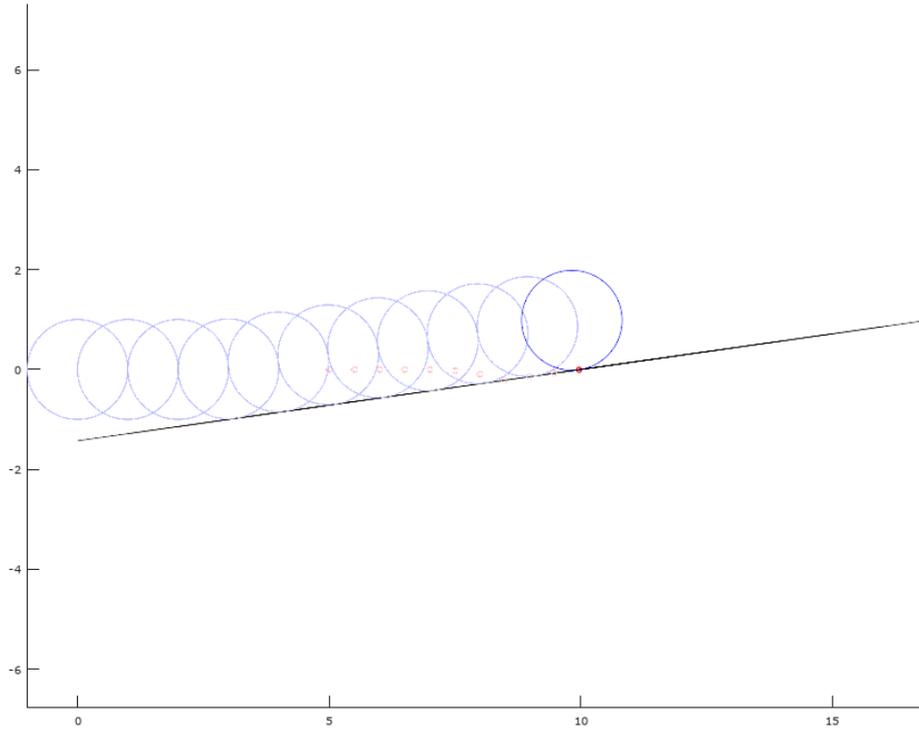


Figura 5.3: Variante 1: semiplano.

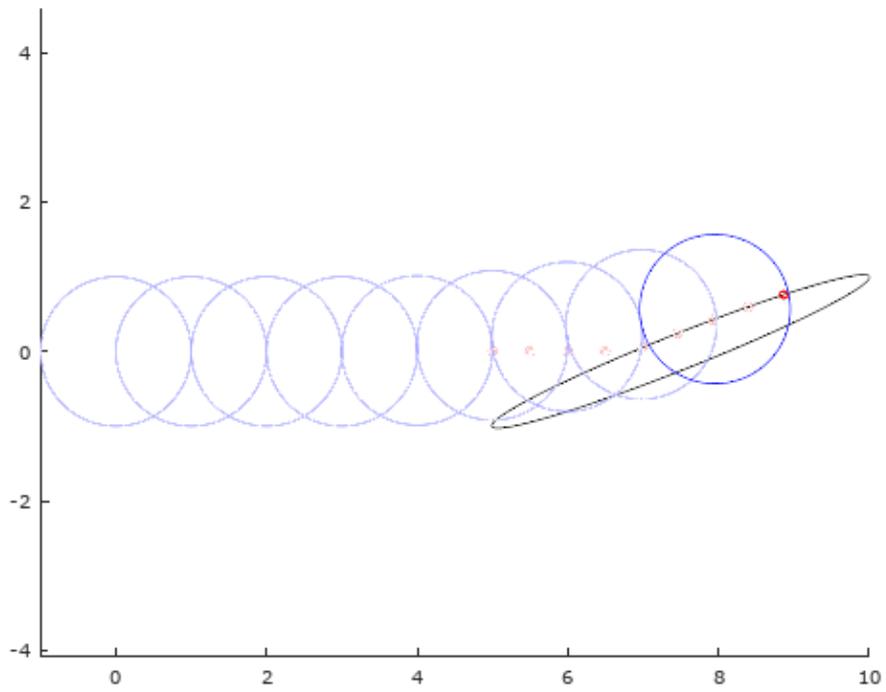


Figura 5.4: Variante 2: complemento de uma elipse.

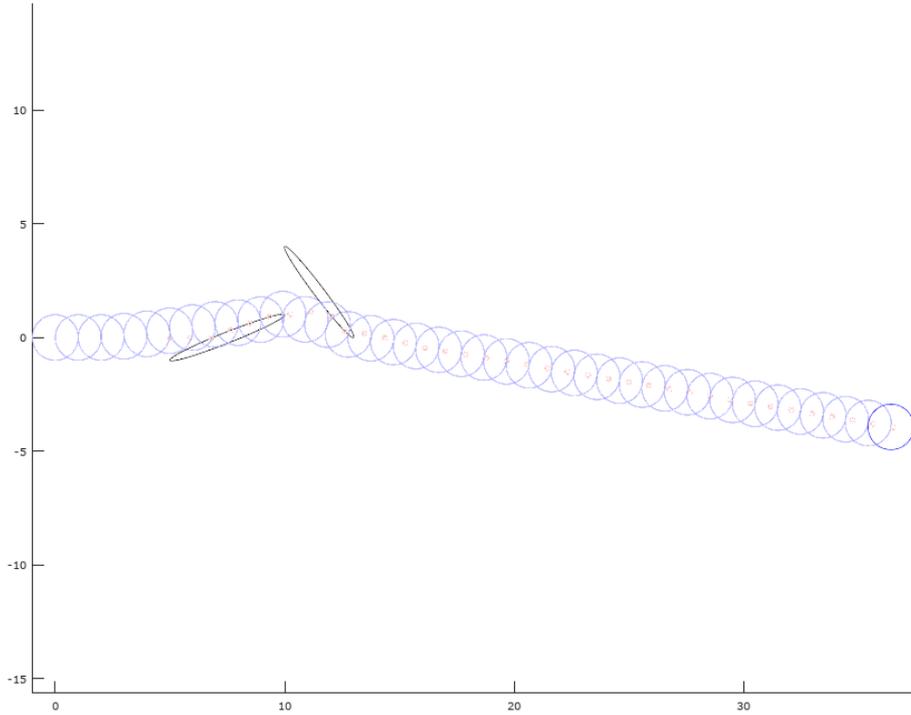


Figura 5.5: Variante 3: complemento de duas elipses.

A fim de validar a afirmação feita anteriormente, as variantes do modelo 1 proposto em (5.1) tem solução trivial quando $S = \mathbb{R}^2$.

Tabela 5.1: Teste 1: modelos determinístico

$r = 1 \mid u = 0.5 \mid kmax = 100$	Nº de movimentos até capturar
Modelo 1	09
Variante 1	11
Variante 2	09
Variante 3	09

Tabela 5.2: Teste 2: modelos determinísticos

$r = 1 \mid u = 0.9 \mid kmax = 100$	Nº de movimentos até capturar
Modelo 1	41
Variante 1	50
Variante 2	41
Variante 3	38

Como nota-se nas tabelas 5.1 e 5.2 para valores onde $u < r$ o círculo captura o ponto, pois mesmo que o movimento do ponto consista em maximizar sua distância

em relação ao centro do círculo, o mesmo sofre desvantagem por seu raio de movimentação ser menor. Quando u pequeno, o círculo leva menos tempo para captura, à medida que u cresce aumenta também o número de movimento para que haja captura. Vale salientar que quando testado para $u \geq r$, o ponto não é capturado pelo círculo, uma vez que seu passo de movimentação o permite estar sempre à frente. Os valores fixos usados para a simulação das figuras 5.6, 5.7 e 5.8 foram: $r = 1$, $u = 1.1$ e $kmax = 20$.

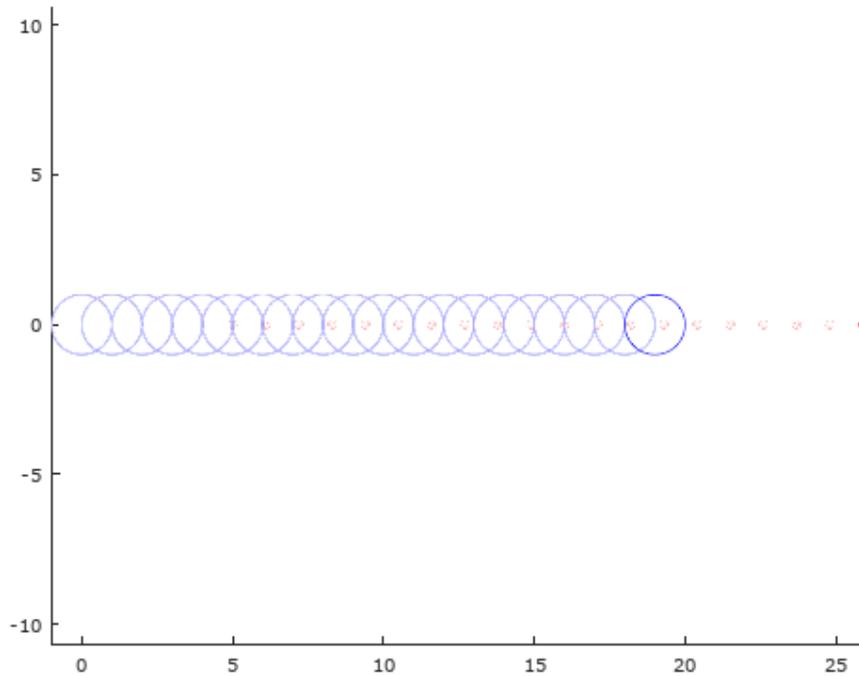


Figura 5.6: Modelo 1: sem restrições.

