

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

NÁDIA PINHEIRO NÓBREGA

**APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA
PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTOQUES
COM MÚLTIPLOS OBJETIVOS**

João Pessoa

2012

NÁDIA PINHEIRO NÓBREGA

APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA PARA
SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTOQUES COM MÚLTIPLOS
OBJETIVOS

*Dissertação apresentado à Pós-Graduação de Engenharia de
Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de
Produção.*

Orientador: Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

Co-orientador: Dr. Roberto Quirino do Nascimento

N754a Nóbrega, Nádia Pinheiro Nóbrega
Aplicação de Programação Geométrica para Solução de Problemas
de Estoques com Múltiplos Objetivos. / Nádia Pinheiro Nóbrega -
João Pessoa, 2012.

224 f. il.:

Orientador: Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Co - orientador: Prof. Dr. Roberto Quirino dos Nascimento

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) PPGEF /
Centro de Tecnologia / Campus I / Universidade Federal da Paraíba
- UFPB.

1. Estoques. Otimização Multiobjetivo. Programação
Geométrica Signomial. Condensação I. Título.

Nádia Pinheiro Nóbrega

Aplicação de Programação Geométrica para Solução de Problemas de Estoques com Múltiplos Objetivos

Dissertação apresentada à Pós-Graduação de Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

APROVADA: 31 de julho de 2012.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

Orientador

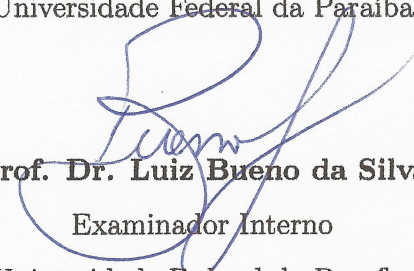
Universidade Federal da Paraíba



Prof. Dr. Roberto Quirino dos Nascimento

Co-orientador

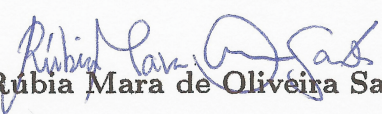
Universidade Federal da Paraíba



Prof. Dr. Luiz Bueno da Silva

Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba



Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos

Examinador Externo

Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

*Para meu amado e companheiro esposo, Ivan, meus exemplos de vida, José Alberto
e Marina Francisca.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, ao meu querido esposo, aos meus amados pais, minhas duas irmãs, meu querido sobrinho e cunhados.

Grata à Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço ao Professor Lucídio Formiga dos Anjos Cabral pela orientação, ao Professor Roberto Quirino do Nascimento pela co-orientação e ao Professor Jairo Rocha de Faria pelo conhecimento transmitido.

Agradeço a toda turma da pós-graduação de Engenharia de Produção, em especial ao Abner pela imensa ajuda na implementação computacional; à Roberta Guedes Pereira por suas contribuições na escrita do texto e pela parceria ao longo desses dois últimos anos; à Roberta de Lourdes que me ajudou muito com sua experiência e amizade; aos amigos e companheiros do Laporte, Ana Flávia, Manoel, Clarissa e Leandro; aos professores da pós-graduação em engenharia de Produção pela imenso conhecimento transmitido; aos professores do curso preparatório para ingresso na pós-graduação; aos professores da Escola Tecnológica de Verão; ao coordenador, Luiz Bueno da Silva pelo excelente trabalho desenvolvido; à vice-coordenadora, Maria de Lourdes Barreto pelos incentivos antes mesmo do ingresso regular no programa de pós-graduação; a Ana Araújo pelo trabalho desenvolvido na secretaria da Pós-Graduação do PPGEF.

Agradeço aos demais amigos que sempre acreditaram em meu potencial e contribuíram de alguma maneira para que esse trabalho pudesse ser concretizado.

Nádia Pinheiro Nóbrega

RESUMO

Nesta dissertação são descritas a formulação geral do problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing proposto por Islam (2008) para o caso de um único item e desenvolvido uma generalização direta do caso com um único item para n itens. São apresentados os principais modelos de estoques propostos na literatura e em particular, o modelos EOQ com falta planejada de produto e multi-item com restrições de modo a apresentar as características principais que definem o problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing tanto para um único item proposto por Islam (2008) quanto para o multi-item. Os problemas com único item e multi-item além de serem multiobjetivos são também de natureza não-linear e pertencentes a classe de problemas de Programação Geométrica signomiais. Foi necessário descrever e demonstrar alguns dos principais resultados da classe de métodos à posteriori de Otimização Multiobjetivo, em particular o método de escalarização das Métricas Ponderadas, utilizado para transformar os problemas multiobjetivo em problemas mono-objetivo de Programação Geométrica signomiais cuja solução foi obtida com um algoritmo desenvolvido para a técnica de Condensação usando o Gpposy, pertencente a ferramenta GGPLAB. Após a obtenção das três formulações gerais para os problemas escalarizados de planejamento de estoques e marketing para um único item e mais três para o caso multi-item foram obtidos problemas particulares a partir de um conjunto de dados iniciais utilizados tanto para o problema formulado com um único item quanto para o problema multi-item de modo a obter, para três pares distintos de pesos associados a cada função objetivo, nove problemas com um único item e nove problemas com cinco itens. As soluções ótimas locais bem como a viabilidade das restrições para cada um dos dezoito problemas descritos foram obtidas no capítulo de Experimentos Computacionais por meio do algoritmo da Condensação utilizando o Gpposy. Como teoria de PG só garante soluções de mínimo locais para problemas signomiais, os resultados obtidos com o método de escalarização das Métricas Ponderadas garante que as soluções de mínimo locais são soluções localmente eficientes tanto para o problema multiobjetivo inicialmente proposto para um único item em Islam (2008) quanto para a sua generalização direta multi-item desenvolvida.

Palavras-chave: Estoques. Otimização Multiobjetivo. Programação Geométrica Signomial. Condensação.

ABSTRACT

In this dissertation are described the general formulation of the problem multiobjective inventory planning and marketing for Islam (2008) for the case of an a single item and developed a direct generalization of the case with a single item for n items. They are introduced the main inventory models proposed in the literature and in particular, the models EOQ (the Economic Order Quantity) with backordering allowed and multi-item with restrictions so as to present the main features that define the multiobjective problem of inventory planning and marketing for both a single item proposed by Islam (2008) and for the multi-item. The problems with single item and multi-item besides being multiobjective are also nonlinear in nature and belonging to the class of problems signomials Geometric Programming. It was necessary to describe and to demonstrate some of the main results of class methods to posteriori Multiobjective Optimization, in particular the method of escalarization Weighted Metrics, used to transform the multiobjective problems into mono-objective problems of Geometric Programming signomiaia whose solution was obtained with an algorithm developed for the Condensation technique using Gpposy, belonging to GGPLAB toolbox. After the obtainment of the three formulations for general problems scalarized of inventory planning and marketing for an only item and another three for the case multi-item were obtained particular problems from a set of initial data used so much for the problem formulated with an only item as for the problem multi-item so as to obtain, for three different pairs from associates weights to each objective function, nine problems with a single item and nine problems with five items. The local optimal solutions as well as the viability of constraints for each one of the eighteen problems described were obtained in the chapter of Computational Experiments by means of the algorithm of the Condensation using Gpposy. As Geometric Programmin theory only guarantees solutions of local minimum for problems signomials, the results obtained with escalarization Method of Weighted Metrics guarantees that the solutions of local minimum are locally efficient solutions so much for the problem multiobjetivo initially proposed for a single item in Islam (2008) how much for your direct generalization multi-item developed.

Keywords: Inventories. Multiobjective Optimization. Signomial Geometric Programming. Condensation.

Lista de Figuras

2.1	Classificação dos modelos de estoques	25
3.1	Diagrama para o nível de estoque em função do tempo T	36
3.2	Função dente de serra, periódica de comprimento igual a T	37
3.3	Custos associados aos estoques. (MUCKSTADT; SAPRA, 2010)	39
3.4	Custo total para o Modelo EOQ com desconto para todas as unidades.	43
3.5	Custo total para o Modelo EOQ com desconto incremental por quantidade.	47
3.6	Nível de estoque com taxa de produção finita. (AXSÄTER, 2006)	49
3.7	Modelo EOQ com tempo de espera positivo $t_L < T^*$	52
3.8	Modelo EOQ com tempo de espera positivo $t_L > T^*$	53
3.9	Modelo EOQ com escassez de produto, (MUCKSTADT; SAPRA, 2010)	57
4.1	Interpretação do Conceito de Eficiência	71
4.2	Classificação dos Métodos	76
4.3	Caixa retangular aberta	108
4.4	Gráfico da função F	117

Lista de Tabelas

6.1	Dados de entrada para o problema de único item	160
6.2	Comparação de Soluções: Condensação com Gpposy versus Pseudo-dual	161
6.3	Valor da função objetivo de custos totais de estoques: Condensação com Gpposy, Pseudo-dual e Islam (2008)	161
6.4	Viabilidade do problema mono-objetivo restrito para a função de custos totais de estoques usando Condensação com Gpposy	161
6.5	Comparação de Soluções para o problema irrestrito com a segunda função objetivo de marketing: Condensação com Gpposy versus dual	162
6.6	Valor da função objetivo de custos de marketing: Condensação com Gpposy, Pseudo-dual e Islam (2008)	162
6.7	Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.17)	163
6.8	Valores das funções objetivo: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.17)	163
6.9	Viabilidade das restrições: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.17)	163
6.10	Comparação: soluções da condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.18)	163
6.11	Valores das funções objetivo: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.18)	164
6.12	Viabilidade das restrições: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.18)	164
6.13	Comparação: soluções da condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.19)	164
6.14	Valores das funções objetivo: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.19)	164

6.15	Viabilidade das restrições: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.19)	164
6.16	Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$ para (6.21)	165
6.17	Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.21)	166
6.18	Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$ para (6.21)	166
6.19	Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.22)	166
6.20	Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.22)	166
6.21	Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.22)	167
6.22	Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.23)	167
6.23	Valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.23)	167
6.24	Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.23)	168
6.25	Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.25)	169
6.26	Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.25)	169
6.27	Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.25)	169
6.28	Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.26)	169
6.29	Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.26)	170
6.30	Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$ para (6.26)	170
6.31	small Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.27)	170

6.32	Valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.27)	170
6.33	Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$ para (6.27)	171
6.34	Valor mínimo encontrado para TC_1 e TC_2 para o problema escalarizado de planejamento de estoques e marketing com um único item.	171
6.35	Soluções M, Q e S e funções objetivo TC_1 e TC_2 usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty, w_1 = w_2 = 0, 5$	172
6.36	Viabilidade das restrições usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty, w_1 = w_2 = 0, 5$	172
6.37	Soluções M, Q e S e funções objetivo TC_1 e TC_2 usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty, w_1 = 0.4, w_2 = 0, 6$	172
6.38	Viabilidade das restrições usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty, w_1 = 0.4, w_2 = 0, 6$	172
6.39	Soluções M, Q e S e funções objetivo TC_1 e TC_2 usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty, w_1 = 0.6, w_2 = 0, 4$	173
6.40	Viabilidade das restrições usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty, w_1 = 0.6, w_2 = 0, 4$	173
6.41	Valores do custo de manutenção h e do espaço de armazenamento unitário a para o i -ésimo item	175
6.42	Valores do parâmetros α e β para o i -ésimo item	175
6.43	Valores do parâmetros c_2 e c_3 para o i -ésimo item	175
6.44	Valores do parâmetros δ e γ para o i -ésimo item	175
6.45	Soluções usando Condensação com Gpposy	176
6.46	Valor da função objetivo de custos totais de estoques e Viabilidade das Restrições usando o algoritmo da Condensação com Gpposy	176
6.47	Solução e valor da função objetivo para o problema irrestrito custos de marketing por condensação para o problema multi-item	177

6.48	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$	178
6.49	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$. . .	178
6.50	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$	179
6.51	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$. . .	179
6.52	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$	180
6.53	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$. . .	180
6.54	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$	182
6.55	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$	182
6.56	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$	184
6.57	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 =$ $0.4, w_2 = 0.6$	184
6.58	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$	185
6.59	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$. . .	185
6.60	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$	187
6.61	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$	187
6.62	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$	189
6.63	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$. . .	189

6.64	Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$	190
6.65	Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$. . .	190
6.66	Valor mínimo encontrado para TC_1 e TC_2 para o problema escalarizado de planeja- mento de estoques e marketing multi-item.	190
7.1	Dados iniciais para os problemas escalarizados de planejamento de estoques e marke- ting para $p = 1, 2, \infty$	205
7.2	Dados iniciais dos problemas de planejamento de estoques e marketing para cinco itens	209

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Justificativa	19
1.2	Objetivos	22
1.2.1	Objetivo Geral	22
1.2.2	Objetivos Específicos	22
1.3	Organização da Dissertação	22
2	Revisão Bibliográfica	24
3	Modelos de Estoques	33
3.1	Modelo EOQ clássico	35
3.2	Modelo EOQ com descontos por quantidade	41
3.3	Modelo EOQ com taxa de produção finita	48
3.4	Modelo EOQ com tempo de espera positivo	51
3.5	Modelo EOQ multi-item com restrições	53
3.6	Modelo EOQ com falta planejada de produto	57
4	Otimização	65
4.1	Otimização Multiobjetivo	65
4.2	Métodos de Escalarização	73
4.2.1	Método da Ponderação	77
4.2.2	Método das ε -Restrições	79
4.2.3	Relação entre os métodos da ε -Restrição e da Ponderação	80
4.2.4	Método Híbrido	82
4.2.5	Método das Métricas Ponderadas	84
4.3	Programação Geométrica	89
4.3.1	Programação Geométrica Signomial	109

4.3.2	Técnica de Condensação de Problemas de PG Signomial	110
4.3.3	Algoritmo para Resolver Problemas de PG Signomial	120
5	Estoques e Otimização Multiobjetivo via Programação Geométrica	134
5.1	Problema Multiobjetivo de Planejamento de Estoques e Marketing	134
5.2	Problema Multiobjetivo e Multi-item de Planejamento de Estoques e Marketing	149
6	Experimentos Computacionais	157
6.1	Problema Multiobjetivo de Planejamento de Estoques e Marketing para um único item	157
6.2	Problema Multiobjetivo de Planejamento de Estoques e Marketing Multi-item	173
7	Considerações Finais	192
	Referências Bibliográficas	196
	ANEXO	203

Capítulo 1

Introdução

De acordo com Moreira (2004), os estoques são definidos como “quaisquer quantidades de bens físicos que sejam conservados de maneira improdutiva, por determinado intervalo de tempo.”

Quanto à natureza dos bens físicos estocados é possível formar estoques de: (1) matérias-primas, (2) peças e itens comprados externamente, (3) peças e itens fabricados internamente, (4) produtos semi-acabados ou montados parcialmente e (5) produtos acabados prontos para consumo final. (MOREIRA, 2004)

Os estoques representam em qualquer tipo de organização, seja no setor de produção ou de serviços, um fator que determina o nível de competitividade e a consequente sobrevivência e estabilidade de uma organização no mercado.

Dentro das organizações, o controle de estoques pode ser interpretado em dois níveis, como descrito a seguir:

- (a) Nível operacional: permitem economias na produção e servem como regulador do fluxo de matéria-primas, de componentes, da produção e de produtos a serem entregues para distribuição ou para consumo final;
- (b) nível financeiro: são investimentos que representam uma parcela do capital da empresa que está parado e à medida que o estoque cresce, cresce também quantidade o capital que não representa lucratividade imediata para a organização.

Dessa forma, é interessante buscar melhorias no controle de estoques. Tal melhoria pode ser alcançada através da implantação de ferramentas adequadas que sejam capazes de equilibrar a quantidade de estoques nos níveis operacional e financeiro, ao mesmo tempo que a demanda seja atendida dentro do esperado, evitando-se assim possíveis perdas do mercado consumidor.

Um fator essencial para atingir as metas de redução de estoques sem que a competitividade seja afetada é a redução dos custos associados aos itens estocados.

Na literatura:(CORRÊA; GIANESI; CAON, 2007), (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (MOREIRA, 2004), (MURTHY; 2007) e (TAHA, 2008) são encontrados alguns tipos de custos comuns encontrados na maioria dos sistemas de gestão de estoques, os quais são:

- Custo unitário

É o custo de compra ou produção interna de uma unidade do item, cuja unidade de medida é expressa em (\$).

- Custo do pedido

Este tipo de custo representa a soma total dos custos incorridos desde o instante em que o pedido é solicitado até o momento de estocagem da quantidade encomendada. Ele está associado à compra externa de mercadorias e sua unidade de medida é expressa por (\$/pedido). Alguns outros custos implícitos nos custos do pedido são o custo de manutenção do setor de compras, o custo para transporte do pedido e os custos de inspeção antes da estocagem final da quantidade encomendada.

- Custo unitário de manutenção

É o custo por manter uma unidade de um pedido em estoque por um determinado intervalo de tempo. É medido em (\$ por item unitário por unidade de tempo). E alguns outros custos implícitos são o custo de capital e o custo de armazenagem. Este último é formado pelos custos de ocupação de um espaço físico, seguros, taxas, perdas, obsolescência ou deterioração do item em estoque.

- Custo de preparação de máquinas ou custos de *setup* são os custos associados ao tempo de interrupção da produção para ajustes de máquinas visando a fabricação de um novo lote de produtos.

- Custo de falta de estoque

Está associado as consequências econômicas geradas pela falta da mercadoria em estoque necessária para atender a demanda. Sua unidade de medida é expressa por (\$ por unidade de um item não disponível).

A Otimização tem demonstrado ser uma teoria muito eficaz no estudo e formulação de modelos de estoques por garantir cada vez mais boas aproximações da situação real com

a sua formulação matemática. A teoria já desenvolvida até então na área reforça os bons resultados encontrados em termos de aplicabilidade das técnicas desenvolvidas, as quais tem gerado soluções exatas ou boas aproximações para a redução dos níveis de estoques em diversos tipos de sistemas produtivos.(LIEBERMAN; HILLIER, 2010)

Atualmente, a literatura (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (TAHA, 2008), (EISELT; SANDBLOM, 2010) e (WAGNER; 1969) dispõe de muitos modelos relacionados à estoques, que variam conforme as hipóteses consideradas na situação real a qual deseja-se modelar. Dentre elas estão:

- Os tipos de custos presente na situação em estudo;
- o estoque de um único produto ou de vários produtos;
- a natureza da demanda (variável conhecida ou variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida) de um item por unidade de tempo que determina se o problema é do tipo determinístico ou estocástico;
- a verificação do ponto de reabastecimento dos estoques por meio de monitoramentos no início de cada um dos n períodos de tempo, determinando se o reabastecimento ocorrerá periodicamente ou continuamente;
- se faltas planejadas do produto são ou não permitidas;
- se são considerados descontos pela quantidade a ser encomendada, isto é, se o custo unitário varia de acordo com a quantidade de um item em um lote;
- os tempos de espera zero, significando que uma quantidade encomendada é recebida no mesmo instante em que é efetuado o seu pedido;
- o tempo de espera (*lead time*) entre o instante em que uma quantidade de pedido é efetuada até o momento em que o mesmo chega e é adicionado ao estoque é diferente de zero.

Após a etapa de formulação do modelo é preciso buscar uma estratégia de resolução que tenha relação direta com a linearidade ou não-linearidade da função objetivo e das restrições definidas para o problema. Quanto aos problemas de programação linear formulados para estudar estoques a literatura (EISELT; SANDBLOM, 2010), (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (MURTHY; 2007), (TAHA; 2008) e (WAGNER; 1969) contém uma ampla variedade de problemas já formulados e estudados tanto no caso determinístico quanto no caso estocástico.

Já os problemas relacionados à estoques de natureza não-linear são mais escassos na literatura por conterem hipóteses mais complexas e necessitarem de técnicas para obtenção de soluções que envolvem conceitos matemáticos também mais complexos.

Os modelos relacionados à Pesquisa Operacional que melhor retratam as situações-problema reais são aqueles de natureza não-linear, visto que o modelo preserva suas variáveis e restrições sem a necessidade de alguma adequação da situação real ao modelo, como é feito no caso linear, onde é preciso adequar o modelo para que ele possa ser resolvido com as técnicas próprias de problemas lineares, podendo ser necessário restringir, reformular ou até excluir algumas características originais da situação real.

Particularmente, o problema que será estudado é um problema de otimização multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing proposto por Islam (2008). Ele foi construído com base em algumas situações específicas buscando atender a necessidade de algumas empresas em atingir múltiplos objetivos para manter a competitividade no mercado no qual atua. Além disso, o problema, sob as hipóteses formuladas, pertence a classe de problemas não-lineares multiobjetivo de programação geométrica.

Como exemplificação para melhor compreensão da situação em estudo, considere uma indústria de manufatura que produz um item e necessita estocá-lo como produto acabado por um determinado intervalo de tempo. Ela utiliza a propaganda comercial para divulgação desse mesmo item de modo a aumentar a demanda pelo mesmo e assim diminuir o estoque. Nas duas etapas: produção e marketing comercial, necessárias para o escoamento de uma quantidade de um produto mantido em estoque, a empresa acumula custos associados a estas duas etapas e que estão relacionados ao processo de estocagem e à divulgação do produto por meio de propaganda comercial. A redução desses dois conjuntos de custos são traduzidos pela empresa em dois objetivos a serem atingidos de modo que a mesma possa adquirir um melhor desempenho financeiro e competitivo no mercado no qual atua. Vale salientar que a relação de diminuição entre os dois grupos de custos podem estar diretamente ou inversamente relacionadas, ou seja, os valores obtidos para as variáveis de decisão envolvidas no problema nem sempre conseguem diminuir os dois conjuntos de custos ao mesmo tempo. Tais variáveis podem aumentar os custos relacionados ao estoque desses produtos, mas aumentar o conjunto de custos associados ao marketing comercial desse mesmo produto.

De acordo com Oliveira (2005), os problemas de otimização multiobjetivo são caracterizados por otimizar (maximizar ou minimizar) “um vetor composto por funções escalares, escolhidas de forma a avaliar o impacto das decisões viáveis sobre diferentes índices de desempenho.”

As ferramentas matemáticas necessárias da teoria de otimização não-linear para encontrar a solução para o problema proposto está fundamentada na técnica de programação geométrica, construída para desenvolver a teoria de dualidade para uma classe específica de problemas, onde baseia-se na relação entre as desigualdades aritmética e geométrica para números reais positivos.

No algoritmo proposto é utilizada a técnica de condensação, descrita nos trabalhos de (BEIGHTLER; PHILLIPS, 1976) e em (YANG; BRICKER, 1997). Essa é uma técnica desenvolvida especificamente para tratar de problemas de programação geométrica signomial. Em (NASCIMENTO; ANDRADE, 2001) um pseudocódigo explicita como funciona o algoritmo que tem demonstrado ser uma ferramenta poderosa para resolver uma ampla variedade de problemas dessa natureza.

Este trabalho tem a finalidade de otimizar o controle de estoques com a tomada de decisão em um ambiente multiobjetivo resolvendo um modelo de estoques por meio da técnica de programação geométrica via condensação.

1.1 Justificativa

Estoque é um dos elementos cujo tratamento dentro de uma organização deve ser especial. É no estoque que está as oportunidades de lucro e planejamento para situações adversas. Devido a natureza do produto a ser estocado deve-se ter cuidado com o tempo e a quantidade a ser estocada.

Algumas empresas adotam estratégias bastante conhecidas de gerenciamento de estoques, entre elas temos a curva ABC, o sistema de controle de estoques de período fixo, o sistema da quantidade de pedido fixo, o sistema de reabastecimento opcional, a análise vital, essencial e desejável - VED, a análise XYZ baseado no valor do estoque, a FNSD (*Fast - Normal - Slow - Dead*) baseada na taxa de utilização dos itens ou na movimentação dos itens e o Just-in-Time, que busca produzir sem gerar estoques. (MURTHY, 2007)

Dependendo da natureza da organização, o estoque pode estar intrinsecamente relacionado às vendas ou aos negócios efetuados pela organização por meio da propaganda de produtos que sejam mantidos em estoque. Portanto, o efeito do marketing está diretamente vinculado ao nível de estoque.

A teoria de estoques existente na literatura é bastante vasta quando trata-se apenas do problemas de gerenciamento de estoques pertencente a Programação Geométrica como pode ser comprovado com as referências discutidas no capítulo 2. No entanto, quando o termo adicional da propaganda é analisado juntamente com o nível de produção como uma segunda função objetivo, são poucos os trabalhos encontrados resolvidos por meio de Programação Geométrica. Em Sadjadi, Oroujee e Aryanezhad (2005), foi proposto um modelo para um único item integrando produção, marketing e estoques em um problema de programação geométrica signomial em que a demanda está relacionada ao custo de marketing e ao preço de venda, mas o mesmo é composto de uma única função objetivo, é irrestrito e busca a determinar o tamanho do lote de produção, o custo de marketing e o preço de venda do produto.

Estudar o modelo do tamanho do lote econômico (EOQ) vinculado ao marketing além de buscar a redução dos custos associados a estocagem de um produto também necessita que os custos com propaganda sejam mínimos. Esse modelo de planejamento de estoques associado ao marketing torna necessário a utilização da teoria de otimização multiobjetivo, a qual contém as ferramentas capazes de determinar uma política de estoques ótima.

A otimização multiobjetivo também está associada à necessidade das empresas considerarem múltiplos objetivos na tomada de decisão sobre situações-problema que as mesmas enfrentam. Alguns dos problemas do mundo real tem essencialmente mais de um objetivo a

atingir, nos quais os tomadores de decisão avaliam as melhores alternativas capazes de gerar uma solução aproximada de acordo com os múltiplos critérios considerados.

As contribuições no campo do conhecimento das decisões multiobjetivo tem gerado muitas publicações de resultados interessantes como em (COHON, 1978), (SAWARAGI; NAKAYAMA; TANINO, 1985), (MIETTINEN, 1999), (EHRGOTT, 2005), (CHANKONG; HAIMES, 2008) e (BRANKE; MIETTINEN; SLOWINSKI, 2008).

O problema estudado está presente em algumas situações reais, basta considerar as organizações que produzem os item a serem estocados e que, além disso, investem fortemente na propaganda comercial desses itens. Islam (2008) cita um exemplo para uma indústria de refrigerantes, no qual o estoque é composto de apenas um único item, o refrigerante, cuja quantidade de pedido ótima é determinada levando-se em consideração os custos com marketing associados.

Mesmo que o modelo do presente trabalho tenha um número de restrições reduzido e poucas variáveis de decisão, o seu grau de complexidade consiste na natureza das funções objetivo e restrições, as quais são não lineares e são funções signomiais de programação geométrica. Além disso, o grau de dificuldade definido como o número de termos do problema menos o número de variáveis - um é variável e maior do que zero, o que gera considerável nível de dificuldade na manipulação e interpretação dos instrumentos de busca de soluções (teoria e algoritmos).

Do ponto de vista da gestão, os estoques representam um fator de eficiência e competitividade para as organizações em virtude dos altos investimentos financeiros efetuados.

Na manufatura, outros motivos reforçam a necessidade de uma gestão eficiente dos estoques por meio das técnicas da pesquisa operacional. Dentre eles, estão as funções exercidas pelos estoques ao longo do processo produtivo de uma empresa sendo a mais importante a de que os estoques atuam como regulador das diferentes taxas de fornecimento e demanda.

No interior de um sistema produtivo, Corrêa, Gianesi e Caon (2007) definem mais alguns fatores que explicam as razões que levam à criação de estoques. Dentre eles estão:

- A falta de coordenação entre fases de um processo de transformação produtivo, causadas por variações de taxas do mercado consumidor;
- os altos tempos de preparação de máquinas, que causam a produção de lotes maiores que o necessário de modo a diminuir o custo inerente à troca de produtos na máquina;
- os preços altos de itens a serem comprados pela empresa que levam a formação de lotes maiores desse item de modo a gerar uma redução nos custos de compra associados;

- a falta de coordenação informacional entre os setores de demanda e da necessidade de suprimentos para atender a essa demanda;
- as informações prévias sobre o grau de incerteza existente entre as diferenças das taxas de fornecimento e demanda podem ou não contribuir para a coordenação desses dois fluxos em etapas do processo de transformação produtivo;
- a especulação associada à compra e venda de materiais, onde a empresa sabe previamente da ocorrência de escassez na oferta de determinado produto, beneficia-se com os preços elevados correspondentes e obtém um aumento nos lucros neste período;
- as distâncias entre as indústrias de manufatura e seu mercado consumidor, onde o consumo de produtos caracteriza-se por ser contínuo, necessitando, portanto, de uma operação logística para o transporte dos produtos de modo que o fluxo contínuo de escoamento pelo canal de distribuição ocorra normalmente, também gera estoques. Isso envolve a distribuição por armazéns, entrepostos e os vários tipos de meios de transporte.

A implantação de um sistema de administração da produção adequado pode eliminar os estoques resultantes da falta de coordenação informacional entre fases de um processo de transformação já que os tomadores de decisão poderão dispor de informações sobre quais, quanto e quando serão necessários os suprimentos de recursos produtivos de modo a atender a demanda. Entretanto, as demais razões para o surgimento dos estoques tais como: (1) garantia da confiabilidade de fornecimento de itens antes incertos; (2) ocorrência na quebra de uma máquina; (3) redução no tempo de *setup*; (4) redução dos custos do processo de compra de um produto, não serão extintas e para impedir que o fluxo de produção não seja interrompido um estoque de segurança deve existir. (CORRÊA; GIANESI; CAON, 2007)

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Propor um modelo de estoques através da técnica de programação geométrica via condensação em um ambiente multiobjetivo.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Investigar modelos de estoques;
- formular o problema multiobjetivo não-linear de planejamento de estoques e marketing mono-item e multi-item;
- investigar os resultados e técnicas da teoria de otimização multiobjetivo para resolver os problemas mono-item e multi-item;
- estudar a técnica da programação geométrica adequada para a resolução do problema tema da pesquisa;
- aplicar a técnica de condensação utilizada para resolver problemas de Programação Geométrica (PG) signomial nos problemas de planejamento de estoques e marketing mono-item e multi-item;
- implementar o algoritmo da condensação usando a ferramenta Ggplab para resolver os problemas propostos.

1.3 Organização da Dissertação

O desenvolvimento do trabalho e a apresentação dos resultados estão organizados da seguinte maneira:

1. O capítulo 2 apresenta os trabalhos que envolvem modelos de planejamento de estoques e marketing, programação geométrica e em alguns deles a otimização multiobjetivo, de modo a mostrar a importância de se agrupar essas três áreas como foi feito no presente trabalho.
2. No capítulo 3 são descritos de modo geral os modelos básicos de estoques encontrados na literatura, sem a presença da componente marketing, para mostrar a variedade de modelos

a partir dos quais se pode obter extensões, como os modelos nos trabalhos mencionados no capítulo 2 e o modelo tratado no presente trabalho.

3. O capítulo 4 é composto pelos métodos da teoria de otimização multiobjetivo que tem relações diretas com o Método das Métricas Ponderadas, escolhido para escalarizar o problema bi-objetivo de planejamento de estoques e marketing para um único item e para n itens. Além disso, o capítulo é composto também pela teoria de Programação Geométrica, da qual pertence o problema bi-objetivo de planejamento de estoques e marketing e a técnica da Condensação que com a ferramenta GGPLAB foi capaz de resolvê-lo por meio de um algoritmo desenvolvido para a Condensação com a ferramenta GGPLAB testado em problemas clássicos na literatura.
4. No capítulo 5 são desenvolvidos os problemas bi-objetivos de planejamento de estoques e marketing para um único item e sua generalização para o caso multi-item. Posteriormente foram apresentadas as respectivas escalarizações de acordo com o método escolhido, o método das Métricas Ponderadas, para os casos em que $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$.
5. No capítulo 6 foi apresentado um exemplo numérico para o problema com um único item obtido em Islam (2008), com o qual um problema particular foi obtido e solucionado por meio do algoritmo da Condensação usando Gpposy, com posterior análise comparativa da solução obtida com a solução de Islam (2008). Posteriormente, utilizou-se dados de entrada semelhantes aos do trabalho de referência utilizado, para os outros 4 itens restantes, de modo a exemplificar o problema bi-objetivo de planejamento de estoques e marketing com 5 itens, com sucesso na obtenção de solução para o mesmo por meio do algoritmo da Condensação usando Gpposy.
6. As considerações finais da dissertação e sugestão para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 7.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O presente trabalho tem como base o artigo de Islam (2008) para desenvolver no capítulo cinco o problema de otimização multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing mono-item (5.3) e uma generalização direta do problema de planejamento de estoques e marketing de Islam(2008) para multi-itens (5.22) . Além disso, as definições dos tipos de custos associados a um modelo de estoques, os tipos de modelos de estoques existentes com demanda determinística bem como as diversas hipóteses associadas a construção de cada modelo de estoques necessários à compreensão do problema de estoques desenvolvido na presente pesquisa podem ser encontrados em (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (EISELT; SANDBLOM, 2010), (MOREIRA, 2004), (MURTHY, 2007), (MUCKSTADT; SAPRA, 2010), (AXSÄTER, 2006) e (TAHA, 2008).

A questão a ser respondida com o estudo da teoria de estoques é determinar o momento e a quantidade de estoque a ser reabastecido de modo a minimizar a soma total dos custo associados por unidade de tempo. Dessa forma, os modelos de estoques são construídos por meio dos custos associados e são baseados em hipóteses.

De acordo com (MUCKSTADT; SAPRA, 2010), (AXSÄTER, 2006), (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (TAHA, 2008), (MURTHY, 2007), (EISELT; SANDBLOM, 2010) a função a ser minimizada é a função de custo total de estoques composta pelos custo por encomenda ou produção, custo de tempo de preparação, de manutenção e custo por escassez. Existem variantes dessa formulação nas quais não é incorporada o custo de preparação, mas pertencem a classe de modelos dinâmicos, que não faz parte da presente pesquisa.

O modelo mais elementar refere-se ao modelo do tamanho do lote econômico EOQ (*economic order quantity*), encontrado nas literaturas citadas acima cujas variantes, quando a demanda determinística e constante, são modelos que incluem descontos no custo unitário de aquisição por quantidade encomendada, falta planejada de produto, taxa de produção finita, n

itens a serem estocados sob alguns tipos de limitação.

Para os modelos onde a hipótese de que a demanda assume diferentes valores constantes de um período para outro e onde a demanda é probabilística ou estocástica discreta e contínua, isto é, não é conhecida, mas existe uma função de densidade de probabilidade associada a ela, os quais classificam-se como modelos dinâmicos e estocásticos também se encontram em quase todas as literaturas acima mencionadas, mas com maior profundidade para o caso dinâmico em (WAGNER, 1969) e no caso estocástico em (MUCKSTADT; SAPRA, 2010), (AXSÄTER, 2006). Os problemas dinâmicos são resolvidos geralmente por meio de algoritmos para programação dinâmica, possibilitando o desenvolvimento de heurísticas. Já os modelos estocásticos variam entre aqueles de único período, modelos com e sem custos de preparação, modelos multi-períodos, modelos de revisão contínua ou periódica dinâmica estocástica.

O diagrama a seguir resume os tipos de modelos de estoques comumente encontrados na literatura.

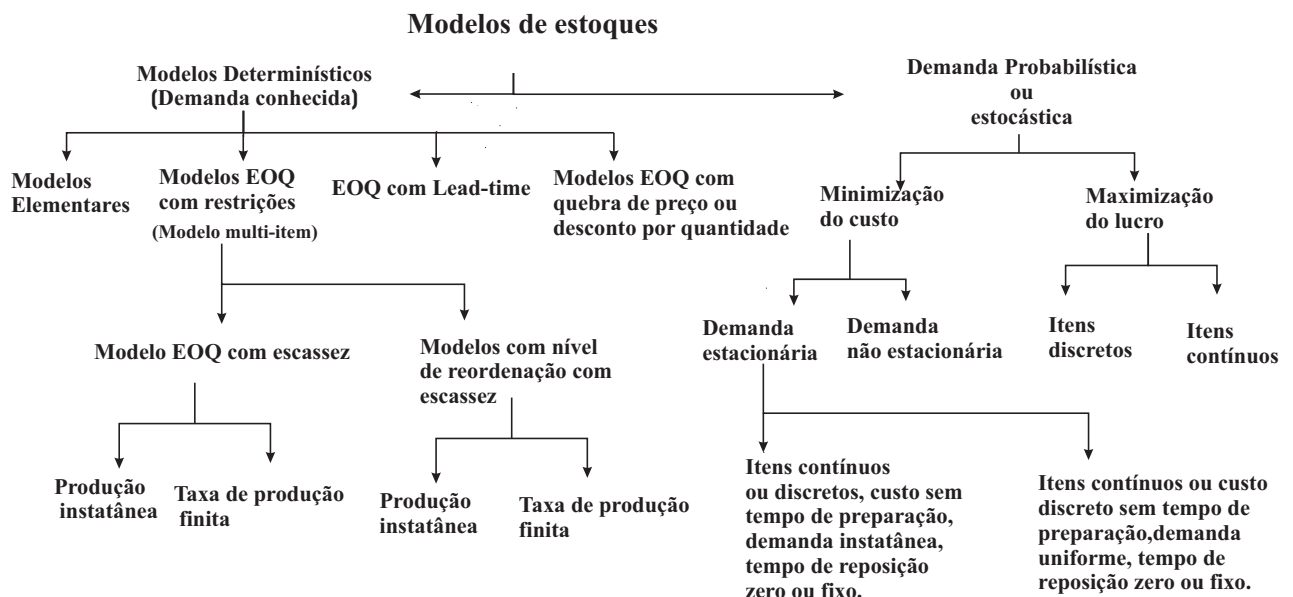


Figura 2.1: Classificação dos modelos de estoques
Fonte: Murthy, 2007, p. 374

Dentre os trabalhos pesquisados na literatura que tratam de modelos de estoques com demanda determinística, com único item ou multi-item multiobjetivo, cuja técnica de escalização fosse o método das métricas ponderadas e o problema resultante pertencesse à classe de problemas de programação geométrica signomial tem-se apenas o trabalho de Islam (2008) utilizado para desenvolver a presente pesquisa.

Dentre o amplo campo de tipos de modelos de planejamento de estoques, foram selecionados aqueles que tem como técnica de solução a programação geométrica, sejam problemas de programação geométrica posinomial ou signomial. Essa particularização se deve à importância

que a programação geométrica tem na determinação da solução para o modelo multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing proposto por Islam (2008). Os trabalhos mencionados a seguir, envolvendo além da demanda determinística que é a tipologia apresentada no modelo estudado e solucionado nesta pesquisa, trabalhos onde a demanda é probabilística e problemas com parâmetros Fuzzy, cujo critério de escolha é ser um modelo de estoques e conter a técnica de programação geométrica, já que problemas multiobjetivo que também utilizasse a PG para obter a solução do modelo não foram encontrados.

Os trabalhos seguintes tratam de problemas de programação geométrica posinomial, cuja solução é obtida por meio do problema dual associado. Cheng (1989) desenvolveu uma extensão do modelo EOQ clássico considerando a hipótese de que o custo unitário de produção é inversamente relacionado à demanda, que a taxa da demanda é igual à taxa de produção e tem como variáveis de decisão tanto a demanda e a quantidade de pedido. Em 1989 Cheng tratou do modelo da quantidade de produção econômica clássico (*EPQ*) onde o processo de produção é flexível e imperfeito, tendo como hipótese que o custo total de juros e depreciação por ciclo de produção está relacionado: inversamente ao custo de *set-up* e diretamente à confiabilidade do processo de produção. Lee (1994) desenvolveu um modelo no qual o problema resultante é de programação não convexa multi-item modificado da quantidade de lote econômico (EOQ) para maximização do lucro de preços e da quantidades de pedidos, com hipótese de que o custo de compra unitário era função continuamente decrescente da quantidade de pedido e que a demanda era inversamente relacionada ao preço e sob restrições de espaço de armazenamento e de orçamento para investimento em estoques. Em Abou-El-Ata, Kotb (1997) apresentou o modelo EOQ multi-item para minimização dos custos, onde o custo de manutenção estava variando em função da quantidade encomendada, não sendo permitida faltas planejadas, sob restrições para o número de encomendas anuais e no custo de manutenção total. Em 1998, Kim e Lee propuseram um modelo para a determinação simultânea do preço de um item e do tamanho do lote econômico ótimos, onde a demanda é uma função decrescente do preço de venda. Os três problemas obtidos são problemas de maximização do lucro com as respectivas restrições de capacidade de mão-de-obra fixa e variável, isto é, com capacidade de expansão e redução da mão-de-obra, que nestes casos são variáveis de decisão. Os problemas são de programação geométrica signomiais transformados em posinomiais por meio da substituição da função objetivo pelo inverso de uma nova variável que limita superiormente a função objetivo como restrição. Em 2003, Abou-El-Ata, Fergany e El-Wakeel também obtiveram um modelo multi-item em que a demanda é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade conhecida, onde o nível de estoque máximo de cada item é uma múltiplo constante da quantidade média de

pedido. O custo por pedido unitário é uma função contínua crescente do número esperado de períodos para reabastecimento com restrições para o custo de encomenda e para o custo de manutenção esperado. Jung e Klein (2001) propuseram dois modelos (*EOQ*) clássicos em que o custo unitário é fixo. O primeiro modelo resulta em problema posinomial de minimização do custo total onde o custo unitário é uma função da demanda e o segundo modelo resulta em um problema signomial para maximização do lucro em que o preço unitário é uma função decrescente da demanda.

Em 2005, Jung e Klein trataram de três extensões do modelo *EOQ* clássico com uma relaxação na hipótese de que o custo unitário é variável, obtendo três modelos de PG posinomial para a minimização dos custos médios totais para um único item. Os modelos diferem por considerar que o custo unitário relaciona-se a demanda, em seguida a quantidade de pedido, e por fim com a quantidade de pedido e demanda. Ainda no mesmo ano, Sadjadi, Oroujee e Aryanezhad apresentaram um modelo onde está presente simultaneamente estoques, produção e marketing resultando em um problema para único item irrestrito de PG signomial com uma única função objetivo, onde as variáveis de decisão são o tamanho do lote, o custo de marketing e o preço de venda do produto. Além disso, a demanda está relacionada ao preço de venda e ao custo de marketing. Para solucionar o problema foi utilizado uma transformação que torna o problema de PG signomial em posinomial, resolvido pelo dual de PG associado usando busca local. Em 2006, Jung e Klein propuseram esse modelo, com as mesmas hipóteses do trabalho de 2005, mas com a função objetivo de maximização dos lucros, o que resultou em um problema de programação geométrica signomial, resolvido por meio da transformação do problema signomial em um problema posinomial de acordo com (KIM; LEE, 1998).

Em 2006, Safaei, Sadjadi e Babakhani desenvolveram um modelo de programação geométrica signomial resolvido por meio do pseudo-dual de programação geométrica, que gera soluções de mínimo local e para encontrar o mínimo global é usado o algoritmo genético para determinação das variáveis preços de venda e custo de marketing, em que o volume de produção está definido para dois mercados, sendo que no primeiro mercado ela depende do preço de venda, mas no segundo mercado a dependência passa a ser também com o custo de marketing, os custos de produção unitários para os respectivos mercados dependem dos respectivos volumes de produção. Também nesse ano, Mandal, Roy e Maiti propuseram um problema não-linear de PG signomial para um modelo de estoques multi-item com deterioração sob limitação espacial para determinar o tamanho do ciclo de produção com e sem truncamento dos termos de deterioração, que foi resolvido usando tanto o método dos multiplicadores de Lagrange quanto o pseudo-dual de PG para posterior comparação de soluções.

Em 2007, Leung propôs um modelo clássico da quantidade de produção econômica *EPQ* onde o processo de produção é flexível e imperfeito e o objetivo foi de minimizar uma função de custos de programação geométrica posinomial, com destaque para a hipótese de que todos os itens estão sujeitos a inspeção e descarte para aqueles defeituosos. Além disso os juros e a depreciação por ciclo de produção são inversamente relacionados ao custo de preparação (*set-up*) e diretamente relacionado ao processo de confiabilidade. No mesmo ano, Esmaili e Zeephongsekul, propuseram um modelo para preços conjuntos e dimensionamento de lotes com a presença da componente desconto, onde a demanda é uma função do preço e do desconto e o custo de produção é uma função do volume de produção. A função objetivo para o lucro do fabricante é uma função de PG signomial que é transformada em um problema posinomial com restrição de volume de produção como em (KIM; LEE, 1998).

Em 2008, Sadjadi e Arabzadeh propuseram um modelo de programação geométrica multi-objetivo para determinar o preço de venda de produtos em dois mercados e os custos de marketing, onde a demanda é uma função do preço de venda e do custo de marketing em dois mercados e o custo de produção em função da demanda em ambos os mercados. No mesmo ano, Cruz, Diaby e Nsakandra propuseram um problema de programação não linear, não convexo, multi-item em um ambiente JIT, com demanda determinística de modo a obter os níveis ótimos de redução dos tempos de setup, de melhoria de processo, dos investimentos correspondentes e do tempo de ciclo de produção para cada produto, sob as restrições de capacidade de produção, capacidade de armazenamento, receita para melhoria da qualidade, redução dos tempos de *set-up*, restrição lógica do tempo de ciclo, redução de *set-up* e da melhoria da qualidade. O problema obtido é primeiramente suavizado para posteriormente ser aproximado por um problema equivalente convexo de programação geométrica posinomial na forma padrão.

Em 2009, Fathian, Sadjadi e Sajadi também desenvolveram um problema de PG signomial de maximização do lucro com única função objetivo a partir de um modelo que tem como base analisar o método de fixação de preços e a qualidade do serviço de empresas E-business. O modelo proposto abordava bens não-digitais fornecidos através de supermercados web. Nele a demanda é uma função do preço de venda, do custo de marketing e da qualidade de serviço. O problema foi transformado em um problema posinomial com a substituição da função objetivo por uma nova variável e a transformação da mesma em restrição. Em 2009, Nezami, Aryaneshad e Sadjadi trataram de um modelo que considera um fabricante de um único produto a ser vendido em um mercado competitivo com um grande concorrente. A demanda é uma função não-linear de preço unitário e o a taxa de penetração de mercado é a razão entre

o preço de venda do mercado competidor e a soma dos preços de venda do fabricante e de seu concorrente. Não são permitidas faltas planejadas de produto, o lead-time é zero e a taxa de produção é instantânea. O problema formulado busca maximizar o lucro, sob a restrição de que o preço de venda unitário não excede o preço de venda do concorrente mais um. O problema é de PG signomial que é transformado em um problema posinomial como foi feito em (FATHIAN; SADJADI; SAJADI, 2009). Em 2010, Sadjadi, et. al. propuseram um modelo de estoques para maximizar a diferença entre os lucros e custos associados de produtos imperfeitos com demanda em função do preço de venda e do custo de marketing e o custo total de juros e desvalorização do produto em uma função da confiabilidade da produção de custo de *set-up* por ciclo de produção e do custo de manutenção unitário. O problema tem restrição associada a confiança na quantidade de produção e pertence a classe de problemas de PG signomial, resolvido da mesma forma que em (FATHIAN; SADJADI; SAJADI, 2009).

Em 2011, Sadjadi, Yazdian e Shahanaghi propuseram um modelo da quantidade de produção econômica (*EPQ*) onde a demanda é uma função do preço unitário, da qualidade do produto e do vetor volume de investimentos em diferentes canais de marketing, o custo de produção unitário é uma função do tamanho do lote, da qualidade do produto e da confiabilidade do processo e os juros e custos de depreciação estão em função do custo de preparação (*set-up*) e da confiabilidade do processo de produção. A função objetivo resultante é uma função signomial de maximização do lucro com restrições para o orçamento de marketing, capacidade de produção e espaço de armazenamento, que é convertida em um problema posinomial e resolvido por meio de *CVX*, um sistema de modelagem de otimização convexa implementado em Matlab (<http://cvxr.com/cvx/>).

Em 2011, Kotb e Fergany tratam de um modelo EOQ de estoques multi-item onde o custo de manutenção é uma função continuamente decrescente da quantidade de pedido, a taxa de produção é finita e constante e apresenta restrições para a número total de pedidos e para o custo de manutenção total. O problema busca minimizar o custo total, que é uma função posinomial de PG, onde a variável é a quantidade de produção para o r -ésimo item. A solução é obtida por meio do dual de PG com aplicação posterior do problema em cinco exemplos numéricos particulares. Ainda em 2011, Kotb e Fergany trataram também do modelo EOQ de PG posinomial de minimização dos custos totais para múltiplos itens onde o custo unitário é uma função da demanda e o custo de menor tempo de espera de execução de uma atividade está relacionado com o tempo de espera. Também no mesmo ano, Kotb, Genedi e Zaki propuseram um problema posinomial de PG para minimizar a função de controle estatístico da qualidade com com restrições para o custo de manutenção e para a área de armazenamento esperados,

onde a demanda é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida e as variáveis de decisão são o número de períodos e o nível máximo de estoque ótimo para o modelo EOQ com *Lead Time* zero e sem escassez permitida. Também no mesmo ano Bayati e Makui apresentam um modelo bi-objetivo de planejamento de marketing, com funções objetivo de programação geométrica signomial para maximização de lucro de modo a determinar o custo de marketing, o custo do serviço e o preço de venda do produto em dois mercados competitivos para o comércio eletrônico via internet por meio de provedores digitais que buscam estratégias que considerem a preferência do consumidor de modo a obter mais lucro criando uma vantagem competitiva contra seus concorrentes. As hipóteses do modelo são de que a demanda é uma função do preço de venda, do custo de marketing e do custo de serviço em dois mercados e o custo unitário de produção é uma função da demanda. As funções objetivo são tratadas em problemas irrestritos de modo separado, que posteriormente com transformados em problemas posinomiais restritos e resolvidos por meio do método das métricas ponderadas apenas para $p = 1, 2$. Também em 2011, Kotb propôs um modelo multi-item para o controle estatístico da qualidade do tamanho do lote, determinando a quantidade de pedido, onde o problema é composto por uma função objetivo posinomial, com restrições para o espaço de armazenagem e de custo de preparação (*set-up*) totais, onde o custo de manutenção é uma função crescente da quantidade de produção.

Em 1997, Roy e Maiti obtiveram um problema de PG posinomial fuzzy para o modelo *EOQ*, com restrição de armazenamento espacial, onde o custo de preparação é uma função da quantidade produzida ou comprada e o custo de produção unitário dependente da demanda. Em 2005, Mandal, Roy e Maiti propuseram um modelo multiobjetivo e multi-item com escassez planejada e a demanda dependente do custo unitário, com restrições de armazenamento espacial, do número de pedidos efetuados por ciclo de produção e de investimento no custo de produção total em um ambiente fuzzy resolvido por meio de programação geométrica, onde foi considerado o método da ponderação para agrupar as funções objetivo em uma única função objetivo, resultando em um problema de PG signomial Fuzzy solucionado por meio do pseudo-dual. Em 2006, Mandal e Roy desenvolveram um modelo multi-item para o tamanho do lote com produção finita e com retrabalho para para itens com qualidade imperfeita. Os custos são considerados como números híbridos, isto é, são de natureza fuzzy tanto quanto variáveis aleatórias, convertidos em problemas multiobjetivos de programação geométrica posinomiais resolvidos por meio do método da ponderação e dual posinomial associado. Ainda nesse mesmo ano, Mandal, Roy e Maiti desenvolveram um modelo de estoques multi-item com restrição de espaço de armazenamento em um ambiente crisp e irrestrito em um ambiente Fuzzy, obtendo

problemas de PG signomiais solucionados por meio do pseudo-dual associado a cada situação. Em 2008, Panda, Kar e Maiti propuseram um modelo *EOQ* multi-item, considerando que os custos são de natureza fuzzy/híbrida sob limitações de recursos tanto como quantidades fuzzy quanto como quantidades fuzzy e fuzzy-aleatória de espaço de armazenamento e de orçamento total disponível, onde os problemas são de PG signomiais resolvidos por meio do pseudo-dual, após a utilização do método da ponderação para um dos modelos multi-item e multiobjetivo crisp irrestrito de programação não-linear. Em 2009, Panda e Maiti propuseram um modelo da quantidade de produção econômica (*EPQ*) multi-item onde a demanda é função do preço de venda, o custo de produção unitário é uma função do nível de estoque, o custo de manutenção é uma função do custo unitário e os custos com os juros e depreciação por ciclo de produção em função do custo de preparação e confiabilidade do processo. Os modelos são desenvolvidos em dois ambientes fuzzy, onde tanto o primeiro problema quanto o segundo são de PG signomial resolvidos por meio do pseudo-dual associado. Em 2010, Sadjadi, Ghazanfari e Yousefli propuseram um problema de PG signomial fuzzy irrestrito para determinação do preço de venda, do custo de marketing e da quantidade de pedido pertencentes ao conjunto fuzzy, onde a demanda é uma função do preço de venda e do custo de marketing e o custo de aquisição do produto é uma função da quantidade de pedido.

As soluções eficientes ou Pareto-ótimas para o problema de otimização multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing desenvolvido no capítulo 5 poderão ser obtidas quando inicialmente for feita uma transformação do problema de otimização multiobjetivo para um problema com uma única função objetivo utilizando o método das Métricas Ponderadas, encontrado em (MIETTINEN, 1999), (CHANKONG; HAIMES, 2008), (EHRGOTT, 2005) e (JAHN, 2011). Estes últimos juntamente com os trabalhos de (COHON, 1978) e (SAWARAGI; NAKAYAMA, TANINO, 1985) vem contribuindo com muitos resultados importantes relacionados à Teoria de Otimização Multiobjetivo ou Vetorial, que vão desde a definição do tipo de solução para esta classe de problemas até os métodos de obtenção de soluções eficientes. Os resultados gerais que tratam de conjuntos totalmente ordenados onde é possível definir uma solução eficiente bem como dos métodos (não-preferenciais, preferenciais e iterativos) que relacionam as soluções de uma função vetorial com as soluções de uma função escalar.

O problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing obtido posteriormente no capítulo 5 pertence a classe de problemas de programação geométrica signomial, cuja teoria encontrada em (DUFFIN; PETERSON; ZENER, 1967), (BEIGHTLER; PHILLIPS, 1976), (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 1993), (YANG; BRICKER, 1997), (NASCIMENTO; ANDRADE, 2001) e (OLIVEIRA, 2005) é descrita no capítulo 4.

Após a etapa de descrição dos métodos que reduzem o problema multiobjetivo para um problema mono-objetivo com a escolha do Método das Métricas Ponderadas para transformar o problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing para um único item e para n itens em um problema escalarizado, desenvolveu-se um algoritmo para a técnica de condensação descrita no capítulo 4 por meio dos trabalhos acima citados utilizando a ferramenta GGPLAB (GGPLAB: A Simple Matlab Toolbox for Geometric Programming, 2006).

A escolha dos trabalhos acima mencionados foi feito de acordo com a natureza dos problemas de planejamento de estoques, os quais pertenciam a classe de problemas de Programação Geométrica. Na totalidade dos trabalhos pesquisados em que o problema pertencia a classe de problemas de programação geométrica signomial, não foi evidenciada a utilização da técnica da condensação, que é a técnica clássica de resolução. Além disso, de acordo com as descrições feitas dos trabalhos anteriormente, não foram encontrados problemas com múltiplas funções objetivos e de programação geométrica signomial que utilizassem a técnica da Condensação na obtenção de solução, exceto em Islam (2008) que teve o problema utilizado como base para o desenvolvimento do presente trabalho, bem como o exemplo numérico para o caso do problema de planejamento de estoques e marketing com um único item.

Com a pesquisa acima realizada observa-se que esse capítulo expôs a importância do presente trabalho para o campo das aplicações na área de programação geométrica signomial visto que utiliza um problema já exposto na literatura para o caso de um único item, mas que explicita o desenvolvimento algébrico, o avanço computacional por meio de um algoritmo para a técnica da Condensação e a aplicação do algoritmo não apenas para o caso de um único item, mas para uma generalização direta do problema de planejamento de estoques e marketing com n itens, com ambos os problemas descritos com uma formulação geral no capítulo 5 e solucionados por meio do algoritmo da Condensação, quando particularizados por meio de dados iniciais, no capítulo 6.

Essa pesquisa evidenciou também a importância da classe de problemas de Programação Geométrica no campo da Engenharia de Produção, e mais particularmente, dentro do controle de estoques, mostrando que problemas não lineares estão mais presentes dentro da área de controle e planejamento de estoques do que se imagina e que necessitam de domínio da teoria de Programação Geométrica em sua totalidade na obtenção de solução.

Capítulo 3

Modelos de Estoques

Existe na literatura dois padrões para o consumo de um item em um determinado período de tempo que são determinantes na escolha da estratégia do controle de estoques. Tais padrões referem-se à natureza da demanda: independente e dependente.

A demanda é dita independente quando a quantidade demandada por um item depender apenas do mercado, não havendo qualquer controle por parte da empresa, apenas estímulos sob a forma de promoções e redução de preços. Esse comportamento é característico tanto dos produtos acabados quanto dos materiais para reposição. O sistema de controle de estoques abordado no presente trabalho, nos capítulos cinco e seis, é aplicado aos itens com demanda independente.

Quando uma organização programa internamente o consumo de um item, esse é considerado de demanda dependente. Enquadra-se nesse grupo as matérias-primas e as peças para montagem que são utilizados na produção interna de outros itens e dependem do comportamento de mercado que é estimado por meio da previsão de demanda dos itens de demanda independente.

A classificação acima determina a abordagem utilizada na gestão dos estoques. Quando os itens são de demanda independente, a abordagem utilizada é a *reposição* do estoque de modo que o consumidor final sempre seja atendido. No caso da demanda dependente a abordagem passa a ser a de *requisição*, onde a quantidade encomendada de um item e o momento de disponibilizá-la para a produção depende de uma previsão do mercado ou de encomendas previamente fixadas. (MOREIRA, 2004)

A finalidade de um sistema de controle de estoques é determinar quando fazer o pedido de um produto e quanto encomendar desse mesmo produto. Essa decisão baseia-se na situação do estoque, na previsão da demanda e nos diferentes tipos de custos associados.

De acordo com Axsäter (2006) a situação do estoque é definida pelo estoque físico disponível. Entretanto existe a situação na qual a decisão de fazer uma encomenda possa não ser baseada apenas no estoque físico disponível. Devem ser incluídos também os casos de pedidos pendentes, ou seja, aqueles em que os produtos foram produzidos mas que não atenderam a demanda no tempo exigido. Existe ainda o caso dos pedidos não serem atendidos, isto é, a falta do produto demandada pelo consumidor.

No controle de estoques, a situação do estoque caracteriza-se pela posição do estoque, a qual é definida como sendo a soma do estoque físico disponível aos pedidos pendentes subtraído dos pedidos não atendidos.

Quando ocorre a reserva de unidades de um produto para entrega posterior ao consumidor, o produto reservado também deve ser subtraído da posição do estoque. Assim, o controle do estoques trata tanto os unidades de produtos reservados quanto dos produtos para entrega imediata. Esse fato é razoável no caso em que tempo para a entrega seja curto, o que gera custos de manutenção desnecessários. Mas no caso em que o tempo de entrega é longo, uma política mais adequada é subtrair as unidades de um produto, a partir da posição do estoque, inicialmente quando o tempo restante para efetuar a entrega for inferior a um certo limite de tempo.

Nos modelos seguintes Axsäter (2006) desconsidera as reservas de itens produzidos. Apesar de a decisões de fazer os pedidos serem baseadas na posição do estoque, os custos de manutenção e escassez dependam do nível de estoque que é definido como a diferença entre o estoque físico disponível e o pedidos não atendidos. E em alguns casos os custos de manutenção podem incluir também os custos de manutenção para pedidos não atendidos.

Alguns sistemas de controle de estoques são projetados de forma que a posição do estoque seja monitorado continuamente. Esses são denominados de sistemas de revisão contínua. Quando a posição do estoque está baixa, uma solicitação de pedido à produção é disparada e entregue após um certo tempo de espera (*Lead-Time*) L .

Segundo Axsäter (2006), o tempo de espera L é o tempo decorrido entre fazer o pedido do produto e receber o produto de modo que o mesmo esteja disponível na prateleira. É na verdade um conjunto de tempos implícitos no processo entre fazer o pedido e receber o pedido, ou seja, é um conjunto composto pelo tempo de preparação por encomenda, tempo de transporte da encomenda, tempo administrativo junto ao fornecedor e tempo de inspeção após receber o pedido.

Uma alternativa ao monitoramento contínuo da posição do estoque é a revisão periódica, onde T é o período de revisão e que consiste em considerar a posição do estoque em pontos

específicos de tempo. Em geral, os intervalos entre as revisões da posição do estoque são constantes.

Ambos os tipos de monitoramento dos níveis de estoques tem vantagens e desvantagens, que de acordo com Axsäter (2006) são apresentadas a seguir:

A revisão contínua tem a finalidade de reduzir o estoque de segurança de modo que a posição do estoque ao fazer o pedido esteja protegido contra as variações de demanda durante o tempo de espera L .

No caso da revisão periódica a indeterminação de tempo é dada por $T + L$. Considere uma revisão quando o pedido não é acionado. Uma nova oportunidade de fazer o pedido ocorrerá em um próximo período de tempo T . Consequentemente, o tempo para receber o pedido passa a ser $T + L$.

A revisão periódica aplica-se de forma mais vantajosa na situação onde o estoque de diferentes itens não pode mais ser controlado de forma independente.

Os Modelos de estoques comumente encontrados na literatura (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (EISELT; SANDBLOM, 2010), (MURTHY, 2007), (TAHA, 2008), (WAGNER, 1969), (MUCKSTADT; SAPRA, 2010), (AXSÄTER, 2006), (MURTHY, 2007), (MOREIRA, 2004) e (CORRÊA; GIANESI; CAON, 2007) se dividem em modelos determinísticos e estocásticos. Essa classificação é determinada pela natureza da demanda ao longo de um período de tempo, que pode ser uma variável conhecida ou então uma variável aleatória cuja função de distribuição de probabilidade é conhecida.

3.1 Modelo EOQ clássico

O modelo de estoques mais antigo encontrado na literatura é o modelo do tamanho do lote econômico (*EOQ*) ou modelo econômico da quantidade de pedidos. Segundo Roach (2005), o modelo surgiu em 1913 com o artigo de Ford Harris Whitman na manufatura: *The Magazine of Management*.

O modelo *EOQ* busca determinar quais quantidades de itens se deve encomendar, de modo a minimizar os custos associados.

As hipóteses do modelo *EOQ* estão presentes em quase toda a literatura mencionada anteriormente, exceto em Wagner (1969) que é um texto clássico na área de Pesquisa Operacional, que aborda de maneira mais específica os sistemas de estoques dinâmicos e estocásticos. De acordo com Lieberman e Hillier (2010), Eiselt e Sandblom (2010) as hipóteses nas quais se fundamenta o modelo *EOQ* são as seguintes:

- O estoque é composto por um único tipo de produto não perecível guardado em único espaço físico;
- a taxa de demanda é uma constante D ao longo do tempo;
- a quantidade de pedido Q necessária para reabastecer o estoque chega todo de uma só vez, no momento em que o pedido é efetuado junto à produção;
- os custos de preparação (c_3) e os custos de manutenção (h_0) são constantes ao longo do tempo;
- não são permitidas faltas planejadas do produto, ou seja, o custo por escassez unitário $c_2 = 0$;
- não há descontos pelo tamanho do lote encomendado;
- a quantidade no lote não precisa ser um número inteiro;
- o horizonte de planejamento é infinito.

