

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

DOUGLAS MACKETENA DOS SANTOS

**OS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA ELETRICIDADE:  
Estudo de caso nas séries secundárias**

JOÃO PESSOA – PB  
2019

DOUGLAS MACKETENA DOS SANTOS

**OS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA ELETRICIDADE:  
Estudo de caso nas séries secundárias**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do Título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Costa Duarte Filho

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

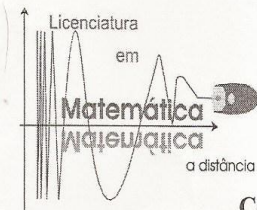
S237n Santos, Douglas Macketena Dos.

Os números complexos e suas aplicações na eletricidade:  
estudo de caso nas séries secundárias / Douglas  
Macketena Dos Santos. - João Pessoa, 2019.  
53 f. : il.

Orientação: Jorge da Costa Duarte Filho Duarte Filho.  
Coorientação: Clécio Souto da Silva Silva.  
Monografia (Graduação) - UFPB/ccen.

1. Números Complexos Resolução de Problemas Eletric. I.  
Duarte Filho, Jorge da Costa Duarte Filho. II. Silva,  
Clécio Souto da Silva. III. Título.

UFPB/CCEN



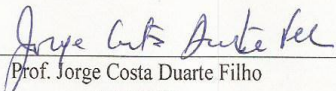
Universidade Federal da Paraíba  
Unidade de Educação a Distância  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Coordenação de Licenciatura em Matemática a Distância

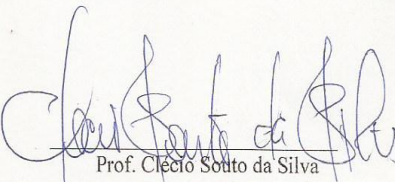



**Ata da defesa do Trabalho de Conclusão  
de Curso (TCC), do Licenciando Douglas  
Macketena dos Santos.**

Aos dez dias do mês de dezembro de dois mil e dezoito, no polo de apoio presencial da cidade de João Pessoa, em sessão pública, teve início a defesa de Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) do Licenciando **Douglas Macketena dos Santos**, intitulada "**Os Números Complexos e Suas Aplicações na Eletricidade: Estudo de caso nas Séries Secundárias**". O licenciando cumpriu com o requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática. Procedeu a defesa diante da Comissão Examinadora constituída pelos seguintes professores: Jorge Costa Duarte Filho (orientador), Clécio Souto da Silva, co-orientador e Ricardo Burity Croccia Macedo, examinador. O professor Jorge Costa Duarte Filho, na condição de Presidente, dirigiu os trabalhos e, após as formalidades de praxe, convidou o candidato a discorrer sobre o conteúdo da sua Monografia. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Comissão Examinadora. Em seguida, a referida comissão reuniu-se para deliberar e atribuir, por unanimidade, a menção **aprovada com nota 7,0(sete)**. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, será assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

Membros da Comissão:

  
Prof. Jorge Costa Duarte Filho  
Presidente

  
Prof. Clécio Souto da Silva  
Co-orientador

  
Prof. Ricardo Burity Croccia Macedo  
Examinador

2019  
DOUGLAS MACKETENA DOS SANTOS

**OS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA ELETRICIDADE:  
Estudo de caso nas séries secundárias**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do Título de licenciado em Matemática.

Aprovado em \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Jorge Costa Duarte Filho  
(Orientador - UFPB)

---

Prof. Dr. Ricardo BurityCroccia Macedo  
(Avaliador Interno - UFPB)

---

Prof. Dr. Clecio Souto da Silva  
(Avaliador Externo - UDE - UY)

A Deus por não me deixar desistir, estando comigo em todos os momentos desta caminhada.

## AGRADECIMENTOS

A **Deus** por está comigo e não permitir que eu desistisse;

A minha esposa **Eridiana** por me apoiar em todos os momentos;

Aos meus filhos **Mayake** e **Henrique** por compreender a ausência que se fez presente em muitos momentos;

Aos meus pais **Ana verônica** por sempre acreditarem em mim;

A meus irmãos, **Diêgo** e **Dielton** por me ouvirem e me aconselharem nas decisões ao longo da caminhada;

Ao professor, orientador e amigo **Prof. Jorge Costa Duarte Filho** pelo incentivo que foram determinantes para a conclusão deste curso;

Ao professor de matemática **Prof. Clecio Souto da Silva**, pela experiência, paciência e apoio para essa conquista;

A todos os **Professores, Tutores e Colegas** do curso por terem contribuído na construção do meu aprendizado.

## RESUMO

Nosso trabalho consiste em um estudo sobre os números complexos e suas aplicações no campo da eletricidade para turmas secundaristas, seja no ensino regular quanto no ensino técnico. Os fenômenos, sempre tiveram assim como o universo, a inquietude de serem explicados pelos matemáticos. Equações de diversos graus, já eram estudadas por matemáticos, por necessidades práticas para tentar responder a estas questões. Historicamente, o conjunto dos números complexos, na forma tradicional, foi estudado, graças à enorme contribuição do matemático Cardano (1501 - 15796). Esse grande matemático mostrou que mesmo com valores negativos em raízes quadradas – em um dos seus termos – seria possível obter uma solução aceitável para uma equação de grau dois:  $x^2 - 10x + 40 = 0$ . A título de rigor, outros matemáticos contribuíram divinamente na formalização rigorosa como Friedrich Gauss (1777 - 1855). Logicamente, com tantas contribuições e vários estudos nestas resoluções de equações, é que surgiram de fato, os números complexos e todas as fundamentações teóricas sobre a sua formalização. Verifica-se também, que o conjunto dos números complexos, é o que possui maior cardinalidade, por possuir todos os outros conjuntos intrinsecamente. Também, observa-se que é necessário compreender as operacionalizações entre (aritmética, trigonometria e algébrica) no envolvimento desses conjuntos. Nosso estudo traz contribuições de Araújo (2006) no que tange as indagações dos alunos quanto às aulas expositivas, e o desenvolvimento de conceitos na aprendizagem, Ferreira (2006) nas questões das raízes quadradas de números negativos, Santos (2008) onde se trata da noção clara de números complexos em situações problemas, e na formalização do currículo escolar, Silva (2005) onde permeia as aplicações dos números complexos nas ciências e nas engenharias e, por fim, as contribuições de Guy Brousseau nas construções de situações problemas relacionados à recontextualização e, ao sentido da aprendizagem.

**Palavras – Chave:** Números Complexos; Resolução de Problemas; Eletricidade.

## ABSTRACT

Our work consists of a study on the complex numbers and their applications in the field of electricity for secondary classes, whether in regular or technical education. The phenomena have always had as the universe, the uneasiness to be explained by the mathematicians. Equations of varying degrees were already studied by mathematicians, by practical needs to try to answer these questions. Historically, the set of complex numbers, in the traditional form, was studied, thanks to the great contribution of the mathematician Cardano (1501 - 15796). This great mathematician showed that even with negative values in square roots - in one of his terms - it would be possible to obtain an acceptable solution for a two degree equation:  $x^2 - 10x + 40 = 0$ . As a matter of fact, other mathematicians contributed divinely in the strict formalization like Friedrich Gauss (1777 - 1855). Of course, with so many contributions and various studies in these resolutions of equations, it is that in fact the complex numbers and all the theoretical foundations on their formalization have arisen. It is also verified that the set of complex numbers is the one with the highest cardinality, because it has all the other sets intrinsically. Also, it is observed that it is necessary to understand the operations between (arithmetic, trigonometry and algebra) in the involvement of these sets. Our study brings contributions from Araújo (2006) regarding the students' questions about expository classes, and the development of learning concepts, Ferreira (2006) on the questions of the square roots of negative numbers, Santos (2008) a clear notion of complex numbers in problem situations, and the formalization of the school curriculum, Silva (2005), where the applications of complex numbers in the sciences and engineering are permeated, and finally, the contributions of Guy Brousseau in the construction of situations related to recontextualization and to the meaning of learning.

**Key - words:** Complex Numbers; Troubleshooting; Electricity.

## SUMÁRIO

<b>1. APRESENTANDO NOSSO TEMA DE PESQUISA</b> .....	12
1.1. Memorial Acadêmico.....	12
1.2. Justificativa .....	13
1.3. Os objetivos da pesquisa .....	14
1.4. Estrutura do trabalho .....	14
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA ACERCA DO TEMA</b> .....	<b>15</b>
2.1. O Surgimento dos Números Complexos .....	15
2.1.1. Definição .....	16
Igualdade de Números Complexos.....	16
Adição e Subtração de Números Complexos .....	17
Produto de Números Complexos.....	17
Conjugado de um Número Complexo .....	17
Divisão de Número Complexo .....	18
Valor Absoluto de um Número Complexo.....	18
Plano Complexo .....	19
Demonstração do Módulo de $Z$ .....	20
O Número Complexo na sua forma Trigonométrica .....	20
Demonstração do Produto dos Números Complexos na sua forma Triangular ou Polar .....	21
Operações com Potências para os Números Complexos.....	22
2.1.2. APLICAÇÕES:.....	23
Em Matemática.....	23
Variável Complexa ou Análise Complexa .....	23
Equações Diferenciais .....	24
Fractais .....	24
Na Física.....	24
Igualdade de Números Complexos.....	24
<b>3. CONCEITOS DE ELETRICIDADE EM RL e RC</b> .....	<b>29</b>
Capacitores e Circuitos RC .....	29
A Energia Armazenada em um Capacitor .....	31
Capacitores em Paralelos.....	31
Capacitores em Série .....	32
Circuito de Carga RC .....	32
Acionamento de Circuito RC .....	33
Bobinas e Circuitos RC.....	34
Armazenamento de Energia na Bobina.....	36

Bobinas em Série.....	36
Bobinas em Paralelo.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 36
Circuito de Descarga RL.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 37
Circuitos Alternados com Números Complexos .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 37
Relações entre Corrente e Voltagem .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 39
Corrente .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 40
Impedância .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 40
Voltagem .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b> 41
Circuitos R-L-C Conectados em Paralelo .....	43
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>49</b>
<b>6. REFERÊNCIAS .....</b>	<b>52</b>

## **1. O NOSSO TEMA DE PESQUISA**

### **1.1 MEMORIAL ACADÊMICO**

Minha formação escolar começou em 1992 na Escola Municipal Padre Anchieta situada na rua. Professor Pereira Lira, nº 350 Alto das populares em Santa Rita PB, onde estudei da 1ª série à metade da 4ª do ensino fundamental 1, quando devido uma greve dos professores por salários atrasados, fui transferido para a E.E.E.F. Aline Silva Madruga situada na rua Professor Pereira Lira S/N, Alto das Populares Santa Rita-PB, onde concluir o restante da 4ª série.

