



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

**Edivan Lopes Teixeira**

Aplicações das Funções Exponenciais

João Pessoa- PB

2017

**Edivan Lopes Teixeira**

## **Aplicações das Funções Exponenciais**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

**Orientadora:** Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

João Pessoa

2017

Catálogo na publicação  
Universidade Federal da Paraíba  
Seção de Catalogação da Biblioteca Setorial do CCENCCEN/UFPB CDU 51:37 (043.2)

T266a Teixeira, Edivan Lopes.

Aplicações das Funções Exponenciais / Edivan Lopes

Teixeira. – João Pessoa, 2017.

34 p. : il. color.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade  
Federal da Paraíba.

Universidade Aberta do Brasil – EaD.

Orientadora: Prof. Dr. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.

1. Matemática - Ensino. 2. Funções exponenciais - Aplicações. 3.  
Didática. I. Título.

CCEN/UFPB

CDU 51:37 (043.2)

## Aplicações das Funções Exponenciais

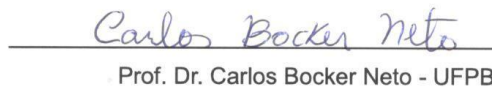
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção de título de licenciado em Matemática.

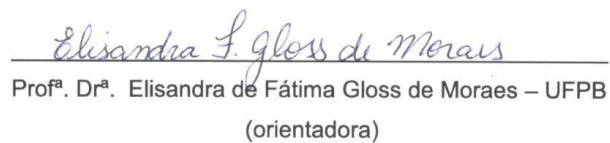
**Orientadora:** Prof<sup>a</sup>. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Aprovado em: 03/08/2017.

### BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

  
Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB

  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB  
(orientadora)

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais que tanto sonharam com essa conquista, aos meus filhos e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram na minha jornada estudantil, a todas as pessoas que acreditaram na minha capacidade, como também a todos os professores de matemática da rede pública que tanto rala para poder passar os saberes matemáticos aos seus discentes.

## AGRADECIMENTOS

A **Deus**, por me conceder essa e tantas outras vitórias e ter me iluminado nessa jornada tão árdua.

A **minha família** em especial, por ter contribuído ao longo de minha vida me incentivando e dando forças sempre nunca mim deixando desistir.

Aos **professores** e tutores que ensinaram e transmitiram um pouco de suas experiências.

A **minha orientadora** que fez suas considerações no decorrer deste trabalho monográfico, contribuindo com indicações.

Aqui ficam os meus sinceros agradecimentos a todos vocês, quero dizer que sem vocês eu não teria chegado até aqui. Muito obrigado.

“E não se diga que um instituto terrestre de ensino usual seja mais importante. A matemática, por exemplo, é um instituto da ciência, mas sem a educação do caráter é passível de transformar-se em delírio de cálculos para a destruição.”

CHICO XAVIER

## RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com o propósito de garantir um conhecimento aprofundado sobre o estudo de funções e de suas aplicações em algumas áreas de conhecimento. Foram apresentados alguns exemplos, imagens, gráficos, figuras e tabelas, para que possamos perceber a presença dessa temática em nosso cotidiano, o que deve ser algo atrativo ao estudo das exponenciais. A pesquisa se deu em torno de livros de matemática dos ensinos fundamental e médio como também na internet e em livros de matemática da UFPB Virtual, onde encontramos diversos exemplos e uma metodologia plausível para o bom aprendizado nesse contexto. Foram introduzidos vários tópicos de fácil acesso para pesquisa, onde comprovaremos a diversidade de áreas abrangidas pelas exponenciais, sendo suas aplicações de fundamental importância a cada área de conhecimento.

Palavras-chave: Funções Exponenciais; Ensino de Matemática; Aplicações.

## ABSTRACT

This work was developed with the purpose of guaranteeing an in - depth knowledge about the study of functions and their applications in some areas of knowledge. Some examples, images, graphs, figures and tables were presented, so that we can perceive the presence of this theme in our daily life, which should be something attractive to the study of exponentials. The research took place around mathematics books of elementary and secondary as well as in the internet and mathematical books of the UFPB Virtual, where we find several examples and a plausible methodology for good learning in this context. Several topics were easily accessible for research, where we will prove the diversity of areas covered by exponentials, and their applications are of fundamental importance in each area of knowledge.

Keywords: Exponential Functions; Mathematics Teaching; Applications.

**LISTA DE FIGURAS**

<b>Figura 1</b> - Diagrama da imagem $f$ de uma função -----	177
<b>Figura 2</b> - Diagrama de representação de uma função -----	188
<b>Figura 3</b> - Gráfico da função $Fx = x^2$ com os valores entre -2 e 2 -----	199
<b>Figura 4</b> - Gráfico da função $y = 1,8x$ -----	255
<b>Figura 5</b> - Representações gráficas de funções exponenciais-----	255
<b>Figura 6</b> - Gráfico de uma função exponencial crescente -----	266
<b>Figura 7</b> - Gráfico de uma função exponencial decrescente-----	277
<b>Figura 8</b> - Gráfico do crescimento de bactérias -----	30
<b>Figura 9</b> - Gráfico de comparação entre juros simples e compostos-----	32
<b>Figura 10</b> - Gráfico da curva de decaimento do carbono 14-----	33
<b>Figura 11</b> - Gráfico da importância das revisões na fixação de memórias-----	355

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1	Justificativa .....	13
1.2	Metodologia de Pesquisa.....	14
<b>2</b>	<b>MEMORIAL ACADÊMICO .....</b>	<b>15</b>
2.1	Histórico da Formação Escolar.....	15
<b>3</b>	<b>DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL .....</b>	<b>17</b>
3.1	Funções.....	17
3.2	História e Definição da Função Exponencial .....	20
3.3	Gráficos das Funções Exponenciais.....	24
3.4	Propriedades das Funções Exponenciais.....	26
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS .....</b>	<b>28</b>
4.1	Aplicação em Biologia.....	29
4.2	Aplicação em Matemática Financeira .....	30
4.3	Aplicações das Exponenciais em Química .....	32
4.4	Aplicações na Psicologia .....	34
	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....</b>	<b>36</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>37</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o objetivo de propor um conhecimento aprofundado nas aplicações das funções exponenciais nas diversas áreas de conhecimento, visto que é de grande utilidade e está sempre presente em nosso cotidiano.

O tema escolhido deu-se por considerar que a abordagem de conteúdos de funções exponenciais no Ensino Médio pode levar o aluno a entender melhor o mundo em que vive, tornando-o mais crítico ao assistir um noticiário, ao ingressar no mercado de trabalho, ao consumir, ao cobrar seus direitos e analisar seus deveres.