O figura (3.1) seguinte mostra o diagrama em que o tamanho de pedido Q considerado é o mesmo para cada período de comprimento T . Assim, os níveis de estoque ao longo do tempo apresentam um padrão característico ao gráfico da função T -periódica chamada de dente de serra e apresentada na figura (3.2). Essa função é uma extensão em toda a reta $\mathbb{R}$ da função $f(t) = Q - Dt$ com $t \in (0, T)$.

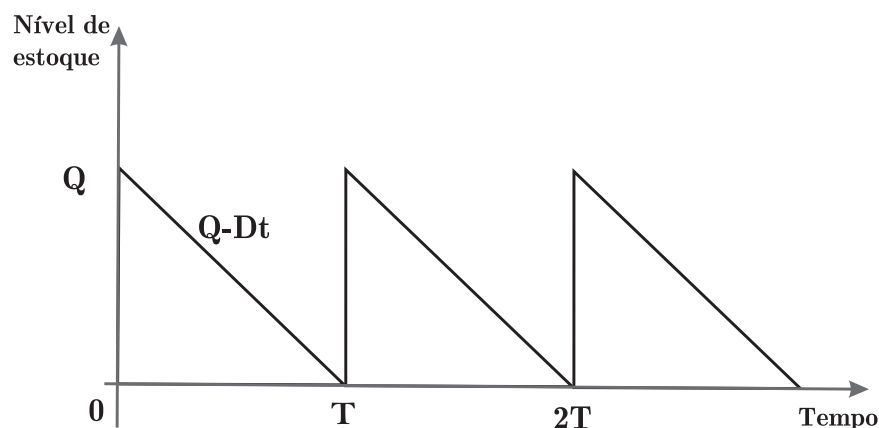


Figura 3.1: Diagrama para o nível de estoque em função do tempo T .
(HILLIER; LIEBERMAN, 2010)

No modelo estão presentes os seguintes parâmetros listados abaixo, onde apenas um deles é a variável a determinar, ou seja, devemos encontrar a quantidade ótima Q a ser encomendada que minimiza a função de custos a ela associada.

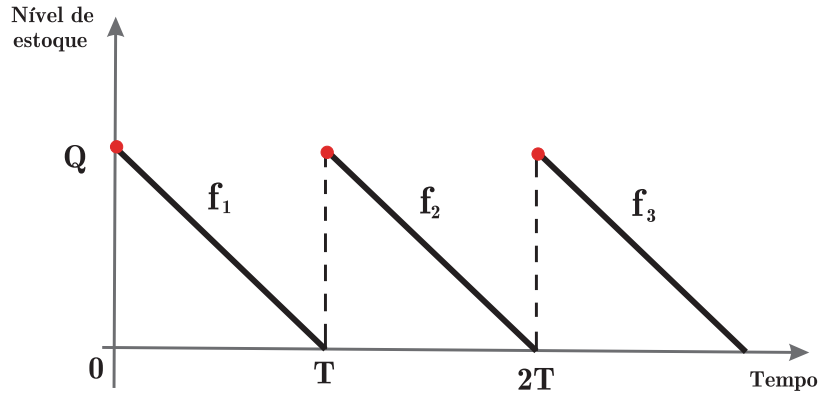


Figura 3.2: Função dente de serra, periódica de comprimento igual a T .

h_0 = custo de manutenção unitário por unidade de tempo;

c_0 = custo unitário por unidade de tempo necessário para produzir ou comprar uma unidade de um produto;

c_3 = custo de preparação ou custos de *set-up* para encomendar um lote do pedido;

D = demanda por unidade de tempo;

Q = quantidade encomendada do pedido em número de unidades (variável de decisão).

No gráfico da figura (3.2) é preciso determinar a equação da reta f_1 entre $f_1(0) = Q$ e $f_1\left(\frac{Q}{D}\right) = 0$, onde $T = \frac{Q}{D}$. Assim, considere que $f_1(t) = At + B$, onde $A, B \in \mathbb{R}$. A determinação dessas constantes é feita da seguinte forma:

$$f_1(0) = Q \quad \therefore \quad B = Q$$

$$f_1\left(\frac{Q}{D}\right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{Q}{D} \cdot A + Q = 0 \quad \therefore \quad A = -D.$$

Portanto a função $f_1(t) = Q - Dt$. Generalizando as demais funções, obtém-se as seguintes formulações:

$$f(t) = \begin{cases} Q - Dt, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{Q}{D} \\ 2Q - Dt, & \text{se } \frac{Q}{D} \leq t \leq 2\frac{Q}{D} \\ \vdots & \vdots \\ kQ - Dt, & \text{se } (k-1)\frac{Q}{D} \leq t \leq k\frac{Q}{D} \end{cases}$$

Já o nível de estoque médio é definido de acordo com o diagrama (3.1) por $\frac{Q}{2}$. Primeiramente, será determinado a função de custos totais de estoques por ciclo de comprimento T . Essa função

é composta pelos custos de manutenção, custos de preparação e custos de produção para um ciclo de comprimento T . No primeiro período, isto é, no intervalo $0 \leq t \leq T = \frac{Q}{D}$ é preciso calcular a área sob a reta f_1 , ou seja,

$$\int_0^{Q/D} (Q - Dt)dt = \frac{Q^2}{2D}. \quad (3.1)$$

Assim, como o custo de manutenção de estoque por ciclo é igual à $h\frac{Q^2}{2D}$, a função de custos totais por ciclo é definida por:

$$TC(Q) = c_3 + c_0Q + h_0\frac{Q^2}{2D}. \quad (3.2)$$

Para obter a função de custos totais por unidade de tempo é preciso tornar a função de custos totais (3.2) independente de ciclo de comprimento $T = \frac{Q}{D}$, ou seja, obter $TCU(Q) = \frac{TC(Q)}{T}$.

$$\text{Minimize}_{Q \geq 0} \quad TCU(Q) = \frac{c_3D}{Q} + c_0D + \frac{h_0Q}{2} \quad (3.3)$$

O valor ótimo Q^* que minimiza a função TCU é obtido por meio do ponto crítico obtido com o cálculo da primeira derivada, ou seja,

$$\frac{d}{dQ}(TCU(Q^*)) = -\frac{c_3D}{(Q^*)^2} + \frac{h_0}{2}.$$

Observando que toda função derivável em um ponto de $\mathbb{R}$ é contínua neste mesmo ponto, tem-se que a função TCU é contínua, e fazendo $\frac{d}{dQ}(TCU(Q)) = 0$ obtém-se:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_3D}{h_0}} \quad (3.4)$$

Calculando a segunda derivada da função TCU obtém-se que:

$$\frac{d^2}{dQ^2}(TCU(Q)) = 2\frac{c_3D}{Q^3} \leq 0, \quad Q > 0.$$

Portanto, a função TCU é duas vezes derivável, com a segunda derivada ≥ 0 . Logo, Q^* é um mínimo local. Além disso, definindo $S = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ que é aberto e convexo, obtém-se por Bazaraa, Sherali, Shetty (1993) que TCU é convexa se e somente se a derivada de ordem 2 é maior ou igual a zero.

Usando de acordo com Lima (2004) que todo ponto crítico de uma função convexa

continuamente diferenciável é um ponto de mínimo global, conclui-se que Q^* é a solução ótima de TCU .

O período de tempo correspondente é dado por $T^* = \frac{Q^*}{D}$, ou seja, $T^* = \sqrt{\frac{2c_3}{h_0 D}}$.

O valor da função objetivo TCU em Q^* é dado pela seguinte expressão:

$$TCU(Q^*) = c_3 D \left[\frac{2c_3 D}{h_0} \right]^{-\frac{1}{2}} + c_0 D + \frac{h_0}{2} \left[\frac{2c_3 D}{h_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Efetuando as simplificações obtém-se a expressão que define a função objetivo TCU , isto é,

$$TCU(Q^*) = \sqrt{2c_3 h_0 D} + c_0 D.$$

Um outra maneira de observar que a solução ótima resulta em (3.4) é através da interseção entre os gráficos das funções custo de manutenção médio anual, ou seja, $C_{h_0}(Q) = h_0 \frac{Q}{2}$ e da função custo de preparação (*set-up*) médio anual, isto é, $C_{c_3}(Q) = c_3 \frac{D}{Q}$, onde $Q \geq 0$ esboçadas na figura (3.3) abaixo.

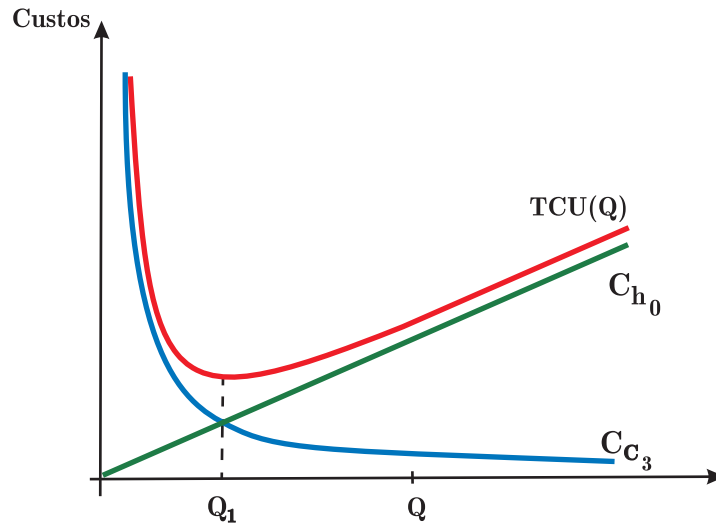


Figura 3.3: Custos associados aos estoques. (MUCKSTADT; SAPRA, 2010)

Observa-se que quando $Q = Q_1$ na figura (3.3) ocorre a interseção entre as curvas de custo de preparação e o custo de manutenção, ou seja, tem-se a seguinte igualdade $C_{c_3}(Q_1) = C_{h_0}(Q_1)$. E as expressões que definem as respectivas curvas são dadas por: $c_3 \frac{D}{Q_1} = h_0 \frac{Q_1}{2}$.

Realizando as simplificações necessárias obtém-se que $Q_1 = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0}}$. E, portanto, $Q_1 = Q^*$.

Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade trata da avaliação da perturbação causada pela utilização de parâmetros diferentes dos parâmetros de entrada do problema de programação linear associada a um modelo e estabelece um limite para os variações de tais parâmetros de modo que a solução ótima do problema não seja afetada.

Muckstadt, Sapra (2010) expandem essa análise da perturbação nos dados de entrada estabelecendo um comparativo entre os parâmetros de entrada aproximados e os reais valores para cada parâmetro do modelo, de modo a avaliar o grau de dificuldade associado a estimação dos dados de entrada.

Uma aproximação dos parâmetros é frequentemente utilizada para que o problema resultante atenda as condições de resultados da teoria de programação linear, que são utilizadas para tornar o problema solúvel, ou seja, para gerar uma solução que seja ótima e viável.

Pode ocorrer que a uma outra política de gestão de estoques seja utilizada e o custo resultante seja maior do que o valor do custo associado à quantidade de encomenda ótima.

Para medir o impacto da variação dos parâmetros de entrada na solução ótima é considerado que a quantidade de pedido atual é igual a Q_ε^* . Do modelo *EOQ* clássico obteve-se que $Q^* = \sqrt{\frac{2c_3D}{h_0}}$ se fosse possível usar os verdadeiros parâmetros de custos e de demanda. Considere os verdadeiros custos de manutenção unitário e de tempo de preparação por operação (*set-up*) iguais respectivamente a: h_{0_ε} e c_{3_ε} . Supõe-se ainda que o custo de produção unitário c_0 e a demanda D foram estimados com precisão. Considera-se como estimativas dos custos de manutenção unitários e de tempo de preparação os valores h_0 e c_3 , respectivamente. Além disso, tem-se Q^* como quantidade encomendada estimada e definida por $Q^* = \alpha Q_\varepsilon^*$.

Assim, como $\sqrt{\frac{2c_3D}{h_0}} = \alpha \sqrt{\frac{2c_{3_\varepsilon}D}{h_{0_\varepsilon}}}$ obtém-se que $\alpha = \sqrt{\left(\frac{h_{0_\varepsilon}}{h_0}\right) \left(\frac{c_3}{c_{3_\varepsilon}}\right)}$.

Como o custo de produção unitário c_0 não é influenciado inicialmente pela quantidade encomendada do pedido, ele não será considerado na verdadeira função de custo anual médio de operação. Portanto, usando que $Q_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{2c_{3_\varepsilon}D}{h_{0_\varepsilon}}}$ obtém-se que

$$\begin{aligned} TCU(Q_\varepsilon^*) &= \frac{c_{3_\varepsilon}D}{Q_\varepsilon^*} + \frac{h_{0_\varepsilon}Q_\varepsilon^*}{2} \\ &= \sqrt{2c_{3_\varepsilon}Dh_{0_\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Agora, como $Q^* = \alpha Q_\varepsilon^*$, tem-se que $TCU(Q^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) TCU(Q_\varepsilon^*)$.

Observa-se que quando a quantidade de pedido estimada é α vezes maior que a quantidade de pedido ótima, o aumento correspondente da função de custo médio anual para a quantidade estimada em relação à função de custo médio anual ótima é de $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right)$. Considerando por exemplo que $\alpha = 7$ obtém-se que $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) = \frac{25}{7} \approx 3,57$. Portanto, mesmo que ocorra uma grande perturbação entre Q^* e Q_ε^* , não ocorre o mesmo entre $TCU(Q^*)$ e $TCU(Q_\varepsilon^*)$.

Ocorre também que o aumento da função de custo médio anual ótima em relação à função de custo médio anual para a quantidade de pedido estimada é o mesmo tanto para $Q^* = \alpha Q_\varepsilon^*$ quanto para $Q^* = \frac{1}{\alpha} Q_\varepsilon^*$.

Uma outra indagação refere-se a estimativa de α pois se for possível estimar α , então a quantidade de pedido estimada Q_ε^* pode ser determinada, não havendo mais a necessidade de utilizá-la. O que é possível fazer, segundo Muckstadt, Sapro (2010) é obter uma limitação inferior e superior para α . Sejam as constantes, $L, L_1, S, S_1 \in \mathbb{R}$. Considere que o custo de preparação atual $c_{3\varepsilon}$ está entre L e S do custo de tempo de preparação estimado c_3 e que o custo de manutenção atual $h_{0\varepsilon}$ está entre L_1 e S_1 do custo de manutenção h_0 estimado, ou seja, $L \leq \frac{c_{3\varepsilon}}{c_3} \leq S$ e $L_1 \leq \frac{h_{0\varepsilon}}{h_0} \leq S_1$.

Portanto, pelo valor obtido para α obtém-se que os seguintes limites inferior e superior de α são:

$$\sqrt{\left(\frac{L_1}{S}\right)} \leq \sqrt{\left(\frac{h_{0\varepsilon}}{h_0}\right) \left(\frac{c_3}{c_{3\varepsilon}}\right)} \leq \sqrt{\left(\frac{S_1}{L}\right)}.$$

3.2 Modelo EOQ com descontos por quantidade

Esse modelo difere dos demais por considerar que os custos unitários de um item depende da quantidade encomendada no lote. É um incentivo a aquisição de quantidades maiores de um produto, de modo a diminuir a quantidade estocada e consequentemente, os custos associados. Este modelo não admite falta planejada de produto e apresenta as mesmas hipóteses do modelo EOQ clássico.

Existem dois tipos de casos onde se efetuam os descontos na quantidade encomendada. Em ambos os casos é considerado ainda que as unidades são infinitamente divisíveis e que o custo de aquisição $\alpha_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, m$.

(i) Quando ocorre um desconto no preço de aquisição para todas as unidades.

Esta é uma situação onde conforme a quantidade de um item encomendada aumenta, o custo unitário de aquisição tende a diminuir para cada unidade adquirida.

Sejam $q_1 = 0, q_2, \dots, q_j, q_{j+1}, \dots, q_m$ as quantidades de pedido nas quais o custo de aquisição se alteram.

$\alpha_1 =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_1, q_2)$

$\alpha_2 =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_2, q_3)$

$\vdots$

$\alpha_j =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_j, q_{j+1})$

$\vdots$

$\alpha_m =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_m, \infty)$.

Tem-se que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_j > \alpha_{j+1} > \dots > \alpha_m$. E como o ciclo de produção tem comprimento $T = \frac{Q}{D}$, o custo de aquisição por unidade de tempo é definido por:

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha_1 Q}{T} = \alpha_1 D, & q_1 \leq Q < q_2 \\ \vdots \\ \frac{\alpha_j Q}{T} = \alpha_j D, & q_j \leq Q < q_{j+1} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_m Q}{T} = \alpha_m D, & Q \geq q_m. \end{cases}$$

Neste modelo, o custo de manutenção também depende do custo de unitário e tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_0 + r\alpha_1, & q_1 \leq Q < q_2 \\ h_2 &= h_0 + r\alpha_2, & q_2 \leq Q < q_3 \\ &\vdots \\ h_j &= h_0 + r\alpha_j, & q_j \leq Q < q_{j+1} \\ &\vdots \\ h_m &= h_0 + r\alpha_m, & Q \geq q_m \end{aligned}$$

Note que a expressão que define o custo de manutenção é composta de duas parcelas, a primeira é o custo de manutenção puro, sem a dependência com o custo de aquisição e a segunda é o custo de capital obtido quando incorre a taxa de juros r sobre cada custo unitário α_l , com $l = 1 \dots, m$.

Como o tamanho do ciclo T neste modelo é definido por $T = \frac{Q}{D}$. E além disso, a área sob a curva da função $f(t) = Q - Dt$, para $0 \leq t \leq T$ que descreve o nível de estoque para o primeiro período é definida por (3.1).

Assim, a função de custos médios totais anuais é definida por;

$$TCU(Q) = \begin{cases} \alpha_1 D + (h_0 + r\alpha_1) \frac{Q}{2} + c_3 \frac{D}{Q}, & q_1 \leq Q < q_2 \\ \alpha_2 D + (h_0 + r\alpha_2) \frac{Q}{2} + c_3 \frac{D}{Q}, & q_2 \leq Q < q_3 \\ \vdots \\ \alpha_j D + (h_0 + r\alpha_j) \frac{Q}{2} + c_3 \frac{D}{Q}, & q_j \leq Q < q_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_m D + (h_0 + r\alpha_m) \frac{Q}{2} + c_3 \frac{D}{Q}, & q_m \leq Q \end{cases} \quad (3.5)$$

A figura (3.4) descreve a função de custos totais anuais para cada α_j onde cada intervalo é da forma $q_{j-1} \leq Q < q_j$, com $j = 1, \dots, m$. O que se observa é que a função TCU não é uma função contínua em todo o intervalo $[q_1, q_m]$, mas segmentada em várias curvas definidas sobre o intervalo descontínuo $[q_{j-1}, q_j)$. Portanto, a função TCU apresenta um conjunto finito de pontos de descontinuidade e conseqüentemente, não é derivável em tais pontos. Mas a função TCU é derivável em cada intervalo $[q_{j-1}, q_j)$ nos quais estão definidas as funções componentes TCU_{α_j} para cada α_j , onde $Q \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, é possível calcular a derivada das funções componentes TCU_{α_j} em relação à variável Q , igualá-la a zero, encontrar seu ponto crítico e, por fim calcular a segunda derivada, que é definida positiva, de modo a concluir que o ponto crítico obtido é de fato um ponto de mínimo global da cada TCU_{α_j} , analogamente aos resultados obtidos no modelo EOQ clássico. Observa-se também que cada uma das funções de custos totais anuais $TCU_{\alpha_j}(Q)$, para $q_{j-1} \leq Q < q_j$ com $j = 1, \dots, m$ não apresentam pontos de interseção entre si.

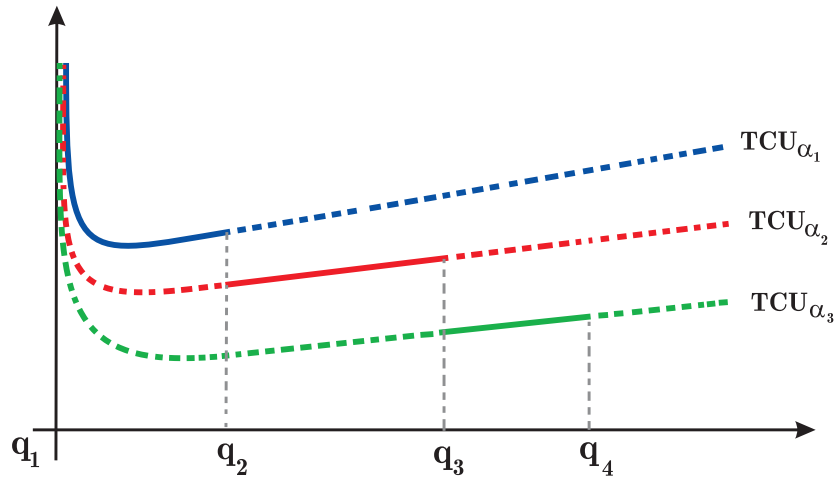


Figura 3.4: Custo total para o Modelo EOQ com desconto para todas as unidades.
(MUCKSTADT; SAPRA, 2010)

Portanto, usando os resultados obtidos no modelo EOQ clássico, conclui-se que derivada em relação à Q para cada TCU_{α_j} é igual à

$$\frac{d}{dQ}(TCU_{\alpha_j}) = \frac{(h_0 + r\alpha_j)}{2} - \frac{c_3 D}{Q^2}$$

e o ponto estacionário resultante é igual à

$$Q_{\alpha_j} = \sqrt{\frac{2c_3 D}{(h_0 + r\alpha_j)}}. \quad (3.6)$$

Como a segunda derivada de TCU_{α_j} em relação à $Q > 0$ é igual a

$$\frac{d^2}{dQ^2}(TCU_{\alpha_j}) = \frac{2c_3 D}{Q^3} > 0,$$

o ponto estacionário obtido em (3.6) é um ponto de mínimo global para TCU_{α_j} .

Encontrar os pontos de mínimo globais para cada TCU_{α_j} não conclui o objetivo que se busca para esse modelo que é o de determinar o ponto de mínimo global para a função TCU em (3.5) uma vez que a função TCU apresentando um conjunto finito de pontos de descontinuidade, não se pode aplicar o Teorema de Weierstrass (LIMA, 2002) na função TCU e garantir que essa função tem um ponto de mínimo global. Portanto, de acordo com Muckstadt, Sapra (2010) a maneira encontrada para obter uma solução ótima para a função TCU é por meio do algoritmo a seguir.

Algoritmo para determinar a quantidade ótima encomendada quando é dado desconto para todas as unidades

Passo 1: Faça $j = m$. Encontre a solução ótima do tamanho do pedido EOQ da função de custos totais médio anual TCU_{α_m} , e o seu respectivo valor, na mesma função objetivo, são denotados, respectivamente, por:

$$Q_{\alpha_m}^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{(h_0 + r\alpha_m)}} \quad e \quad TCU_{\alpha_m}(Q_{\alpha_m}^*) = \sqrt{2c_3 D(h_0 + r\alpha_m)} + \alpha_m D.$$

Passo 2: Se $Q_m^* \geq q_m$, então Q_m^* é a solução ótima da quantidade de pedido EOQ para a função TCU_{α_m} .

Pare.

Caso contrário, se $Q_m^* < q_m$, então $Q_m^* \notin [q_m, \infty)$, ou seja, Q_m^* não é uma solução viável para TCU_{α_m} no intervalo considerado. Pela convexidade de TCU_{α_m} , o mínimo

global para a TCU_{α_m} ocorre em $Q = q_m$.

Calcule o valor da função objetivo TCU_{α_m} em $Q = q_m$ e denote esse valor por TCU_{min} e $Q_{min} = q_m$. Ou seja, como $TCU_{min} = TCU_{\alpha_m}(q_m)$ obtém-se que:

$$TCU_{\alpha_m}(q_m) = \alpha_m D + (h_0 + r\alpha_m) \frac{q_m}{2} + c_3 \frac{D}{q_m}.$$

Vá para o passo 3.

Passo 3: Faça $j = j - 1$. Encontre a solução ótima para a j -ésima função de custo médio total, ou seja,

$$Q_{\alpha_j}^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{(h_0 + r\alpha_j)}}.$$

Passo 4: Se $Q_{\alpha_j}^* \in [q_j, q_{j+1})$, então calcule

$$TCU_{\alpha_j}(Q_{\alpha_j}^*) = \sqrt{2c_3 D(h_0 + r\alpha_j)} + \alpha_j D.$$

E se $TCU_{\alpha_j}(Q_{\alpha_j}^*) < TCU_{min}$. Então $Q_{\alpha_j}^*$ é a solução ótima da quantidade encomendada para a j -ésima função de custo médio total TCU_{α_j} . Caso contrário, Q_{min} é a quantidade de pedido ótima. Pare. Caso contrário, se $Q_{\alpha_j}^* \notin [q_j, q_{j+1})$, então pela convexidade da função TCU_{α_j} , o mínimo global ocorre em $Q = q_j$. Calcule o valor da função objetivo TCU_{α_j} em $Q = q_j$, isto é,

$$TCU_{\alpha_j}(q_j) = \alpha_j D + (h_0 + r\alpha_j) \frac{q_j}{2} + c_3 \frac{D}{q_j}.$$

Se $TCU_{\alpha_j}(q_j) < TCU_{min}$, então faça $Q_{min} = q_j$ e $TCU_{min} = TCU_{\alpha_j}(q_j)$. Caso contrário, Q_{min} é a quantidade de pedido ótima.

Se $j \geq 2$, vá para o passo 3,

caso contrário, Pare.

(ii) Quando ocorre descontos incrementais.

Já neste caso, o custo unitário de aquisição decresce apenas para as unidades que atingirem um certo ponto limite de itens q_0 . Não sendo válido para cada unidade adquirida, como no caso anterior.

Sejam $q_1 = 0, q_2, \dots, q_j, q_{j+1}, \dots, q_m$ as quantidades de pedido nas quais o custo de aquisição se alteram.

Sejam,

$\alpha_1 =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_1, q_2)$
 $\alpha_2 =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_2, q_3)$
 $\vdots$
 $\alpha_j =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_j, q_{j+1})$
 $\vdots$
 $\alpha_m =$ custo unitário de aquisição para $Q \in [q_m, \infty)$.

Neste caso, o custo médio anual de aquisição para $Q \in [q_j, q_{j+1})$ é definido por:

$$C_\alpha(Q) = \alpha_1(q_2 - q_1) + \alpha_2(q_3 - q_2) + \cdots + \alpha_{j-1}(q_j - q_{j-1}) + \alpha_j(Q - q_j).$$

Observa-se que a última parcela da expressão acima depende de Q . Neste caso, agrupando todos os termos que independem de Q e denotando-os por $\hat{C}_j$, obtém-se:

$$\hat{C}_j = \alpha_1(q_2 - q_1) + \alpha_2(q_3 - q_2) + \cdots + \alpha_{j-1}(q_j - q_{j-1}), \quad j \geq 2.$$

Onde para $j = 1$ tem-se que $\hat{C}_1 = 0$ já que por hipótese $q_1 = 0$.

Portanto, $C_\alpha(Q) = \hat{C}_j + \alpha_j(Q - q_j)$.

E o custo de aquisição médio unitário da aquisição é igual $\frac{C_\alpha(Q)}{Q}$, isto é,

$$\frac{C_\alpha(Q)}{Q} = \frac{\hat{C}_j}{Q} + \alpha_j + \alpha_j \frac{q_j}{Q}.$$

Como o período tem comprimento $T = \frac{Q}{D}$, então o custo médio de aquisição anual quando cada pedido consiste de Q é definido por:

$$\frac{C_\alpha(Q)}{T} = \frac{C_\alpha(Q)D}{Q}.$$

Os custos de tempo de preparação (set-up) $\bar{C}_{c_3}$ anual médio é o mesmo do modelo EOQ clássico, ou seja, $\bar{C}_{c_3} = c_3 \frac{D}{Q}$.

Mas o custo de manutenção anual médio passa a ser definido por $\bar{C}_{h_0} = h_0 \frac{C_\alpha(Q)}{Q}$.

Portanto, a função de custos anuais médios para gerir o estoque quando $Q \in [q_j, q_{j+1})$ é definida por:

$$\begin{aligned}
TCU_j(Q) &= \frac{C_\alpha(Q)D}{Q} + c_3 \frac{D}{Q} + h_0 \frac{C_\alpha(Q)}{Q} \\
&= (\hat{C}_j - q_j \alpha_j + c_3) \frac{D}{Q} + \alpha_j D + h_0 \frac{\alpha_j Q}{2} + \frac{h_0(\hat{C}_j - q_j \alpha_j)}{2}
\end{aligned}$$

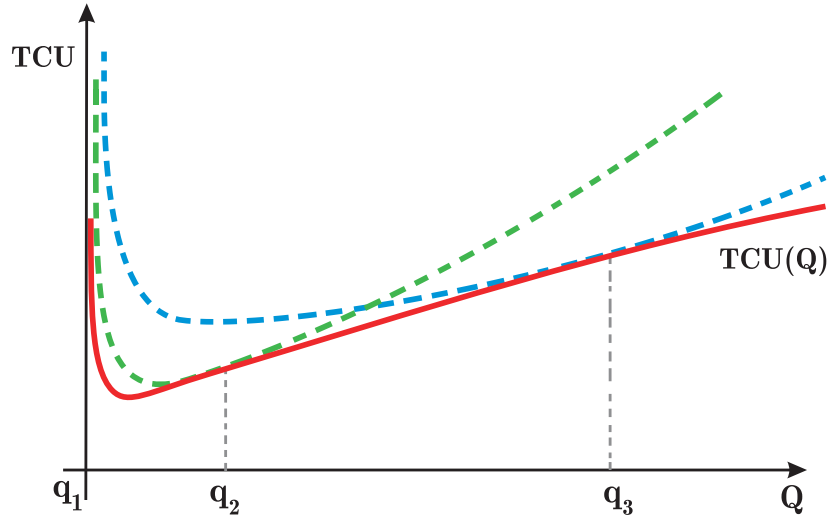


Figura 3.5: Custo total para o Modelo EOQ com desconto incremental por quantidade.
(MUCKSTADT; SAPRA, 2010)

Uma vez que cada curva TCU_j está definida apenas para $Q \in [q_j, q_{j+1})$, com $j = 1 \dots, m$. Observa-se que a linha contínua em vermelho do gráfico da figura acima (3.5) constitui a função TCU resultante para todos os m intervalos considerados. Mas observa-se que a função TCU restrita a cada intervalo $[q_j, q_{j+1})$, com $j = 1 \dots, m$ não é igual a cada TCU_j . Esse fato motiva o seguinte algoritmo para a determinação da quantidade de pedido ótima.

Algoritmo para determinar a quantidade ótima encomendada no caso da quantidade de descontos incrementais

Passo 1: Considere o problema

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize } TCU_j(Q) \\
&\text{sujeito à } Q > 0, \quad j = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Calcule $\frac{d}{dQ}TCU_j(Q) = 0$, isto é,

$$-(\hat{C}_j - q_j\alpha_j + c_3)\frac{D}{Q^2} + h_0\frac{\alpha_j}{2} = 0$$

e encontre $Q_j^* = \sqrt{\frac{2(\hat{C}_j - q_j\alpha_j + c_3)D}{h_0\alpha_j}}$, onde $j = 1, \dots, m$.

Passo 2: Verifique a viabilidade de Q_j^* , ou seja, se $Q_j^* \in [q_j, q_{j+1})$ para $j = 1, \dots, m$.

Descarte os valores de Q_j^* que não pertencem à $[q_j, q_{j+1})$.

Passo 3: Calcule $TCU_j(Q_j^*)$ para todas as quantidades encomendadas que satisfizeram $Q_j^* \in [q_j, q_{j+1})$. A quantidade ótima $Q^* = Q_j^*$ encomendada resulta do menor valor de $TCU_j(Q_j^*)$.

3.3 Modelo EOQ com taxa de produção finita

A característica principal deste modelo é produzir a quantidade de itens desejada. Neste modelo não é permitida falta planejada de produto. Neste caso, os itens não chegam todos de uma só vez ao estoque visto que os mesmos chegam em partes para serem produzidos nas máquinas. Supondo que não seja possível controlar a velocidade de produção das máquinas, pode ocorrer uma das duas situações: (i) a máquina está ligada, produzindo p unidades por dia, (ii) caso contrário, a máquina está desligada, caso em que não há nada a fazer.

Neste modelo há uma distinção entre demanda anual (D) e demanda diária (d). A determinação de d ocorre por meio de uma das relações: $q = \frac{D}{365}$, $d = \frac{D}{250}$, onde 250 é o total de dias úteis em um ano.

Seja p = taxa de produção, onde $p \geq d$.

Segundo Eiselt, Sandblom (2010), esse modelo é um tipo de produção intermitente ou em lotes e ocorre em muitas empresas verticalmente integradas, onde os itens encomendados são produzidos internamente.

No caso desse modelo, um ciclo de produção é considerado uma encomenda, o tamanho do ciclo de produção corresponde ao tamanho do pedido Q e o custo de preparação c_3 corresponde ao custo de se fazer o pedido.

Assim como no modelo clássico EOQ, o custo de preparação total (*set-up*) é definido por $\bar{C}_{c_3} = \frac{c_3 D}{Q}$.

Já o custo de manutenção difere do modelo clássico EOQ pois o ciclo se divide em duas fases: (i) a fase de produção t_p que é a fase onde ocorre tanto produção quanto demanda; (ii)

a fase da demanda t_d que é caracterizada por não ocorrer a produção, apenas a demanda.

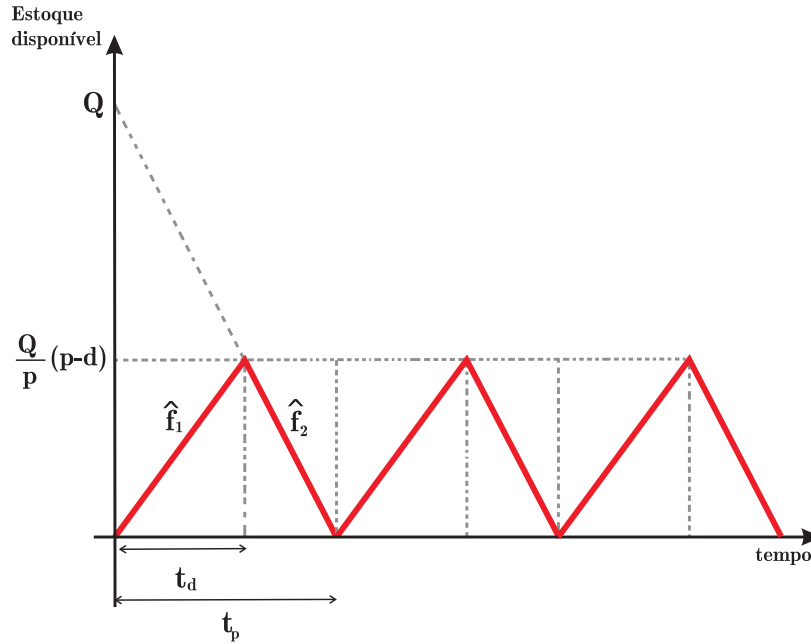


Figura 3.6: Nível de estoque com taxa de produção finita. (AXSÄTER, 2006)

Observa-se pela figura (3.6) que com os pontos $\hat{f}_1\left(\frac{Q}{p}\right) = \frac{Q}{p}(p-d)$ e $\hat{f}_1(0) = 0$ obtém-se a função $\hat{f}_1$ definida por $\hat{f}_1(t) = (p-d)t$, $0 \leq t \leq t_p$.

Agora, para $t_p < t \leq t_d$, a função $\hat{f}_2$ está definida nos pontos $\hat{f}_2(t_p) = \frac{Q}{p}(p-d)$, pela seguinte expressão: $\hat{f}_2(t) = -dt + Q$.

Portanto, a função que descreve a relação entre o estoque disponível e o tempo, quando a taxa de produção é finita é definida por:

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} (p-d)t, & \text{se } 0 \leq t \leq t_p \\ -dt + Q, & \text{se } t_p < t \leq t_d \end{cases}$$

Para obter os custos médios totais, que é composto pela soma dos custos de manutenção e tempo de preparação é necessário calcular a área sob a função $\hat{f}$ que é determinada pela integral por partes da função já que em $t = t_p$ a função $\hat{f}$ não é derivável, pois $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}(\theta + t_p) - \hat{f}(t_p)}{\theta} = -d$, enquanto que $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\hat{f}(\theta + t_p) - \hat{f}(t_p)}{\theta} = p-d$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_p} \hat{f}_1(t)dt + \int_{t_p}^{t_d} \hat{f}_2(t)dt &= \int_0^{t_p} (p-d)t dt + \int_{t_p}^{t_d} (-dt + Q)dt \\ &= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{p-d}{dp} \right). \end{aligned}$$

Assim, o custo de manutenção total médio é definido por:

$$\begin{aligned}\overline{C}_{h_0} &= \frac{1}{t_d} \frac{Q^2}{2} \left(\frac{p-d}{dp} \right) \\ &= \frac{1}{2} h_0 (p-d) \frac{Q}{p}.\end{aligned}$$

A função objetivo de custos totais médios resulta em:

$$TCU(Q) = c_3 \frac{D}{Q} + \frac{1}{2} h_0 (p-d) \frac{Q}{p}.$$

E o problema de minimização correspondente é definido por:

$$\begin{aligned}\text{Minimize} \quad & c_3 \frac{D}{Q} + \frac{1}{2} h_0 (p-d) \frac{Q}{p} \\ \text{sujeito à} \quad & Q > 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

Derivando a função $TCU(Q)$ em relação à $Q > 0$ e em seguida, igualando-a a zero para encontrar os pontos estacionários, tem-se que

$$\frac{d}{dQ}(TCU(Q)) = -\frac{c_3 D}{Q^2} + \frac{h_0 (p-d)}{2p}.$$

E fazendo $\frac{d}{dQ}(TCU(Q)) = 0$, obtém-se $Q^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0} \left(\frac{p}{p-d} \right)}$. Além disso, a segunda derivada em relação à $Q > 0$ é igual à:

$$\frac{d^2}{dQ^2}(TCU(Q)) = 2 \frac{c_3 D}{Q^3} > 0.$$

Portanto, tem-se que com a segunda derivada é definida positiva e como a função TCU é duas vezes continuamente diferenciável conclui-se que TCU é convexa em $\mathbb{R}_+$ e a quantidade encomendada é um ponto de mínimo global para a função TCU .

O valor da função objetivo TCU definida no problema (3.7) é igual à

$$TCU(Q^*) = \sqrt{(2c_3 D h_0) \left(\frac{p-d}{p} \right)}.$$

Os ciclo de produção e demanda t_p^* e o ciclo apenas de demanda t_d^* são definidos por:

$$t_p^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0 p (p-d)}}, \quad t_d^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0 p (p-d) d^2}}.$$

3.4 Modelo EOQ com tempo de espera positivo

O presente modelo apresenta todas as hipótese do modelo *EOQ*, menos a hipótese de que a quantidade de pedido Q necessária para reabastecer o estoque chega todo de uma só vez, no momento em que o pedido é efetuado junto à produção. Tal hipótese é substituída por: quando o nível de estoque disponível diminuir para R_L , emitir a encomenda de uma quantidade de tamanho Q^* , que será recebida após um tempo de espera t_L .

O tempo de espera (*lead-time*) é definido em (EISELT, SANDBLOM, 2010), (AXSÄTER, 2006) e (MUCKSTADT, SAPRA, 2010) como o intervalo de tempo entre a emissão e a entrega de um pedido ao estoque. Além disso, a decisão de quando fazer o pedido não interfere na decisão de quanto encomendar a quantidade Q . Portanto, a quantidade encomendada ótima Q^* obtida para o modelo *EOQ* clássico em (3.4) é a mesma para o modelo com tempo de espera positivo.

O momento de fazer um pedido será determinado em termos do ponto de reabastecimento R_L . Quando o nível de estoque diminui ao nível R_L , uma encomenda é emitida e entregue após um período de tempo t_L . Para que o nível de estoque tenha um desempenho ideal, após o período de tempo t_L o nível de estoque atinge o nível zero. A determinação do tempo de espera t_L depende da relação existente entre o ciclo de comprimento T e t_L , onde $DT = Q$.

Caso (i) Quando $t_L \leq T$. O estoque no momento $t - t_L$ é igual a demanda total resultante durante o intervalo de tempo $(t - t_L, t]$, que é igual a Dt_L . Portanto, o ponto de reabastecimento para $t_L \leq T$ é igual a $R_L = t_L D$.

Pelo gráfico (3.7) tem-se que $f_1(0) = Q$, $f_1(t_L) = Q - R_L$ e $f_1(T) = 0$ então $f_1(t) = -Dt + Q$. Os gráficos das funções $f_2, \dots, f_k$ são obtidos por meio da função f generalizada.

$$f(t) = \begin{cases} Q - Dt, & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 2Q - Dt, & \text{se } T < t \leq 2T \\ \vdots & \\ kQ - Dt, & \text{se } (k-1)T < t \leq kT \end{cases}$$

onde $f_2(t_L + T) = f_3(t_L + 2T) = \dots = f_k(t_L + (k-1)T) = Q - R_L$.

O problema de minimização da quantidade de pedido de tamanho $Q > 0$ com função objetivo de custos totais médio anual definido em (3.3) determina a quantidade de pedido ótima igual a $Q^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0}}$.

Já o comprimento de ciclo ótimo, obtido pelo modelo clássico *EOQ* é igual a $T^* = \sqrt{\frac{2c_3}{h_0D}}$. Mas observa-se que neste caso, o ponto de reabastecimento independe da quantidade encomendada ótima Q^* definida para o modelo *EOQ* em (3.4).

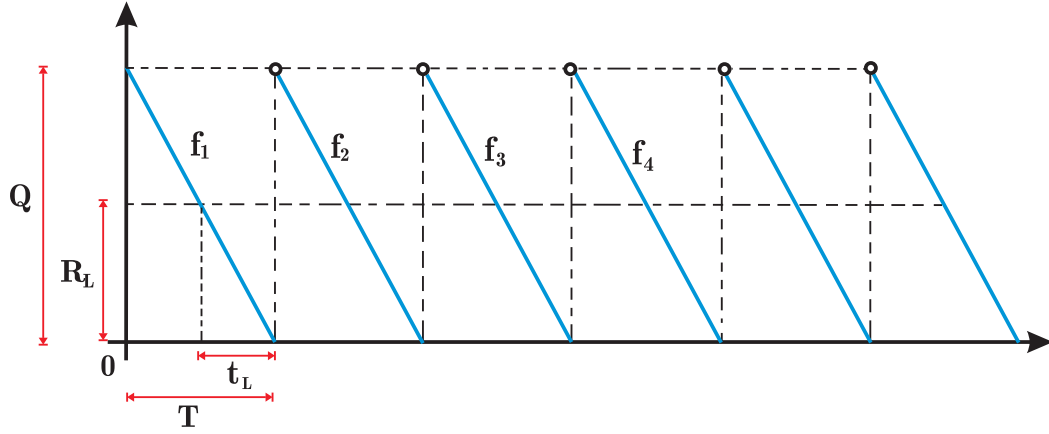


Figura 3.7: Modelo EOQ com tempo de espera positivo $t_L < T^*$.
(EISELT; SANDBLOM, 2010)

Caso (ii) Quando $t_L > T$ e a demanda total resultante é igual a t_LD e, portanto, $Dt_L > DT = Q$.

Portanto, esse é o maior nível de estoque disponível que nunca será atingido e o pedido chegará ao estoque no ciclo subsequente e não durante o ciclo em que foi emitido a quantidade de pedido. O ponto de reabastecimento neste caso é definido por meio da função *maior inteiro* (SANTOS, 2007, p.76) que associa a cada número real $x \in \mathbb{R}$ o maior número inteiro menor ou igual a $x \in \mathbb{R}$. Portanto, para $\frac{t_L}{T} \in \mathbb{R}$ tem-se que:

$$R_L = t_LD - \left\lfloor \frac{t_L}{T} \right\rfloor Q \quad (3.8)$$

onde $\left\lfloor \frac{t_L}{T} \right\rfloor = \max \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq \frac{t_L}{T} \right\}$.

Observe que quando $t_L > T$, define-se $R_L = D\tilde{t}_L$, onde $\tilde{t}_L$ é o resto da divisão de t_L por T , ou seja, existem únicos $m, \tilde{t}_L \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq \tilde{t}_L < T$ tal que, $t_L = mT + \tilde{t}_L$.

Assim, $D\tilde{t}_L = Dt_L - mDT$ o que implica que $R_L = Dt_L - mQ$. Aqui neste caso, novamente $Q^* = \sqrt{\frac{2c_3D}{h_0}}$ e $T^* = \sqrt{\frac{2c_3}{h_0D}}$. No gráfico (3.8) tem-se que $T < t_L < 2T$, o que implica que $1 < \frac{t_L}{T} < 2$. Portanto, $\left\lfloor \frac{t_L}{T} \right\rfloor = 1$ e por (3.8) tem-se que $R_L = t_LD - Q$.

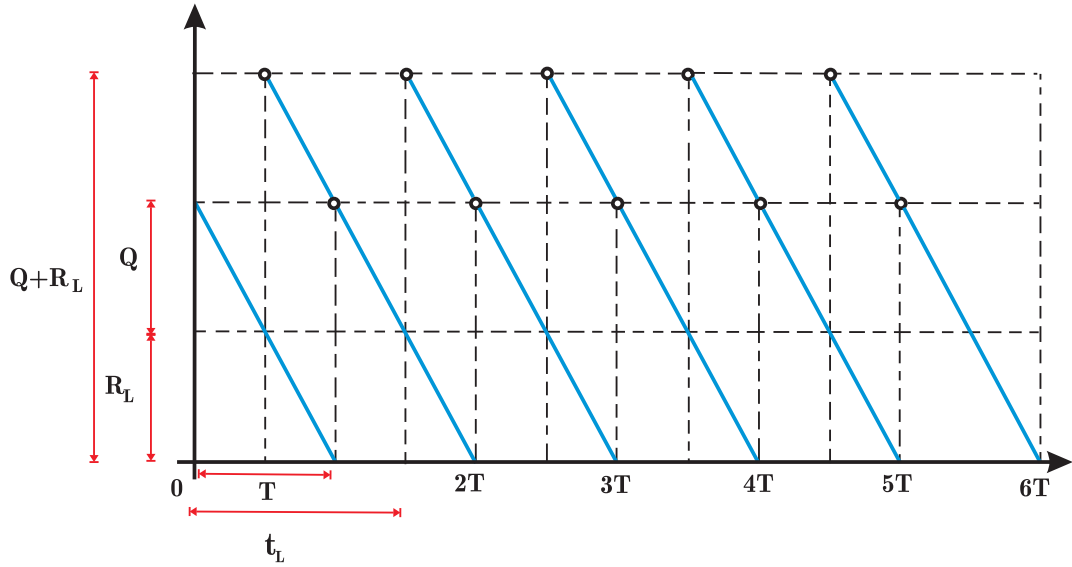


Figura 3.8: Modelo EOQ com tempo de espera positivo $t_L > T^*$.
(EISELT; SANDBLOM, 2010)

3.5 Modelo EOQ multi-item com restrições

Esse modelo busca determinar a solução ótima encomendada para n itens. Em uma das literaturas (TAHA, 2008) esse modelo é apresentado sem restrições. Já em (MURTHY, 2007), esse modelo é tratado com três tipos diferentes de restrições. Não sendo portanto abordado como um problema sujeito simultaneamente aos três tipos de restrições.

Como o presente modelo é uma extensão do modelo clássico *EOQ*, com hipóteses de que o tempo de espera (lead-time) é zero, a produção é instantânea e a taxa de demanda unitária por unidade de tempo para i -ésimo item é determinística e uniforme e igual a D_i , para $i = 1, \dots, n$. Como neste modelo não é permitida falta planejada de produto, tem-se que $c_2 = 0$. Além disso, o problema associado a este modelo é composto pelos seguintes parâmetros e variáveis:

h_{o_i} – custo de armazenamento unitário por unidade de tempo para o i -ésimo item;

c_{3_i} – custo de preparação por operação (*set-up*) para o i -ésimo item;

Q_i – quantidade a ser encomendada para o i -ésimo item; (variável do problema)

c_{0_i} – custo unitário por unidade de tempo para produzir ou comprar o i -ésimo item;

O comprimento de um ciclo T_i de tempo para o i -ésimo item é igual a $T_i = \frac{Q_i}{D_i}$.

Analogamente a forma de obter as funções que descrevem o nível de estoque para o

modelo *EOQ* clássico, para este modelo as funções para o i -ésimo item são definidas por:

$$f_i(t) = \begin{cases} Q_i - D_i t, & 0 \leq t \leq \frac{Q_i}{D_i} \\ 2Q_i - D_i t, & \frac{Q_i}{D_i} < t \leq \frac{2Q_i}{D_i} \\ \vdots & \\ kQ_i - D_i t, & \frac{(k-1)Q_i}{D_i} < t \leq \frac{kQ_i}{D_i}. \end{cases}$$

No i -ésimo ciclo de comprimento $T_i = \frac{Q_i}{D_i}$ tem-se que a área é calculada por meio da integral sob a curva $f_i(t) = Q_i - D_i t$, ou seja,

$$\int_0^{\frac{Q_i}{D_i}} (Q_i - D_i t) dt = \frac{Q_i^2}{2D_i}$$

O custo de manutenção por período para o i -ésimo item é definido por $\bar{C}_{h_{0_i}} = h_{0_i} \frac{Q_i^2}{2D_i}$.

Como os custos de tempo de preparação (*set-up*) $\bar{C}_{c_{3_i}}$ e de produção $\bar{C}_{c_{0_i}}$ são iguais aqueles definidos para o modelo *EOQ* clássico, tem-se que a função de custo médio total anual é definida para o i -ésimo item por:

$$TCU_i = \frac{c_{3_i} D_i}{Q_i} + c_{0_i} D_i + \frac{h_{0_i} Q_i}{2}.$$

Já a função f que descreve o nível de estoques para todos os n itens, bem como a respectiva função de custo médio total anual são definidas, respectivamente, por:

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (Q_i - D_i t), & 0 \leq t \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_i}{D_i} \right) \\ \sum_{i=1}^n (2Q_i - D_i t), & \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_i}{D_i} \right) < t \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{2Q_i}{D_i} \right) \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^n (kQ_i - D_i t), & \sum_{i=1}^n \left(\frac{(k-1)Q_i}{D_i} \right) < t \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{kQ_i}{D_i} \right). \end{cases}$$

$$TCU(Q) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{3_i} D_i}{Q_i} + c_{0_i} D_i + \frac{h_{0_i} Q_i}{2} \right).$$

Frequentemente, o modelo multi-item se apresenta sob três tipos distintos de restrições:

[Limitação no número de unidades]: O número médio de unidades estocadas para qual-

quer item ($i = 1, \dots, n$) em qualquer período de tempo é igual à $\frac{Q_i}{2}$ e não ultrapassa θ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2} \leq \theta$$

[Limitação quando ao investimento médio]: Supõe-se que existe um limite de investimento financeiro a ser feito no estoque de $\$C_4$. E seja p_i o preço unitário de investimento para no i -ésimo item. Então

$$\sum_{i=1}^n p_i Q_i \leq C_4$$

[Limitação na área disponível para armazenamento]: Supõe-se que existe um limite espacial para o armazenamento de todos os n itens em estoque de $\mathbf{A} m^2$, onde cada i -ésimo item ocupa uma área de $\mathbf{a}_i m^2$. Portanto, essa restrição é definida por:

$$\sum_{i=1}^n a_i Q_i \leq A$$

Como esses três problemas definidos abaixo são lineares na variável Q , tem-se que em cada caso é preciso utilizar as condições de Karush–Kuhn–Tucker (LUENBERGER, YE, 2008) para determinar a solução ótima.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } TCU(Q) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{3i} D_i}{Q_i} + c_{0i} D_i + \frac{h_{0i} Q_i}{2} \right) \\ \text{sujeito à } G_1(Q) &= \sum_{i=1}^n (Q_i - 2\theta) \leq 0 \\ Q &> 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimize } TCU(Q) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{3i} D_i}{Q_i} + c_{0i} D_i + \frac{h_{0i} Q_i}{2} \right) \\ \text{sujeito à } G_2(Q) &= \sum_{i=1}^n (p_i Q_i - C_4) \leq 0 \\ Q &> 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimize } TCU(Q) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{3i} D_i}{Q_i} + c_{0i} D_i + \frac{h_{0i} Q_i}{2} \right) \\ \text{sujeito à } G_3(Q) &= \sum_{i=1}^n (a_i Q_i - A) \leq 0 \\ Q &> 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Para aplicar as condições de Karush–Kuhn–Tucker deve-se supor que para Q^* um ponto

regular, existe um vetor $\mu \in \mathbb{R}^n$ tal que em cada caso

$$\begin{aligned}
 \nabla_Q TCU(Q) + \mu^T \nabla_Q G_l(Q) &= 0 \\
 \mu^T G_l(Q) &= 0 \\
 G_l(Q) &= 0 \\
 \mu &\geq 0 \\
 Q &> 0, \quad \text{onde } l = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observa-se que da igualdade (3.12) e do fato de $\mu \geq 0$ e $G_l(Q) \leq 0$ equivale a afirmar que um componente de $\mu \neq 0$ apenas quando a restrição $G_l(Q)$ de cada problema (3.9), (3.10) e (3.11) é uma restrição ativa, ou seja, $G_l(Q) = 0$ para $l = 1, 2, 3$. Essa é a chamada condição de inatividade complementar, afirmando que se $\mu > 0$ então $G_l(Q) = 0$ e se $G_l(Q) < 0$ então $\mu = 0$.

Logo, da condição $\nabla_Q TCU(Q) + \mu^T \nabla_Q G_l(Q) = 0$ tem-se que

$$0 = \frac{\partial}{\partial Q}(TCU(Q)) + \mu_i \frac{\partial}{\partial Q} G_l(Q) = -c_{3_i} \frac{D_i}{Q_i^2} + \frac{h_{0_i}}{2} + \mu_i, \quad \text{para } l = 1, 2, 3.$$

E resolvendo a equação acima, encontra-se uma quantidade encomendada igual a

$$Q_i = \sqrt{\frac{2c_{3_i} D_i}{h_{0_i} + 2\mu_i}} \tag{3.13}$$

que substituído em cada uma das igualdades $G_l(Q) = 0$ para $l = 1, 2, 3$ de modo a ser viável, gera os seguintes multiplicadores de Lagrange para cada problema acima descrito.

Problema (3.9): $\mu_i = \frac{c_{3_i} D_i - 2h_{0_i} I^2}{4I^2}$, que substituído na expressão (3.13) obtida para Q_i resulta em $Q_i^* = 2I$.

Problema (3.10): $\mu_i = \frac{c_{3_i} D_i p_i^2 - 2h_{0_i} C_4^2}{2C_4^2}$, que substituído em (3.13) resulta em:

$$Q_i^* = \frac{C_4}{p_i}.$$

Problema (3.11): $\mu_i = \frac{c_{3_i} D_i a_i^2 - 2h_{0_i} A^2}{2A^2}$, que substituído em (3.13) resulta em:

$$Q_i^* = \frac{A}{a_i}.$$

3.6 Modelo EOQ com falta planejada de produto

Escassez (*Shortage*) significa que embora exista a demanda por um certo item, este mesmo item não encontra-se disponível em estoque. Quando essa situação ocorre em uma organização, uma consequência é o não cumprimento das promessas de entrega dos produtos, podendo ocorrer um dos casos: ou o cliente aceita esperar pelo pedido, concedendo a empresa a oportunidade de poder cumprir com a entrega do pedido logo após o mesmo ser recebido no estoque ou a empresa perde a encomenda do pedido.

Este modelo é uma versão relaxada do modelo clássico *EOQ* uma vez que a hipótese do modelo clássica de que a quantidade encomendada Q deve chegar toda de uma só vez é substituída por uma suposição de que é permitida que parte da demanda permaneça em atraso (escassez temporária) introduzindo um custo de penalidade por escassez c_2 para cada unidade de produto por unidade de tempo que é proporcional ao tempo de espera para o cliente.

Uma característica do modelo EOQ com escassez é ser composto de dois sub-ciclos de tempo. No primeiro sub-ciclo com t_1 anos de duração, o estoque inicial disponível é de tamanho $R > 0$ e decresce a uma taxa de demanda D . Já no segundo sub-ciclo com duração de t_2 anos a demanda não é atendida. Assim, não existe estoque disponível neste período de tempo. Uma vez que a demanda não é atendida durante o período de tempo t_2 , a reserva de pedidos cresce à taxa de demanda D . O comprimento total de um ciclo é definida por $T = t_1 + t_2$.

As demais hipóteses do modelo *EOQ* clássico permanecem inalteradas.

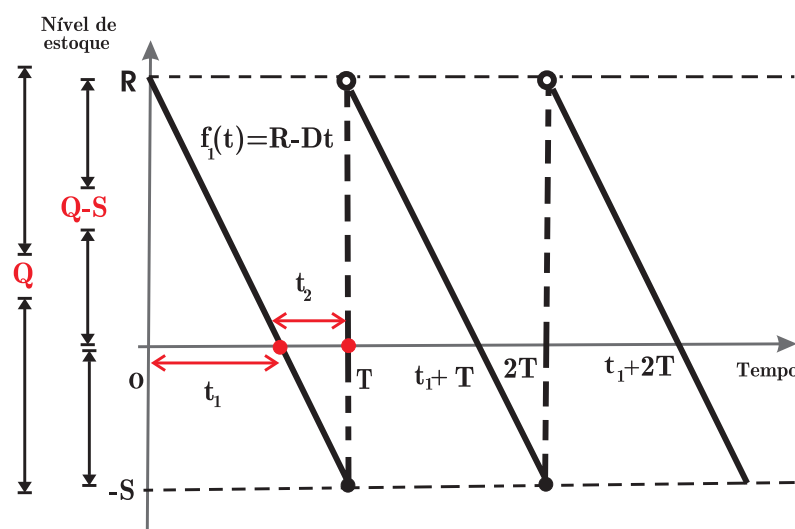


Figura 3.9: Modelo EOQ com escassez de produto, (MUCKSTADT; SAPRA, 2010)

Duas decisões neste modelo precisam ser tomadas: **(i)** quanto encomendar sempre que um pedido é feito? **(ii)** Qual deve ser o nível máximo de escassez permitida em cada ciclo?

A resposta para essas duas perguntas inicia-se com a definição de que Q é a quantidade

de pedido e que S é a quantidade máxima de escassez permitida. Quando um pedido chega ao estoque, toda a demanda em atraso é atendida imediatamente. Portanto, no primeiro sub-ciclo as unidades remanescentes $R = Q - S$ de estoque disponível satisfazem a demanda. Visto que o estoque disponível diminui à taxa D e torna-se igual a zero quando $t = t_1$ conclui-se que $Dt_1 = R$.

Como no segundo sub-ciclo, a quantidade de pedidos não atendidos aumenta de zero à taxa D ao longo de um período de comprimento t_2 , conclui-se também que $Dt_2 = S$.

Decorre das hipóteses do modelo clássico EOQ que o comprimento de um ciclo é definido por $T = \frac{Q}{D}$.

As expressões que definem os custos de produção média anual bem como o custo de preparação (*set-up*) média anual são as mesmas do modelo clássico e definidas, respectivamente por:

$$\overline{C}_{c_0} = c_0 D \quad (3.14)$$

$$\overline{C}_{c_3} = c_3 \frac{D}{Q} \quad (3.15)$$

Já a expressão que define o custo médio de manutenção anual é diferente daquele definido para o modelo clássico EOQ . E para definí-la é necessário encontrar a função para o período de comprimento T .

Sabe-se que por meio do gráfico da figura (3.9) que

$$f_1(t_1) = 0, \quad f_1(0) = R, \quad f_1(T) = -S. \quad (3.16)$$

E por meio de simplificações considerando os pontos definidos acima em (3.16) e a expressão geral para $f_1(t) = \alpha t + \beta$ obtém-se que $f_1(t) = -Dt + R$, para $0 \leq t \leq T$.

Como a função é T -periódica, é possível estendê-la a toda a reta. Portanto, como

$$f_2(t_1 + T) = 0, \quad f_2(T) = R, \quad f_2(2T) = -S \quad (3.17)$$

obtém-se de modo análogo à maneira como f_1 foi definida que $f_2(t) = -Dt + 2R + S$, para $T < t \leq 2T$. E portanto, a função f é definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(t) = \begin{cases} -Dt + R, & 0 \leq t \leq T \\ -Dt + 2R + S, & T < t \leq 2T \\ \vdots \\ -Dt + (k+1)R + kS, & kT < t \leq (k+1)T. \end{cases} \quad (3.18)$$

E por fim, considerando que $Dt_1 = R$, $Dt_2 = S$ e $DT = Q$ obtém-se uma expressão equivalente para a função (3.18) definida por:

$$f(t) = \begin{cases} -Dt + R, & 0 \leq t \leq T \\ -Dt + D(2T - t_2), & T < t \leq 2T \\ -Dt + D(3T - t_2), & 2T < t \leq 3T \\ \vdots \\ -Dt + D((k+1)T - t_2), & kT < t \leq (k+1)T. \end{cases} \quad (3.19)$$

Utilizando apenas a função f_1 definida em $0 \leq t \leq T$ obtém-se o estoque médio disponível por período de comprimento T que é igual à área sob a curva da função f_1 , obtida por meio de sua integral, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} f_1(t)dt &= \int_0^{t_1} (-Dt + R)dt \\ &= \frac{(Q - S)^2 T}{2Q}. \end{aligned}$$

Como consequência, o estoque médio anual é definido por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^{t_1} f_1(t)dt &= \frac{1}{T} \left(\frac{(Q - S)^2 T}{2Q} \right) \\ &= \frac{(Q - S)^2}{2Q} \end{aligned}$$

Assim, o custo de manutenção médio por ciclo e anual são definidos, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} C_{h_0} &= h_0 \int_0^{t_1} f_1(t)dt, & \bar{C}_{h_0} &= \frac{1}{T} h_0 \int_0^{t_1} f_1(t)dt \\ &= h_0 \frac{(Q - S)^2}{2Q} T, & &= h_0 \frac{(Q - S)^2}{2Q} \end{aligned} \quad (3.20)$$

A expressão que define o custo médio de escassez por ciclo é definido por:

$$\begin{aligned} C_{c_2} &= c_2 \int_0^{t_2} -f_1(t) dt \\ &= \frac{c_2 S^2}{2Q} T. \end{aligned}$$

Como todos os ciclos tem o mesmo comprimento, o número médio de pedidos não atendidos pendentes, ou seja, a escassez temporária de produto anual tem um comportamento semelhante ao custo médio de escassez por ciclo. Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{C}_{c_2} &= \frac{1}{T} c_2 \int_0^{t_2} -f_1(t) dt \\ &= \frac{c_2 S^2}{2Q}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Portanto, o custo médio anual de gestão do estoque é definido pela soma dos custos médios anuais de produção, de preparação (*set-up*), manutenção e escassez do produto, ou seja,

$$TCU(Q, S) = h_0 \frac{(Q - S)^2}{2Q} + \frac{c_2 S^2}{2Q} + c_0 D + c_3 \frac{D}{Q} \quad (3.22)$$

Observa-se que agora tem-se uma função de duas variáveis $Q, S \in \mathbb{R}$, e neste caso é preciso calcular o vetor gradiente em $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$\nabla TCU(Q, S) = \left(\frac{\partial}{\partial Q}(TCU(Q, S)), \frac{\partial}{\partial S}(TCU(Q, S)) \right) \quad (3.23)$$

$$\nabla TCU(Q, S) = \begin{pmatrix} -\frac{h_0(Q - S)}{Q} - \frac{h_0(Q - S)^2}{2Q^2} - \frac{c_2 S^2}{2Q^2} - \frac{c_3 D}{Q^2} \\ -\frac{h_0(Q - S)}{Q} + \frac{c_2 S}{Q} \end{pmatrix}^t \quad (3.24)$$

O ponto crítico para a função TCU é obtido fazendo-se $\nabla TCU(Q, S) = 0$. O ponto $P^* = (Q^*, S^*) \in \mathbb{R}^2$ resultante é definido por:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0}} \sqrt{\frac{h_0 + c_2}{c_2}}, \quad S^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{c_2}} \sqrt{\frac{h_0}{h_0 + c_2}}. \quad (3.25)$$

Pelas condições necessárias de primeira ordem, garante-se que $P^* = (Q^*, S^*) \in \mathbb{R}^2$ é um minimizador local para a função continuamente diferenciável $TCU(Q, S) \in \mathbb{R}$ definida em (3.22).