No ano de 1996 fui matriculado na instituição de ensino E.E.E.F.M. Enéas carvalho situada na AV. João Ribeiro Coutinho nº 440 Centro Santa Rita-PB, onde estudei da 5ª série ao 3º ano no período matutino, quando cursava a 8ª série fui inscrito pelo meu tio Norberto para fazer a prova de seleção no SENAI ( Serviço Nacional de Aprendizagem industrial), situado na Av. das indústrias S/N Distrito Industrial João Pessoa-PB, onde consegui êxito e cursei o curso de Eletroeletrônica de 1999 a 2001, no 3º ano do ensino me transferir para o noturno por causa de incompatibilidade de horário com o trabalho, e concluir o Ensino médio em 2003.

Em 2006 fiz a prova de seleção do IFPB para o Curso de Montagem e Manutenção Em Equipamentos médicos Hospitalares onde conseguir êxito e fui aprovado e o cursei. No ano de 2007 fiz o vestibular para Licenciatura em Matemática presencial, onde fui aprovado e comecei a estudar, mas quando estava no início do 5º período precisei trancá-lo por causa de incompatibilidade de horários com o trabalho, onde me findou na perda da matrícula.

Depois de certo tempo minha esposa começou a me perguntar por que eu não fazia a UFPB Virtual, então me inscrevi em 2009 e consegui a aprovação, mas tive dificuldade em acompanhar devido à falta de contato com o computador, não tinha e ainda não tenho tanta paciência em ficar estudando em frente a ele, prefiro imprimir e estudar com os materiais em mãos, onde mais uma vez abandonei meu sonho de me formar em Matemática.

No ano de 2011 prestei o ENEM e consegui uma bolsa integral no curso de Direito na Faculdade Mauricio de Nassau, me matriculei e desta vez iria concluir prometi a mim mesmo, mas me matriculei no concurso de Oficiais da policia militar da PB, onde fui aprovado, e por algumas questões de irregularidades do edital não fui chamado então entrei com um mandado de segurança e o magistrado me deu uma liminar favorável, onde tive que abandonar o curso de direito para cursar o de oficial, no entanto minha liminar foi cassada, e voltei à estaca zero novamente. Então refletindo os acontecimentos ocorridos e pondo meus objetivos em ordem decidir fazer novamente a UFPB Virtual em 2013, conseguir êxito na prova de seleção e graças a Deus estou aqui concluindo este maravilhoso curso que sempre foi meu sonho.

Atualmente trabalho como policial militar no estado da Paraíba, no município de João Pessoa, essa vivência acadêmica só favoreceu e me incentivou para o curso de Licenciatura em Matemática e, também na escolha da linha de pesquisa para o meu trabalho de conclusão de curso por e, por estar relacionado diretamente com o meu percurso formativo. Apresentarei a seguinte temática neste trabalho: OS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA ELETRICIDADE: Estudo de caso nas séries secundárias.

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

O tema do projeto “OS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES NA ELETRICIDADE: Estudo de caso nas séries secundárias, trás consigo intrinsecamente a importância de estudar e conhecer mais os números complexos, porque não se restringe a conceitos e propriedades algébricas do referido conjunto visto nas escolas, mas sim, uma de suas inúmeras aplicações no mundo real prático. Esta aplicação em circuitos elétricos, provam que os conhecimentos adquiridos no âmbito escolar em certo ponto, trazem consigo algumas dificuldades de interpretação, por parte dos alunos ao referido conteúdo. Segundo Araújo (2006 p. 15) nos diz que: As indagações dos alunos durante as aulas expositivas e as dificuldades demonstradas quando o assunto a ser estudado era números complexos chamaram a nossa atenção. As dificuldades dos alunos para interagir com o conteúdo foram sendo observadas tanto no decorrer das aulas através de perguntas, quanto no desempenho nos trabalhos e na realização de provas, ou testes, nos

quais o rendimento não era satisfatório. Por esse motivo, percebemos que a autora remete-se ao conteúdo, como de caráter difícil e, por isso nos motivou também dar importância ao trabalho aqui exposto.

### **1.3 OS OBJETIVOS DA PESQUISA**

#### **OBJETIVO GERAL**

- Realizar um estudo sobre o conjunto dos números complexos e mostrar suas aplicações práticas;

#### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Aplicar os conhecimentos teóricos aprendidos sobre os números complexos em circuitos elétricos RL e RC;
- Mostrar aplicações em Circuitos R - L – C em Série;
- Mostrar aplicações em Circuitos R - L – C em Paralelo.

### **1.4 A ESTRUTURA DO TRABALHO**

Nosso trabalho é organizado em três capítulos. O primeiro capítulo faz referência a fundamentação que dará suporte ao tema.

No segundo capítulo, falaremos sobre os conceitos da Eletricidade em corrente RL e RC bem como, a importância da motivação para o estudo dos Números Complexos. Ainda no mesmo capítulo, teremos uma abordagem sobre a motivação para os estudos e o papel importante do professor mediador da aprendizagem.

No terceiro e último capítulo, iremos apresentar o estudo sobre os Números Complexos e as suas aplicações no dia-a-dia no campo da eletricidade e com isso, promover um ensino – aprendizagem significativa.

## **2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

### **2.1 - O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS**

A primeira referência conhecida à quadratura raízes de números negativos trabalho vem dos matemáticos gregos como Heron de Alexandria, no primeiro século AC, como resultado de uma seção impossível de uma pirâmide.

O complexo se tornou mais evidente no século XVI, na busca de fórmulas que dão as raízes exatas de polinômios de grau 2 e 3 foram encontrados por matemáticos italianos como Tartaglia, Cardano. Originalmente, os números complexos foram propostos em 1545 pelo matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576), em um tratado epitômico em causa a solução das equações cúbica e quárticas, com o título de *Ars magna*. O termo imaginário para essas quantidades foi cunhado por Descartes no século XVII e está em desuso.

As quantidades "fictícias" de Cardano caíram em um mar de indiferença para a maioria dos membros da comunidade matemática. Foram Caspar Wessel em 1799 e Jean-Robert Argand em 1806, com a proposta do plano complexo e que representa a unidade imaginária  $i$ , pelo ponto (0,1) de eixo vertical, que estabelece a base desses números. O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi quem os nomeou, a rigorosamente definido e usado na demonstração original do teorema fundamental da álgebra, que estabelece que todo polinômio não é constante, tem pelo menos um zero. A implementação mais formal, com pares de números reais, foi dada no século XIX.

A frase número complexo foi usada por Carnot em 1803. Anos mais tarde foi usada por Karl Gauss em *Theoria residuorum biquadratorum* em 1828; ele usou para iludir a expressão numérica imaginária. Cardano os chamava de números negativos puros. Os

números complexos ligados às funções analíticas ou variáveis complexas permitem estender o conceito do cálculo ao plano complexo. O cálculo da variável complexa possui várias propriedades notáveis que carregam propriedades que podem ser usadas para obter vários resultados úteis em matemática aplicada.

### 2.1.1 DEFINIÇÃO

Para resolver equações do tipo  $x^2 + 1 = 0$ , os números complexos são bastante importantes, até porque, não existe qualquer número real com suas propriedades em que o seu quadrado seja igual a  $-1$ . Por ser representado na forma  $a + bi$ , com  $a$  e  $b$  números reais, e com sua parte imaginária “ $i$ ” satisfazendo “Veremos isto a seguir”. Se, no caso, for dado um número complexo  $z = a + bi$ , o número real  $a$  será a parte real de  $z$ , indicada por  $\text{Re}(z)$  e  $b$  é a parte imaginária de  $z$ , aqui representada por  $\text{Im}(z)$ .

Observe que o conjunto dos números reais pode ser considerado como um subconjunto do conjunto dos números complexos e para isto basta tomarmos  $b=0$ . Observamos ainda que, se  $a=0$ , teremos o número complexo  $0 + bi$ , recebendo o nome de número imaginário puro.

Vejamos alguns exemplos:

1.  $z = 4 + 0i$ , temos um número real, onde  $\text{Re}(z) = 4$  e  $\text{Im}(z) = 0$ .
2.  $z = 24 + 0i$ , temos um número real, onde  $\text{Re}(z) = 24$  e  $\text{Im}(z) = 0$ .
3.  $z = 1 + 0i$ , temos um número real, onde  $\text{Re}(z) = 1$  e  $\text{Im}(z) = 0$ .
4.  $z = -7 + 0i$ , temos um número real, onde  $\text{Re}(z) = -7$  e  $\text{Im}(z) = 0$ .
5.  $z = 9 + 0i$ , temos um número real, onde  $\text{Re}(z) = 9$  e  $\text{Im}(z) = 0$ .

### Igualdade de Números Complexos:

Dizemos que dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = p + qi$ , são iguais se, e somente se,  $a = p$  e  $b = q$ .