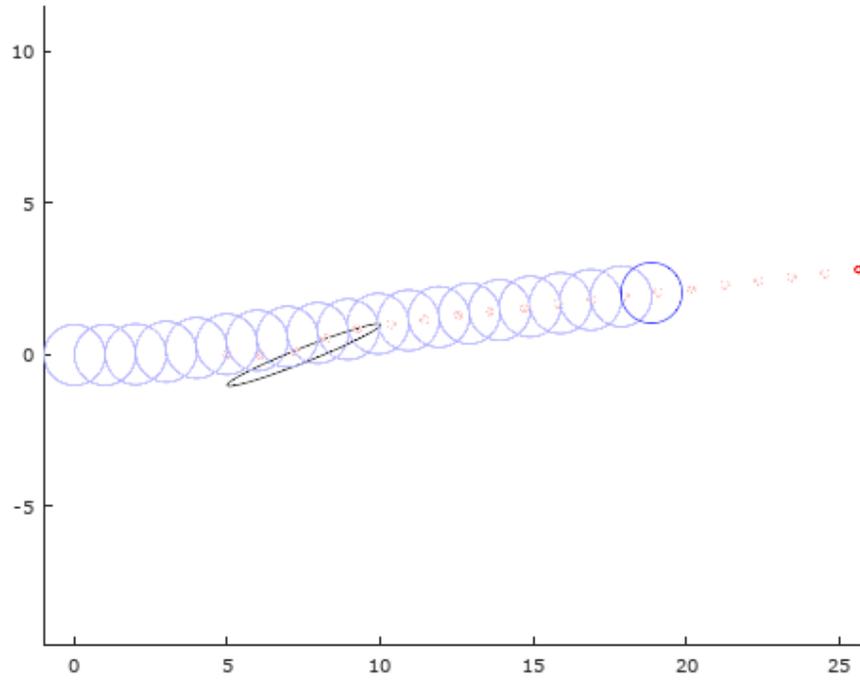


Figura 5.7: Variante 2: complemento com uma elipse

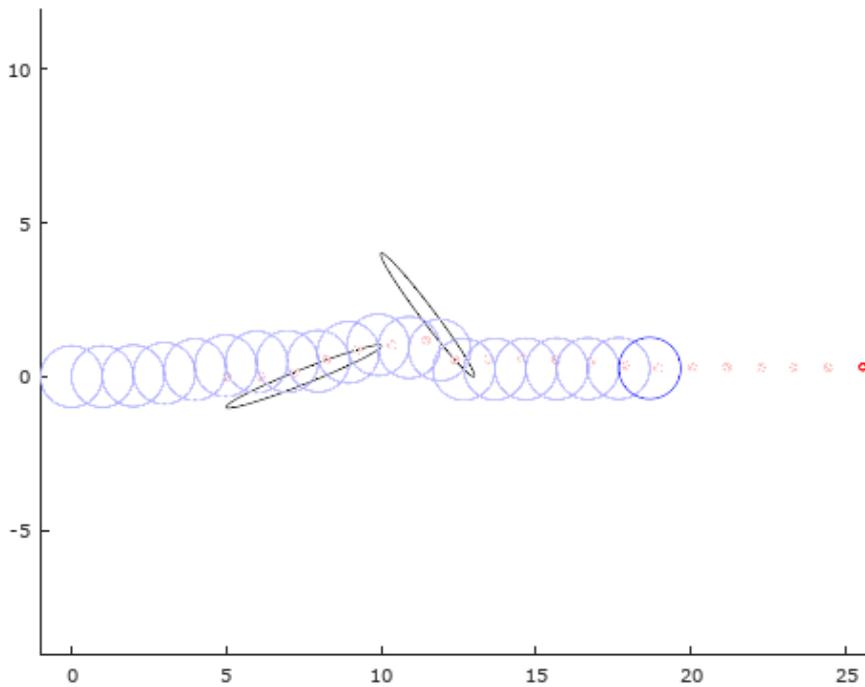


Figura 5.8: Variante 3: complemento com duas elipses

5.4 Modelos não determinísticos de Perseguição

O modelo 1 proposto em 5.1 tem solução trivial quando $S = \mathbb{R}^2$, veremos a seguir. Por isso, introduziu-se uma característica aleatória. Considera-se a região T do plano S definida em coordenadas polares por $u \in [0, \infty)$ e $\alpha \in [-\theta, \theta]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Agora, define-se a região $U_{v,w}$ que corresponde à rotação da região T de tal forma que o eixo principal ficará em certa direção v e efetuamos uma translação até um ponto w . O ponto p_0 nesse contexto vai pular para um ponto p_1 escolhido aleatoriamente na região $U_{v,w}$, a partir de uma distribuição conjunta $f(u, \alpha)$, onde u é função de z . Já o círculo permanece movimentando-se de forma determinística conforme descrita em (5.2).

5.4.1 Caso Unidimensional

Considere-se o caso unidimensional onde inicialmente o ponto se encontra na abscissa $x_0 > 0$ e o círculo, que neste caso é um intervalo, está centrado na origem e possui largura $2r$. Para início do problema suponha-se que $r < x_0$. Suponha - se ainda que a cada instante de tempo, de forma independente, o ponto se locomove para a direita segundo uma variável aleatória exponencial de parâmetro λ , ou seja $X \sim Exp(\lambda)$. Para isso é fixado um valor esperado para X de modo que a posição sorteada fique próxima a esse valor, pois a Lei dos Grandes Números enunciada na **Proposição 3** garante que um experimento realizado n vezes, e n grande, tende em média para sua esperança. Como a dinâmica do círculo permanece a mesma, enfatiza-se na descrição do modelo a dinâmica do ponto apenas.

5.4.2 Caso Bidimensional

Sejam dados $q_0 \in \mathbb{R}^2$ correspondente ao centro do círculo, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ correspondente à posição inicial do ponto e $p \neq q$. Ao traçar uma reta que passe por q_0 e p_0 , existe um ângulo θ que define um cone. O ponto movimenta-se primeiro e ao movimentar-se é sorteado dois parâmetros: um ângulo $\alpha \sim U[-\theta, \theta]$ e um passo u . O passo u é sorteado conforme uma variável aleatória contínua exponencial de parâmetro λ , ou seja, $u = X \sim Exp(\lambda)$. Para isso, assim como no caso unidimensional, é fixado um valor esperado para X de modo que a posição sorteada não fique tão distante desse valor. Essa é a nova posição do ponto p . Após o movimento do ponto, é traçada uma reta contendo o centro do círculo e a nova posição do ponto, calcula-se a distância $p_1 - q_0$, divide pela norma e multiplica por r . Logo, tem-se um o movimento do círculo que configura o seu novo centro.

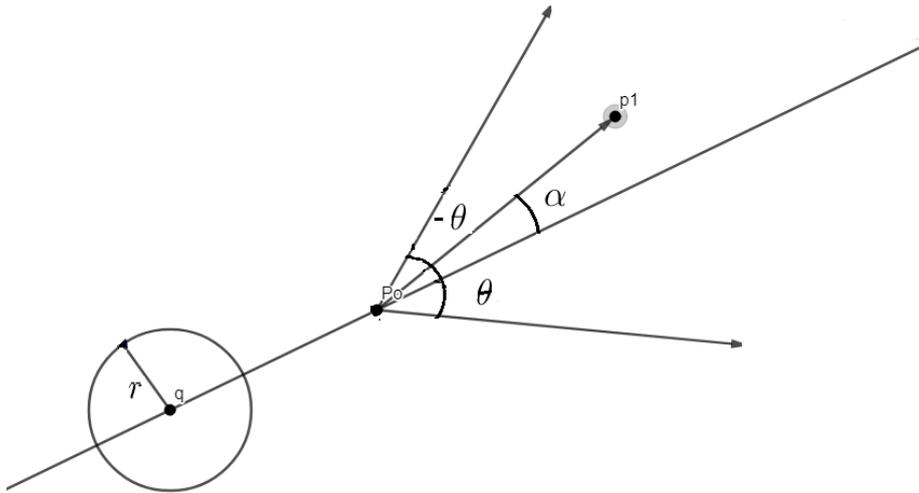


Figura 5.9: Ilustração do Caso Bidimensional.

5.5 Análise dos Algoritmos

Nesta seção é apresentado um detalhamento do código utilizado para a realização dos testes. Os tópicos abaixo dizem respeito aos parâmetros de controle, dados iniciais, rotina de atualização dos dados e critérios de parada.

5.5.1 Análise do Algoritmo que resolve os casos 1D e 2D

O código em questão apresenta os seguintes parâmetros fixos:

- p_0 , posição inicial do ponto;
- q_0 , posição inicial do centro do círculo;
- r , raio do círculo;
- θ , maior ângulo sorteado,
- $movmax$, número de movimentos máximos para o ponto e para o círculo;
- $numexp$, número de experimentos.

Cada experimento consiste em repetir os seguintes passos:

- Passo 1. Movimento do ponto.
- Passo 2. Movimento do círculo.

- Passo 3. Se, finalizados o número máximo de movimentos ou a distância do ponto ao centro do círculo for menor que o raio r , então terminar o experimento. Caso contrário voltar ao passo 1.

No Passo 1 descrito acima, o movimento do ponto depende da Esperança que por sua vez consiste em um valor fixo e intervalado.

- $pmin$, esperança mínima;
- $pmax$, esperança máxima;
- $deltap$, variação intervalar das esperanças;
- nps , número total de esperanças.

Serão detalhadas agora as estruturas de repetição usadas na construção desse algoritmo. Elas dizem respeito às Esperanças, aos Experimentos e à perseguição propriamente dita.

1. Primeiro laço "for":

Varia-se a esperança iniciando da primeira até seu número máximo selecionando assim o valor para o qual serão realizados os experimentos.

2. Segundo laço "for":

Para cada valor esperado faz-se um dado número de experimentos, se houver captura em até $movmax$ movimentos e/ou caso não haja, finaliza-se e inicia-se outro experimento com a mesma esperança. Chegado ao fim dos experimentos, pula para o próximo valor esperado e o processo repete-se novamente.

3. Terceiro laço "for":

Nesse laço inicia-se a perseguição, ou seja, corresponde ao loop dos movimentos do ponto e do círculo. O ponto se movimenta primeiro e para isso são seguidos os seguintes passos:

- Gera-se $Y \sim U[0, 1]$ através da rotina *rand*;
- Como $u = X \sim Exp(\lambda)$, gera-se X através da rotina FINV. A função FINV calcula a inversa da função de distribuição de probabilidade, ou seja, a primitiva da f definida em (4.1) é:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du \quad (5.10)$$

$$F(x) = -e^{-\lambda u} \Big|_0^x \quad (5.11)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (5.12)$$

Fazendo $x = 1 - e^{-\lambda y}$, tem-se:

$$x - 1 = -e^{-\lambda y} \quad (5.13)$$

$$1 - x = e^{-\lambda y} \quad (5.14)$$

$$\ln(1 - x) = -\lambda y \quad (5.15)$$

$$y = \frac{\ln(1 - x)}{-\lambda}. \quad (5.16)$$

Logo, $X = F^{-1}(Y)$.

- Sorteia o ângulo $\alpha \sim U[-\theta, \theta]$.
- dados $q \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$, $u > 0$ e $\alpha \in [-\theta, \theta]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Encontrar o vetor normal $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ à reta que passa por q e p .