A matriz hessiana formada pelas derivadas de segunda ordem da função TCU é definida

por:

$$H(Q, S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial Q^2}(TCU(Q, S)) & \frac{\partial^2}{\partial Q \partial S}(TCU(Q, S)) \\ \frac{\partial^2}{\partial S \partial Q}(TCU(Q, S)) & \frac{\partial^2}{\partial S^2}(TCU(Q, S)) \end{bmatrix}$$

A matriz $H(Q, S)$ é simétrica, ou seja, $H(Q, S) = H^t(Q, S)$ e além disso TCU é uma função duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$, tem-se portanto que:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial}{\partial Q}(TCU(Q, S)) \right) = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial}{\partial S}(TCU(Q, S)) \right) = -\frac{(h_0 + c_2)S}{Q^2}.$$

Portanto, a matriz hessiana para o presente problema, é definida por:

$$H(Q, S) = \begin{bmatrix} \frac{(h_0 + c_2)S^2 + 2c_3D}{Q^3} & -\frac{(h_0 + c_2)S}{Q^2} \\ -\frac{(h_0 + c_2)S}{Q^2} & \frac{h_0 + c_2}{Q} \end{bmatrix}$$

Note que o determinante da matriz do primeiro termo de H , também chamado de primeiro menor principal de H , resulta em

$$\begin{aligned} \det [h_{11}] &= \det \left[\frac{(h_0 + c_2)S^2 + 2c_3D}{Q^3} \right] \\ &= \frac{(h_0 + c_2)S^2 + 2c_3D}{Q^3} \geq 0. \end{aligned}$$

Como o segundo menor principal de H é a própria H , obtém-se que:

$$\det H(Q, S) = \frac{2c_3D(h_0 + c_2)}{Q^3} \geq 0.$$

Conclui-se portanto que a matriz hessiana é semidefinida positiva, ou seja, $H(Q, S) \geq 0 \forall Q, S \in \mathbb{R}, Q > 0$.

Segundo o Teorema em Bazaraa, Sherali, Shetty (1993, p.91) a função TCU é convexa em para todo $P = (Q, S) \in \mathbb{R}_+^2$ se e somente se a matriz hessiana $H(Q, S)$ é semidefinida positiva para cada $P = (Q, S) \in \mathbb{R}_+^2$.

E assim, como todo ponto crítico de uma função convexa continuamente diferenciável é um ponto de mínimo global, conclui-se que o ponto de mínimo local obtido em (3.25) é também um mínimo global.

Agora, como $T^* = \frac{Q^*}{D}$ obtém-se que $T^* = \sqrt{\frac{2c_3(h_0 + c_2)}{h_0 c_2 D}}$.

Observa-se ainda que $R^* = Q^* - S^*$ é o estoque e que $Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2c_2 c_3 D}{h_0(h_0 + c_2)}}$.

Substituindo $P^* = (Q^*, S^*)$ na função objetivo TCU obtém-se:

$$TCU(Q^*, S^*) = \sqrt{2c_3 D \left(\frac{h c_2}{h + c_2} \right)} + c_0 D.$$

De acordo com Muckstadt, Sapra (2010), as seguintes conclusões à respeito da solução obtida, bem como da relação existente entre o tamanho da quantidade ótima Q^* para esse modelo EOQ com escassez permitida e o tamanho da quantidade ótima do modelo EOQ clássico Q_{EOQ}^* são detalhadas a seguir:

- (i) Na expressão que define Q^* e S^* , respectivamente, ou seja, $Q^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{c_2} \left(\frac{h_0 + c_2}{h_0} \right)}$ e $S^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{c_2} \left(\frac{h_0}{h_0 + c_2} \right)}$ Observa-se as seguintes relações para os três tipos de custos c_3 , c_2 e h_0 com o aumento ou diminuição do tamanho das quantidades ótimas Q^* e S^* . Quando c_3 aumenta, Q^* aumenta, levando a uma diminuição no número de pedidos colocadas por ano. Agora quando h_0 aumenta, obtém-se que a expressão $\frac{h_0 + c_2}{h_0} = 1 + \frac{c_2}{h_0}$ diminui implicando em uma diminuição de Q^* . Por fim, quando c_2 cresce, a expressão $\frac{1}{c_2(h_0 + c_2)}$ diminui implicando em uma diminuição em S^* .
- (ii) O número máximo de falta de pedido por ciclo S^* sempre é majorado pela quantidade ótima encomendada por ciclo Q^* , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{S^*}{Q^*} &= \sqrt{\frac{2c_3 D h_0}{c_2(h_0 + c_2)}} \sqrt{\frac{h_0 c_2}{2c_3 D(h_0 + c_2)}} \\ &= \frac{h_0}{h_0 + c_2} \leq 1 \end{aligned}$$

- (iii) Observa-se que a quantidade ótima de pedido obtida com o modelo EOQ clássico resulta em $Q_{EOQ}^* = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0}}$. Assim, é possível reescrever a solução Q^* obtida em (3.25) em função da solução ótima do modelo clássico EOQ, ou seja,

$$Q^* = Q_{EOQ}^* \left(\sqrt{\frac{h_0 + c_2}{h_0}} \right).$$

A expressão acima significa que após a chegada de um pedido ao estoque, uma parte

dele é usada para atender a demanda que ficou em espera por causa da escassez anteriormente ocorrida, o que preserva o custo de manutenção nessa parte do pedido recebido, permitindo que um pedido maior seja colocado em estoque.

- (iv) Observa-se ainda que com o aumento do custo unitário de escassez c_2 , significa que a escassez de produto ficou mais cara para a empresa e a quantidade ótima S^* obtida em (3.25) tende a diminuir. Como resultado, a quantidade $\frac{h_0 + c_2}{c_2}$ que compõe a solução ótima Q^* destinada à atender a reserva de pedidos também diminui tornando Q^* mais próxima de Q_{EOQ}^* . Ou seja,

$$\lim_{c_2 \rightarrow \infty} Q^* = \lim_{c_2 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0} \left(\frac{h_0}{c_2} + 1 \right)} = \sqrt{\frac{2c_3 D}{h_0}} = Q_{EOQ}^*.$$

- (v) Observa-se ainda que para um ciclo de comprimento T , a soma das expressões que definem os custos de manutenção (C_{h_0}) e escassez (C_{c_2}) é igual à expressão que define o custo de preparação C_{c_3} , enfatizando o equilíbrio existente entre os custos quando a solução é a solução ótima $P^* = (Q^*, S^*)$. De fato, primeiramente, por (3.25) obtém-se que:

$$Q^* \cdot \left(\frac{h_0}{h_0 + c_2} \right) = S^* \quad (3.26)$$

E quando $Q = q^*$ e $S = S^*$,

$$\frac{Q^* - S^*}{Q^*} = \frac{c_2}{h_0 + c_2}.$$

Assim, usando (3.26) obtém-se que

$$\begin{aligned} \overline{C}_{h_0}(Q^*, S^*) &= \frac{h_0 Q^*}{2} \left(\frac{(Q^* - S^*)}{Q^*} \right)^2 \\ &= \frac{h_0 Q^*}{2} \left(\frac{c_2}{h_0 + c_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Analogamente, o custo por escassez permitida, usando (3.26) resulta na seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{c_2}(Q^*, S^*) &= \frac{c_2 Q^*}{2} \left(\frac{S^*}{Q^*} \right)^2 \\ &= \frac{c_2 Q^*}{2} \left(\frac{h_0}{h_0 + c_2} \right)^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\overline{C}_{h_0}(Q^*, S^*) + \overline{C}_{c_2}(Q^*, S^*) = \sqrt{\frac{c_3 D h_0 c_2}{2(h_0 + c_2)}}. \quad (3.27)$$

Por outro lado o custo de preparação para colocação de um pedido quando $Q = Q^*$ em um ciclo de comprimento T resulta em

$$\begin{aligned} \overline{C}_{c_3}(Q^*) &= \frac{c_3 D}{Q^*} \\ \overline{C}_{c_3} &= \sqrt{\frac{c_3 D h_0 c_2}{2(h_0 + c_2)}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto, como foi afirmado inicialmente, a soma em (3.27) e custo de preparação (3.28) são iguais.

$$\overline{C}_{h_0}(Q^*, S^*) + \overline{C}_{c_2}(Q^*, S^*) = \overline{C}_{c_3}(Q^*).$$

Nesse capítulo foram apresentados os principais modelos de estoques encontrados na literatura com o propósito de fornecer informações mais gerais sobre as principais formulações no âmbito do controle de estoques que utilize como ferramenta de busca de solução a Otimização. Dentre eles, estão dois modelos importantes para o presente trabalho: o modelo EOQ com falta planejada de produto e o modelo multi-item com restrições, dos quais se originam os problemas multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing para o caso de um único item e o caso multi-item, cujas formulações gerais foram desenvolvida no capítulo cinco e experimentos computacionais, para ambos os problemas, descritos no capítulo posterior.

Capítulo 4

Otimização

4.1 Otimização Multiobjetivo

A otimização multiobjetivo é um dos ramos da teoria de otimização que diferencia-se dos demais pelo sentido que o conceito de solução do problema adquire. Uma característica fundamental de problemas de otimização multiobjetivo é a otimização (minimização ou maximização) de um vetor que é composto por funções escalares, escolhidas, segundo Oliveira, (2005), “como forma de avaliar o impacto das decisões factíveis do problema sobre diferentes índices de desempenho”.

Dessa forma, a solução para MOP (*multiobjective optimization problema*) depende da noção de equilíbrio utilizada quando diferentes objetivos, em geral conflitantes, são considerados ao mesmo tempo. A noção de equilíbrio cooperativo de Pareto é a mais aplicada em problemas dessa natureza, onde suas propriedades e caracterização, vistas posteriormente, são responsáveis por gerar as chamadas soluções Pareto-ótimas ou eficientes.

Em problemas de otimização multiobjetivo o conjunto imagem da função vetorial F está definida em um conjunto parcialmente ordenado. Além disso, em alguns desses problemas o conjunto de solução Pareto-ótimo pode ser infinito, o que torna necessário a definição de critérios adicionais que garantam a existência de uma única solução que satisfaça a todas as funções objetivos $f_i : F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ simultaneamente, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Esses critérios adicionais, após essa primeira etapa de geração de soluções eficientes pelo analista do problema, são definidos pelo tomador de decisão que é um indivíduo ou grupo de indivíduos responsável(veis) pela escolha da solução que melhor atenda às componentes da função F simultaneamente.

Um problema de otimização multiobjetivo genérico é formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } F(x) \\ & \text{sujeito à } x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $F = (f_1, \dots, f_k)$, $k \geq 2$, Ω é a região viável de (4.1) e $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Observa-se que para cada ponto $x \in \Omega$, $F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^k$.

Uma consequência imediata dessa formulação é a perda do conceito de otimalidade usual definido em problemas de otimização com uma única função objetivo. Isso se deve ao fato de o contra-domínio ($\mathbb{R}^k$) ser parcialmente ordenado com a relação de ordem ($\leq$).

As definições e resultados apresentados abaixo visam estabelecer condições para a definição do conceito de dominância, necessário ao conjunto de soluções de problemas de otimização multiobjetivo.

Definição 1. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^k$ é chamado de cone se $\beta x \in D$, $\forall \beta \geq 0$ e $x \in D$.

Definição 2. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^k$ um cone. O cone negativo de D é definido por:

$$-D = \{-x \in \mathbb{R}^k \mid x \in D\}$$

Definição 3. Um cone $D \subseteq \mathbb{R}^k$ é pontudo quando:

$$D \cap -D = \{0\}$$

Definição 4. Um cone $D \subseteq \mathbb{R}^k$ é convexo quando:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in D, \quad x, y \in D \text{ e } \forall \alpha \in [0, 1]$$

Definição 5. Uma relação binária A em $\mathbb{R}^k$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$. E afirma-se que $x \in \mathbb{R}^k$ se relaciona com $y \in \mathbb{R}^k$ por A quando $(x, y) \in A$.

Definição 6. Seja A uma relação binária em $\mathbb{R}^k$.

- (i) A é **reflexiva**, se $(x, x) \in A$, $\forall x \in A$;
- (ii) A é **anti-simétrica**, se $(x, y) \in A$ e $(y, x) \in A$ então $x = y$, para $x, y \in \mathbb{R}^k$;
- (iii) A é **transitiva**, se $(x, y) \in A$ e $(y, z) \in A$ então $(x, z) \in A$, para $x, y, z \in \mathbb{R}^k$;
- (iv) A é **comparável**, se $(x, y) \in A$ ou $(y, x) \in A$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$ com $x \neq y$;

(v) A é **linear**, se $(x, y) \in A$ então $(tx + z, ty + z) \in A$ para $x, y \in \mathbb{R}^k$ e para $t > 0$.

Uma relação binária A que possui as propriedades (i)-(iii) é dita uma ordem parcial. Se além disso, for satisfeita a propriedade (iv), ela será dita uma ordem total. Por fim, quando uma ordem parcial A satisfizer a propriedade (v), ela será dita uma ordem parcial linear.

A proposição abaixo apresenta uma caracterização entre uma relação de ordem parcial linear e a existência de cones convexos pontudos em $\mathbb{R}^k$. O que garante que é possível que o cone ordenado $D \subseteq \mathbb{R}^k$ induza uma ordem parcial em $F(\Omega)$ para o problema de otimização multiobjetivo (4.1).

Proposição 1. *Seja A uma relação binária em $\mathbb{R}^k$. A é uma relação de ordem parcial linear se, e somente se existe um cone convexo pontudo $D \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que:*

$$(x, y) \in A \iff y - x \in D \quad (4.2)$$

Demonstração. Suponha que A seja uma relação de ordem parcial linear. Considere $D = \{x \in \mathbb{R}^k \mid (0, x) \in A\}$.

Vamos inicialmente provar que D é um cone.

De fato, será provado que $\forall x \in D$ e $t \geq 0$, $tx \in D$, isto é, $(0, tx) \in A$.

Pela linearidade de A e como $(0, x) \in A$ tem-se $(0, tx) = (t \cdot 0 + 0, tx + 0) \in A$.

Será provado agora que D é convexo.

De fato, sejam $x, y \in D$ e $\beta \in [0, 1]$. Como $D \subseteq \mathbb{R}^k$ é um cone e $1 - \beta \geq 0$ tem-se que $\beta x \in D$ e $(1 - \beta)y \in D$, e pela definição do cone D , $(0, \beta x) \in A$ e $(0, (1 - \beta)y) \in A$. Usando a linearidade de A no termo $(0, (1 - \beta)y)$ tem-se que $(-(1 - \beta)y, 0) = (1 \cdot 0 + [-(1 - \beta)y], (1 - \beta)y + [-(1 - \beta)y]) \in A$. Pela transitividade de A tem-se que $(-(1 - \beta)y, \beta x) \in A$. Por fim, aplicando-se a linearidade de A ,

$$(0, \beta x + (1 - \beta)y) = (1 \cdot [-(1 - \beta)y] + (1 - \beta)y, \beta x + (1 - \beta)y) \in A.$$

Portanto, $\beta x + (1 - \beta)y \in D$.

Por fim, será provado que D é pontudo.

De fato, deseja-se provar que $D \cap -D = \{0\}$.

Seja $x \in D \cap -D$, então pela definição de D , $(0, x) \in A$ e $(0, -x) \in A$. Aplicando a linearidade de A em $(0, -x)$ tem-se que:

$$(x, 0) = (1 \cdot 0 + x, -x + x) \in A$$

E usando a anti-simetria de A obtém-se que $x = 0$. Logo, $D \cap -D = \{0\}$.

Suponha agora que existe um cone convexo pontudo $D \subseteq \mathbb{R}^k$ que satisfaça (4.2).

Será provado a seguir que A é uma ordem parcial linear.

- (i) Reflexividade: Como $D \subseteq \mathbb{R}^k$ é pontudo, ou seja, $D \cap -D = \{0\}$, considere $x \in D$, observe que $0 = x - x \in D$ e usando (4.2) conclui-se que $(x, x) \in A$.
- (ii) Anti-simetria: Seja $(x, y) \in A$ e $(y, x) \in A$. Por (4.2), $y - x \in D$ e $x - y \in D$. Observe que $x - y = -(y - x)$ e usando que D é pontudo, obtém-se que $x - y \in D \cap -D = \{0\}$, ou seja, $x = y$.
- (iii) Transitividade: Sejam $(x, y) \in A$ e $(y, z) \in A$. Por (4.2), $y - x \in D$ e $z - y \in D$. Usando a convexidade do cone D , para $\lambda \in [0, 1]$ tem-se que $(1 - \lambda)(y - x) + \lambda(z - y) = (1 - \lambda)y - \lambda y - (1 - \lambda)x + \lambda z \in D$. Em particular, para $\lambda = \frac{1}{2}$ tem-se que $\frac{z - x}{2} \in D$. E como D é um cone, $2 \left(\frac{z - x}{2} \right) = z - x \in D$. Assim, por (4.2) conclui-se que $(x, z) \in A$.
- (iv) Linearidade: Seja $(x, y) \in A$ e $z \in \mathbb{R}^k$. Por (4.2), $y - x \in D$ e como D é um cone, $t(y - x) \in D$, $\forall t \geq 0$. Observe agora que $t(y - x) + z - z = (ty + z) - (tx + z) \in D$ e novamente por (4.2), $(tx + z, ty + z) \in A$. Assim, A é linear.

Considerando o cone convexo pontudo $D = \mathbb{R}_+^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \geq 0\}$ e

$$y - x \in \mathbb{R}_+^k \Leftrightarrow y - x \geq 0$$

conclui-se que essa é uma relação de ordem parcial linear. ■

A definição a seguir garante o princípio de maximalidade em conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 7. *Seja $A \subset B$ com uma relação de ordem parcial induzida pela ordem de B . $A \subset B$ é dita uma cadeia se na ordem induzida por B , A for um conjunto totalmente ordenado.*

Se considerarmos que existe uma cadeia em $F(\Omega)$ e essa cadeia for limitada superiormente, o Lema de Zorn garante a existência de um elemento maximal.

Lema de Zorn: *Seja A um conjunto parcialmente ordenado, $A \neq \emptyset$ tal que toda cadeia $\mathcal{C} \subset A$ seja limitada superiormente, então A possui pelo menos um elemento maximal.*

Em problemas de otimização multiobjetivo, em geral tem-se que:

$$\nexists x^* \in \Omega ; F(x^*) \leq F(x), \quad \forall x \in \Omega \cap B(x^*, \varepsilon)$$

onde $B(x^*, \varepsilon) := \{x \in \Omega ; \|x^* - x\| < \varepsilon\}$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$. E implicitamente, a ocorrência de soluções triviais, como as representadas por pontos viáveis que corresponde as soluções do tipo ideal ou utópica cuja definição é encontrada em (Ferreira, 1999) e em (Oliveira, 2005) é a seguinte:

Definição 8. *As componentes $z_i^* \in \mathbb{R}$ do vetor objetivo ideal $z^* \in \mathbb{R}^k$, são as soluções de cada um dos problemas definidos através das componentes $f_i \in \mathbb{R}$, onde $i = 1, \dots, k$ da função multiobjetivo $F(x) \in \mathbb{R}^k$ como:*

$$z_i^* = f_i(x^i), \quad i = 1, \dots, k$$

onde $x^i := \arg \min_{x \in \Omega} f_i(x)$ com $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Observa-se que se existisse $x^* \in \Omega$ tal que $z^* = F(x^*)$, isto é, se a solução z^* , além de vetor objetivo ideal for solução viável ($z^* \in F(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^k$) como solução do problema de otimização multiobjetivo (4.1), então o problema (4.1) estaria resolvido. Mas, em geral, a ocorrência de soluções ideais em MOP são bem raras devido a natureza conflitante existente entre as componentes de F . Assim, é introduzida uma nova interpretação para o problema (4.1) por meio do conceito de dominância dado abaixo e encontrado em (MIETTINEN, 1999), (FERREIRA, 1999) e (OLIVEIRA, 2005).

Com a proposição (1), é possível agora introduzir o conceito de dominância segundo Miettinen (1999), considerando um cone convexo pontudo ordenado $D \subseteq \mathbb{R}^k$.

Dados $F(x^1), F(x^2) \in F(\Omega)$, afirma-se que $F(x^1)$ domina $F(x^2)$, denotado por $F(x^1) \leq_D F(x^2)$ se $F(x^2) - F(x^1) \in D \setminus \{0\}$.

É a partir dessa definição também que introduz-se o conceito mais geral de solução eficiente, ou seja,

Definição 9. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^k$ um cone pontudo convexo. Um vetor decisão $x^* \in \Omega$ é eficiente (com respeito à D) se não existe qualquer outro vetor decisão $x \in \Omega$ tal que $F(x) \leq_D F(x^*)$.*

Em Oliveira (2005), o conceito de dominância para problemas de otimização multiobjetivo tem a seguinte caracterização, considerando a ordem usual em $\mathbb{R}^k$.

Definição 10. Dado $x^0 \in \Omega$, os seguintes subconjuntos são definidos por meio da relação de ordem usual ($\leq$).

$$\Omega_{<}(x^0) = \{x \in \Omega : F(x) \leq F(x^0) \text{ e } F(x) \neq F(x^0)\}$$

$$\Omega_{\geq}(x^0) = \{x \in \Omega : F(x) \geq F(x^0)\}$$

$$\Omega_{\sim}(x^0) = \{x \in \Omega : F(x) \not\leq F(x^0) \text{ e } F(x) \not\geq F(x^0)\}$$

Observa-se que $\mathbb{R}^n = \Omega_{<}(x^0) \cup \Omega_{\geq}(x^0) \cup \Omega_{\sim}(x^0)$, $\forall x^0 \in \Omega$. Os subconjuntos $\Omega_{<}(x^0)$ e $\Omega_{\geq}(x^0)$ contêm todos os elementos de Ω , que dominam e são dominados pelo ponto $x^0 \in \Omega$, respectivamente, pela relação de ordem usual ($\leq$). O subconjunto $\Omega_{\sim}(x^0)$ contém todos os elementos não-dominados e não-dominantes pelo elemento $x^0 \in \Omega$. Na formulação padrão do problema de otimização multiobjetivo deseja-se minimizar simultaneamente todos os objetivos e que $x^0 \notin \Omega_{<}(x^0)$, uma possível solução para $x^* \in \Omega$ de (4.1) deverá satisfazer $\Omega \cap \Omega_{<}(x^*) = \emptyset$.

A interpretação acima motiva a seguinte definição

Definição 11. Um vetor decisão $x^* \in \Omega$ é uma solução Pareto-ótima ou eficiente se não existe uma outra solução $x \in \Omega$ tal que $F(x) \leq F(x^*) \ \forall i = 1, \dots, k$ e $F(x) \neq F(x^*)$.

Pela definições (10) e (11) observa-se que uma solução eficiente (ou Pareto-ótima) não é dominada por qualquer outra solução viável do problema. Se $x^* \in \Omega$ é uma solução eficiente, então pela definição, qualquer $x \in \Omega$ que proporcione um decréscimo em alguma função objetivo $f_i, i = 1, \dots, k$, relativo ao produzido por x^* , deve ao mesmo tempo levar ao acréscimo de pelo menos alguma outra componente $f_j, j = 1, \dots, k$ do vetor F onde $i \neq j$. A figura (4.1) abaixo ilustra essa propriedade.

O conjunto de soluções eficientes é definido por

$$efi(\Omega) = \{x^* \in \Omega ; \nexists x \in \Omega ; F(x) \leq F(x^*) \text{ e } F(x) \neq F(x^*), \forall x \in \Omega\}.$$

Note que como a solução do problema multiobjetivo deve ser eficiente (ou Pareto-ótima), o processo de otimização restringe-se ao subconjunto $efi(\Omega) \subset \Omega$.

Será visto em resultados abaixo que $efi(\Omega)$ poderá ser caracterizado por problemas de otimização formado por funções escalares.

Segundo Ferreira (1999) e Oliveira (2005), os algoritmos utilizados para resolver problemas de otimização multiobjetivo (4.1) geram apenas soluções ótimas locais.

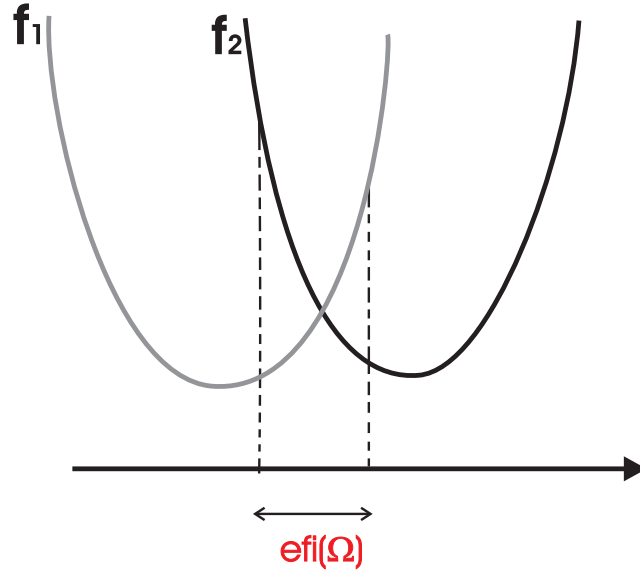


Figura 4.1: Interpretação do Conceito de Eficiência

Fonte: Ferreira, 1999, p. 26

De acordo com Chankong e Haimes (2008), sem a hipótese de convexidade, a transformação de problemas de otimização multiobjetivo em problemas escalares descrito nas seções seguintes por meio dos métodos de escalarização, garante-se apenas soluções ótimas locais. Além disso, qualquer método de geração de soluções eficientes baseado em soluções de problemas de otimização escalar garante apenas soluções eficientes locais. Dessa forma pode-se estabelecer facilmente uma contrapartida local de todos os resultados de escalarização obtidos nas seções seguintes. Com especial atenção ao método a posteriori das Métricas Ponderadas.

Definição 12. $x^* \in \Omega$ é dita uma solução localmente eficiente se existe $\varepsilon > 0$ tal que x^* é eficiente em $\Omega \cap N(x^*, \varepsilon)$ onde $N(x^*, \varepsilon) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \|y - x^*\| < \varepsilon\}$ é a vizinhança viável de $x^* \in \Omega$

O teorema seguinte considera a hipótese de convexidade para permitir que a vizinhança $\mathcal{V}$ de cada solução local envolva toda a região de viabilidade.

Teorema 1. Sejam $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$ funções convexas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ também convexo. Então toda solução localmente eficiente é também uma solução globalmente eficiente.

Demonstração. Considere o problema de otimização multiobjetivo (4.1) que hipótese é convexo. $x^* \in \Omega$ é dita uma solução localmente eficiente para (4.1) se existe $\varepsilon > 0$ tal que x^* é eficiente em $\Omega \cap N(\varepsilon, x^*)$, onde $N(x^*, \varepsilon) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \|y - x^*\| < \varepsilon\}$, ou seja, $\nexists \hat{x} \in \Omega \cap N(\varepsilon, x^*)$ tal que $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_i(\hat{x}) < f_i(x^*)$ para algum i .

Suponha que $x^* \notin efi(\Omega)$ globalmente. Portanto, existe $x^0 \neq x^*$, $x_0 \in \Omega$ tal que $f_i(x^0) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_i(x^0) < f_i(x^*)$ para algum i . Como as funções f_i , $i = 1, \dots, k$

são funções convexas, considere $\tilde{x} = \beta x^0 + (1 - \beta)x^*$, com $\beta \in (0, 1)$, assim, $\tilde{x} \in \Omega$ pois $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ também é um conjunto convexo. Além disso, $\tilde{x} \in N(\varepsilon, x^*)$.

De fato,

$\|\tilde{x} - x^*\| = \|\beta x^0 + (1 - \beta)x^* - x^*\| = |\beta| \|\tilde{x} - x^*\|$ e considerando $|\beta| < \frac{\varepsilon}{\|\tilde{x} - x^*\|}$ conclui-se que $\|\tilde{x} - x^*\| < \varepsilon$.

Portanto, $\tilde{x} \in \Omega \cap N(\varepsilon, x^*)$ e usando que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$ globalmente tem-se que

$$f_i(\tilde{x}) = f_i(\beta x^0 + (1 - \beta)x^*) \leq \beta f_i(x^0) + (1 - \beta)f_i(x^*) \leq f_i(x^*), \quad \forall i = 1, \dots, k$$

o que contradiz a hipótese de $x^* \in \Omega$ ser uma solução localmente eficiente. Logo,

$f_i(\tilde{x}) = f_i(x^*), \forall i = 1, \dots, k$. Portanto,

$$f_i(x^*)f_i(\tilde{x}) \leq f_i(x^0) + (1 - \beta)f_i(x^*), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Como $0 < \beta < 1$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}f_i(x^*) &\leq f_i(x^0) + \frac{(1 - \beta)}{\beta}f_i(x^*) \\ f_i(x^*) &\leq f_i(x^0), \forall i = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, a desigualdade em (4.3) contradiz a suposição de que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$ globalmente onde para algum i ocorre que $f_i(x^0) < f_i(x^*)$. Portanto, $x^* \in \text{efi}(\Omega)$ globalmente. ■

A definição de uma solução propriamente eficiente ou (propriamente Pareto-ótima) surgiu pela necessidade de excluir algumas propriedades indesejáveis observadas em soluções eficientes. A justificativa é de que com a definição de soluções eficientes próprias não será permitido mais um crescimento arbitrariamente grande em uma das componentes do vetor objetivo em relação ao decréscimo em alguma outra componente. (MIETTINEN, 1999; FERREIRA, 1999)

Definição 13. $x^* \in \Omega$ é dita uma solução propriamente eficiente do problema se $x^* \in \text{efi}(\Omega)$ e existe um escalar $M > 0$ tal que, para cada $i = 1, \dots, k$ e para cada $x \in \Omega$ satisfazendo $f_i(x) < f_i(x^*)$ existe pelo menos $j \neq i$ com $f_j(x) > f_j(x^*)$ e

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{f_j(x^*) - f_j(x)} \leq M.$$

A seção seguinte apresenta os métodos encontrados na literatura (MIETTINEN, 1999) e

(CHANKONG; HAIMES, 2008), enfocando as formas de utilização das informações do tomador de decisão e do analista em cada método e traz uma descrição mais detalhada dos métodos do Critério Global, da Ponderação, da ε -Restrição, Híbrido e das Métricas Ponderadas, onde este último é uma combinação dos primeiro e segundo métodos mencionados anteriormente e será utilizado para transformar o problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing em um problema mono-objetivo.

4.2 Métodos de Escalarização

Os problemas de otimização que são compostos por mais de uma função objetivo, cujas expressões podem ser lineares ou não lineares são tratados por meio da teoria de otimização multiobjetivo.

Diante das considerações feitas anteriormente para caracterizar tanto essa classe de problemas de otimização quanto as suas candidatas à solução. O próximo estágio a ser desenvolvido refere-se a escolha, dentre todas as soluções eficientes ou Pareto-ótimas, aquela que atenda a todos os objetivos conflitantes que definem o problema simultaneamente. Essa escolha final é desempenhada por um novo elemento incorporado ao problema de otimização - o tomador de decisão ou um grupo de tomadores de decisão.

O decisor (ou grupo de decisores) são pessoas que detém uma melhor percepção do problema e são capazes de expressar relações de preferências entre as diferentes soluções. Além disso, a escolha da solução final depende da coordenação existente entre o analista e o decisor. Entende-se por analista um indivíduo ou software computacional capaz de tratar as relações matemáticas que definem o problema e por um processo de busca de solução, geram candidatas à solução ótima para todos os objetivos.

Os métodos de solução próprios para problemas de otimização multiobjetivo são classificados de acordo com o papel do decisor no processo de definição da melhor solução. Em alguns métodos, várias hipóteses são feitas sobre a estrutura de preferências e o comportamento do tomador de decisão. Entretanto, pode ser difícil para o tomador de decisão, distinguir qual a solução ótima para o problema. (MIETTINEN, 1999)

Em otimização multiobjetivo tem-se dois momentos em que se considera que o problema vetorial foi resolvido: (i) quando do ponto de vista matemático, obtém-se o conjunto de soluções eficientes (ou Pareto-ótimas); (ii) quando se deseja obter uma única solução para o problema dentre o conjunto de soluções eficientes, sendo necessário que o contradomínio pela função

vetorial F seja totalmente completo. (MIETTINEN, 1999)

A proposta comum a todos os métodos encontrados para problemas de otimização multiobjetivo não linear é a utilização da *escalarização*, que consiste em converter o problema com vários objetivos em um problema contendo apenas uma única função objetivo ou em uma família de problemas, cada um com uma única função objetivo, gerando uma função denominada de *função escalarizante*, que dependerá de alguns parâmetros. Mas também permitirá, a partir de então, o uso da teoria e dos métodos de otimização para uma única função objetivo, ou seja, da programação não-linear, e mais especificamente da programação geométrica.

Como a função escalarizante depende de parâmetros provenientes do próprio processo de escalarização, uma fragilidade associada a técnica pode referir-se a geração de soluções viáveis em apenas alguns dos parâmetros ou que o problema de único objetivo não possa ser solucionado em todos os parâmetros.

Vale salientar que a transformação feita no problema de otimização multiobjetivo por meio da escalarização não interfere na formulação do fenômeno real de modo a produzir um problema matematicamente bem definido. A preocupação está exatamente na importância de uma formulação adequada, na qual as funções objetivo e as restrições sejam de fato suficientemente representativas para o fenômeno e que a formulação matemática traduza com precisão as informações coletadas na situação-real.

Miettinen (1999) propôs dois requisitos para as funções escalarizantes, os quais não tem incorporada em sua formulação as preferências do tomador de decisão.

(i) A função escalarizante pode cobrir qualquer solução eficiente (ou Pareto-ótima).

(ii) Toda solução é eficiente.

Caso a função escalarizante incorpore as preferências, isto é, os níveis de aspiração do tomador de decisão, então:

(iii) Sua solução é satisfeita se os níveis de aspiração utilizados são viáveis.

Não existe função escalarizante que satisfaça os três requisitos simultaneamente.

É importante mencionar também que os processos que geram soluções para problemas de otimização de único objetivo encontram soluções locais ótimas. Quando a função objetivo é convexa, garante-se que toda solução ótima local é também ótima global. Mas, caso essa hipótese não seja satisfeita, não há garantias da existência de ótimos globais. Assim, as soluções obtidas quando se utiliza a função escalarizante em problemas de otimização multiobjetivo são ótimos locais de Pareto. Estendendo o conceito de convexidade para o caso multiobjetivo

garante-se a otimalidade global de Pareto quando todas as componentes da função vetorial são convexas e a região factível também for convexa.

As classificações apresentadas para os métodos de otimização multiobjetivo seguem de Miettinen (1999) e de Cohon (1978).

A classificação utilizada em Miettinen (1999) é feita da seguinte forma:

- (1) **Métodos não-preferenciais:** que não incorporam as informações de preferências do decisor. Neste caso, o tomador de decisão poderá aceitar ou não a solução apresentada pelo método.
- (2) **Métodos preferenciais:** que são divididos em três subgrupos.
 - (a) **Métodos à posteriori:** que geram soluções Pareto-ótimas, mas que em um momento seguinte, tal conjunto de soluções são apresentadas ao decisor que deverá selecionar aquela que for mais conveniente. Esses métodos fazem uso de softwares computacionais, geralmente caros e difíceis de manipular para gerar tais soluções, e que não incorporam com facilidade uma melhor forma de apresentar ao decisor as alternativas de solução encontradas.
 - (b) **Métodos à priori:** utilizam as preferências, as expectativas e as opiniões do tomador de decisão traduzidas em informações antes da execução do processo de obtenção de solução. A dificuldade desse método está no decisor não saber como alcançar antecipadamente o problema, bem como suas reais expectativas.
 - (c) **Métodos iterativos:** neste método o decisor está envolvido em todo o processo de obtenção de solução juntamente com um analista (que pode ser o indivíduo que opera o software iterativo construído ou o próprio software computacional). Neste método, apenas algumas soluções Pareto-ótimas são geradas e avaliadas e o decisor pode, então, especificar e corrigir as suas preferências diante dos resultados apresentados dentro do processo de solução de forma contínua, sem a necessidade de conhecer toda a estrutura de preferências global.

Uma classificação interessante foi encontrada inicialmente em Cohon (1978) e posteriormente em Sampaio (2011). Em seus trabalhos, eles fazem uma divisão dos métodos em dois grupos mediante a consideração de que existem sentidos definidos para o fluxo de informação entre o analista e o tomador de decisões. No top-down a informação parte de decisor para o analista e no bottom-up o sentido da informação se inverte. A categorização feita por esses autores é dada abaixo.

- **Método de geração:** é um método onde o conjunto de soluções eficientes são geradas de modo que o tomador de decisão possa escolher entre elas.
- **Método baseado em preferências:** é um método que considera as preferências do decisor conforme ocorre o processo de busca de solução, a solução que melhor satisfizer as preferências do decisor será selecionada.

A figura a seguir sintetiza a divisão dos métodos feito por Cohon (1978) e depois por Almeida (2011).

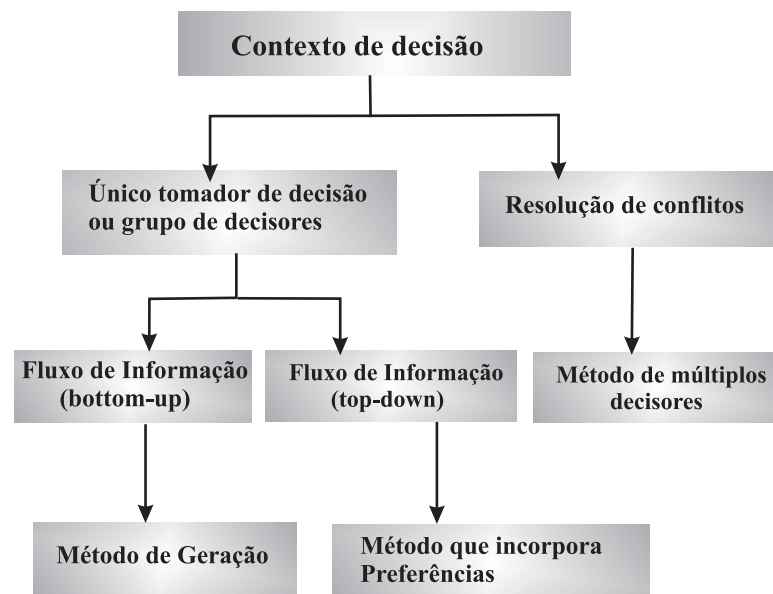


Figura 4.2: Classificação dos Métodos
Fonte: Cohon, 1978, p. 87

Não serão descritos todos os métodos propostos por Miettinen (1999), apenas alguns métodos à posteriori que estão relacionados ao Método das Métricas Ponderadas que será utilizado diretamente na transformação do problema multiobjetivo.

O primeiro método apresentado a seguir, o método do Critério Global, não considera as preferências do tomador de decisão. Os demais métodos geram o conjunto de soluções eficientes ou uma parte dele para que posteriormente o tomador de decisão possa selecionar a mais preferida dentre todas as soluções eficientes. Fazem parte dessa classe os métodos da Ponderação, da ε -Restrição, Híbrido e das Métricas Ponderadas. Esse último é uma extensão ponderada do método do Critério Global. (MIETTINEN, 1999)

Em Ferreira (1999) em Oliveira (2005) enfatiza-se que o conceito de solução eficiente está intrinsecamente associado às condições de otimalidade do problema escalarizado. O detalhamento de alguns métodos abaixo evidenciam essa afirmação.

No presente trabalho, foi utilizada a classificação dos métodos (não preferenciais e preferenciais) de acordo com Miettinen (1999) e particularmente, no conjunto de métodos à posteriori está contido o Método das Métricas Ponderadas, que foi responsável pela transformação do problema de otimização multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing para um único item e multi-item em um problema com um único objetivo, que posteriormente, foi tratado com os conceitos da programação geométrica a fim de se obter soluções Pareto-ótimas para o problema original.

Os métodos seguintes são métodos à posteriori de geração de soluções eficientes.

4.2.1 Método da Ponderação

Este método associa a cada função objetivo um coeficiente de ponderação (ou peso) e minimiza a soma do produto dos pesos pelas funções componentes da função objetivo $F \subseteq \Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Assim, o problema escalarizado é definido da seguinte forma.

Seja $\mathcal{W} = \{w | w \in \mathbb{R}^k, w_i \geq 0, \sum_{i=1}^k w_i = 1\}$ o conjunto dos pesos não negativos. O problema da ponderação é definido para algum $w \in \mathcal{W}$ como $P(w)$ e tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \\ & \text{sujeito à} && x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.4}$$

A principal qualidade desse método é a simplicidade e a garantia de obtenção de soluções Pareto-ótimas quando os coeficientes de ponderação forem positivos ou se a unicidade de solução para o problema ponderado for garantida.

Sampaio (2011) e Miettinen (1999) explicitam algumas limitações próprias desse método, tais como não se ter garantias de uma boa área de cobertura para a fronteira eficiente. Além disso, a mudança no valor dos pesos gera um alto custo computacional associado à resolução de um problema de programação não-linear sempre que for necessário encontrar uma nova solução eficiente, pois o problema tem que ser resolvido novamente. E além disso, se a região viável do problema for não convexa, o método não é eficaz para encontrar soluções em partes não-convexas da fronteira eficiente no espaço objetivo, o mesmo podendo ocorrer com funções objetivo descontínuas.

Os resultados seguintes estabelecem meios para a obtenção de soluções eficientes ou Pareto ótimas por meio de soluções ótimas do problema ponderado $P(\mathcal{W})$ em (4.4).

Teorema 2. *Seja $x^* \in \Omega$ solução de $P(w)$, para $w \in \mathcal{W}$. Se $w_i > 0, \forall i = 1, \dots, k$. Então*

$$x^* \in \text{efi}(\Omega)$$

Demonstração. Suponha que $x^* \in \Omega$ é solução de $P(w)$ e para $w \in \mathcal{W}$ tem-se que

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^k w_i f_i(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.5)$$

Suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$, então $\exists \tilde{x} \in \Omega$ tal que $f_j(\tilde{x}) \leq f_j(x^*)$, $\forall j = 1, \dots, k$ e $f_j(\tilde{x}) < f_j(x^*)$ para pelos menos um j . Como por hipótese $w_j > 0$, $\forall j = 1, \dots, k$

$$w_j f_j(\tilde{x}) \leq w_j f_j(x^*), \quad \forall j = 1, \dots, k \quad (4.6)$$

$$w_j f_j(\tilde{x}) < w_j f_j(x^*), \quad \text{para algum } j. \quad (4.7)$$

Assim por (4.6) e (4.7)

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(\tilde{x}) < \sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*). \quad (4.8)$$

A desigualdade (4.8) contradiz o fato de x^* ser solução ótima de $P(\mathcal{W})$. Portanto, $x^* \in \text{efi}(\Omega)$. ■

Teorema 3. *Seja $x^* \in \Omega$, para $w \in \mathcal{W}$ e se x^* é solução única de $P(w)$ então $x^* \in \text{efi}(\Omega)$*

Demonstração. Suponha que $x^* \in \Omega$ é solução de $P(w)$, isto é, para algum $w \in \mathcal{W}$ tem-se que

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*) < \sum_{i=1}^k w_i f_i(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.9)$$

Suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$, então $\exists \hat{x} \in \Omega$ tal que $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*)$, $\forall j = 1, \dots, k$ e $f_j(\hat{x}) < f_j(x^*)$ para pelos menos um j . Como $w_j \geq 0$, $\forall j = 1, \dots, k$

$$w_j f_j(\hat{x}) \leq w_j f_j(x^*), \quad \forall j = 1, \dots, k \quad (4.10)$$

$$w_j f_j(\hat{x}) < w_j f_j(x^*), \quad \text{para algum } j. \quad (4.11)$$

E por (4.10) e (4.11) tem-se que

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(\hat{x}) \leq \sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*) \quad (4.12)$$

Assim, se ocorrer a igualdade em (4.12) tem-se uma contradição pois $\hat{x} \neq x^*$, conclui-se que $\hat{x}$ também é solução de $P(w)$, o que contradiz a unicidade de x^* . Portanto, $x^* \in \text{efi}(\Omega)$. ■

Teorema 4. *Se $x^* \in \text{efi}(\Omega)$ e o problema de otimização multiobjetivo é convexo, ou seja, as funções $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são convexas para $i = 1, \dots, k$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo. Então existe $w \in \mathcal{W}$ tal que x^* é solução de $P(w)$.*

Esse resultado será provado após a demonstração do Teorema (9) na Seção (4.2.3) que relaciona o método $P(w)$ como o método $P_l(\varepsilon)$.

4.2.2 Método das ε – Restrições

Este método seleciona uma das funções objetivo $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ componente da função vetorial $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ para ser otimizada (minimizada) e todas as outras funções objetivo são convertidas em restrições, onde cada uma delas é limitada superiormente por componentes do vetor $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$. E o problema (4.1) é escalarizado por meio do seguinte problema (4.13) ou $P_l(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f_l(x) \\ & \text{sujeito à} && f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad \forall j = 1, \dots, k, \quad j \neq l \\ & && x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.13}$$

Esse método também utiliza uma forma simples para converter o problema multiobjetivo para único objetivo. Comparado ao método da ponderação, pode-se dizer que o método da ε –restrição é mais eficaz no sentido de controle da cobertura da fronteira eficiente. Entretanto, este também é um método limitado em si, pois é necessário resolver um problema de programação não-linear sempre que for necessário obter uma nova solução eficiente. O método também é sensível à escolha do vetor $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, cuja tarefa não é trivial e a dificuldade aumenta à medida que a quantidade de componentes objetivo do vetor $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ também aumenta. (SAMPAIO, 2011)

Os próximos resultados referem-se aos meios para a obtenção de soluções eficientes por meio de soluções ótimas do problema da ε –restrição (4.13). As demonstrações encontram-se em Miettinen (1999).

Teorema 5. *$x^* \in \text{efi}(\Omega)$ se, e somente se, x^* é solução do problema $P_l(\varepsilon) \forall l = 1, \dots, k$, onde $\varepsilon_j = f_j(x^*)$ para $j = 1, \dots, k$, $j \neq l$.*

Demonstração. (Condição necessária). Suponha que $x^* \in \Omega$ seja uma solução eficiente ou Pareto Ótima, então não existe $\hat{x} \in \Omega$ tal que $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_j(\hat{x}) < f_j(x^*)$ para pelo menos um $j \neq k$.

Suponha por absurdo que x^* não seja solução de $P_l(\varepsilon)$, para algum $l \neq j$. Portanto, existe $\tilde{x} \in \Omega$ tal que $f_l(\tilde{x}) < f_l(x^*)$ e $f_j(\tilde{x}) \leq f_j(x^*)$ para $j \neq l$. Portanto, $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$, o que contradiz a hipótese. Logo, x^* é solução de $P_l(\varepsilon)$.

(Condição suficiente). Suponha agora que x^* é solução de $P_l(\varepsilon)$, $\forall l = 1, \dots, k$. Então não existe $\hat{x} \in \Omega$ tal que $f_l(\hat{x}) < f_l(x^*)$, $\forall l = 1, \dots, k$ e $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*)$ para $l \neq j$ com $j = 1, \dots, k$. E como essa é a definição de solução Pareto Ótima, conclui-se que $x^* \in \text{efi}(\Omega)$. ■

Teorema 6. Se $x^* \in \Omega$ é solução do problema $P_l(\varepsilon)$ para algum $l = 1, \dots, k$ com $\varepsilon_j = f_j(x^*)$ para $j = 1, \dots, k$, $j \neq l$ e se x^* é solução única de $P_l(\varepsilon)$ então $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que x^* é a única solução de $P_l(\varepsilon)$. Então $\nexists \hat{x} \in \Omega$ tal que $f_l(\hat{x}) < f_l(x^*)$ e $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*)$ para $l \neq j$ e $\forall \hat{x} \in \Omega$. Suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$, então $\exists \tilde{x} \in \Omega$ tal que $f_j(\tilde{x}) \leq f_j(x^*)$, $\forall j = 1, \dots, k$ e para pelo menos um $l \neq j$ tem-se que $f_l(\tilde{x}) < f_l(x^*)$. Logo, $\tilde{x} \in \Omega$ e $\tilde{x} \neq x^*$ também é solução de $P_l(\varepsilon)$, contradizendo a unicidade de $x^* \in \Omega$. Portanto, a contradição foi afirmar que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$. ■

Teorema 7. Se x^* é solução única do problema da $P_l(\varepsilon)$ em (4.13) para qualquer vetor limite superior $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-1}, \varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_k)^T$, então x^* é uma solução eficiente.

Demonstração. Seja $x^* \in \Omega$ solução única de $P_l(\varepsilon)$, o que significa que $f_l(x^*) < f_l(x)$, $\forall x \in \Omega$ e $f_j(x^*) \leq \varepsilon_j$, $j = 1, \dots, k$, $j \neq l$.

Suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$. Assim, existe $\hat{x} \in \Omega$ tal que $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*)$, $\forall j = 1, \dots, k$ e $f_j(\hat{x}) < f_j(x^*)$ para pelo menos algum j .

Agora se $j = l$ então $f_l(\hat{x}) < f_l(x^*)$ e $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*) \leq \varepsilon_j$, $j \neq l$, Isso contradiz o fato de x^* ser solução de $P_l(\varepsilon)$.

Por outro lado, se $j \neq l$, então $f_j(\hat{x}) < f_j(x^*) \leq \varepsilon_j$ e $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $i = 1, \dots, k$, $i \neq j$ e $f_l(\hat{x}) \leq f_l(x^*)$. Essa última desigualdade contradiz a unicidade de $x^* \in \Omega$ como solução de $P_l(\varepsilon)$.

Logo, em qualquer um dos casos, $x^* \in \text{efi}(\Omega)$. ■

4.2.3 Relação entre os métodos da ε -Restrição e da Ponderação

O resultado a seguir trata de uma importante relação existente entre os dois métodos à posteriori descritos anteriormente. Ver demonstrações em Miettinen (1999).

Teorema 8. *Seja $x^* \in \Omega$ solução do problema $P(w)$ em (4.4) para algum $w \in \mathcal{W}$. Então,*

1. *se $w_l > 0$, x^* é solução do problema da $P_l(\varepsilon^*)$ em (4.13) ou*
2. *se x^* é solução única do problema $P(w)$ em (4.4), então x^* é uma solução $P_l(\varepsilon^*)$ em (4.13) para $\forall l = 1, \dots, k$.*

Demonstração. Suponha que existe $w \in \mathcal{W}$ tal que x^* é solução de $P(w)$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^k w_i f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^k w_i f_i(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.14)$$

(i) Suponha por absurdo que x^* não é uma solução de $P_l(\varepsilon)$, então $\exists x^0 \in \Omega$ tal que $f_l(x^0) < f_l(x^*)$ e $f_j(x^0) < f_j(x^*)$, $j \neq l$, $j = 1, \dots, k$. Como por hipótese $w_l > 0$ e $w_j \geq 0$, $j \neq l$ tem-se que

$$w_l f_l(x^0) < w_l f_l(x^*) \quad e \quad w_j f_j(x^0) \leq w_j f_j(x^*). \quad (4.15)$$

Logo, por (4.15)

$$\sum_{j=1}^k w_j f_j(x^0) < \sum_{j=1}^k w_j f_j(x^*).$$

Assim, a desigualdade (4.15) contradiz a desigualdade (4.14) pois encontrou-se $x^0 \neq x^*$ cujo valor na função objetivo do problema híbrido foi menor do que o valor da solução ótima $x^* \in \Omega$. Portanto, $x^* \in P_l(\varepsilon)$. ■

Quando o problema de otimização multiobjetivo é convexo, garante-se o resultado a seguinte.

Teorema 9. *Considere que o problema de otimização multiobjetivo seja convexo. Se para qualquer $l = 1, \dots, k$ x^* é solução de $P_l(\varepsilon^*)$ em (4.13) então existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $x^* \in \Omega$ é solução do problema $P(w)$ (4.4).*

Demonstração. Suponha que $x^* \in \Omega$ solução de $P_l(\varepsilon^*)$ para qualquer $l = 1, \dots, k$, então o sistema de inequações

$$f_l(x) < f_l(x^*), \quad f_j(x) \leq f_j(x^*), \quad j = 1, \dots, k, \quad j \neq l$$

não tem solução em Ω .

Como por hipótese, o problema de otimização multiobjetivo é convexo, ou seja, $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ e a região de viabilidade $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ são convexas. e usando o Teorema de Gordan (BAZARAA, SHERALI, SHETTY, 1993, p. 567) existe $0 \leq p \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\sum_{i=1}^k p_i [f_i(x) - f_i(x^*)] \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Escolhendo $w_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^k p_i}$, o que é possível pois $\sum_{i=1}^k p_i > 0$. Portanto, $w_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, k$ e

tem-se que $\sum_{i=1}^k w_i = 1$.

Assim,

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^k p_i} \left[\sum_{i=1}^k p_i (f_i(x) - f_i(x^*)) \right] \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

E com as simplificações obtém-se

$$\sum_{i=1}^k w_i (f_i(x) - f_i(x^*)) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto, $x^* \in \Omega$ é solução do problema ponderado $P(w)$. ■

Retornando ao **Teorema (4)**:

Demonstração. Pelo Teorema (5) que $x^* \in \text{efi}(\Omega)$ se, e só se x^* é solução de $P_l(\varepsilon^*)$, $\forall l = 1, \dots, k$. e pelo Teorema (9) acima, considerando a hipótese de convexidade do problema multiobjetivo, se x^* é solução do problema $P_l(\varepsilon^*)$, $\forall l = 1, \dots, k$, então $\exists w \in \mathcal{W}$ tal que x^* é solução de $P(w)$. ■

4.2.4 Método Híbrido

Este método combina características do método da ponderação $P(w)$ com o método da ε -restrição $P_l(\varepsilon)$. Essa nomenclatura para o método foi introduzida por Chankong e Haimes (1983, p.148) e o problema Híbrido (4.16) abaixo, também denotado por $P(w, \varepsilon)$ tem a seguinte

formulação:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \\
 & \text{sujeito à} \quad f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad \forall j = 1, \dots, k \\
 & \quad \quad \quad x \in \Omega
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde $w > 0$, $\mathbb{R}^k$.

O resultado seguinte garante a existência de soluções eficientes para o problema multi-objetivo formulado anteriormente em (4.1).

Teorema 10. $x^* \in \text{efi}(\Omega)$ se e, somente se $x^* \in \Omega$ é solução do problema Híbrido $P(w^0, \varepsilon)$, para qualquer $w^0 > 0$ dado e para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ para o qual $P(w^0, \varepsilon^*)$ é viável.

Demonstração. (Condição necessária). Suponha que $x^* \in \text{efi}(\Omega)$ e suponha por absurdo que para qualquer $0 < w^0 \in \mathbb{R}^k$ dado, $x^* \in \Omega$ não é solução de $P(w^0, \varepsilon)$ para qualquer ε e em particular, para $P(w^0, \varepsilon^*)$ com $\varepsilon^* = f_i(x^*)$, onde $i = 1, \dots, k$.

Seja $x^0 \in \Omega$ uma solução de $P(w^0, \varepsilon^*)$. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^k w_i^0 f_i(x^0) < \sum_{i=1}^k w_i^0 f_i(x^*) \quad e \quad f_j(x^0) \leq \varepsilon_j^* = f_j(x^*), \quad j = 1, \dots, k.$$

Como $w^0 > 0$ tem-se que $w_j^0 f_j(x^0) \leq w_j^0 f_j(x^*)$, $j = 1, \dots, k$. Assim, tem-se que $f_j(x^0) \leq f_j(x^*)$, $\forall j = 1, \dots, k$ e $f_l(x^0) < f_l(x^*)$, $l \neq j$. O que contradiz a definição de solução eficiente em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$.

(Condição suficiente). Suponha que $x^* \in \Omega$ é solução de $P(w^0, \varepsilon)$ para qualquer $w^0 > 0$ dado e para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$. Considere em particular que para $\varepsilon^* = f_i(x^*)$, $i = 1, \dots, k$ tem-se que $x^* \in \Omega$ é solução de $P(w^0, \varepsilon^*)$.

Suponha, por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$. Assim, $\exists \hat{x} \in \Omega$ tal que $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*) = \varepsilon^*$, $\forall j = 1, \dots, k$ e $f_j(\hat{x}) < f_j(x^*)$ para pelo menos um j . Portanto, para qualquer $0 < w^0 \in \mathbb{R}^k$

$$w_j^0 f_j(\hat{x}) \leq w_j^0 f_j(x^*), \quad \forall j = 1, \dots, k \quad e \quad w_l^0 f_l(\hat{x}) < w_l^0 f_l(x^*), \quad l \neq j.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^k w_j^0 f_j(\hat{x}) \leq \sum_{j=1}^k w_j^0 f_j(x^*).$$

Observa-se que essa última desigualdade juntamente com a condição de viabilidade, isto é, $f_j(\hat{x}) \leq f_j(x^*) = \varepsilon^*$, $j = 1, \dots, k$ contradiz a hipótese de que $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.

■

4.2.5 Método das Métricas Ponderadas

O método das métricas ponderadas de acordo com (MIETTINEN, 1999, p. 67), (CHAKONG, HAIMES, 2008) e (EHRGOTT, 2005), é uma extensão ponderada do método do Critério Global, que é um método que não incorpora preferências e que faz uso de pesos associados as métricas L_p para $1 \leq p < \infty$ e L_∞ buscando gerar diferentes soluções Pareto-ótimas de acordo com a escolha dos pesos associados ao problema.

Seja $\mathcal{W} = \{w | w \in \mathbb{R}^k, w_i \geq 0, \sum_{i=1}^k w_i = 1\}$ o conjunto dos pesos não negativos. Diferentes soluções são obtidas quando altera-se os coeficientes de ponderação w_i para $i = 1, \dots, k$ que estão associados às distâncias entre as funções componentes $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e os seus respectivos vetores objetivo ideais na métrica L_p , $1 \leq p \leq \infty$, onde um vetor objetivo ideal é definido em (8) por: $z_i^* = f_i(x^i)$ com

$$x^i := \arg \min_{x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n} f_i(x), \quad i = 1, \dots, k.$$

O problema das métricas ponderadas é definido para $w \in \mathcal{W}$ com a seguinte notação $P(w, p)$, com $1 \leq p < \infty$ e tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \text{sujeito à} \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.17}$$

Quando $p = \infty$ o problema resultante $P(w, \infty)$ é denominado como problema- L_∞ ou como problema de Tchebycheff e é formulado por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x) - z_i^*|\} \\ & \text{sujeito à} \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.18}$$

Além disso, no problema $P(w, \infty)$ em (4.18) o sinal de valor absoluto pode ser eliminado em virtude da definição do vetor objetivo ideal, se ele é conhecido globalmente.

De acordo com Miettinen (1999), o problema de *Tchebycheff* não é diferenciável e uma forma de torná-lo diferenciável é considerando uma nova variável φ , já que tanto as componentes da função objetivo, $f_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, k$ quanto o conjunto de viabilidade do problema são diferenciáveis e z^* é determinado completamente. Assim, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in \mathbb{R}$

variáveis de decisão, obtém-se o seguinte problema diferenciável.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \varphi \\ & \text{sujeito à} \quad w_i(f_i(x) - z_i^*) \leq \varphi, \forall i = 1, \dots, k \\ & \quad \quad \quad x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.19}$$

As demonstrações dos resultados seguintes são baseados em (MIETTINEN, 1999), (CHAKONG, HAIMES, 2008) e (EHRGOTT, 2005), que relacionam a existência de soluções eficientes ou Pareto ótimas do problema de otimização multiobjetivo (4.1) com as soluções ótimas dos problemas escalarizados $P(w, p)$ em (4.17) e $P(w, \infty)$ em (4.18).

Teorema 11. $x^* \in \Omega$ é solução do problema $P(w, p)$ em (4.17), para qualquer $1 \leq p < \infty$ quando ocorre uma das seguintes afirmações:

1. x^* é uma solução única de $P(w, p)$;
2. $w_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, k$.

Então $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.

Demonstração. (1.) Seja x^* uma solução única do problema L_p ponderado, com $1 \leq p < \infty$, isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$. Então existe $\hat{x} \in \Omega$ com $\hat{x} \neq x^*$ tal que $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_i(\hat{x}) < f_i(x^*)$ para pelos menos um i . Como $w \in \mathcal{W}$ e pela definição do vetor objetivo ideal, tem-se que $z_i^* \leq f_i(x)$, $\forall x \in \Omega$ e ainda que $|f_i(x) - z_i^*| = f_i(x) - z_i^*$, $x \in \Omega$.

$$\begin{aligned} w_i(f_i(\hat{x}) - z_i^*) &\leq w_i(f_i(x^*) - z_i^*), \forall i = 1, \dots, k \\ w_i(f_i(\hat{x}) - z_i^*) &< w_i(f_i(x^*) - z_i^*), \text{ para algum } i. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Portanto, para $1 \leq p < \infty$ ocorre que

$$\left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.21}$$

Observa-se que a desigualdade (4.21) contradiz o fato de que $x^* \in \Omega$ é solução ótima de $P(w, p)$ em (4.17).

Agora, considerando o caso em que $w_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, k$ teremos que

$$\sum_{i=1}^k w_i (f_i(\hat{x}) - z_i^*) = \sum_{i=1}^k w_i (f_i(x^*) - z_i^*)$$

o que contradiz agora a unicidade de solução de $x^* \in \Omega$ no problema (4.17). Portanto, $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.

(2.) Seja $x^* \in \Omega$ solução de $P(w, p)$ em (4.17), para $1 \leq p < \infty$, isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Suponha também que $0 < w \in \mathcal{W}$. E suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$, ou seja, existe $\hat{x} \in \Omega$ com $\hat{x} \neq x^*$ tal que $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_i(\hat{x}) < f_i(x^*)$ para pelos menos um i . Como por definição, o vetor objetivo ideal satisfaz a desigualdade $z_i^* \leq f_i(x)$, $\forall x \in \Omega$ e, portanto, $|f_i(x) - z_i^*| = f_i(x) - z_i^*$, $x \in \Omega$.

$$\begin{aligned} w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|^p &\leq w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p, \quad \forall i = 1, \dots, k \\ w_j |f_j(\hat{x}) - z_j^*|^p &< w_j |f_j(x^*) - z_j^*|^p, \quad \text{para algum } j \neq i. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Assim,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|^p + w_j |f_j(\hat{x}) - z_j^*|^p < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p + w_j |f_j(x^*) - z_j^*|^p. \quad (4.23)$$

E então, tem-se que

$$\sum_{i=1}^k w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|^p < \sum_{i=1}^k w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p. \quad (4.24)$$

A desigualdade acima (4.24) contradiz o fato de $x^* \in \Omega$ ser solução de $P(w, p)$ em (4.17) pois o valor da função objetivo em $\hat{x} \in \Omega$ foi menor do que o valor da solução x^* de $P(w, p)$. Portanto, $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.