### Adição e Subtração de Números Complexos:

Dado os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = p + qi$ , define-se a soma e a diferença entre os números complexos  $z$  e  $w$ , como sendo:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

### Produto de Números Complexos:

Sejam os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = p + qi$ . Podemos definir os produtos de números complexos entre  $z$  e  $w$ , como sendo.

$$z \cdot w = (a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

### Conjugado de um Número Complexo:

O conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  é definido como o número complexo  $z^* = a - bi$ . Os conjugados apresentam ainda como propriedades gerais:

1. O conjugado do conjugado de  $z$  é igual a  $z$ , isto é,  $(z^*)^* = z$ .
2. O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados destes números, ou seja,  $(z + w)^* = z^* + w^*$ .
3. Para o conjugado do produto de dois termos complexos é igual ao produto dos conjugados desses números, ou seja,  $(z * w)^* = z^* * w^*$ .
4. Quando  $z$  for um número real, teremos o conjugado de  $z$  que será o próprio  $z$  e com isso teremos:

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \text{ e } Im(z) = \frac{1}{2}(z - z^*)$$

## Divisão de Números Complexos

Considere os seguintes números complexos  $z = a + bi$  e  $w = p + qi$ . A divisão entre esses números complexos  $z$  e  $w$ , será definida como:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

## Valor Absoluto de um Número Complexo:

O valor absoluto ou ainda o módulo de um número complexo  $z = a + bi$ , podemos ter como definição um número real não negativo do tipo:

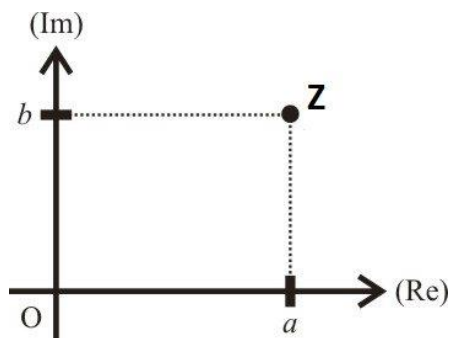
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teremos ainda as suas propriedades do valor absoluto ou do seu módulo: Sejam  $z$  e  $q$  são números complexos. Então:

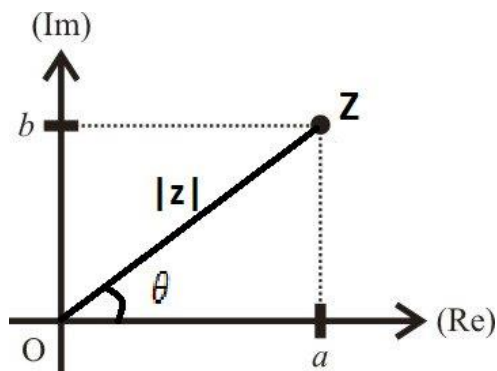
1.  $|z| = |-z| = |z^2|$
2.  $|z| > 0$
3.  $|z| > 0$  se, e somente se,  $z = 0$ .
4.  $|z * q| = |z| * |q|$
5.  $\left| \frac{z}{q} \right| = \frac{|z|}{|q|}$  se  $w \neq 0$ .
6.  $z * z^2 = |z|^2$
7.  $|z + q| \leq |z| + |q|$  – Desigualdade Triangular
8.  $|z - q| \leq |z| + |q|$
9.  $|z + q| \leq |z| - |q|$
10.  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
11.  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

## Plano Complexo

A representação dos Números Complexos, ou sua interpretação, pode ser claramente demonstrada em um sistema de coordenadas. Para estas coordenadas, chamaremos de Plano de Argand-Gauss. O mesmo é composto de dois segmentos de retas perpendiculares. Para o segmento de reta horizontal, terá a função de representar toda a parte real do número complexo, já a coordenada vertical, será responsável pela parte imaginária. Um exemplo clássico é demonstrado abaixo com o número complexo  $z = a + bi$  no plano de Argand-Gauss.



Observamos que o segmento de reta OZ, que também é chamado de módulo do número complexo, aqui será representado por  $|z|$ . Já na figura seguinte abaixo, teremos que o ângulo entre o eixo OX é de fato, o segmento OZ onde esse é denominado como o argumento de Z, aqui representado por  $\theta$ .



Demonstração do Argumento de Z

Os vértices do triângulo retângulo, temos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{a}{|z|}$$

Percebemos que  $\theta$  para nós, será o argumento de  $Z$ .

Porém, para que possamos encontrar o argumento de  $Z$ , devemos estar utilizando  $\theta = \text{arcsen}\left(\frac{b}{|z|}\right)$  ou ainda  $\theta = \text{arcos}\left(\frac{a}{|z|}\right)$ .

### **Demonstração do Módulo de $Z$**

Podemos aplicar diretamente o teorema de Pitágoras para determinar o módulo de  $z$ , sendo assim teremos:

$$(|z|)^2 = a^2 + b^2$$

Então teremos que  $|z|$ :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### **O número complexo na sua forma trigonométrica**

Nitidamente, quando utilizamos as características trigonométricas para representar os números complexos, estamos trabalhando em função do seu módulo e do seu argumento diretamente. E, quando isso ocorre, está explicitamente claro que o número complexo passou para a fórmula triangular ou polar.

Consideraram-se o número complexo  $z = a + bi$ , onde  $z \neq 0$ , teremos que:

Como já denotado anteriormente,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|} \rightarrow b = |z| * \text{sen}(\theta)$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z| * \text{cos}(\theta)$$

Ao substituímos os elementos de a e b neste mesmo complexo  $z = a+bi$ .

Portanto,

$$z = a + bi$$

$$z = |z| * \cos(\theta) + |z| * \text{sen}(\theta)i$$

$$z = |z| * (\cos(\theta) + i * \text{sen}(\theta))$$

### **Demonstração do Produto dos números complexos na sua forma triangular ou Polar**

Sendo os números complexos na sua forma polar:

$$z_1 = |z_1| * (\cos(\theta_1) + i * \text{sen}(\theta_1))$$

$$z_2 = |z_2| * (\cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_2))$$

O seu produto será expresso como:

$$z_1 * z_2 = [|z_1| * (\cos(\theta_1) + i * \text{sen}(\theta_1))] * [|z_2| * (\cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_2))]$$

$$z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) + i * \text{sen}(\theta_1)) * (\cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_2))$$

$$z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1) * \cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1) * \text{sen}(\theta_2) + i^2 * \text{sen}(\theta_1) * \text{sen}(\theta_2))$$

$$z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1) * \cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1) * \text{sen}(\theta_2) + i^2 * \text{sen}(\theta_1) * \text{sen}(\theta_2))$$

$$z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * (\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1) * \text{sen}(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1) * \cos(\theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1) * \text{sen}(\theta_2))$$

$$z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * \cos(\theta_1 + \theta_2) + i * \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

Logo, para obtermos as operações de multiplicação entre dois números complexos no formato polar, deveremos multiplicar os seus módulos e realizar a soma de seus argumentos.

Exemplo:

Se  $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) + i * \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$  e  $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + i * \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ :

$$z_1 * z_2 = 2 * 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i * \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 * z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

### Operações com potências para os números complexos:

Anteriormente, nos foi apresentado que, para a multiplicação entre números complexos, multiplicam-se os seus módulos e somam-se os seus argumentos.

Sendo assim, ao realizarmos a multiplicação de um número complexo Z por ele mesmo n vezes, obteremos:

$$|z| * |z| * |z| * |z| * \dots * |z| = (|z|)^n \text{ e } \theta + \theta + \theta + \dots + \theta = n * \theta$$

Portanto, se elevarmos Z a uma potência n, encontraremos que:

$$z^n = (|z|)^n * (\cos(n\theta) + i * \text{sen}(n\theta))$$

Teremos como exemplo a seguinte aplicação dos números complexos:

- Determinar  $z^3$ , sendo  $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i * \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ .

$$z^3 = 2^3\left(\cos\left(3 * \frac{\pi}{4}\right) + i * \text{sen}\left(3 * \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z^3 = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i * \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

## 2.1.5 APLICAÇÕES

### Em Matemática

#### Soluções de equações polinomiais

Uma *raiz* ou um *zero* do polinômio  $p$  é um complexo  $z$  tal que  $p(z) = 0$ . Um resultado importante desta definição é que todas as equações polinomiais (algébricas) de grau  $n$  têm exatamente  $n$  soluções no *corpo de números complexo*, ou seja, possuem exatamente  $n$  complexos  $z$  que satisfazem a igualdade  $p(z) = 0$ , contados com suas respectivas multiplicidades. Isso é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra mostra que os complexos são um corpo algebricamente fechado; por isso que os matemáticos consideram números complexos de mais alguns números *naturais* que os **números reais** quando a resolução de equações M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner (1992).

Também é verdade que se  $z$  é uma raiz de um polinômio  $p$  com coeficientes reais, então o complexo conjugado de  $z$  é também uma raiz de  $p$ .

#### Variável Complexa ou Análise Complexa

O estudo de funções de variável complexa é conhecido como análise complexa. Ele tem muitos usos como uma ferramenta de matemática aplicada, assim como em outros ramos da matemática. A análise complexa fornece algumas ferramentas importantes para a prova de teoremas, mesmo na teoria dos números; enquanto as funções reais da variável real, precisam de um plano cartesiano para ser representado; funções variáveis complexas precisam de um espaço de quatro dimensões, o que as torna especialmente difíceis de representar.

Ilustrações coloridas são freqüentemente usadas em um espaço tridimensional para sugerir a quarta coordenada.

## Equações Diferenciais

Em equações diferenciais, ao estudar as soluções de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, é comum encontrar as raízes primeiro (geralmente complexas) do polinomial característico, o qual permite expressar a solução geral do sistema em termos de funções básicas.

## Fractais

Muitos objetos fractais, como o conjunto Mandelbrot, podem ser obtidos a partir de propriedades de convergência de uma sucessão de números complexos. A análise do domínio de convergência revela que esses conjuntos podem ter uma enorme complexidade auto-similar.