Esta pesquisa surgiu da necessidade de explorar e trabalhar o conceito de aplicações das funções exponenciais de forma prática e dinâmica por parte do professor em sala de aula, onde através de exemplos, iremos buscar auxiliar o aluno a desenvolver uma conexão e compreensão dos conceitos elementares e introdutórios do estudo de funções exponenciais.

Com esta proposta de ensino, buscamos responder e atender às necessidades decorrentes daqueles que estudam este conceito matemático, principalmente alunos que estão cursando o nível médio, cuja grande maioria, por não ter sido apresentada a este conteúdo de forma construtiva e aplicável, acaba por negligenciá-lo, acreditando que este possui pouca ou nenhuma aplicabilidade prática, considerando-o então dispensável e sem importância.

Pretende-se compreender com esse trabalho a seguinte problematização: De que maneira, alunos do ensino médio, estão trabalhando funções exponenciais nas diversas áreas de conhecimentos para que se observe a importância das suas aplicações no cotidiano?

Com base na problematização, estabelecemos o seguinte Objetivo Geral:

O objetivo deste trabalho é o de apresentar uma proposta de ensino totalmente apoiada nas aplicações das funções exponenciais, com definições e conceitos aprendíveis, tendo um acervo de demonstrações em figuras, gráficos e tabelas, que poderão ser utilizadas por professores de matemática como ferramenta de auxílio ou até mesmo como referencial na criação de estratégias

que possibilitem ao aluno uma compreensão significativa do conceito matemático de função.

Para compreendermos melhor o objetivo geral optamos por três Objetivos Específicos:

- Proporcionar uma aprendizagem significativa em torno das exponenciais, buscando por meio de conceitos e definições um bom entendimento do contexto;
- Identificar a relação entre funções exponenciais e potências como dependência na utilização de variáveis;
- Utilizar figuras, tabelas, diagramas, gráficos, dando exemplos e conectando-os ao cotidiano.

Este trabalho foi realizado mediante pesquisas em artigos buscados na rede mundial de computadores (internet) e em livros de importantes autores, como José Ruy Giovanni Júnior, José Roberto Bonjorno, como também buscamos referência para os conceitos mais formais, nos livros dos autores, Elon Lages e num grande acervo da Universidade Federal da Paraíba, como Hélio Pires, Antônio da Silva Sales e José Gomes de Assis, citados nas referências bibliográficas, deste trabalho.

O tipo de pesquisa realizada foi a descritiva, pois se realizou o estudo, a análise, o registro e a interpretação dos fatos do mundo físico sem a interferência do pesquisador.

Para apoiar nosso projeto procuramos trabalhar posicionando-nos segunda a visão sobre concepção de desenvolvimento humano do ponto de vista interacionista, representada por Vygotsky, na concepção de aprendizagem cognitivista sobre aprendizagem significativa de Ausubel, como também na de aprendizagem por descoberta do psicólogo Jerome Bruner.

## **1.1 Justificativa**

Esta pesquisa surgiu da necessidade de explorar e trabalhar o conceito de aplicações das funções exponenciais de forma prática e dinâmica por parte do professor em sala de aula, onde através de exemplos, iremos buscar auxiliar o aluno a desenvolver uma conexão e compreensão dos conceitos elementares e introdutórios do estudo de funções exponenciais.

## 1.2 Metodologia de Pesquisa

A essência desta metodologia é, portanto, buscar associar cada um dos conceitos de função ao material estudado em questão que são as aplicações das funções exponenciais onde o aluno desenvolverá uma conectividade de cada um destes conceitos matemáticos a determinado exemplo citado.

## **2 MEMORIAL ACADÊMICO**

### **2.1 Histórico da Formação Escolar**

Minha vida estudantil teve início nos anos 80, numa época em que eram grandes as dificuldades na vida do sertanejo, as condições financeiras eram bastante precárias e meus pais trabalhavam duros para alimentar uma família de 12 filhos. Isso me obrigava a sempre que chegava da escola ir ajudá-los no trabalho braçal, e assim nem tive tempo de curtir minha infância.

Ao concluir o ensino primário, hoje (Ensino Fundamental I), tive que estudar na cidade vizinha Brejo do Cruz, já que minha cidade não oferecia o Ensino Fundamental II. Era transportado em carroceria de caminhão sem nenhum conforto, em estrada de barro percorrendo mais de 60 quilômetros, debaixo de sol e chuva, e essa luta foi até concluir o Ensino Médio na Escola Estadual Professor José Olímpio Maia. Saía da minha cidade muitas vezes às 5 horas da tarde e chegava em casa na madrugada do dia seguinte, sem levar dinheiro nem para lanche. Muitas vezes o carro quebrava e eu tinha que voltar a pé.

Ao vencer essa tão árdua jornada, passei muito tempo sem estudar, pois só tinha universidade em cidades muito distantes e eu precisava trabalhar para dar o sustento a minha família. Só no ano de 2010 prestei vestibular na Universidade Federal da Paraíba Virtual e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática. Mesmo com pouco tempo para estudar, consegui vencer as dificuldades e estou concretizando um sonho que é também um orgulho para minha família.

Escolhi fazer esse curso porque sou um grande simpatizante da disciplina, adoro cálculos e até mesmo, pela experiência que tenho como professor, visto que desde 1998 que presto serviço à Secretaria de Estado da Educação lecionando como professor de matemática nos ensinos Fundamental e Médio. Por isso, vejo essa conquista como de suma importância para minha vida profissional.

Conseguir um certificado de conclusão de curso superior é sem dúvida a maior realização em minha vida, pois de todos os meus sonhos como: comprar um carro, ser pai, arrumar um emprego, e outros, sempre tive como prioridade colocar no dedo um anel de formatura.

### 3 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo estudaremos as funções exponenciais, suas principais propriedades e seus gráficos. Veremos que as funções exponenciais podem ser crescentes ou decrescentes, dependendo do valor da base. As funções exponenciais devem ser determinadas, usando, se necessárias, as regras envolvendo potenciação. Para começar o trabalho traremos a história, a definição e alguns exemplos de função.