Considerando agora que x^* é uma solução de mínimo local para o problema (4.17), ou seja, que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x^*) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \Omega \cap N(\varepsilon, x^*)$$

onde $N(\varepsilon, x^*) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \|y - x^*\| < \varepsilon\}$ e se $w_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, k$. Então x^* é uma solução

eficiente local.

A demonstração dessa afirmação é análoga aquela feita no item (2) do teorema (11), considerando agora que $x^* \in \Omega$ é um mínimo local para o problema escalar (4.17).

■

Chankong, Haimes (2008) afirma que todos os resultados obtidos nos métodos de escalarização apresentados no presente trabalho podem ser provados considerando que as soluções são de mínimo local e satisfeitas e se todas as hipóteses dos resultados apresentados sem a exigência de convexidade do problema de otimização multiobjetivo forem satisfeitas, então as soluções de mínimo locais obtidas também são soluções localmente eficientes para o problema de otimização correspondente.

Teorema 12. *Seja, $x^* \in \Omega$. Se x^* é solução do problema de Tchebycheff $P(w, \infty)$, com $w_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, k$, então $x^* \in \Omega$ é uma solução fracamente eficiente.*

Demonstração. De acordo com (MIETTINEN, 1999), (SAWARAGI, NAKAYAMA, TANINO, 1985) e (EHRGOTT, 2005) uma solução $x^* \in \Omega$ é dita fracamente eficiente quando $\nexists x \in \Omega$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$. Seja $x^* \in \Omega$ solução do problema $P(w, \infty)$ em (4.18) para $w \in \mathcal{W}$. Considere o vetor objetivo ideal satisfazendo a desigualdade $z_i^* \leq f_i(x)$, $\forall x \in \Omega$ tem-se que $|f_i(x) - z_i^*| = f_i(x) - z_i^*$, $x \in \Omega$. Assim,

$$\min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\} \leq \min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x) - z_i^*|\}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.25)$$

Suponha por absurdo que $x^* \in \Omega$ não seja uma solução fracamente eficiente, então $\exists \hat{x} \in \Omega$ tal que $f_i(\hat{x}) < f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$. Portanto,

$$w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*| < w_i |f_i(x^*) - z_i^*|, \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Portanto, como a desigualdade acima ocorre $\forall i = 1, \dots, k$ tem-se que:

$$\max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|\} < \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\}.$$

E portanto,

$$\min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|\} < \min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\}. \quad (4.26)$$

Observa-se que a desigualdade (4.26) contradiz o fato de que $x^* \in \Omega$ ser solução do problema $P(w, \infty)$ na desigualdade (4.25). Assim, $x^* \in \Omega$ é uma solução fracamente eficiente.

■

Teorema 13. *Se existe pelo menos uma solução $x^* \in \Omega$ para o problema de Tchebycheff $P(w, \infty)$ então $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo que nenhuma solução $x^* \in \Omega$ de $P(w, \infty)$ pertence ao conjunto $\text{efi}(\Omega)$. Assim, $\exists \hat{x} \in \Omega$ tal que $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_i(\hat{x}) < f_i(x^*)$ para algum j . E usando o valor objetivo ideal, isto é, que $z_i^* \leq f_i(x), \forall x \in \Omega$ obtém-se

$$w_i(f_i(\hat{x}) - z_i^*) \leq w_i(f_i(x^*) - z_i^*), \quad \forall i = 1, \dots, k$$

e

$$w_i(f_i(\hat{x}) - z_i^*) < w_i(f_i(x^*) - z_i^*), \text{ para algum } i.$$

Como $|f_i(x) - z_i^*| = f_i(x) - z_i^*$, $x \in \Omega$.

$$\max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|\} \leq \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\}.$$

Portanto,

$$\min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|\} \leq \min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\}. \quad (4.27)$$

Como a desigualdade (4.27) contradiz o fato de que x^* é solução do problema de Tchebycheff $P(w, \infty)$. Conclui-se que existe pelo menos uma solução $x^* \in \Omega$ de $P(w, \infty)$ tal que $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.

■

Corolário 1. *Se $x^* \in \Omega$ é solução única do problema de Tchebycheff $P(w, \infty)$, então $x^* \in \text{efi}(\Omega)$.*

Demonstração. Suponha que $x^* \in \Omega$ é solução única de problema $P(w, \infty)$. Portanto,

$$\min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\} < \min_{x \in \Omega} \max_{i=1, \dots, k} \{w_i |f_i(x) - z_i^*|\}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.28)$$

E suponha por absurdo que $x^* \notin \text{efi}(\Omega)$, então $\exists \hat{x} \in \Omega$ tal que $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, k$ e $f_i(\hat{x}) < f_i(x^*)$ para algum j . E usando o valor objetivo ideal, isto é, para $z_i^* \leq f_i(x), \forall x \in \Omega$ obtém-se

$$w_i(f_i(\hat{x}) - z_i^*) \leq w_i(f_i(x^*) - z_i^*), \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$w_i(f_i(\hat{x}) - z_i^*) < w_i(f_i(x^*) - z_i^*), \text{ para algum } i$$

Como $|f_i(x) - z_i^*| = f_i(x) - z_i^*$, $x \in \Omega$.

$$\max_{i=1,\dots,k} \{w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|\} \leq \max_{i=1,\dots,k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\}.$$

Portanto,

$$\min_{x \in \Omega} \max_{i=1,\dots,k} \{w_i |f_i(\hat{x}) - z_i^*|\} \leq \min_{x \in \Omega} \max_{i=1,\dots,k} \{w_i |f_i(x^*) - z_i^*|\}. \quad (4.29)$$

Como a desigualdade (4.29) contradiz á unicidade de solução de $x^* \in \Omega$ do problema de Tchebycheff $P(w, \infty)$. Conclui-se, portanto, que $x^* \in \text{efi}(\Omega)$. ■

Teorema 14. *Se $x^* \in \text{efi}(\Omega)$, então $\exists w \in \mathcal{W}$ com $w > 0$ tal que $x^* \in \Omega$ é solução do problema de Tchebycheff $P(w, \infty)$, onde o ponto de referência é o vetor objetivo ideal $z^{**} \in \mathbb{R}^k$.*

Demonstração: Ver (MIETTINEM, 1999).

4.3 Programação Geométrica

O estudo desta técnica para a obtenção de solução no contexto de problemas de otimização multiobjetivo justifica-se na natureza das funções componentes serem funções de programação geométrica e no fato de a teoria de programação geométrica está fundamentada na relação existente entre as desigualdades aritmética e geométrica, sendo considerada, portanto, um método de geração de soluções eficientes à posteriori, por associar a cada componente f_i , $i = 1, \dots, k$ da função objetivo $F \subseteq \Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ um peso $0 \leq \delta_i \in \mathbb{R}$ onde $\sum_{i=1}^k \delta_i = 1$, além da aplicação da teoria de Programação Geométrica as restrições, quando existirem. (CHANKONG; HAIMES, 2008).

Nos problemas do presente trabalho, apresentados no capítulo 5, com aplicações por meio de exemplos numéricos realizadas no capítulo 6 oriundas de Islam(2008), a técnica de Programação Geométrica, embora pudesse ser aplicada diretamente ao problema multiobjetivo como descreve Oliveira (2005), foi utilizada após a transformação do problema de otimização multiobjetivo em um problema de otimização composto por uma única função objetivo por meio da aplicação do método das métricas ponderadas (*Method of Weighted Metrics*), que preservou o problema escalar resultante como um problema de programação geométrica signomial, cuja solução é um mínimo local considerada uma solução eficiente local por meio de resultados próprios do Método das Métricas Ponderadas descrito na seção (4.2.5).

A programação geométrica é uma técnica de otimização utilizada para resolver algebricamente os problemas de programação não-linear. Ela surgiu no ano de 1961 quando Zener desenvolvia uma fórmula simples para obter o valor mínimo de um certo tipo de polinômio generalizado utilizado em modelos matemáticos que estava desenvolvendo para diversos problemas de engenharia de projeto de grande importância para a Westinghouse Electric Corporation.

A descoberta de Zener baseou-se em uma mudança de variáveis seguida de uma interessante utilização dos multiplicadores de Lagrange para tratar de uma única restrição resultante de sua transformação de um problema de minimização originalmente irrestrito.

Em outro momento, em 1962, Duffin fazia uma generalização não linear da dualidade linear resultante da Lei de Ohm e das duas leis de Kirchoff.

Zener, por outro lado, não conseguia avançar em suas aplicações em programação geométrica por dificuldades em tratar das limitações impostas que surgiam nos modelos.

Graças aos avanços de Duffin e Petterson que surgiu a programação geométrica. Eles foram responsáveis pelos desenvolvimentos teóricos do trabalho de Zener, fazendo tanto a generalização do produto cartesiano de vetores de transformação x^k correspondentes às funções objetivo e restrições, quanto a generalização das desigualdades da média aritmética e geométrica de Cauchy, relevantes para restrições de desigualdade polinomial generalizada e seus respectivos multiplicadores de Lagrange. (PETTERSON, 2001)

Em Lima Junior (2006) a desigualdade que relaciona as médias aritmética e geométrica de um conjunto de números positivos é desenvolvida de modo construtivo e, posteriormente, a sua generalização por meio do teorema da desigualdade geométrica (15), contribuiu de forma adequada para a formulação de problemas de programação geométrica.

Considere um retângulo de lados a e b que possui a mesma área de um quadrado de lado l . Portanto, $a \cdot b = l^2$, o que implica em $l = \sqrt{a \cdot b}$, onde essa expressão é a média geométrica de a e b .

O problema de otimização sugerido a partir dessas suposições busca determinar o retângulo de menor perímetro, dentre o conjunto de retângulos de mesma área.

Os perímetros do retângulo P_R de lados a e b e do quadrado P_Q de lado l são reescritos da forma:

$$P_R = 2a + 2b = 4 \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right), \quad P_Q = 4l = 4\sqrt{a \cdot b}$$

de modo que se pode obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} P_R &= 4 \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) = 4 \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)^2} = 4 \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}} = 4 \sqrt{ab + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}} \\ &= 4 \sqrt{ab + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right)^2} \geq 4 \sqrt{a \cdot b} = P_Q. \end{aligned}$$

A igualdade acima ocorre, isto é, $P_R = P_Q \Leftrightarrow a = b = l$. Portanto, a solução que minimiza o problema proposto é o quadrado de lado l . Note que a busca pela solução do problema revela a relação entre a média aritmética e geométrica, isto é, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Para a generalização da relação anterior, considere, por exemplo, que dados dois números positivos x_1 e x_2 , cuja média ponderada é definida por $\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &= \left(\frac{2}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_1 \right) + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \right) \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} \\ &\geq x_1^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x_1^{\frac{3}{4}} \cdot x_2^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

A generalização para a desigualdade da média aritmética/geométrica é obtida por meio do teorema da desigualdade geométrica a seguir, cuja demonstração é feita com base em Duffin, Peterson e Zener (1967) e representa um forte resultado na teoria de dualidade em programação geométrica.

Teorema 15. *Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}_+^n$, então ocorre a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^n x_i \delta_i \leq \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \delta_i - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \quad (4.30)$$

onde $\delta \ln \delta = 0$ quando $\delta = 0$.

Além disso, ocorre a igualdade em (4.30) se, e somente se, existe $0 \leq B \in \mathbb{R}$ tal que

$$\delta_i = B e^{x_i} \quad (4.31)$$

A demonstração do Teorema (15) está dividida em duas partes:

(1ª parte:) Mostrar que a desigualdade (4.30) é válida para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}_+^n$, onde $\delta \ln \delta = 0$ quando $\delta = 0$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}_+^n$. Note que a função $g(x) = e^x$ é uma função convexa pois $g'(x) = g''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, pela convexidade de g tem-se

$$e^z + (x - z)e^z \leq e^x, \quad \forall x, z \in \mathbb{R}.$$

Fazendo a substituição de variáveis $y = e^z$ ocorre que $z = \ln y$ e portanto,

$$y + (x - \ln y)y \leq e^x.$$

Nota-se que a igualdade se verifica quando $x = \ln y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Condiderando agora que $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se que:

$$\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n (x_i - \ln y_i) y_i \leq \sum_{i=1}^n e^{x_i} \quad (4.32)$$

onde a igualdade se verifica quando $x_i = \ln y_i$.

Escolhendo um vetor arbitrário, porém fixo $0 < \delta \in \mathbb{R}^n$ e para $0 < \theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n \theta \delta_i + \sum_{i=1}^n (x_i - \ln \theta \delta_i) \theta \delta_i \leq \sum_{i=1}^n e^{x_i}, \quad \theta > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.33)$$

A igualdade ocorre quando $x_i = \ln \delta_i + \ln \theta$, $i = 1 \dots, n$.

Reescrevendo o lado esquerdo de (4.33) em função de θ temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta \delta_i + \sum_{i=1}^n x_i \theta \delta_i - \sum_{i=1}^n \theta \delta_i \ln \theta \delta_i &= \sum_{i=1}^n \theta \delta_i + \sum_{i=1}^n x_i \theta \delta_i - \sum_{i=1}^n \theta \delta_i [\ln \theta + \ln \delta_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \theta \delta_i + \sum_{i=1}^n x_i \theta \delta_i - \sum_{i=1}^n (\theta \ln \theta) \delta_i - \sum_{i=1}^n \theta \delta_i \ln \delta_i \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i [1 + x_i - \ln \delta_i] \theta - (\theta \ln \theta) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^n \delta_i [1 + x_i - \ln \delta_i] \theta - (\theta \ln \theta) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \quad (4.34)$$

E derivando (4.34) em relação à θ obtemos que:

$$\begin{aligned}
 f'(\theta) &= \sum_{i=1}^n \delta_i (1 + x_i - \ln \delta_i) - \left[\sum_{i=1}^n \delta_i \ln \theta + \sum_{i=1}^n \delta_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \delta_i + \sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \theta - \sum_{i=1}^n \delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \theta
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Derivando a função $f'(\theta)$ em (4.35) novamente em relação à θ obtemos que:

$$f''(\theta) = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Como $\sum_{i=1}^n \delta_i > 0$ conclui-se que $f''(\theta) < 0$, $\forall \theta$. Portanto, f é uma função côncava e admite apenas um ponto de máximo.

Os pontos estacionários de f são obtidos fazendo $f'(\theta) = 0$, ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \theta = \sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i).$$

Assim,

$$\ln \tilde{\theta} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \delta_i} \left[\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right] \tag{4.36}$$

onde $\tilde{\theta}$ é o ponto de máximo. Quando $\theta = \tilde{\theta}$, substituindo $\ln \tilde{\theta}$ em (4.34) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 f(\tilde{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \delta_i (1 + x_i - \ln \delta_i) \tilde{\theta} - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \tilde{\theta} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)} \left[\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \delta_i (1 + x_i - \ln \delta_i) \tilde{\theta} - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right) \tilde{\theta} \\
 &= \sum_{i=1}^n \delta_i \tilde{\theta} + \left(\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right) \tilde{\theta} - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right) \tilde{\theta} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \tilde{\theta}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Por (4.33) tem-se que $f(\theta) \leq \sum_{i=1}^n e^{x_i}$, $\theta > 0$.

Quando $\theta = \tilde{\theta}$ tem-se por (4.37) e (4.33) que:

$$\left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \tilde{\theta} \leq \sum_{i=1}^n e^{x_i}. \quad (4.38)$$

Aplicando o logaritmo neperiano em ambos os membros de (4.38) e usando que a função $g(u) = \ln u$ é crescente tem-se que:

$$\begin{aligned} \ln \left(\tilde{\theta} \sum_{i=1}^n \delta_i \right) &\leq \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) \\ \ln \tilde{\theta} + \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) &\leq \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) \end{aligned}$$

Segue de (4.36) que

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) + \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)} \left[\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right] &\leq \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) \\ \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) + \left[\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \right] &\leq \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \delta_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \delta_i + \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right). \quad (4.39)$$

■

(2ª parte:) Provar que ocorre a igualdade em (4.30) se, e somente se, existe $0 \leq B \in \mathbb{R}$ tal que (4.31) é satisfeita.

Demonstração. (Condição necessária) Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \delta \in \mathbb{R}^n$ e considerando que $x_i = \ln \delta_i + \ln \theta$. Quando $\theta = \tilde{\theta}$, por (4.36) tem-se que

$$x_i = \ln \delta_i + \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j} \left[\sum_{j=1}^n \delta_j (x_j - \ln \delta_j) \right].$$

Como $x_j = \ln \delta_j - \ln \tilde{\theta}$ onde $\tilde{\theta}$ definido em (4.36) é positivo e para $j = 1, \dots, N$, ocorre que $\delta_i(x_j - \ln \delta_j) > 0$ e $\left(\sum_{j=1}^n \delta_j\right) > 0$ pois $0 < \delta \in \mathbb{R}$. Portanto, considerando

$$B = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j} \left[\sum_{j=1}^n \delta_j (x_j - \ln \delta_j) \right] > 0$$

é possível escrever $x_i = \ln \delta_i - \ln B$, ou ainda, $\delta_i = B e^{x_i}$, $i = 1, \dots, n$ para $\delta > 0$.

(Condição suficiente) No caso de $\delta_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, ambos os membros de (4.39) são nulos. E neste caso a desigualdade geométrica está satisfeita.

O último caso analisado refere-se ao caso em que algumas componentes de $\delta \in \mathbb{R}^n$ são positivas e outras nulas. Ou seja, para $1 \leq s < n$ tem-se que

$$\begin{cases} \delta_i > 0 & , \quad i = 1, \dots, s \\ \delta_i = 0 & , \quad i = s+1, \dots, n \end{cases} \quad (4.40)$$

Por (4.39) obtém-se que

$$\sum_{i=1}^s \delta_i x_i \leq \sum_{i=1}^s \delta_i \ln \delta_i + \left(\sum_{i=1}^s \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^s e^{x_i} \right) - \left(\sum_{i=1}^s \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^s \delta_i \right).$$

Como $\sum_{i=1}^n \delta_i x_i = \sum_{i=1}^s \delta_i x_i + \sum_{i=s+1}^n \delta_i x_i$ e $e^{x_i} > 0$, para $i = s+1, \dots, n$. Além disso, obtém-se uma desigualdade estrita pela definição de (4.40), ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \delta_i x_i < \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \delta_i + \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right).$$

Note que como $e^{x_i} > 0$, para $i = 1, \dots, n$, não existe $B \in \mathbb{R}$ tal que pela definição (4.40) obtenha-se $\delta_i = B e^{x_i}$ para $i = 1, \dots, n$.

■

Com a desigualdade geométrica (4.30) demonstrada acima obtém-se uma generalização da desigualdade clássica das médias aritmética-geométrica considerando o vetor $0 < \delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição de ortogonalidade $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$. Portanto, da desigualdade geométrica (4.30)

obtém-se que

$$\sum_{i=1}^n \delta_i (x_i - \ln \delta_i) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right). \quad (4.41)$$

Como $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor arbitrário e $\delta_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ pode-se escolher números arbitrários fixados $T_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ tal que

$$x_i = \ln(\delta_i T_i). \quad (4.42)$$

Substituindo (4.42) em (4.41) obtém-se que

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \ln T_i \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i T_i \right) \quad (4.43)$$

A igualdade em (4.43) ocorre considerando (4.42) e a segunda conclusão do Teorema (15) se e somente se

$$\delta_i = B \delta_i T_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.44)$$

Observa-se que pela segunda conclusão do Teorema (15), se existe $0 < B \in \mathbb{R}$ tal que $\delta_i = B e^{x_i}$ então ocorre a igualdade em (4.30) e para $0 < \delta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$ tem-se também a igualdade em (4.43). De (4.43)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ln T_i^{\delta_i} &\leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i T_i \right) \\ \ln \left(\prod_{i=1}^n T_i^{\delta_i} \right) &\leq \ln \left(\sum_{i=1}^n \delta_i T_i \right) \\ e^{\ln(\prod_{i=1}^n T_i^{\delta_i})} &\leq e^{\ln(\sum_{i=1}^n \delta_i T_i)} \\ \prod_{i=1}^n T_i^{\delta_i} &\leq \sum_{i=1}^n \delta_i T_i \end{aligned} \quad (4.45)$$

Um *posinômio* é uma função composta por termos da forma $u_i(t) = c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}$, onde os termos $c_i > 0$ são constantes e os expoentes a_{ij} , $j = 1, \dots, m$ são números reais.

A formulação geral para um problema de programação geométrica primal (PGP) é definida por:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad g_0(t) &= \sum_{i \in J[0]} c_{0i} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{0ij}} \\ \text{sujeito à} \quad g_k(t) &= \sum_{i \in J[k]} c_{ki} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{kij}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ t_j &> 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde $0 < c_{k_i} \in \mathbb{R}$, $a_{k_{ij}} \in \mathbb{R}$ para $k = 0, 1, \dots, p$. E além disso,

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n.$$

A coleção de conjuntos indexados $J[k]$, $k = 1, \dots, p$ são mutuamente disjuntos, ou seja,

$$\bigcap_{k=1}^p J[k] = \emptyset.$$

Além disso,

$$\bigcup_{k=1}^p J[k] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

O dual do problema (4.46) tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & v(\delta) = \left(\prod_{i \in J[k]} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) \delta_i \right) \prod_{k=1}^p \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \\ \text{sujeito à} \quad & \lambda_0(\delta) = \sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1 \\ & \lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i, \quad k = 1, \dots, p \\ & \sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, m \\ & \delta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4.47}$$

O Teorema (15) demonstrado anteriormente, além de ser fundamental para a demonstração da desigualdade da média aritmética-geométrica (4.45) para $i = 1, \dots, n$ também é utilizado fortemente na demonstração do lema a seguir que estabelece uma relação entre as variáveis primais e duais e seus respectivos valores nas funções objetivo.

Lema 1. *Se $t \in \mathbb{R}^m$ satisfaz das restrições do problema de PG primal (4.46) e $\delta \in \mathbb{R}^n$ satisfaz as restrições do problema de PG dual (4.47), então*

$$g_0(t) \geq v(\delta). \tag{4.48}$$

Além disso, sob as mesmas condições, $g_0(t) = v(\delta)$ se, e somente se,

$$\delta_i = \begin{cases} \frac{1}{g_0(t)} \left(c_{0i} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{0ij}} \right) & , \quad i \in J[0] \\ \lambda_k(\delta) \left(c_{ki} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{kij}} \right) & , \quad i \in J[k] \end{cases} \quad (4.49)$$

A demonstração do Lema (1) está dividida em duas partes:

(1ª parte:) Mostrar que a desigualdade (4.48) é válida para $t \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo as restrições do problema de PG primal (4.46) e $\delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo as restrições do problema de PG dual (4.47).

Demonstração. Considerando $u_{k_i}(t) = c_k \prod_{j=1}^m t_j^{a_{kij}}$ posinômios e as funções posinomiais

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} u_{k_i}(t) \text{ para } k = 0, 1, \dots, p.$$

Defina $x_i = \ln(u_{k_i}(t))$ para $i \in J[k]$ e $k = 0, 1, \dots, p$ e pela desigualdade geométrica (4.30) tem-se que

$$\sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln(u_{k_i}(t)) \leq \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} u_{k_i}(t) \right) + \sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln \delta_i - \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right)$$

Como $g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} u_{k_i}(t)$ obtém-se:

$$\sum_{i \in J[k]} \ln \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} + \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right)^{(\sum_{i \in J[k]} \delta_i)} \leq \ln g_k(t)^{(\sum_{i \in J[k]} \delta_i)}. \quad (4.50)$$

E aplicando a função exponencial que é monótona crescente em ambos os membros da desigualdade (4.50) conclui-se que

$$e^{\sum_{i \in J[k]} \ln \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i}} \cdot e^{\ln(\sum_{i \in J[k]} \delta_i)^{(\sum_{i \in J[k]} \delta_i)}} \leq e^{\ln g_k(t)^{(\sum_{i \in J[k]} \delta_i)}}. \quad (4.51)$$

Considerando $\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i$ tem-se que

$$\prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \leq g_k(t)^{\lambda_k(\delta)} \leq 1. \quad (4.52)$$

Para $k = 0$ em (4.52) tem-se que $\lambda_0(\delta) = \sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1$ e, portanto,

$$\prod_{i \in J[0]} \left(\frac{u_{0_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \leq g_0(t). \quad (4.53)$$

Calculando o produto para $k = 1, \dots, p$ em (4.52) obtém-se:

$$\prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^p (\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}) \leq 1 \quad (4.54)$$

Multiplicando ambos os membros de (4.53) e (4.54)

$$\left[\prod_{i \in J[0]} \left(\frac{u_{0_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right] \left[\prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right] \prod_{k=1}^p (\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}) \leq g_0(t) \quad (4.55)$$

Como $\bigcup_{k=1}^p J[k] = \{1, 2, \dots, n\}$, os produtórios em (4.55)

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^p \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \leq g_0(t) \quad (4.56)$$

Observa-se também que como

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{j=1}^m t_j^{\sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i}. \quad (4.57)$$

E pela restrição de ortogonalidade do problema de PG dual, isto é, $\sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i = 0$ para $j = 1, \dots, m$ a expressão em (4.57) resulta em:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i}. \quad (4.58)$$

Substituindo (4.58) em (4.56) obtém-se

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^p \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \leq g_0(t) \quad (4.59)$$

Pela formulação do problema dual (4.47) e pela desigualdade em (4.59) conclui-se que:

$$v(\delta) \leq g_0(t)$$

Portanto, a demonstração da primeira parte do Lema (1) está completa. ■

(2ª parte:) Provar que ocorre a igualdade em (4.48) se, e somente se, sob as mesmas hipóteses do Lema (1) δ_i é definido pelas expressões dadas em (4.49)

Demonstração. (Condição necessária) Suponha agora que $g_0(t) = v(\delta)$ e que $t \in \mathbb{R}^m$ e $\delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazem as restrições primais e duais, respectivamente. Assim, as desigualdades (4.52) e (4.53) se tornam agora igualdades pois $g_0(t) = v(\delta)$ é o mesmo que

$$\left[\prod_{i \in J[0]} \left(\frac{u_{0_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right] \left[\prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right] \prod_{k=1}^p (\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}) = g_0(t)$$

Assim,

$$g_k(t)^{\lambda_k(\delta)} = 1, \quad k = 1, \dots, p \quad (4.60)$$

E de acordo com a segunda conclusão do Teorema (15) e pela definição de que $x_i = \ln(u_{k_i}(t))$, $i \in J[k]$, $k = 0, 1, \dots, p$ existem $B_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, p$ tais que

$$\delta_i = B_k u_{k_i}(t), \quad i \in J[k], \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (4.61)$$

Realizando a soma de (4.61) sobre $J[k]$ obtém-se:

$$\sum_{i \in J[k]} \delta_i = \sum_{i \in J[k]} B_k u_{k_i}(t).$$

Como $\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i$ e $g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} u_{k_i}(t)$ conclui-se de (4.61) que

$$\lambda_k(\delta) = B_k g_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (4.62)$$

Pela restrição de normalidade do problema de PG dual, $\lambda_0(\delta) = \sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1$ e, portanto, de (4.62) obtém-se:

$$B_0 = \frac{1}{g_0(t)}. \quad (4.63)$$

Substituindo (4.63) em (4.61) quando $k = 0$ obtém-se a primeira igualdade de (4.49), ou seja,

$$\delta_i = \frac{1}{g_0(t)} u_{0_i}(t), \quad \text{onde} \quad u_{0_i}(t) = c_{0_i} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{0_{ij}}}.$$

Para $k = 1, \dots, p$, os resultados são obtidos por meio da análise de dois casos.

(i) $B_k = 0, \forall k = 1, \dots, p$.

Neste caso, a igualdade (4.62) implica que $\lambda_k(\delta) = 0$ e como $\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i$ e $\delta_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$ conclui-se que $\delta_i = 0$ para $i \in J[k]$ já que $J[k] \subset \{1, \dots, n\}$. Portanto, a relação (4.49) é satisfeita para $i \in J[k]$.

(ii) $B_k > 0, k = 1, \dots, p$.

Pela igualdade (4.62), como $g_k(t) > 0$ conclui-se que $\lambda_k(\delta) > 0$ pois $B_k > 0$. E por (4.60) conclui-se que $g_k(t) = 1$. E ainda pela igualdade (4.62) obtém-se que $\lambda_k(\delta) = B_k$. E como $\delta_i = B_k u_{k_i}(t)$ para $i \in J[k]$, onde $k = 1, \dots, p$, obtém-se que $\delta_i = \lambda_k(\delta) u_{k_i}(t)$, ou seja,

$$\delta_i = \lambda_k(\delta) \left(c_{k_i} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{k_{ij}}} \right).$$

Portanto, a demonstração da condição necessária da segunda parte do Lema (1) está completa.

(Condição suficiente) Suponha agora que $t \in \mathbb{R}^m$ e $\delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazem as igualdades em (4.49) e além disso, as restrições primais e duais, respectivamente.

Das igualdades em (4.49)

$$\delta_i = \frac{1}{g_0(t)} u_{0_i}(t), \quad i \in J[0] \quad \text{e} \quad \delta_i = \lambda_k(\delta) u_{k_i}(t), \quad i \in J[k], \quad k = 1, \dots, p. \quad (4.64)$$

Como $x_i = \ln(u_{k_i}(t))$, $i \in J[k]$, $k = 0, 1, \dots, p$ e por (4.64) conclui-se que:

$$B_k = \begin{cases} \frac{1}{g_0(t)}, & k = 0 \\ \lambda_k(\delta), & k = 1, \dots, p \end{cases}$$

Portanto, $\delta_i = B_k e^{x_i}$, $i \in J[k]$, $k = 0, 1, \dots, p$ e pela segunda conclusão do Teorema (15) as desigualdades em (4.52) se tornam igualdades, ou seja,

$$\prod_{i \in J[k]} \left(\frac{u_{k_i}(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} = g_k(t)^{\lambda_k(\delta)} \quad (4.65)$$

Para $k = 0$, por (4.65) e (4.58) obtém-se:

$$\prod_{i \in J[0]} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} = g_0(t) \quad (4.66)$$

Observa-se que quando $\lambda_k(\delta) = 0$ para $k = 1, \dots, p$ e $\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i$ conclui-se que $\delta_i = 0$ para $i \in J[k]$, $k = 1, \dots, p$ e as desigualdades em (4.52) se tornam igualdades.

Quando $\lambda_k(\delta) > 0$ para $k = 1, \dots, p$ observa-se que

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i, \quad (4.67)$$

Mas, por (4.49) obtém-se que:

$$\lambda_k(\delta) = \frac{1}{g_k(t)} \sum_{i \in J[k]} \delta_i \quad (4.68)$$

Portanto, de (4.67) e (4.68) tem-se que $g_k(t) = 1$. Portanto,

$$g_k(t)^{\lambda_k(\delta)} = 1 \quad (4.69)$$

Das igualdades em (4.65) e (4.69), o resultado do produto sobre $k = 1, \dots, p$ em (4.65) multiplicada membro a membro por (4.66) resulta na igualdade:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i(t)}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^p \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} = g_0(t). \quad (4.70)$$

Ou ainda,

$$v(\delta) = g_0(t)$$

■

Definição 14. *O problema de programação geométrica (primal ou dual) é dito **consistente** se existe pelo menos um ponto viável. O problema de PG é dito **superconsistente** se existe pelo menos um vetor $t^* \in \mathbb{R}^m$ com $t_j > 0$, $\forall j = 1, \dots, m$ tal que*

$$g_k(t^*) < 1, \quad k = 1, \dots, p$$

Teorema de Dualidade 1. *Se o problema de PG primal (4.46) é superconsistente e a função*

primal $G_0(t)$, $0 < t \in \mathbb{R}^m$ atinge seu valor de mínimo restrito em um ponto $0 < t^* \in \mathbb{R}^m$ viável. Então

- (i) O problema dual correspondente (4.47) é consistente e a função dual $v(\delta)$ atinge o valor de máximo restrito em um ponto viável;
- (ii) Se t^* e δ^* são soluções ótimas dos problemas primais e duais (4.46) e (4.47), respectivamente, então

$$G_0(t^*) = v(\delta^*).$$

- (iii) Se $\tilde{t}$ é uma solução ótima do problema primal (4.46), existem multiplicadores de Lagrange não negativos $\tilde{\mu}_k$, $k = 1, \dots, p$ tais que a função Lagrangeana

$$L(t, \mu) = G_0(t) + \sum_{k=1}^p \tilde{\mu}_k (G_k(t) - 1)$$

tem a propriedade:

$$L(\tilde{t}, \mu) \leq G_0(\tilde{t}) = L(\tilde{t}, \tilde{\mu}) \leq L(t, \tilde{\mu})$$

para $t_j > 0, j = 1, \dots, m$ e $\tilde{\mu}_k \geq 0$ arbitrários.

Além disso, a solução ótima do problema dual (4.47) é dada por:

$$\tilde{\delta}_i = \begin{cases} \frac{1}{G_0(\tilde{t})} \left(c_{0i} \prod_{j=1}^m \tilde{t}_j^{a_{0ij}} \right), & i \in J[0] \\ \frac{\tilde{\mu}_k}{G_0(\tilde{t})} \left(c_{ki} \prod_{j=1}^m \tilde{t}_j^{a_{kij}} \right), & i \in J[k] \end{cases}$$

e, além disso,

$$\lambda_k(\tilde{\delta}) = \frac{\tilde{\mu}_k}{G_0(\tilde{t})}, \quad k = 1, \dots, p.$$

- (iv) Se $\tilde{\delta}$ é uma solução ótima para o problema dual (4.47), existe uma solução ótima $\tilde{t}$ para o problema primal (4.46) que satisfaz o sistema de equações:

$$\begin{aligned} c_{0i} \prod_{j=1}^m \tilde{t}_j^{a_{0ij}} &= \tilde{\delta}_i v(\tilde{\delta}), i \in J[0] \\ c_{ki} \prod_{j=1}^m \tilde{t}_j^{a_{kij}} &= \frac{\tilde{\delta}_i}{\lambda_k(\tilde{\delta})}, i \in J[k] \end{aligned}$$

Demonstração: Ver (DUFFIN, PETERSON, ZENER, 1967).

Os problemas de programação geométrica posinomiais duais, definidos em (4.47) não são côncavos. Entretanto, o logaritmo da função v em (4.71) é uma função côncava.

$$f(\delta) = \ln(v(\delta)) = \sum_{i=1}^n [\delta_i \ln(c_i) - \delta_i \ln(\delta_i)] + \sum_{k=1}^p \lambda_k(\delta) \ln \lambda_k(\delta) \quad (4.71)$$

Como $\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i$ e a função (4.71) é côncava, então o seu simétrico é uma função convexa.

Portanto, o problema seguinte é um problema de programação convexa com restrições lineares.

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \hat{f}(\delta) = -\ln(v(\delta)) = \left(\sum_{i=1}^n [\delta_i \ln(\delta_i) - \delta_i \ln(c_i)] \right) - \\ & \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \\ \text{sujeito à} \quad & \lambda_0(\delta) = \sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1 \\ & \lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i, \quad k = 1, \dots, p \\ & \sum_{i=1}^n a_{ij} \delta_i = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, m \\ & \delta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.72)$$

Uma outra maneira de obter o problema dual (4.72) diretamente do problema primal de PG posinomial (4.46) é descrita a seguir, desconsiderando na notação do problema (4.46) a presença do termo k nos coeficientes $c_{k_i} > 0$ e nos expoentes $a_{k_{ij}} \in \mathbb{R}$ para que a demonstração esteja de acordo com Bazarra, Sherali, Shetty (1993). O exemplo seguinte é um problema de programação geométrica posinomial com três variáveis.

Denotando o posinômio $T_i = c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}$ tem-se que $G_0(t) = \sum_{i \in J[0]} T_i$ e $G_k(t) = \sum_{i \in J[k]} T_i$ para $k = 1, \dots, p$. E fazendo a mudança de variável:

$$y_j = \ln t_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.73)$$

Obtém-se que

$$\begin{aligned} \tau_i &= c_i \prod_{j=1}^m (e^{y_j})^{a_{ij}} \\ &= c_i e^{a_i^T y}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Portanto, o problema de PG primal (4.46) após a mudança de variável (4.73) é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \ln(\widehat{G}_0(y)) \\ & \text{sujeito à} \quad \ln(\widehat{G}_k(y)) \leq 0 \\ & \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde

$$\widehat{G}_0(y) = \sum_{i \in J[0]} c_i e^{a_i^T y} \quad \text{e} \quad \widehat{G}_k(y) = \sum_{i \in J[k]} c_i e^{a_i^T y}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (4.76)$$

Pelo Lema (11.5.1) (BAZARRA; SHERALI; SHETTY, 1993, p. 532) tem-se que a função objetivo e restrições no problema (4.75) são convexas e o Teorema de Dualidade Forte (BAZARRA; SHERALI; SHETTY, 1993, p. 208) afirma que não existe gap de dualidade entre (4.75) e o seu dual Lagrangeano formulado abaixo:

$$\text{Maximize} \{ \theta(\lambda), \quad \lambda \geq 0 \} \quad (4.77)$$

onde

$$\theta(\lambda) = \min_y \{ L(y, \lambda) \} \quad (4.78)$$

e onde a função Lagrangeana é dada por:

$$L(y, \lambda) = \ln(\widehat{G}_0(y)) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln(\widehat{G}_k(y)). \quad (4.79)$$

Dado que $\lambda \geq 0$, mínimo da função Lagrangeana ocorre quando o gradiente $\nabla_y L(y, \lambda) = 0$. Logo, o dual Lagrangeano é escrito equivalentemente da seguinte forma:

$$\text{Maximize} \quad \{ L(y, \lambda) \quad \text{s.a.} \quad \nabla_y L(y, \lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m \}. \quad (4.80)$$

Para simplificar a expressão em (4.80), o cálculo do gradiente da função Lagrangeana é dado por:

$$\nabla_y L(y, \lambda) = \frac{\nabla \widehat{G}_0(y)}{\widehat{G}_0(y)} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\nabla \widehat{G}_k(y)}{\widehat{G}_k(y)}$$

Pelas expressões de τ_i em (4.74) e das funções objetivo e restrições em (4.76) tem-se que a expressão de $\nabla_y L(y, \lambda)$ é dada por:

$$\nabla_y L(y, \lambda) = \frac{1}{\widehat{G}_0(y)} \sum_{i \in J[0]} a_i \tau_i + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{\widehat{G}_k(y)} \sum_{i \in J[k]} a_i \tau_i. \quad (4.81)$$

Utilizando agora uma segunda mudança de variáveis, considere $\delta_1, \dots, \delta_n$ definidos de acordo com as expressões seguintes:

$$\delta_i = \frac{\tau_i}{\widehat{G}_0}, \forall i \in J[0] \quad (4.82)$$

$$\delta_i = \frac{\lambda_k \tau_i}{\widehat{G}_k}, \forall i \in J[k], k = 1, \dots, p \quad (4.83)$$

Note que o argumento y está definido como uma variável implícita, sendo omitida na dependência das funções $\widehat{G}_0, \widehat{G}_k, \tau_i, \delta_i$, para todos $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$. Reescrevendo o problema (4.80) nas variáveis (δ, λ) , suprimindo a variável y do problema tem-se das expressões da funções objetivo $\widehat{G}_0, \widehat{G}_k, k = 1, \dots, p$ em (4.76), τ_i em (4.74) e de δ_i em (4.82) e (4.83) as condições de normalidade a seguir:

$$\sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1 \quad e \quad \sum_{i \in J[k]} \delta_i = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, p \quad (4.84)$$

Por meio das expressões (4.76), (4.74) e (4.79) obtém-se a restrição de ortogonalidade (4.85) abaixo.

$$\begin{aligned} \nabla_y L(y, \lambda) &= 0 \\ \frac{1}{\widehat{G}_0(y)} \sum_{i \in J[0]} a_i \tau_i + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{\widehat{G}_k(y)} \sum_{i \in J[k]} a_i \tau_i &= 0 \\ \sum_{i \in J[0]} a_i \delta_i + \sum_{k=1}^p \left[\sum_{i \in J[k]} \frac{a_i \tau_i \lambda_k}{\widehat{G}_k(y)} \right] &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \delta_i a_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Para finalizar a construção do problema transformado, considere que

$$\begin{aligned} \lambda_k \ln(\widehat{G}_k) &= \lambda_k \ln \lambda_k + \lambda_k \ln \left(\frac{\widehat{G}}{\lambda_k} \right) \\ &= \lambda_k \ln \lambda_k + \sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln \left(\frac{\tau_i}{\delta_i} \right) \\ &= \lambda_k \ln \lambda_k + \sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} e^{a_i^T y} \right) \\ &= \lambda_k \ln \lambda_k + \sum_{i \in J[k]} \delta_i \left[\ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \ln \left(e^{a_i^T y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\lambda_k \ln(\widehat{G}_k) = \lambda_k \ln \lambda_k + \sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{i \in J[k]} \delta_i a_i^T y \quad (4.86)$$

Similarmente, tem-se que

$$\begin{aligned} \ln(\widehat{G}_0) &= \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln(\widehat{G}_0) \\ &= \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln \left(\frac{\tau_i}{\delta_i} \right) \\ &= \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln e^{a_i^T y} \\ &= \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{i \in J[0]} \delta_i a_i^T y \end{aligned} \quad (4.87)$$

Substituindo as expressões (4.86) e (4.87) na função Lagrangeana (4.79) obtém-se que:

$$\begin{aligned} \ln(\widehat{G}_0) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln(\widehat{G}_k) &= \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{i \in J[0]} \delta_i a_i^T y + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln \lambda_k + \\ &\sum_{k=1}^p \sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{k=1}^p \sum_{i \in J[k]} \delta_i a_i^T y. \end{aligned}$$

E agrupando os termos obtém-se:

$$\begin{aligned} \ln(\widehat{G}_0) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln(\widehat{G}_k) &= \sum_{i \in J[0]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{k=1}^p \sum_{i \in J[k]} \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) \\ &+ \sum_{i \in J[0]} \delta_i a_i^T y + \sum_{k=1}^p \sum_{i \in J[k]} \delta_i a_i^T y + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln \lambda_k \end{aligned} \quad (4.88)$$

Como $\bigcap_{k=1}^p J[k] = \emptyset$ e $\bigcup_{k=1}^p J[k] = \{1, 2, \dots, n\}$ tem-se que de (4.88) que:

$$\ln(\widehat{G}_0) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln(\widehat{G}_k) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{i=1}^n \delta_i a_i^T y + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln \lambda_k. \quad (4.89)$$

Pela restrição de ortogonalidade em (4.85) tem-se que $\sum_{i=1}^n \delta_i a_i^T \cdot y = 0$ e, portanto a função objetivo do problema transformado é dada por:

$$V(\delta, \lambda) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{k=1}^p \lambda_k \ln \lambda_k. \quad (4.90)$$

Usando a restrição de normalidade (4.84), isto é, $\sum_{i \in J[k]} \delta_i = \lambda_k$, $k = 1, \dots, p$ obtém-se a função:

$$V(\delta) = \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right). \quad (4.91)$$

Observa-se que a função V obtida em (4.91) é a função em (4.71) descrita anteriormente. Com as restrições de normalidade (4.84), ortogonalidade (4.85), $\delta, \lambda \geq 0$ obtém-se então o seguinte problema dual de programação geométrica equivalente, cuja convexidade da função objetivo (4.91) foi obtida anteriormente resultando na função $\hat{f}$ em (4.72).

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^n \delta_i \ln \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right) + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \\ & \text{sujeito à} \quad \sum_{i=1}^n \delta_i a_i = A\delta = 0 \\ & \quad \sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1 \\ & \quad \sum_{i \in J[k]} \delta_i = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, p \\ & \quad \delta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Exemplo: Considere uma caixa retangular sem tampa cujas dimensões de largura, comprimento e altura, respectivamente, são definidas pelo vetor $x = (x_1, x_2, x_3)$. Encontre a caixa de maior volume dentre o conjunto de caixas com uma área de superfície total fixa menor ou igual à S_0 . As dimensões da caixa são:

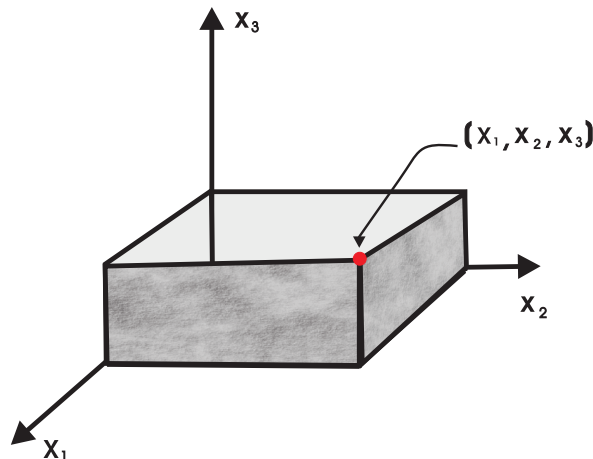


Figura 4.3: Caixa retangular aberta

Largura = x_1 ; comprimento = x_2 ; altura = x_3 .

O volume da caixa é definido por $V(x) = x_1 x_2 x_3$ e a área total da superfície definida por $A_S = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$. O problema é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad V(x) = x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} \\ & \text{sujeito à} \quad x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 = S_0 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 > 0 \end{aligned}$$

4.3.1 Programação Geométrica Signomial

O problema de Programação Geométrica Signomial (PGS) é composto de função objetivo e restrições, onde pelo menos um destes é caracterizado pela diferença de dois posinômios. A principal característica de problemas de programação geométrica signomial é a presença de um ou mais termos com coeficientes negativos. Um problema de programação signomial primal apresenta-se com a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad G_0(t) \\ & \text{sujeito à} \quad G_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ & \quad \quad \quad t_j > 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.92}$$

onde

$$G_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_{ki} c_{ki} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{kij}}, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Os parâmetros $\sigma_{ki} = \pm 1$, $c_{ki} > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ e os expoentes a_{kij} são irrestritos em sinal, $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall j = 1, \dots, m$ e $k = 0, 1, \dots, p$. Os conjuntos

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n.$$

A coleção de conjuntos indexados $J[k]$, $k = 1, \dots, p$ são mutuamente disjuntos, ou seja,

$$\bigcap_{k=1}^p J[k] = \emptyset \quad e \quad \bigcup_{k=1}^p J[k] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Note que o problema de PG posinomial é um caso particular do problema de PG signomial quando $\sigma_{ki} = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$, onde $k = 0, 1, \dots, p$.

4.3.2 Técnica de Condensação de Problemas de PG Signomial

O processo de condensação é o método clássico usado para resolver problemas de programação geométrica signomial. (YANG; BRICKER, 1997)

O princípio fundamental da condensação é aproximar uma função com vários termos posinomiais, isto é, termos da forma: $\sum_{i \in J[k]} c_{ki} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{kij}}$ por uma função de um único termo, ou seja, por uma função monomial da forma: $\tilde{c}_{ki} \prod_{j=1}^m t_j^{\tilde{a}_{kij}}$.

De acordo com (BEIGHTLER, PHILLIPS, 1976) dois casos podem ocorrer em um problema de PG signomial: a função objetivo ser signomial ou ser posinomial. Essa informação é determinante na abordagem adotada para os problemas equivalentes ao problema original de modo a aplicar a técnica da condensação para obter solução ótima local.

- (1.) A função objetivo contém termos posinomiais positivos e negativos e neste caso escreve-se a função objetivo da seguinte forma:

$$G_0(t) = G_0^+(t) - G_0^-(t) \quad (4.93)$$

Este caso se subdivide ainda em dois outros casos. Quando em um ponto viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ para o problema (4.92)

- (i) Se $G_0(\tilde{t}) > 0$. A função objetivo é substituída por uma nova variável $t_0 > 0$ e uma restrição adicionada da seguinte forma: $G_0(t) \leq t_0$. O problema (4.92) pode ser reescrito com a seguinte formulação geral:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad t_0 \\ & \text{sujeito à} \quad t_0^{-1} G_0(t) \leq 1 \\ & \quad \quad \quad G_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ & \quad \quad \quad t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\text{onde } G_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_{ki} c_{ki} \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}}, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Escrevendo $\tilde{G}_0(t) = t_0^{-1} G_0(t)$, o problema equivalente ao (4.94) é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad t_0 \\
& \text{sujeito à} \quad \tilde{G}_0(t) \leq 1 \\
& \quad \quad \quad G_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\
& \quad \quad \quad t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{4.95}$$

onde $G_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_{ki} c_{ki} \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}}$ para $k = 0, 1, \dots, p$.

A restrição signomial pode ser escrita como a diferença entre duas funções posinomiais, isto é,

$$\begin{aligned}
G_k(t) &= G_k^+(t) - G_k^-(t), \quad k = 1, \dots, p \\
\tilde{G}_0(t) &= \tilde{G}_0^+(t) - \tilde{G}_0^-(t)
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Usando a diferença posinomial (4.96) para reescrever a k -ésima restrição do problema (4.105) obtemos:

$$\begin{aligned}
G_k^+(t) - G_k^-(t) &\leq 1 \\
\frac{G_k^+(t)}{1 + G_k^-(t)} &\leq 1
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Já a restrição referente a função objetivo do problema original é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_0^+(t) - \tilde{G}_0^-(t) &\leq 1 \\
\frac{\tilde{G}_0^+(t)}{1 + \tilde{G}_0^-(t)} &\leq 1,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{G}_0^-(t) = t_0^{-1} G_0^-(t)$, $\tilde{G}_0^+(t) = t_0^{-1} G_0^+(t)$.

De acordo com Yang, Bricker (1997) as funções posinomiais para as coleções de termos positivos e negativos na k -ésima restrição de um problema de programação geométrica, são definidos, respectivamente, por:

$$G_k^+(t) = \sum_{i \in J[k]^+} g_{ki}^+(t) \quad G_k^-(t) = \sum_{i \in J[k]^-} g_{ki}^-(t),$$

onde $J[k]^+ = \{i \mid \sigma_i = +1, \text{ para } i \in J[k]\}$ e $J[k]^- = \{i \mid \sigma_i = -1, \text{ para } i \in J[k]\}$ e os termos expressos por:

$$g_{ki}^+(t) = c_{ki}^+ \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}^+}, \quad i \in \begin{cases} J[0]^+, & \text{se } \sigma_{0i} = +1 \\ J[k]^+, & \text{se } \sigma_{ki} = +1 \end{cases}$$

$$g_{ki}^-(t) = c_{ki}^- \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}^-}, \quad i \in \begin{cases} J[0]^-, & \text{se } \sigma_{0i} = -1 \\ J[k]^-, & \text{se } \sigma_{ki} = -1 \end{cases}$$

Definindo $\widehat{G}_k(t) = 1 + G_k^-(t)$, $k = 1, \dots, p$ e $\widehat{G}_0(t) = 1 + \widetilde{G}_0^-(t)$, o problema equivalente ao problema (4.105) é definido por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad t_0 \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{\widetilde{G}_0^+(t)}{\widehat{G}_0(t)} \leq 1 \\ & \quad \frac{G_k^+(t)}{\widehat{G}_k(t)} \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ & \quad t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.98}$$

Observa-se que as funções posinomiais $\widehat{G}_k(t) = 1 + G_k^-(t)$, $k = 1, \dots, p$ e $\widehat{G}_0(t) = 1 + \widetilde{G}_0^-(t)$ aparecem no denominador das restrições do problema (4.98), o que impede que sejam realizadas simplificações na expressão resultante.

Uma maneira eficaz de evitar tratar de problemas com expressões dessa natureza é utilizar a desigualdade aritmética-geométrica que transforma uma função posinomial em um único termo posinomial.

A aplicação da desigualdade da aritmética-geométrica necessita da definição de um vetor $\omega = (\omega_0, \omega_i)$ para $i \in J[k]^-$ onde $\omega_0 + \sum_{i \in J[k]^-} \omega_i = 1$ associado à função posinomial $\widehat{G}_k(t)$ em um ponto viável $0 < \widetilde{t} \in \mathbb{R}^m$ do problema de PG signomial original. Considerando as k -ésimas restrições $\widehat{G}_k(\widetilde{t}) = 1 + G_k^-(\widetilde{t})$, $k = 1, \dots, p$, já que a definição dos pesos e a aplicação da desigualdade da média aritmética/geométrica em $\widehat{G}_0(t) = 1 + \widetilde{G}_0^-(t)$ resultante da restrição referente à antiga função objetivo é obtida de forma análoga. Assim, definindo os pesos da seguinte maneira:

$$\omega_0 = \frac{1}{1 + G_k^-(\widetilde{t})}, \quad \omega_i = \frac{\widehat{g}_{ki}(\widetilde{t})}{1 + G_k^-(\widetilde{t})}, \quad i \in J[k]^- \tag{4.99}$$

e aplicando a desigualdade aritmética-geométrica obtém-se:

$$\widehat{G}_k(t) = \omega_0 \cdot \frac{1}{\omega_0} + \sum_{i \in J[k]^-} \omega_i \left(\frac{\widehat{g}_{ki}(t)}{\omega_i} \right)$$

$$\widehat{G}_k(t) \geq (\omega_0)^{-\omega_0} \prod_{i \in J[k]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{ki}(t)}{\omega_i} \right)^{\omega_i}.$$

Denotando

$$\widehat{G}_k(t, \tilde{t}) = (\omega_0)^{-\omega_0} \prod_{i \in J[k]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{ki}(t)}{\omega_i} \right)^{\omega_i} \quad (4.100)$$

Por (4.97) e usando que $G_k^+(t) > 0$ obtemos que:

$$\frac{G_k^+(t)}{\widehat{G}_k(t)} \leq \frac{G_k^+(t)}{\widehat{G}_k(t, \tilde{t})} \quad (4.101)$$

onde $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ solução viável do PG signomial original é denominado como ponto de referência e $\widehat{G}_k(t, \tilde{t})$ definido em (4.100) é um único termo posinomial. Assim, garante-se que a restrição $G_k(t) \leq 1$, $k = 1, \dots, p$ dada na equação (4.96) é agora uma restrição posinomial.

Observe que a expressão $\widehat{G}_k(t, \tilde{t})$ pode ser definida em função da variável $0 < t \in \mathbb{R}^m$ como segue.

$$\begin{aligned} \widehat{G}_k(t, \tilde{t}) &= (\omega_0)^{-\omega_0} \prod_{i \in J[k]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{ki}(t)}{\omega_i} \right)^{\omega_i} \\ &= (\omega_0)^{-\omega_0} \prod_{i \in J[k]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{ki}(t) \cdot \widehat{G}_k(\tilde{t})}{\widehat{g}_{ki}(\tilde{t})} \right)^{\omega_i} \\ &= \widehat{G}_k(\tilde{t})^{\omega_0} \left(\prod_{i \in J[k]^-} \widehat{G}_k(\tilde{t})^{\omega_i} \right) \prod_{i \in J[k]^-} \left(\prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\tilde{t}_j} \right)^{a_{kij}^- \cdot \omega_i} \right) \\ &= \widehat{G}_k(\tilde{t})^{\omega_0} \widehat{G}_k(\tilde{t})^{\sum_{i \in J[k]^-} \omega_i} \prod_{j=0}^m \left(\prod_{i \in J[k]^-} \left(\frac{t_j}{\tilde{t}_j} \right)^{a_{kij}^- \cdot \omega_i} \right) \\ &= \widehat{G}_k(\tilde{t})^{\omega_0 + \sum_{i \in J[k]^-} \omega_i} \cdot \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\tilde{t}_j} \right)^{\sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \cdot \omega_i}. \end{aligned}$$

Como $\omega_0 + \sum_{i \in J[k]^-} \omega_i = 1$ obtém-se que:

$$\widehat{G}_k(t, \tilde{t}) = \widehat{G}_k(\tilde{t}) \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\tilde{t}_j} \right)^{\sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \omega_i} \quad (4.102)$$

Com a expressão do termo condensação obtido em (4.102), a k -ésima restrição do problema (4.101) é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \frac{G_k^+(t)}{\widehat{G}_k(t, \tilde{t})} &= \frac{\sum_{i \in J[k]^+} g_{ki}^+(t)}{\widehat{G}_k(\tilde{t}) \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\tilde{t}_j} \right)^{\sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \omega_i}} \\
 &= \frac{\sum_{i \in J[k]^+} c_{ki}^+ \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}^+}}{\widehat{G}_k(\tilde{t}) \prod_{j=0}^m t_j^{\sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \omega_i} \prod_{j=0}^m \tilde{t}_j^{-\sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \omega_i}} \\
 &= \sum_{i \in J[k]^+} \left(\frac{c_{ki}^+}{\widehat{G}_k(\tilde{t})} \prod_{j=0}^m \tilde{t}_j^{\sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \omega_i} \right) \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}^+ - \sum_{i \in J[k]^-} a_{kij}^- \omega_i}
 \end{aligned}$$

Considerando que $\widehat{G}_k(t, \tilde{t})$ representa o monômio obtido via condensação do termo $\widehat{G}_k(t)$ no ponto de referência $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$. De acordo com Beightler, Phillips (1976), o espaço solução do problema de PG signomial restrito está contido inteiramente dentro do espaço solução do problema condensado resultante (4.103) abaixo.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } t_0 \\
 &\text{sujeito à } \begin{aligned} &\frac{\tilde{G}_0^+(t)}{\widehat{G}_0(t, \tilde{t})} \leq 1 \\ &\frac{G_k^+(t)}{\widehat{G}_k(t, \tilde{t})} \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ &t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

- (ii) $G_0(\tilde{t}) < 0$. A função objetivo é substituída por uma nova variável $t_0 > 0$ e uma restrição adicionada da seguinte forma: $G_0(t) \leq -t_0$. O problema (4.92) pode ser reescrito com a seguinte formulação geral:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } t_0^{-1} \\
 &\text{sujeito à } \begin{aligned} &G_0(t) \leq -t_0 \\ &G_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ &t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

$$\text{onde } G_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_{ki} c_{ki} \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}}, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

A função objetivo signomial pode ser escrita como $G_0(t) = G_0^+(t) - G_0^-(t)$ e um problema equivalente ao (4.104) é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad t_0^{-1} \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{G_0^+(t) + t_0}{G_0^-(t)} \leq 1 \\ & \quad G_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ & \quad t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.105}$$

Além disso, as restrições que são da forma $G_k(t) = G_k^+(t) - G_k^-(t)$ para $k = 1, \dots, p$ e como $G_k(t) \leq 1$ tem-se que:

$$\frac{G_k^+(t)}{1 + G_k^-(t)} \leq 1, \quad k = 1, \dots, p.$$

Observa-se também que $\tilde{G}_0^+(t) = G_0^+(t) + t_0$ e $\hat{G}_0(t) = G_0^-(t)$. Já no caso da k -ésima restrição para $k = 1, \dots, p$ tem-se que $\hat{G}_k(t) = 1 + G_k^-(t)$. A definição dos pesos e da expressão do posinômio $\hat{G}_k(t, \tilde{t})$ resultam em (4.102). Mas no caso da restrição para $k = 0$, que refere-se a antiga função objetivo, a definição tanto dos pesos quanto do posinômio $\hat{G}_0(t, \tilde{t})$ tem formulações diferentes. Ou seja, Os pesos são iguais a:

$$\omega_{0i} = \frac{\hat{g}_{0i}(t)}{\hat{G}_0(t)}, \quad \hat{g}_{0i}(t) = c_{0i}^- \prod_{j=0}^m t_j^{a_{0ij}^-}, \quad i \in J[0]^+.$$

Como $\hat{G}_0(t) = \sum_{i \in J[0]^+} c_{0i}^- \prod_{j=0}^m t_j^{a_{0ij}^-}$ tem-se que $\sum_{i \in J[0]^+} \omega_{0i} = 1$.

Já o termo condensado é definido por:

$$\hat{G}_0(t, \tilde{t}) = \hat{G}_0(\tilde{t}) \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\tilde{t}_j} \right)^{\sum_{i \in J[0]^+} a_{0ij}^- \omega_{0i}}, \quad \text{onde} \quad \hat{G}_0(\tilde{t}) = G_0^-(\tilde{t}).$$

(2.) A função objetivo contém apenas termos posinomiais positivos. E neste caso a abordagem para aplicação da técnica da condensação é análoga ao caso **(i)** pois em qualquer ponto viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ para o problema (4.92), $G_0(\tilde{t}) > 0$.

Uma outra formulação utilizada independe do sinal da função objetivo G_0 em um ponto viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ para o problema signomial original (4.92), ou seja, esta formulação é utilizada tanto no caso em que $G_0(\tilde{t}) > 0$ ou $G_0(\tilde{t}) < 0$. Para ambos os casos, o problema equivalente ao

problema (4.92) é definido por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad t_0 \\
 & \text{sujeito à} \quad G_0(t) \leq \sqrt{t_0} - \frac{1}{\sqrt{t_0}} \\
 & \quad \quad \quad G_k(t) \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\
 & \quad \quad \quad t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

onde $G_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_{ki} c_{ki} \prod_{j=0}^m t_j^{a_{kij}}$, $k = 0, 1, \dots, p$.

Escrevendo $G_0(t) = G_0^+(t) - G_0^-(t)$ tem-se que:

$$\begin{aligned}
 G_0^+(t) - G_0^-(t) & \leq \sqrt{t_0} - \frac{1}{\sqrt{t_0}} \\
 \frac{G_0^+(t)}{\sqrt{t_0}} - \frac{G_0^-(t)}{\sqrt{t_0}} + \frac{1}{t_0} & \leq 1 \\
 \frac{t_0^{-1/2} G_0^+(t) + t_0^{-1}}{1 + t_0^{-1/2} G_0^-(t)} & \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Essa formulação foi utilizada pois a função $F(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ apresenta propriedades que fazem com que o problema original possa ser escrito na formulação (4.106) sem a necessidade de fazer uma verificação prévia do sinal do valor da função objetivo em uma solução viável do problema original, ou seja, não é necessário verificar previamente se $G_0(\tilde{t}) > 0$ ou $G_0(\tilde{t}) < 0$ para alguma solução viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ do problema original. Com a função F evita-se uma busca, que pode ser rápida ou não, por alguma solução viável que comprove o valor positivo ou negativo da função objetivo do problema original. Esta busca depende de cada problema de programação geométrica signomial em que a função objetivo apresente termos com sinais contrários em sua expressão.

As propriedades da função F estão detalhadas abaixo nos itens (1º) e (2º).

- (1º) Quando $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x} \rightarrow +\infty$ e $-\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$. Esse é o caso em que a função objetivo signomial $G_0(\tilde{t}) = G_0^+(\tilde{t}) - G_0^-(\tilde{t}) > 0$ em um ponto viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ do problema signomial original.
- (2º) Quando $x \rightarrow 0$, $\sqrt{x} \rightarrow 0$ e $-\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow -\infty$. Esse é o caso em que a função objetivo signomial $G_0(\tilde{t}) = G_0^+(\tilde{t}) - G_0^-(\tilde{t}) < 0$ em um ponto viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ do problema signomial original.