## Na Física

Números complexos são usados em engenharia eletrônica e em outros campos para uma descrição adequada de sinais periódicos variáveis. Em uma expressão do tipo  $z = re^{i\phi}$  podemos pensar em  $r$  como a amplitude e em  $\phi$  como a fase de uma onda senoidal de uma dada frequência. Quando nós representamos uma corrente ou uma tensão AC (e, portanto, com o comportamento sinusoidal) como a parte real de uma função de variável complexa da forma  $f(t) = ze^{i\omega t}$  onde  $\omega$  representa a frequência angular e do número complexo  $z$  dá a fase e a amplitude, o tratamento de todas as fórmulas que regem resistências, capacidades e indutores podem ser unificados por introdução de resistências imaginários para os dois últimos (ver grades). Os engenheiros elétricos e físicos usam a letra  $j$  para a unidade imaginária em vez de  $i$ , que é tipicamente destinada à intensidade da corrente.

## Igualdade de Número Complexos

O campo complexo é igualmente importante na mecânica quântica, cuja

matemática subjacente usa espaços de Hilbert de dimensão infinita em  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{C}$ ).

Na relatividade especial e na relatividade geral, algumas fórmulas para a métrica espaço-tempo são muito mais simples se tomarmos o tempo como uma variável imaginária.

Conforme todo o histórico explicitado acima, os professores observam que o estudo dos números complexos, não é de tão fácil assimilação por parte dos alunos, pelo caráter imaginário, e a partir de observações nas atividades cotidianas.

Pretende-se aqui, discutir a idéia de que o tema dos números complexos constitui um conteúdo que assume um importante papel no ensino médio.

Corroborando o que se disse, toma-se aqui a afirmação de Araújo (2006, p.15):

As indagações dos alunos durante as aulas expositivas e as dificuldades demonstradas quando o assunto a ser estudado era números complexos chamaram a nossa atenção. As dificuldades dos alunos para interagir com o conteúdo foram sendo observadas tanto no decorrer das aulas através de perguntas, quanto no desempenho nos trabalhos e na realização de provas, ou testes, nos quais o rendimento não era satisfatório.

Sejam em: aulas, trabalhos e provas a autora reforça que existe uma manifestação em diversos momentos da aprendizagem e com isso, da sua importância do estudo.

Neste trabalho, entendeu-se que há uma forte importância deste conteúdo (números complexo) que prima todo o desenvolvimento desta pesquisa. Em seguida, no próprio trabalho de Araújo (2006, p.16) observa-se uma contribuição importante qual seja:

No contexto atual, operam-se mudanças significativas no que se refere ao ensino de Matemática, as quais buscam considerar os múltiplos aspectos da formação e do desenvolvimento de conceitos na aprendizagem escolar. Essas preocupações, somadas

às contribuições das propostas pedagógicas, são fatores que vêm influenciando novas formas de pensar o ensino.

A aquisição dos conteúdos é reforçada pela autora onde ela demonstra claramente a importância da contextualização, no que se refere à aquisição de conceitos.

Deve-se também levar em conta, à exploração de diversos aspectos da formação do aluno, que trará consigo excelentes contribuições para novas formas de pensar o ensino.

Conforme ao que foi dito no parágrafo anterior, a proposta deste trabalho traz consigo que, os conceitos anteriores adquiridos pelos alunos, com referências aos circuitos elétricos, por meio das leis que os regem, de forma a se poder utilizar os números complexos em atividades reais do dia-a-dia.

No trabalho de Ferreira (2006, p.8) encontram-se as seguintes observações feitas por essa pesquisadora em relação aos seus alunos:

Em nossas aulas de números complexos, eram comuns perguntas como: "Existe raiz quadrada de números negativos?"; "Onde vamos utilizar os números complexos?"; Por que a raiz quadrada de  $-1$  é igual a  $i$ ? Onde vamos utilizar esse  $i$ ? Podemos multiplicar e dividir números complexos?"; "Por que os números complexos são chamados de imaginários?".

Notadamente, percebe-se a inquietação por parte dos alunos abordados na citação anterior, onde a operacionalização se faz presente com números complexos e, onde de fato será aplicado. Acredita-se ainda que estas inquietações constantes nas mentes dos alunos secundaristas, principalmente dos cursos técnicos; diga-se ainda, aqueles que lá estão com o intuito de exercer uma profissão. Para este futuro profissional, de acordo com o que se tem observado no dia-a-dia, é bastante inquieto e em várias ocasiões tem anseio em saber onde se aplica tal aprendizado obtido no curso que escolheu.

Em Santos (2008, p.14) encontra-se a seguinte afirmativa:

(...) No entanto, temos observado em nossas atuações, enquanto professores de matemática que, independente da maneira como o referido conteúdo é inserido nas escolas, é comum encontrarmos alunos sem alguma noção clara do que é um número complexo, bem como sua utilidade no sentido de servir, por exemplo, para achar soluções reais de uma infinidade de problemas.

Na observância deste autor, um ensino voltado para a formação de conceitos, com aplicações relevantes, faria de fato com que o aluno se motivasse para buscar um melhor aproveitamento no que tange os números complexos. O mesmo autor mostrou-se deveras preocupado, com o problema da falta de propostas/atividades que mostrem a aplicação dos números complexos.

Confirmando o que se disse, lendo o trabalho do citado autor (SANTOS, 2008, p.15), encontra-se outra afirmativa que confirma essa questão:

Ao longo de nossa atuação enquanto professores também detectaram que grande parte dos alunos estuda esse conteúdo simplesmente porque faz parte do currículo do ensino médio, mas não têm motivação para estudá-lo, uma vez que absorvem o conteúdo como lhes é apresentado, isto é destituído de significação ou apenas como um conjunto de regras que se aplicam para se chegar a uma resposta.

As restrições de aplicações segundo o autor em números complexos, talvez seja um grande fator pelo qual exista o desinteresse dos alunos por tal aprendizado. Silva (2005, p. 11), em uma pesquisa realizada na Universidade do Minho em Portugal, desenvolveu seu trabalho estabelecendo o aspecto temporal dos números complexos e refere-se à importância das atividades com os números complexos, questionando:

Quanto aos alunos que frequentam a Matemática A, estes gostarão de saber que os números complexos são importantes ferramentas nas áreas das ciências e da engenharia: são importantes quando se estuda sistemas com oscilações sinusoidais; também nas funções trigonométricas os números complexos têm importância, pelo uso da exponencial complexa, que facilita a derivação, como por exemplo, na teoria eletromagnética onde esta técnica é usada nos cálculos envolvendo ondas magnéticas; Nos circuitos elétricos, na mecânica quântica, na análise complexa, nas transformadas de Laplace e de Fourier e em muitas aplicações da engenharia, precisamos dos números complexos.

Claramente, a autora mostra um aspecto importantíssimo que é o estudo dos números complexos, haja vista também que, não podemos desprezar as propriedades dos circuitos elétricos e as suas relações com os números complexos em situações problemas. Esse paralelo de informações justifica indiretamente e diretamente o foco do nosso trabalho aqui explicitado.

Ainda consultando Silva (2005, p.103), encontra-se a seguinte afirmação:

Tais opções, por parte dos autores dos diferentes manuais, poderão contribuir para a ideia de que os números complexos são uma invenção humana, e que não existem na realidade. O aluno poderá vir, a saber, manipular estes números, pode representá-los e até mesmo os aceitar, mas tenho dúvidas que nas condições do atual ensino - tal como vemos preconizado pelos manuais analisados - venha algum dia a desempenhar estas "tarefas" desafios com a consciência da sua real existência.

Como a autora coloca explicitamente que o estudo dos números complexos é de difícil aquisição, ou seja, nos manuais didáticos não abordam tal origem destes, a grande maioria dos alunos, poderão a vir deduzir que, este conjunto, na verdade, não venha a existir. Verdadeiramente, pode-se acreditar que o próprio termo “imaginário” para o caso dos números complexos remetera a esta impressão. No trabalho de Rosa (1998, p.36) também voltado para o tema dos números complexos, numa abordagem histórica, consta a seguinte afirmação:

Para Guy Brousseau, o professor deve construir situações-problema nas quais o conhecimento matemática seja recontextualizado e repersonalizado em vista de se tornar um conhecimento do aluno, quer dizer, uma resposta mais natural às condições particulares, condições indispensáveis para que esse conhecimento tenha um sentido.

A contextualização deverá se fazer presente para os estudos dos números complexos conforme o pensamento do autor – em uma visão modernista, para o estudo dos componentes matemáticos essa afirmativa notadamente ganha força – por se tratar de um conteúdo bastante específico.

Principalmente no campo técnico, o aluno deverá ter em mente, que com a utilização de tais conteúdos, irá favorecer a sua aplicabilidade e a relação diretamente deste, com o seu trabalho. Tal importância dos números complexos, dar-se-ar-se em questões problematizadoras e desafiadoras sendo assim, percebida pelos mesmos dá necessidade de operacionalizar com esses conjuntos numéricos.

Podemos assim, estar justificando, a necessidade de se utilizar o que aprenderam em sala de aula, para situações reais da vida profissional.

### **3 CONCEITOS DE ELETRICIDADE EM RL e RC**

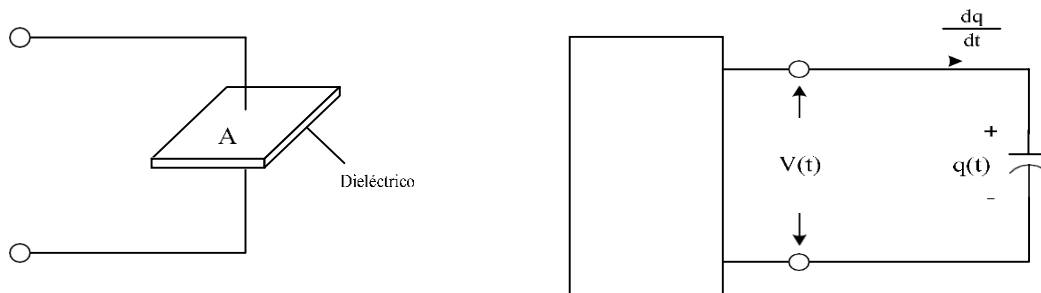
#### **Capacitores e Circuitos RC.**

##### **O Capacitor**

O capacitor é um elemento passivo capaz de armazenar e fornecer quantidades finitas de energia. Ao contrário de uma fonte ideal, ela não pode fornecer uma potência média finita por um tempo infinito. A relação tensão-corrente para este elemento depende do tempo.