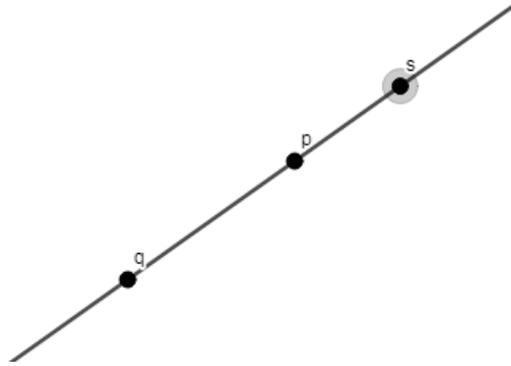


Figura 5.10: Reta contendo os pontos q , p e s .

Ponto s pertence a reta que passa por q e p quando: $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $s = q + t(p - q)$, $s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Então;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} x = q_1 + t(p_1 - q_1) & (1) \\ y = q_2 + t(p_2 - q_2) & (2) \end{cases} \quad (5.18)$$

Se $p_1 \neq q_1$ então de (1) tem-se;

$$t = \frac{x - q_1}{p_1 - q_1} \quad (5.19)$$

Substituindo em (2), segue que;

$$y = q_2 + \frac{x - q_1}{p_1 - q_1} \cdot (p_2 - q_2) \quad (5.20)$$

$$(p_1 - q_1)y = (x - q_1)(p_2 - q_2) + q_2(p_1 - q_1) \quad (5.21)$$

$$-(p_2 - q_2)x + (p_1 - q_1)y = -(p_2 - q_2)q_1 + (p_1 - q_1)q_2. \quad (5.22)$$

Logo;

$$a = -(p_2 - q_2) \quad (5.23)$$

$$b = (p_1 - q_1) \quad (5.24)$$

$$c = aq_1 + bq_2 \quad (5.25)$$

- Calcula o vetor v . Mas quem é v ? Ao sortear α é realizada uma rotação de ângulo α de $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Depois faz-se uma rotação no sentido horário de $\frac{\pi}{2}$, então v é a conjugação de $(\alpha - \frac{\pi}{2})$, ou seja, é a rotação do vetor que contém o novo ponto p_1 .

$$v = R\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

E $R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ a matriz que rotacionará o ângulo sorteado.

- Determinado o vetor v , calcula-se $n = \frac{v}{|v|}$.
- O novo ponto é

$$\mathbf{s} = p_0 + u \cdot n'. \quad (5.27)$$

Atualizada a nova coordenada do ponto, o círculo movimenta-se conforme (5.2).

4. **Critério de parada.** Se a distância do centro do círculo ao ponto for menor que r então houve captura. Em seguida encerra-se esse laço e retorna ao laço anterior para iniciar um novo experimento.

Observação: A lógica utilizada no algoritmo que resolve o Caso 2D é análoga ao Caso 1D, uma vez que quando $\theta = 0$ o caso bidimensional é reduzido ao caso unidimensional.

5.6 Resultados numéricos modelos não determinísticos

5.6.1 Caso unidimensional

Uma hipótese razoável para o caso unidimensional é que, com probabilidade positiva, o ponto pode pular uma distância acima de sua esperança e ao mesmo tempo essa probabilidade é menor que 1. Sejam X_1, X_2, \dots os valores de cada um dos tamanhos dos saltos do ponto e que os X_i são independentes e igualmente distribuídos com densidade $f_X(x)$. Também considera-se que alternadamente com os saltos do ponto, o círculo que neste caso é um intervalo vai para a direita um valor r de distância. Suponha que $\mathbb{E}X$ seja finita e igual a p . O fato é que o comportamento da perseguição é diferente se $p < r$ ou se $p > r$. O objeto de estudo é a expressão:

$$T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n - nr + d_0$$

Se para algum n , $T_n < 0$, então o ponto foi alcançado. Se para todo n temos $T_n > 0$ então o ponto não é capturado.

Proposição 4: Considere o parâmetro p acima, se:

Se $p < r$ então com probabilidade 1 o ponto é capturado,

Se $p > r$ então com probabilidade positiva o ponto não é capturado.

Demonstração 1: As demonstrações estão baseadas na lei dos grandes números, a qual estabelece que se as $(X_i)_i$ são i.i.d e $\mathbb{E}X_1 = p < \infty$. Então com probabilidade 1

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}X :$$

1) O caso $p < r$. Observe T_n pode ser escrito como sendo:

$$T_n = n(\bar{X} - r) + d_0 \tag{5.28}$$

Dado $\epsilon = \frac{r-p}{2}$, pela lei dos grandes números, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\bar{X} - r \leq p + \epsilon - r < 0$. Assim, para algum n suficientemente grande, T_n será negativo.

2) O caso $p > r$. Agora tomamos $\epsilon < p - r$ e usando novamente a lei dos grandes números mas na desigualdade inferior. Assim, nós temos, para um certo n_1 com probabilidade 1, $T_n = n(\bar{X} - r) + d_0 > n(p - \epsilon - r) + d_0 > 0$, para todo $n \geq n_1$, ou seja, acima de n_1 o ponto não é mais alcançado. Mas, dado

qualquer natural n_1 com probabilidade positiva o ponto não é capturado até o instante n_1 .

Do primeiro teste obteve-se os seguintes resultados:

Tabela 5.3: Teste 1: simulação do caso 1D com 100 experimentos

$r = 1$ $movmax = 100$	Exp. com captura	Exp. sem captura
$p = 0.5$	100	00
$p = 0.6$	100	00
$p = 0.7$	100	00
$p = 0.8$	96	04
$p = 0.9$	71	29
$p = 1.0$	29	71
$p = 1.1$	12	88
$p = 1.2$	03	97
$p = 1.3$	00	100
$p = 1.4$	00	100
$p = 1,5$	00	100
TOTAL	511	589
TOTAL DE EXPERIMENTOS	1100	

A tabela 5.3 comprova a **Proposição 4**, uma vez que para uma esperança cujo valor é menor que r ; como $p = 0.5$, $p = 0.6$ e $p = 0.7$; o círculo consegue capturar o ponto em todos os experimentos. À medida que o valor da esperança vai se aproximando de 1, o número de capturas também vai diminuindo. Quando $p \geq r$, a dinâmica dos experimentos muda completamente de modo que o ponto consegue fugir do círculo nas três últimas baterias de experimentos.

Logo, para uma esperança cujo valor é menor que r , em média, o ponto é capturado certamente, agora quando o valor da esperança ultrapassa o valor de r o ponto tem mais chances de fugir.

Abaixo tem-se o gráfico que apresenta a média de capturas para cada esperança p e a média de movimentos com capturas.

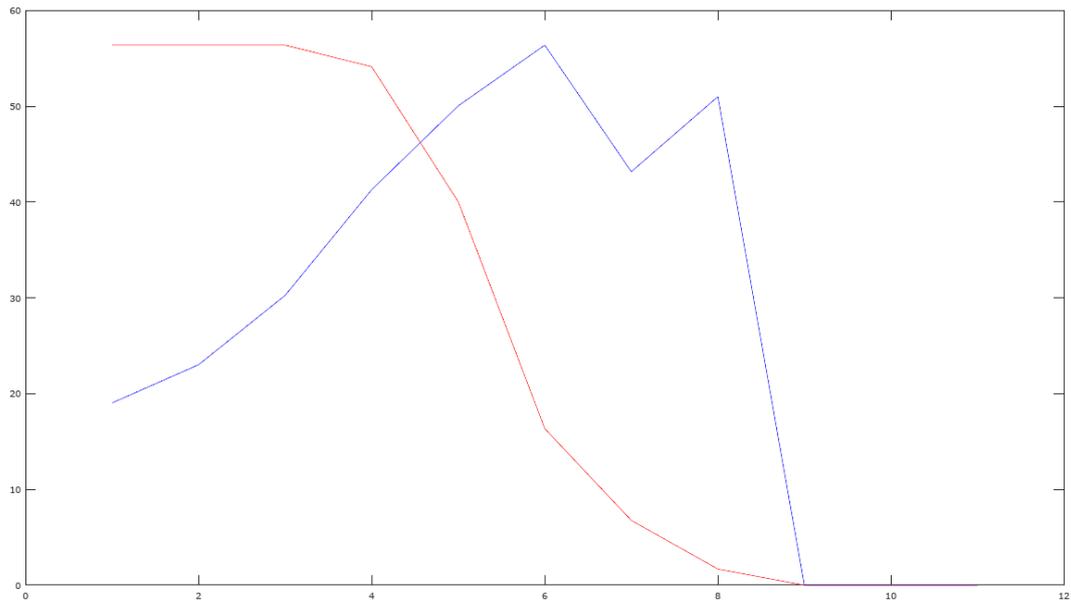


Figura 5.11: Teste 1: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 1D

O gráfico vermelho representa a média de capturas para uma dada esperança p , cuja compreensão pode ser feita a partir dos dados da tabela. O gráfico azul representa a média dos movimentos para os quais houve captura com base no valor esperado. Lembrando que em cada experimento o círculo e o ponto realizam no máximo 100 movimentos e para cada valor esperado realiza-se 100 experimentos. O gráfico fornece as seguintes informações:

Tabela 5.4: Teste 1: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 1D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	20
$p = 0.6$	24
$p = 0.7$	31
$p = 0.8$	42
$p = 0.9$	50
$p = 1.0$	56
$p = 1.1$	42
$p = 1.2$	50
$p = 1.3$	00
$p = 1.4$	00
$p = 1,5$	00

O teste 2 consiste na simulação do Caso 1D com 500 experimentos.

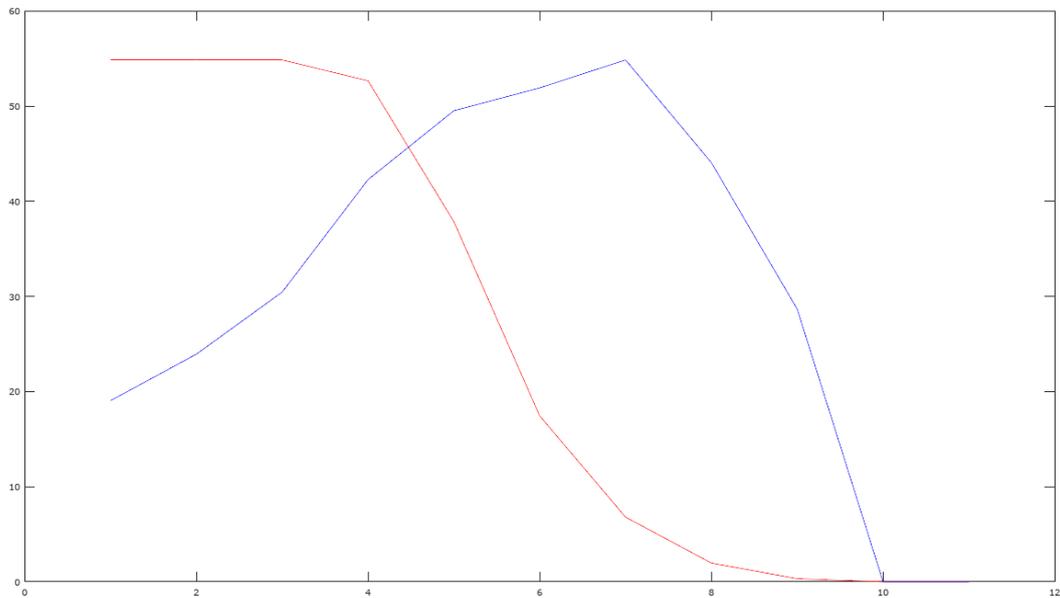


Figura 5.12: Teste 2: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 1D

Tabela 5.5: Teste 2: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 1D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	18
$p = 0.6$	24
$p = 0.7$	30
$p = 0.8$	42
$p = 0.9$	50
$p = 1.0$	52
$p = 1.1$	55
$p = 1.2$	44
$p = 1.3$	30
$p = 1.4$	00
$p = 1,5$	00

O teste 3 corresponde a simulação do Caso 1D com 1000 experimentos.