Além disso a função $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente, injetiva e sobrejetiva. Observe que

para $x_1 < x_2$ implica que $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ e além disso, $-\frac{1}{\sqrt{x_1}} < -\frac{1}{\sqrt{x_2}}$. Assim,

$$\sqrt{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} < \sqrt{x_2} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} \therefore F(x_1) < F(x_2)$$

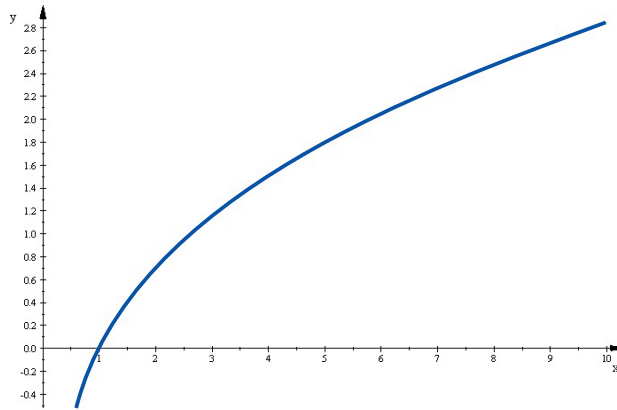


Figura 4.4: Gráfico da função F .

Escrevendo o termo do denominador na restrição do problema (4.106) referente a função objetivo do problema de PG signomial e o termo posinomial que está no numerador da mesma restrição e do mesmo problema, respectivamente, por $\widehat{G}_0(t) = 1 + t_0^{-1/2}G_0^-(t)$ e $\widehat{G}_0^+(t) = t_0^{-1/2}G_0^+(t) + t_0^{-1}$, onde $G_0^-(t) = \sum_{i \in J[0]^-} c_{0i}^- \prod_{j=0}^m t_j^{a_{0ij}^-}$. Os pesos $\omega_0, \omega_i, i \in J[0]^-$ tal que $\omega_0 + \sum_{i \in J[0]^-} \omega_i$ são definidos no ponto viável $0 < \tilde{t} \in \mathbb{R}^m$ do problema signomial original (4.106) com a seguinte formulação:

$$\omega_0 = \frac{1}{\widehat{G}_0(\tilde{t})}, \quad \omega_i = \frac{\widehat{g}_{0i}(\tilde{t})}{\widehat{G}_0(\tilde{t})}, \quad \text{onde} \quad \widehat{g}_{0i}(\tilde{t}) = c_{0i}^- \prod_{j=0}^m \tilde{t}_j^{a_{0ij}^-}.$$

Aplicando a desigualdade Aritmética-geométrica na função posinomial $\widehat{G}_0$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_0(t) &= \omega_0 \cdot \frac{1}{\omega_0} + \sum_{i \in J[0]^-} \omega_i \left(\frac{\widehat{g}_{0i}(t)}{\omega_i} \right) \\ &\geq (\omega_0)^{-\omega_0} \prod_{i \in J[0]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{0i}(t)}{\omega_i} \right)^{\omega_i}. \end{aligned}$$

Denotando $\widehat{G}_0(t, \tilde{t}) = (\omega_0)^{-\omega_0} \prod_{i \in J[0]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{0i}(t)}{\omega_i} \right)^{\omega_i}$, sua expressão pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_0(t, \widetilde{t}) &= \widehat{G}_k(\widetilde{t})^{\omega_0} \left(\prod_{i \in J[0]^-} \widehat{G}_0(\widetilde{t})^{\omega_i} \right) \prod_{i \in J[0]^-} \left(\frac{\widehat{g}_{0i}(t)}{\widehat{g}_{0i}(\widetilde{t})} \right)^{\omega_i} \\
&= \widehat{G}_0(\widetilde{t})^{\omega_0} \widehat{G}_0(\widetilde{t})^{\sum_{i \in J[0]^-} \omega_i} \prod_{i \in J[0]^-} \frac{c_{0i}^-}{c_{0i}^-} \left(\prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j^{a_{0ij}^-} t_0^{-1/2}}{\widetilde{t}_j^{a_{0ij}^-} \widetilde{t}_0^{-1/2}} \right) \right)^{\omega_i} \\
&= \widehat{G}_0(\widetilde{t})^{\omega_0} \widehat{G}_0(\widetilde{t})^{\sum_{i \in J[0]^-} \omega_i} \prod_{i \in J[0]^-} \left(\prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\widetilde{t}_j} \right)^{a_{0ij}^- \omega_i} \right) \\
&= \widehat{G}_0(\widetilde{t})^{\omega_0 + \sum_{i \in J[0]^-} \omega_i} \cdot \prod_{j=0}^m \left(\prod_{i \in J[0]^-} \left(\frac{t_j}{\widetilde{t}_j} \right)^{a_{0ij}^- \omega_i} \right) \\
&= \widehat{G}_0(\widetilde{t}) \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{\widetilde{t}_j} \right)^{\sum_{i \in J[0]^-} a_{0ij}^- \omega_i}.
\end{aligned}$$

Para as demais restrições, ou seja, $G_k(t) \leq 1$, $k = 1, \dots, p$ que forem signomiais é preciso utilizar a fórmula da condensação obtida em (4.102).

Considerando que $\widehat{G}_0(t, \widetilde{t})$ representa o monômio obtido via condensação do termo $\widehat{G}_0(t) = 1 + t_0^{-1/2} G_0^-(t)$ no ponto de referência $0 < \widetilde{t} \in \mathbb{R}^m$. De acordo com Beightler, Phillips (1976), o espaço solução do problema de PG signomial restrito (4.106) está contido inteiramente dentro do espaço solução do problema condensado resultante abaixo.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize } t_0 \\
&\text{sujeito à } \frac{\widehat{G}_0^+(t)}{\widehat{G}_0(t, \widetilde{t})} \leq 1 \\
&\quad \frac{G_k^+(t)}{\widehat{G}_k(t, \widetilde{t})} \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\
&\quad t_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{4.108}$$

A seguir é mostrado um exemplo citado em Oliveira (2005) de um problema de programação geométrica signomial.

Exemplo: Seja $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^4$ onde $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. O problema de PG signomial é definido por:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimize } G_0(t) = 2t_1 t_2^{1/2} + t_3^{-1} t_2 t_4^2 + t_1^{-2} t_2^{-1} t_3^2 \\
&\text{sujeito à } G_1(t) = t_1 t_2^{1/2} t_3 - t_2^{-1} t_4^2 \leq 1 \\
&\quad G_2(t) = t_1 t_2 t_3 \geq 5 \\
&\quad t_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Para resolver o problema (4.109) é preciso reescrevê-lo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } t_0 \\
 & \text{sujeito à } 2t_1t_2^{1/2}t_0^{-1} + t_3^{-1}t_2t_4^2t_0^{-1} + t_1^{-2}t_2^{-1}t_3^2t_0^{-1} \leq 1 \\
 & \quad t_1t_2^{1/2}t_3 - t_2^{-1}t_4^2 \leq 1 \\
 & \quad 5t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1} \leq 1 \\
 & \quad t_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Observa-se pelo problema acima que $G_1(t) = t_1t_2^{1/2}t_3 - t_2^{-1}t_4^2$ a única restrição signomial. Assim, a aplicação da técnica de condensação inicia-se com a identificação dos termos negativos e positivos, ou seja,

$$G_1^+(t) = t_1t_2^{1/2}t_3 \quad e \quad G_1^-(t) = t_2^{-1}t_4^2.$$

Como $G_1(t) \leq 1$ obtém-se $\frac{G_1^+(t)}{1 + G_1^-(t)} \leq 1$. Portanto, fazendo $\widehat{G}_1(t) = 1 + G_1^-(t)$, por (BEIGHTLER, PHILLIPS, 1976) considerando o ponto de referência viável para o problema de PG signomial (4.109) igual a $\bar{t} = (10, 0.10, 5.0, 2.0)$ tem-se que os pesos são definidos por:

$$\omega_1 = \frac{\widehat{g}_{11}(\bar{t})}{\widehat{G}_1(\bar{t})} \quad e \quad \omega_2 = \frac{\widehat{g}_{12}(\bar{t})}{\widehat{G}_1(\bar{t})}.$$

onde $\widehat{g}_{11}(t) = 1$ e $\widehat{g}_{12}(t) = t_2^{-1}t_4^2$. Observa-se que $\omega_1 + \omega_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\widehat{g}_{1i}(t)}{\widehat{G}_1(t)} = 1$.

Como $\widehat{G}_1(\bar{t}) = 41$. A fórmula da condensação obtida em (4.102) é igual a:

$$\widehat{G}_1(t, \bar{t}) = \widehat{G}_1(\bar{t}) \left(\frac{t_2}{\bar{t}_2} \right)^{\frac{-\bar{t}_2^{-1}\bar{t}_4^2}{1+\bar{t}_2^{-1}\bar{t}_4^2}} \cdot \left(\frac{t_4}{\bar{t}_4} \right)^{\frac{2\bar{t}_2^{-1}\bar{t}_4^2}{1+\bar{t}_2^{-1}\bar{t}_4^2}}.$$

Logo,

$$\widehat{G}_1(t, \bar{t}) = 41 (10t_2)^{-\frac{40}{41}} \cdot \left(\frac{t_4}{2} \right)^{\frac{80}{41}}.$$

Assim, a restrição posinomial resultante da restrição signomial $G_1(t) \leq 1$, isto é, $\frac{G_1^+(t)}{\widehat{G}_1(t, \bar{t})}$ tem a seguinte formulação:

$$(0.89166) \cdot t_1t_2^{1.4756}t_3t_4^{-1.9512} \leq 1$$

O problema de PG posinomial resultante de (4.110) tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } t_0 \\
& \text{sujeito à } 2t_1t_2^{1/2}t_0^{-1} + t_3^{-1}t_2t_4^2t_0^{-1} + t_1^{-2}t_2^{-1}t_3^2t_0^{-1} \leq 1 \\
& \quad 0.89166t_1t_2^{1.4756}t_3t_4^{-1.9512} \leq 1 \\
& \quad 5t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1} \leq 1 \\
& \quad t_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Como o problema (4.111) tem grau de dificuldade $DD = \mathbf{N^\circ \text{ de termos} - (N^\circ \text{ de variáveis} + 1)}$ é igual a zero, esse é um problema simples de resolver e a solução ótima global para o problema condensado posinomial (4.111) e local para o problema signomial original é $t^* = (3.0504, 0.59713, 2.745, 1.8074)$ e o valor da função objetivo é $G_0(t^*) = 6.7811$.

4.3.3 Algoritmo para Resolver Problemas de PG Signomial

O problema de otimização multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing, tema da pesquisa, que é um problema multiobjetivo de programação geométrica signomial, quando reduzido a um problema com uma única função objetivo por meio do método das Métricas Ponderadas, definido anteriormente, ainda continua sendo um problema de PG signomial.

A busca por soluções para um problema de PG signomial não é tão simples como para o caso dos problemas de PG posinomiais. Esse fato ocorre em virtude de o problema de PG signomial não satisfazer o teorema de dualidade para Programação Geométrica descrito na literatura. (DUFFIN; PETERSON; ZENER, 1967) e (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 1993)

Neste caso, a abordagem mais utilizada para resolver problemas de PG signomial é por meio da técnica de condensação, que introduzida inicialmente por (BEIGHTLER; PHILLIPS, 1976).

Em Yang e Bricker, (1997) foi proposto um algoritmo para resolução de problemas de PG signomiais utilizando o Método Path Following em aproximações convexas do problema de PG posinomial original após a aplicação da técnica de condensação.

Mas posteriormente Nascimento e Andrade (2003) propuseram um algoritmo para problemas signomiais usando condensação por meio do método dos pontos interiores para Programação Geométrica posinomial visto em (KORTANEK; XU; YE, 1996).

Nesta pesquisa foi utilizado um algoritmo implementado em Matlab R2011b para a técnica de condensação utilizando o algoritmo Gpposy pertencente a ferramenta GGPLAB, executado sobre uma plataforma computacional composta por um computador Intel Pentium

Duo Core, com um processador de 2.70 GHz, 3.0GB de memória RAM e placa de vídeo de 1GB DDR3. Todos os experimentos computacionais apresentados foram executados sobre esta mesma plataforma.

Algorithm 1 [Algoritmo da Condensação usando Gpposy]

Entrada: Um ponto inicial viável t^0 e $k = 0$.

Saída: A sequência t^k .

while $\|t^k - t^0\| > \varepsilon$ **do**

 Passo 1: **if** em t^0 a função objetivo $G_0(t^0)$ for positiva ou negativa **do**

$G_0(t^0) \leq \sqrt{\tilde{t}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{t}}}$, substitua $G_0(t)$ por $\tilde{t}$ e condense as restrições signomiais usando t^0 como ponto de referência transformando-as em razões de funções posinomiais por monômios da forma:

$$\frac{\hat{G}_0^+(t)}{\hat{G}_0(t, t^0)} \leq 1, \quad \text{onde} \quad \hat{G}_0(t, t^0) = \hat{G}_0(t^0) \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{t_j^0} \right)^{i \in J[0]^-} \sum a_{0ij}^- \omega_i,$$

$$\hat{G}_0^+(t) = \tilde{t}^{-1/2} G_0^+(t) + \tilde{t}^{-1} \quad e \quad \hat{G}_0(t^0) = 1 + \tilde{t}^{-1/2} G_0^-(t^0)$$

$$\frac{G_k^+(t)}{\hat{G}_k(t, t^0)} \leq 1, \quad \text{onde} \quad \hat{G}_k(t, t^0) \leq G_k^-(t) \quad e \quad \hat{G}_k(t, t^0) = \hat{G}_k(t^0) \prod_{j=0}^m \left(\frac{t_j}{t_j^0} \right)^{i \in J[k]^-} \sum a_{kij}^- \omega_i$$

 Passo 2: Use o Algoritmo *Gpposy* da ferramenta GGPLAB e resolva o problema de Programação Geométrica Posinomial encontrado no passo 1, sendo t^k sua solução.

 Passo 3: Faça $t_0 = t^k$
 $k = k + 1$

end while

O GGPLAB é um pacote desenvolvido em Matlab para resolver problemas de Programação Geométrica Posinomiais e consiste de dois outros programas: (1) o gpcvx, um programa que resolve os problemas de Programação Geométrica na forma convexa utilizando o método dos pontos interiores primal-dual; (2) o gpposy, que é um programa que serve para ler os Problemas de Programação Geométrica na forma posinomial. Além disso, o GGPLAB contém exemplos implementados e encontrados em (BOYD, et al, 2007), (BOYD; VANDENBERGHE, 2004) e uma biblioteca de objetos composta por monômios, posinômios e funções posinomiais de modo a atender as especificações dos problemas de Programação Geométrica.

O GGPLAB foi criado e implementado por Almir Mustapic, com Kwangmoo Koh e Seungjean Kim como desenvolvedores, com Lieven Vandenberghe, criador da versão original do programa para resolver os problemas de PG e Stephen Boyd, criador do problema geral. (MUTAPCIC; KOH; KIM; VANDENBERGHE; BOYD, 2006)

Usando o método de aproximação descrito na seção (4.3.2), o algoritmo da condensação usando *Gpposy* apresenta-se como um método de pontos interiores para resolver o problema de

Programação Geométrica signomial.

As soluções, o valor ótimo da função objetivo, o tempo de execução do algoritmo, o número total de iterações necessárias para obter a melhor solução e a viabilidade das restrições de alguns dos problemas clássicos da literatura (RIJCKAERT; MARTENS, 1978) e (BEIGHTLER; PHILLIPS, 1976) foram obtidas por meio do algoritmo da Condensação usando Ppposy e estão descritas abaixo, para cada problema, juntamente com informações complementares (número total de termos, número de variáveis, número de restrições e grau de dificuldade).

[Rijckaert-Martens 9]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } 3.7t_1^{0.85} + 1.985t_1 + 700.3t_2^{-0.75} \\ & \text{s.a. } 0.7673t_2^{0.05} - 0.05t_1 \leq 1 \\ & t_j > 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 2

Número de Restrições : 1

Número de Termos: 5

Grau de Dificuldade: 2

Resultados

Solução: $t_1 = 0.811287417810098$, $t_2 = 442.664876796565$.

Valor da função objetivo = 11.9643371340252

Tempo da CPU (seg) = 0.364430824302402

Número de Iterações = 54

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.99999999811017$.

[Rijckaert-Martens 10]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } 0.05t_1t_2^{-1} - t_1 - 5t_2^{-1} \\ & \text{s.a. } 0.01t_2t_3^{-1} + 0.01t_1 + 0.0005t_1t_3 \leq 1 \\ & 1 \leq t_1 \leq 100 \\ & 1 \leq t_2 \leq 100 \\ & 0 \leq t_3 \leq 100 \\ & t_j > 0, i = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 3

Número de Restrições : 1

Número de Termos: 6

Grau de Dificuldade: 2

Resultados

Solução: $t_1 = 88.3583204379111$, $t_2 = 7.66926653167151$, $t_3 = 1.31755330064497$.

Valor da função objetivo = -83.2497275813245

Tempo da CPU (seg) = 0.159094623293506

Número de Iterações = 7

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.99999999535925$.

[Rijckaert-Martens 11]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } t_1 + 0.4t_1^{0.67}t_3^{-0.67} \\
 & \text{s.a. } 0.05882t_3t_4 + 0.1t_1 \leq 1 \\
 & \quad 4t_2t_4^{-1} + 2t_2^{-0.71}t_4^{-1} + 0.05882t_2^{-1.3}t_3 \leq 1 \\
 & \quad t_j > 0, i = 1, \dots, 4
 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 4

Número de Restrições : 2

Número de Termos: 7

Grau de Dificuldade: 2

Resultados

Solução: $t_1 = 8.13007214841064$, $t_2 = 0.615366246668487$,

$t_3 = 0.564043762282374$, $t_4 = 5.63620821872235$.

Valor da função objetivo = -5.73982030066617

Tempo da CPU (seg) = 0.205419396810347

Número de Iterações = 9

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.99999999818103$, $g_2 = 0.999999999087921$.

[Rijckaert-Martens 12]

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad -t_1 - t_5 + 0.4t_1^{0.67}t_3^{-0.67} + 0.4t_5^{0.67}t_7^{-0.67} \\
& \text{s.a.} \quad 0.05882t_3x_4 + 0.1t_1 \leq 1 \\
& \quad 0.05882t_7t_8 + 0.1t_1 + 0.1t_5 \leq 1 \\
& \quad 4t_2t_4^{-1} + 2t_2^{-0.71}t_4^{-1} + 0.05882t_2^{-1.3}t_3 \leq 1 \\
& \quad 4t_6t_8^{-1} + 2t_6^{-0.71}t_8^{-1} + 0.05882t_6^{-1.3}t_7 \leq 1 \\
& \quad t_j > 0, i = 1, \dots, 8
\end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 8

Número de Restrições : 4

Número de Termos: 15

Grau de Dificuldade: 6

Resultados

Solução: $t_1 = 6.4647923667463$, $t_2 = 0.667406888430071$, $t_3 = 1.01306034300222$,
 $t_4 = 5.93273009412794$, $t_5 = 2.23278885402422$, $t_6 = 0.595765007876873$,
 $t_7 = 0.400602830279801$, $t_8 = 5.52728191119831$.

Valor da função objetivo = -6.04823293785595

Tempo da CPU (seg) = 6.57775936414344

Número de Iterações = 238

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999999691205$, $g_2 = 0.999999999882566$,
 $g_3 = 0.999999999214561$, $g_4 = 0.99999999914$.

[Rijckaert-Martens 13]

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad g_0(t) = t_1 + t_2 + t_3 \\
& \text{s.a.} \quad 833.332352t_1^{-1}t_4t_6^{-1} + 100t_6^{-1} \\
& \quad -83333.333t_1^{-1}t_6^{-1} \leq 1 \\
& \quad 1250t_2^{-1}t_5t_7^{-1} + t_4t_7^{-1} - 1250t_2^{-1}t_4t_7^{-1} \leq 1 \\
& \quad 1250000t_3^{-1}t_8^{-1} + t_5t_8^{-1} - 2500t_3^{-1}t_5t_8^{-1} \leq 1 \\
& \quad 0.0025t_4 + 0.0025t_6 \leq 1 \\
& \quad 0.0025t_5 + 0.0025t_7 - 0.0025t_4 \leq 1 \\
& \quad 0.01t_8 - 0.01t_5 \leq 1 \\
& \quad t_j > 0, i = 1, \dots, 8
\end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 8

Número de Restrições : 6

Número de Termos: 19

Grau de Dificuldade: 10

Resultados

Solução: $t_1 = 579.306669959281$, $t_2 = 1359.97054689831$, $t_3 = 5109.97055453623$,

$t_4 = 182.017719739897$, $t_5 = 295.601177952523$, $t_6 = 217.982279919042$,

$t_7 = 286.416541658818$, $t_8 = 395.601177919751$.

Valor da função objetivo = 7049.24777139382

Tempo da CPU (seg) = 0.556906077826966

Número de Iterações = 65

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999998435372$, $g_2 = 0.999999999551159$,

$g_3 = 0.99999999917159$, $g_4 = 0.999999999147346$, $g_5 = 0.999999999678612$,

$g_6 = 0.999999999672276$.

[Rijckaert-Martens 14]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad t_6 + 0.4t_4^{0.67} + 0.4t_9^{0.67} \\
 & \text{s.a.} \quad t_1^{-1}t_2^{-1.5}t_3t_4^{-1}t_5^{-1} + 5t_1^{-1}t_2^{-1}t_3t_5^{1.2} \leq 1 \\
 & \quad 0.05t_3 + 0.05t_2 \leq 1 \\
 & \quad 10t_3^{-1} - t_1t_3^{-1} \leq 1 \\
 & \quad t_6^{-1}t_7^{-1.5}t_8t_9^{-1}t_{10}^{-1} + 5t_6^{-1}t_7^{-1}t_8t_{10}^{1.2} \leq 1 \\
 & \quad t_2^{-1}t_7 + t_2^{-1}t_8 \leq 1 \\
 & \quad t_1t_8^{-1} - t_6t_8^{-1} \leq 1 \\
 & \quad 10t_{10} \leq 1 \\
 & \quad t_j > 0, i = 1, \dots, 10
 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 10

Número de Restrições : 6

Número de Termos: 16

Grau de Dificuldade: 5

Resultados

Solução: $t_1 = 2.09527114770986$, $t_2 = 12.095271141878$, $t_3 = 7.90472885464597$,

$t_4 = 0.459358001292145$, $t_5 = 0.35794267697477$, $t_6 = 0.454750706732019$,
 $t_7 = 10.4547506940866$, $t_8 = 1.64052044204104$, $t_9 = 1.19754363757266$,
 $t_{10} = 0.0999999998954522$.

Valor da função objetivo = 1.14362316168329

Tempo da CPU (seg) = 0.985005888169956

Número de Iterações = 18

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999999075204$, $g_2 = 0.999999999826199$,
 $g_3 = 0.999999999701972$, $g_4 = 0.999999999204903$, $g_5 = 0.999999999524578$,
 $g_6 = 0.999999999351912$, $g_7 = 0.999999998954522$.

[Rijckaert-Martens 15]

Minimize $0.05t_1 + 0.05t_2 + 0.05t_3 + t_9$

s.a. $0.5t_9t_{10}^{-1} + 0.25t_{10}^{-1} \leq 1$

$t_7^{-1}t_{10} - 0.5t_1t_4t_7^{-1} \leq 1$

$t_7t_8^{-1} - 0.5t_2t_5t_8^{-1} \leq 1$

$t_8t_9^{-1} - 0.5t_3t_6t_9^{-1} \leq 1$

$0.79981t_4t_7^{-1} \leq 1$

$0.79981t_5t_8^{-1} \leq 1$

$0.79981t_6t_9^{-1} \leq 1$

$t_j > 0, j = 1 \dots, 10$

Estatística

Número de Variáveis : 10

Número de Restrições : 7

Número de Termos: 15

Grau de Dificuldade: 4

Resultados

Solução: $t_1 = 0.724043154780029$, $t_2 = 0.724043154780142$, $t_3 = 0.724043154780283$,
 $t_4 = 0.257607296826794$, $t_5 = 0.177130201118207$, $t_6 = 0.121794330108863$,
 $t_7 = 0.205264070473727$, $t_8 = 0.14113911575183$, $t_9 = 0.0970469403107591$,
 $t_{10} = 0.29852347028676$.

Valor da função objetivo = 0.205653413527782

Tempo da CPU (seg) = 0.739481488820329

Número de Iterações = 17

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999999559899$, $g_2 = 0.999999999359944$,
 $g_3 = 0.999999999359944$, $g_4 = 0.999999999359945$, $g_5 = 0.999999998591237$,
 $g_6 = 0.999999998591237$, $g_7 = 0.999999998591237$.

[Rijckaert-Martens 16]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && 0.05t_1 + 0.05t_2 + 0.05t_3 + t_9 \\
 & \text{s.a.} && 0.5t_9t_{10}^{-1} + 0.25t_{10}^{-1} \leq 1 \\
 & && t_7^{-1}t_{10} - 0.5t_1t_4t_7^{-1} \leq 1 \\
 & && t_7t_8^{-1} - 0.5t_2t_5t_8^{-1} \leq 1 \\
 & && t_8t_9^{-1} - 0.5t_3t_6t_9^{-1} \leq 1 \\
 & && 0.700329t_4t_7^{-1} + 0.307795t_7 \leq 1 \\
 & && 0.700329t_5t_8^{-1} + 0.307795t_8 \leq 1 \\
 & && 0.700329t_6t_9^{-1} + 0.307795t_9 \leq 1 \\
 & && t_j > 0, j = 1, \dots, 10
 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 10

Número de Restrições : 7

Número de Termos: 18

Grau de Dificuldade: 7

Resultados

Solução: $t_1 = 0.729546319621758$, $t_2 = 0.713312251331569$, $t_3 = 0.703034803222313$,
 $t_4 = 0.265341976360415$, $t_5 = 0.182063724141027$, $t_6 = 0.124056163905963$,
 $t_7 = 0.197878695496606$, $t_8 = 0.132944553107788$, $t_9 = 0.0893366527774097$,
 $t_{10} = 0.294668326516382$.

Valor da função objetivo = 0.196631321486192

Tempo da CPU (seg) = 0.754319578591032

Número de Iterações = 30

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.99999999956671$, $g_2 = 0.999999999354773$,
 $g_3 = 0.999999999341041$, $g_4 = 0.999999999331818$, $g_5 = 0.999999998761226$,
 $g_6 = 0.999999998706069$, $g_7 = 0.99999999866878$.

[Rijckaert-Martens 17]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad t_3^{-1} \\
 & \text{s.a.} \quad 0.1t_{10} + t_7t_{10} \leq 1 \\
 & \quad 10t_1t_4 + 10t_1t_4t_7^2 \leq 1 \\
 & \quad t_4^{-1} - 100t_7t_{10} \leq 1 \\
 & \quad t_{10}t_{11}^{-1} - 10t_8 \leq 1 \\
 & \quad t_1^{-1}t_2t_5 + t_1^{-1}t_2t_5t_8^2 \leq 1 \\
 & \quad t_5^{-1} - 10t_1^{-1}t_8t_{11} \leq 1 \\
 & \quad 10t_{11} - 10t_9 \leq 1 \\
 & \quad t_2^{-1}t_3t_6 + t_2^{-1}t_3t_6t_9^2 \leq 1 \\
 & \quad t_6^{-1} - t_2^{-1}t_9 \leq 1 \\
 & \quad t_j > 0, j = 1, \dots, 11
 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 11

Número de Restrições : 9

Número de Termos: 19

Grau de Dificuldade: 7

Resultados

Solução: $t_1 = 7.00376589978447$, $t_2 = 7.64592827764225$, $t_3 = 7.11203693209051$,
 $t_4 = 0.012463616304009$, $t_5 = 0.81181938850279$, $t_6 = 0.955849256635176$,
 $t_7 = 0.381545617872479$, $t_8 = 0.358252970419696$, $t_9 = 0.353165958595796$,
 $t_{10} = 2.07664645373907$, $t_{11} = 0.453165958122396$.

Valor da função objetivo = 0.140606693911819

Tempo da CPU (seg) = 0.754147158322809

Número de Iterações = 16

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999999668474$, $g_2 = 0.999999999693141$,
 $g_3 = 0.9999999975379737$, $g_4 = 0.9999999977298198$; $g_5 = 0.999999999750887$,
 $g_6 = 0.999999999693142$, $g_7 = 0.999999995266001$, $g_8 = 0.999999999761885$,
 $g_9 = 0.999999999750886$.

[Rijckaert-Martens 18]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad t_9^{-1} \\
 & \text{s.a.} \quad t_1 + t_1 t_{10} + t_1 t_{10} t_{12} \leq 1 \\
 & \quad t_1^{-1} t_4 t_{10}^{-1} + 0.01 t_1^{-1} t_4 t_{12}^{-1} + 0.01 t_1^{-1} t_4 \leq 1 \\
 & \quad 100 t_4^{-1} t_7 t_{10}^{-1} \leq 1 \\
 & \quad t_1^{-1} t_2 + t_1^{-1} t_2 t_{11} + t_1^{-1} t_2 t_{11} t_{13} \leq 1 \\
 & \quad -t_2 t_4^{-1} t_{11} + t_4^{-1} t_5 + 0.01 t_4^{-1} t_5 t_{11} t_{13}^{-1} + 0.01 t_4^{-1} t_5 t_{11} \leq 1 \\
 & \quad -0.01 t_5 t_7 t_{11} + t_7^{-1} t_8 \leq 1 \\
 & \quad 12601 t_2^{-1} t_3 \leq 1 \\
 & \quad -2100 t_3 t_5^{-1} + 26.2 t_5^{-1} t_6 \leq 1 \\
 & \quad -21 t_6 t_8^{-1} + t_8^{-1} t_9 \leq 1 \\
 & \quad t_j > 0, j = 1, \dots, 13
 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 13

Número de Restrições : 9

Número de Termos: 22

Grau de Dificuldade: 8

Resultados

Solução: $t_1 = 0.36157336811622$, $t_2 = 0.112686317277884$,
 $t_3 = 8.94264870699777 \cdot 10^{-6}$, $t_4 = 0.497436705392638$; $t_5 = 0.641710737052312$,
 $t_6 = 0.0252095534039511$, $t_7 = 0.00776334898894042$, $t_8 = 0.00776399923799037$,
 $t_9 = 0.537164620597938$, $t_{10} = 1.56067074017333$, $t_{11} = 1.68160643531327$,
 $t_{12} = 0.131366388190515$, $t_{13} = 0.313429464094948$.

Valor da função objetivo = 1.86162669999908

Tempo da CPU (seg) = 0.537429275663984

Número de Iterações = 78

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999999770974$, $g_2 = 0.999999999676443$,
 $g_3 = 0.99999998415572$, $g_4 = 0.999999999216093$; $g_5 = 0.999999999669698$,
 $g_6 = 0.999999984153067$, $g_7 = 0.999999991826824$, $g_8 = 0.999999999760813$,
 $g_9 = 0.999999984154357$.

[Rijckaert-Martens 22]

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad 2.8485t_1 - 22.499t_1t_2 + 2.8952t_1t_3 + 0.3057t_1t_4 - 4.4318t_1t_5 + \\
& 0.14t_1t_5^2 + 3.5974t_1t_6 + 0.05t_1t_7 \\
& s.a. \quad 0.025616t_1^2t_7^{-1} + 0.293164t_1^2t_6t_7^{-1} + 0.83877t_1^2t_6^2t_7^{-1} \leq 1 \\
& 100t_3t_9^{-1} - 100t_3t_8^{0.01}t_9^{-1.01} + t_8t_9^{-1} \leq 1 \\
& 0.4744t_1^{-1}t_4t_8^{-1} + 0.87564t_1^{-1}t_4t_6t_8^{-1} \\
& + 0.012152t_1t_8^{-1} + 0.1391t_1t_6t_8^{-1} + 0.3979t_1t_6^2t_8^{-1} - 5.7222t_6 \leq 1 \\
& 10.4351t_1^{-1}t_4t_5^{-1}t_9^{-1} + 72.5476t_5^{-1} + 5.6303t_3t_5^{-1} + 0.1279t_4t_5^{-1} - 1.8459t_6 \\
& - 133.9131t_5^{-1}t_6 + 10.3930t_3t_5^{-1}t_6 + 0.2362t_4t_5^{-1}t_6 + 19.2611t_1^{-1}t_4t_5^{-1}t_6t_9^{-1} \leq 1 \\
& - 4.44t_5^{-1} + 41.04t_2t_5^{-1} + 5.63t_3t_5^{-1} + 0.1228t_4t_5^{-1} \leq 1 \\
& 3.309 \times 10^{-3}t_1 - 6.91 \times 10^{-3}t_1t_3 - 4.858 \times 10^{-4}t_1t_4 + 1.009 \times 10^{-2}t_1t_5 - \\
& 1.294 \times 10^{-6}t_1^3 - 1.49 \times 10^{-5}t_1^3t_6 - 4.237 \times 10^{-5}t_1^3t_6^2 - 2.5322 \times 10^{-4}t_1t_5^2 \leq 1 \\
& 0.4t_6^{-1} \leq 1 \\
& 21.3351t_4^{-1} - 1.8458t_6 \leq 1 \\
& 0.002017t_1 + 0.004878t_1t_2 + 0.005735t_1t_5 - 0.000744t_1t_3 - 0.000063t_1t_4 - \\
& 0.000019t_1t_7 \leq 1 \\
& 0.001817t_1 + 0.011287t_1t_2 + 0.010795t_1t_5 + 0.000013t_1t_7 - 0.003304t_1t_3 - \\
& 0.000471t_1t_4 - 0.000363t_1t_5^2 \leq 1 \\
& t_j > 0, j = 1, \dots, 9
\end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 9

Número de Restrições : 10

Número de Termos: 57

Grau de Dificuldade: 47

ResultadosSolução: $t_1 = 11.257990818432$, $t_2 = 0.430916413566576$, $t_3 = 4.04050152645674 \cdot 10^{-11}$, $t_4 = 11.0958751116316$, $t_5 = 14.6073830844893$, $t_6 = 0.499943448286274$, $t_7 = 48.393589479394$, $t_8 = 0.890103518336696$, $t_9 = 1.04099187489361$.

Valor da função objetivo = -383.907776771956

Tempo da CPU (seg) = 0.726583696916273

Número de Iterações = 24

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999998237042$, $g_2 = 0.855053281212194$,
 $g_3 = 0.440492773108828$, $g_4 = 0.947781787517058$, $g_5 = 0.999999999467315$,
 $g_6 = 0.999999999862848$, $g_7 = 0.800090492977027$, $g_8 = 0.999999997321088$,
 $g_9 = 0.971270030173276$, $g_{10} = 0.926702143687817$.

[Rijckaert-Martens 23]

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad 5.3578t_3^2 + 0.8357t_1t_5 + 37.2392t_1 \\
 & \text{s.a.} \quad 0.00002584t_3t_5 + 0.00006663t_2t_5 + 0.0000734t_1t_4 \leq 1 \\
 & \quad 0.000853007t_2t_5 + 0.00009395t_1t_4 - 0.00033085t_3t_5 \leq 1 \\
 & \quad 1330.3294t_2^{-1}t_5^{-1} - 0.42t_1t_5^{-1} - 0.30586t_2^{-1}t_3^2t_5^{-1} \leq 1 \\
 & \quad 0.00024186t_2t_5 + 0.00010159t_1t_2 + 0.00007379t_3^2 \leq 1 \\
 & \quad 2275.1327t_3^{-1}t_5^{-1} - 0.2668t_1t_5^{-1} - 0.40584t_4t_5^{-1} \leq 1 \\
 & \quad 0.00029955x_3t_5 + 0.00007992t_1t_3 + 0.00012157t_3t_4 \leq 1 \\
 & \quad 78 \leq t_1 \leq 102, \quad 33 \leq t_2 \leq 45, \quad 27 \leq t_3 \leq 45 \\
 & \quad 27 \leq t_4 \leq 45, \quad 27 \leq t_5 \leq 45
 \end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 5

Número de Restrições : 6

Número de Termos: 21

Grau de Dificuldade: 15

Resultados

Solução: $t_1 = 78.0000000490223$, $t_2 = 33.0000000284123$, $t_3 = 29.9957400620428$,
 $t_4 = 44.9999999100562$, $t_5 = 36.775327045047$.

Valor da função objetivo = 10122.4932501259

Tempo da CPU (seg) = 0.661982010170483

Número de Iterações = 6

Viabilidade de Restrição: $g_1 = -0.309991035654855$, $g_2 = 0.999999999108717$,
 $g_3 = -0.0213799721631398$, $g_4 = 0.621402661302756$, $g_5 = 0.999999999429389$,
 $g_6 = 0.681516988533226$.

[Beighter-Phillips 01]

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad 2t_1t_2^{1/2} + t_3^{-1}t_2t_4^2 + x_1^{-2}t_2^{-1}t_3^2 \\
& \text{s.a.} \quad t_1t_2^{1/2}t_3 - t_2^{-1}t_4^2 \leq 1 \\
& \quad \quad 5t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^3 \leq 1 \\
& \quad \quad t_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 4

Número de Restrições : 2

Número de Termos: 6

Grau de Dificuldade: 0

Resultados

Solução: $t_1 = 3.0503555685336$, $t_2 = 0.597131295187264$, $t_3 = 2.74504650057906$,
 $t_4 = 1.8073688818457$.

Valor da função objetivo = 6.7810765990252

Tempo da CPU (seg) = 0.886520910232336

Número de Iterações = 7

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999971020054$, $g_2 = 0.999999998675616$.**[Beighter-Phillips 02]**

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad t_1 \\
& \text{s.a.} \quad \frac{t_1^1}{4} + \frac{t_2}{2} - \frac{t_1^2}{16} - \frac{t_2^2}{16} \leq 1 \\
& \quad \quad \frac{t_1^2t_2^{-1}}{6} + \frac{t_2}{6} + \frac{7}{3}t_2^{-1} - t_1t_2^{-1} \leq 1 \\
& \quad \quad t_j > 0, \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

Estatística

Número de Variáveis : 2

Número de Restrições : 2

Número de Termos: 9

Grau de Dificuldade: 6

ResultadosSolução: $t_1 = 1.1771243467279$, $t_2 = 2.17712434145411$.

Valor da função objetivo = 1.1771243467279

Tempo da CPU (seg) = 0.419913030515154

Número de Iterações = 9

Viabilidade de Restrição: $g_1 = 0.999999999545806$, $g_2 = 0.999999999748867$.

Nesse capítulo foram descritas as teorias que alicerçam os problemas multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing para um único e multi-item. Com a teoria de Otimização Multiobjetivo foram estabelecidos a natureza de uma solução para esse tipo de problema bem como as formas de obtê-las por meio dos métodos de geração de solução, cuja classificação foi obtida em (MIETTINEN, 1999) e (COHON, 1978). Entre os métodos de geração de soluções eficientes preferenciais, destacaram-se, no presente trabalho, os métodos à posteriori, por não necessitarem de uma definição prévia de critérios preferenciais para as funções objetivo antes da execução do processo de obtenção de solução.

A escolha pelo método à posteriori das Métricas Ponderadas segue de Islam (2008), para que posteriormente, no capítulo 6, fosse possível com os mesmos exemplos numéricos para o caso de um único item estabelecer comparações entre as soluções obtidas em Islam (2008) e as soluções do presente trabalho, considerando três diferentes tipos de preferências pelas funções objetivo.

Como o problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing pertencia originalmente a classe de problemas de Programação Geométrica Signomial. Após a escalarização do problema com o método das Métricas Ponderadas, os problemas resultantes podem ser resolvidos por meio da Programação Geométrica com a aplicação da técnica da Condensação. Essa técnica foi aplicada nos problemas sob a forma de um algoritmo de modo a transformar os problemas de PG signomiais em problemas posinomiais e que, com esses últimos fosse possível gerar soluções ótimas viáveis para o problema signomial original. O Algoritmo desenvolvido para a técnica da Condensação incorpora um ferramenta chamada Gpposy, pertencente ao pacote GGPLAB, desenvolvida por (MUTAPCIC; KOH; KIM; VANDENBERGHE; BOYD, 2006) e se mostrou muito eficiente na obtenção de soluções pelos testes realizados em problemas da literatura (RIJCKAERT; MARTENS, 1978) e (BEIGHTLER; PHILLIPS, 1976). Com a eficiência comprovada do algoritmo da Condensação com Gpposy, os exemplos particulares descritos no capítulo 6, obtidos dos problemas gerais descritos no capítulo 5, são resolvidos e suas soluções comparadas com as soluções da literatura (ISLAM, 2008).

Capítulo 5

Estoque e Otimização Multiobjetivo via Programação Geométrica

5.1 Problema Multiobjetivo de Planejamento de Estoque e Marketing

De acordo com Miguel et al, (2010), a pesquisa realizada é classificada como axiomática quantitativa normativa prescritiva por não tratar-se de uma situação real observada diretamente, tendo origem em um modelo proposto por Islam (2008) e que teve por objetivo desenvolver através da modelagem e da simulação estratégias e ações a fim de melhorar os resultados já existentes.

O metodologia adotada neste trabalho é composta das seguintes etapas:

1. **Definição do problema:** é a fase na qual se define o escopo do problema sob investigação e onde identifica-se os três elementos principais de um problema de decisão: (i) a identificação da alternativas de solução; (ii) determinação do objetivo do estudo e (iii) as limitações sob as quais o sistema será modelado.

O problema abordado na presente pesquisa foi formulado para as situações onde são necessários os estoques de produtos. Ele considera que a demanda é determinística, a produção é instantânea, a demanda é uniforme, a taxa de demanda é diretamente relacionada ao custo de marketing, ou seja, $D = \alpha M^\beta$ onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e, por fim, o custo de produção unitário é inversamente relacionado à taxa de demanda, isto é, $c_0 = \frac{\gamma}{D^\delta}$, onde $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ é uma constante escalar e $\delta > 1$ é chamado de preço de elasticidade. Esse problema tem restrições tanto para a capacidade espacial de armazenamento de itens a

serem estocados quanto para o custo total por escassez permissível para a empresa.

2. **Construção do modelo:** implica em traduzir do mundo real para a linguagem matemática as definições feitas para o problema, de modo que o problema se enquadre em um dos métodos padrão da teoria de programação matemática (otimização). Nesta fase, a complexidade das relações matemáticas geradas a partir das características do problema impede a obtenção de soluções analíticas, exigindo mais simplificações no modelo e o uso de heurísticas combinadas com métodos exatos ou não.

Essa etapa, no presente trabalho, consistiu na construção de duas funções objetivo. Na primeira delas é minimizado o conjunto de custos de manutenção C_h juntamente com os custos de tempo de preparação c_3 e custos por escassez C_S . A segunda função é formulada a partir da minimização do conjunto de custos de produção $C_{Produção}$ juntamente com os custos de propaganda $C_{Propaganda}$. A última etapa refere-se a formulação matemática das restrições de capacidade espacial juntamente com os custos totais por escassez permitida bem como às variáveis para o problema, ou seja, a quantidade de pedido Q , a quantidade de escassez S e o custo de marketing M .

3. **Solução do modelo:** é a fase de desenvolvimento de um procedimento para obter soluções, dentre elas uma solução ótima ou aproximada, para o problema do modelo, baseada nas técnicas de Otimização e algoritmos computacionais criados para esta finalidade ou já existentes na literatura. Esta é a fase em que instrumentos de solução específicos são escolhidos dentre o conjunto de técnicas de obtenção de solução existentes dentro da Otimização.

Para esta pesquisa, o problema tem mais de uma função objetivo a ser minimizada e essa característica faz com que o problema pertença a classe de problemas de programação geométrica, cujos instrumentos de otimização multiobjetivo serão os responsáveis pela primeira etapa em busca de uma solução para o problema, ou seja,

- escalarização do problema de modo a transformá-lo em um problema de programação geométrica com única função objetivo por meio do método das métricas ponderadas (MIETTINEN, 1999), (CHANKONG, HAIMEs, 2008) e (COHON, 1978).

A segunda etapa baseia-se na literatura (KORTANECK; XU; YE, 1996), (NASCIMENTO; ANDRADE, 2001), (YANG; BRICKER, 1997) e consiste em utilizar o método da condensação, que é uma técnica de programação geométrica utilizada para transformar problemas signomiais em problemas de PG posinomiais. Essa técnica foi aplicada na forma

de um algoritmo implementado em Matlab, versão R2011b e posteriormente, foi utilizada a ferramenta Ggplab em Matlab para resolver o problema posinomial resultante, de modo a obter uma solução localmente eficiente ou Pareto-ótima para o problema inicialmente proposto.

4. **Validação do modelo:** verifica se o modelo proposto de fato prevê o comportamento do sistema em estudo. Podendo ocorrer de o modelo proposto não reproduzir situações anteriores por não haver dados históricos referente ao problema, pois esse problema pode ser fruto de estudos baseados na literatura que não disponha dessas informações. Sendo assim, é utilizado a simulação por meio de algoritmos computacionais para verificar os resultados do modelo matemático.

Como a presente pesquisa baseia-se no trabalho de Islam (2008), foi utilizado o seu exemplo numérico para verificar se o algoritmo proposto gera a mesma solução ou uma solução melhor.

5. **Implementação do modelo:** trata da implementação da solução obtida pelo modelo matemático na prática de uma empresa, onde os resultados obtidos pelo modelo são traduzidos em conclusões no processo de tomada de decisão. A realização dessa fase nem sempre é possível, uma vez que pode ser necessário um longo período de tempo para a sua realização e fatores não mensuráveis, que deixaram de ser considerado no modelo, podem distanciar a solução obtida pelo modelo da situação real de modo que a solução obtida complemente a tomada de decisão final.

Essa fase, no presente trabalho, não será executada uma vez que o problema proposto é oriundo da literatura (ISLAM, 2008), o qual também não apresenta uma situação real que possa ter originado o problema de otimização multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing.

O modelo de planejamento de estoques e marketing objeto de pesquisa no presente trabalho foi proposto inicialmente por Islam (2008) e é um problema que se caracteriza por considerar que existe uma relação de dependência entre o preço unitário e a demanda por um mesmo item (eles são inversamente relacionados). Essa afirmação baseia-se no argumento de que quanto maior for a demanda de um item, menor será a quantidade produzida desse item. E como os custos fixos por produção são distribuídos entre os itens produzidos, o custo unitário de cada item também diminui e conseqüentemente o preço unitário também irá diminuir.

A formulação do problema inclui ainda um novo tipo de custo, que não é comumente

adotado em problemas de estoques propostos na literatura: o custo de marketing formado pelos custos de propaganda e de promoção. Nesse cenário as empresas de manufatura aumentam os custos com propaganda e oferecem algumas vantagens (promoções e incentivos) de acordo com os desempenhos de seus representantes de vendas que são os responsáveis pelo aumento da demanda pelos itens produzidos pela empresa.

Considere a seguinte notação:

S - Quantidade de escassez (uma variável de decisão);

h - custo de manutenção unitário por unidade de tempo;

D - taxa de demanda unitária por unidade de tempo (uma variável de decisão);

Q - quantidade encomendada, isto é, o número de unidades encomendadas por pedido (uma variável de decisão);

M - custo de Marketing (uma variável de decisão);

R - quantidade de estoque no tempo $t = 0$;

c_0 - custo de produção unitário;

c_2 - custo de escassez unitário;

c_3 - custo de preparação por encomenda;

a - área de armazenamento por item unitário;

A - área total de armazenamento disponível;

$\hat{C}_2$ - custo de escassez total admissível.

As hipóteses associadas ao modelo de estoques considerado são as seguintes:

- A produção é instantânea;
- a demanda é uniforme;
- a taxa de demanda é logaritmicamente diretamente relacionado ao custo de marketing, isto é, $D = \alpha M^\beta$ onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

Observe que para $\beta = 2$ a demanda D e o custo de marketing M já não mais crescem na mesma proporção. Entretanto, aplicando-se o logaritmo neperiano, obtém-se:

$$\frac{1}{\beta} \ln \frac{D}{\alpha} = \ln M$$

- O custo de produção por item é logaritmicamente inversamente relacionado à taxa de demanda, isto é, $c_0 = \frac{\gamma}{D^\delta}$, onde $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ é uma constante escalar e $\delta > 1$ é chamada de preço de elasticidade. De forma análoga ao caso anterior, quando $\delta = 2$ tem-se que o

custo de produção unitário não aumenta na mesma proporção que a taxa de demanda. Mas aplicando-se o logaritmo neperiano:

$$-\frac{1}{\delta} \ln \frac{c_0}{\gamma} = \ln D$$

As empresas de manufatura produzem os itens e os estocam em armazéns, que são locais com uma área de tamanho fixo. O que representa para a empresa, portanto, uma limitação quanto ao espaço necessário para armazenagem dos itens produzidos. Ou seja,

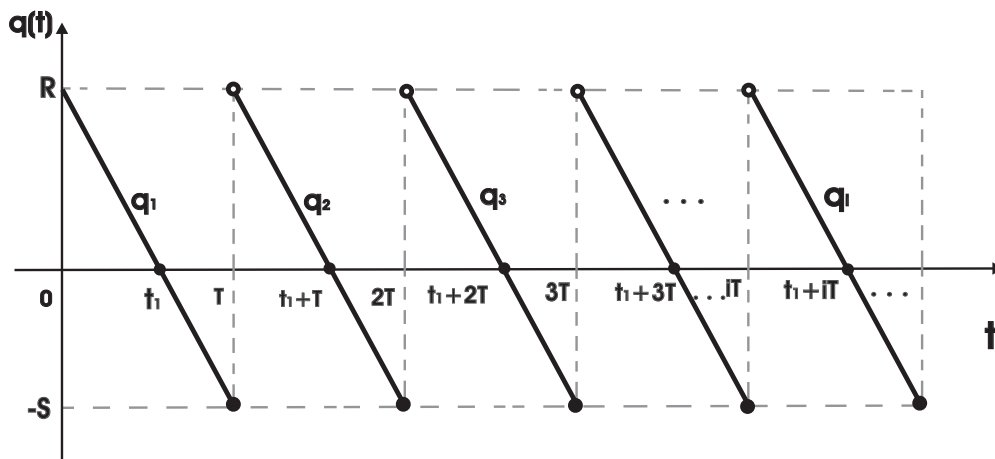
$$a \cdot R \leq A.$$

Além disso, as empresas utilizam a propaganda para divulgar os seus produtos de modo a aumentar a demanda pelos itens que produz. Uma outra limitação observada imposta para a situação em estudo refere-se ao custo de escassez total permitido, isto é,

$$\frac{C_S}{T} \leq \hat{C}_2.$$

Uma organização, de modo geral, busca minimizar os custos associados aos estoques, os quais são agrupados segundo a formulação descrita acima, que incluem os custos de tempo de preparação e os custos com escassez permitida, bem como os custos adicionais (marketing e produção) simultaneamente.

Considere a quantidade de estoque R quando $t = 0$. No intervalo $(0, T = t_1 + t_2)$, o nível de estoque diminui gradativamente de forma a atender a demanda. Seguindo neste processo, o nível de estoque atinge o nível zero quando $t = t_1$ e então, a escassez permitida ocorre no intervalo (t_1, T) , e o ciclo então se repete.



A equação diferencial com condições de contorno para o estoque instantâneo $q(t)$ no

instante t em $(0, T)$ é definida por:

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= -D \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \\ q(0) &= R, \quad q(T) = -S \quad \text{e} \quad q(t_1) = 0 \end{aligned}$$

A solução para a equação diferencial é dada por:

$$q(t) = \begin{cases} R - Dt, & \text{para } 0 \leq t \leq t_1 \\ D(t_1 - t), & \text{para } t_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

Usando as condições de contorno do problema obtém-se $Dt_1 = R$, $S = Dt_2$ e $Q = DT$.

Observa-se que no primeiro período, a função $q \equiv q_1$ e no i -ésimo período a função $q_i(t)$ satisfaz as condições de contorno:

$$\begin{aligned} q_i(it) &= R \\ q_i(t_1 + iT) &= 0 \\ q_i((i+1)T) &= -S \end{aligned}$$

E portanto,

$$q_i(t) = \begin{cases} -D(t - it) + R & ; \quad it \leq t \leq t_1 + iT \\ -D(t - (t_1 + iT)) & ; \quad t_1 + iT \leq t \leq (i+1)T \end{cases}$$

Os resultados subsequentes são obtidos pela definição da função custo restrita ao primeiro período.

O custo de estocagem ou custo de manutenção é definido por:

$$\begin{aligned} C_h &= hc_0 \int_0^{t_1} q(t) dt \\ &= hc_0 \int_0^{t_1} (R - Dt) dt \\ &= hc_0 \left[Rt_1 - D \frac{t_1^2}{2} \right] \end{aligned}$$

E usando que $R + S = Q$, $Dt_1 = R$, $DT = Q$, segue que:

$$\begin{aligned} C_h &= hc_0 \left[Rt_1 - \frac{Rt_1}{2} \right] \\ &= hc_0 \left[\frac{Rt_1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= hc_0 \left[\frac{(Q-S)R}{2D} \right] \\
&= hc_0 \left[\frac{(Q-S)R}{2\left(\frac{Q}{T}\right)} \right] \\
C_h &= \frac{hc_0(Q-S)^2}{2Q} T
\end{aligned}$$

Para cada período, uma quantidade fixa de escassez é permitida e há um custo de penalidade c_2 associado por item de demanda insatisfeita por unidade de tempo.

O custo por escassez é definido como:

$$\begin{aligned}
C_S &= c_2 \int_{t_1}^T (-q(t)) dt \\
&= c_2 \int_{t_1}^T -(Dt_1 - Dt) dt \\
&= c_2 \left[-Dt_1(T - t_1) + \frac{D}{2}(T^2 - t_1^2) \right]
\end{aligned}$$

Usando que $Dt_1 = R$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
C_S &= c_2 \left[(T - t_1) \left(\frac{D}{2}(T + t_1) - R \right) \right] \\
&= c_2 t_2 \left(\frac{DT}{2} + \frac{Dt_1}{2} - R \right)
\end{aligned}$$

Usando agora que $DT = Q$, $Dt_1 = R$ e $Dt_2 = S$ tem-se:

$$\begin{aligned}
C_S &= c_2 t_2 \left(\frac{Q - R}{2} \right) \\
&= c_2 \frac{S}{D} \left(\frac{Q - R}{2} \right) \\
&= c_2 \left(\frac{S}{Q/T} \right) \frac{S}{2} \\
&= \frac{c_2 S^2}{2Q} T
\end{aligned}$$

O custo por produção é definido por:

$$C_{Produção} = c_0 Q = \gamma D^{-\delta} Q = \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q$$

O custo por propaganda é definido por:

$$C_{Propaganda} = MQ$$

O custo total de estoque para um período de comprimento T é denotado por $TC(Q, S)$ e é definido pela soma dos custos de manutenção, preparação e escassez.

$$TC(Q, S) = hc_0 \frac{(Q - S)^2}{2Q} T + c_3 + c_2 \frac{S^2}{2Q} T \quad (5.1)$$

O custo médio de estoque total, denotado por $TC_1(M, Q, S)$, independe do período e para obtê-lo é necessário calcular TC por ciclo de tamanho T , ou seja,

$$\begin{aligned} TC_1(M, Q, S) &= \frac{1}{T}(TC(Q, S)) \\ &= hc_0 \frac{(Q - S)^2}{2Q} + \frac{c_3}{T} + c_2 \frac{S^2}{2Q} \\ &= hc_0 \frac{(Q - S)^2}{2Q} + c_3 \frac{D}{Q} + c_2 \frac{S^2}{2Q} \\ &= h \frac{(Q - S)^2}{2Q} \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} + c_3 \frac{\alpha M^\beta}{Q} + c_2 \frac{S^2}{2Q} \\ &= \frac{h\gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta}}{2Q} (Q^2 - 2QS + S^2) + c_3 \frac{\alpha M^\beta}{Q} + c_2 \frac{S^2}{2Q} \\ &= \frac{1}{2} h\gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q - h\gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} S + h\gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} \frac{S^2}{2Q} + c_3 \frac{\alpha M^\beta}{Q} + c_2 \frac{S^2}{2Q} \end{aligned}$$

O custo total adicional, TC_{ad} é definido pela soma dos custos de marketing e de produção, ou seja,

$$TC_{ad}(M, Q) = MQ + c_0 Q$$

E o custo médio adicional total é definido por:

$$TC_2(M) = \alpha M^{1+\beta} + \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)}$$

No caso em que faltas planejadas de produtos não são permitidas, isto é, quando $c_2 \rightarrow \infty$ então tem-se:

$$\begin{aligned} TC_1(M, Q) &= \frac{1}{2} h\gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q + c_3 \frac{\alpha M^\beta}{Q} \\ TC_2(M) &= \alpha M^{1+\beta} + \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} \end{aligned}$$

Portanto, deseja-se resolver o problema de minimizar os custo de estoque médio total e os custos adicionais médios totais sob as restrições de capacidade espacial e de custo por escassez total permitida como proposto por Islam (2008).

Dessa forma, o modelo proposto por Islam (2008) classifica-se como um modelo de otimização multiobjetivo não-linear e é definido por:

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \frac{1}{2}h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}Q - h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}S + h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}\frac{S^2}{2Q} + c_3\frac{\alpha M^\beta}{Q} + c_2\frac{S^2}{2Q} \\
\text{Minimize} \quad & \alpha M^{1+\beta} + \gamma\alpha^{1-\delta}M^{\beta(1-\delta)} \\
\text{Sujeito à} \quad & a(Q - S) \leq A \\
& c_2\frac{S^2}{2Q} \leq \widehat{C}_2 \\
& M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Reescrevendo o problema (5.2) como um problema de programação geométrica multiobjetivo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \frac{1}{2}h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}Q - h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}S + h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}\frac{S^2}{2Q} + c_3\frac{\alpha M^\beta}{Q} + c_2\frac{S^2}{2Q} \\
\text{Minimize} \quad & \alpha M^{1+\beta} + \gamma\alpha^{1-\delta}M^{\beta(1-\delta)} \\
\text{Sujeito à} \quad & \frac{a}{A}(Q - S) \leq 1 \\
& \frac{c_2}{\widehat{C}_2}\frac{S^2}{2Q} \leq 1 \\
& M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Note que o problema (5.3) é definido por meio de duas funções objetivo. Assim, essa formulação obtida para o problema de planejamento de estoques e marketing o classifica como um problema de otimização multiobjetivo, cuja teoria foi introduzida, bem como os métodos de escalarização eficazes para reduzir o problema de bi-objetivo para um problema mono-objetivo, na seção anterior. Dentre os métodos estudados, o método escolhido foi o método das métricas ponderadas.

Considere no presente problema os pesos $\omega_i \geq 0$, com $i = 1, 2$ normalizados, ou seja, $\omega_1 + \omega_2 = 1$, onde o peso ω_1 está associado à função objetivo $TC_1(M, Q, S)$ e ω_2 está associado à $TC_2(M)$. Para obter a função objetivo resultante do método da métricas ponderadas (4.17) é necessário calcular o vetor objetivo ideal para cada função componente separadamente, ou seja, os vetores objetivos ideais de cada função objetivo componente, $TC_1(M, Q, S)$ e $TC_2(M)$ são denotados, respectivamente por: $TC_1^* = TC_1^*(M^*, Q^*, S^*)$ e $TC_2^* = TC_2^*(M^*)$.

De acordo com Chankong, Haimes (2008) para determinar o vetor objetivo ideal é preciso resolver isoladamente cada problema de minimização associado a cada uma das funções objetivo componentes.