O capacitor consiste de duas superfícies condutoras separadas por um material não condutivo ou dielétrico.

Um capacitor simplificado e seu símbolo elétrico são mostrados na figura a seguir:



A carga elétrica é armazenada nas placas. O capacitor é carregado com a tensão  $v$ , que será proporcional à carga  $q$ , então está escrito:

$$q = Cv$$

A capacitância  $C$  pode ser definida como

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Onde  $\epsilon$  é a constante dielétrica,  $A$  é a área das placas e  $d$  é o espaço entre as placas.

A **capacitância** é uma medida da propriedade de um dispositivo para armazenar energia na forma de cargas separadas ou de um campo elétrico.

Quando uma bateria é conectada ao capacitor pela primeira vez, uma corrente flui enquanto as cargas passam de uma placa para a outra. Desde que a corrente é:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

e anteriormente vimos que  $q = Cv$ , derivamos essa equação para obter:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Esta última equação é a relação tensão-corrente para um modelo de capacitor e pode facilmente ser mostrada como uma relação linear. Lembre-se de que  $v$  implica que a voltagem é uma função do tempo e pode ser escrita como  $v(t)$ . Se a tensão é constante, então  $i = 0$ .

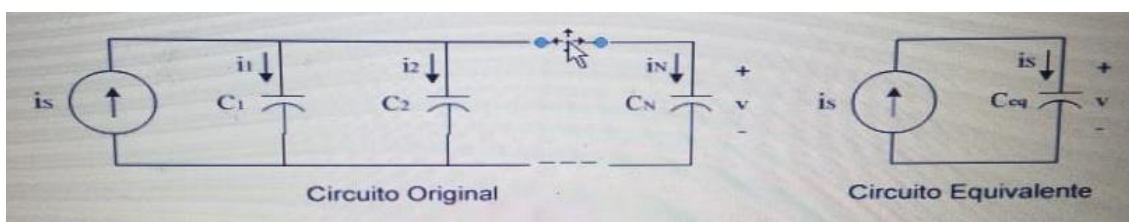
### A energia armazenada em um Capacitor

A energia armazenada em um capacitor se dá pela seguinte fórmula:

$$W_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

### Capacitores em Paralelo:

Considere a seguinte figura, na qual “n” capacitores conectados em paralelo aparecem:

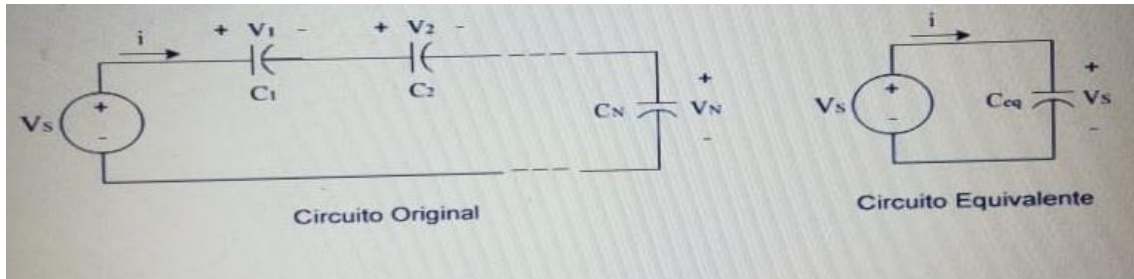


A capacitância Equivalente é dada por:

$$C_{Eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

## Capacitores em Série:

Consideremos agora a conexão de “n” capacitores em série:

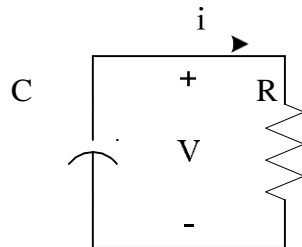


A capacitância equivalente é:

$$\frac{1}{C_{Eq}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_N}$$

## Circuito de Carga RC

Consideremos agora este circuito elétrico simples:



Suponha que uma certa energia inicial armazenada em um capacitor.  $V(t_0) = V_0$ .

Em que a voltagem do capacitor seja:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

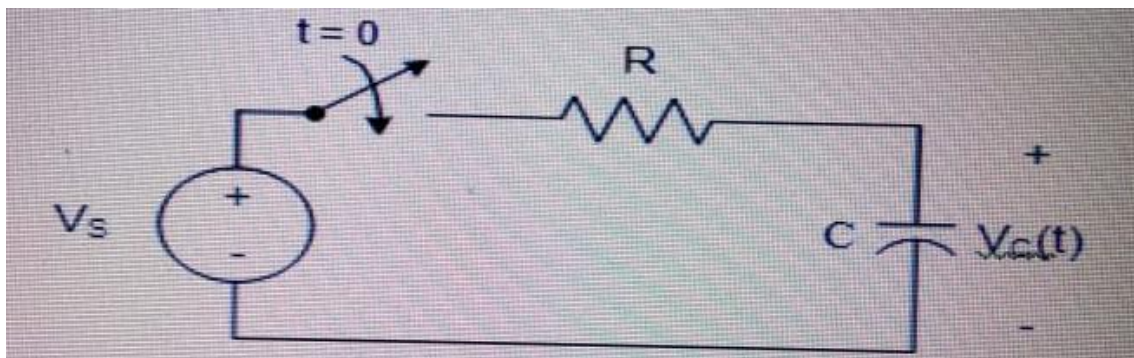
Nós designamos o valor do tempo que  $V / V_0$  leva para diminuir de unidade para zero, assumindo uma taxa de decaimento constante, pela letra grega  $\tau$  (tau). De tal modo:

$$\frac{1}{T} = 1, \text{então, } RC \quad T = RC$$

A proporção  $RC$  se mede em segundos, pois o expoente  $t/RC$  deve ser dimensionado. O valor de  $\tau$  é chamado de constante de tempo.

### Acionamento de Circuito RC:

Consideremos o seguinte circuito RC

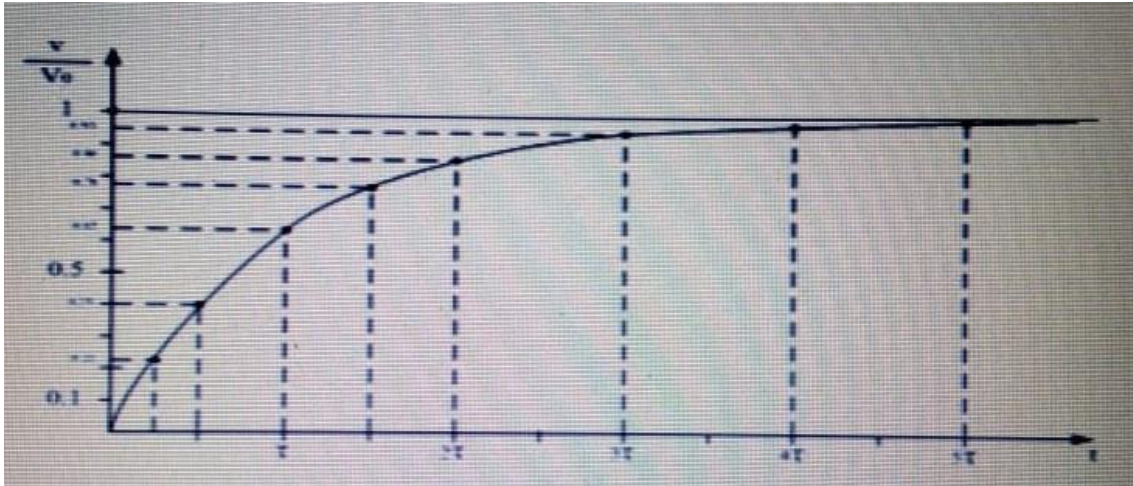


A tensão no capacitor é:

$$V(t) = V_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$V(t) = V_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

É esta equação é o que define a curva de carga do capacitor.



Curva de carga de um capacitor

### Resposta Natural e Forçada.

A resposta completa nos circuitos RC tem dois componentes: a resposta natural e a resposta forçada.

**Resposta completa = resposta natural + resposta forçada.**

A resposta natural é a solução geral da equação diferencial que representa o circuito de primeira ordem, quando o entrada é igual a zero. A resposta forçada é um solução particular da equação diferencial que representa o circuito.

### Bobinas e Circuitos RL

.

Introdução

No início de 1800, o cientista dinamarquês Oersted mostrou que sempre que a corrente flui através de um condutor, gera um campo magnético em torno desse condutor. Um pouco Depois, Ampere fez algumas medições cuidadosas que mostrou que o campo magnético estava linearmente relacionado com a corrente que o produziu.

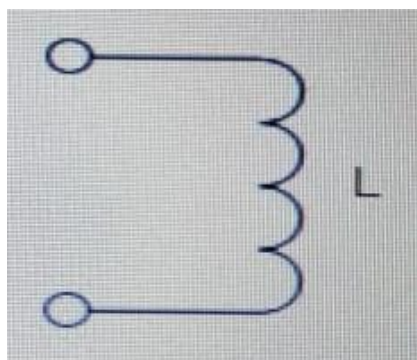
O próximo passo foi cerca de 20 anos depois, quando o Inglês Michael Faraday e o inventor americano Joseph Henry descobriu quase simultaneamente que um campo Uma variável magnética poderia induzir uma voltagem em um circuito próximo.

Faraday e Henry mostraram que a voltagem era proporcional ao taxa de mudança no tempo da corrente que produziu o campo magnético. Essa constante de proporcionalidade chamamos de indutância, é simbolizada por L e podemos dizer que:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

onde devemos reconhecer que tanto “v” quanto “i” são funções do tempo. Um fio pode ser enrolado para formar uma bobina ou enrolamento de várias voltas ou voltas.

O símbolo do circuito indutor é:



A unidade com a qual a indutância é medida é o henry (H), e a equação acima mostra que o Henry é apenas uma expressão mais curta de um Voltio-segundo por ampere.

Você poderia construir um indutor enrolando fisicamente um fio comprido em torno de uma bobina de cilindro.