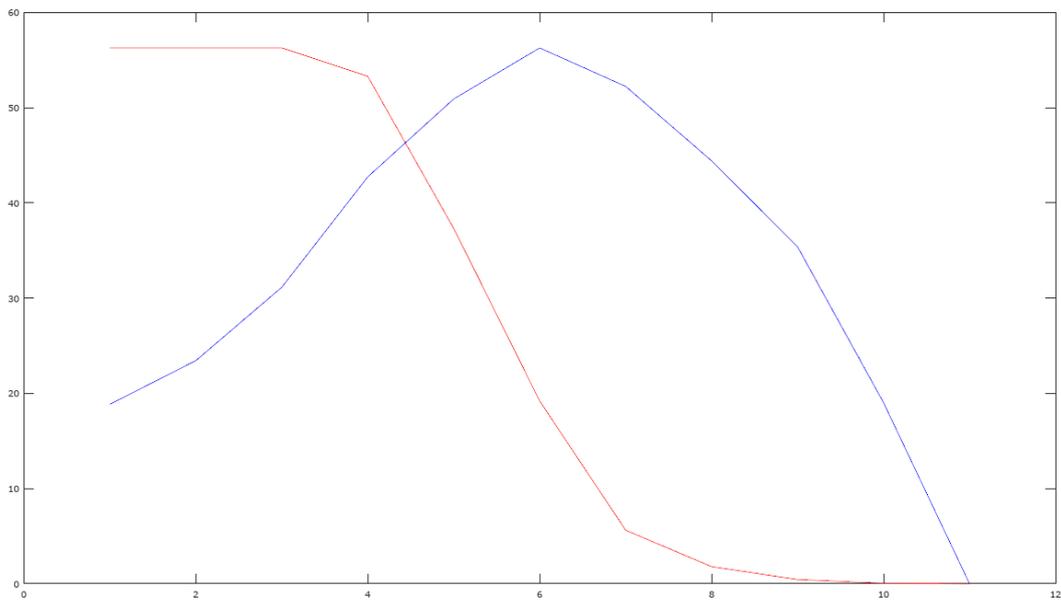


Figura 5.13: Teste 3: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 1D

Tabela 5.6: Teste 3: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 1D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	18
$p = 0.6$	22
$p = 0.7$	30
$p = 0.8$	42
$p = 0.9$	52
$p = 1.0$	56
$p = 1.1$	52
$p = 1.2$	44
$p = 1.3$	35
$p = 1.4$	18
$p = 1,5$	00

Quando o número de experimentos passou a ser 500 e 1000, o círculo continuou capturando o ponto ,em poucos movimentos, com probabilidade 1 para os valores esperados 0.5, 0.6 e 0.7, fenômeno também identificado no teste 1. Nos três testes nota-se que o ponto crítico encontra-se em $p = 0.8$, ou seja, a partir desse valor a média de capturas cai consideravelmente e pelo menos nos testes 2 e 3 o círculo necessita movimentar-se mais para chegar até o ponto.

No caso 1 essa média de movimentação é mais oscilante. Uma característica peculiar em cada teste é a média de capturas. Essa média aumenta para um número maior de experimentos, por exemplo, no teste 3 apenas quando $p = 1.5$ o círculo não consegue capturar o ponto nenhuma vez, isso ocorre no teste 2 quando $p = 1.4$ e $p = 1.5$. Por fim, no teste 1, isso acontece em $p = 1.3$, $p = 1.4$ e $p = 1.5$.

5.6.2 Caso bidimensional

Para as simulações do Caso 2D usou-se os mesmos valores de r e das esperanças (p). Mas como agora o movimento do ponto também depende de um ângulo $\alpha \in [-\theta, \theta]$, realizou-se testes com 100 experimentos para cada valores esperados usando $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, a fim de observar quantas capturas e não capturas ocorreram para esses experimentos com diferentes valores de θ .

Os resultados foram os seguintes:

Tabela 5.7: Teste 1: simulação do caso 2D com 100 experimentos

$r = 1 \mid movmax = 100 \mid \theta = \frac{\pi}{6}$	Exp. com captura	Exp. sem captura
$p = 0.5$	100	00
$p = 0.6$	100	00
$p = 0.7$	100	00
$p = 0.8$	97	03
$p = 0.9$	90	10
$p = 1.0$	46	54
$p = 1.1$	16	84
$p = 1.2$	03	97
$p = 1.3$	01	99
$p = 1.4$	02	98
$p = 1,5$	01	99
TOTAL	556	544
TOTAL DE EXPERIMENTOS	1100	

Abaixo tem-se o gráfico que apresenta a média de capturas para cada esperança p e a média de movimentos com capturas.

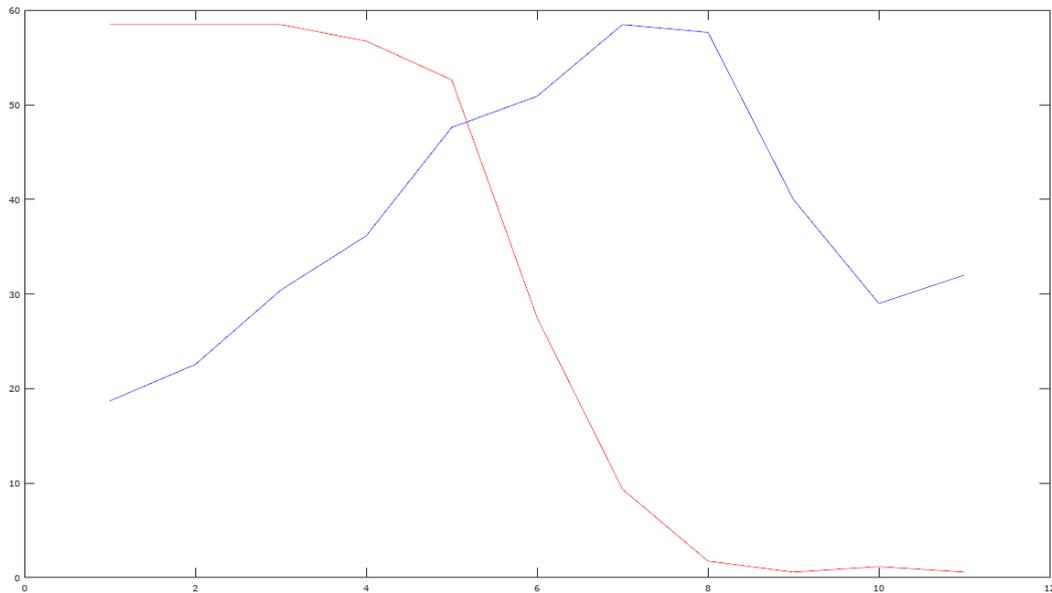


Figura 5.14: Teste 1: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura(em azul) no Caso 2D

Assim como no caso unidimensional, o gráfico vermelho representa a média de

capturas para cada esperança p e o gráfico azul representa a média dos movimentos para os quais houve captura com base no valor esperado. Este último contempla os seguintes dados:

Tabela 5.8: Teste 1: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	18
$p = 0.6$	23
$p = 0.7$	30
$p = 0.8$	35
$p = 0.9$	47
$p = 1.0$	50
$p = 1.1$	58
$p = 1.2$	56
$p = 1.3$	38
$p = 1.4$	28
$p = 1,5$	32

Tabela 5.9: Teste 2: simulação do caso 2D com 100 experimentos

$r = 1 \mid movmax = 100 \mid \theta = \frac{\pi}{4}$	Exp. com captura	Exp. sem captura
$p = 0.5$	100	00
$p = 0.6$	100	00
$p = 0.7$	100	00
$p = 0.8$	100	00
$p = 0.9$	92	8
$p = 1.0$	73	27
$p = 1.1$	22	78
$p = 1.2$	8	92
$p = 1.3$	03	97
$p = 1.4$	01	99
$p = 1,5$	00	100
TOTAL	599	501
TOTAL DE EXPERIMENTOS	1100	

O gráfico das média de capturas (em vermelho) e de movimentos com capturas

(em azul) segue abaixo.

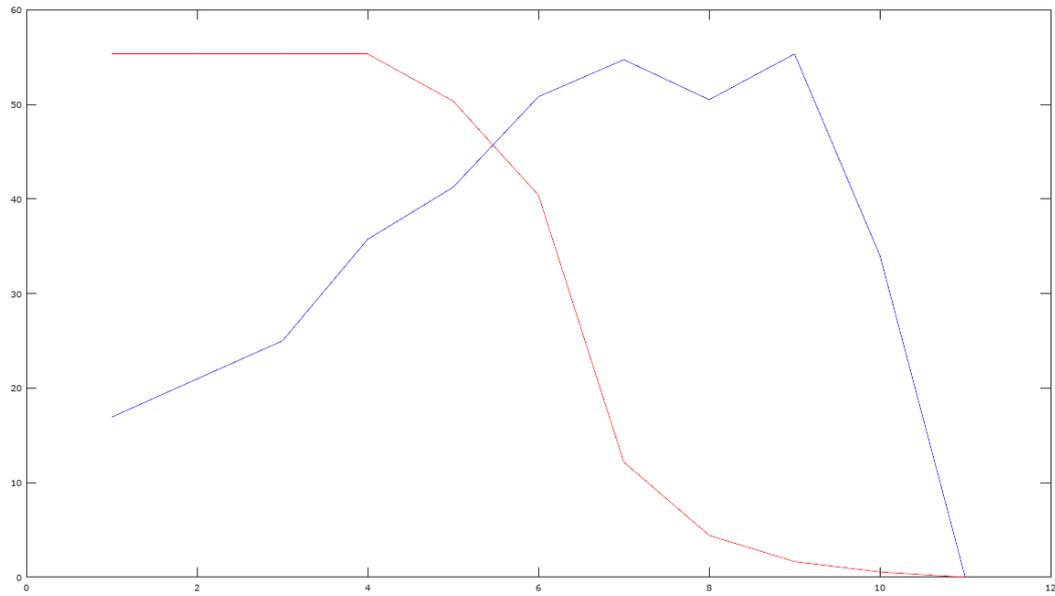


Figura 5.15: Teste 2: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 2D

Do gráfico azul seguem os seguintes dados:

Tabela 5.10: Teste 2: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	17
$p = 0.6$	21
$p = 0.7$	25
$p = 0.8$	35
$p = 0.9$	42
$p = 1.0$	52
$p = 1.1$	56
$p = 1.2$	50
$p = 1.3$	52
$p = 1.4$	40
$p = 1,5$	0

Tabela 5.11: Teste 3: simulação do caso 2D com 100 experimentos

$r = 1 \mid movmax = 100 \mid \theta = \frac{\pi}{3}$	Exp. com captura	Exp. sem captura
$p = 0.5$	100	00
$p = 0.6$	100	00
$p = 0.7$	100	00
$p = 0.8$	100	00
$p = 0.9$	98	02
$p = 1.0$	84	16
$p = 1.1$	55	45
$p = 1.2$	24	76
$p = 1.3$	08	92
$p = 1.4$	04	96
$p = 1,5$	03	97
TOTAL	676	424
TOTAL DE EXPERIMENTOS	1100	

O gráfico das média de capturas (em vermelho) e de movimentos com capturas (em azul) segue abaixo.