O problema seguinte de minimização associado a primeira função objetivo é um problema de PG signomial.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \frac{1}{2}h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}Q - h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}S + \frac{1}{2}h\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}S^2Q^{-1} + \\
& \quad c_3\alpha M^\beta Q^{-1} + \frac{c_2}{2}S^2Q^{-1} \\
& \text{sujeito à} \quad M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A solução do problema (5.4) é um mínimo local, obtido por meio do problema pseudo-dual, descrito em (YANG, BRICKER, 1997). Ou seja, o pseudo-dual do problema acima é definido por:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} \quad v(\eta) = \left(\frac{h\gamma\alpha^{-\delta}}{2\eta_1}\right)^{\eta_1} \left(\frac{h\gamma\alpha^{-\delta}}{\eta_2}\right)^{-\eta_2} \left(\frac{h\gamma\alpha^{-\delta}}{2\eta_3}\right)^{\eta_3} \left(\frac{c_3\alpha}{\eta_4}\right)^{\eta_4} \left(\frac{c_2}{2\eta_5}\right)^{\eta_5} \\
& \text{sujeito à} \quad \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 = 1 \\
& \quad -\beta\delta\eta_1 + \beta\delta\eta_2 - \beta\delta\eta_3 + \beta\delta\eta_4 = 0 \\
& \quad \eta_1 - \eta_3 - \eta_4 - \eta_5 = 0 \\
& \quad -\eta_2 + 2\eta_3 + 2\eta_5 = 0 \\
& \quad \eta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A solução do sistema de restrições do pseudo-dual (5.5) é igual à:

$$\eta_1 = \eta_3 + \frac{2\delta - 1}{2\delta}, \quad \eta_2 = 2\eta_3 + \frac{\delta - 1}{\delta}, \quad \eta_4 = \frac{1}{2}, \quad \eta_5 = \frac{\delta - 1}{2\delta}.$$

Note que pela hipótese apresentada no modelo de que $\delta > 1$ tem-se que $\delta - 1 > 0$ e $2\delta - 1 > 0$ e assim, as soluções acima obtidas, mesmo que dependentes de uma das variáveis pseudo-duais, permanecem positivas. Para determinar a variável η_3 é preciso derivar a função $V(\eta) = \ln(v(\eta))$ pois tem-se a garantia de que a função V é uma função côncava (DUFFIN, et al, 1967), enquanto que não se tem a certeza dessa propriedade para a função v . Portanto,

$$\begin{aligned}
V(\eta_3) &= \frac{1}{2\delta} \ln(h\gamma\alpha^{-\delta}) - \eta_3 \ln\left(2\eta_3 + \frac{2\delta - 1}{\delta}\right) - \left(\frac{2\delta - 1}{2\delta}\right) \ln\left(2\eta_3 + \frac{2\delta - 1}{\delta}\right) \\
&+ 2\eta_3 \ln\left(2\eta_3 + \frac{\delta - 1}{\delta}\right) + \left(\frac{\delta - 1}{\delta}\right) \ln\left(2\eta_3 + \frac{\delta - 1}{\delta}\right) \\
&- \eta_3 \ln(2\eta_3) + \frac{1}{2} \ln(2c_3\alpha) + \left(\frac{\delta - 1}{2\delta}\right) \ln\left(\frac{\delta c_2}{\delta - 1}\right).
\end{aligned}$$

E a derivada é tem a seguinte expressão:

$$\frac{d}{d\eta_3}(V(\eta_3)) = \ln \left[\frac{\left(2\eta_3 + \left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)\right)^2}{\left(2\eta_3 + \left(\frac{2\delta-1}{\delta}\right)\right)(2\eta_3)} \right].$$

Fazendo $\frac{d}{d\eta_3}(V(\eta_3)) = 0$ obtém-se que $\eta_3 = \frac{(\delta - 1)^2}{2\delta}.$

Portanto, substituindo o valor de η_3 na expressão que define η_1 e η_2 obtém-se a solução final do sistema (5.5) definida por:

$$\eta_1 = \frac{\delta}{2}, \quad \eta_2 = \delta - 1, \quad \eta_3 = \frac{(\delta - 1)^2}{2\delta}, \quad \eta_4 = \frac{1}{2}, \quad \eta_5 = \frac{\delta - 1}{2\delta}.$$

Substituindo os valores de η_i , $i = 1, \dots, 5$ na função dual obtém-se:

$$v(\eta^*) = \left(\frac{h\gamma\alpha^{-\delta}}{2\delta} \right)^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{h\gamma\alpha^{-\delta}}{\delta - 1} \right)^{-(\delta-1)} \left(\frac{h\gamma\alpha^{-\delta}\delta}{(\delta - 1)^2} \right)^{\frac{(\delta-1)^2}{2\delta}} (2c_3\alpha)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta c_2}{\delta - 1} \right)^{\frac{\delta-1}{\delta}}.$$

Por meio da relação entre variáveis primais e pseudo-duais $\eta_i = \left(c_{0_i} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \right) v(\eta^*)$ obtém-se que o vetor objetivo ideal ou utópico $TC1^* = TC1(M^*, Q^*, S^*)$ tem as seguintes coordenadas:

$$\begin{aligned} M^* &= \left(\frac{h\gamma c_3}{2\alpha^{(\delta-1)}\eta_1\eta_4 v(\eta^*)^2} \right)^{\frac{1}{\beta(\delta-1)}} \\ Q^* &= \left(\frac{c_3\alpha}{\eta_4 v(\eta^*)} \right) \left(\frac{h\gamma c_3}{2\alpha^{(\delta-1)}\eta_1\eta_4 v(\eta^*)^2} \right)^{\frac{1}{(\delta-1)}} \\ S^* &= \left(\frac{2\eta_5 c_3\alpha}{c_2\eta_4} \right) \left(\frac{h\gamma c_3}{2\alpha^{(\delta-1)}\eta_1\eta_4 v(\eta^*)^2} \right)^{\frac{1}{(\delta-1)}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Já a segunda função objetivo de custos totais adicionais, com restrição de positividade para a variável M é um problema de PG posinomial, cuja solução é obtida por meio do problema dual associado.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \alpha M^{1+\beta} + \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} \\ \text{sujeito à} \quad & M > 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

O problema dual é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & v(\eta) = \left(\frac{\alpha}{\eta_1} \right)^{\eta_1} \left(\frac{\gamma \alpha^{1-\delta}}{\eta_2} \right)^{\eta_2} \\ \text{sujeito à} \quad & \eta_1 + \eta_2 = 1 \\ & (1 + \beta)\eta_1 + \beta(1 - \delta)\eta_2 = 0 \\ & \eta_1, \eta_2 > 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

A solução do sistema (5.8) resulta em:

$$\eta_1 = \frac{\beta(\delta - 1)}{1 + \beta\delta}, \quad \eta_2 = \frac{1 + \beta}{1 + \beta\delta}. \tag{5.9}$$

Com os valores de η_1 e η_2 obtidos em (6.10), o valor da função dual é igual a

$$v(\eta^*) = \left(\frac{\alpha(1 + \beta\delta)}{\beta(\delta - 1)} \right)^{\frac{\beta(\delta-1)}{1+\beta\delta}} \left(\frac{\gamma\alpha^{1-\delta}(1 + \beta\delta)}{1 + \beta} \right)^{\frac{1+\beta}{1+\beta\delta}}. \quad (5.10)$$

Utilizando a relação entre variáveis primais e duais obtém-se que o custo de marketing ótimo M^* é o mínimo global pois o cologaritmo de $v(\eta)$, ou seja, $-\ln(v(\eta))$ é uma função convexa. O vetor utópico é definido como o valor da função objetivo na solução ótima, isto é, $TC2^* = TC2(M^*)$ quando

$$M^* = \left(\frac{((\delta - 1)\beta)^2 \gamma \alpha^{-\delta}}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{(1+\beta\delta)}}. \quad (5.11)$$

Aplicando a seguir a métrica L_p quando $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$ obtida no capítulo anterior (4.17) ao problema de planejamento de estoques e marketing bi-objetivo (5.3), a função escalarizante resultante e restrições de viabilidade são definidas por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } (w_1 |TC_1(M, Q, S) - TC_1^*|^p + w_2 |TC_2(M) - TC_2^*|^p)^{\frac{1}{p}} \\ & \text{sujeito à } \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S > 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

No problema acima é possível eliminar os módulos das diferenças para $p = 1$, em virtude da definição do vetor objetivo ideal, ou seja, $TC_1^* \leq TC_1(M, Q, S), \forall M, Q, S \in \mathbb{R}_+$ e $TC_2^* \leq TC_2(M), \forall M \in \mathbb{R}_+$, com $M, Q, S \neq 0$.

Assim, para $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ tem-se que $|TC_1(M, Q, S) - TC_1^*| = TC_1(M, Q, S) - TC_1^*$ e $|TC_2(M) - TC_2^*| = TC_2(M) - TC_2^*$.

Dessa forma, o problema das métricas ponderadas para $p = 1$ é definido por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } w_1 TC_1(M, Q, S) + w_2 TC_2(M) - (w_1 TC_1^* + w_2 TC_2^*) \\ & \text{sujeito à } \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S > 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Reescrevendo o problema (5.13) com as expressões que definem as funções TC_1 e TC_2 obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } \frac{w_1}{2} h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta \delta} Q - w_1 h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta \delta} S + \frac{w_1}{2} h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta \delta} S^2 Q^{-1} + w_1 c_3 \alpha M^{\beta} Q^{-1} + \\
& \quad \frac{w_1 c_2}{2} S^2 Q^{-1} + w_2 \alpha M^{1+\beta} + w_2 \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} - (w_1 T C_1^* + w_2 T C_2^*) \\
& \text{sujeito à } \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\
& \quad \frac{c_2}{2 \widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\
& \quad M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Agora, para $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ observa-se que sempre ocorre que $|TC_1(M, Q, S) - TC_1^*|^2 = (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*)^2$ e $|TC_2(M) - TC_2^*|^2 = (TC_2(M) - TC_2^*)^2$.

Assim, o problema chamado de mínimos quadrados resulta em:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } (w_1 |TC_1(M, Q, S) - TC_1^*|^2 + w_2 |TC_2(M) - TC_2^*|^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \text{sujeito à } \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\
& \quad \frac{c_2}{2 \widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\
& \quad M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Uma forma de obter a expressão geral para o problema (5.15) é desenvolver os quadrados das diferenças na função objetivo. Mas o desenvolvimento desses quadrados das diferenças resulta em uma função objetivo contendo 26 termos, onde todos estão elevados à potência $\frac{1}{2}$.

A função objetivo, após o cálculo dos quadrados das diferenças resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
U_2(M, Q, S) = & \frac{w_1}{4} T C_1^* h^2 \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q^2 - w_1 T C_1^* h^2 \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q S \\
& + \frac{3}{2} w_1 T C_1^* h^2 \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} S^2 + w_1 T C_1^* c_3 h \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} \\
& + \frac{w_1}{2} T C_1^* c_2 h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} S^2 - w_1 T C_1^* h^2 \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q^{-1} S^3 \\
& - 2w_1 T C_1^* c_3 h \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} Q^{-1} S - w_1 T C_1^* c_2 h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q^{-1} S^3 \\
& + \frac{w_1}{4} T C_1^* h^2 \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q^{-2} S^4 + w_1 T C_1^* c_3 h \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} Q^{-2} S^2 \\
& + w_1 T C_1^* c_3^2 \alpha^2 M^{2\beta} Q^{-2} + \frac{w_1}{2} T C_1^* c_2 h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q^{-2} S^4 + w_1 T C_1^* c_2 c_3 \alpha M^{\beta} Q^{-2} S^2 \\
& + \frac{w_1}{4} T C_1^* c_2^2 Q^{-2} S^4 - w_1 T C_1^* h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q + 2w_1 T C_1^* h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} S \\
& - w_1 T C_1^* h \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q^{-1} S^2 - 2w_1 T C_1^* c_3 \alpha M^{\beta} Q^{-1} - w_1 T C_1^* c_2 Q^{-1} S^2 + w_1 (T C_1^*)^2 \\
& + w_2 T C_2^* \alpha^2 M^{2(1+\beta)} + 2w_2 T C_2^* \gamma \alpha^{2-\delta} M^{1+2(1-\delta)\beta} + w_2 T C_2^* \gamma^2 \alpha^{2(1-\delta)} M^{2\beta(1-\delta)} \\
& - 2w_2 T C_2^* \alpha M^{1+\beta} - 2w_2 T C_2^* \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} + w_2 (T C_2^*)^2.
\end{aligned}$$

Por fim, é preciso ainda calcular $\sqrt{U_2(M^*, Q^*, S^*)}$. Uma alternativa para não tratar com uma função tão extensa é introduzir duas novas variáveis y_1 e y_2 ao problema (5.15)

como limites superiores das seguintes expressões: $(TC_1(M, Q, S) - TC_1^*)$ e $(TC_2(M) - TC_2^*)$, respectivamente.

Observe ainda que se $TC_1(M, Q, S) - TC_1^* \leq y_1$ então, para $w_i \geq 0$, $i = 1, 2$ tem-se que $w_1 (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*)^2 \leq w_1 y_1^2$ e do mesmo modo, tem-se que $w_2 (TC_2(M) - TC_2^*)^2 \leq w_2 y_2^2$. A raiz quadrada da soma dessas duas desigualdades resulta em:

$$\left[w_1 (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*)^2 + w_2 (TC_2(M) - TC_2^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, faz sentido definir o novo problema para $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{1}{TC_1^*} TC_1(M, Q, S) - \frac{y_1}{TC_1^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{1}{TC_2^*} TC_2(M) - \frac{y_2}{TC_2^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S, y_1, y_2 > 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

E substituindo as expressões que definem as funções objetivos TC_1 e TC_2 no problema acima (5.16) a formulação final para problema dos mínimos quadrados é apresentada a seguir.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{1}{2TC_1^*} h\gamma\alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q - \frac{1}{TC_1^*} h\gamma\alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} S + \frac{1}{2TC_1^*} h\gamma\alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q^{-1} S^2 + \\ & \quad \frac{c_3}{TC_1^*} \alpha M^\beta Q^{-1} + \frac{c_2}{2TC_1^*} S^2 Q^{-1} - \frac{y_1}{TC_1^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{\alpha}{TC_2^*} M^{1+\beta} + \frac{\gamma\alpha^{1-\delta}}{TC_2^*} M^{\beta(1-\delta)} - \frac{y_2}{TC_2^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S, y_1, y_2 > 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

O último caso abordado é quando $p \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad (\max \{w_1 |TC_1(M, Q, S) - TC_1^*|, w_2 |TC_2(M) - TC_2^*|\}) \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1$$

$$M, Q, S > 0.$$

Mas esse problema (5.18) não pode ser utilizado por não ser diferenciável, como explicado no capítulo 4. Isso sugere o uso da métrica de Tchebycheff na sua forma diferenciável formulada em (4.19). E por meio da introdução de uma nova variável, $0 < \varphi \in \mathbb{R}$, e, além disso, desconsiderando o valor absoluto em virtude da definição de vetor ideal, obtém-se que

$$\max \{w_1 (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*), w_2 (TC_2(M) - TC_2^*)\} = \varphi.$$

E por definição do máximo entre dois números reais, tem-se que

$$w_1 (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*) \leq \varphi \quad e \quad w_2 (TC_2(M) - TC_2^*) \leq \varphi.$$

Portanto, o problema para $p \rightarrow \infty$ tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \varphi \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{TC_1(M, Q, S)}{TC_1^*} - \frac{\varphi}{w_1 TC_1^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{TC_2(M)}{TC_2^*} - \frac{\varphi}{w_2 TC_2^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S, \varphi > 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

E substituindo as respectivas expressões de TC_1 e TC_2 no problema acima (5.19) obtém-se que

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \varphi \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{1}{2TC_1^*} h\gamma\alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q - \frac{1}{TC_1^*} h\gamma\alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} S + \frac{1}{2TC_1^*} h\gamma\alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta} Q^{-1} S^2 + \\ & \quad \frac{c_3}{TC_1^*} \alpha M^\beta Q^{-1} + \frac{c_2}{2TC_1^*} S^2 Q^{-1} - \frac{\varphi}{w_1 TC_1^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{\alpha}{TC_2^*} M^{1+\beta} + \frac{\gamma\alpha^{1-\delta}}{TC_2^*} M^{\beta(1-\delta)} - \frac{\varphi}{w_2 TC_2^*} \leq 1 \\ & \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\widehat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S, \varphi > 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Os problemas acima são problemas de programação geométrica signomial e para resolvê-los foi utilizado um algoritmo que utiliza a técnica da condensação para inicialmente transformar o problema original de programação geométrica signomial em um problema de programação geométrica posinomial que pode ser então resolvido usando a ferramenta *Ggplab* encontrada em (MUTAPCIC; KOH; KIM; VANDENBERGHE; BOYD, 2006), desenvolvida para resolver problemas de programação geométrica posinomial em Matlab.

5.2 Problema Multiobjetivo e Multi-item de Planejamento de Estoques e Marketing

O problema desenvolvido a seguir para n itens ou produtos é uma generalização do problema (5.3) de planejamento de estoques e marketing para um único item.

Considere para o i -ésimo item, com $i = 1, \dots, n$ o modelo de planejamento de estoques e marketing com a seguinte notação e hipóteses.

Considere a seguinte notação:

S_i - Quantidade de escassez para o i -ésimo (uma variável de decisão);

h_i - custo de manutenção unitário por unidade de tempo para o i -ésimo;

D_i - taxa de demanda unitária por unidade de tempo para o i -ésimo (uma variável de decisão);

Q_i - quantidade encomendada, isto é, o número de unidades encomendadas por pedido para o i -ésimo (uma variável de decisão);

M_i - custo de Marketing para o i -ésimo (uma variável de decisão);

R_i - quantidade de estoque no tempo $t = 0$ para o i -ésimo;

c_{0_i} - custo de produção unitário para o i -ésimo;

c_{2_i} - custo de escassez unitário para o i -ésimo;

c_{3_i} - custo de preparação por encomenda para o i -ésimo;

a_i - área de armazenamento unitário para o i -ésimo;

A - área total de armazenamento disponível para todos os n itens;

$\hat{C}_2$ - custo de escassez total admissível para todos os n itens.

As hipóteses associadas ao modelo de estoques considerado são as seguintes:

- A produção é instantânea;
- a demanda é uniforme;
- a taxa de demanda é diretamente relacionado ao custo de marketing para o i -ésimo item,

isto é,

$$D_i = \alpha_i M_i^{\beta_i},$$

onde $\alpha_i > 0$ e $\beta_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$.

- O custo de produção unitário inversamente relacionado à taxa de demanda para o i -ésimo item, isto é,

$$c_{0i} = \gamma_i D_i^{-\delta_i},$$

onde $0 < \gamma_i \in \mathbb{R}$ é uma constante escalar e $\delta_i > 1$ é chamada de preço de elasticidade, com $i = 1, \dots, n$.

- O espaço necessário para armazenar todos os n itens não excede uma área máxima de $A \text{ m}^2$. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot R_i \leq A.$$

- O custo de escassez anual para todos os n itens é limitada pelo custo de escassez total máximo permitido, isto é,

$$\sum_{i=1}^n \frac{C_{S_i}}{T_i} \leq \hat{C}_2.$$

- Para o i -ésimo item a quantidade de estoque inicial ocorre quando $t = 0$ e é igual a R_i . O intervalo considerado para descrever o comportamento do nível de estoque é igual a $(0, T_i = t_{1_i} + t_{2_i})$. Neste intervalo o nível de estoque decresce até atingir o nível zero em $t = t_{1_i}$ ocorrendo a escassez permitida para $t \in (t_{1_i}, T_i)$. O ciclo então se repete.

Neste modelo multi-item foi considerado inicialmente o caso do modelo de estoques para o i -ésimo item, tratado como um único item de modo a obter analogamente ao modelo de planejamento de estoques e marketing bi-objetivo anterior, o custo de manutenção, o custo de preparação por operação, e o custo de escassez permitida. As funções de custos totais anuais de estoques e de custos totais anuais adicionais serão obtidas considerando os custos obtidos para todos os n itens.

O estoque instantâneo $q_i(t)$ para o i -ésimo item é definido por meio da equação diferencial com condições de contorno no intervalo $(0, T_i)$ é definida por:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i(t)}{dt} &= -D_i \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_i \\ q_i(0) &= R_i, \quad q_i(T_i) = -S_i \quad \text{e} \quad q_i(t_{1_i}) = 0 \end{aligned}$$

A solução para a equação diferencial é dada por:

$$q_i(t) = \begin{cases} R_i - D_i t, & \text{para } 0 \leq t \leq t_{1_i} \\ D_i(t_{1_i} - t), & \text{para } t_{1_i} \leq t \leq T_i \end{cases}$$

Usando as condições de contorno do problema obtém-se $D_i t_{1_i} = R_i$, $S_i = D_i t_{2_i}$ e $Q_i = D_i T_i$.

O custo de manutenção é definido para o i -ésimo item por:

$$\begin{aligned} C_{h_i} &= h_i c_{0_i} \int_0^{t_{1_i}} q_i(t) dt \\ &= h_i c_{0_i} \left[R_i t_{1_i} - D_i \frac{t_{1_i}^2}{2} \right] \end{aligned}$$

E usando que $R_i + S_i = Q_i$, $D_i t_{1_i} = R_i$, $D_i T_i = Q_i$, obtém-se que o custo de manutenção por período para o i -ésimo item, ou seja,

$$C_{h_i} = \frac{h_i c_{0_i} (Q_i - S_i)^2}{2 Q_i} T_i.$$

O custo de manutenção anual é igual à para o i -ésimo item é igual à:

$$\bar{C}_{h_i} = \frac{C_{h_i}}{T_i} = \frac{h_i c_{0_i}}{2} Q_i - h_i c_{0_i} S_i^2 + \frac{h_i c_{0_i}}{2 Q_i} S_i^2.$$

E utilizando a hipótese de que $c_{0_i} = \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i}$, onde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$ e que $\delta_i > 1$, $\forall i = 1, \dots, n$, a expressão que define $\bar{C}_{h_i}$ é definida por:

$$\bar{C}_{h_i}(M_i, Q_i, S_i) = \frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2.$$

O custo de escassez permitida para um período de comprimento T_i quando há um custo de penalidade c_2 associado ao i -ésimo item para a demanda insatisfeita é definido como:

$$C_{S_i} = c_{2_i} \int_{t_{1_i}}^{T_i} (-q_i(t)) dt = c_{2_i} \left[-D_i t_{1_i} (T_i - t_{1_i}) + \frac{D_i}{2} (T_i^2 - t_{1_i}^2) \right].$$

Usando que $D_i T_i = Q_i$, $D_i t_{1_i} = R_i$ e $D_i t_{2_i} = S_i$ obtém-se:

$$C_{S_i} = c_{2_i} \left[(T_i - t_{1_i}) \left(\frac{D_i}{2} (T_i + t_{1_i}) - R_i \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= c_{2_i} t_{2_i} \left(\frac{D_i T_i}{2} + \frac{D_i t_{1_i}}{2} - R_i \right) \\
C_{S_i} &= \frac{c_{2_i} S_i^2}{2Q_i} T_i.
\end{aligned}$$

O custo de escassez permitida anual definido como:

$$\overline{C}_{S_i}(Q_i, S_i) = \frac{C_{S_i}}{T_i} = \frac{c_{2_i} S_i^2}{2Q_i}.$$

Usando a hipótese de que $D_i = \alpha_i M_i^{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ e que $D_i T_i = Q_i$. O custo de preparação anual é definido da seguinte forma:

$$\overline{C}_{set-up}(M_i, Q_i) = \frac{1}{T_i} (c_{3_i}) = c_{3_i} \alpha_i M_i^{\beta_i} Q_i^{-1}$$

Os custos de produção e propaganda para o i -ésimo item por período são definidos, respectivamente por C_{PROD_i} e C_{PROG_i} e expressos como:

$$\begin{aligned}
C_{PROD_i} &= c_{0_i} Q_i \\
&= \gamma_i D_i^{-\delta_i} Q_i \\
&= \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i \\
C_{PROG_i} &= M_i Q_i.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de que $D_i = \alpha_i M_i^{\beta_i}$ com $\alpha_i, \beta_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$ os custos de produção e propaganda anuais são definidos como:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{PROD_i}(M_i) &= \frac{1}{T_i} (C_{PROD_i}) = \gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} \\
\overline{C}_{PROG_i}(M_i) &= \frac{1}{T_i} (C_{PROG_i}) = \alpha_i M_i^{1+\beta_i}
\end{aligned}$$

O custo total de estoque anual que é a soma do custo de manutenção anual ($\overline{C}_h$), custo de escassez permitida ($\overline{C}_S$) e do custo de preparação ($\overline{C}_{set-up}$) para todos os n itens é definido por $TC_1(Q, M, S)$ e tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
TC_1(M, Q, S) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2 \right. \\
&\quad \left. + c_{3_i} \alpha_i M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} + \frac{c_{2_i} S_i^2}{2Q_i} \right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

O custo adicional total, TC_2 é definido pela soma dos custos de produção ($\overline{C}_{PROD}$) com os custos de marketing ($\overline{C}_{PROG}$) para todos os n itens pela seguinte expressão:

$$TC_2(M) = \sum_{i=1}^n \left(\gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} + \alpha_i M_i^{1+\beta_i} \right)$$

O caso em que faltas planejadas para os n itens não são permitidas, ocorre quando $c_{2_i} \rightarrow \infty$ e $S_i \rightarrow 0$, $\forall i = 1, \dots, \infty$ e a expressão (5.21) se reduz a:

$$TC_1(M, Q) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i + c_{3_i} \alpha_i M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} \right)$$

Portanto, o problema resolvido trata da minimização dos custos de estoque médio total e dos custos adicionais médios totais sob as restrições de capacidade espacial e de custo de escassez total permitida para todos os n itens. Dessa forma, o modelo proposto classifica-se como um modelo de otimização multiobjetivo, multi-item, não-linear e é definido por:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2 + \right. \\ & \left. c_{3_i} \alpha_i M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} + \frac{c_{2_i} S_i^2}{2 Q_i} \right) \\ \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \left(\gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} + \alpha_i M_i^{1+\beta_i} \right) \\ \text{Sujeito} \quad & \text{à} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\ & \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{2_i}}{2 \widehat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\ & M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5.22}$$

A generalização do problema escalarizado de planejamento de estoques e marketing com um único item resultante da aplicação do método das métricas ponderadas L_p quando $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$ obtida no capítulo anterior (4.17) para o modelo bi-objetivo multi-item (5.22) é definida como segue.

Em todos os casos considere os pesos $\omega_i \geq 0$, com $i = 1, 2$ são tais que $\omega_1 + \omega_2 = 1$, onde os pesos ω_1 e ω_2 estão associados, respectivamente, as funções objetivo $TC_1(M, Q, S)$ e $TC_2(M)$. Como o método das métricas trata das distâncias das funções objetivo componentes aos seus respectivos vetores objetivos ideais ou utópicos, faz-se necessário primeiramente calculá-los. O vetor objetivo ideal para a função TC_1 será denotado por $TC_1^* = TC_1(M^*, Q^*, S^*)$ e para a função TC_2 é denotado por $TC_2^* = TC_2^*(M^*)$. Esses dois vetores ideais são as soluções dos

respectivos problemas de minimização de custos de estoques totais anuais multi-item (5.23) com as restrições do problema multiobjetivo e multi-item de planejamento de estoque e marketing original e de custos totais adicionais anuais de produção e marketing (5.24).

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \frac{1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2 \right. \\
 & \left. + c_{3_i} \alpha_i M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} + \frac{c_{2_i} S_i^2}{2 Q_i} \right) \\
 \text{Sujeito} \quad & \text{à} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\
 & \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{2_i}}{2 \widehat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\
 & M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \left(\gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} + \alpha_i M_i^{1+\beta_i} \right) \\
 \text{Sujeito} \quad & \text{à} \quad M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

1º caso: $p = 1$ Pela definição de vetor objetivo ideal tem-se que $TC_1(M, Q, S) \geq TC_1^*, \forall M_i, Q_i, S_i$ e $TC_2(M) \geq TC_2^*, \forall M_i$ com $i = 1, \dots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - w_1 h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \right. \\
 & \left. \frac{w_1}{2} h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2 + w_1 c_{3_i} \alpha_i M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} + \frac{w_1 c_{2_i} S_i^2}{2 Q_i} + w_2 \gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} \right. \\
 & \left. + w_2 \alpha_i M_i^{1+\beta_i} \right) - (w_1 TC_1^* + w_2 TC_2^*) \\
 \text{Sujeito} \quad & \text{à} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\
 & \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{2_i}}{2 \widehat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\
 & M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

2º caso: $p = 2$ Considerando a adição de duas novas variáveis positivas $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ao problema (5.15), onde

$$TC_1(M, Q, S) - TC_1^* \leq y_1 \quad e \quad w_2 (TC_2(M) - TC_2^*)^2 \leq w_2 y_2^2.$$

Para $w_1, w_2 \geq 0$ e $w_1 + w_2 = 1$ tem-se que:

$$\left[w_1 (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*)^2 + w_2 (TC_2(M) - TC_2^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, o problema (5.16) para n itens é formulado como segue:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \text{sujeito à} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \alpha_i^{-\delta_i}}{2TC_1^*} h_i M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - \frac{h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i}}{TC_1^*} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \right. \\
& \quad \left. \frac{h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i}}{2TC_1^*} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2 + \frac{c_{3i} \alpha_i}{TC_1^*} M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} + \frac{c_{2i}}{2TC_1^*} S_i^2 Q_i^{-1} \right) - \frac{y_1}{TC_1^*} \leq 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i}}{TC_2^*} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} + \frac{\alpha_i}{TC_2^*} M_i^{1+\beta_i} \right) - \frac{y_2}{TC_2^*} \leq 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{2i}}{2\widehat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\
& \quad y_1, y_2, M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

3º caso: $p = \infty$ O fato de o problema da métrica ponderada L_∞ (5.18) não ser diferenciável é resolvido por meio da introdução de uma nova variável, $0 < \varphi \in \mathbb{R}$, onde

$$\max \{w_1 (TC_1(M, Q, S) - TC_1^*), w_2 (TC_2(M) - TC_2^*)\} = \varphi.$$

Portanto, a formulação multi-item para o problema de Chebycheff (5.19) é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \varphi \\
& \text{sujeito à} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \alpha_i^{-\delta_i}}{2TC_1^*} h_i M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i - \frac{h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i}}{TC_1^*} M_i^{-\beta_i \delta_i} S_i^2 + \right. \\
& \quad \left. \frac{h_i \gamma_i \alpha_i^{-\delta_i}}{2TC_1^*} M_i^{-\beta_i \delta_i} Q_i^{-1} S_i^2 + \frac{c_{3i} \alpha_i}{TC_1^*} M_i^{\beta_i} Q_i^{-1} + \frac{c_{2i}}{2TC_1^*} S_i^2 Q_i^{-1} \right) - \frac{\varphi}{w_1 TC_1^*} \leq 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i \alpha_i^{1-\delta_i}}{TC_2^*} M_i^{\beta_i(1-\delta_i)} + \frac{\alpha_i}{TC_2^*} M_i^{1+\beta_i} \right) - \frac{\varphi}{w_2 TC_2^*} \leq 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{2i}}{2\widehat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\
& \quad \varphi, M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Nesse capítulo foram apresentadas as formulações gerais de cada um dos seis problemas de planejamento de estoques e marketing escalarizados pelo método das Métricas Ponderadas .

Três das generalizações referem-se ao problema de planejamento de estoques e marketing para um único item quando $p = 1, 2$ e ∞ . E no caso do problema de planejamento de estoques e marketing multi-item também foram apresentados mais três problemas com $p = 1, 2$ e ∞ . Além disso, algebricamente é mostrado como se obtém através do problema pseudo-dual da função objetivo de Programação Geométrica signomial de estoques totais, o vetor objetivo ideal TC_1^* . No caso da segunda função objetivo de Programação Geométrica Posinomial de custos totais adicionais o vetor objetivo TC_2^* é determinado por meio do problema dual associado.

O capítulo 6 aborda o exemplo numérico para o modelo de planejamento de estoques e marketing para um único item tratado em (ISLAM, 2008). Mas com um diferencial de ser resolvido utilizando a técnica da Condensação por meio do algoritmo da Condensação usando a ferramenta Gpposy, do GGPLAB. O exemplo numérico para o caso multi-item foi restrito para cinco itens, onde o primeiro item teve como dados iniciais os mesmos dados fornecidos por Islam (2008) e para os quatro itens restantes foram fornecidos dados iniciais aproximados dos dados iniciais fornecidos por Islam (2008), obedecendo as hipóteses dos parâmetros do modelo multi-item descritas na seção (5.2) do presente capítulo.

Capítulo 6

Experimentos Computacionais

6.1 Problema Multiobjetivo de Planejamento de Estoques e Marketing para um único item

Observa-se que grandes empresas como as empresas fabricantes de cerveja, fabricantes de carros, empresas que produzem sabão em pó, etc, se enquadram no modelo tratado neste trabalho pois elas investem diretamente no setor de vendas, por meio de promoções comerciais como anúncios comerciais em canais televisivos e sites de internet para que a quantidade de estoque de seus produtos seja o mínimo possível. O exemplo numérico proposto em Islam (2008) trata de uma empresa multinacional de refrigerantes com custo de manutenção de estoque igual a 25% do custo unitário de produção, ou seja, $h = \frac{1}{4}c_0$, o custo de preparação (*set-up*) c_3 é de \$130,00 e o custo de escassez c_2 é \$10,00. A taxa de demanda anual de refrigerantes está relacionada diretamente com o custo de marketing, isto é, $D = 10M^{1,5}$ e o custo de produção unitário está inversamente relacionado à demanda, isto é, $c_0 = 5,05M^{-1,8}$. A área para armazenagem unitária é igual à $a = 3m^2$ e a área total de armazenamento disponível $A = 225m^2$. O custo de escassez total permitido é igual à $\hat{C}_2 = \$0,085$.

Pelas hipóteses feitas para o modelo de planejamento de estoques e marketing formulado para um único item no capítulo 5 tem-se que a demanda relaciona-se diretamente ao custo de marketing, isto é,

$$D = \alpha M^\beta, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (6.1)$$

E o custo unitário de produção relaciona-se inversamente com a demanda, isto é,

$$c_0 = \gamma D^{-\delta}, \quad \text{onde } \delta > 1, \gamma > 0. \quad (6.2)$$

Das duas relações anteriores (6.1) e (6.2) resulta uma terceira que relaciona agora o custo de produção unitário com o custo de marketing, isto é,

$$\begin{aligned} c_0 &= \gamma (\alpha M^\beta)^{-\delta} \\ &= \gamma \alpha^{-\delta} M^{-\beta\delta}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Pelo dado de entrada $c_0 = 5,05M^{-1,8}$ obtido com o exemplo de Islam(2008) e pela expressão obtida (6.3) que:

$$\alpha^{-\delta}\gamma = 5,05 \quad e \quad \beta\delta = 1,8. \quad (6.4)$$

E como $D = 10M^{1,5}$ tem-se que $\alpha = 10$ e $\beta = 1,5$. E por (6.4) conclui-se que $\delta = 1,2$ e $\gamma = 80,03710621$.

A expressão geral que define a primeira função objetivo (5.5) e as funções objetivo dos problemas escalarizados (5.14), (5.17) e (5.20) por meio do métodos das métricas ponderadas quando $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$, respectivamente, são simplificadas com a substituição nos problemas citados do parâmetro custo de manutenção unitário h pela expressão que o define, ou seja, $h = \frac{1}{4}\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}$.

Como nos problemas para $1 \leq p < \infty$ (4.17) e $p = \infty$ (problema de *Tchebycheff*) (4.19) definidos pelo método das métricas ponderadas é necessário determinar o valor dos vetores objetivo ideal TC_1^* e TC_2^* obtidos por meio dos problemas associados a cada função objetivo separadamente, um problema irrestrito composto pela primeira função objetivo (6.5) foi formulado com a finalidade de reproduzir o problema pseudo-dual e sua solução, como foi feito por Islam (2008) que propôs um problema semelhante sem a substituição do parâmetro h .

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{8}\gamma^2\alpha^{-2\delta}M^{-2\beta\delta}Q - \frac{1}{4}\gamma^2\alpha^{-2\delta}M^{-2\beta\delta}S + \frac{1}{8}\gamma^2\alpha^{-2\delta}M^{-2\beta\delta}S^2Q^{-1} + \\ & c_3\alpha M^\beta Q^{-1} + \frac{c_2}{2}S^2Q^{-1} \\ \text{sujeito} \quad & \text{à} \quad M, Q, S > 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

O problema (6.5) que continua sendo um problema de PG signomial e deve ter o vetor ideal calculado por meio do pseudo-dual, onde o vetor ideal não pode neste caso ser obtido diretamente das coordenadas que o definem em (5.6). O problema pseudo-dual associado ao problema (6.5) é definido por:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} \quad v(\eta) = \left(\frac{\gamma^2 \alpha^{-2\delta}}{8\eta_1} \right)^{\eta_1} \left(\frac{\gamma^2 \alpha^{-2\delta}}{4\eta_2} \right)^{-\eta_2} \left(\frac{\gamma^2 \alpha^{-2\delta}}{8\eta_3} \right)^{\eta_3} \left(\frac{c_3 \alpha}{\eta_4} \right)^{\eta_4} \left(\frac{c_2}{2\eta_5} \right)^{\eta_5} \\
& \text{sujeito} \quad \text{à} \quad \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 = 1 \\
& \quad \quad \quad -2\beta\delta\eta_1 + 2\beta\delta\eta_2 - 2\beta\delta\eta_3 + \beta\eta_4 = 0 \\
& \quad \quad \quad \eta_1 - \eta_3 - \eta_4 - \eta_5 = 0 \\
& \quad \quad \quad -\eta_2 + 2\eta_3 + 2\eta_5 = 0 \\
& \quad \quad \quad \eta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

De modo análogo ao caso geral (5.5), onde foi utilizado a derivada da função pseudo-dual $V(\eta_3) = \ln(v(\eta_3))$ para obter a solução de mínimo local (5.6), o problema (6.6) tem a seguinte solução de mínimo local:

$$\begin{aligned}
M^* &= \left(\frac{\gamma^2 c_3}{8\alpha^{(2\delta-1)} \eta_1 \eta_4 v(\eta^*)^2} \right)^{\frac{1}{\beta(2\delta-1)}} \\
Q^* &= \left(\frac{c_3 \alpha}{\eta_4 v(\eta^*)} \right) \left(\frac{\gamma^2 c_3}{8\alpha^{(2\delta-1)} \eta_1 \eta_4 v(\eta^*)^2} \right)^{\frac{1}{(2\delta-1)}} \\
S^* &= \left(\frac{2\eta_5 c_3 \alpha}{c_2 \eta_4} \right) \left(\frac{\gamma^2 c_3}{8\alpha^{(2\delta-1)} \eta_1 \eta_4 v(\eta^*)^2} \right)^{\frac{1}{(2\delta-1)}}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\text{onde } \eta_1 = \delta, \quad \eta_2 = 2\delta - 1, \quad \eta_3 = \frac{(2\delta - 1)^2}{4\delta}, \quad \eta_4 = \frac{1}{2}, \quad \eta_5 = \frac{2\delta - 1}{4\delta}.$$

O problema de PG posinomial correspondente com restrição de positividade cuja função objetivo é a função de custos totais adicionais não é alterado pela expressão que define h e tem a solução determinada por meio do problema dual associado. Ou seja, definido o problema posinomial (6.8) seguinte:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \alpha M^{1+\beta} + \gamma \alpha^{1-\delta} M^{\beta(1-\delta)} \\
& \text{sujeito} \quad \text{à} \quad M > 0.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

O problema dual correspondente é definido por:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize} \quad v(\eta) = \left(\frac{\alpha}{\eta_1} \right)^{\eta_1} \left(\frac{\gamma \alpha^{1-\delta}}{\eta_2} \right)^{\eta_2} \\
& \text{sujeito} \quad \text{à} \quad \eta_1 + \eta_2 = 1 \\
& \quad \quad \quad (1 + \beta)\eta_1 + \beta(1 - \delta)\eta_2 = 0 \\
& \quad \quad \quad \eta_1, \eta_2 > 0.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

A solução do sistema (5.8) resulta em

$$\eta_1 = \frac{\beta(\delta - 1)}{1 + \beta\delta}, \quad \eta_2 = \frac{1 + \beta}{1 + \beta\delta}. \quad (6.10)$$

Com os valores de η_1 e η_2 obtidos em (6.10), o valor da função dual é igual a

$$v(\eta^*) = \left(\frac{\alpha(1 + \beta\delta)}{\beta(\delta - 1)} \right)^{\frac{\beta(\delta-1)}{1+\beta\delta}} \left(\frac{\gamma\alpha^{1-\delta}(1 + \beta\delta)}{1 + \beta} \right)^{\frac{1+\beta}{1+\beta\delta}}. \quad (6.11)$$

Utilizando a relação entre variáveis primais e duais obtém-se que o custo de marketing ótimo M^* é o mínimo global pois o cologaritmo de $v(\eta)$, ou seja, $-\ln(v(\eta))$ é uma função convexa. O vetor utópico é definido como o valor da função objetivo na solução ótima, isto é, $TC2^* = TC2(M^*)$ quando

$$M^* = \left(\frac{((\delta - 1)\beta)^2 \gamma \alpha^{-\delta}}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{(1+\beta\delta)}} \quad (6.12)$$

Tabela 6.1: Dados de entrada para o problema de único item

Parâmetros	Valores numéricos
h	$\frac{1}{4}\gamma\alpha^{-\delta}M^{-\beta\delta}$
c_3	130.00
c_2	10.00
α	10
β	1.5
δ	$1.8\beta^{-1}$
γ	$5,05\alpha^\delta$
a	$3m^2$
A	$225m^2$
$\widehat{C}_2$	0.085

A tabela (6.1) acima contém todos os parâmetros com os seus respectivos valores numéricos, os quais são utilizados para definir cada problema associado a cada função objetivo, cuja solução são os vetores objetivos ideais. E posteriormente, determinar juntamente com os vetores objetivos ideais, cada um dos nove problemas obtidos com o método das métricas ponderadas, seja por meio da variação do valor de p ($p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$) seja por meio da escolha das preferências por cada função objetivo ($w_1 = w_2 = 0.5$, $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$)

O problema (6.5) irrestrito com os valores numéricos para os coeficientes e expoentes resulta em:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad 3.1878125M^{-3.6}Q - 6.375625M^{-3.6}S + 3.1878125M^{-3.6}S^2Q^{-1} + \\
& 1300M^{1.5}Q^{-1} + 5S^2Q^{-1} \\
& \text{sujeito à } M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Já o problema associado a primeira função objetivo resolvido pelo algoritmo da Condensação com Gpposy cuja solução resulta no vetor objetivo ideal utilizado no método das métricas ponderadas para o problema de planejamento de estoques e marketing para um único produto foi composto pelo problema (6.13) acima e as restrições de espaço de armazenagem e de escassez total permitida do problema multi-objetivo original, ou seja,

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad 3.1878125M^{-3.6}Q - 6.375625M^{-3.6}S + 3.1878125M^{-3.6}S^2Q^{-1} + \\
& 1300M^{1.5}Q^{-1} + 5S^2Q^{-1} \\
& \text{sujeito à} \quad 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
& \quad \quad \quad 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
& \quad \quad \quad M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{6.14}$$

As tabelas (6.2), (6.3) contém os valores obtidos para as variáveis de decisão M, Q, S e o respectivo valor da função objetivo tanto para o problema signomial (6.13) com o qual se obteve o pseudo-dual (6.6) quanto para o problema formulado para ser resolvido pelo algoritmo da Condensação com Gpposy (6.14). Consta na tabela de valores da função objetivo (6.3) o valor da função objetivo obtido por Islam (2008). A tabela (6.4) mostra os valores das restrições para o problema (6.14) na solução obtida em (6.2).

Tabela 6.2: Comparação de Soluções: Condensação com Gpposy versus Pseudo-dual

Variável	Sol Condensação	Sol pseudo-dual
M^*	1.98616950179577	0.803729015296584
Q^*	76.1376909043262	17.920928712424
S^*	1.13769094907313	10.4538750822473

Tabela 6.3: Valor da função objetivo de custos totais de estoques: Condensação com Gpposy, Pseudo-dual e Islam (2008)

Func obj	Condensação	Pseudo-dual	Islam (2008)
TC_1	67.792346267845	104.538750822473	123.1274

Tabela 6.4: Viabilidade do problema mono-objetivo restrito para a função de custos totais de estoques usando Condensação com Gpposy

Restrição	Valor pela Condensação com Gpposy
$g_1(M^*, Q^*, S^*)$	0.999999999403375
$g_1(M^*, Q^*, S^*)$	0.0072249997221808

O problema (6.8) resultado da utilização dos parâmetros particulares da tabela (6.1) correspondente a segunda função objetivo de custos totais de marketing é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad 10M^{2.5} + 50.5M^{-0.3} \\ & \text{sujeito à} \quad M > 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

A tabela (6.5) abaixo apresenta a solução para a variável M tanto para o problema resolvido com o algoritmo da condensação com Gpposy quanto para o problema dual (6.9) associado ao problema posinomial primal (6.8). Além disso, a tabela (6.6) mostra os valores das funções objetivo quando M é um dos valores mostrados na tabela (6.5) com o algoritmo da Condensação com Gpposy, por meio do dual e o valor mostrado em Islam (2008).

Tabela 6.5: Comparação de Soluções para o problema irrestrito com a segunda função objetivo de marketing: Condensação com Gpposy versus dual

Variável	Sol Condensação	Sol dual
M^*	0.836202865559064	0.836202865559057

Tabela 6.6: Valor da função objetivo de custos de marketing: Condensação com Gpposy, Pseudo-dual e Islam (2008)

Func obj	Condensação	Pseudo-dual	Islam (2008)
TC_2	59.6782260770226	59.6782260770226	122.2257

O problema resultante da aplicação do método das métricas ponderadas L_p quando $p = 1$, após a substituição do valor de h tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \frac{w_1}{8}\gamma^2\alpha^{-2\delta}M^{-\beta\delta}Q - \frac{w_1}{4}\gamma^2\alpha^{-2\delta}M^{-2\beta\delta}S + \frac{w_1}{8}\gamma^2\alpha^{-2\delta}M^{-2\beta\delta}S^2Q^{-1} + w_1c_3\alpha M^\beta Q^{-1} + \\ & \quad \frac{w_1c_2}{2}S^2Q^{-1} + w_2\alpha M^{1+\beta} + w_2\gamma\alpha^{1-\delta}M^{\beta(1-\delta)} - (w_1TC_1^* + w_2TC_2^*) \\ & \text{sujeito à} \quad \frac{a}{A}Q - \frac{a}{A}S \leq 1 \\ & \quad \frac{c_2}{2\hat{C}_2}S^2Q^{-1} \leq 1 \\ & \quad M, Q, S > 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Problema de um único item para $p = 1$ para $w_1 = w_2 = 0.5$

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad 1.59390625M^{-3.6}Q - 3.1878125M^{-3.6}S + 1.59390625M^{-3.6}S^2Q^{-1} + \\ & \quad 650M^{1.5}Q^{-1} + 2.5S^2Q^{-1} + 5M^{2.5} + 25.25M^{-0.3} - 33.8961731339225 - \\ & \quad 29.8391130385113 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{sujeito à } 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
& 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
& M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Tabela 6.7: Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.17)

Variável	Sol CondensGpposy	Sol Islam (2008)
M^*	1.66550258979363	0.9300382
Q^*	74.7250212639824	39.51303
S^*	1.12708710495606	0.5809763

Tabela 6.8: Valores das funções objetivo: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.17)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	74.3078445509452	128.0386
TC_2	79.1322731022296	123.0328
Tempo	1.03871826518519	
Iterações	11	

Tabela 6.9: Viabilidade das restrições: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.17)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.981305788787018	0.519094049333333
g_2	0.999999984783842	0.502490178052643

Problema de um único item para $p = 1$ para $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } 1.275125M^{-3.6}Q - 2.55025M^{-3.6}S + 1.275125M^{-3.6}S^2Q^{-1} + 520M^{1.5}Q^{-1} + \\
& 2S^2Q^{-1} + 6M^{2.5} + 30.3M^{-0.3} - 27.116938507138 - 35.8069356462136 \\
& \text{sujeito à } 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
& 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
& M, Q, S > 0
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Tabela 6.10: Comparação: soluções da condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.18)

Variável	Sol CondensGpposy	Sol Islam (2008)
M^*	1.50750718335043	0.8966431
Q^*	58.0144360980657	38.19715
S^*	0.993098887231546	0.5651637

Tabela 6.11: Valores das funções objetivo: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.18)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	82.326912921411	128.8857
TC_2	72.5520318760732	122.5162
Tempo	0.758002995185185	
Iterações	10	

Tabela 6.12: Viabilidade das restrições: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.18)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.760284496144455	0.501759817333333
g_2	0.999999985960308	0.491890729756001

Problema de um único item para $p = 1$ para $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } 1.9126875M^{-3.6}Q - 3.825375M^{-3.6}S + \\
 & 1.9126875M^{-3.6}S^2Q^{-1} + 780M^{1.5}Q^{-1} + 3S^2Q^{-1} + 4M^{2.5} + \\
 & 20.2M^{-0.3} - 40.675407760707 - 23.871290430809 \\
 & \text{sujeito à } 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
 & 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
 & M, Q, S > 0
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Tabela 6.13: Comparação: soluções da condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.19)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam (2008)
M^*	1.73650210654631	0.9306990
Q^*	76.1376908575923	38.83385
S^*	1.13769095989889	0.5819986

Tabela 6.14: Valores das funções objetivo: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.19)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	71.4548453434489	127.8774
TC_2	82.5309602354257	123.2292
Tempo	0.75386691037037	
Iterações	10	

Tabela 6.15: Viabilidade das restrições: Condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.19)

Restrição	CondensGGPOSY	Islam (2008)
g_1	0.999999998635912	0.510024685333333
g_2	0.999999981192418	0.51307931914457

Quando $p = 2$, o problema escalar resultante do método das métricas ponderadas aplicado ao problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing para um único item (5.3) tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & \text{sujeito à} \quad \frac{1}{8TC_1^*} \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q - \frac{1}{4TC_1^*} \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} S + \frac{1}{8TC_1^*} \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q^{-1} S^2 \\
 & \quad + \frac{c_3}{TC_1^*} \alpha M^\beta Q^{-1} + \frac{c_2}{2TC_1^*} S^2 Q^{-1} - \frac{y_1}{TC_1^*} \leq 1 \\
 & \quad \frac{\alpha}{TC_2^*} M^{1+\beta} + \frac{\gamma \alpha^{1-\delta}}{TC_2^*} M^{\beta(1-\delta)} - \frac{y_2}{TC_2^*} \leq 1 \\
 & \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\
 & \quad \frac{c_2}{2\hat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\
 & \quad M, Q, S, y_1, y_2 > 0.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Problema de um único item para $p = 2$ para $w_1 = w_2 = 0.5$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad (0.5y_1^2 + 0.5y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & \text{sujeito à} \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q - 0.0940463835668136M^{-3.6}S + \\
 & \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q^{-1}S^2 + 19.1762060404835M^{1.5}Q^{-1} + \\
 & \quad 0.0737546386172443S^2Q^{-1} - 0.0147509277234489y_1 \leq 1 \\
 & \quad 0.167565302411866M^{2.5} + 0.846204777179923M^{-0.3} - 0.0167565302411866y_2 \leq 1 \\
 & \quad 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
 & \quad 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
 & \quad M, Q, S, y_1, y_2 > 0.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Tabela 6.16: Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ para (6.21)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam(2008)
M^*	1.56211771562122	0.9196067
Q^*	63.5005837706371	37.23608
S^*	1.03899466655381	0.5836205
y_1	11.5790532866299	
y_2	14.9957596997876	

Tabela 6.17: Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.21)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	79.3713995507992	127.6902
TC_2	74.673985773972	123.6351
Tempo	0.56236832	
Iterações	25	

Tabela 6.18: Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ para (6.21)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.999999999945781	
g_2	0.999999999952442	
g_3	0.832821188054444	0.48869946
g_4	0.99999999354007	0.538081673379295

Problema de um único item para $p = 2$ para $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad (0.4y_1^2 + 0.6y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & \text{sujeito à} \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q - 0.0940463835668136M^{-3.6}S + \\
 & \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q^{-1}S^2 + 19.1762060404835M^{1.5}Q^{-1} + \\
 & \quad 0.0737546386172443S^2Q^{-1} - 0.0147509277234489y_1 \leq 1 \\
 & \quad 0.167565302411866M^{2.5} + 0.846204777179923M^{-0.3} - 0.0167565302411866y_2 \leq 1 \\
 & \quad 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
 & \quad 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
 & \quad M, Q, S, y_1, y_2 > 0.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Tabela 6.19: Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.22)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam(2008)
M^*	1.52021827316297	0.9293127
Q^*	59.2645108127344	38.46130
S^*	1.00374133985736	0.5824761
y_1	13.8276700917402	
y_2	13.3533851514132	

Tabela 6.20: Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.22)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	81.6200163556544	127.8178
TC_2	73.0316112257222	123.3277;
Tempo	0.50156717	
Iterações	24	

Tabela 6.21: Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.22)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.999999999942016	
g_2	0.999999999954529	
g_3	0.776810259638361	0.505050985333333
g_4	0.999999993570357	0.518899604462928

Problema de um único item para $p = 2$ para $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad (0.6y_1^2 + 0.4y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & \text{sujeito à} \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q - 0.0940463835668136M^{-3.6}S + \\
 & \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q^{-1}S^2 + 19.1762060404835M^{1.5}Q^{-1} + \\
 & \quad 0.0737546386172443S^2Q^{-1} - 0.0147509277234489y_1 \leq 1 \\
 & \quad 0.167565302411866M^{2.5} + 0.846204777179923M^{-0.3} - 0.0167565302411866y_2 \leq 1 \\
 & \quad 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
 & \quad 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
 & \quad M, Q, S, y_1, y_2 > 0.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Tabela 6.22: Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.23)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam(2008)
M^*	1.60254308753861	0.9123236
Q^*	67.757462840682	36.57991
S^*	1.07325526353294	0.5838419
y_1	9.52114555225046	
y_2	16.6700927644424	

Tabela 6.23: Valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.23)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	77.313491816593	127.6460
TC_2	76.3483188384643	123.7997
Tempo	0.450621184814815	
Iterações	26	

Tabela 6.24: Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.23)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.999999999948335	
g_2	0.999999999949719	
g_3	0.889122767695321	0.479947574666667
g_4	0.9999999993410375	0.548149427305557

Por fim, para $p = \infty$ o problema de *Chebycheff* obtido com o método das métricas ponderadas aplicado ao problema multiobjetivo de planejamento de estoques e marketing para um único item (5.3) tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \varphi \\
 & \text{sujeito à} \quad \frac{1}{8TC_1^*} \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q - \frac{1}{4TC_1^*} \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} S + \frac{1}{8TC_1^*} \gamma^2 \alpha^{-2\delta} M^{-2\beta\delta} Q^{-1} S^2 \\
 & \quad + \frac{c_3}{TC_1^*} \alpha M^\beta Q^{-1} + \frac{c_2}{2TC_1^*} S^2 Q^{-1} - \frac{\varphi}{w_1 TC_1^*} \leq 1 \\
 & \quad \frac{\alpha}{TC_2^*} M^{1+\beta} + \frac{\gamma \alpha^{1-\delta}}{TC_2^*} M^{\beta(1-\delta)} - \frac{\varphi}{w_2 TC_2^*} \leq 1 \\
 & \quad \frac{a}{A} Q - \frac{a}{A} S \leq 1 \\
 & \quad \frac{c_2}{2\hat{C}_2} S^2 Q^{-1} \leq 1 \\
 & \quad M, Q, S, \varphi > 0.
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Problema de um único item para $p = \infty$ para $w_1 = w_2 = 0.5$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \varphi \\
 & \text{sujeito à} \quad 0.0470231917834068 M^{-3.6} Q - 0.0940463835668136 M^{-3.6} S + \\
 & \quad 0.0470231917834068 M^{-3.6} Q^{-1} S^2 + 19.1762060404835 M^{1.5} Q^{-1} + \\
 & \quad 0.0737546386172443 S^2 Q^{-1} - 0.0295018554468977 \varphi \leq 1 \\
 & \quad 0.167565302411866 M^{2.5} + 0.846204777179923 M^{-0.3} - 0.0335130604823732 \varphi \leq 1 \\
 & \quad 0.0133333333333333 Q - 0.0133333333333333 S \leq 1 \\
 & \quad 58.8235294117647 S^2 Q^{-1} \leq 1 \\
 & \quad M, Q, S, \varphi > 0.
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Tabela 6.25: Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.25)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam (2008)
M^*	1.52530876340239	0.8458588
Q^*	59.7696887192033	32.01543
S^*	1.00801026505308	0.5797730
φ	6.77394018219532	

Tabela 6.26: Comparação: valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.25)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	81.3402266240206	127.5276
TC_2	73.2261064356629	125.2465
Tempo	0.82060642	
Iterações	10	

Tabela 6.27: Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$ para (6.25)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.99999999987882	
g_2	0.999999999903645	
g_3	0.783489046055336	0.419142093333333
g_4	0.999999986443973	0.617600604254592

Problema de um único item para $p = \infty$ para $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \varphi \\
& \text{sujeito à} \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q - 0.0940463835668136M^{-3.6}S + \\
& 0.0470231917834068M^{-3.6}Q^{-1}S^2 + 19.1762060404835M^{1.5}Q^{-1} + \\
& 0.0737546386172443S^2Q^{-1} - 0.0368773193086222\varphi \leq 1 \\
& 0.167565302411866M^{2.5} + 0.846204777179923M^{-0.3} - 0.0279275504019777\varphi \leq 1 \\
& 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
& 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
& M, Q, S, \varphi > 0.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Tabela 6.28: Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.26)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam(2008)
M^*	1.46489342763558	0.8961108
Q^*	53.9411556464343	35.32355
S^*	0.957600978349938	0.5837589
φ	6.79757455609059	

Tabela 6.29: Comparação: valores das funções objetivo por condensação om Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.26)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	84.7862826490715	127.5862
TC_2	71.007516998521	124.1366
Tempo	0.698463535185185	
Iterações	10	

Tabela 6.30: Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ para (6.26)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.999999999867241	
g_2	0.999999999910867	
g_3	0.706447395574458	0.463197214666667
g_4	0.999999986638355	0.567484187693163

Problema de um único item para $p = \infty$ para $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \varphi \\
 & \text{sujeito à} \quad 0.0470231917834068M^{-3.6}Q - 0.0940463835668136M^{-3.6}S + \\
 & 0.0470231917834068M^{-3.6}Q^{-1}S^2 + 19.1762060404835M^{1.5}Q^{-1} + \\
 & 0.0737546386172443S^2Q^{-1} - 0.0245848795390814\varphi \leq 1 \\
 & 0.167565302411866M^{2.5} + 0.846204777179923M^{-0.3} - 0.0418913256029665\varphi \leq 1 \\
 & 0.0133333333333333Q - 0.0133333333333333S \leq 1 \\
 & 58.8235294117647S^2Q^{-1} \leq 1 \\
 & M, Q, S, \varphi > 0.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Tabela 6.31: small Comparação: soluções por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.27)

Variáveis	Sol CondensGpposy	Sol Islam(2008)
M^*	1.5821903651999	0.8458587
Q^*	65.59327756333	32.01543
S^*	1.05597618490043	0.5797731
φ	6.32643618580419	

Tabela 6.32: Valores das funções objetivo por condensação com Gpposy e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.27)

Função objetivo	CondensGpposy	Islam (2008)
TC_1	78.3364065698738	127.5276
TC_2	75.4943165353144	125.2465
Tempo	0.968720484814815	
Iterações	10	

Tabela 6.33: Viabilidade das restrições: Condensação e Islam (2008) quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ para (6.27)

Restrição	CondensGpposy	Islam (2008)
g_1	0.999999999887231	
g_2	0.999999999895797	
g_3	0.860497351712394	0.419142092
g_4	0.999999986099955	0.617600817303719

Tabela 6.34: Valor mínimo encontrado para TC_1 e TC_2 para o problema escalarizado de planejamento de estoques e marketing com um único item.

Preferência	TC_1	TC_2
$w_1 = w_2 = 0.5$	74.3078445509452 ($p = 1$)	73.2261064356629 ($p = \infty$)
$w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$	81.6200163556544 ($p = 2$)	71.007516998521 ($p = \infty$)
$w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$	71.4548453434489 ($p = 1$)	75.4943165353144 ($p = \infty$)

Observa-se que se forem consideradas preferências iguais, isto é, $w_1 = w_2 = 0.5$, tanto pela função objetivo de custos totais de estoques (TC_1) quanto pela função de custos totais adicionais (produção e marketing) (TC_2), os valores de mínimos locais obtidos pela tabela (6.34) ocorrem quando $p = 1$ e $p = \infty$. Já no caso em que existe uma maior preferência ($w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$) pela função objetivo TC_2 do que pela função objetivo TC_1 , o menor valor observado para as funções objetivo TC_1 e TC_2 ocorrem, respectivamente, quando $p = 2$ e $p = \infty$. E quando o decisor expressa maior preferência pela função objetivo TC_1 do que pela função objetivo TC_2 , isto é, $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$, os menores valores observados de acordo com a tabela (6.34) são, respectivamente, quando $p = 1$ e $p = \infty$.

A conclusão acima obtida por meio da tabela (6.34) com o algoritmo da condensação utilizando Gpposy foi diferente da conclusão de Islam (2008), onde neste último todos os valores de mínimos locais das funções objetivo TC_1 e TC_2 ocorreram em $p = \infty$ e $p = 1$, respectivamente.

Considerando os valores objetivo ideais $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ utilizados por Islam (2008), os valores das funções objetivo, nos três casos considerados, isto é, $p = 1, 2, \infty$, ainda são menores do que os valores apresentados na literatura anteriormente mencionada como pode ser visto nas tabelas (6.35), (6.37) e (6.39). Mas os valores de mínimo quando $w_1 = w_2 = 0, 5$, $w_1 = 0.6, w_2 = 0, 4$ e $w_1 = 0.4, w_2 = 0, 6$ para TC_1 e TC_2 ocorrem todos em $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente.

Como em problemas de programação geométrica signomiais só é possível obter soluções de mínimo locais e como os pesos considerados foram positivos, pelo Teorema (11) juntamente com a afirmação referente as soluções de mínimo locais descrito no capítulo 4 para o método das Métricas Ponderadas garante-se que as soluções obtidas para o problema de planejamento de estoques e marketing para um único item com o algoritmo da Condensação utilizando Gpposy

são soluções eficientes locais para problema bi-objetivo originalmente proposto.

Tabela 6.35: Soluções M , Q e S e funções objetivo TC_1 e TC_2 usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty$, $w_1 = w_2 = 0, 5$

Variável	Solução Condensação com Gpposy		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
M	1.66550257733695	1.38440898347073	1.38440898647548
Q	74.7250189226054	33.675968299029	33.675968512014
S	1.12708706712623	$1.67720871497229 \cdot 10^{-58}$	$1.67720862963114 \cdot 10^{-58}$
$FobjTC_1$	74.3078451402208	96.1670153466763	96.167015104138
$FobjTC_2$	79.1322725301003	68.3556638903976	68.3556639829344
Iterações	10	7	8
Tempo	1.60228715439687	0.984695511835229	1.11575439760888

Tabela 6.36: Viabilidade das restrições usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty$, $w_1 = w_2 = 0, 5$

Restrição	Valor		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
g_1	0.981305758073055	0.781036671967103	0.78103667505475
g_2	0.999999948988588	0.559257695130323	0.559257700982138
g_3		0.44901291065372	0.449012913493521
g_4		$4.91366118938276 \cdot 10^{-116}$	$4.91366065826401 \cdot 10^{-116}$

Tabela 6.37: Soluções M , Q e S e funções objetivo TC_1 e TC_2 usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty$, $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0, 6$

Variável	Solução Condensação com Gpposy		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
M	1.52134308605945	1.38440898299431	1.38440898647547
Q	58.8714268786729	33.6759682707932	33.6759685120139
S	$1.8409076351516 \cdot 10^{-58}$	$1.67720871383104 \cdot 10^{-58}$	$1.67720862963114 \cdot 10^{-58}$
$FobjTC_1$	82.872326874628	96.1670153802685	96.1670151041383
$FobjTC_2$	73.0744676791334	68.3556638757254	68.3556639829343
Iterações	7	7	8
Tempo	1.1973162196897	1.08630478335105	1.13268594513313

Tabela 6.38: Viabilidade das restrições usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty$, $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0, 6$

Restrição	Valor		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
g_1	0.784952358382305	0.781036671659536	0.781036675054748
g_2	$3.38618369759224 \cdot 10^{-116}$	0.559257695434834	0.55925770098214
g_3		0.449012910277243	0.449012913493518
g_4		$4.91366118681571 \cdot 10^{-116}$	$4.91366065826403 \cdot 10^{-116}$

Tabela 6.39: Soluções M , Q e S e funções objetivo TC_1 e TC_2 usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0, 4$

Variável	Solução Condensação com Gpposy		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
M	1.73650210574093	1.38440898385259	1.38440898647548
Q	76.1376907018213	33.6759683205621	33.6759685120142
S	1.13769094409787	$1.67720871424424 \cdot 10^{-58}$	$1.67720862963114 \cdot 10^{-58}$
$FobjTC_1$	71.4548453934686	96.1670153207168	96.1670151041379
$FobjTC_2$	82.5309601953063	68.3556639021576	68.3556639829344
Iterações	9	7	8
Tempo	1.20035680576595	1.0711881173634	1.12031600931855

Tabela 6.40: Viabilidade das restrições usando os vetores ideais de Islam(2008) $TC_1^* = 123.1274$ e $TC_2^* = 122.2257$ no algoritmo da condensação com Gpposy para $p = 1, 2, \infty$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0, 4$

Restrição	Valor		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = \infty$
g_1	0.999999996769646	0.78103667217772	0.781036675054751
g_2	0.999999955460991	0.559257694641877	0.559257700982135
g_3		0.449012910940829	0.449012913493522
g_4		$4.91366118197497 \cdot 10^{-116}$	$4.91366065826399 \cdot 10^{-116}$

6.2 Problema Multiobjetivo de Planejamento de Estoques e Marketing Multi-item

Uma empresa multinacional de refrigerantes ainda se enquadra no modelo de planejamento de estoques e marketing multi-item, pois é possível produzir tipo distintos de sabores para um mesmo refrigerante, bem como refrigerantes completamente distintos. Considere cinco tipos distintos de produtos produzidos pela empresa de refrigerantes. Para o item 01, são considerados os dados do exemplo numérico citado em (ISLAM, 2008), isto é, que o custo de manutenção é igual a $h_1 = 25\%c_{01}$, o custo de preparação (*set-up*) $c_{31} = \$130,00$, o custo de escassez $c_{21} = \$10,00$. A taxa de demanda anual de refrigerantes está relacionada diretamente com o custo de marketing, isto é, $D_1 = 10M_1^{1,5}$ e o custo de produção unitário está inversamente relacionado à demanda, isto é, $c_{01} = 5,05M_1^{-1,8}$. A área para armazenagem para o primeiro item é igual à $a_1 = 3m^2$ e a área para armazenagem total disponível para os cinco itens é igual à $A = 1125m^2$. O custo de escassez máximo total permitido para os cinco itens é igual à $\widehat{C}_2 = \$0,425$. Para o segundo item o custo de manutenção unitário é expresso por $h_2 = 20\%c_{02}$, o custo de preparação corresponde a $c_{32} = \$120,00$, o custo de escassez é dado por $c_{22} = \$9,00$. A taxa de demanda anual corresponde a $D_2 = 11M_2^{1,4}$ e o custo de produção unitário é definido pela expressão $c_{02} = 5M_2^{-1,6}$. Já no caso do terceiro item, o custo de manutenção unitário corresponde a $h_3 = 40\%c_{03}$, com custo de preparação $c_{33} = \$110,00$ e custo de escassez igual

a $c_{2_3} = \$11,00$. A taxa de demanda anual corresponde a $D_3 = 12M_3^{1,3}$ e o custo de produção unitário tem como expressão $c_{0_3} = 5,25M_3^{-1,7}$. O quarto item tem como custo de manutenção unitário $h_4 = 10\%c_{0_4}$, custo de preparação $c_{3_4} = \$90,00$ e custo de escassez igual a $c_{2_4} = \$8,00$. A taxa de demanda anual é expressa por $D_4 = 8M_4^{1,8}$ e o custo de produção unitário é igual a $c_{0_4} = 5,2M_4^{-1,5}$. E o quinto e último item considerado tem como custo de manutenção unitário $h_5 = 16\%c_{0_5}$, custo de preparação $c_{3_5} = \$140,00$ e custo de escassez igual a $c_{2_5} = \$12,00$. A taxa de demanda anual corresponde a $D_5 = 9M_4^{1,6}$ e o custo de produção unitário é definido por a $c_{0_5} = 5,15M_4^{-1,9}$.