Uma bobina é definida como um elemento terminal formado por um enrolamento de N voltas, que introduz indutância em um circuito elétrica.

Indutância é definida como a propriedade de um dispositivo elétrico que faz com que a variável corrente com o tempo produza uma tensão para através dele.

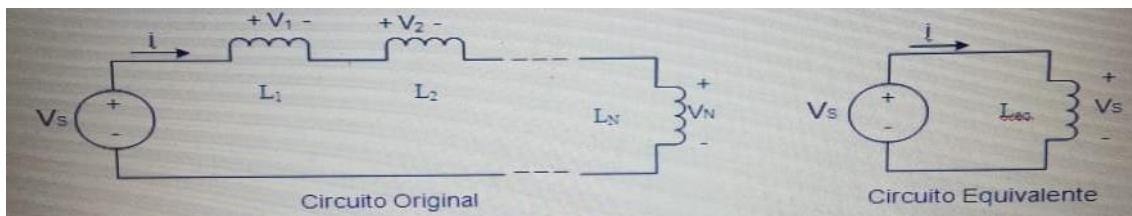
### Armazenamento de energia na bobina.

A energia armazenada no capacitor é:

$$W_{L(t)} = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

### Bobinas em série.

Considere a seguinte figura, na qual n bobinas aparecem conectado em série:

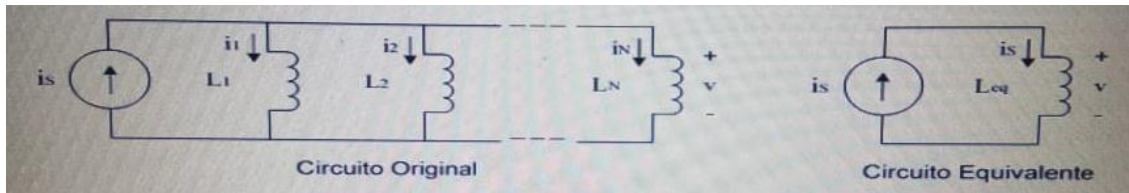


A indutância equivalente é:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

### Bobinas em paralelo.

Considere agora a figura a seguir, em que aparecem bobinas ligadas em paralelo:

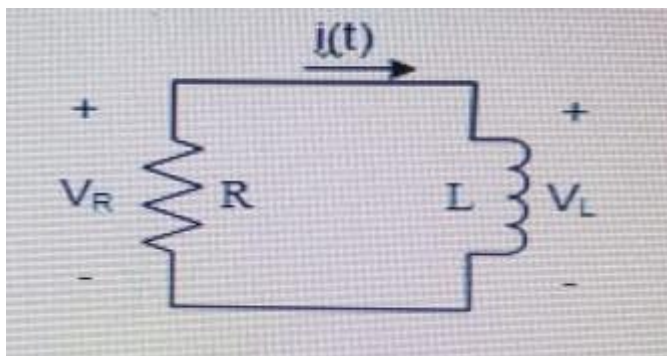


A indutância equivalente é:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}$$

### Circuito de descarga RL.

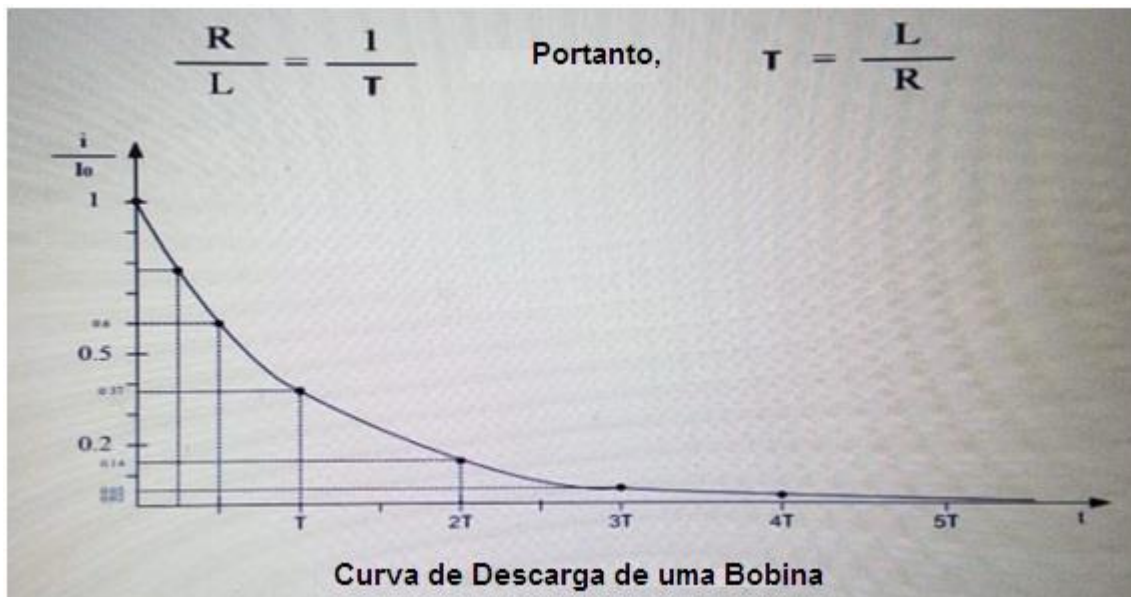
Considere o seguinte circuito de RL simples:



Vamos supor que existe uma energia inicial armazenada na bobina  $i(t=0) = I_0$ .  
A corrente na bobina é:

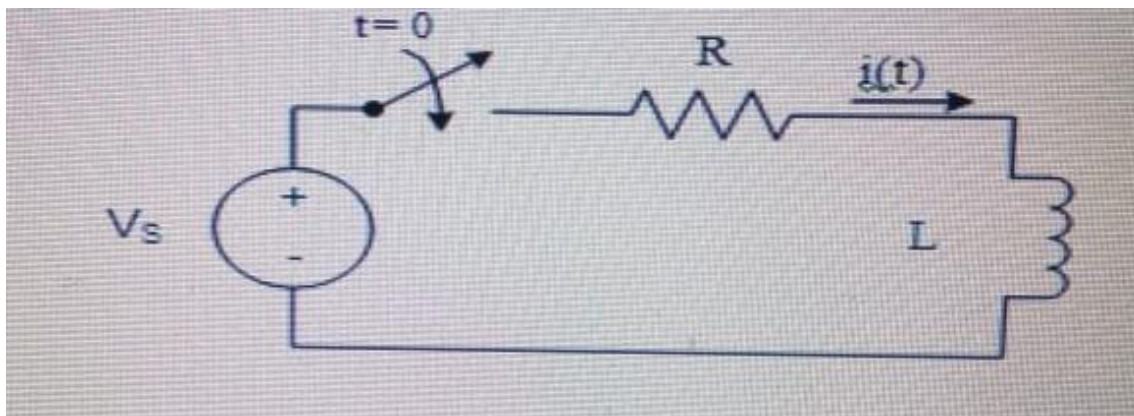
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Neste caso:



### Unidade de circuito RL:

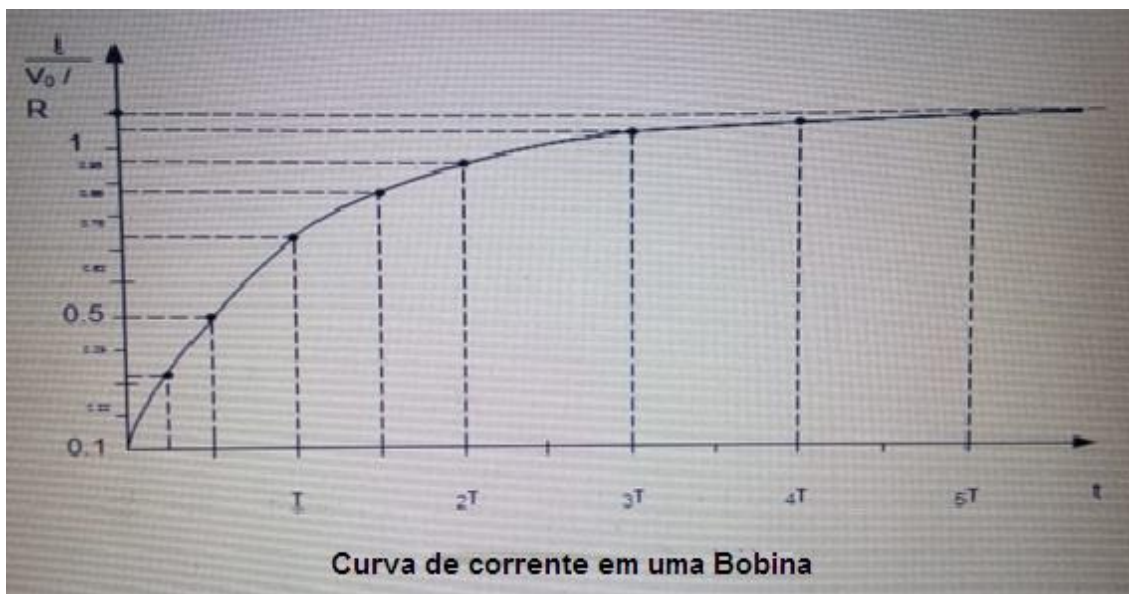
Se tivermos o seguinte circuito de RL:



A corrente na bobina é:

$$I_{(t)} = \frac{V_s}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

A curva de carga na bobina é mostrada na figura a seguir:



Resposta Natural e Forçada de circuitos RL.

A resposta completa nos circuitos de RL, assim como o Circuitos RC, tem dois componentes: a resposta natural e o resposta forçada.

**Resposta completa = resposta natural + resposta forçada.**

#### 4 ESTUDO SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS

**Circuitos Alternados com Números Complexos:**

Circuitos R-L-C conectado em série:

Porque a impedância ( $Z$ ) é um termo geral que pode se referir a uma resistência, uma reatância ou combinação destes. Quando duas ou mais impedâncias são conectadas em série, a impedância total equivalente é a soma das impedâncias conectadas em série.