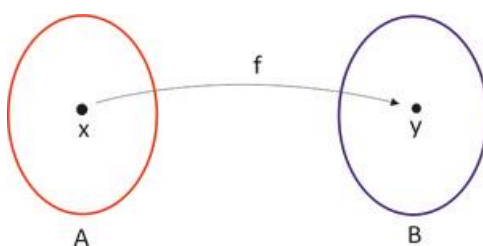
#### 3.1 Funções

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  não vazios, uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é uma relação que associa a cada elemento  $x \in A$ , um único elemento  $y \in B$ . Denotamos

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = f(x).$$

Assim, uma função liga um elemento do domínio (conjunto  $A$  de valores de entrada) com um elemento do segundo conjunto, o contradomínio (conjunto  $B$  de valores de saída) de tal forma que a cada elemento do domínio está associado exatamente um, e somente um elemento do contradomínio. O conjunto dos elementos do contradomínio que são relacionados pela  $f$  a algum  $x$  do domínio é o conjunto imagem, denotado por  $\text{Im}(f)$ .



**Figura 1** - Diagrama da imagem  $f$  de uma função

**Fonte:** <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/funcoes/conceito-de-funcoes.html>

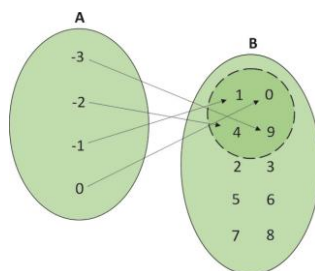
Percebemos ainda nessa definição que a função exige uma relação de dependência de uma variável em relação à outra.

Considerando a relação entre uma pessoa e seu nome, por exemplo, veremos que esta relação apresenta duas características em destaque:

- I. Toda pessoa tem um nome;
- II. Cada pessoa possui um único nome.

Podemos comprovar então a essência do conceito matemático de função, como mecanismo formal de expressar certos tipos de associações, pois ao designarmos por A o conjunto de pessoas e por B o conjunto de nomes, teremos que “A cada elemento de A, está associado um único elemento de B”.

Uma forma de representar uma função é usando diagramas. Vejamos um exemplo através desta representação onde podemos observar a definição descrita:



**Figura 2** - Diagrama de representação de uma função

**Fonte:** <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/funcoes/conceito-de-funcoes.html>

Cada elemento do conjunto A (domínio da função) está relacionado a um, e somente um, elemento do conjunto B (contradomínio da função). Todos os elementos do conjunto B que receberam flechas de A, são imagens dos elementos de A, ou seja, a imagem de -3 é 9, imagem de -2 é 4, imagem de -1 é 1 e imagem de 0 é 0. Podemos perceber, nesse caso, que a imagem de cada elemento do conjunto A equivale ao quadrado do seu valor. Logo, podemos concluir que a lei de formação dessa função pode ser definida por  $f(x) = x^2$ .

$$Dom(f) = \{-3, -2, -1, 0\}$$

$$CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

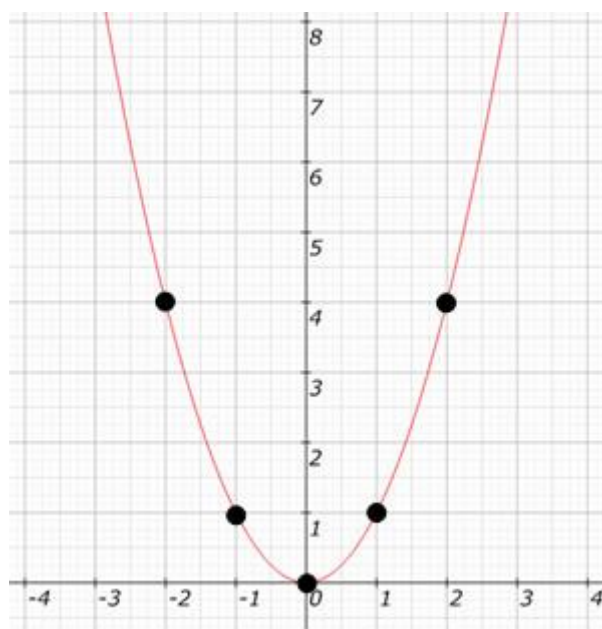
$$Im(f) = \{0, 1, 4, 9\}$$

Outra forma muito comum de se representar uma função é através de seu gráfico. Dados dois conjuntos não vazios A e B contidos nos números reais, o gráfico de uma função  $f: A \rightarrow B$  é um subconjunto do plano cartesiano dado pelos pontos  $(x, y)$  nos quais se tem  $x \in A$ , domínio da função, e  $y = f(x)$ .

Veremos a seguir a construção do gráfico de uma função atribuindo valores para  $x$  demonstrados na tabela. A função é dada por  $y = f(x) = x^2$ .

$x$	$y = x^2$	$(x, y)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$

**Tabela 01**



**Figura 3** - Gráfico da função  $F(x) = x^2$  com os valores entre -2 e 2

Vamos estabelecer um exemplo motivacional para o estudo de funções, utilizando as grandezas espaço e tempo. O exemplo nos dará a conclusão de que o espaço percorrido pode ser obtido como função do tempo gasto por um atleta.

**Exemplo 1:** Numa esteira ergométrica, um atleta treina com uma velocidade constante para uma maratona. Seu treinador observa, a cada 10 minutos, o espaço percorrido e anota em uma tabela seu desempenho. Observe:

Instante (minutos)	Distância (m)
10	1 500
20	3 000
30	4 500
40	6 000
50	7 500
60	9 000

**Tabela 02**

**Fonte:** <http://educacao.globo.com/matematica/assunto/funcoes/conceito-de-funcoes.html>

A cada instante ( $x$ ), em minutos, corresponde uma única distância ( $y$ ), em metros. Dizemos então que a distância percorrida pelo atleta encontra-se em função do instante de tempo gasto em seu treinamento. Como a cada 10 minutos são percorridos 1500 metros; a cada minuto, 150 metros são percorridos, assim a fórmula que relaciona espaço e tempo pode ser descrita por  $y = 150x$ .

### 3.2 História e Definição da Função Exponencial

Conta à lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo a seguinte condição: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a suposta conta, pois apenas na última casa o total de moedas era de  $2^{63}$ , o que corresponde a aproximadamente,

$922330000000000000 = 922331 \times 10^{18}$ . Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido!

A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais, especialmente da função  $y = 2^x$ .

As funções exponenciais são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.

Acreditamos que todo conhecimento criado pela humanidade surgiu da necessidade de se encontrar a resposta para um problema real. Com o conhecimento matemático não poderia ser diferente. Os diversos teoremas, fórmulas, axiomas etc., surgiram para solucionar e generalizar problemas que aparecem em situações concretas, permitindo criar modelos teóricos que possam resolver esses problemas e auxiliar na tomada de certas decisões de forma coerente.

Segundo Bassanezi [1], p. 18, temos:

O objetivo fundamental do “uso” da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (Bassanezi [1], p. 18).