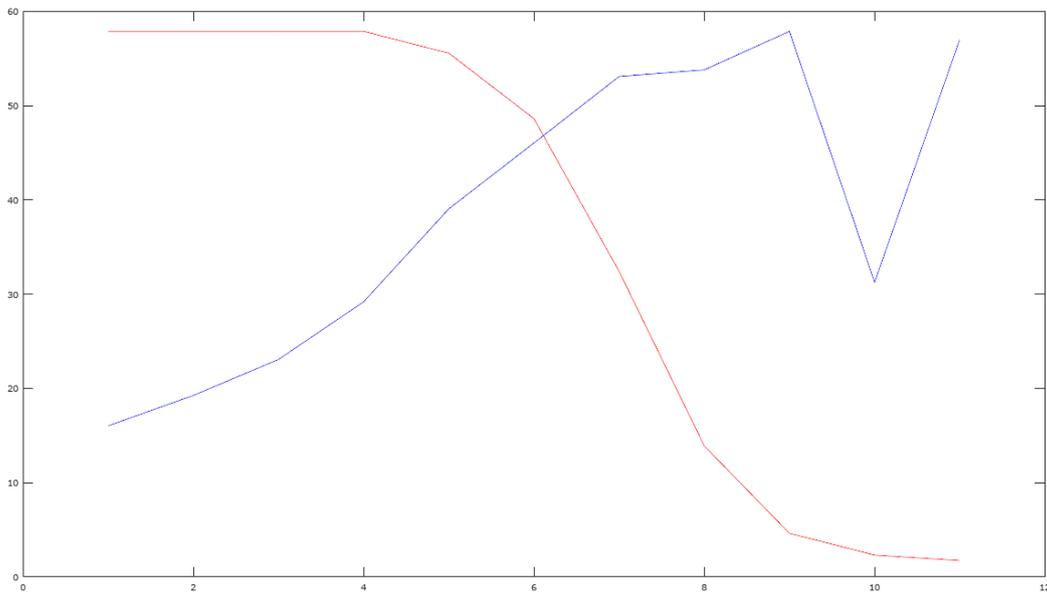


Figura 5.16: Teste 3: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 2D

Do gráfico azul seguem os seguintes dados:

Tabela 5.12: Teste 3: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	16
$p = 0.6$	18
$p = 0.7$	24
$p = 0.8$	28
$p = 0.9$	38
$p = 1.0$	46
$p = 1.1$	52
$p = 1.2$	54
$p = 1.3$	58
$p = 1.4$	32
$p = 1,5$	56

Tabela 5.13: Teste 4: simulação do caso 2D com 100 experimentos

$r = 1 \mid movmax = 100 \mid \theta = \frac{\pi}{2}$	Exp. com captura	Exp. sem captura
$p = 0.5$	100	00
$p = 0.6$	100	00
$p = 0.7$	100	00
$p = 0.8$	100	00
$p = 0.9$	100	00
$p = 1.0$	99	01
$p = 1.1$	96	04
$p = 1.2$	80	20
$p = 1.3$	56	44
$p = 1.4$	36	64
$p = 1,5$	22	78
TOTAL	889	211
TOTAL DE EXPERIMENTOS	1100	

Abaixo tem-se o gráfico que apresenta a média de capturas para cada esperança p (em vermelho) e a média de movimentos com capturas (em azul).

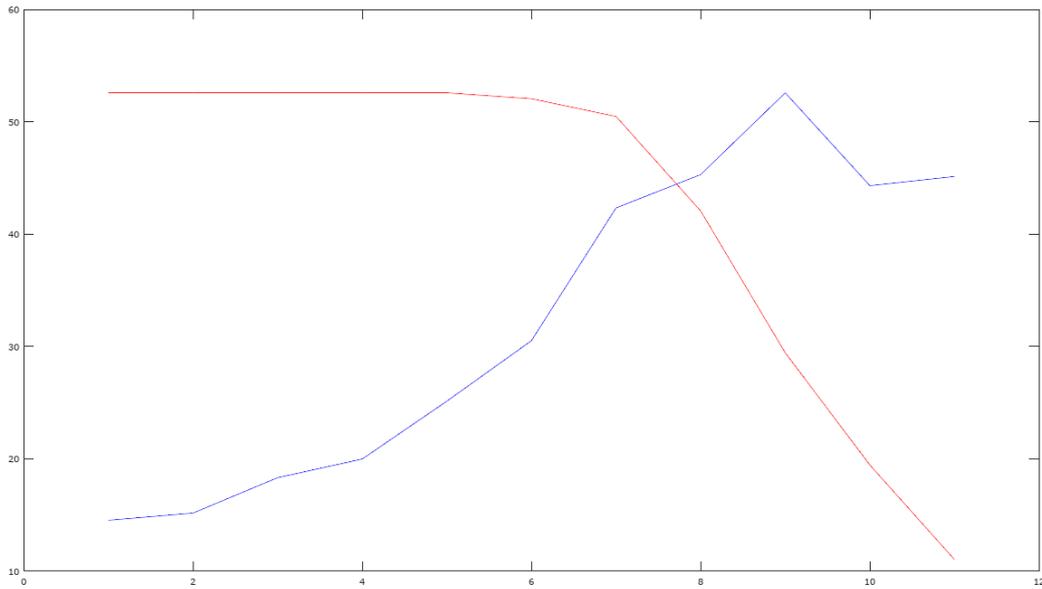


Figura 5.17: Teste 4: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) no Caso 2D

Tabela 5.14: Teste 4: média dos movimentos para os quais houve captura no caso 2D

Esperanças (p)	Média de movimentos com captura (Aproximadamente)
$p = 0.5$	14
$p = 0.6$	16
$p = 0.7$	18
$p = 0.8$	20
$p = 0.9$	25
$p = 1.0$	32
$p = 1.1$	42
$p = 1.2$	46
$p = 1.3$	54
$p = 1.4$	45
$p = 1,5$	46

Nota-se nos 4 testes uma certa similaridade quanto ao comportamento da perseguição. Utilizando $p = r = 1.0$ como parâmetro, é possível notar que para valores menores que este, o círculo apresenta vantagem sobre o ponto e vale salientar que em pelo menos 3 primeiras etapas de experimentos essa vantagem é unânime. A medida

que os valores esperados ultrapassam $p = r = 1$, o ponto passa a ter vantagem sobre o círculo uma vez que o número de capturas diminui, exceto quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, mas esse fenômeno será discutido mais adiante.

O número de capturas e o número de movimentos com capturas, em média, também apresentam-se similares como pode ser observado nos gráficos e tabelas acima. A ideia de fixar um valor esperado para cada 100 experimentos pode justificar o fato acima. Outra curiosidade é que conforme o ângulo θ de movimentação do ponto aumenta também aumentam as chances de sucesso para o círculo capturá-lo, conseqüentemente para um ângulo menor o ponto tem mais chances de evitar sua captura.

De acordo com as tabelas 5.7, 5.9, 5.11 e 5.13 o círculo ganha nessa perseguição. Mas na tabela 5.13 mostra que as maiores chances de sucesso para ele acontece quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, já na tabela 5.9 observa-se que quando $\theta = \frac{\pi}{6}$ o ponto tem mais chances de fugir.

Outro fato observado nos quatro testes é que quando $p = 0.5$, $p = 0.6$, $p = 0.7$, $p = 0.8$ e $p = 0.9$ a chance de fuga do ponto é praticamente zero e para $\theta = \frac{\pi}{2}$ ela é zero.

Estabelecendo comparações entre o caso 1D e 2D, percebem-se as seguintes diferenças quando $p = 1.0$: na tabela 5.3 o número de experimentos com captura é 29, na tabela 5.7 o número passa a ser 46, em 5.9 têm-se 73, em 5.11 têm-se 84 e por fim na tabela 5.13 esse número chega a 99. Ou seja, vai aumentando o número de capturas quando aumenta-se θ . O gráfico abaixo ilustra essa comparação.