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

É importante lembrar que cada impedância tem magnitude e ângulo, de modo que a soma das impedâncias deve ser feita em sua forma retangular de sua representação fasorial.

### Relações entre corrente e voltagem:

As regras para circuitos em série em corrente alternada são as mesmas que para circuitos CC, exceto o deslocamento de fase causado pela reatância deve ser levado em consideração, isto é, como mencionado anteriormente, é necessário trabalhar com fasores.

#### EXEMPLO :

- \* Calcule a impedância e a corrente.
- \* Calcule a queda de tensão em cada impedância parcial.
- \* Demonstre o Gráfico do diagrama vetorial de tensões e impedâncias.

#### a) CORRENTE.

A corrente em um circuito em série é a mesma em cada parte do circuito. Seu valor é um fator cujo ângulo depende dos fatores de tensão e impedância. Se você trabalha com o circuito total, você tem:

$$I = \frac{V}{Z_t}$$

#### b) IMPEDÂNCIA

A impedância total do circuito em série é a soma das impedâncias parciais conectadas ao circuito. Pode ser obtido eventualmente pela lei de Ohm.

$$Z_t = \frac{V}{I}$$

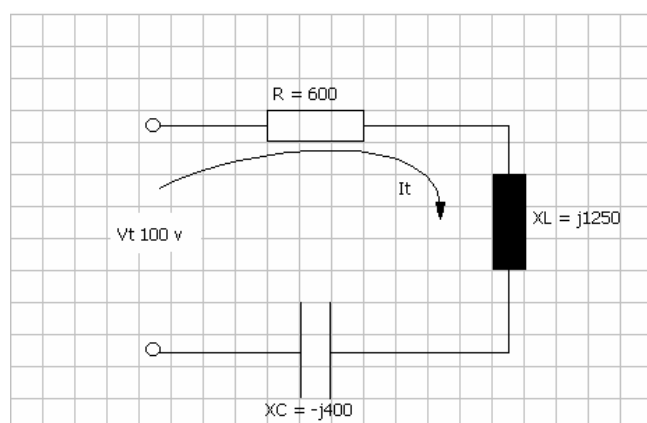
c) VOLTAGEM

A soma das quedas de tensão é igual à tensão aplicada.

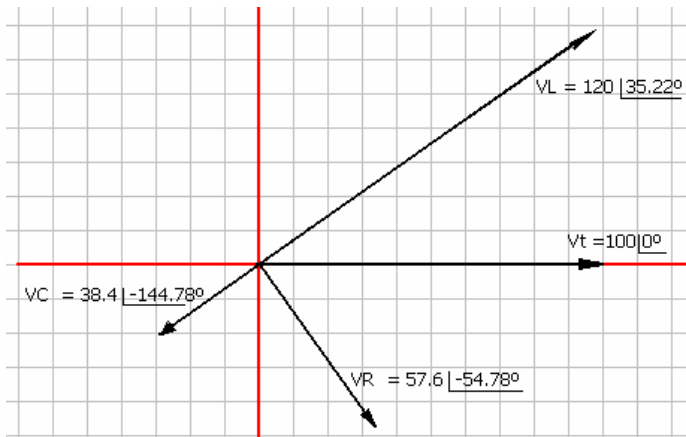
$$V_t = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Em termos da Lei de Ohm temos:

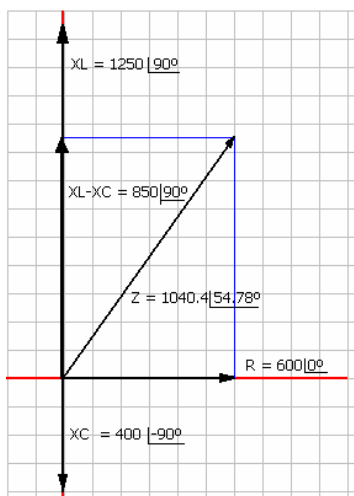
$$V_t = Z_t \times I$$



- DIAGRAMA VETORIAL DE TENSÕES.



- DIAGRAMA VETORIAL DE IMPEDÂNCIAS.



### SOLUÇÃO:

- CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA:

$$\begin{aligned} Z &= R + j(XL - XC) \\ Z &= 600 + j850 \text{ (Rec.)} \\ Z &= 1040,4 | 54,78^\circ \text{ (Pol.)} \end{aligned}$$

- CÁLCULO DA CORRENTE:

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{V}{Z} \\ I_t &= \frac{100 | 0^\circ}{1040,4 | 54,78^\circ} \\ I_t &= 0,096 | -54,78^\circ \end{aligned}$$

- CÁLCULO DE VOLTAGENS PARCIAIS:

$$\begin{aligned}VR &= I \times R \\VR &= 0,096 \angle -54,78^\circ \times 600 \angle 0^\circ \\VR &= 57,6 \angle -54,78^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}VL &= I \times XL \\VL &= 0,096 \angle -54,78^\circ \times 1250 \angle 90^\circ \\VL &= 120 \angle 35,22^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}VC &= I \times XC \\VC &= 0,096 \angle -54,78^\circ \times 400 \angle -90^\circ \\VC &= 38,4 \angle -144,78^\circ\end{aligned}$$

### CIRCUITOS R-L-C CONECTADO EM PARALELO:

- Apresentação:

Na conexão paralela para os circuitos de corrente alternada C.A. Existem algumas regras semelhantes àsquelas estabelecidas para os circuitos DC e que são basicamente:

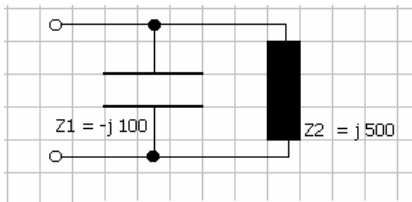
- Condições:

- a) A tensão é a mesma em todos os ramos do circuito.
- b) A corrente total é igual à soma (fasorial) das correntes em cada ramo do circuito.
- c) A impedância total equivalente não é sempre menor que a impedância de qualquer ramo do circuito.

Quando você tem duas impedâncias em paralelo, como mostrado na figura, a impedância equivalente pode ser calculada como:

EXEMPLO 1:

- \* Calcule a impedância equivalente para o circuito.
- \* Represente graficamente o diagrama do vetor da impedância.



## SOLUÇÃO:

### Explicação da questão 1

- Como nesse circuito temos um capacitor e um indutor em paralelo, precisamos encontrar a impedância total do circuito. A forma de calcular a impedância num circuito capacitivo-indutivo em paralelo acontece através da fórmula do produto pela soma das impedâncias envolvidas no circuito. Como se segue abaixo:

$$Z_t = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Onde:

$Z_t$  = Impedância Total

$Z_1$  = Impedância do Componente 1

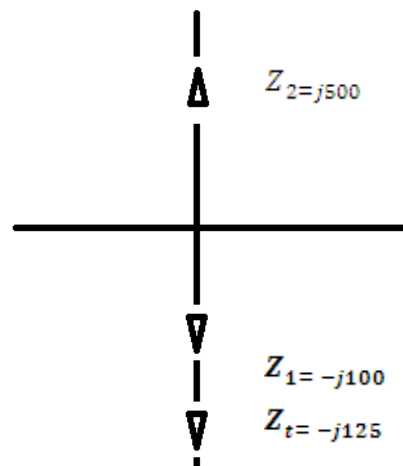
$Z_2$  = Impedância do Componente 2

Como na questão 1:  $Z_1 = -j100$  e o  $Z_2 = j500$

OBS:

- O termo “J” é o mesmo “i” dos números complexos, ou seja, a parte imaginária. Porém na eletricidade é comum usar o termo “J” para representar a parte imaginária do número complexo.
- Para encontrarmos a impedância total do circuito “1”, vamos aplicar a fórmula do produto pela soma. Seguindo os seguintes passos:
- Primeiro temos que transformar a expressão  $Z_1 = -j100$  e  $Z_2 = j500$  que está na forma retangular para a fórmula polar.
- $Z_1 = -j100$  (retangular)  $\rightarrow Z_1 = \frac{100}{-90}$  (polar)
- $Z_2 = j500$  (retangular)  $\rightarrow Z_2 = \frac{500}{90}$  (polar)
- Agora aplica-se a fórmula do produto pela soma:

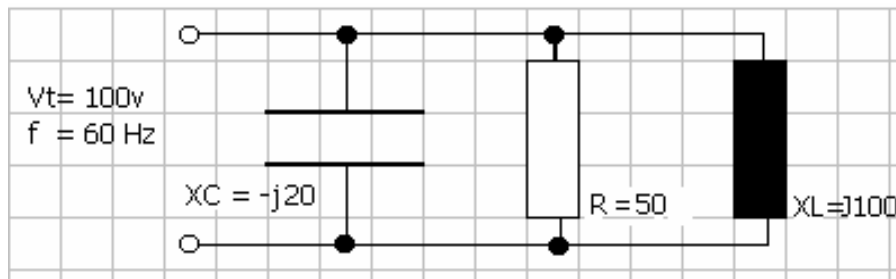
- $Z_t = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$
- $Z_t = \frac{100/-90}{-j100} \times \frac{500/90}{j500}$
- $Z_t = \frac{100 \times 500}{-90 \times 90}$   
 $Z_t = \frac{50.000}{-90^{\circ}}$
- É recomendável que o denominador da fórmula da soma da expressão em  $Z_1 + Z_2$ , se faça ainda na forma retangular e, só após o calculo, transformar novamente para a fórmula polar.
- $Z_t = \frac{100 \times 500}{400/90^{\circ}}$
- $Z_t = \frac{50.000/0^{\circ}}{400/90^{\circ}}$
- $Z_t = \frac{125}{-90^{\circ}}$  POLAR



- Logo, como podemos perceber a impedância total está no eixo negativo devido a resultante estar defasada em relação ao eixo positivo.