Voltando aos nossos propósitos, muitos fenômenos naturais e sociais como o crescimento populacional, a meia-vida de uma substância, a medida da pressão atmosférica, o cálculo do montante em um sistema de juros compostos e o resfriamento de um corpo são exemplos de assuntos que trazem problemas modelados por funções exponenciais. Esse fato torna ainda mais relevante o estudo dessas funções no Ensino Médio e ressalta seu papel na interdisciplinaridade da Matemática com outras matérias.

Dado o número real  $a$  positivo e diferente de 1, a função exponencial  $f: R \rightarrow (0, \infty)$ , de base  $a$ , é definida da seguinte forma:

$$f(x) = a^x, \text{ ou seja, } y = a^x.$$

**Exemplo 2:** Considerando a Função Exponencial  $f(x) = 49^x$ , determine o valor de  $f(1,5)$ .

Resolução: Temos

$$f(1,5) = 49^{1,5} = 49^{\frac{3}{2}} = (49^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{49}^3 = 7^3 = 243.$$

Concluimos assim que a imagem da função  $f(x) = 49^x$ , para  $x = 1,5$ , corresponde a 343.

Vamos tentar explicar melhor a definição de função exponencial. O que se entende, por exemplo, por  $2^\pi$ ?

Observe que, para qualquer base  $a > 0$ , com  $a \neq 1$ , quando  $x=0$  tem-se:

$$f(0) = a^0 = 1.$$

Quando  $x$  é um número natural, digamos  $x = n$ , usando as regras de potenciação obtemos:

$$f(x) = f(n) = a^n = a \cdot a \dots a - n \text{ vezes.}$$

Quando  $x$  é um número inteiro negativo, digamos  $x = -n$ , temos:

$$f(x) = f(-n) = a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Para os números racionais, digamos  $x = \frac{p}{q}$ , temos:

$$f(x) = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Se  $x$  é um número real qualquer:

Observamos inicialmente que, se  $f$  e  $g$  são duas funções definidas e contínuas em  $R$ , tais que  $f(r) = g(r)$  para todo racional  $r$ , então  $f(x) = g(x)$  para todo real  $x$ , isto é, se duas funções contínuas em  $R$  coincidem nos racionais então elas são iguais.

Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , um real qualquer. Se existirem funções definidas e contínuas e tais que para todo racional  $r$ :

$$f(r) = a^r \text{ e } g(r) = a^r$$

Então,  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  real. Isso significa que pode existir no máximo uma função definida e contínua em  $R$  e que coincide com  $a^r$  em todo racional  $r$ . Vejamos o teorema de tal função no teorema a seguir:

**Teorema.** Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , um real qualquer. Existe uma única função definida e contínua em  $R$ , tal que  $f(r) = a^r$  para todo racional  $r$ .

Damos agora a seguinte definição:

**Definição.** Sejam  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , e  $f$  como no teorema anterior. Definimos a potência de base  $a$  e expoente real  $x$  por:

$$a^x = f(x)$$

A função  $f$ , definida em  $R$  e dada por  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , denomina-se função exponencial de base  $a$ .

É de extrema importância a ideia de limites para a definição da exponencial em  $R$ . Vejamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Neste caso,  $e$  representa a base dos logaritmos naturais ou neperianos. Trata-se do número irracional  $e$  cujo valor aproximado é 2,7182818.

Veja a tabela com valores de  $x$  e de  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

x	1	2	3	10	100	1000	10000	100000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,3703	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,7182

**Tabela 03**

Notamos que à medida que  $x \rightarrow \infty$ ,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$ .

De forma análoga, efetuando a substituição  $\frac{1}{x} = y$  e  $x = \frac{1}{y}$ , temos:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Uma função exponencial é do tipo  $f(x) = a^x$ , sendo que a variável independente  $x$  está no expoente e a base  $a$  sempre será um número real, sendo:

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Aí vêm alguns questionamentos: Por que  $a \neq 1$ ? Por que  $a > 0$ ? Se por acaso  $a$  fosse igual a 1, teríamos uma função constante, e não exponencial, já que se tratando de potenciação o número 1 elevado a qualquer número real  $x$  sempre resultará em 1. Por exemplo,  $f(x) = 1^x$ , que seria o mesmo que  $f(x) = 1$ , ou seja, uma função constante. E por que  $a$  deve ser maior que 0? Na potenciação, aprendemos também que  $0^0$  é indeterminado e, portanto,  $f(x) = 0^x$  seria um valor indeterminado quando  $x = 0$ . Também não existem raízes reais de um radicando negativo e índice par, portanto, em caso de  $a < 0$ , como em  $a = -7$ , por exemplo, e  $x = \frac{1}{2}$  o valor de  $f(x)$  não será um número real. Vamos conferir:

$$f(x) = a^x, \text{ nos fornece } f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-7}, \text{ que não pertence aos números reais.}$$

### 3.3 Gráficos das Funções Exponenciais

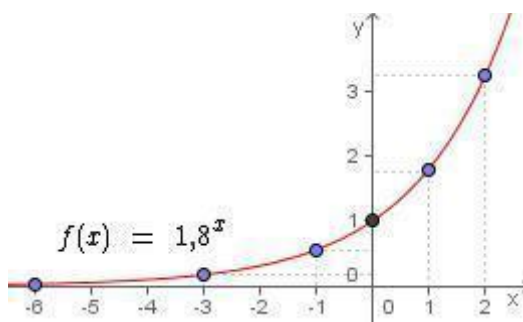
Para que possamos representar as funções exponenciais por meio de um gráfico, podemos adotar a mesma forma de como é feito com a função quadrática: definimos alguns valores para  $x$ , montamos uma tabela com esses valores para,  $y = f(x)$  e localizamos os pontos no plano cartesiano para, finalmente, traçar o gráfico.