A seguir são mostrados os nove problemas de planejamento de estoques e marketing com cinco itens escalarizado pelo método das métricas ponderadas resultantes da escolha de $p = 1, 2, \infty$ e dos pesos $w_1 = w_2 = 0.5$, $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$ considerando-se que os vetores objetivos ideais também foram obtidos por meio do algoritmo da Condensação com Gpposy por meio dos problemas associados a cada função objetivo.

Todos os problemas escalarizados pertencem a classe de problemas de programação geométrica signomial e as soluções obtidas são de mínimo local. Como os pesos considerados são positivos, pelo Teorema (11) juntamente com a afirmação referente as soluções de mínimo locais descrita no capítulo 4 para o método das Métricas Ponderadas, garante-se que as soluções obtidas são soluções localmente eficientes para o problema de planejamento de estoques e marketing com 5 itens bi-objetivo original.

Quando $p = 1, 2$ e $p = \infty$ obtém-se dos problemas generalizados (5.25), (5.26) e (5.27) apresentados no capítulo 5 os problemas de planejamento de estoques e marketing escalarizados formulados e descritos a seguir para cinco itens (6.29), (6.33) e (6.37), respectivamente. Do problema (6.29) foram obtidos três novos problemas: (6.30), (6.31) e (6.32). Já com do problema (6.33) resultaram os problemas: (6.34), (6.35) e (6.36). Por fim, com o problema (6.37) resultaram os problemas: (6.38), (6.39) e (6.40).

O algoritmo da condensação utilizado para resolver os problemas de PG signomiais utilizando o Gpposy, da ferramenta Ggplab, como foi descrito na capítulo 4, apresenta uma dificuldade no que se refere à escolha do ponto inicial ou ponto de referência que no caso deste trabalho não foi utilizada nenhum outro algoritmo para geração de soluções iniciais, com o qual houvesse a garantia de que o ponto inicialmente fosse viável para o problema escalarizado. Mas mesmo para um ponto inicialmente inviável, o algoritmo da Condensação com Gpposy gera na iteração seguinte um ponto viável, a partir do qual se obtém a convergência do algoritmo da Condensação com Gpposy para o problema executado e a solução de mínimo local ótima e viável .

Os valores dos parâmetros necessários para a construção de cada um dos nove problemas escalares obtidos estão dispostos nas tabelas seguintes (6.41), (6.42), (6.43) e (6.44) considerando como limitações a área de armazenamento total disponível $A = 1125.0m^2$ e o custo total de escassez permitida $\widehat{C}_2 = 0.425$.

Tabela 6.41: Valores do custo de manutenção h e do espaço de armazenamento unitário a para o i -ésimo item

h_i	Valor	a_i	Valor
h_1	$\frac{1}{4}\gamma_1\alpha_1^{-\delta_1}M_1^{-\beta_1\delta_1}$	a_1	3.0
h_2	$\frac{1}{5}\gamma_2\alpha_2^{-\delta_2}M_2^{-\beta_2\delta_2}$	a_2	4.0
h_3	$\frac{2}{5}\gamma_3\alpha_3^{-\delta_3}M_3^{-\beta_3\delta_3}$	a_3	5.0
h_4	$\frac{1}{10}\gamma_4\alpha_4^{-\delta_4}M_4^{-\beta_4\delta_4}$	a_4	6.0
h_5	$\frac{4}{25}\gamma_5\alpha_5^{-\delta_5}M_5^{-\beta_5\delta_5}$	a_5	7.0

Tabela 6.42: Valores dos parâmetros α e β para o i -ésimo item

α_i	Valor	β_i	Valor
α_1	10	β_1	1.5
α_2	11	β_2	1.4
α_3	12	β_3	1.3
α_4	8	β_4	1.8
α_5	9	β_5	1.6

Tabela 6.43: Valores dos parâmetros c_2 e c_3 para o i -ésimo item

c_{2i}	Valor	c_{3i}	Valor
c_{21}	10	c_{31}	130
c_{22}	9	c_{32}	120
c_{23}	11	c_{33}	110
c_{24}	8	c_{34}	90
c_{25}	12	c_{35}	140

Tabela 6.44: Valores dos parâmetros δ e γ para o i -ésimo item

δ_i	Valor	γ_i	Valor
δ_1	$1.8\beta_1^{-1}$	γ_1	$5.05\alpha_1^{\delta_1}$
δ_2	$1.6\beta_2^{-1}$	γ_2	$5\alpha_2^{\delta_2}$
δ_3	$1.7\beta_3^{-1}$	γ_3	$5.25\alpha_3^{\delta_3}$
δ_4	$1.5\beta_4^{-1}$	γ_4	$5.2\alpha_4^{\delta_4}$
δ_5	$1.9\beta_5^{-1}$	γ_5	$5.15\alpha_5^{\delta_5}$

Problema restrito associado a função objetivo de custos de estoques totais multi-item

O problema particular (6.28) resultante do problema (5.23) com a substituição dos parâmetros por seus valores numéricos fornecidos pelas tabelas (6.41) - (6.44) é dado por:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad 3.1878125M_1^{-3.6}Q_1 - 6.375625M_1^{-3.6}S_1^2 + 3.1878125M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + \\
& 1300M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 5S_1^2Q_1^{-1} + 2.5M_2^{-3.2}Q_2 - 5M_2^{-3.2}S_2^2 + 2.5M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + \\
& 1320M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 4.5S_2^2Q_2^{-1} + 5.5125M_3^{-3.4}Q_3 - 11.025M_3^{-3.4}S_3^2 + \\
& 5.5125M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 1320M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 5.5S_3^2Q_3^{-1} + 1.352M_4^{-3}Q_4 - 2.704M_4^{-3}S_4^2 \\
& + 1.352M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 720M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 4S_4^2Q_4^{-1} + 2.1218M_5^{-3.8}Q_5 - 4.2436M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 2.1218M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 1260M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 6S_5^2Q_5^{-1} \\
& \text{Sujeito à} \quad 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + \\
& 0.003555555555555556Q_2 - 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 \\
& - 0.004444444444444444S_3 + 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 \\
& + 0.006222222222222222Q_5 - 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 \\
& + 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Tabela 6.45: Soluções usando Condensação com Gpposy

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.99110551338727	Q_4	19.746971129641
M_2	1.78228131025992	Q_5	37.4274876499104
M_3	2.1811175040373	S_1	0.777610937367014
M_4	1.02262922129133	S_2	0.932595755176853
M_5	1.36554771773011	S_3	0.865293156892624
Q_1	76.2538187797893	S_4	0.885428753390862
Q_2	58.3510334685863	S_5	0.755890842767906
Q_3	60.6707318292347		

Tabela 6.46: Valor da função objetivo de custos totais de estoques e Viabilidade das Restrições usando o algoritmo da Condensação com Gpposy

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	363.691417010601	g_1	0.772650149115816
		g_2	0.999999987089856

Problema irrestrito associado a função objetivo de custos de marketing total multi-item

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad 50.5M_1^{-0.3} + 10M_1^{2.5} + 55M_2^{-0.2} + 11M_2^{2.4} + 63M_3^{-0.4} \\
 & \quad + 12M_3^{2.3} + 41.6M_4^{0.3} + 8M_4^{2.8} + 46.35M_5^{-0.3} + 9M_5^{2.6} \\
 & \text{Sujeito} \quad \text{à} \quad M_i > 0, \forall i = 1, \dots, 5
 \end{aligned}$$

Tabela 6.47: Solução e valor da função objetivo para o problema irrestrito custos de marketing por condensação para o problema multi-item

Variável	Valor	Func obj	Valor CondensGpposy
M_1	0.836202865559064		
M_2	0.714109658475607		
M_3	0.966868044778282	TC_2	252.930309915449
M_4	$5.18157763603197 \cdot 10^{-36}$		
M_5	0.835705951660194		

Problema escalarizado com cinco itens para $p = 1$

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \frac{w_1}{8}\gamma_1^2\alpha_1^{-2\delta_1}M_1^{-2\beta_1\delta_1}Q_1 - \frac{w_1}{4}\gamma_1^2\alpha_1^{-2\delta_1}M_1^{-2\beta_1\delta_1}S_1^2 + \frac{w_1}{8}\gamma_1^2\alpha_1^{-2\delta_1}M_1^{-2\beta_1\delta_1}Q_1^{-1}S_1^2 + \\
 & \quad w_1c_{31}\alpha_1M_1^{\beta_1}Q_1^{-1} + \frac{w_1c_{21}S_1^2}{2Q_1} + w_2\gamma_1\alpha_1^{1-\delta_1}M_1^{\beta_1(1-\delta_1)} + w_2\alpha_1M_1^{1+\beta_1} + \frac{w_1}{10}\gamma_2^2\alpha_2^{-2\delta_2}M_2^{-2\beta_2\delta_2}Q_2 \\
 & \quad - \frac{w_1}{5}\gamma_2^2\alpha_2^{-2\delta_2}M_2^{-2\beta_2\delta_2}S_2^2 + \frac{w_1}{10}\gamma_2^2\alpha_2^{-2\delta_2}M_2^{-2\beta_2\delta_2}Q_2^{-1}S_2^2 + w_1c_{32}\alpha_2M_2^{\beta_2}Q_2^{-1} + \frac{w_1c_{22}S_2^2}{2Q_2} + \\
 & \quad w_2\gamma_2\alpha_2^{1-\delta_2}M_2^{\beta_2(1-\delta_2)} + w_2\alpha_2M_2^{1+\beta_2} + \frac{w_1}{5}\gamma_3^2\alpha_3^{-2\delta_3}M_3^{-2\beta_3\delta_3}Q_3 - \frac{2w_1}{5}\gamma_3^2\alpha_3^{-2\delta_3}M_3^{-2\beta_3\delta_3}S_3^2 + \\
 & \quad \frac{w_1}{5}\gamma_3^2\alpha_3^{-2\delta_3}M_3^{-2\beta_3\delta_3}Q_3^{-1}S_3^2 + w_1c_{33}\alpha_3M_3^{\beta_3}Q_3^{-1} + \frac{w_1c_{23}S_3^2}{2Q_3} + w_2\gamma_3\alpha_3^{1-\delta_3}M_3^{\beta_3(1-\delta_3)} + \\
 & \quad w_2\alpha_3M_3^{1+\beta_3} + \frac{w_1}{20}\gamma_4^2\alpha_4^{-2\delta_4}M_4^{-2\beta_4\delta_4}Q_4 - \frac{w_1}{10}\gamma_4^2\alpha_4^{-2\delta_4}M_4^{-2\beta_4\delta_4}S_4^2 + \frac{w_1}{20}\gamma_4^2\alpha_4^{-2\delta_4}M_4^{-2\beta_4\delta_4}Q_4^{-1}S_4^2 \\
 & \quad + w_1c_{34}\alpha_4M_4^{\beta_4}Q_4^{-1} + \frac{w_1c_{24}S_4^2}{2Q_4} + w_2\gamma_4\alpha_4^{1-\delta_4}M_4^{\beta_4(1-\delta_4)} + w_2\alpha_4M_4^{1+\beta_4} + \\
 & \quad \frac{2w_1}{25}\gamma_5^2\alpha_5^{-2\delta_5}M_5^{-2\beta_5\delta_5}Q_5 - \frac{4w_1}{25}\gamma_5^2\alpha_5^{-2\delta_5}M_5^{-2\beta_5\delta_5}S_5^2 + \frac{2w_1}{25}\gamma_5^2\alpha_5^{-2\delta_5}M_5^{-2\beta_5\delta_5}Q_5^{-1}S_5^2 + \\
 & \quad w_1c_{35}\alpha_5M_5^{\beta_5}Q_5^{-1} + \frac{w_1c_{25}S_5^2}{2Q_5} + w_2\gamma_5\alpha_5^{1-\delta_5}M_5^{\beta_5(1-\delta_5)} + w_2\alpha_5M_5^{1+\beta_5} - (w_1TC_1^* + w_2TC_2^*) \\
 & \text{Sujeito} \quad \text{à} \quad \sum_{i=1}^5 \left(\frac{a_i}{A}Q_i - \frac{a_i}{A}S_i \right) \leq 1 \\
 & \quad \sum_{i=1}^5 \left(\frac{c_{2i}}{2\widehat{C}_2}Q_i^{-1}S_i^2 \right) \leq 1 \\
 & \quad M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

(6.29)

Problema escalarizado ($p = 1$) com cinco itens e $w_1 = w_2 = 0.5$

$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & 1.59390625M_1^{-3.6}Q_1 - 3.1878125M_1^{-3.6}S_1^2 + 1.59390625M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + \\
& 650M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 2.5S_1^2Q_1^{-1} + 25.25M_1^{-0.3} + 5M_1^{2.5} + 1.25M_2^{-3.2}Q_2 - 2.5M_2^{-3.2}S_2^2 + \\
& 1.25M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 660M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 2.25S_2^2Q_2^{-1} + 27.5M_2^{-0.2} + 5.5M_2^{2.4} + 2.75625M_3^{-3.4}Q_3 - \\
& 5.5125M_3^{-3.4}S_3^2 + 2.75625M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 660M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 2.75S_3^2Q_3^{-1} + 31.5M_3^{-0.4} + 6M_3^{2.3} + \\
& 0.676M_4^{-3}Q_4 - 1.352M_4^{-3}S_4^2 + 0.676M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 360M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 2S_4^2Q_4^{-1} + 20.8M_4^{0.3} + \\
& 4M_4^{2.8} + 1.0609M_5^{-3.8}Q_5 - 2.1218M_5^{-3.8}S_5^2 + 1.0609M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 630M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 3S_5^2Q_5^{-1} \\
& + 23.175M_5^{-0.3} + 4.5M_5^{2.6} - 181.845708505301 - 126.465154957724 \\
\text{Sujeito à} \quad & 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + 0.003555555555555556Q_2 \\
& - 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 - 0.004444444444444444S_3 + \\
& 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 + 0.006222222222222222Q_5 - \\
& 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$:

$$\begin{aligned}
t_0 = [& 0.019 \quad 0.5 \quad 0.152 \quad 0.194 \quad 0.052130 \quad 0.135 \quad 0.0045 \quad 0.00721 \\
& 0.0023 \quad 0.0064 \quad 0.00021 \quad 0.0032 \quad 0.00045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.139]'
\end{aligned}$$

Tabela 6.48: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = w_2 = 0.5$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.59407922396753	Q_3	53.1506077562144
M_2	1.47203874625396	Q_4	16.7649072912721
M_3	1.74352738063005	Q_5	54.6151331111643
M_4	0.881658344733042	S_1	0.816171131785559
M_5	1.4265933706216	S_2	0.930760559621654
Q_1	62.3240711763994	S_3	0.894217032392164
Q_2	52.3519606685123	S_4	0.852686197013581
		S_5	0.60995900922409

Tabela 6.49: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	386.556556324263	g_1	0.999999999526798
TC_2	358.270975453126	g_2	0.9999999995789852
Iterações	38		
Tempo	1.16021485481481		

Problema escalarizado ($p = 1$) com cinco itens e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

$$\begin{aligned}
\text{Minimize } & 1.275125M_1^{-3.6}Q_1 - 2.55025M_1^{-3.6}S_1^2 + 1.275125M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 520M_1^{1.5}Q_1^{-1} + \\
& 2S_1^2Q_1^{-1} + 30.3M_1^{-0.3} + 6M_1^{2.5} + M_2^{-3.2}Q_2 - 2M_2^{-3.2}S_2^2 + M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 528M_2^{1.4}Q_2^{-1} + \\
& 1.8S_2^2Q_2^{-1} + 33M_2^{-0.2} + 6.6M_2^{2.4} + 2.205M_3^{-3.4}Q_3 - 4.41M_3^{-3.4}S_3^2 + 2.205M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 528M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 2.2S_3^2Q_3^{-1} + 37.8M_3^{-0.4} + 7.2M_3^{2.3} + 0.5408M_4^{-3}Q_4 - 1.0816M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.5408M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 288M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 1.6S_4^2Q_4^{-1} + 24.96M_4^{0.3} + 4.8M_4^{2.8} + 0.84872M_5^{-3.8}Q_5 \\
& - 1.69744M_5^{-3.8}S_5^2 + 0.84872M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 504M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 2.4S_5^2Q_5^{-1} + 27.81M_5^{-0.3} + \\
& 5.4M_5^{2.6} - 145.47656680424 - 151.758185949269 \\
\text{Sujeito à } & 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + 0.003555555555555556Q_2 - \\
& 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 - 0.004444444444444444S_3 + \\
& 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 + 0.006222222222222222Q_5 - \\
& 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$:

$$\begin{aligned}
t_0 = & [0.36 \quad 0.152 \quad 0.0194 \quad 0.135 \quad 0.00024 \quad 0.14 \quad 0.045 \quad 0.721 \\
& 0.23 \quad 0.064 \quad 0.0021 \quad 0.00032 \quad 0.00045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.139]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.50: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.50398556010289	Q_4	13.4975921870392
M_2	1.39193169774804	Q_5	63.3514178168425
M_3	1.65015441099855	S_1	0.777325889267043
M_4	0.790771929268443	S_2	0.876662814899704
M_5	1.43415637127823	S_3	0.848103164144935
Q_1	57.1540043630364	S_4	0.812351237129947
Q_2	49.2058417530777	S_5	0.538677104621086
Q_3	50.1986256202574		

Tabela 6.51: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	402.660198808596	g_1	0.999999994790745
TC_2	345.26061594075	g_2	0.999999995007548
Iterações	42		
Tempo	0.959083924814815		

Problema escalarizado ($p = 1$) com cinco itens e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

$$\begin{aligned}
\text{Minimize } & 1.9126875M_1^{-3.6}Q_1 - 3.825375M_1^{-3.6}S_1^2 + 1.9126875M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 780M_1^{1.5}Q_1^{-1} \\
& + 3S_1^2Q_1^{-1} + 20.2M_1^{-0.3} + 4M_1^{2.5} + 1.5M_2^{-3.2}Q_2 - 3M_2^{-3.2}S_2^2 + 1.5M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 792M_2^{1.4}Q_2^{-1} + \\
& 2.7S_2^2Q_2^{-1} + 22M_2^{-0.2} + 4.4M_2^{2.4} + 3.3075M_3^{-3.4}Q_3 - 6.615M_3^{-3.4}S_3^2 + 3.3075M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 792M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 3.3S_3^2Q_3^{-1} + 25.2M_3^{-0.4} + 4.8M_3^{2.3} + 0.8112M_4^{-3}Q_4 - 1.6224M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.8112M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 432M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 2.4S_4^2Q_4^{-1} + 16.64M_4^{0.3} + 3.2M_4^{2.8} + 1.27308M_5^{-3.8}Q_5 - \\
& 2.54616M_5^{-3.8}S_5^2 + 1.27308M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 756M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 3.6S_5^2Q_5^{-1} + 18.54M_5^{-0.3} + 3.6M_5^{2.6} \\
& - 218.214850206361 - 101.17212396618 \\
\text{Sujeito à } & 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + 0.003555555555555556Q_2 - \\
& 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 - 0.004444444444444444S_3 + \\
& 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 + 0.006222222222222222Q_5 - \\
& 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$:

$$t_0 = [71 \ 46 \ 33 \ 26 \ 61 \ 11 \ 14 \ 43 \ 20 \ 24 \ 17 \ 15 \ 10 \ 18 \ 90 \ 54]';$$

Tabela 6.52: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.67326222936996	Q_4	18.5481190810788
M_2	1.5399455917818	Q_5	49.189048751141
M_3	1.82676691785121	S_1	0.8237973352336
M_4	0.937715129318456	S_2	0.949782186687704
M_5	1.41893324846888	S_3	0.906209191184098
Q_1	65.9585472810698	S_4	0.871403655648002
Q_2	54.2489174594028	S_5	0.658515256304861
Q_3	55.0312455589481		

Tabela 6.53: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 1$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Func obj	Valor	CondensGpposy	Restrição	Valor	CondensGpposy
TC_1	376.880621666535		g_1	0.999999999807668	
TC_2	370.001181846266		g_2	0.999999999678131	
Iterações	38				
Tempo	0.807387165185185				

Problema escalarizado com cinco itens para $p = 2$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad (w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \text{sujeito à} \quad \frac{\gamma_1^2 \alpha_1^{-2\delta_1}}{8TC_1^*} M_1^{-2\beta_1 \delta_1} Q_1 - \frac{\gamma_1^2 \alpha_1^{-2\delta_1}}{4TC_1^*} M_1^{-2\beta_1 \delta_1} S_1^2 + \frac{\gamma_1^2 \alpha_1^{-2\delta_1}}{8TC_1^*} M_1^{-2\beta_1 \delta_1} Q_1^{-1} S_1^2 + \\
& \frac{c_{31} \alpha_1}{TC_1^*} M_1^{\beta_1} Q_1^{-1} + \frac{c_{21}}{2TC_1^*} S_1^2 Q_1^{-1} + \frac{\gamma_2^2 \alpha_2^{-2\delta_2}}{10TC_1^*} M_2^{-2\beta_2 \delta_2} Q_2 - \frac{\gamma_2^2 \alpha_2^{-2\delta_2}}{5TC_1^*} M_2^{-2\beta_2 \delta_2} S_2^2 + \\
& \frac{\gamma_2^2 \alpha_2^{-2\delta_2}}{10TC_1^*} M_2^{-2\beta_2 \delta_2} Q_2^{-1} S_2^2 + \frac{c_{32} \alpha_2}{TC_1^*} M_2^{\beta_2} Q_2^{-1} + \frac{c_{22}}{2TC_1^*} S_2^2 Q_2^{-1} + \frac{\gamma_3^2 \alpha_3^{-2\delta_3}}{5TC_1^*} M_3^{-2\beta_3 \delta_3} Q_3 - \\
& \frac{2\gamma_3^2 \alpha_3^{-2\delta_3}}{5TC_1^*} M_3^{-2\beta_3 \delta_3} S_3^2 + \frac{\gamma_3^2 \alpha_3^{-2\delta_3}}{5TC_1^*} M_3^{-2\beta_3 \delta_3} Q_3^{-1} S_3^2 + \frac{c_{33} \alpha_3}{TC_1^*} M_3^{\beta_3} Q_3^{-1} + \frac{c_{23}}{2TC_1^*} S_3^2 Q_3^{-1} + \\
& \frac{\gamma_4^2 \alpha_4^{-2\delta_4}}{20TC_1^*} M_4^{-2\beta_4 \delta_4} Q_4 - \frac{\gamma_4^2 \alpha_4^{-2\delta_4}}{10TC_1^*} M_4^{-2\beta_4 \delta_4} S_4^2 + \frac{\gamma_4^2 \alpha_4^{-2\delta_4}}{20TC_1^*} M_4^{-2\beta_4 \delta_4} Q_4^{-1} S_4^2 \\
& + \frac{c_{34} \alpha_4}{TC_1^*} M_4^{\beta_4} Q_4^{-1} + \frac{c_{24}}{2TC_1^*} S_4^2 Q_4^{-1} + \frac{2\gamma_5^2 \alpha_5^{-2\delta_5}}{25TC_1^*} M_5^{-2\beta_5 \delta_5} Q_5 - \frac{4\gamma_5^2 \alpha_5^{-2\delta_5}}{25TC_1^*} M_5^{-2\beta_5 \delta_5} S_5^2 + \\
& \frac{2\gamma_5^2 \alpha_5^{-2\delta_5}}{25TC_1^*} M_5^{-2\beta_5 \delta_5} Q_5^{-1} S_5^2 + \frac{c_{35} \alpha_5}{TC_1^*} M_5^{\beta_5} Q_5^{-1} + \frac{c_{25}}{2TC_1^*} S_5^2 Q_5^{-1} - \frac{y_1}{TC_1^*} \leq 1 \\
& \frac{\gamma_1 \alpha_1^{1-\delta_1}}{TC_2^*} M_1^{\beta_1(1-\delta_1)} + \frac{\alpha_1}{TC_2^*} M_1^{1+\beta_1} + \frac{\gamma_2 \alpha_2^{1-\delta_2}}{TC_2^*} M_2^{\beta_2(1-\delta_2)} + \frac{\alpha_2}{TC_2^*} M_2^{1+\beta_2} + \\
& \frac{\gamma_3 \alpha_3^{1-\delta_3}}{TC_2^*} M_3^{\beta_3(1-\delta_3)} + \frac{\alpha_3}{TC_2^*} M_3^{1+\beta_3} + \frac{\gamma_4 \alpha_4^{1-\delta_4}}{TC_2^*} M_4^{\beta_4(1-\delta_4)} + \frac{\alpha_4}{TC_2^*} M_4^{1+\beta_4} + \\
& \frac{\gamma_5 \alpha_5^{1-\delta_5}}{TC_2^*} M_5^{\beta_5(1-\delta_5)} + \frac{\alpha_5}{TC_2^*} M_5^{1+\beta_5} - \frac{y_2}{TC_2^*} \leq 1 \\
& \sum_{i=1}^5 \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\
& \sum_{i=1}^5 \left(\frac{c_{2i}}{2\hat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\
& y_1, y_2, M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Problema escalarizado ($p = 2$) com cinco itens e $w_1 = w_2 = 0.5$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad (0.5y_1^2 + 0.5y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \text{sujeito à} \quad 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1 - 0.0175303147168143M_1^{-3.6}S_1^2 + \\
& 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 3.57445883844465M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 0.0137479186094025S_1^2Q_1^{-1} \\
& + 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2 - 0.0137479186094025M_2^{-3.2}S_2^2 + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 3.62945051288226M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 0.0123731267484622S_2^2Q_2^{-1} \\
& + 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3 - 0.0303141605337325M_3^{-3.4}S_3^2 + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 3.62945051288226M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 0.0151227104703427S_3^2Q_3^{-1} \\
& + 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4 - 0.00743487438396486M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 1.97970027975396M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 0.010998334887522S_4^2Q_4^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5 - 0.0116681334821721M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 3.46447548956943M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 0.016497502331283S_5^2Q_5^{-1} \\
& -0.0027495837218805y_1 \leq 1 \\
& 0.199659740332748M_1^{-0.3} + 0.0395365822441085M_1^{2.5} + 0.217451202342597M_2^{-0.2} + \\
& 0.0434902404685193M_2^{2.4} + 0.249080468137884M_3^{-0.4} + 0.0474438986929302M_3^{2.3} + \\
& 0.164472182135491M_4^{0.3} + 0.0316292657952868M_4^{2.8} + 0.183252058701443M_5^{-0.3} + \\
& 0.0355829240196976M_5^{2.6} - 0.00395365822441085y_2 \leq 1 \\
& 0.00266666666666667Q_1 - 0.00266666666666667S_1 + 0.00355555555555556Q_2 - \\
& 0.00355555555555556S_2 + 0.00444444444444444Q_3 - 0.00444444444444444S_3 + \\
& 0.00533333333333333Q_4 - 0.00533333333333333S_4 + 0.00622222222222222Q_5 - \\
& 0.00622222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$:

$$\begin{aligned}
t0 = [0.05 \quad 0.0036 \quad 0.0194 \quad 0.00135 \quad 0.0168 \quad 0.0025 \quad 0.314 \quad 0.014 \quad 0.045 \\
0.0721 \quad 0.023 \quad 0.00064 \quad 0.0000021 \quad 0.000032 \quad 0.000045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.114]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.54: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.46350280341622	Q_5	61.8841877251162
M_2	1.35221828863504	S_1	0.737451065712464
M_3	1.60638799613015	S_2	0.829539760660608
M_4	0.739969025070994	S_3	0.804269566098941
M_5	1.41008717848083	S_4	0.776546112453697
Q_1	53.7008944408897	S_5	0.505922718928083
Q_2	46.4131216294206	y_1	49.9113553291264
Q_3	47.5407723166685	y_2	85.569600525555
Q_4	11.5968667792091		

Tabela 6.55: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = w_2 = 0.5$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	413.602772328126	g_1	0.999999999968102
TC_2	338.499910434237	g_2	0.999999999973247
		g_3	0.950646178130906
		g_4	0.99999999743063
Iterações	44		
Tempo	0.948008454814815		

Problema escalarizado ($p = 2$) com cinco itens e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad (0.4y_1^2 + 0.6y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \text{sujeito à} \quad 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1 - 0.0175303147168143M_1^{-3.6}S_1^2 + \\
& 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 3.57445883844465M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 0.0137479186094025S_1^2Q_1^{-1} \\
& + 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2 - 0.0137479186094025M_2^{-3.2}S_2^2 + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 3.62945051288226M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 0.0123731267484622S_2^2Q_2^{-1} \\
& + 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3 - 0.0303141605337325M_3^{-3.4}S_3^2 + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 3.62945051288226M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 0.0151227104703427S_3^2Q_3^{-1} \\
& + 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4 - 0.00743487438396486M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 1.97970027975396M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 0.010998334887522S_4^2Q_4^{-1} + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5 - 0.0116681334821721M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 3.46447548956943M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 0.016497502331283S_5^2Q_5^{-1} \\
& - 0.0027495837218805y_1 \leq 1 \\
& 0.199659740332748M_1^{-0.3} + 0.0395365822441085M_1^{2.5} + 0.217451202342597M_2^{-0.2} + \\
& 0.0434902404685193M_2^{2.4} + 0.249080468137884M_3^{-0.4} + 0.0474438986929302M_3^{2.3} + \\
& 0.164472182135491M_4^{0.3} + 0.0316292657952868M_4^{2.8} + 0.183252058701443M_5^{-0.3} + \\
& 0.0355829240196976M_5^{2.6} - 0.00395365822441085y_2 \leq 1 \\
& 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + 0.003555555555555556Q_2 - \\
& 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 - 0.004444444444444444S_3 + \\
& 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 + 0.006222222222222222Q_5 - \\
& 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$:

$$\begin{aligned}
t0 = [& 0.019 \quad 0.5 \quad 0.152 \quad 0.194 \quad 0.052130 \quad 0.135 \quad 0.0004 \quad 0.014 \quad 0.042 \\
& 0.0721 \quad 0.00023 \quad 0.064 \quad 0.0000027 \quad 0.00432 \quad 0.0045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.119]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.56: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.42568321650951	Q_4	9.81243815689184
M_2	1.31393783869195	Q_5	57.8691651341609
M_3	1.56484817529182	S_1	0.692045888005311
M_4	0.688948953309046	S_2	0.777196580271697
M_5	1.37547882598106	S_3	0.754793601891549
Q_1	50.2338379081048	S_4	0.736810152464338
Q_2	43.4468838366205	S_5	0.474702677550423
Q_3	44.7013100005738	y_1	61.757476705111
		y_2	79.0383060416746

Tabela 6.57: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	425.448893703496	g_1	0.999999999966411
TC_2	331.96861595076	g_2	0.999999999974842
		g_3	0.884668188712838
		g_4	0.9999999997549906
Iterações	49		
Tempo	0.924466774814815		

Problema escalarizado ($p = 2$) com cinco itens e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad (0.6y_1^2 + 0.4y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \text{sujeito à} \quad 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1 - 0.0175303147168143M_1^{-3.6}S_1^2 + \\
& 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 3.57445883844465M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 0.0137479186094025S_1^2Q_1^{-1} + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2 - 0.0137479186094025M_2^{-3.2}S_2^2 + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 3.62945051288226M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 0.0123731267484622S_2^2Q_2^{-1} + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3 - 0.0303141605337325M_3^{-3.4}S_3^2 + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 3.62945051288226M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 0.0151227104703427S_3^2Q_3^{-1} + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4 - 0.00743487438396486M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 1.97970027975396M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 0.010998334887522S_4^2Q_4^{-1} \\
& + 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5 - 0.0116681334821721M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 3.46447548956943M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 0.016497502331283S_5^2Q_5^{-1} \\
& - 0.0027495837218805y_1 \leq 1 \\
& 0.199659740332748M_1^{-0.3} + 0.0395365822441085M_1^{2.5} + 0.217451202342597M_2^{-0.2} + \\
& 0.0434902404685193M_2^{2.4} + 0.249080468137884M_3^{-0.4} + 0.0474438986929302M_3^{2.3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0.164472182135491M_4^{0.3} + 0.0316292657952868M_4^{2.8} + 0.183252058701443M_5^{-0.3} + \\
&0.0355829240196976M_5^{2.6} - 0.00395365822441085y_2 \leq 1 \\
&0.00266666666666667Q_1 - 0.00266666666666667S_1 + 0.00355555555555556Q_2 - \\
&0.00355555555555556S_2 + 0.00444444444444444Q_3 - 0.00444444444444444S_3 + \\
&0.00533333333333333Q_4 - 0.00533333333333333S_4 + 0.00622222222222222Q_5 - \\
&0.00622222222222222S_5 \leq 1 \\
&11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
&9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
&M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$:

$$\begin{aligned}
t_0 = [&0.05 \quad 0.0036 \quad 0.0194 \quad 0.00135 \quad 0.0168 \quad 0.0025 \quad 0.314 \quad 0.014 \quad 0.045 \\
&0.0721 \quad 0.023 \quad 0.00064 \quad 0.0000021 \quad 0.000032 \quad 0.000045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.114]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.58: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.49939390247064	Q_5	63.8829829209221
M_2	1.38775014936631	S_1	0.774096909819388
M_3	1.64540334979743	S_2	0.872582771190896
M_4	0.785220050060738	S_3	0.844422924875861
M_5	1.434496261473	S_4	0.80949118813668
Q_1	56.856762968826	S_5	0.534543098611874
Q_2	49.0080455342119	y_1	39.9644923329787
Q_3	50.0154694607831	y_2	91.6728919401831
Q_4	13.2954640031382		

Tabela 6.59: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = 2$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	403.655909338011	g_1	0.999999999984688
TC_2	344.60320185199	g_2	0.999999999985602
		g_3	0.999999997826507
		g_4	0.999999998662438
Iterações	42		
Tempo	0.822027444814815		

Problema escalarizado com cinco itens para $p = \infty$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \varphi \\
& \text{sujeito à} \quad \frac{w_1 \gamma_1^2 \alpha_1^{-2\delta_1}}{8TC_1^*} M_1^{-2\beta_1 \delta_1} Q_1 - \frac{\gamma_1^2 \alpha_1^{-2\delta_1}}{4TC_1^*} M_1^{-2\beta_1 \delta_1} S_1^2 + \frac{\gamma_1^2 \alpha_1^{-2\delta_1}}{8TC_1^*} M_1^{-2\beta_1 \delta_1} Q_1^{-1} S_1^2 + \\
& \frac{c_{31} \alpha_1}{TC_1^*} M_1^{\beta_1} Q_1^{-1} + \frac{c_{21}}{2TC_1^*} S_1^2 Q_1^{-1} + \frac{\gamma_2^2 \alpha_2^{-2\delta_2}}{10TC_1^*} M_2^{-2\beta_2 \delta_2} Q_2 - \frac{\gamma_2^2 \alpha_2^{-2\delta_2}}{5TC_1^*} M_2^{-2\beta_2 \delta_2} S_2^2 + \\
& \frac{\gamma_2^2 \alpha_2^{-2\delta_2}}{10TC_1^*} M_2^{-2\beta_2 \delta_2} Q_2^{-1} S_2^2 + \frac{c_{32} \alpha_2}{TC_1^*} M_2^{\beta_2} Q_2^{-1} + \frac{c_{22}}{2TC_1^*} S_2^2 Q_2^{-1} + \frac{\gamma_3^2 \alpha_3^{-2\delta_3}}{5TC_1^*} M_3^{-2\beta_3 \delta_3} Q_3 - \\
& \frac{2\gamma_3^2 \alpha_3^{-2\delta_3}}{5TC_1^*} M_3^{-2\beta_3 \delta_3} S_3^2 + \frac{\gamma_3^2 \alpha_3^{-2\delta_3}}{5TC_1^*} M_3^{-2\beta_3 \delta_3} Q_3^{-1} S_3^2 + \frac{c_{33} \alpha_3}{TC_1^*} M_3^{\beta_3} Q_3^{-1} + \frac{c_{23}}{2TC_1^*} S_3^2 Q_3^{-1} + \\
& \frac{\gamma_4^2 \alpha_4^{-2\delta_4}}{20TC_1^*} M_4^{-2\beta_4 \delta_4} Q_4 - \frac{\gamma_4^2 \alpha_4^{-2\delta_4}}{10TC_1^*} M_4^{-2\beta_4 \delta_4} S_4^2 + \frac{\gamma_4^2 \alpha_4^{-2\delta_4}}{20TC_1^*} M_4^{-2\beta_4 \delta_4} Q_4^{-1} S_4^2 \\
& + \frac{c_{34} \alpha_4}{TC_1^*} M_4^{\beta_4} Q_4^{-1} + \frac{c_{24}}{2TC_1^*} S_4^2 Q_4^{-1} + \frac{2\gamma_5^2 \alpha_5^{-2\delta_5}}{25TC_1^*} M_5^{-2\beta_5 \delta_5} Q_5 - \frac{4\gamma_5^2 \alpha_5^{-2\delta_5}}{25TC_1^*} M_5^{-2\beta_5 \delta_5} S_5^2 + \\
& \frac{2\gamma_5^2 \alpha_5^{-2\delta_5}}{25TC_1^*} M_5^{-2\beta_5 \delta_5} Q_5^{-1} S_5^2 + \frac{c_{35} \alpha_5}{TC_1^*} M_5^{\beta_5} Q_5^{-1} + \frac{c_{25}}{2TC_1^*} S_5^2 Q_5^{-1} - \frac{\varphi}{w_1 TC_1^*} \leq 1 \\
& \frac{\gamma_1 \alpha_1^{1-\delta_1}}{TC_2^*} M_1^{\beta_1(1-\delta_1)} + \frac{\alpha_1}{TC_2^*} M_1^{1+\beta_1} + \frac{\gamma_2 \alpha_2^{1-\delta_2}}{TC_2^*} M_2^{\beta_2(1-\delta_2)} + \frac{\alpha_2}{TC_2^*} M_2^{1+\beta_2} + \\
& \frac{\gamma_3 \alpha_3^{1-\delta_3}}{TC_2^*} M_3^{\beta_3(1-\delta_3)} + \frac{\alpha_3}{TC_2^*} M_3^{1+\beta_3} + \frac{\gamma_4 \alpha_4^{1-\delta_4}}{TC_2^*} M_4^{\beta_4(1-\delta_4)} + \frac{\alpha_4}{TC_2^*} M_4^{1+\beta_4} + \\
& \frac{\gamma_5 \alpha_5^{1-\delta_5}}{TC_2^*} M_5^{\beta_5(1-\delta_5)} + \frac{\alpha_5}{TC_2^*} M_5^{1+\beta_5} - \frac{\varphi}{w_2 TC_2^*} \leq 1 \\
& \sum_{i=1}^5 \left(\frac{a_i}{A} Q_i - \frac{a_i}{A} S_i \right) \leq 1 \\
& \sum_{i=1}^5 \left(\frac{c_{2i}}{2\hat{C}_2} Q_i^{-1} S_i^2 \right) \leq 1 \\
& \varphi, M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Problema escalarizado ($p = \infty$) com cinco itens e $w_1 = w_2 = 0.5$

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \quad \varphi \\
& \text{sujeito à} \quad 0.00876515735840717 M_1^{-3.6} Q_1 - 0.0175303147168143 M_1^{-3.6} S_1^2 + \\
& 0.00876515735840717 M_1^{-3.6} Q_1^{-1} S_1^2 + 3.57445883844465 M_1^{1.5} Q_1^{-1} + 0.0137479186094025 S_1^2 Q_1^{-1} \\
& + 0.00687395930470124 M_2^{-3.2} Q_2 - 0.0137479186094025 M_2^{-3.2} S_2^2 + \\
& 0.00687395930470124 M_2^{-3.2} Q_2^{-1} S_2^2 + 3.62945051288226 M_2^{1.4} Q_2^{-1} + 0.0123731267484622 S_2^2 Q_2^{-1} \\
& + 0.0151570802668662 M_3^{-3.4} Q_3 - 0.0303141605337325 M_3^{-3.4} S_3^2 + \\
& 0.0151570802668662 M_3^{-3.4} Q_3^{-1} S_3^2 + 3.62945051288226 M_3^{1.3} Q_3^{-1} + 0.0151227104703427 S_3^2 Q_3^{-1} \\
& + 0.00371743719198243 M_4^{-3} Q_4 - 0.00743487438396486 M_4^{-3} S_4^2 + \\
& 0.00371743719198243 M_4^{-3} Q_4^{-1} S_4^2 + 1.97970027975396 M_4^{1.8} Q_4^{-1} + 0.010998334887522 S_4^2 Q_4^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5 - 0.0116681334821721M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 3.46447548956943M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 0.016497502331283S_5^2Q_5^{-1} \\
& -0.00549916744376099\varphi \leq 1 \\
& 0.199659740332748M_1^{-0.3} + 0.0395365822441085M_1^{2.5} + 0.217451202342597M_2^{-0.2} + \\
& 0.0434902404685193M_2^{2.4} + 0.249080468137884M_3^{-0.4} + 0.0474438986929302M_3^{2.3} + \\
& 0.164472182135491M_4^{0.3} + 0.0316292657952868M_4^{2.8} + 0.183252058701443M_5^{-0.3} + \\
& 0.0355829240196976M_5^{2.6} - 0.0079073164488217\varphi \leq 1 \\
& 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + 0.003555555555555556Q_2 - \\
& 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 - 0.004444444444444444S_3 + \\
& 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 + 0.006222222222222222Q_5 - \\
& 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$:

$$\begin{aligned}
t0 = [0.19 \quad 0.0217 \quad 0.194 \quad 0.052130 \quad 0.0135 \quad 0.04 \quad 0.000045 \quad 0.0000721 \\
0.000023 \quad 0.0000064 \quad 0.0000021 \quad 0.0000032 \quad 0.000045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.0000139]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.60: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.39155499501671	Q_4	8.2212689911988
M_2	1.27945551536674	Q_5	54.3820867593513
M_3	1.52756144861624	S_1	0.645755563333909
M_4	0.638571101610645	S_2	0.724143889376066
M_5	1.34419386580813	S_3	0.704261430778405
Q_1	47.221657084778	S_4	0.697743476900919
Q_2	40.8655439343053	S_5	0.44288191892423
Q_3	42.2338918006104	φ	36.6625317711042

Tabela 6.61: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = w_2 = 0.5$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	437.016480500218	g_1	0.999999999855394
TC_2	326.255373433036	g_2	0.999999999902657
		g_3	0.827250705388432
		g_4	0.9999999990478456
Iterações	50		
Tempo	0.93073072037037		

Problema escalarizado ($p = \infty$) com cinco itens e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Minimize φ

$$\begin{aligned}
& \text{sujeito à } 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1 - 0.0175303147168143M_1^{-3.6}S_1^2 + \\
& 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 3.57445883844465M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 0.0137479186094025S_1^2Q_1^{-1} + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2 - 0.0137479186094025M_2^{-3.2}S_2^2 + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 3.62945051288226M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 0.0123731267484622S_2^2Q_2^{-1} + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3 - 0.0303141605337325M_3^{-3.4}S_3^2 + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 3.62945051288226M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 0.0151227104703427S_3^2Q_3^{-1} + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4 - 0.00743487438396486M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 1.97970027975396M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 0.010998334887522S_4^2Q_4^{-1} + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5 - 0.0116681334821721M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 3.46447548956943M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 0.016497502331283S_5^2Q_5^{-1} \\
& - 0.00687395930470124\varphi \leq 1 \\
& 0.199659740332748M_1^{-0.3} + 0.0395365822441085M_1^{2.5} + 0.217451202342597M_2^{-0.2} + \\
& 0.0434902404685193M_2^{2.4} + 0.249080468137884M_3^{-0.4} + 0.0474438986929302M_3^{2.3} + \\
& 0.164472182135491M_4^{0.3} + 0.0316292657952868M_4^{2.8} + 0.183252058701443M_5^{-0.3} + \\
& 0.0355829240196976M_5^{2.6} - 0.00658943037401808\varphi \leq 1 \\
& 0.002666666666666667Q_1 - 0.002666666666666667S_1 + 0.003555555555555556Q_2 - \\
& 0.003555555555555556S_2 + 0.004444444444444444Q_3 - 0.004444444444444444S_3 + \\
& 0.005333333333333333Q_4 - 0.005333333333333333S_4 + 0.006222222222222222Q_5 - \\
& 0.006222222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned}$$

(6.39)

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$:

$$\begin{aligned}
t0 = & [0.19 \quad 0.0217 \quad 0.194 \quad 0.052130 \quad 0.0135 \quad 0.04 \quad 0.000045 \quad 0.0000721 \\
& 0.000023 \quad 0.0000064 \quad 0.0000021 \quad 0.0000032 \quad 0.000045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.0000139]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.62: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.3338788792758	Q_4	5.46409096477852
M_2	1.22137345061511	Q_5	48.7663928684567
M_3	1.46504343403825	S_1	0.543906897353768
M_4	0.535181500109638	S_2	0.608422385110524
M_5	1.29113195385385	S_3	0.592950062726206
Q_1	42.3718629608272	S_4	0.61519207618683
Q_2	36.7027226549187	S_5	0.372911564564764
Q_3	38.2607039384307	φ	38.2857145465387

Tabela 6.63: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	459.405703314156	g_1	0.99999999982735
TC_2	316.739834135438	g_2	0.999999999904155
		g_3	0.734264534317306
		g_4	0.9999999990980109
Iterações	64		
Tempo	0.924031034674331		

Problema escalarizado ($p = \infty$) com cinco itens e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Minimize φ

$$\begin{aligned}
\text{sujeito à } & 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1 - 0.0175303147168143M_1^{-3.6}S_1^2 + \\
& 0.00876515735840717M_1^{-3.6}Q_1^{-1}S_1^2 + 3.57445883844465M_1^{1.5}Q_1^{-1} + 0.0137479186094025S_1^2Q_1^{-1} + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2 - 0.0137479186094025M_2^{-3.2}S_2^2 + \\
& 0.00687395930470124M_2^{-3.2}Q_2^{-1}S_2^2 + 3.62945051288226M_2^{1.4}Q_2^{-1} + 0.0123731267484622S_2^2Q_2^{-1} + \\
& 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3 - 0.0303141605337325M_3^{-3.4}S_3^2 \\
& + 0.0151570802668662M_3^{-3.4}Q_3^{-1}S_3^2 + 3.62945051288226M_3^{1.3}Q_3^{-1} + 0.0151227104703427S_3^2Q_3^{-1} + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4 - 0.00743487438396486M_4^{-3}S_4^2 + \\
& 0.00371743719198243M_4^{-3}Q_4^{-1}S_4^2 + 1.97970027975396M_4^{1.8}Q_4^{-1} + 0.010998334887522S_4^2Q_4^{-1} + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5 - 0.0116681334821721M_5^{-3.8}S_5^2 + \\
& 0.00583406674108604M_5^{-3.8}Q_5^{-1}S_5^2 + 3.46447548956943M_5^{1.6}Q_5^{-1} + 0.016497502331283S_5^2Q_5^{-1} \\
& - 0.00458263953646749\varphi \leq 1 \\
& 0.199659740332748M_1^{-0.3} + 0.0395365822441085M_1^{2.5} + 0.217451202342597M_2^{-0.2} + \\
& 0.0434902404685193M_2^{2.4} + 0.249080468137884M_3^{-0.4} + 0.0474438986929302M_3^{2.3} + \\
& 0.164472182135491M_4^{0.3} + 0.0316292657952868M_4^{2.8} + 0.183252058701443M_5^{-0.3} + \\
& 0.0355829240196976M_5^{2.6} - 0.00988414556102712\varphi \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.00266666666666667Q_1 - 0.00266666666666667S_1 + 0.00355555555555556Q_2 - \\
& 0.00355555555555556S_2 + 0.00444444444444444Q_3 - 0.00444444444444444S_3 + \\
& 0.00533333333333333Q_4 - 0.00533333333333333S_4 + 0.00622222222222222Q_5 - \\
& 0.00622222222222222S_5 \leq 1 \\
& 11.7647058823529Q_1^{-1}S_1^2 + 10.5882352941176Q_2^{-1}S_2^2 + 12.9411764705882Q_3^{-1}S_3^2 + \\
& 9.41176470588235Q_4^{-1}S_4^2 + 14.1176470588235Q_5^{-1}S_5^2 \leq 1 \\
& M_i, Q_i, S_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, 5.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Ponto inicial para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$:

$$\begin{aligned}
t0 = & [0.19 \quad 0.0217 \quad 0.194 \quad 0.052130 \quad 0.0135 \quad 0.04 \quad 0.000045 \quad 0.0000721 \\
& 0.000023 \quad 0.0000064 \quad 0.0000021 \quad 0.0000032 \quad 0.000045 \quad 0.00069 \quad 0.000384 \quad 0.0000139]';
\end{aligned}$$

Tabela 6.64: Solução por condensação para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Variável	Valor	Variável	Valor
M_1	1.44663013898358	Q_4	10.796693603531
M_2	1.33513186826773	Q_5	60.0730636344043
M_3	1.5878284289939	S_1	0.717794626020507
M_4	0.717712415810471	S_2	0.806842022259451
M_5	1.39465399909546	S_3	0.782864208475609
Q_1	52.137147762286	S_4	0.759154925280453
Q_2	45.0759195622688	S_5	0.492406452252861
Q_3	46.260178998665	φ	33.0505663162651

Tabela 6.65: Valores das funções objetivo e viabilidade das restrições por condensação com Gpposy para o problema escalarizado com cinco itens quando $p = \infty$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$

Func obj	Valor CondensGpposy	Restrição	Valor CondensGpposy
TC_1	418.775694154768	g_1	0.999999999863599
TC_2	335.556725678583	g_2	0.99999999989116
		g_3	0.920898467434973
		g_4	0.999999989473139
Iterações	45		
Tempo	0.833820791635494		

Tabela 6.66: Valor mínimo encontrado para TC_1 e TC_2 para o problema escalarizado de planejamento de estoques e marketing multi-item.

Preferência	TC ₁	TC ₂
$w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$	$p = 1$ (386.556556324263)	$p = \infty$ (326.255373433036)
$w_1 = 0.4, w_2 = 0.6$	$p = 1$ (402.660198808596)	$p = \infty$ (316.739834135438)
$w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$	$p = 1$ (376.880621666535)	$p = \infty$ (335.556725678583)

Observou-se que os valores obtidos na tabela (6.66) para as funções objetivo TC_1 e TC_2 mostram que considerando os três tipos de preferências, ou seja, $w_1 = w_2 = 0.5$, $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.6$ e $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$, os menores valores ocorreram quando $p = 1$ e $p = \infty$, respectivamente.

Nesse capítulo estão detalhados os resultados obtidos com o algoritmo da Condensação

usando Gpposy para duas aplicações particulares dos problemas escalarizados pelo método das Métricas Ponderadas generalizados no capítulo 5, tanto no caso de um único item quanto no caso multi-item. Tais aplicações estão agrupadas segundo o tipo de problema: (1) nove problemas de planejamento de estoques e marketing com um único item; (2) nove problemas de planejamento de estoques e marketing multi-item. Em ambos os grupos de nove problemas foi feita uma subdivisão de problemas segundo a métrica ponderada aplicada $p = 1, 2, \infty$ e o par de pesos utilizados $w_1, w_2 \geq 0$ tais que $w_1 + w_2 = 1$.

Capítulo 7

Considerações Finais

O objetivo de solucionar os problemas bi-objetivo, tanto o caso do problema de planejamento de estoques e marketing para um único item, cuja fonte foi o trabalho de Islam (2008), quanto o problema de planejamento de estoques e marketing multi-item, foi alcançada.

Nesse trabalho foram desenvolvidos dezoito problemas de Programação Geométrica signomiais, dos quais os nove primeiros foram dedicados ao caso de um único item e os nove restantes para o caso multi-item. Tanto no caso de um único item quanto no caso multi-item foi feita uma combinação do tipo de métrica ponderada utilizada ($p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$) com a escolha dos pares de pesos associados a função objetivo de custos de estoques totais e de custos totais adicionais: **(1)** $w_1 = w_2 = 0.5$; **(2)** $w_1 = 0.4$ e $w_2 = 0.6$; **(3)** $w_1 = 0.6$ e $w_2 = 0.4$.

Obteve-se sucesso na viabilidade de solução bem como melhores resultados para os valores das funções objetivo de custos de estoques totais (TC_1) e de custos totais adicionais (TC_2) nos nove problemas de planejamento de estoques e marketing para caso de um único item quando comparados com a literatura (ISLAM, 2008), que serviu de base para a pesquisa desenvolvida. Para o problema de planejamento de estoques e marketing multi-item as soluções ótimas obtidas também foram viáveis, mas não foi possível estabelecer um comparativo com a literatura (ISLAM, 2008) já que a mesma não tratou do problema para o caso multi-item.

A escolha pelo método das Métricas Ponderadas para a escalarização dos problemas de otimização multiobjetivo, responsável por transformar o problema originalmente multiobjetivo de Programação Geométrica signomial em problemas com uma única função objetivo e que ainda pertenciam a classe de problemas de Programação Geométrica signomial, foi determinada pela literatura base do presente trabalho (ISLAM, 2008).

Como a técnica clássica de obtenção de solução para problemas de Programação Geométrica signomial é a Condensação, foi realizado um estudo detalhado dessa técnica no capítulo 4 para

que um algoritmo para obtenção de soluções de mínimo locais pudesse ser desenvolvido juntamente com o Gpposy, pertencente a ferramenta GGPLAB, e testado por meio de problemas clássicos da literatura (RIJCKAERT; MARTENS, 1978) e (BEIGHTLER; PHILLIPS, 1976) de modo a obter as soluções dos problemas escalarizados de planejamento de estoques e marketing com um único item e multi-item apresentadas no capítulo 6.

Todos os objetivos específicos foram cumpridos. No capítulo 3 estão descritos e resolvidos os modelos de estoques básicos baseados na literatura (MUCKSTADT; SAPRA, 2010), (AXSÄTER, 2006), (LIEBERMAN; HILLIER, 2010), (TAHA, 2008), (MURTHY, 2007) e (EISELT; SANDBLOM, 2010). A teoria de Otimização multiobjetivo, necessária para transformar o problema multiobjetivo em um problema escalarizado foi tratada no capítulo 4, com a apresentação e demonstração dos resultados e definições de métodos à posteriori com estabelece a literatura (MIETTINEN, 1999), (CHANKONG; HAIMES, 2008), (EHRGOTT, 2005), (COHON, 1978) e (JAHN, 2011). Já a formulação do problema multiobjetivo não-linear de planejamento de estoques e marketing proposto por Islam (2008) para um único item e a generalização direta do caso de um único item para o caso multi-item foi desenvolvida no capítulo 5. O exemplo numérico considerado para $n = 5$ itens, do qual resultou nove problemas, como foi descrito no capítulo 6, foram resolvidos por meio do algoritmo da Condensação usando Gpposy descrito no capítulo 4.

O algoritmo para a técnica de Condensação com Gpposy se mostrou muito eficaz na busca de soluções para problemas de planejamento de estoques e marketing pois mesmo quando a solução inicial dada para o problema signomial resultante do método das Métricas Ponderadas foi inviável, o algoritmo da Condensação com Gpposy gerou na iteração seguinte um ponto viável para o mesmo problema que a partir do qual se obteve a convergência do algoritmo e a solução de mínimo local ótima e viável para o problema executado, mesmo com o aumento de restrições, variáveis e termos, como no caso dos problemas de planejamento de estoques e marketing para $n = 5$ itens.

Como em problemas de programação geométrica signomiais só é possível obter soluções de mínimo locais e como os pesos considerados foram positivos, isto é, $w_i = 0.5, 0.4$ e 0.6 para $i = 1, 2$ tal que $w_1 + w_2 = 1$, o Teorema (11) juntamente com a afirmação referente as soluções de mínimo locais descrito no capítulo 4 para o método das Métricas Ponderadas garante que as soluções obtidas com o algoritmo da Condensação utilizando Gpposy são soluções eficientes locais para problema bi-objetivo originalmente proposto, tanto no caso de um único item quando no caso de n itens. Outras soluções também podem ser obtidas desde que se considere valores distintos para $w_1, w_2 > 0$ tal que $w_1 + w_2 = 1$.

A contribuição do presente trabalho foi a generalização do problema de planejamento de estoques e marketing de um único item proposto por Islam(2008) para o caso multi-item, a escolha da função $F(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ utilizada na técnica da Condensação, de modo a excluir a necessidade de testar se o sinal do valor da função objetivo no ponto de referência era positivo ou negativo e a utilização do Gpposy, pertencente a ferramenta GGPLAB que é uma ferramenta desenvolvida para resolver problemas de Programação Geométrica posinomiais. (MUTAPCIC; KOH; KIM; VANDENBERGHE; BOYD, 2006)

Como proposta de trabalhos futuros na linha de problemas multiobjetivos de planejamento de estoques e marketing pertencentes a classe de Programação Geométrica destacam-se a mudança do método das Métricas Ponderadas utilizado por um outro método à posteriori de escalarização como o método da Ponderação, o método das ε - Restrições e o método Híbrido para posterior comparativo com os resultados apresentados no presente trabalho. Além disso, uma outra proposta refere-se a tratar os pesos $w_1, w_2 > 0$ como variáveis, incorporando ao conjunto de restrições dos problemas escalarizados pelo método das Métricas Ponderadas para $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$ duas novas restrições que de modo que a restrição de igualdade $w_1 + w_2 = 1$ se torne duas restrições do tipo ≤ 1 como determina a forma padrão dos problemas de Programação Geométrica. Como o modelo multi-item tratado no presente trabalho foi uma generalização direta do modelo obtido por Islam (2008) uma proposta futura é considerar outras restrições para o modelo apresentado, como no modelo de Lee (1994) que se refere ao caso multi-item e que tem, além da restrição espacial uma outra restrição relacionada ao orçamento para investimentos.

Uma outra possibilidade de expansão para o modelo apresentado está em considerar a demanda probabilística, cuja distribuição de probabilidade é conhecida, como é o caso do modelo tratado por Abou-El-Ata, Fergany e El-Wakeel (2003) que tem restrições para o custo do pedido esperado e para o custo de manutenção esperado para r itens. Com Kotb (2011) é possível considerar a restrição para o custo de preparação, mesmo que o modelo multi-item dele não considere faltas planejadas de produto, mas no modelo considerado no presente trabalho para um único item devido a Islam (2008) existe o custo de preparação associado ao modelo. Também Kotb e Fergany (2011) consideraram uma limitação para o número total de pedidos e uma outra para o custo total de manutenção, que também podem ser pensadas no presente trabalho como proposta futura. Como em Abou-El-Ata e Kotb (1997) foi desenvolvido um modelo multi-item que não considera faltas planejadas de produto para a demanda determinística onde uma restrição relaciona-se ao número total de pedidos anuais e uma outra ao custo total de manutenção, é possível pensar em uma adaptação futura de tais restrições para o modelo

descrito no presente trabalho. Por fim, o modelo desenvolvido por Mandal, Roy e Maiti (2006) também apresenta uma nova hipótese e restrição relacionadas à taxa constante de deterioração de produtos que podem ser consideradas em um estudo futuro do modelo multi-item do presente trabalho.

Referências Bibliográficas

ABOU-EL-ATA, M. O.; KOTB, K. A. M. **Multi-item EOQ inventory model with varying holding cost under two restrictions**: a geometric programming approach. *Production Planning and Control*. v. 8, n. 6, p. 608-611, 1997.

ABOU-EL-ATA, M. O.; FERGANY, H. A.; EL-WAKEEL, M. F. **Probabilistic multi-item inventory model with varying order cost under two restrictions**: A geometric programming approach. *International Journal of Production Economics*. Egito, v. 83, n. 3, p. 223-231, 2003.

AXSÄTER, S. **Inventory Control**. 2 ed. United States: Springer's International Series, 2006, 341p. Operations Research and Management Science.

BARICHARD, V.; EHRGOTT, M.; GANDIBLEUX, X.; T'KINDT, V. **Multiobjective Programming and Goal Programming**: Theoretical Results and Practical Applications. Berlin: Springer Verlag, 2009, 291 p.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. **Non linear programming**: theory and algorithms. 2 ed. United States: John Wiley & Sons, Inc, 1993, 638 p.

BAYATI, M. F.; MAKUI, A. **A multiobjective geometric programming approach for electronic product pricing problem**. *Management Science Letters*. v. 1, n. 3, p. 371-378, 2011.

BLANC, H. **Advanced Inventory Management**: Models and Algorithms. *Advanced Quantitative Logistics*, 7 de Jan. de 2011. 104 p. Notas de Aula.

BRANKE, J.; DEB, K.; MIETTINEN, K. M.; SLOWINSKI, R. **Multiobjective Optimization**: Interactive and Evolutionary Approachs. Berlin: Springer Verlag, 2008, 481 p.

BEIGHTLER, C. S.; PHILLIPS, D. T. **Applied Geometric Programming**. John Wiley e Sons: United States, 1976, 606 p.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization**. Reino Unido: Cambridge University Press. 2004, p. 730

BOYD, S. et al . **A tutorial on geometric programming**. *Optimization and Engineering Journal*, v. 8, n. 1, pp 67 - 127, marc. 2007.

BOYD, S.; KIM, S.-J.; PATIL, D. D.; HOROWITZ, M. A. **Digital Circuit Optimization**

via Geometric Programming. Operations Research, v. 53, n. 6, p. 899 - 932, 2005.

FERREIRA, P. A. V. **Programação Matemática Multiobjetivo:** desenvolvimento de um método iterativo baseado em projeção. 1986. 164 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)- Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CHANKONG, V.; HAIMES, Y. Y. **Multiobjective Decision Making:** Theory and Methodology. New York: Dover Publications, 2008, 406 p.