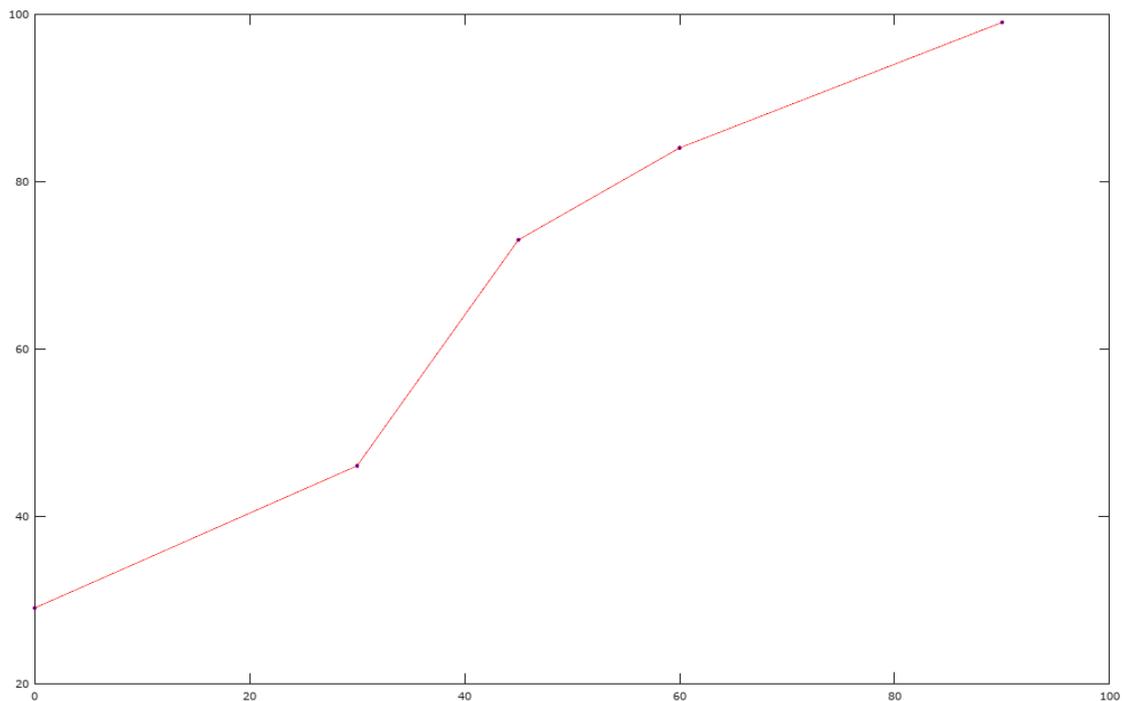


Figura 5.18: Evolução de capturas para diferentes valores de θ nos casos 1D e 2D.

5.6.3 Outras simulações

As próximas simulações foram feitas para realizar uma comparação com as simulações principais acima. Nelas aumentam-se o número de experimentos para 500 e 1000, os demais dados permanecem os mesmos.

- Para $\theta = \frac{\pi}{6}$ e 500 experimentos:

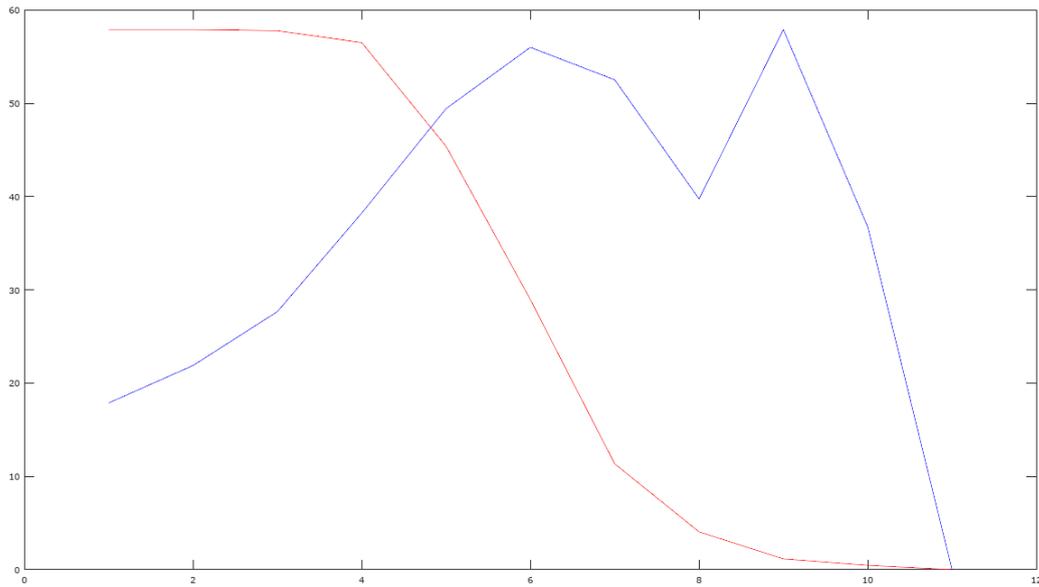


Figura 5.19: Teste 5: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e 500 experimentos:

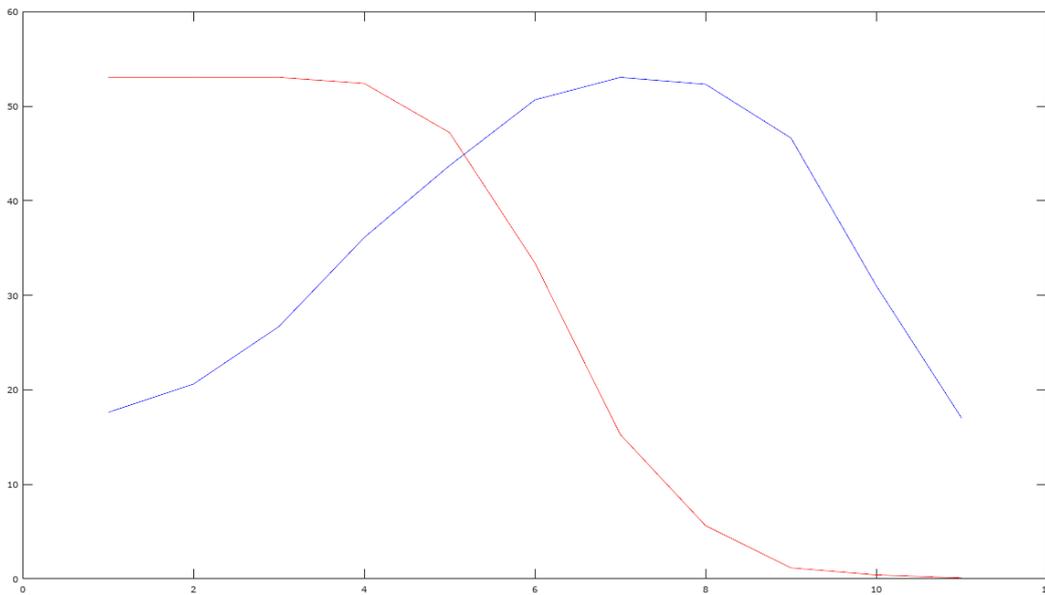


Figura 5.20: Teste 6: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{3}$ e 500 experimentos:

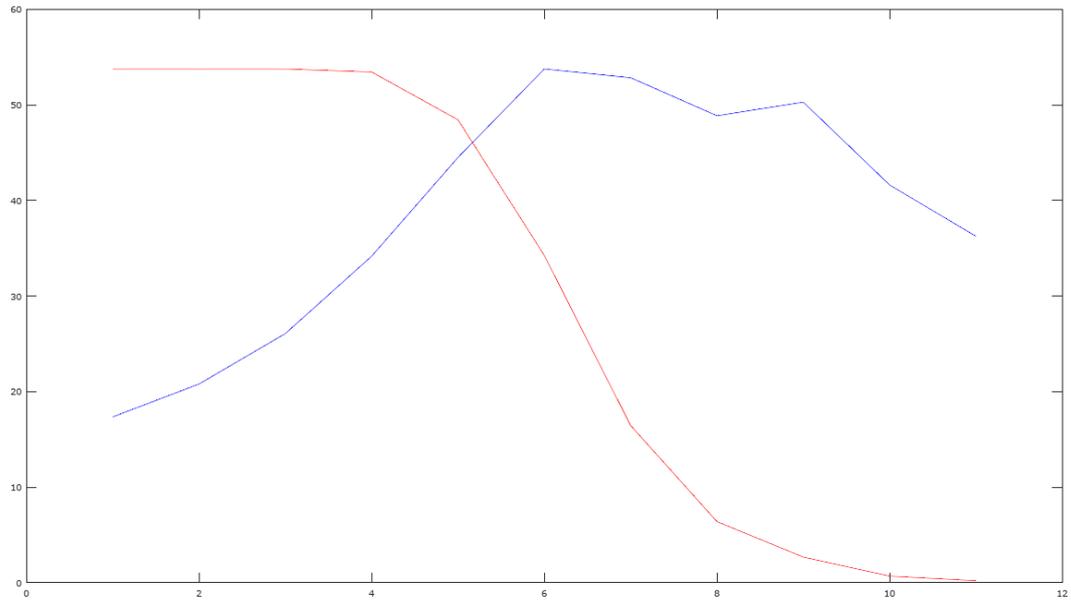


Figura 5.21: Teste 7: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e 500 experimentos:

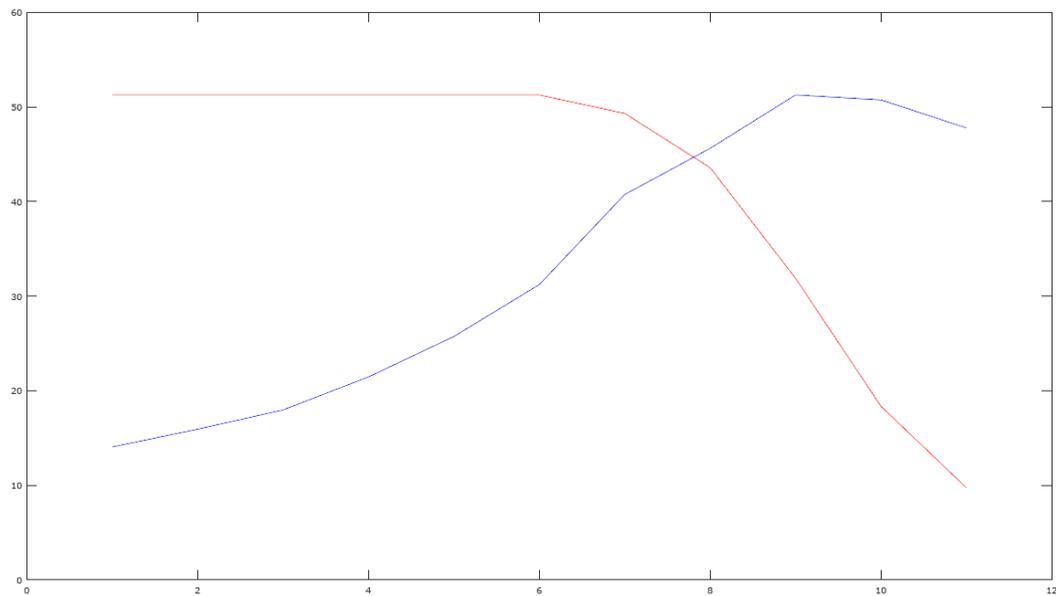


Figura 5.22: Teste 8: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{6}$ e 1000 experimentos:

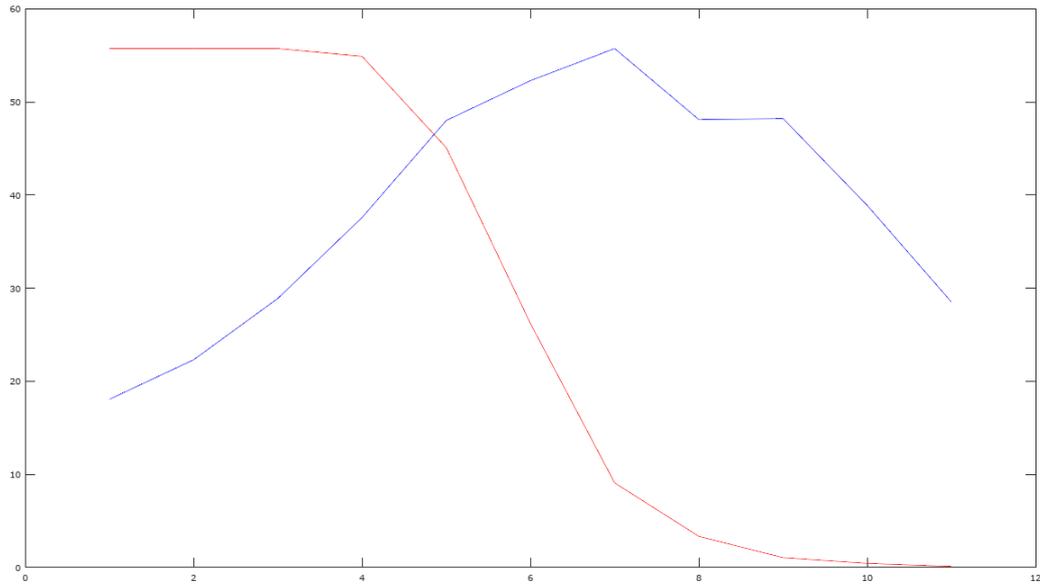


Figura 5.23: Teste 9: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e 1000 experimentos:

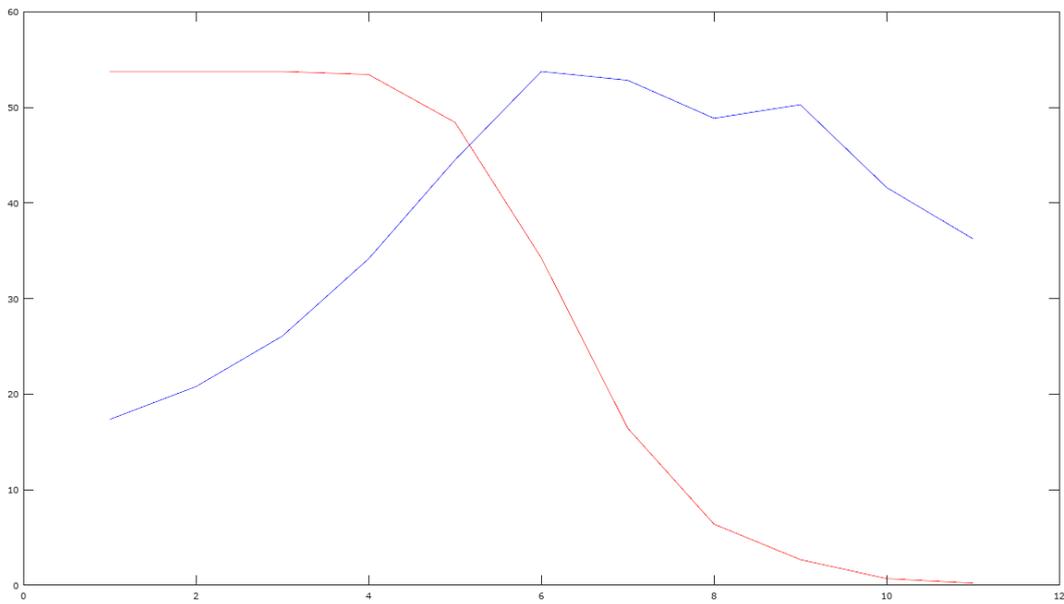


Figura 5.24: Teste 10: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{3}$ e 1000 experimentos:

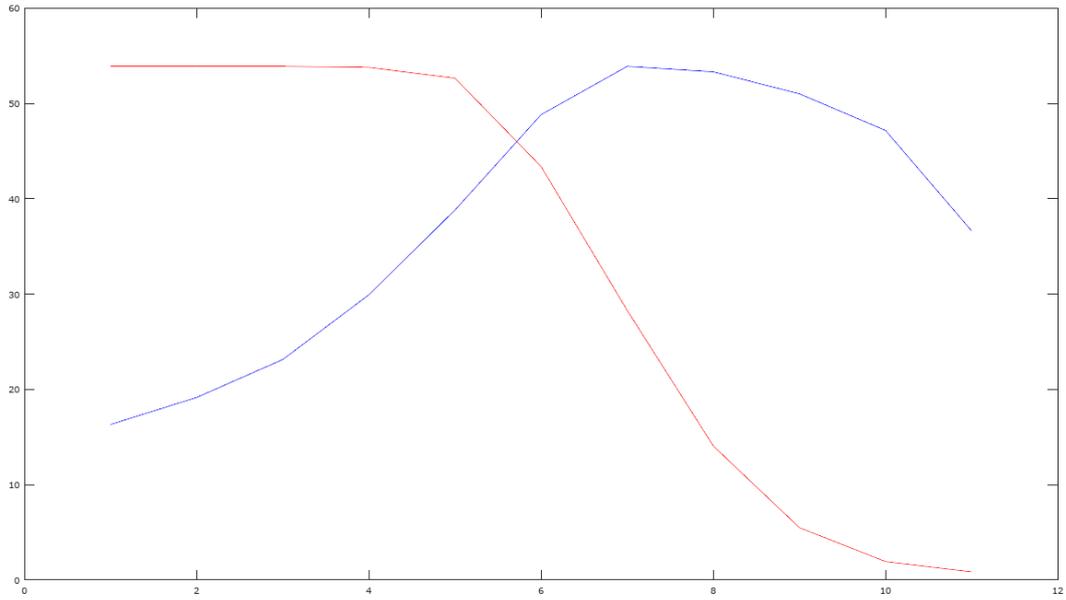


Figura 5.25: Teste 11: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos

- Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e 1000 experimentos:

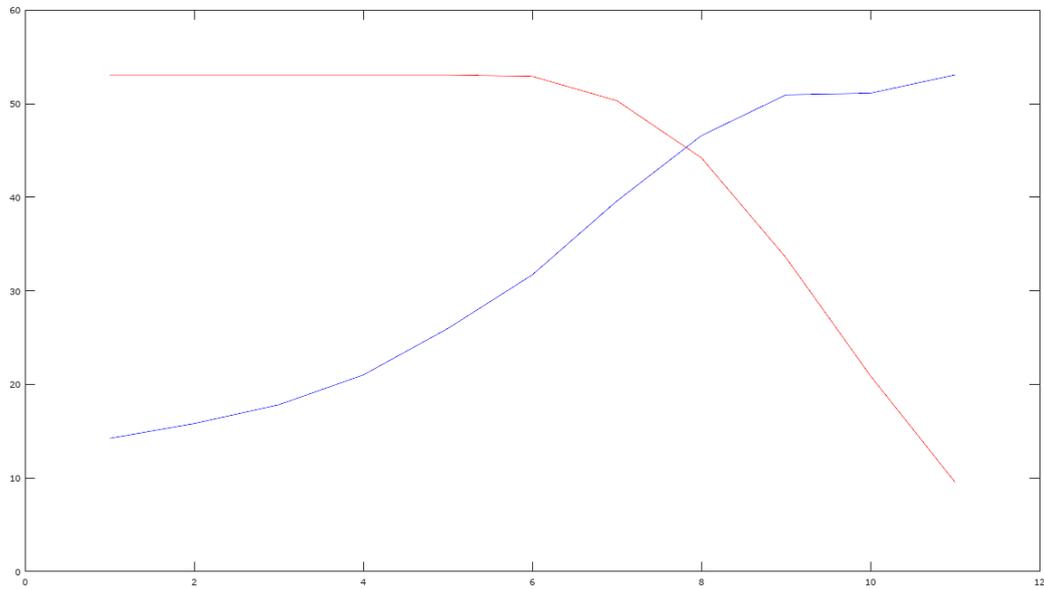


Figura 5.26: Teste 12: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 1000 experimentos

- Para $\theta = 1^\circ$ e 500 experimentos:

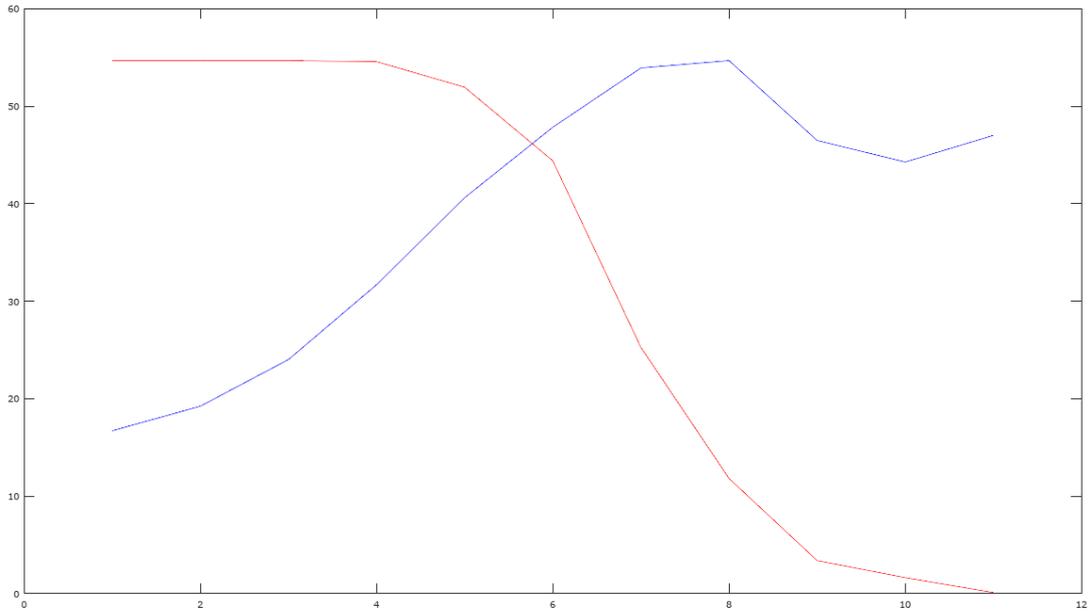


Figura 5.27: Teste 13: Valor médio de capturas (em vermelho) e valor médio de movimentos com captura (em azul) em 500 experimentos

- Para $\theta = 1^\circ$ e 1000 experimentos:

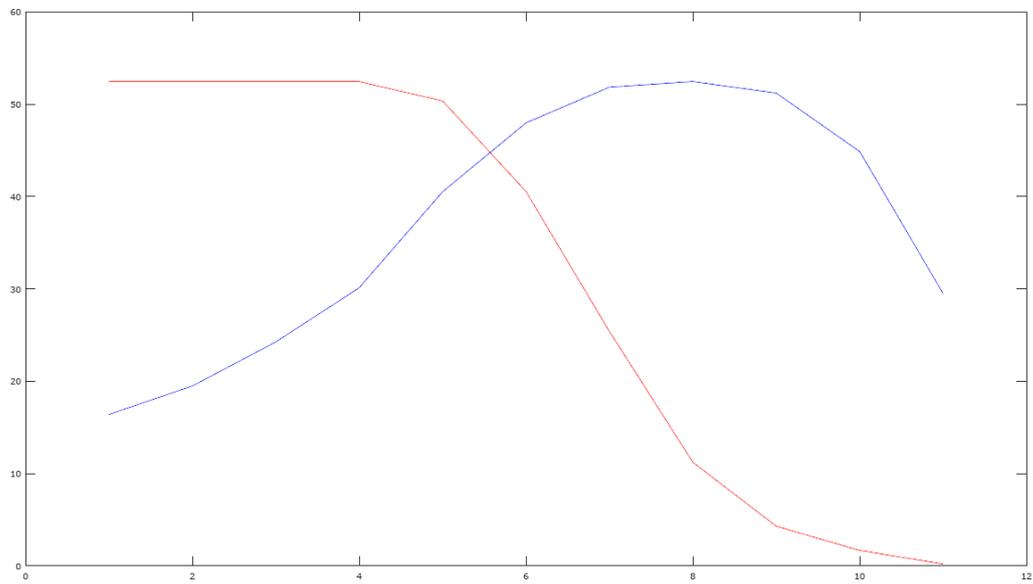


Figura 5.28: Teste 14: Valor médio de capturas(em vermelho) e valor médio de movimentos com captura(em azul) em 1000 experimentos

Capítulo 6

Conclusões

Desenvolveu-se nessa pesquisa uma aplicação das técnicas de otimização e probabilidade na construção de estratégias de movimentação voltadas para um modelo de perseguição entre personagens numa animação. Do modelo proposto inicialmente foram gerados outros modelos que enriqueceram o presente trabalho no sentido de instigar e dinamizar ainda mais essa perseguição.

Pelos resultados numéricos obtidos no caso unidimensional foi possível comprovar um resultado teórico que se $p < r$ então com probabilidade 1 o ponto é capturado, em contrapartida se $p > r$ então com probabilidade positiva o ponto não é capturado. Essa condição foi válida para testes realizados com 100, 500 e 1000 experimentos. Em todos os testes o círculo apresenta vantagem sobre o ponto.

Para o caso bidimensional foi analisado o comportamento dos personagens usando diferentes valores de θ . Todos os testes indicam que nessas situações o número de capturas ultrapassa o número de fugas, vale salientar ainda que conforme o ângulo θ de movimentação do ponto aumenta também aumenta as chances de sucesso para o círculo capturá-lo, conseqüentemente para um ângulo menor o ponto tem mais chances de evitar sua captura. No caso unidimensional o ponto se locomove na direção em que o centro do círculo dirigiu-se anteriormente, enquanto que no caso 2D o ponto se locomove numa direção diferente da movimentação anterior ao seu oponente. Pela desigualdade triangular a distância do ponto em sua nova posição para a posição atual do centro do círculo, é menor que a soma das distâncias entre sua posição anterior em relação ao círculo e a distância entre as posições consecutivas do ponto. Este fato faz-se entender que os valores dos parâmetros (θ e p) influenciam na situação crítica, que no caso 1D era p (esperança do valor do pulo do ponto). Tendo que o p no caso 2D deve ser menor que o raio r .

As simulações também mostraram que sem os atributos aleatórios, tanto o modelo 1 como suas variantes apresentam soluções triviais, uma vez que para $u < r$ o ponto sempre acaba sendo capturado pelo círculo e para $u \geq r$, não impondo arbitrariamente um limite de iterações, essa perseguição tende a infinito.

Durante todo o período de formulação e execução da pesquisa, filtrar os objetos de estudos não foi uma tarefa tão simples, pois o tema trabalhado abria vertentes criativas a serem consideradas. Esse fato corrobora a afirmação apresentada na motivação desta dissertação quando cita ser uma proposta atraente misturar diferentes áreas da Ciência na resolução de problemas diversos. E corrobora também a afirmação de Lobachevsky em [17] quando diz não haver ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Estimar algebricamente o valor p limite para mudança do comportamento das capturas no caso bidimensional.
- Aplicar os modelos de perseguição em problemas de Dinâmica Populacional, um exemplo seria Presa-predador.
- Visualizar a dinâmica da perseguição através de técnicas de Animação da Computação Gráfica.
- Acrescentar mais círculos e pontos ao problema.
- Estender o caso 2D para o espaço euclidiano.

Referências Bibliográficas

- [1] GOMES, J.; VELHO, L. **Fundamentos da Computação Gráfica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [2] VELHO, L.; CARVALHO, P. **Mathematical Optimization in Computer Graphics and Vision**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [3] BERNER, S. **New results on verified global optimization**. Computing, 57(4), 323–343. 1996.
- [4] Chvatal, Vasek. **Linear Programming**. W. H. Freeman, 1983.
- [5] Csendes, T.; Ratz, D. **Subdivision direction selection in interval methods for global optimization**. SIAM J. Numerical Analysis, 34(3), 922–938. 1997.
- [6] Fang, Shu-Cherng.; Puthenpura, Sarat. **Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms**. Prentice Hall. 1993.
- [7] Gill, Philip.; Murray, Walter.; Wright, Margareth H. **Practical Optimization**. Academic Press. 1981.
- [8] Hansen, E. **Global Optimization using Interval Analysis**. Monographs - course in Pure and Applied Mathematics, no. 165. New York: M. Dekker. 1988.
- [9] Kapur, J. N.; Kesavan, H. K. **Entropy Optimization Principles with Applications**. Academic Press. 1992.
- [10] Karmarkar, Narendra. **A new polynomial time algorithm for linear programming**. Combinatorica, 4, 373–395. 1984.
- [11] Luenberger, David G. **Linear and Nonlinear Programming**. Addison-Wesley. 1984.
- [12] Papadimitriou, Christos H.; Steiglitz, Kenneth. **Combinatorial optimization: algorithms and complexity**. Prentice-Hall. 1982.
- [13] GOMES, J.; COSTA, B.; DARSA, L.; VELHO, L. **Graphical Objects**. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.
- [14] Izmailov, A.; Solodov, M. **Otimização - volume 1. Condições de análise convexa e de dualidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [15] Izmailov, A.; Solodov, M. **Otimização volume 2. Métodos computacionais**. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [16] BARROS, L. N. **Técnica de programação semidefinida por arco viável e aplicação à maximização da frequência natural de estruturas mecânicas**. M.Sc., UFPB/CI, João Pessoa, PB, Brasil, 2017.

- [17] AUMONT, Jacques.; MARIE, Michel: "Dicionário teórico e crítico de cinema", ed. Papirus, 2001, pp. 136-137
- [18] AZEVEDO, E.; CONCI, A. **Computação Gráfica: geração e imagens**. Rio de Janeiro: Campus, 2003.
- [19] Gomes, J.; Velho, L. **Computação gráfica: Imagem**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 1994.
- [20] Levkowitz, H.; Herman, G.T. **Color Scales for image data**. IEEE Computer Graphics and Application. Vol.12, No.1. January. 1992, pp. 72-80.
- [21] Conci, A.; Castro, E.M.M. **Image mining by context**. **Journal of Expert Systems with Application**. Elsevier Science. UK, Vol.23.2002, pp. 377 - 383.
- [22] Ofek, E.; Shilat, E.; Rappoport, A.; Werman, M. **Multiresolution Textures from image sequences**. IEEE Computer graphics and Application. Vol 17, No,5. 1997. September, pp. 18-29.
- [23] Upstill, S. **The Realistic Presentation of Synthetic Images: Image processing in Computer Graphics**. PhD thesis, University of California at Berkeley, 1985.
- [24] Dias, M.L. **Ray Tracing Interference Color**. IEEE Computer Graphics and Applications. Vol. 11. No 2. March 1991, pp. 54 -60.
- [25] Jackson, R.; MacDonald, L.; Freeman, K. **Computer Generated Color**. John Wiley and Sons, 1994.
- [26] Marcus, A. **Color: A tool Computer Graphics Communication**. Color in Computer Graphics, Proceeding of SIGGRAPH 87. in: Computer Graphics. Vol.10. July, 1987.
- [27] Wyszecki, G.; Stiles, W. **Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae**. 2nd. Ed, Wiley, New York, 1982.
- [28] SILVA, F. A. **Aplicações das técnicas de processamento digital de imagens na caracterização de materiais**. Tese (Doutorado) — Unicamp, 1996.
- [29] Charles, S. **The History of Animation: Enchanted Drawings**. Wings Books. New York: 1994.
- [30] Catmull, E. **The Problems of Computer-Assisted Animation**. SIGGRAPH'78, 1978.
- [31] Maltin, L. **Of Mice and Magic - A History of American Animated Cartoons**. Penguin Books. New York: 1987.
- [32] Thalmann, N.M.; Thalmann, D. **Computer Animation - Theory and Practice**. Springer - Verlag. New York: 1985.
- [33] Thomas, B. **Art of Animation, Hyperion**. New York: 1991.
- [34] Watt, A. **Advanced Animation and Rendering Techniques**. Addison-Wesley. New York. Harlow, England. 1992.
- [35] Hollander, A. **Moving Pictures**. [S.l.]: Alfred A. Knopf, Inc. 43 páginas. ISBN 9780394574004. 1989.
- [36] CAMILO, M. S. **Sistema de Controle de Animações de Personagens para o Framework GUFF**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2006.
- [37] LAMOTHE, A. **Tricks of the Windows game programming gurus**. [S.l.]: Sams, 1999.

- [38] Ross, Sheldon, Probabilidade: Um Curso moderno com aplicações; tradutor: Alberto Resende De Conti. - 8ª Edição, Bookman, Porto Alegre-RS, 2010.
- [39] James, Barry R., Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário, IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-RJ.
- [40] Magalhães, M,N. Lima, A, C, P. Noções de Probabilidade e Estatística,
- [41] MASSERA, J. M. A. Uma nova técnica para otimização de estruturas de grande porte. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.
- [42] OLIVIERI, BRUNO PERDIGÃO. Otimização do projeto de pontes protendidas pré-Moldadas pelo método dos algoritmos genéticos. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [43] Bastos, E. A. Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [44] HAFITKA, R. T. and GÜRDAL, Z., Elements of Structural Optimization, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [45] Herskovits, J.; Santos, G. Feasible Arc Interior Point Algorithms For Nonlinear Optimization, COMPUTATIONAL MECHANICS, New Trends and Applications, 1998.