Por exemplo: Para a função  $f(x) = 1,8^x$ , escolhendo os valores para a variável  $x$  como: -6, -3, -1, 0, 1 e 2, podemos montar a tabela como demonstrado abaixo:

$x$	$y = 1,8^x$
-6	$y = 1,8^{-6} = 0,03$
-3	$y = 1,8^{-3} = 0,17$
-1	$y = 1,8^{-1} = 0,56$
0	$y = 1,8^0 = 1$
1	$y = 1,8^1 = 1,8$
2	$y = 1,8^2 = 3,24$

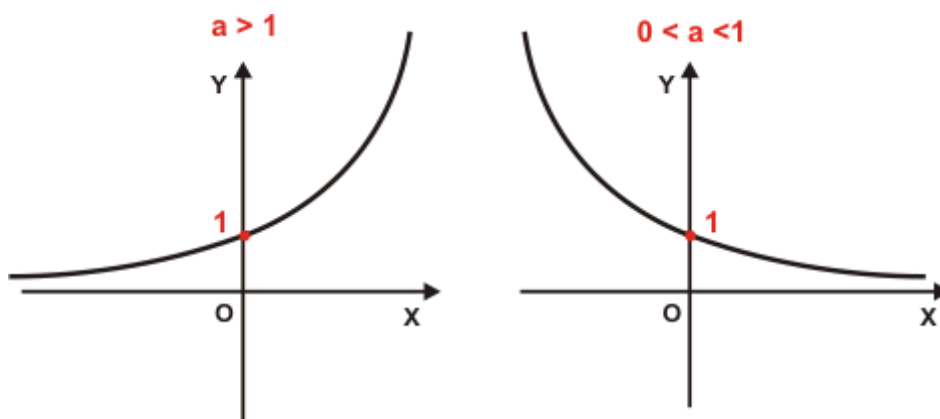
**Tabela 04:** Tabela da função  $f(x) = 1,8^x$  com os valores: -6, -3, -1, 0, 1 e 2

Abaixo, confira o gráfico obtido a partir dessa função exponencial e da obtenção dos pontos da tabela:



**Figura 4 -** Gráfico da função  $y = 1,8^x$

De um modo geral, a função exponencial é representada graficamente por:



**Figura 5 -** Representações gráficas de funções exponenciais

Observe que, para qualquer valor da base  $a$ , o gráfico intercepta o eixo  $OY$  no ponto  $(0, 1)$  e não intercepta o eixo  $OX$ . Independente do sinal do número real  $x$ , o número  $y = f(x)$  sempre será positivo.

### 3.4 Propriedades das Funções Exponenciais

As funções exponenciais podem ser classificadas como crescentes ou decrescentes, dependendo de a base  $a$  ser maior ou menor que um.

**Definição:** Uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita crescente se, à medida que os valores de  $x$  aumentam, os correspondentes valores de  $y = f(x)$  também aumentam.

Confira no gráfico abaixo que isso ocorre com a função exponencial quando se tem a base  $a > 1$ .

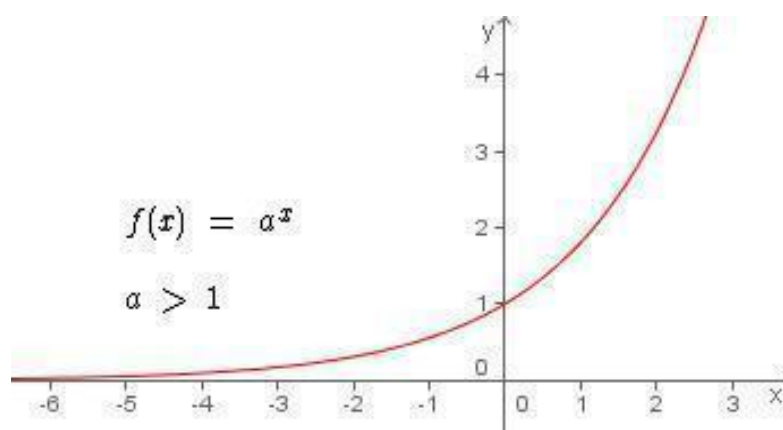


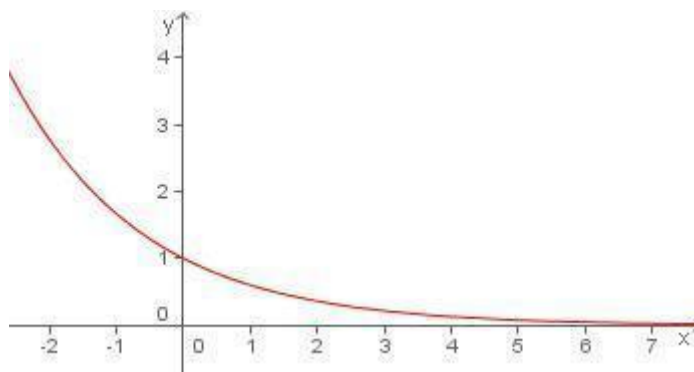
Figura 6 - Gráfico de uma função exponencial crescente

Além disso, para bases maiores que um, vemos que os valores de  $y = f(x)$  se aproximam de 0 quando  $x$  tende a  $-\infty$ . Já quando  $x$  tende a  $+\infty$  vemos que os valores de  $y = f(x)$  tendem a  $+\infty$ .

**Definição:** Uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita decrescente se, à medida que os valores de  $x$  aumentam, os correspondentes valores de  $y = f(x)$  diminuem.

No gráfico abaixo, de uma função exponencial com base  $0 < a < 1$ , se nota que, em contraposição ao gráfico anterior, à medida que o valor de  $x$  aumenta, o

valor de  $y$  diminui. Desse modo vemos que neste caso a função exponencial é decrescente.



**Figura 7** - Gráfico de uma função exponencial decrescente

Neste caso, de bases entre zero e um, vemos que os valores de  $y = f(x)$  se aproximam de 0, quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Já quando  $x$  tende a  $-\infty$  vemos que os valores de  $y = f(x)$  tendem a  $+\infty$ .

## 4 APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Neste capítulo, iremos mostrar algumas aplicações das funções exponenciais, em matemática e em outras áreas de conhecimentos que se envolvem com a mesma.

Quando pensamos em funções exponenciais estamos abordando funções que crescem ou decrescem muito rapidamente, exercendo papéis importantes na matemática, física, química, e outras áreas que se envolvem com a matemática.

Uma função exponencial é utilizada na reprodução de situações em que a taxa de variação é caracterizada pelo crescimento e decrescimento muito rápido. Podemos citar como exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações.

As funções exponenciais possuem um grande número de aplicações do cotidiano, estão presentes em diversas ciências. Na Matemática financeira é utilizada na capitalização de capitais pelo método do juro composto; na Química é utilizada em situações envolvendo decaimento radioativo; na Biologia está vinculada ao desenvolvimento de bactérias em culturas e crescimentos de determinadas plantas; na Psicologia propaga as curvas de aprendizagem; entre outras inúmeras aplicações.

Apresentam característica de expressar aguçadas variações em períodos curtos, em razão da apresentação da incógnita no expoente da expressão. Apenas essa definição não contribui para o acontecimento da aprendizagem, o profissional licenciado em Matemática deve buscar mecanismos capazes de relacionar os assuntos com o cotidiano, isto pode ser feito através de exemplos com interdisciplinaridades.