EXEMPLO 2 :

- \* Calcule a impedância.
- \* Calcule a corrente total.
- \* Calcule a corrente em cada ramo do circuito
- \* Diagrama vetorial gráfico de impedâncias e correntes



## SOLUÇÃO:

### Explicação da questão 2

- Nesta questão temos um circuito R – L – C (Resistivo – Indutivo - Capacitivo) em paralelo e, para encontrar a impedância total do circuito devemos proceder da mesma forma da questão 01. Porém, temos nesta questão 02, três componentes em paralelo o que acarretará na aplicação da fórmula do produto pela soma, em dois momentos, ou seja, será aplicado aos dois primeiros componentes e a resultante destes, faremos a operação como terceiro componente.

- Temos que:  $X_c = -j20$  ou  $Z_1 = -j20$  e  $R = 50$  ou  $E_2 = 50$ . Mas, vamos chamar de  $X_c$  e  $k$ , que são as letras de capacitor e resistor só para deixar mais claro a explicação.

1º Passo: Encontrar a impedância total entre  $x_c = -j20$  e  $r = 50$ .

- $Z_{t1} = \frac{x_c \times r}{x_c + r}$
- $Z_{t1} = \frac{20}{-j20 + 50} \times 50 / 0^\circ$   
 $Z_{t1} = \frac{20}{53,85 / -21,8^\circ}$
- **OBS:** Como  $x_c + r = -j20 + 50$  (retangular)
- $x_c + r = 50 - j20$

- $xc + r = 53,85/-21,8^\circ$  (Polar)
- Logo,  $Z_{t1} = \frac{53,85}{-68,2^\circ}$  Polar e
- $Z_{t1} = 6,89 - j17,24$  retangular

2º Passo: Agora a fórmula do produto pela soma entre  $Z_{t1}$  e  $Xl$ . Para encontrar a impedância total do circuito.

- $Z_t = \frac{Z_{t1} \times xl}{Z_{t1} + xl}$
- $Z_t = \frac{18,87}{-68,2^\circ} \times \frac{100}{90^\circ} / \frac{88}{85,24^\circ}$
- $Z_t = \frac{22,87}{-68,44}$  (polar)
- *OBS: Como procedemos a soma na fórmula retangular, ficaremos assim :*
- $Z_{t+xl} = 6,89 - j17,24 + j100$   
 $= 6,89 + j82,76$  retangular
- $Z_t + xl = \frac{88}{85,24^\circ}$  Polar

- Cálculo das correntes parciais:

\* Seguindo a Lei de Ohm temos que:

$$E = I \cdot r$$

Onde:

- $E =$  Tensão ou  $V =$  Tensão
- $I =$  Corrente
- $R =$  resistência

- Então:

$$Il = \frac{V}{Xl}$$

$$Il = \frac{100/0^\circ}{100/90^\circ}$$

$$Il = \frac{1}{90^\circ} \text{ Polar}$$

Ou

$$Il = 0 - j1 \text{ retangular}$$

$$I_r = \frac{v}{r}$$

$$I_r = \frac{100/0^\circ}{50/0^\circ}$$

$$I_r = \frac{2}{0^\circ} \text{ polar}$$

Ou

$$I_r = 2 \text{ retangular}$$

$$I_c = \frac{v}{X_c}$$

$$I_c = \frac{\frac{100}{0^\circ}}{\frac{20}{-90^\circ}} \text{ polar}$$

Ou

$$I_c = 0 + j5 \text{ retangular}$$

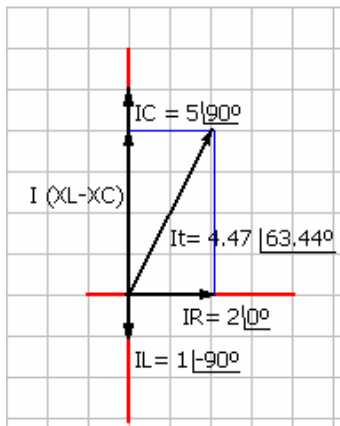
- Cálculo da corrente total:

- A corrente total, será a soma das correntes em cada componente, ou seja, a corrente total das correntes de todos os componentes do circuito.

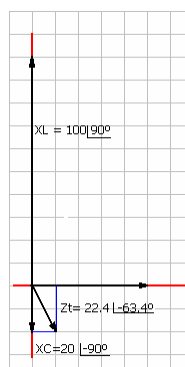
Então temos:

- $I_t = I_l + I_r + I_c$
- $I_t = (0 - j1) + 2 + (0 + j5)$
- $I_t = 2 + j4 \text{ retangular}$

- DIAGRAMA VETORIAL DAS CORRENTES:



- DIAGRAMA VETORIAL DAS IMPEDÂNCIAS:



## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo realizado envolvendo os números complexos, com ênfase nas séries secundárias, é possível visualizar-se que muito ainda tem que se trabalhar e um longo caminho a percorrer no ensino da Matemática. Dando sequência aqui nos cursos profissionalizantes ou regulares ao qual, se faz extrema necessidade de contextualização, para questões problemas, e com isso, direcionar para a motivação aos estudantes. Notadamente, acredita-se que um aprendizado com base em situações do cotidiano de uma determinada profissão, certamente auxiliará na compreensão das situações matemáticas onde são envolvidos como elementos motivadores e de criatividade aos alunos, para aplicarem os ensinamentos dos algorítmicos vistos em classe novas situações.

Trazemos aqui outro ponto extremamente importante a ser mencionado que é o fato de pouco se trabalhar as questões trigonométricas relacionadas ao conjunto dos números complexos, principalmente nas relações onde envolvam gráficos, ou mesmo, quando são feitas análises com os dois conteúdos.

Um verdadeira gama de aplicações possam e devem ser exploradas relacionando os números complexos, principalmente no campo da elétrica, eletrônica, mecânica clássica até porque são números que são apresentados em forma bidimensional. Buscou-se mostrar aqui neste estudo, as infinitas possibilidades de aplicações dos números complexos; não muito explorada pelos professores e, se em alguns casos, também não cobrado pela própria instituição. Queremos ultrapassar as barreiras de se decorar um emaranhado de fórmulas e métodos para a aplicação direta em questões problemas e, sim, entender os conceitos e as possibilidades de aplicações relacionadas com o dia – a - dia do aluno.

Os números complexos são vistos neste panorama educacional debruçado sobre as escolas secundaristas, com isso, pode-se sem medo de errar, sugerir possíveis mudanças de atitude por parte das instituições, no sentido de estimular ações que venham a motivar um maior interesse dos alunos pelo aprendizado dos números complexos. Entre tais mudanças, podemos aqui sugerir algumas como: a) criação de um currículo integrado, com a participação dos docentes de todas as disciplinas buscando a interdisciplinaridade; b) projetos que se balizem em práticas interdisciplinares, com o envolvimento dos alunos, dos professores de Matemática, Física e Eletrônica; c) motivar e estimular a valorização de atividades interativas entre os alunos, no aprendizado da Matemática; d) aulas expositivas, a apresentação das temáticas dos números complexos através de problemas do dia – a - dia a serem resolvidos pelos alunos; e) criação e reformulação de apostilas e outros instrumentos/pedagógicos bibliográficos que possam complementar o conteúdo visto em sala de aula, entre outros.

Tendo em vista, as colocações acima sugeridas, onde poderão ser elencadas outras que possam surgir da participação dos agentes que foram citados no referido trabalho, acredita-se que se vai atingir uma considerável melhoria no ensino/aprendizagem dos números complexos, ora estas propostas veem ao encontro das

motivações de alunos e professores dos cursos regulares e profissionalizantes, como em vários momentos explicitados no decorrer deste estudo.

E, finalmente, o que de fato quis ser demonstrado aqui, é uma nova postura de se enxergar a matemática no ensino regular ou no ensino profissionalizante. Logo, tudo o que se colocou neste estudo, pode ser direcionado a outros temas/conteúdos em outras áreas da aprendizagem.

## 6 - REFERÊNCIAS:

*Álgebra moderna .EdiçõesSchaumm*, 3º - v. 19, n. 18. Edição, (2015).

Álgebra de AurelioBaldor- *Editora Cultural* Centroamericana,v. 222, n. 23, (2005).

ANDERE, M. A.; ARAUJO, A. M. P. *Aspectos da formação do professor de ensino superior de ciências contábeis: uma análise dos programas de pós-graduação*. Revista Contabilidade & Finanças, São Paulo, v. 19, n. 18, p. 91 – 102, set./dez. 2008. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/rcf/v19n48/v19n48a08.pdf>>. Acesso em: 30 out. 2018.

ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. *Números complexos: Uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio*. Dissertação disponível em< [www.ppgecnm.cet.ufrn.br](http://www.ppgecnm.cet.ufrn.br)> acessado em 03/2012.

César Trejo. Op.Cit. Moisés Lázaro. *Os números complexos* .EdicionesMoshera, Lima(2011).

Derryck. Op.Cit. Zamansky. **Introdução à álgebra e análise moderna Análise matemática**. Volume I de Haaser, LaSallee Sullivan (1977) Trillas,p.483

Coincide plenamente com o que é afirmado em «*Funções variáveis variáveis Cálculo operacional Teoria da estabilidade* »por Krasnov / Kiselev e Makárenko. Mir, Moscou. p. 9(1983)

JV Uspenski (professor da Stanford University): *Teoria das equações* ,Limusa grupo Noriega editores. México DF. (1992) ISBN 968-18-2335-4.

M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner: *Trigonometria e Números Complexos*, IMPA-VITAE, Brasil, 1992

ROSA, Mário Servelli. *Números complexos: uma abordagem histórica para aquisição de conceitos*. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.

Santos, *Aplicações Reais dos Números Complexo no dia-a-dia* – Editora Scipione (2008). Silva, *Aspectos Temporais para a Sala de Aula Atual* - Editora Moderna, (2005).

Trejo, César A. *Funções de variáveis complexas* (1974)  
p.NVAlexândrova: *Dicionário histórico de notações, termos e conceitos de matemática*. Editorial USSR Moscow (2015)

William R. Derrick: *Variável complexa com aplicativos*. Grupo Editorial Iberoamérica, impresso no México ISBN 968-7270-35-7