CHENG, T. C. E. **An economic order quantity model with demand-dependent unit cost.** European Journal of Operational Research. Canadá, v. 40, n. 2, p. 252-256, 1989.

CHENG, T. C. E. **An economic production quantity model with flexibility and reliability considerations.** European Journal of Operational Research, Canadá, v. 39, n. 2, p. 174-179, 1989.

COHON, J. L. **Multiobjective Programming and Planning.** New York: Academic Press, 1978, 348 p.

CORRÊA, H. L.; GIANESI, I. G. N.; CAON, M. **Planejamento, programação e controle da produção:** MRP II/ERP: conceitos, uso e implantação: base para SAP, Oracle Applications e outros softwares integrados de gestão. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2007, 434 p.

CRUZ, J. M.; DIABY, M.; NSAKANDA, A. L. **A geometric programming model of the lot-scheduling problem with investments in setup reductions and process improvements.** American Conference on Applied Mathematics. Massachusetts, p. 72-78, March 24-26, 2008.

DEMBO, R. S. **A Set Geometric Programming Test Problems and their Solutions.** Mathematical Programming. Canadá, v. 10, p. 192 - 213, 1976.

DUFFIN, R. J.; PETERSON, E. L.; ZENER, C. M. **Geometric Programming.** New York: Wiley, 1967, 290 p.

EISELT, H. A.; SANDBLOM, C. L. **Operations Research:** A Model-Based Approach. New York: Springer, 2010, 453 p.

EHRGOTT, M. **Multicriteria Optimization.** 2 ed. Berlin: Springer, 2005, 328 p.

ESMAEILI, M.; ZEEPHONGSEKUL, P.; ARYANEZHAD, M. B. **Joint Pricing and Lot Sizing Models with discount:** A Geometric Programming Approach. ANZIAM Journal, v. 49, p. C139 - C154, 2007.

FATHIAN, M.; SADJADI, S. J.; SAJADI, S. **Optimal pricing model for electronic products.** Computers and Industrial Engineering, v. 56, n. 1, p. 255-259, fev. 2009.

FERREIRA, P. A. V. **Otimização Multiobjetivo:** teoria e aplicações. 1999. 170 p. Tese (Livre docência em Pesquisa Operacional)- Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
Disponível em: www.dt.fee.unicamp.br/valente

Acessado em: 17 de março de 2011

FREIRE, G. **Estudo Comparativo de Modelos de Estoques num Ambiente com Previsibilidade Variável de Demanda**. 2007. 105 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)- Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G; ZIPKIN, P. H. **Logistics of production and inventory**. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., v. 4, 1993, 747 p. Handbook in Operations Research and Management Science.

ISLAM, S.; ROY, T. K. **Modified Geometric Programming Problem and Its Applications**. Journal of Applied Mathematics and Computing, Korea, 2005, v.17, n.1-2, p. 121-144.

ISLAM, S. **Multi-objective marketing planning inventory model: A geometric programming approach**. Applied Mathematics and Computation. [S.L.], v. 205, n.1, p. 238-246, nov. 2008.

JAHN, J. **Vector Optimization: Theory, applications and extensions**. 2 ed. Berlim: Springer, 2011, 498p.

JOSHI, S.; BOYD, S. DUTTON, R. W. **Optimal Doping Profiles via Geometric Programming**. IEEE Transactions on Electron Devices, v. 52, n. 12, p. 2660 - 2675, 2005.

JUNG, H; KLEIN, C. M. **Optimal inventory policies under decreasing cost functions via geometric programming**. European Journal of Operational Research. n. 132, p 628-642, 2001.

JUNG, H; KLEIN, C. M. **Optimal inventory policies for an economic order quantity model with decreasing cost functions**. European Journal of Operational Research. n. 165, p 108-126, 2005.

JUNG, H; KLEIN, C. M. **Optimal inventory policies for profit maximizing EOQ models under various cost functions**. Production, Manufacturing and Logistics, v. 174, p. 689 - 705, 2006.

LEE, W.J. **Optimal order quantities and prices with storage space and inventory investment limitations**. Computers and Industrial Engineering. Grã Bretanha, v. 26, n. 3, p. 481-488, 1994.

LEE, W. J. **Determining Order Quantity and Selling Price by Geometric Programming: Optimal Solution, Bounds, and Sensitivity**. Decision Sciences, v. 24, ed. 1, p. 76-87, 1993.

Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com>.

Acessado em: 27 de setembro de 2011.

LEUNG, K. N. F. **A generalized geometric-programming solution to An economic production quantity model with flexibility and reliability considerations**. European Journal of Operational Research. Hong Kong, v. 176, p. 240-251, 2007.

LIEBERMAN, G. J.; HILLIER, F. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 8 ed. Porto

Alegre: AMGH, 2010, 852 p.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002, v. 1, 344 p. LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004, v.2, 212 p.

LIMA JUNIOR, E.F. **Uma estratégia contínua para Solução de Problemas de Localização**. 2006. 139 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. New York: Springer, ed. 3, 2008, 551 p.

KIM, D.; LEE, W. J. **Optimal joint pricing and lot sizing with fixed and variable capacity**. European Journal of Operational Research, v. 109, p. 212-227, 1998.

KOH, K.; KIM, S. **Gpposy: A Matlab Solver for Geometric Programs in Posynomial Form**. 2006, 5 p.

Disponível em: <http://www.stanford.edu/boyd/ggplab/>.

Acessado em: 16 de agosto de 2011.

KORTANECK, K. O.; XU, X.; YE Y. **An infeasible interior-point algorithm for solving primal and dual geometric programs**. Mathematical Programming.Iowa, n.76, p. 155-181, 1996.

KOTB, K. A. M. **Statistical quality control for constrained multi-item inventory lot-size model with increasing varying holding cost via geometric programming**. International Journal of Mathematical Archive (IJMA). Arábia Saudita, n. 2, v. 4, p. 409 414, 2011.

KOTB, K.A.M.; FERGANY, H. A. **Multi-Item EOQ Model with Varying Holding Cost: A Geometric Programming Approach**. International Mathematical Forum. Saudi Arabia, v.6, n.23, p.1135-1144, 2011.

KOTB, K.A.M.; FERGANY, H. A. **Multi-Item EOQ Model with Both Demand-Dependent Unit Cost and Varying Leading Time via Geometric Programming**. Applied Mathematics. Saudi Arabia, v. 2, p. 551-555, 2011.

KOTB, K. A.; GENEDI, H. M.; ZAKI, S. A. **Quality Control for Probabilistic Single-Item EOQ Model with Zero Lead Time Under Two Restrictions: A Geometric Programming Approach**. International Journal of Mathematical Archive. Arábia Saudita, v. 2, n. 3, p. 335-338, 2011.

MANDAL, N. K.; ROY, T. K.; MAITI, M. **Multi-objective fuzzy inventory model with three constraints: A geometric programming approach**. Fuzzy Sets and Systems, v. 150, p. 87-106, 2005.

MANDAL, N. K.; ROY, T. K.; MAITI, M. **Multi-item Fuzzy Inventory Problem with Space Constraint via Geometric Programming Method**. Yugoslav Journal of Operations Research, v. 16, n. 1, p. 55-66, 2006.

MANDAL, N. K.; ROY, T. K.; MAITI, M. **Inventory model of deteriorated items with a constraint**: A geometric programming approach . European Journal of Operational Research. India, v. 173, n. 1, p. 199-210, 2006.

MANDAL, N. K.; ROY, T. K. **Multi-item imperfect production lot size model with hybrid number cost parameters**. Applied Mathematics and Computation, v. 182, p. 1219-1230, 2006.

MANGASARIAN, O. L. **Nonlinear Programming**. Philadelphia: Siam, p. 239, 1994.

MIETTINEN, K. M. **Nonlinear Multiobjective Optimization**. United States: Kluwer Academic Publishers, 1999, 162 p.

MIGUEL, P. A. C.; et al. **Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MOREIRA, D. A. **Administração da Produção e Operações**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. 619 p.

MUCKSTADT, J. A.; SAPRA, A. **Principles of Inventory Management**: When You Are Down to Four, Order More. New York: Springer, 2010, 352 p. International Series in Operations Research and Financial Engineering.

MÜLLER, M. **Essentials of Inventory Management**. New York: AMACOM, 2003, 255 p.

MUTAPCIC, A.; KOH, K.; KIM, S.; VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. **GGPLAB**: A Simple Matlab Toolbox for Geometric Programming. Versão 1.00, [S. I.]: General Public License, 22 mai. 2006.

Disponível em: <http://www.stanford.edu/boyd/ggplab/>.

Acessado em: 16 de agosto de 2011.

MURTHY, P. R. **Operations Research**. New Delhi: New Age International (P) Limited, Publishers, ed. 2, 2007, 717 p.

NAHMIAS S. **Perishable Inventory Systems**. New York: Springer, 2011, v. 160. International Series in Operations Research e Management Science.

NASCIMENTO, R. Q., ANDRADE, M. G. **Otimização de um Sistema Hidrotérmico Via Programação Geométrica**. XXXIII SBPO Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional: Campos do Jordão, Anais do XXXIII SBPO, p. 530-533, 2001.

NEZAMI, F. G.; ARYANEZHAD, M. B.; SADJADI, S. J. **Determining Optimal Demand Rate and Production Decisions**: A Geometric Programming Approach. World Academy of Science, Engineering and Technology. Teerã, v. 49, p. 562 - 567, 2009.

OLIVEIRA, R. M. **Algoritmos de Busca Global para Problemas de Otimização Geométricos e Multiplicativos**. 2005. 103 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PANDA, D.; KAR, S.; MAITI, M. **Multi-item EOQ model with hybrid cost parameters under fuzzy/fuzzy-stochastic resource constraints**: A geometric programming approach. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 56, p. 2970-2985, 2008.

PANDA, D.; MAITI, M. **Multi-item inventory models with price dependent demand under flexibility and reability consideration and imprecise space constraint**: A geometric programming approach. *Mathematical and Computer Modelling*, India, v. 49, p. 1733-1749, 2009.

PETERSON, E. L. **The Origins of Geometric Programming**. *Annals of Operations Research*, Holanda, 2001, n. 105, p.15 - 19 .

RIJCKAERT, M. J.; MARTENS, X. M. **Comparison of Generalized Geometric Programming Algorithms**. *Journal of Optimization Theory and Applications*. n. 2, v. 16, p. 205 - 242, 1978.

ROACH, B. **Origin of the Economic Order Quantity formula; transcription or transformation?**. *Management Decision*. Kansas, v. 43, n.9, pp. 1262-1268, 2005. Emerald Group Publishing.

ROY, T. K.; MAITI, M. **A fuzzy EOQ model with demand-dependent unit cost under limited storage capacity**. *European Journal of Operational Research*, v. 99, p. 425-432, 1997.

SAFAEI, N.; SADJADI, S.J.; BABAKHANI, M. **An efficient genetic algorithm for determining the optimal price discrimination**. *Applied Mathematics and Computation*, Teerã, 2006, v. 181, p. 1693-1702.

SAMPAIO, P. R. **Teoria, Métodos e Aplicações de Otimização Multiobjetivo**. 2011. 95 p. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, J. P. O. **Inrodução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária), 2007, 198 p.

SADJADI, S. J. ; OROUJEE, M. ; ARYANEZHAD; M. B. **Optimal Production and Marketing Planning**. *Computational Optimization and Applications*. Teerã, n. 30, p. 195 - 203, 2005.

SADJADI, S. J.; ARABZADEH, Sh. **A multi-objective geometric programming model for optimal production and marketing planning**. *Journal of Industrial Engineering International*. Teerã, v. 4, n. 7, p 33-37, 2008.

SADJADI, S. J.; GHAZANFARI, M.; YOUSEFLI, A. **Fuzzy pricing and marketing planning model**: A possibilistic geometric programming approach. *Expert Systems with Applications*. v.37, p. 3392-3397, 2010.

SADJADI, S. J.; ARYANEZHAD.M.; JABBARZADEH, A. **Optimal marketing and production planning with reliability consideration**. *African Journal of Business Management*, v. 4, n. 17, p. 3632-3640, Dec 2010.

SADJADI, S. J.; YAZDIAN, S. A.; SHAHANAGHI, K. **Optimal pricing, lot-sizing and marketing planning in a capacitated and imperfect production system.** Computers and Industrial Engineering, v. 62, p. 349-358, fev 2012.

SAWARAGI, Y.; NAKAYAMA, H.; TANINO, T. **Theory of Multiobjective Optimization.** Orlando: Academic, 1985, 311 p.

SHERBROOKE, C. C. **Optimal Inventory Modeling of Systems:** multi-echelon techniques. 2 ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. International Series in Operations Research and Management Science.

SINHA, S. B.; BISWAS, A.; BISWAL, M. P. **Geometric programming problems with negative degrees of difficulty.** European Journal of Operational Research v. 28, p. 101-103, 1987.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional:** uma visão geral. 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008, 359 p.

WAGNER, H. M. **Principles of Operations Research:** with applications to managerial decisions. 2 ed. Londres: Prentice-Hall, 1975, 1039 p.

WRIGHT, S. J. **Primal-dual interior-point methods.** Illinois: SIAM, 1997, 310 p.

YANG, H.H.; BRICKER, D. L. **Investigation of path-following algorithms for signomial geometric programming problems.** European Journal of Operational Research. n. 103, p. 230-241, 1997.

ANEXO- Problemas implementados no algoritmo da Condensação com Gpposy em MatlabR2011b

Primeira função objetivo TC_1 para um único item.

```

function[alpha, beta, c3, c2, gamma, delta, TC1, A, b, szs, Viabilidade] =
FOBJ'01Estoques'Restrito
alpha=10; beta=1.5; delta=1.8/beta; gamma=(5.05)*(alpha^(delta)); c3=130; c2=10;
A0 = [0  0  0  1];
A1 = [(-2)*beta*delta    1    0    (-1/2); ...
      (-2)*beta*delta   -1    2    (-1/2); ...
      beta              -1    0    (-1/2); ...
      0                 -1    2    (-1/2); ...
      0                  0    0    -1; ...
      (-2)*beta*delta    0    1    (-1/2)];
A2 = [0  1  0  0; ...
      0  0  1  0];
A3 = [0  -1  2  0];
A = [A0; A1; A2; A3];
b0 = [1];
b1=[(1/8)*(gamma^(2))*(alpha^(-2*delta)) (1/8)*(gamma^(2))*(alpha^(-2*delta)) c3 *
alpha^(1/2)*c2 1 -(1/4)*(gamma^(2))*(alpha^(-2*delta))];
b2 = [(a1/Area) -(a1/Area)];
b3 = [c2/(2*S)];
b = [b0; b1; b2; b3];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1)];
err'viavel = 0;
t0 = [15 18 3 6]';
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0; b1; b2; b3];
iterlim = 100;

[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig'Prggplab(A,coef,d,t0,drestr,iterlim)
M1 = SolPRIMAL(1); Q1 = SolPRIMAL(2); S1 = SolPRIMAL(3);
TC1 = (1/8)*(gamma^(2))*(alpha^(-2*delta))*(M1^((-2)*beta*delta))*Q1+ (1/8)*(gamma^(2))*

```

```
(alpha^((-2) * delta)) * (M1^((-2) * beta * delta)) * (Q1^(-1)) * (S1^(2))+ c3 * alpha * (M1^(beta)) * (Q1^(-1))+ (1/2) * c2 * (Q1^(-1)) * (S1^(2)) -(1/4) * gamma^(2) * (alpha^((-2) * delta))*(M1^((-2) * beta * delta)) * S1;
```

```
Viabilidade = viavel(A,b,szs,SolPRIMAL',err'viavel);
```

```
Objetivo = calcular'funcao'objetivo(A, b, szs, SolPRIMAL');
```

```
Restr01 = (a1/Area) * Q1 - (a1/Area) * S1;
```

```
Restri02 = (c2/(2 * S)) * Q1^(-1) * S1^(2);
```

```
end
```

Segunda função objetivo TC_2 para um único item.

```
function[alpha,beta,gamma,delta,c3,c2,A,b,szs,TC2] = FOBJ02'marketing
c3=130; c2=10; alpha=10; beta=1.5; delta=(1.8)/beta; gamma=(5.05)*(alpha^(delta));
A0 = [1 + beta    0    0; ...
      beta - beta * delta  0    0];
A = [A0];
b0 = [alpha    gamma * alpha^((-1) * (delta - 1))]' ;
b = [b0];
szs = [size(A0,1)];
t0 = [10    15    17]';
err'viavel = 0;
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0];
iterlim = 150;
[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig'Prggplab(A,coef,d,t0,drestr,iterlim)
M1=SolPRIMAL(1)
TC2 = alpha * (M1^(1 + beta)) + gamma * (alpha^(1 - delta)) * (M1^(beta * (1 - delta)))
Viabilidade = viavel(A,b,szs,SolPRIMAL',err'viavel)
Objetivo = calcular'funcao'objetivo(A, b, szs, SolPRIMAL')
end
```

Nos problemas de planejamento de estoques e marketing escalarizados para $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$ seguintes os dados iniciais estão dispostos na tabela seguinte:

Problema de Planejamento de Estoques e Marketing escalarizado para $p = 1$

```
function[alpha, beta, gamma, delta, S, w1, w2, c3, c2, a1, Area, A, b, szs, TC1, TC2]
= FMO'Metrica'Pesos01
A0 = [0    0    0    1];
```

Tabela 7.1: Dados iniciais para os problemas escalarizados de planejamento de estoques e marketing para $p = 1, 2, \infty$

Dado inicial	Valor	Dado inicial	Valor
c3	130	w1	0.5, 0.6 ou 0.4
c2	10	w2	0.5, 0.6 ou 0.4
alpha	10	a1	3.0
beta	1.5	TC1	67.792346267845
delta	(1.8)/beta	TC2	59.6782260770226
gamma	(5.05)*alpha^(delta)	Area	225.0
S	0.085		

```

A1 = [(-2) * beta * delta      1      0      (-1/2); ...
      (-2) * beta * delta     -1      2      (-1/2); ...
      beta                    -1      0      (-1/2); ...
      0                      -1      2      (-1/2); ...

      1 + beta                0      0      (-1/2); ...
beta - beta * delta          0      0      (-1/2); ...
(-2) * beta * delta          0      1      (-1/2); ...
      0                      0      0      -1; ...
      0                      0      0      (-1/2)];

A2 = [0  1  0  0; ...
      0   0  1  0];
A3 = [0  -1  2  0];
A = [A0; A1; A2; A3];
b0 = [1]';
b1 = [(w1/8) * gamma^(2) * (alpha^((-2) * delta))  (w1/8) * gamma^(2) * (alpha^((-2) * delta))  w1
      * c3 * alpha  (w1/2) * c2  w2 * alpha  w2 * gamma * (alpha^(1 - delta))  -(w1/4) * gamma^(2) *
      (alpha^((-2) * delta))  -w1 * TC1  -w2 * TC2]';
b2 = [(a1/Area)  -(a1/Area)]';
b3 = [c2/(2 * S)]';
b = [b0; b1; b2; b3];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1)];
err`viavel = 0;
t0 = [10  6  15  3]';
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0; b1; b2; b3];
iterlim = 150;

[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig`Prggplab(A, coef, d, t0, drestr, iterlim)
M1 = SolPRIMAL(1); Q1 = SolPRIMAL(2); S1 = SolPRIMAL(3); T0 = SolPRIMAL(4);
F`objTC1 = (1/8) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1 - (1/4) *
gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * S1 + (1/8) * gamma^(2) * alpha^((-2)

```



```

* delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1^(-1) * S1^(2)+ c3 * alpha * M1^(beta) * Q1^(-1)+ (1/2) *
c2 * S1^(2) * Q1^(-1)
FobjTC2 = alpha * M1^(1 + beta)+gamma * alpha^(1 - delta) * M1^(beta * (1 - delta))
FUNCAO`OBJETIVO`REAL = w1*FobjTC1 + w2*FobjTC2 - w1*TC1 - w2*TC2;
Objetivo = calcular`funcao`objetivo(A, b, szs, SolPRIMAL');
Viabilidade = viavel(A,b,szs,SolPRIMAL',err`viavel);
Restr01 = (a1/Area)*Q1 - (a1/Area)*S1;
Restri02 = (c2/(2*S))*S1^(2)*Q1^(-1);
end

```

Problema de Planejamento de Estoques e Marketing escalarizado p = 2

```

function[alpha, beta, gamma, delta, S, w1, w2, c3, c2, a1, Area, A, b, szs, TC1, TC2]
= FMO`Metrica`Pesos02
A0 = [0 0 0 0 0 1];
A1 = [0 0 0 2 0 -(1/2); ...
0 0 0 0 2 -(1/2); ...
0 0 0 0 0 -1];
A2 = [(-2) * beta * delta 1 0 0 0 0; ...
(-2) * beta * delta -1 2 0 0 0; ...
beta -1 0 0 0 0; ...
0 -1 2 0 0 0; ...
(-2) * beta * delta 0 1 0 0 0; ...
0 0 0 1 0 0];
A3 = [1 + beta 0 0 0 0 0; ...
beta * (1 - delta) 0 0 0 0 0; ...
0 0 0 0 1 0];
A4 = [0 1 0 0 0 0; ...
0 0 1 0 0 0];
A5 = [0 -1 2 0 0 0];
A = [A0; A1; A2; A3; A4; A5];
b0 = [1]';
b1 = [w1 w2 1]';
b2 = [(1/(8*TC1))*(gamma^(2))*(alpha^((-2)*delta)) (1/(8*TC1)) * (gamma^(2)) * (alpha^((-2) *
delta)) (c3*alpha)/TC1 c2/(2*TC1) -(1/(4*TC1))*(gamma^(2))*(alpha^((-2)*delta)) -(1/TC1)]';
b3 = [(alpha/TC2) (1/TC2)*gamma*(alpha^(1 - delta)) -(1/TC2)]';
b4 = [(a1/Area) -(a1/Area)]';
b5 = [c2/(2*S)]';
b = [b0; b1; b2; b3; b4; b5];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1); size(A4,1); size(A5,1)];
err`viavel = 0;
t0 = [12 7 17 22 13 15]';

```

```

d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0; b1; b2; b3; b4; b5];
iterlim = 150;

[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsigPrggplab(A, coef, d, t0, drestr, iterlim)
M1 = SolPRIMAL(1); Q1 = SolPRIMAL(2); S1 = SolPRIMAL(3); y1 = SolPRIMAL(4); y2 =
SolPRIMAL(5); T0 = SolPRIMAL(6);

Objetivo = calcular_funcao_objetivo(A, b, szs, SolPRIMAL')^(1/2)
Viabilidade = viavel(A,b,szs,SolPRIMAL',err_viavel)
FUNC_OBJ_TOTAL = (w1 * y1^(2) + w2 * y2^(2))^(0.5)
F_objTC1 = (1/8) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1 - (1/4) *
gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * S1 + (1/8) * gamma^(2) * alpha^((-2)
* delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1^(-1) * S1^(2) + c3 * alpha * M1^(beta) * Q1^(-1) + (1/2) *
c2 * S1^(2) * Q1^(-1);
F_objTC2 = alpha * M1^(1 + beta) + gamma * alpha^(1 - delta) * M1^(beta * (1 - delta));
FUNC_OBJETIVO_ORIG = (w1*(F_objTC1 - TC1)^(2) + w2*(F_objTC2 - TC2)^(2))^(1/2);
Func_result = FUNC_OBJ_TOTAL - FUNC_OBJETIVO_ORIG;
RESTRIC01 = (1/(8 * TC1)) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1 -
(1/(4 * TC1)) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * S1 + (1/(8 * TC1)) *
gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1^(-1) * S1^(2) + ((c3 * alpha)/TC1)
* M1^(beta) * Q1^(-1) + (c2/(2 * TC1)) * S1^(2) * Q1^(-1) - (y1/TC1);
RESTRIC02 = (alpha/TC2) * M1^(1 + beta) + (1/TC2) * gamma * (alpha^(1 - delta)) * M1^(beta
* (1 - delta)) - (y2/TC2);
RESTRIC03 = (a1/Area) * Q1 - (a1/Area) * S1;
RESTRIC04 = (c2/(2 * S)) * Q1^(-1) * S1^(2);
end

```

Problema de Planejamento de Estoques e Marketing escalarizado para $p = \infty$

```

function[alpha, beta, gamma, delta, S, w1, w2, c3, c2, a1, Area, A, b, szs, TC1, TC2]
= FMO_Metrica_Peso_infinity
A0 = [0 0 0 0 1];
A1 = [0 0 0 1 -(1/2); ...
0 0 0 0 -1];
A2 = [(-2) * beta * delta 1 0 0 0; ...
(-2) * beta * delta -1 2 0 0; ...
beta -1 0 0 0; ...
0 -1 2 0 0; ...
(-2) * beta * delta 0 1 0 0; ...
0 0 0 1 0];

```

```

    A3 = [1 + beta    0  0  0  0; ...
    beta * (1 - delta)  0  0  0  0; ...
           0           0  0  1  0];
    A4 = [0  1  0  0  0; ...
           0   0  1  0  0];
    A5 = [0  -1  2  0  0];
    A = [A0; A1; A2; A3; A4; A5];
    b0 = [1]';
    b1 = [1  1]';
    b2 = [(1/(8*TC1))*(gamma^(2))*(alpha^((-2)*delta))  (1/(8*TC1))*(gamma^(2)) * (alpha^((-2) *
    delta))  (c3*alpha)/TC1  c2/(2*TC1) -(1/(4*TC1))*(gamma^(2))*(alpha^((-2)*delta))
    -(1/(w1*TC1))]' ;
    b3 = [(alpha/TC2)  ((gamma*(alpha^(1 - delta)))/TC2)  -(1/(w2*TC2))]' ;
    b4 = [(a1/Area)  -(a1/Area)]';
    b5 = [c2/(2*S)]';
    b = [b0; b1; b2; b3; b4; b5];
    szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1); size(A4,1); size(A5,1)];
    err`viavel = 0;
    t0 = [13  22  8  11  20]';
    d = cumsum(szs);
    drestr = ones(1,length(d));
    coef = [b0; b1; b2; b3; b4; b5];
    iterlim = 150;

    [SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig`Prggplab(A,coef,d,t0,drestr,iterlim)
    M1 = SolPRIMAL(1); Q1 = SolPRIMAL(2); S1 = SolPRIMAL(3); lambda = SolPRIMAL(4); T0 =
    SolPRIMAL(5);
    FUNCAO`OBJETIVO`REAL = lambda
    F`objTC1 = (1/8) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1- (1/4) *
    gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * S1+ (1/8) * gamma^(2) * alpha^((-2)
    * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1^(-1) * S1^(2)+ c3 * alpha * M1^(beta) * Q1^(-1)+ (1/2) *
    c2 * S1^(2) * Q1^(-1)
    F`objTC2 = alpha * M1^(1 + beta) + gamma * alpha^(1 - delta) * M1^(beta * (1 - delta))
    Objetivo = calcular`funcao`objetivo(A, b, szs, SolPRIMAL');
    Viabilidade = viavel(A,b,szs,SolPRIMAL',err`viavel);
    RESTRIC02 = (1/(8 * TC1)) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * Q1 -
    (1/(4 * TC1)) * gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta * delta) * S1 + (1/(8 * TC1)) *
    gamma^(2) * alpha^((-2) * delta) * M1^((-2) * beta*delta) * Q1^(-1) * S1^(2) + ((c3 * alpha)/TC1)
    * M1^(beta) * Q1^(-1) + (c2/(2 * TC1)) * S1^(2) * Q1^(-1) - (lambda/(w1 * TC1));
    RESTRIC03 = (alpha/TC2) * M1^(1 + beta) + (1/TC2) * gamma * (alpha^(1 - delta)) * M1^(beta
    * (1 - delta)) - (lambda/(w2 * TC2));
    Restri04 = (a1/Area) * Q1 - (a1/Area) * S1;

```

Restri05 = (c2/(2 * S)) * Q1^(-1) * S1^(2);

end

A tabela a seguir apresenta os dados iniciais utilizados nos problemas associados a cada função objetivo de custos de estoques totais TC_1 e de custos de marketing e produção totais TC_2 bem como nos problemas de planejamento de estoques e marketing para cinco itens escalariizados pelo método das métrica ponderadas para $p = 1, 2, \infty$.

Tabela 7.2: Dados iniciais dos problemas de planejamento de estoques e marketing para cinco itens

Dado Inicial	Valor	Dado Inicial	Valor
alpha1	10	TC1	363.691417010601
alpha2	11	TC2	252.930309915449
alpha3	12	Area	925.0;
alpha4	8	c31	130
alpha5	9	c32	120
beta1	1.5	c33	110
beta2	1.4	c34	90
beta3	1.3	c35	140
beta4	1.8	c21	10
beta5	1.6	c22	9

Dado Inicial	Valor	Dado Inicial	Valor
delta1	(1.8)/beta1	c23	11
delta2	(1.6)/beta2	c24	8
delta3	(1.7)/beta3	c25	12
delta4	(1.5)/beta4	a1	3.0;
delta5	(1.9)/beta5	a2	4.0;
gamma1	(5.05)*alpha1^(delta1)	a3	5.0;
gamma2	5*alpha2^(delta2)	a4	6.0;
gamma3	(5.25)*alpha3^(delta3)	a5	7.0;
gamma4	(5.2)*alpha4^(delta4)	S	0.425;
gamma5	(5.15)*alpha5^(delta5)	w1	0.5, 0.4 ou 0.6
		w2	0.5, 0.4 ou 0.6

Problema de planejamento de estoques para cinco itens com a função objetivo de custos totais de estoques TC_1

function[alpha1, beta1, c31, c21, gamma1, delta1, alpha2, beta2, c32, c22, gamma2, delta2, alpha3, beta3, c33, c23, gamma3, delta3, alpha4, beta4, c34, c24, gamma4, delta4, alpha5, beta5, c35, c25, gamma5, delta5, A, b, szs, Viabilidade] = FOBJ'01Estoques'multi'item

A0 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1] ;

A0 = [(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...

(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 (-1/2);...

beta1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...

0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 (-1/2);...

0 (-2)*beta2*delta2 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...

```

0  (-2)*beta2*delta2  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  (-1/2);...
0  beta2  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  (-1/2);...
0  0  (-2)*beta3*delta3  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  (-2)*beta3*delta3  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  (-1/2);...
0  0  beta3  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  (-1/2);...
0  0  0  (-2)*beta4*delta4  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  0  (-2)*beta4*delta4  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  (-1/2);...
0  0  0  beta4  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  (-2)*beta5*delta5  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  (-2)*beta5*delta5  0  0  0  0  -1  0  0  0  2  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  beta5  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  (-1/2);...
0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  (-1/2);...
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1;...
(-2)*beta1*delta1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  (-1/2);...
0  (-2)*beta2*delta2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  (-1/2);...
0  0  (-2)*beta3*delta3  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  (-1/2);...
0  0  0  (-2)*beta4*delta4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  (-1/2);...
0  0  0  0  (-2)*beta5*delta5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  (-1/2)];

```

```

A2 = [0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0];

```

```

A3 = [0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0;...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0];

```

```
A = [A0; A1; A2; A3];
```

```
b0=[1]';
```

```

b1=[(1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1))    (1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1))
c31 * alpha1  (1/2) * c21    (1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2))    (1/10) * (gamma2 ^
(2)) * (alpha2^(-2 * delta2))    c32 * alpha2    (1/2) * c22    (1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 *

```

```

delta3)) (1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) c33 * alpha3 (1/2) * c23 (1/20)
* (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) (1/20) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) c34 *
alpha4 (1/2) * c24 (2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) (2/25) * (gamma5^(2)) *
(alpha5^(-2 * delta5)) c35 * alpha5 (1/2) * c25 1 -(1/4) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2
* delta1)) -(1/5) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2)) -(2/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-
2 * delta3)) -(1/10) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) -(4/25) * (gamma5^(2)) *
(alpha5^(-2 * delta5))];
b2 = [(a1/Area) (a2/Area) (a3/Area) (a4/Area) (a5/Area) -(a1/Area) -(a2/Area)
-(a3/Area) -(a4/Area) -(a5/Area)];
b3 = [c21/(2 * S) c22/(2 * S) c23/(2 * S) c24/(2 * S) c25/(2 * S)];
b = [b0; b1; b2; b3];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1)];
err`viavel = 0;
t0 = [10 14 16 18 20 6 4 13 7 28 11 22 19 12 17 45]';
d = cumsum(szs);
drest = ones(1,length(d));
coef = [b0];
iterlim = 250;

[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig`Prggplab(A,coef,d,t0,drest,iterlim) M1 =
SolPRIMAL(1); M2 = SolPRIMAL(2); M3 = SolPRIMAL(3); M4 = SolPRIMAL(4);
M5 = SolPRIMAL(5); Q1 = SolPRIMAL(6); Q2 = SolPRIMAL(7); Q3 = SolPRIMAL(8);
Q4 = SolPRIMAL(9); Q5 = SolPRIMAL(10); S1 = SolPRIMAL(11); S2 = SolPRIMAL(12);
S3 = SolPRIMAL(13); S4 = SolPRIMAL(14); S5 = SolPRIMAL(15);
TC11 = (1/8)*(gamma1^(2))*(alpha1^(-2*delta1))*(M1^((-2)*beta1*delta1))*Q1 + (1/8) * (gamma1
^(2)) * (alpha1^((-2) * delta1)) * (M1^((-2) * beta1 * delta1)) * (Q1^(-1)) * (S1^(2)) + c31 * alpha1 *
(M1^(beta1)) * (Q1^(-1)) + (1/2) * c21 * (Q1^(-1)) * (S1^(2)) - (1/4) * gamma1^(2) * (alpha1^((-2)
* delta1)) * (M1^((-2) * beta1 * delta1)) * S1;
TC12 = (1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2*delta2)) * (M2^((-2)*beta2*delta2)) * Q2 + (1/10)
* (gamma2^(2)) * (alpha2^((-2)*delta2)) * (M2^((-2) * beta2 * delta2)) * (Q2^(-1)) * (S2^(2)) +
c32*alpha2 * (M2^(beta2)) * (Q2^(-1)) + (1/2) * c22 * (Q2^(-1)) * (S2^(2)) - (1/5) * gamma2^(2) *
(alpha2^((-2) * delta2)) * (M2^((-2) * beta2 * delta2)) * S2;
TC13 = (1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) * (M3^((-2) * beta3 * delta3)) * Q3 + (1/5)
* (gamma3^(2)) * (alpha3^((-2) * delta3)) * (M3^((-2) * beta3 * delta3)) * (Q3^(-1)) * (S3^(2)) +
c33 * alpha3 * (M3^(beta3)) * (Q3^(-1)) + (1/2) * c23 * (Q3^(-1)) * (S3^(2)) - (2/5) * gamma3^(2)
* (alpha3^((-2) * delta3)) * (M3^((-2) * beta3 * delta3)) * S3;
TC14 = (1/20) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) * (M4^((-2) * beta4 * delta4)) * Q4 + (1/20)
* (gamma4^(2)) * (alpha4^((-2) * delta4)) * (M4^((-2) * beta4 * delta4)) * (Q4^(-1)) * (S4^(2))+
c34 * alpha4 * (M4^(beta4)) * (Q4^(-1))+ (1/2) * c24 * (Q4^(-1)) * (S4^(2)) - (1/10) * gamma4^(2)
* (alpha4^((-2) * delta4)) * (M4^((-2) * beta4 * delta4)) * S4;
TC15 = (2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2*delta5)) * (M5^((-2) * beta5 * delta5)) * Q5 + (2/25)

```

```

* (gamma5^(2)) * (alpha5^((-2) * delta5)) * (M5^((-2) * beta5 * delta5)) * (Q5^(-1)) * (S5^(2))+
c35 * alpha5 * (M5^(beta5)) * (Q5^(-1))+ (1/2) * c25 * (Q5^(-1)) * (S5^(2)) - (4/25) * gamma5^(2)
* (alpha5^((-2)*delta5)) * (M5^((-2) * beta5 * delta5)) * S5;
FobjTC1 = TC11 + TC12 + TC13 + TC14 + TC15;
Restri02 = (a1/Area) * Q1 - (a1/Area) * S1 +(a2/Area) * Q2 - (a2/Area) * S2 +(a3/Area) * Q3 -
(a3/Area) * S3 + (a4/Area) * Q4 - (a4/Area) * S4 + (a5/Area) * Q5 - (a5/Area) * S5;
Restri03 = (c21/(2 * S)) * S1^(2) * Q1^(-1) + (c22/(2 * S)) * S2^(2) * Q2^(-1)+ (c23/(2 * S)) *
S3^(2) * Q3^(-1)+ (c24/(2 * S)) * S4^(2) * Q4^(-1)+ (c25/(2 * S)) * S5^(2) * Q5^(-1);
Viabilidade = viavel(A, b, szs, SolPRIMAL', err'viavel);
Objetivo = calcular_funcao_objetivo(A, b, szs, SolPRIMAL');
end

```

Problema de planejamento de estoques para cinco itens com a função objetivo de custos totais de marketing e produção TC_2

```

function[alpha1, beta1, c31, c21, gamma1, delta1, alpha2, beta2, c32, c22, gamma2,
delta2, alpha3, beta3, c33, c23, gamma3, delta3, alpha4, beta4, c34, c24, gamma4, delta4,
alpha5, beta5, c35, c25, gamma5, delta5, A, b, szs, Viabilidade] = FOBJ'02Marketing'multi'item
A0 = [1+ beta1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
beta1 - beta1*delta1    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  1+ beta2    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  beta2 - beta2*delta2    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  0  1+ beta3    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  0  beta3 - beta3*delta3    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  0  0  1+ beta4    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  0  0  beta4 - beta4*delta4    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  0  0  0  1+ beta5    0    0    0    0    0    0    0    0    0;...
0  0  0  0  beta5 - beta5*delta5    0    0    0    0    0    0    0    0    0];
A = [A0];
b0=[alpha1  gamma1 * alpha1^((-1) * (delta1 - 1))  alpha2  gamma2 * alpha2^((-1) * (delta2 -
1))  alpha3  gamma3 * alpha3^((-1) * (delta3 - 1))  alpha4  gamma4 * alpha4^((-1) * (delta4 - 1))
alpha5  gamma5 * alpha5^((-1) * (delta5 - 1))];
b = [b0];
szs = [size(A0,1)];
ponto inicial
err'viavel = 0;
t0 = [10  14  16  18  20  6  4  13  7  28  11  22  19  12  17]';
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0];
iterlim = 150;

```



```

0 0 0 beta4 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 (-1/2);...
0 0 0 1+ beta4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 beta4 - beta4*delta4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 (-2)*beta5*delta5 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 (-2)*beta5*delta5 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 (-1/2);...
0 0 0 0 beta5 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 (-1/2);...
0 0 0 0 1+ beta5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 beta5 - beta5*delta5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;...
(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 (-1/2);...
0 (-2)*beta2*delta2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 (-1/2);...
0 0 (-2)*beta3*delta3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 (-1/2);...
0 0 0 (-2)*beta4*delta4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 (-1/2);...
0 0 0 (-2)*beta5*delta5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 (-1/2);...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2);...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 (-1/2)];
A2 = [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0];
A3 = [0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0;...
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0];
A = [A0; A1; A2; A3];
b0 = [1]';
b1 = [(w1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1)) (w1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 *
delta1)) w1 * c31 * alpha1 (w1/2) * c21 w2 * alpha1 w2 * gamma1 * alpha1^((-1) * (delta1 - 1))
(w1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2)) (w1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2))
w1 * c32 * alpha2 (w1/2) * c22 w2 * alpha2 w2 * gamma2 * alpha2^((-1) * (delta2 - 1)) (w1/5)
* (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) (w1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) w1 *
c33 * alpha3 (w1/2) * c23 w2 * alpha3 w2 * gamma3 * alpha3^((-1) * (delta3 - 1)) (w1/20) *
(gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) (w1/20) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) w1 * c34

```

```

* alpha4 (w1/2) * c24 w2 * alpha4 w2 * gamma4 * alpha4^((-1) * (delta4 - 1)) w1 * (2/25) *
(gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) w1 * (2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) w1 *
c35 * alpha5 (w1/2) * c25 w2 * alpha5 w2 * gamma5 * alpha5^((-1) * (delta5 - 1)) 1 -(w1/4)
* (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1)) -(w1/5) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2)) -((2 *
w1)/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) -(w1/10) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4))
-((4 * w1)/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) -w1 * TC1 -w2 * TC2]';
b2 = [(a1/Area) (a2/Area) (a3/Area) (a4/Area) (a5/Area) -(a1/Area) -(a2/Area) -(a3 /
Area) -(a4/Area) -(a5/Area)];
b3 = [c21/(2 * S) c22/(2 * S) c23/(2 * S) c24/(2 * S) c25/(2 * S)]';
b = [b0; b1; b2; b3];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1)];
err`viavel = 0;
Ponto inicial:
t0 = [0.05 0.36 0.152 0.0194 0.052130 0.135 0.0004 0.00014
0.000045 0.0000721 0.000023 0.0000064 0.0000021 0.00069 0.000384 0.0000139]';
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0; b1; b2; b3];
iterlim = 150;

```

Algoritmo PGsigPrggplab

```

[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig`Prggplab(A,coef,d,t0,drestr,iterlim)
M1 = SolPRIMAL(1); M2 = SolPRIMAL(2); M3 = SolPRIMAL(3); M4 = SolPRIMAL(4); M5 =
SolPRIMAL(5); Q1 = SolPRIMAL(6); Q2 = SolPRIMAL(7); Q3 = SolPRIMAL(8); Q4 = SolPRI-
MAL(9); Q5 = SolPRIMAL(10); S1 = SolPRIMAL(11); S2 = SolPRIMAL(12); S3 = SolPRIMAL(13);
S4 = SolPRIMAL(14); S5 = SolPRIMAL(15);
end

```

Problema de Planejamento de Estoques e Marketing com 5 itens formulado pelo Métdoto das Métricas Ponderadas para $p = 2$

```

function[alpha1, beta1, c31, c21, gamma1, delta1, alpha2, beta2, c32, c22, gamma2,
delta2, alpha3, beta3, c33, c23, gamma3, delta3, alpha4, beta4, c34, c24, gamma4, delta4,
alpha5, beta5, c35, c25, gamma5, delta5, A, b, szs, Viabilidade]=
FOBJ`Pesos02`multi`item`PGsig`Prggplab
A0 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1];
A1 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 (-1/2); ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 (-1/2); ...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1];
A2 = [(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0;...
beta1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0;...

```

```

0  (-2)*beta2*delta2  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  (-2)*beta2*delta2  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0  0  0;...
0  beta2  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0  0;...
0  0  (-2)*beta3*delta3  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  (-2)*beta3*delta3  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0;...
0  0  beta3  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0;...
0  0  0  (-2)*beta4*delta4  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  (-2)*beta4*delta4  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0;...
0  0  0  beta4  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0;...
0  0  0  0  (-2)*beta5*delta5  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  (-2)*beta5*delta5  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0;...
0  0  0  0  beta5  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  0  0  0  2  0  0  0;...
(-2)*beta1*delta1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0;...
0  (-2)*beta2*delta2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0;...
0  0  (-2)*beta3*delta3  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0;...
0  0  0  (-2)*beta4*delta4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0;...
0  0  0  (-2)*beta5*delta5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0;...
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0];
A3 = [1+ beta1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
beta1 - beta1*delta1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  1+ beta2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  beta2 - beta2*delta2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  1+ beta3  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  beta3 - beta3*delta3  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  1+ beta4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  beta4 - beta4*delta4  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  1+ beta5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  beta5 - beta5*delta5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0;...
0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0];

```

```

A4 = [0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0];

A5 = [0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  2  0  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  2  0  0  0; ...
      0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  2  0  0];

A = [A0; A1; A2; A3; A4; A5];
b0 = [1]';
b1 = [w1 w2 1]';
b2 = [(1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2*delta1)) (1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1))
c31 * alpha1 (1/2) * c21 (1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2)) (1/10) * (gamma2^(2))
* (alpha2^(-2 * delta2)) c32 * alpha2 (1/2) * c22 (1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3))
(1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) c33 * alpha3 (1/2) * c23 (1/20) * (gamma4^(2))
* (alpha4^(-2 * delta4)) (1/20) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) c34 * alpha4 (1/2) * c24
(2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) (2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5))
c35 * alpha5 (1/2) * c25 -(1/4) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1)) -(1/5) * (gamma2^(2))
* (alpha2^(-2 * delta2)) -(2/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) -(1/10) * (gamma4^(2))
* (alpha4^(-2 * delta4)) -(4/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) -(1/TC1)]';
b3 = [alpha1 gamma1 * alpha1^((-1) * (delta1 - 1)) alpha2 gamma2 * alpha2^((-1) * (delta2 -
1)) alpha3 gamma3 * alpha3^((-1) * (delta3 - 1)) alpha4 gamma4 * alpha4^((-1) * (delta4 - 1))
alpha5 gamma5 * alpha5^((-1) * (delta5 - 1)) -(1/TC2)]';
b4 = [(a1/Area) (a2/Area) (a3/Area) (a4/Area) (a5/Area) -(a1/Area) -(a2/Area) -(a3
/Area) -(a4/Area) -(a5/Area)]';
b5 = [c21/(2 * S) c22/(2 * S) c23/(2 * S) c24/(2 * S) c25/(2 * S)]';
b = [b0; b1; b2; b3; b4; b5];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1); size(A4,1); size(A5,1)];
errviavel = 0;
Ponto inicial
t0 = [0.19 0.5 0.152 0.194 0.052130 0.135 0.0004 0.00014 0.000045
0.0000721 0.000023 0.0000064 0.0000021 0.0000032 0.000045 0.00069 0.000384 0.0000139]';
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0; b1; b2; b3; b4; b5];

```

```

iterlim = 500;
[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig`Prggplab(A,coef,d,t0,drestr,iterlim)
M1 = SolPRIMAL(1); M2 = SolPRIMAL(2); M3 = SolPRIMAL(3); M4 = SolPRIMAL(4);
M5 = SolPRIMAL(5); Q1 = SolPRIMAL(6); Q2 = SolPRIMAL(7); Q3 = SolPRIMAL(8);
Q4 = SolPRIMAL(9); Q5 = SolPRIMAL(10); S1 = SolPRIMAL(11); S2 = SolPRIMAL(12);
S3 = SolPRIMAL(13); S4 = SolPRIMAL(14); S5 = SolPRIMAL(15); y1 = SolPRIMAL(16);
y2 = SolPRIMAL(17);
end

```

Problema de Planejamento de Estoques e Marketing com 5 itens formulado pelo Método das Métricas Ponderadas para $p = \infty$

```

function[alpha1, beta1, c31, c21, gamma1, delta1, alpha2, beta2, c32, c22, gamma2,
delta2, alpha3, beta3, c33, c23, gamma3, delta3, alpha4, beta4, c34, c24, gamma4, delta4,
alpha5, beta5, c35, c25, gamma5, delta5, A, b, szs, Viabilidade]= FOBJ`PesosInfinito`multi
item`PGsig`Prggplab`original

```

```

A0 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1];
A1 = [(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0;...
beta1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0;...
0 (-2)*beta2*delta2 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 (-2)*beta2*delta2 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0;...
0 beta2 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0;...
0 0 (-2)*beta3*delta3 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 (-2)*beta3*delta3 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 2 0 0 0;...
0 0 beta3 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0;...
0 0 0 (-2)*beta4*delta4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 (-2)*beta4*delta4 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 2 0 0;...
0 0 0 beta4 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0;...
0 0 0 0 (-2)*beta5*delta5 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 (-2)*beta5*delta5 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 2 0;...
0 0 0 0 beta5 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0;...
(-2)*beta1*delta1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;...
0 (-2)*beta2*delta2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;...
0 0 (-2)*beta3*delta3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;...
0 0 0 (-2)*beta4*delta4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;...

```

```

0 0 0 (-2)*beta5*delta5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1];
A2 = [1+ beta1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
beta1 - beta1*delta1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 1+ beta2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 beta2 - beta2*delta2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 1+ beta3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 beta3 - beta3*delta3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 1+ beta4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 beta4 - beta4*delta4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 1+ beta5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 beta5 - beta5*delta5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1];
A3 = [0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0];
A4 = [0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 2 0];
A = [A0; A1; A2; A3; A4];
b0 = [1]';
b1 = [(1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1)) (1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1))
c31 * alpha1 (1/2) * c21 (1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2)) (1/10) * (gamma2^(2))
* (alpha2^(-2 * delta2)) c32 * alpha2 (1/2) * c22 (1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3))
(1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) c33 * alpha3 (1/2) * c23 (1/20) * (gamma4^(2))
* (alpha4^(-2 * delta4)) (1/20) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) c34 * alpha4 (1/2) * c24
(2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) (2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5))
c35 * alpha5 (1/2) * c25 -(1/4) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1)) -(1/5) * (gamma2^(2))
* (alpha2^(-2 * delta2)) -(2/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) -(1/10) * (gamma4^(2))
* (alpha4^(-2 * delta4)) -(4/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) -(1/TC1)]';
b2 = [alpha1 gamma1 * alpha1^((-1) * (delta1 - 1)) alpha2 gamma2 * alpha2^((-1) * (delta2 -
1)) alpha3 gamma3 * alpha3^((-1) * (delta3 - 1)) alpha4 gamma4 * alpha4^((-1) * (delta4 - 1))

```

```

alpha5 = gamma5 * alpha5^((-1) * (delta5 - 1)) ^(-1/TC2)];
b3 = [(a1/Area) (a2/Area) (a3/Area) (a4/Area) (a5/Area) -(a1/Area) -(a2/Area) -(a3 / Area) -(a4/Area) -(a5/Area)];
b4 = [c21/(2 * S) c22/(2 * S) c23/(2 * S) c24/(2 * S) c25/(2 * S)];
b = [b0; b1; b2; b3; b4];
szs = [size(A0,1); size(A1,1); size(A2,1); size(A3,1); size(A4,1)];
Ponto inicial
t0 = [0.19 0.5 0.152 0.194 0.052130 0.135 0.00045 0.00721
0.000023 0.0064 0.0021 0.00032 0.00045 0.069 0.0384 0.00139]';
d = cumsum(szs);
drestr = ones(1,length(d));
coef = [b0; b1; b2; b3; b4];
iterlim = 150;

[SolPRIMAL, RESULTADO1s2p, itersig] = PGsig'Prggplab(A,coef,d,t0,drestr,iterlim)
M1 = SolPRIMAL(1); M2 = SolPRIMAL(2); M3 = SolPRIMAL(3); M4 = SolPRIMAL(4);
M5 = SolPRIMAL(5); Q1 = SolPRIMAL(6); Q2 = SolPRIMAL(7); Q3 = SolPRIMAL(8);
Q4 = SolPRIMAL(9); Q5 = SolPRIMAL(10); S1 = SolPRIMAL(11); S2 = SolPRIMAL(12);
S3 = SolPRIMAL(13); S4 = SolPRIMAL(14); S5 = SolPRIMAL(15); lambda = SolPRIMAL(16);
end

```

Cálculo das funções objetivo:

```

TC011 = (1/8) * (gamma1^(2)) * (alpha1^(-2 * delta1)) * (M1^((-2) * beta1 * delta1)) * Q1 + (1/8)
* (gamma1^(2)) * (alpha1^((-2) * delta1)) * (M1^((-2) * beta1 * delta1)) * (Q1^(-1)) * (S1^(2))+
c31 * alpha1 * (M1^(beta1)) * (Q1^(-1))+ (1/2) * c21 * (Q1^(-1)) * (S1^(2)) - (1/4) * gamma1^(2)
* (alpha1^((-2) * delta1)) * (M1^((-2) * beta1 * delta1)) * S1;
TC012 = (1/10) * (gamma2^(2)) * (alpha2^(-2 * delta2)) * (M2^((-2) * beta2 * delta2)) * Q2 + (1/10)
* (gamma2^(2)) * (alpha2^((-2) * delta2)) * (M2^((-2) * beta2 * delta2)) * (Q2^(-1)) * (S2^(2))+
c32 * alpha2 * (M2^(beta2)) * (Q2^(-1))+ (1/2) * c22 * (Q2^(-1)) * (S2^(2)) - (1/5) * gamma2^(2)
* (alpha2^((-2) * delta2)) * (M2^((-2) * beta2 * delta2)) * S2;
TC013 = (1/5) * (gamma3^(2)) * (alpha3^(-2 * delta3)) * (M3^((-2) * beta3 * delta3)) * Q3 + (1/5)
* (gamma3^(2)) * (alpha3^((-2) * delta3)) * (M3^((-2) * beta3 * delta3)) * (Q3^(-1)) * (S3^(2))+
c33 * alpha3 * (M3^(beta3)) * (Q3^(-1))+ (1/2) * c23 * (Q3^(-1)) * (S3^(2)) - (2/5) * gamma3^(2)
* (alpha3^((-2) * delta3)) * (M3^((-2) * beta3 * delta3)) * S3;
TC014 = (1/20) * (gamma4^(2)) * (alpha4^(-2 * delta4)) * (M4^((-2) * beta4 * delta4)) * Q4 + (1/20)
* (gamma4^(2)) * (alpha4^((-2) * delta4)) * (M4^((-2) * beta4 * delta4)) * (Q4^(-1)) * (S4^(2))+
c34 * alpha4 * (M4^(beta4)) * (Q4^(-1))+ (1/2) * c24 * (Q4^(-1)) * (S4^(2)) - (1/10) * gamma4^(2)
* (alpha4^((-2) * delta4)) * (M4^((-2) * beta4 * delta4)) * S4;
TC015 = (2/25) * (gamma5^(2)) * (alpha5^(-2 * delta5)) * (M5^((-2) * beta5 * delta5)) * Q5 + (2/25)
* (gamma5^(2)) * (alpha5^((-2) * delta5)) * (M5^((-2) * beta5 * delta5)) * (Q5^(-1)) * (S5^(2))+
c35 * alpha5 * (M5^(beta5)) * (Q5^(-1))+ (1/2) * c25 * (Q5^(-1)) * (S5^(2)) - (4/25) * gamma5^(2)
* (alpha5^((-2) * delta5)) * (M5^((-2) * beta5 * delta5)) * S5;
TC021 = alpha1 * M1^(1 + beta1) + gamma1 * alpha1^(1 - delta1) * M1^(beta1 * (1 - delta1));

```

$$TC022 = \alpha_2 * M_2^{(1 + \beta_2)} + \gamma_2 * \alpha_2^{(1 - \delta_2)} * M_2^{(\beta_2 * (1 - \delta_2))};$$

$$TC023 = \alpha_3 * M_3^{(1 + \beta_3)} + \gamma_3 * \alpha_3^{(1 - \delta_3)} * M_3^{(\beta_3 * (1 - \delta_3))};$$

$$TC024 = \alpha_4 * M_4^{(1 + \beta_4)} + \gamma_4 * \alpha_4^{(1 - \delta_4)} * M_4^{(\beta_4 * (1 - \delta_4))};$$

$$TC025 = \alpha_5 * M_5^{(1 + \beta_5)} + \gamma_5 * \alpha_5^{(1 - \delta_5)} * M_5^{(\beta_5 * (1 - \delta_5))};$$

$$TC\text{estoque} = TC011 + TC012 + TC013 + TC014 + TC015;$$

$$TC\text{marketing} = TC021 + TC022 + TC023 + TC024 + TC025;$$

Cálculo das Restrições:

$$TC11 = (1/(8 * TC1)) * (\gamma_1^2) * (\alpha_1^{(-2 * \delta_1)}) * (M_1^{((-2) * \beta_1 * \delta_1)}) * Q_1 + (1/(8 * TC1)) * (\gamma_1^2) * (\alpha_1^{((-2) * \delta_1)}) * (M_1^{((-2) * \beta_1 * \delta_1)}) * (Q_1^{(-1)}) * (S_1^2) + ((c_{31} * \alpha_1)/TC1) * (M_1^{\beta_1}) * (Q_1^{(-1)}) + (c_{21}/(2 * TC1)) * (Q_1^{(-1)}) * (S_1^2) - (1/(4 * TC1)) * \gamma_1^2 * (\alpha_1^{((-2) * \delta_1)}) * (M_1^{((-2) * \beta_1 * \delta_1)}) * S_1;$$

$$TC12 = (1/(10 * TC1)) * (\gamma_2^2) * (\alpha_2^{(-2 * \delta_2)}) * (M_2^{((-2) * \beta_2 * \delta_2)}) * Q_2 + (1/(10 * TC1)) * (\gamma_2^2) * (\alpha_2^{((-2) * \delta_2)}) * (M_2^{((-2) * \beta_2 * \delta_2)}) * (Q_2^{(-1)}) * (S_2^2) + ((c_{32} * \alpha_2)/TC1) * (M_2^{\beta_2}) * (Q_2^{(-1)}) + (c_{22}/(2 * TC1)) * (Q_2^{(-1)}) * (S_2^2) - (1/(5 * TC1)) * \gamma_2^2 * (\alpha_2^{((-2) * \delta_2)}) * (M_2^{((-2) * \beta_2 * \delta_2)}) * S_2;$$

$$TC13 = (1/(5 * TC1)) * (\gamma_3^2) * (\alpha_3^{(-2 * \delta_3)}) * (M_3^{((-2) * \beta_3 * \delta_3)}) * Q_3 + (1/(5 * TC1)) * (\gamma_3^2) * (\alpha_3^{((-2) * \delta_3)}) * (M_3^{((-2) * \beta_3 * \delta_3)}) * (Q_3^{(-1)}) * (S_3^2) + ((c_{33} * \alpha_3)/TC1) * (M_3^{\beta_3}) * (Q_3^{(-1)}) + (c_{23}/(2 * TC1)) * (Q_3^{(-1)}) * (S_3^2) - (2/(5 * TC1)) * \gamma_3^2 * (\alpha_3^{((-2) * \delta_3)}) * (M_3^{((-2) * \beta_3 * \delta_3)}) * S_3;$$

$$TC14 = (1/(20 * TC1)) * (\gamma_4^2) * (\alpha_4^{(-2 * \delta_4)}) * (M_4^{((-2) * \beta_4 * \delta_4)}) * Q_4 + (1/(20 * TC1)) * (\gamma_4^2) * (\alpha_4^{((-2) * \delta_4)}) * (M_4^{((-2) * \beta_4 * \delta_4)}) * (Q_4^{(-1)}) * (S_4^2) + ((c_{34} * \alpha_4)/TC1) * (M_4^{\beta_4}) * (Q_4^{(-1)}) + (c_{24}/(2 * TC1)) * (Q_4^{(-1)}) * (S_4^2) - (1/(10 * TC1)) * \gamma_4^2 * (\alpha_4^{((-2) * \delta_4)}) * (M_4^{((-2) * \beta_4 * \delta_4)}) * S_4;$$

$$TC15 = (2/(25 * TC1)) * (\gamma_5^2) * (\alpha_5^{(-2 * \delta_5)}) * (M_5^{((-2) * \beta_5 * \delta_5)}) * Q_5 + (2/(25 * TC1)) * (\gamma_5^2) * (\alpha_5^{((-2) * \delta_5)}) * (M_5^{((-2) * \beta_5 * \delta_5)}) * (Q_5^{(-1)}) * (S_5^2) + ((c_{35} * \alpha_5)/TC1) * (M_5^{\beta_5}) * (Q_5^{(-1)}) + (c_{25}/(2 * TC1)) * (Q_5^{(-1)}) * (S_5^2) - (4/(25 * TC1)) * \gamma_5^2 * (\alpha_5^{((-2) * \delta_5)}) * (M_5^{((-2) * \beta_5 * \delta_5)}) * S_5;$$

$$TC21 = (\alpha_1/TC2) * M_1^{(1+\beta_1)} + (1/TC2) * (\gamma_1 * \alpha_1^{(1-\delta_1)}) * M_1^{(\beta_1 * (1-\delta_1))};$$

$$TC22 = (\alpha_2/TC2) * M_2^{(1+\beta_2)} + (1/TC2) * (\gamma_2 * \alpha_2^{(1-\delta_2)}) * M_2^{(\beta_2 * (1-\delta_2))};$$

$$TC23 = (\alpha_3/TC2) * M_3^{(1+\beta_3)} + (1/TC2) * (\gamma_3 * \alpha_3^{(1-\delta_3)}) * M_3^{(\beta_3 * (1-\delta_3))};$$

$$TC24 = (\alpha_4/TC2) * M_4^{(1+\beta_4)} + (1/TC2) * (\gamma_4 * \alpha_4^{(1-\delta_4)}) * M_4^{(\beta_4 * (1-\delta_4))};$$

$$TC25 = (\alpha_5/TC2) * M_5^{(1+\beta_5)} + (1/TC2) * (\gamma_5 * \alpha_5^{(1-\delta_5)}) * M_5^{(\beta_5 * (1-\delta_5))};$$

(1-delta5));

Restrição do problema de planejamento de estoques e marketing escalarizado com cinco itens para $p = 1$

$$\text{RestricaoP101} = \text{TC11} + \text{TC12} + \text{TC13} + \text{TC14} + \text{TC15} + T0^{(-1)} - w1 * \text{TC1} * T0^{(-1/2)} - w2 * \text{TC2} * T0^{(-1/2)}$$

Restrição do problema de planejamento de estoques e marketing escalarizado com cinco itens para $p=2$

$$\text{RESITCAOP201} = \text{TC11} + \text{TC12} + \text{TC13} + \text{TC14} + \text{TC15} - (1/(w1 * \text{TC1})) * \text{lambda};$$

$$\text{RESTRICAOP202} = \text{TC21} + \text{TC22} + \text{TC23} + \text{TC24} + \text{TC25} - (1/(w2 * \text{TC2})) * \text{lambda};$$

Restrição do problema de planejamento de estoques e marketing escalarizado com cinco itens para $p = \infty$

$$\text{RESITCAOP301} = \text{TC11} + \text{TC12} + \text{TC13} + \text{TC14} + \text{TC15} - (1/(w1 * \text{TC1})) * \text{lambda};$$

$$\text{RESTRICAOP302} = \text{TC21} + \text{TC22} + \text{TC23} + \text{TC24} + \text{TC25} - (1/(w2 * \text{TC2})) * \text{lambda};$$

Restrições comuns a todos os problemas:

$$\text{Restri03} = (a1/\text{Area}) * Q1 - (a1/\text{Area}) * S1 + (a2/\text{Area}) * Q2 - (a2/\text{Area}) * S2 + (a3/\text{Area}) * Q3 - (a3/\text{Area}) * S3 + (a4/\text{Area}) * Q4 - (a4/\text{Area}) * S4 + (a5/\text{Area}) * Q5 - (a5/\text{Area}) * S5;$$

$$\text{Restri04} = (c21/(2 * S)) * S1^{(2)} * Q1^{(-1)} + (c22/(2 * S)) * S2^{(2)} * Q2^{(-1)} + (c23/(2 * S)) * S3^{(2)} * Q3^{(-1)} + (c24/(2 * S)) * S4^{(2)} * Q4^{(-1)} + (c25/(2 * S)) * S5^{(2)} * Q5^{(-1)};$$

$$\text{Viabilidade} = \text{viavel}(\text{A}, \text{b}, \text{szs}, \text{SolPRIMAL}', \text{err} \cdot \text{viavel});$$

$$\text{Objetivo} = \text{calcular} \cdot \text{funcao} \cdot \text{objetivo}(\text{A}, \text{b}, \text{szs}, \text{SolPRIMAL}');$$