Ao analisarmos o gráfico de uma função exponencial descobrimos que o estudo de situações que se condizem em uma curva de crescimento ou decrescimento, sendo admissível avaliar as quantidades relacionadas à curva, por isso os Psicólogos e Educadores aproveitam-se da exponencial para explicarem as curvas de aprendizagem. Tomando essa propriedade como base, chegamos à conclusão de que a função exponencial é analisada como uma respeitável ferramenta da Matemática, envolvendo várias situações cotidianas e colaborando

de forma satisfatória na obtenção de resultados que definem uma análise quantitativa e qualitativa.

Os exemplos abaixo mostram as aplicações das funções exponenciais em algumas áreas de conhecimento.

#### 4.1 Aplicação em Biologia

Os exemplos a seguir tratam do crescimento de bactérias em determinadas colônias.

**Exemplo 3:** Em algumas condições, o número de bactérias  $B$  de uma cultura, é dado pela função exponencial  $B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$ , onde  $t$  representa o número de horas. Sabendo que o número de bactérias cresce em função do tempo  $t$ , qual o número de bactérias após 72 horas?

**Solução:** Uma vez que o número de bactérias após  $t$  horas é dado por  $B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$ , para  $t = 72$  obtemos:

$$B(t) = 2^{\frac{72}{12}} = 2^6 = 64.$$

Portanto, o número de bactérias após 72 horas será de 64.

**Exemplo 4** Se no início da contagem de uma população de bactérias que aumenta 50% por dia, havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de  $t$  dias?

**Solução:** Como a taxa de crescimento é de 50% ao dia temos o seguinte esquema:

Ao fim de 1 dia tem-se  $1 + (0,5)1 = 1,5$  milhão de bactérias.

Ao fim de 2 dias tem-se  $1,5 + (0,5)(1,5) = 1,5(1 + 0,5) = 1,5^2$ .

Ao fim de 3 dias tem-se:  $1,5^2 + (0,5)1,5^2 = 1,5^2(1 + 0,5) = 1,5^3$ .

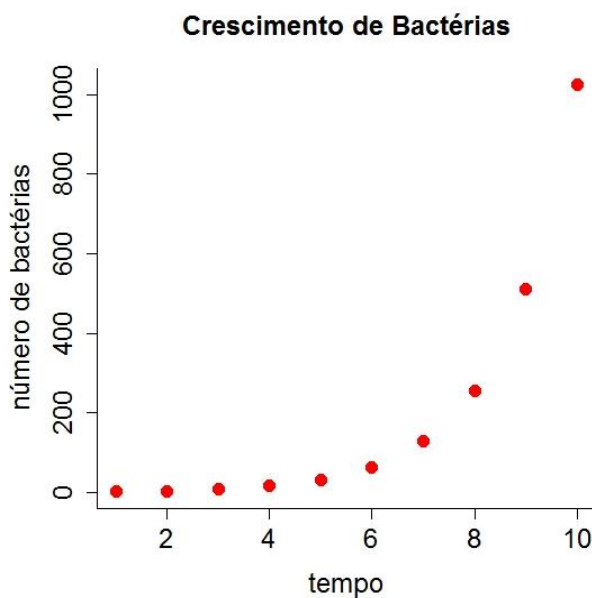
Ao fim de  $t$  dias tem-se:  $1,5^{t-1} + (0,5)1,5^{t-1} = 1,5^{t-1}(1 + 0,5) = 1,5^t$ .

Notamos que o número de milhões de bactérias, ao fim de  $t$  dias, é dado

por uma potência de expoente variável (exponencial).

Sabemos que esta potência tem significado para qualquer valor real de  $t$ ; no início da contagem é  $t = 0$ .

Vejamos um gráfico que representa uma função deste tipo.



**Figura 8** - Gráfico do crescimento de bactérias

**Fonte:** <http://geniodamatematica.com.br/funcao-exponencial>

## 4.2 Aplicação em Matemática Financeira

A função exponencial intervém em numerosas aplicações matemáticas, e é indispensável no estudo de muitos problemas de Economia e Finanças, nomeadamente no cálculo dos "juros compostos".

Juros são aquilo que se agrega ao capital, isto é, os frutos que o capital gera. Eles são compostos, quando, em um período subsequente, passam a fazer parte do capital, fazendo com que os novos juros devidos se apliquem também sobre os anteriores.

O juro composto incide mês a mês de acordo com o somatório acumulativo do capital com o rendimento mensal, isto é, prática do juro sobre juro. As modalidades de investimentos e financiamentos são calculadas de acordo com

esse modelo de investimento, pois ele oferece um maior rendimento, originando mais lucro.

Em geral denotamos:

- $C$  o capital aplicado;
- $J$  o juro obtido na aplicação;
- $M = C+J$  o montante acumulado;
- $i = J/C$  a taxa de juros (em forma de fator);
- $n$  o número de períodos de aplicação.

Abaixo veremos como chegar à fórmula para se calcular juros compostos:

Ao fim de 1 período de aplicação tem-se um montante

$$M_1 = C + Ci = C(1 + i).$$

Ao fim de 2 períodos de aplicação tem-se um montante de

$$M_2 = M_1 + iM_1 = C(1 + i) + iC(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2.$$

Ao fim de 3 períodos de aplicação tem-se um montante de

$$M_3 = M_2 + iM_2 = C(1 + i)^2 + iC(1 + i)^2 = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3.$$

Uma vez que, ao final de cada período a taxa de juros atua sobre o montante acumulado no período anterior, vemos que ao final de  $n$  períodos de aplicação o montante acumulado é de:

$$M = C(1 + i)^n.$$

Portanto, em função do tempo, o montante acumulado em uma aplicação no regime de juros compostos é uma função do tipo exponencial.

**Exemplo 5.** Uma pessoa coloca R\$3.000,00 a prazo, à taxa de 20% ao ano e não retira dinheiro algum durante 10 anos. Quanto tem a receber (montante acumulado) ao fim desse período?

**Solução:** Utilizando a fórmula para se calcular juros compostos, vamos extrair os

dados do problema e jogá-los na fórmula.

Temos aqui  $n = 10$  e  $i = 20\% = 20/100 = 0,2$ . Então o montante acumulado ao final deste prazo será de:

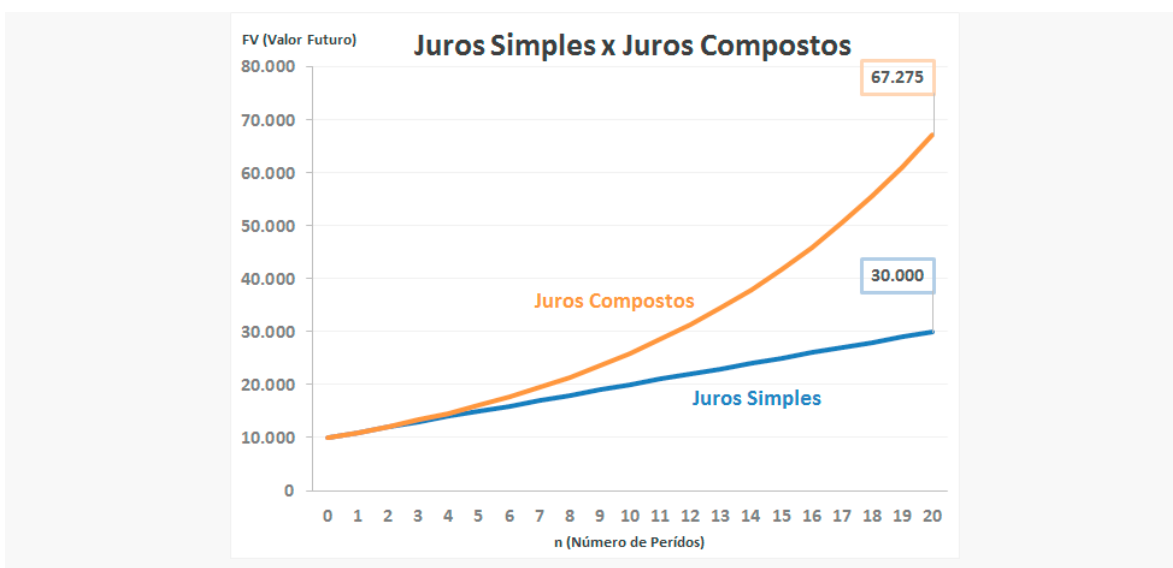
$$M = C(1 + i)^n$$

$$M = 3000(1 + 0,2)^{10} = 3000 (1,2^{10}) \approx 18.575$$

Ou seja, essa pessoa terá R\$18.575,00 a receber.

No gráfico a seguir podemos verificar a comparação dos juros simples, cuja função é Linear, com os Juros Compostos que apresenta uma função exponencial.

### Comparação entre juros simples e juros compostos



**Figura 9** - Gráfico de comparação entre juros simples e compostos

**Fonte:** <http://geniodamatematica.com.br/funcao-exponencial>

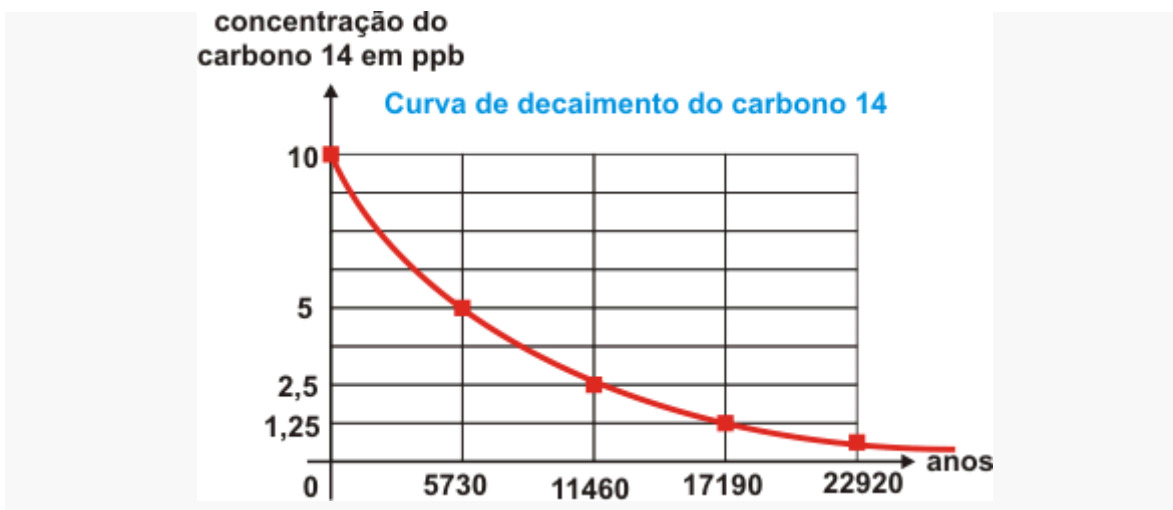
### 4.3 Aplicações das Exponenciais em Química

Na Química, a função exponencial aparece no capítulo de Radioatividade, nos gráficos de meia vida de átomos radioativos.

Esse tipo de exponencial é chamado de decaimento radioativo.

O carbono 14 tem meia vida igual 5730 anos e esse termo é chamado de “meia vida”, devido ao fato de que a cada 5730 anos a massa de uma amostra desse material radioativo, sempre se reduzirá pela metade.

Aqui, no gráfico abaixo, temos o decaimento radioativo do carbono 14



**Figura 10** - Gráfico da curva de decaimento do carbono 14

**Fonte:** <http://geniodamatematica.com.br/funcao-exponencial>

A curva que representa a queda do carbono 14 é de uma função exponencial.

A teoria da cronologia do carbono, utilizada para determinar a idade de fósseis, baseia-se no fato de que o isótopo do carbono 14 (C-14) é produzido na atmosfera pela ação de radiações cósmicas no nitrogênio e que a quantidade de C-14 na atmosfera é a mesma que está presente nos organismos vivos. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa, e a quantidade de C-14 presente no fóssil é dada pela função:

$$C(t) = C_0 10^{kt}$$

Onde,  $t$  é dado em anos a partir da morte do organismo,  $C_0$  é a quantidade de C-14 para  $t = 0$  e  $k$  é uma constante.

Consideremos um exemplo. Sabe-se que 5600 anos após a morte, a quantidade de C-14 presente no organismo é a metade da quantidade inicial (quando  $t = 0$ ). No momento em que um fóssil foi descoberto, a quantidade de C-

14 medida foi de  $\frac{C_0}{32}$ . Tendo em vista estas informações, vamos calcular a idade do fóssil no momento em que ele foi descoberto.

Temos:

$$C(5600) = \frac{C_0}{2}$$

Consequentemente,

$$C(5600) = C_0 \cdot 10^{5600k}$$

$$\frac{C_0}{2} = C_0 \cdot 10^{5600k}$$

$$10^{5600k} = \frac{1}{2}$$

No momento em que um fóssil foi descoberto, a quantidade de C-14 foi de  $\frac{C_0}{32}$  com isso:

$$C(t) = \frac{C_0}{32}$$

Logo:

$$\frac{C_0}{32} = C_0 \cdot 10^{kt}$$

$$10^{kt} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Portanto:

$$10^{kt} = (10^{5600k})^5$$

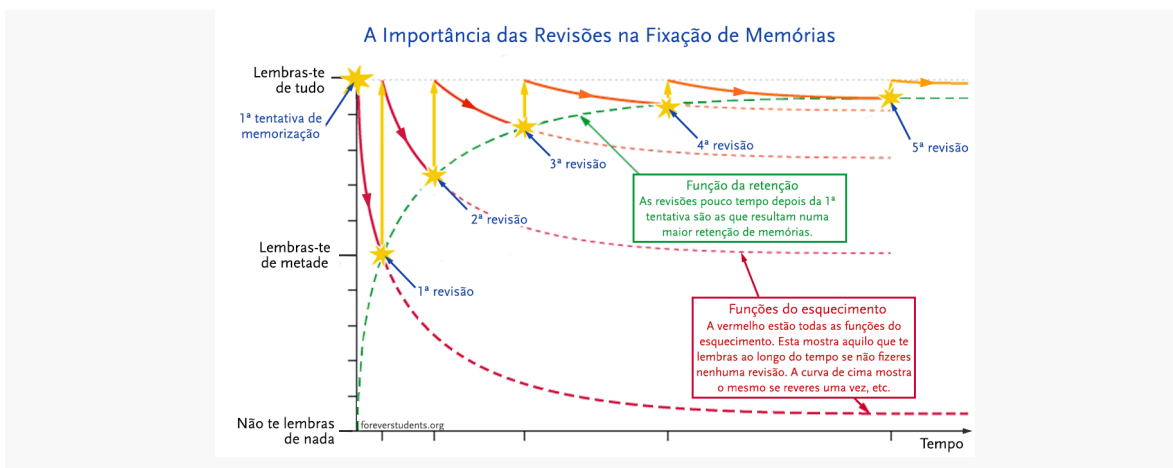
$$10^{kt} = 10^{2800k}$$

$$t = 2800.$$

#### 4.4 Aplicações na Psicologia

Atualmente muitos trabalhos de neurocientistas e educadores tem tido resultados extraordinários e o uso da função exponencial pode ser encontrado em suas pesquisas.

O gráfico de uma função exponencial permite o estudo de situações que se enquadrem em uma curva de crescimento ou decrescimento, sendo possível analisar as quantidades relacionadas à curva, por isso os psicólogos e educadores utilizam-se da exponencial a fim de demonstrarem as curvas de aprendizagem.



**Figura 11** - Gráfico da importância das revisões na fixação de memórias

**Fonte:** <http://geniodamatematica.com.br/funcao-exponencial>

A curva de aprendizagem é o gráfico de uma função frequentemente utilizada para relacionar a eficiência de trabalho de uma pessoa em função de sua experiência. Suponha que, após  $t$  meses de experiência, um operário consiga montar  $p$  peças por hora. Essas variáveis se relacionam matematicamente pela expressão  $p = 30 - 20e^{-0,4t}$ .

Em razão de suas propriedades, a função exponencial é considerada uma importante ferramenta da Matemática e de todas as áreas do conhecimento, atuando em inúmeras situações cotidianas e ajudando de forma incisiva na obtenção de resultados que exigem análises quantitativa e qualitativa.

No livro *Conexões com a matemática 1* do ensino médio podem ser encontradas outras aplicações.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

É indiscutível a importância e influência que a Matemática tem na vida das pessoas, principalmente, quando se trata de funções exponenciais, visto que estas estão presentes em nosso cotidiano. Sempre nos deparamos com pessoas que afirmam não gostarem da disciplina, tendo em vista que não conseguem compreender a finalidade e a aplicabilidade dos conteúdos abordados, assim como pelo grau de dificuldade enfrentado na resolução de problemas.

A partir dessa realidade, propomos apresentar a importância das exponenciais nas Escolas, de modo que se possa suscitar a relevância de ações concretas que levem o aluno a perceber como a Matemática está presente em diversas esferas da sociedade e, por conseguinte, como ela se faz presente na sua vida. Para desenvolver a pesquisa percorremos o seguinte percurso: investigar a importância das aplicações de funções exponenciais em diversas áreas de conhecimentos.

Procuramos mostrar através de exemplos, gráficos, tabelas e imagens, como o estudo das funções exponenciais se torna mais compreensível quando trabalhamos com essas ferramentas.

Com relação a essa questão, poderíamos ainda sugerir políticas de formação continuada para os docentes que já atuam em sala de aula, de modo que os mesmos possam repensar a prática educativa.

Se pensado o aspecto didático, poderíamos sugerir sistematizações didáticas que priorizassem situações concretas no ensino de funções exponenciais.

Concluimos, portanto, com um nível bastante satisfatório, que podemos nos deparar com uma realidade bem compreensível do conteúdo em si, nossa perspectiva é que essa pesquisa sirva de base para estudos sobre funções exponenciais e tire o mito da dificuldade de se entender matemática.

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. (2005). Análise matemática para licenciatura. São Paulo. Edgard Blücher. ISBN 85-212-0371-13.

BARBONI, Ayrton; Paulette, Walter. (2007). Fundamentos de matemática: Cálculo e Análise. Editora LTC. ISBN 978-85-216-1546-0.

BRUNER, J. S., & Goodman, C. C. (1947). Valor e necessidade como fatores organizadores na percepção. *Journal of Anormal and Social Psychology*, 42 (1), 33-44.

DANTE, Luiz R. Matemática: Contexto e Aplicações. Editora Ática, vol. 1, 1ª edição, 1999.

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; Bonjorno, José Roberto. FTD, 2002. ISBN 8532248276, 9788532248275.

HARIKI, Seiji – Matemática aplicada, administração, economia, contabilidade – São Paulo 2005.

LEONARDO, Fábio Martins de. Conexões com a matemática. 1. Editora Moderna. 2ª Edição. São Paulo 2013.

LEZZI, Gelson; Dolce O. Hazzan, S., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1 Editora Atual, 8ª edição, 2004.

LIMA, Elon L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., A Matemática do Ensino médio, Vol. 1, 2ª edição. São Paulo 2013.

MORETTIN, Pedro A. Cálculos: Funções de uma variável, Atual, São Paulo 1987.

SALES, Antônio da Silva; Pires, Hélio; Gomes, José de Assis. João Pessoa: Liceu, 2007.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Aplicações de uma Função Exponencial"; Brasil Escola. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/aplicacoes-uma-funcao-exponencial.htm>>. Acesso em 16 de maio de 2017.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. São Paulo: M. Fontes, 1984.