UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Jordan Mendes Souza

Um estudo abstrato em Análise: Espaços Métricos

Rio Tinto – PB
2018

Jordan Mendes Souza

Um estudo abstrato em Análise: Espaços Métricos

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Rio Tinto – PB
2018

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729e Souza, Jordan Mendes.
Um estudo abstrato em Análise: Espaços Métricos / Jordan Mendes Souza. – Rio Tinto, 2018.
67 f.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Análise. 2. Espaços métricos. 3. Espaços completos. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/BC

Jordan Mendes Souza

Um estudo abstrato em Análise: Espaços Métricos

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Aprovado em 29 de Outubro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior - UFCG

Prof. Dr. Hélio Pires de Almeida - UFPB

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB
Orientador

Dedicatória

Aos meus pais, Marlene Mendes e Joseilton Souza, e ao professor Lúcio Athayde.

Agradecimentos

Ao Grande Geômetra do Universo, a ordem em meio ao caos.

A minha mãe, Marlene Mendes, que nunca desistiu de mim, mesmo nos momentos difíceis. Ao meu pai, Joseilton Souza, que mesmo sabendo dos obstáculos que enfrentaria sempre esteve ao meu lado sendo o meu melhor amigo. Aos meus pais serei eternamente grato por terem me ensinado o caminho do bem e a importância do estudo.

Ao professor Jamilson Ramos Campos, meu orientador. Não há nenhum exagero de minha parte ressaltar que o professor Jamilson contribuiu de maneira extremamente substancial na minha formação acadêmica. Nos dois anos de iniciação científica que tive o privilégio de participar, sob sua orientação, aprendi e desenvolvi habilidades que mesmo eu tinha dúvidas de que conseguiria. A forma como o professor Jamilson une a pesquisa científica e a atuação como educador matemático sempre será, para mim, uma referência. Devo a ele a minha escolha pela carreira matemática.

Ao professor Lúcio Athayde quero deixar expressa aqui a minha maior admiração e respeito. Se não fosse por sua atenção investida, muito provavelmente eu não estaria seguindo uma carreira acadêmica. Ao professor Lúcio devo o meu despertar para a carreira científica e a ele serei eternamente grato. Estendo também o agradecimento para a sua esposa, a professora Licionéia Athayde.

A Universidade Federal da Paraíba e ao CNPq, pelo apoio financeiro na bolsa de iniciação científica que contribuiu de maneira substancial em minha formação.

Aos membros da banca examinadora, que muito me honraram com suas avaliações e sugestões. Aqui destaco o professor Claudemir Fidelis, o qual tive a honra de tê-lo como professor no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Sua presença na banca foi bastante significativa.

Outros nomes que jamais poderia deixar de citar são os professores Hélio Pires (também membro da banca examinadora), cujas aulas me encantaram durante os períodos iniciais do curso; Marcos André, pelo exemplo de educador que se mostrou, despertando ainda mais a minha curiosidade pela Matemática. Bastava alguns minutos de conversa com o professor Marcos e me sentia ainda mais estimulado para estudar a rainha das ciências. Aos professores Elias Filho, Emanuel Falcão, e Joseilme Golveia, que me proporcionaram uma excelente aprendizagem e valiosos conselhos, destino também a minha humilde gratidão.

Não poderia de nenhuma maneira esquecer de citar as professoras Agnes Liliane e Claudilene Gomes, por tantas aprendizagens obtidas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. Agradeço também as professoras Graciana Dias, Alissá Grymusa, Cristiane Souza, Cristiane Ângelo e Jussara Patrícia, por terem contribuído de maneira significativa na minha formação docente.

Agradeço aos meus amigos Lenildo Bezerra, Misael Rodrigues, Silvino Gilvan e Julyete Lizandra, que se mostraram verdadeiros irmãos (e irmã) durante tanto tempo. Para eles os meus mais sinceros agradecimentos, pelo apoio e o encorajamento. Não esqueceria jamais de aqui também citar José Carlos, Erisson Fernandes, Patrícia Karoline, Josy, Fátima Gomes, Edileide Alves, Francyelle, Clécia e Thais, pela amizade sincera que conservamos.

Agradeço imensamente o apoio de minha tia, Luzinete Souza. Da mesma forma, estendo o agradecimento aos meus primos Eduardo Mendes, Rita de Cássia, Nicácio Souza, Allan Cácio, Lorena Maria, Maria Caroline e o pequeno João Havi, por tantos momentos agradáveis. Também estendo o agradecimento a Sayonara Albuquerque e João Batista Neto.

Finalizando, gostaria de prestar uma singela homenagem para Sebastiana Souza da Silva, minha avó (in memoriam). As lembranças dos momentos felizes são eternas.

"Follow your steps and you will find, the unknown ways are on your mind, need nothing else than just your pride to get there. Go!"

Angra

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma introdução à teoria dos espaços métricos, buscando uma generalização de conceitos estudados num curso introdutório de Análise Real. Inicialmente fazemos algumas considerações acerca da importância da temática. Em seguida, revisamos os principais tópicos estudados no escopo de um curso introdutório de Análise e que são importantes para o nosso trabalho. Em seguida, apresentamos uma introdução aos principais conceitos da teoria dos espaços métricos, apresentando também diversos exemplos de espaços com esta estrutura. Por fim, para complementar o nosso estudo, tratamos dos espaços métricos completos.

Palavras-chave: Análise, espaços métricos, espaços completos.

Abstract

The main purpose of this paper is to present an introduction to the theory of metric spaces, searching for a generalization of concepts studied in the scope of an introductory course of Real Analysis. Initially we make some considerations about the importance of the theme. Next, we review the main topics studied in an introductory course in Analysis that are important to our work. Next, we present an introduction to the main concepts of the metric spaces theory, also presenting several examples of spaces with this structure. Finally, to complement our study, we deal with the complete metric spaces.

Keywords: Analysis, metric spaces, complete spaces.

Conteúdo

Introdução

A Análise Real é uma das disciplinas mais importantes nos estudos da chamada Matemática Pura nos cursos de graduação em Matemática, tanto Licenciatura quanto Bacharelado. As ferramentas que esta disciplina fornece ao estudante desse nível o permitem tratar o Cálculo num contexto mais rigoroso e lhe abrem caminho para diversas outras áreas da Matemática, como a Análise Funcional e a Topologia, para citar alguns exemplos.

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo introdutório da teoria dos espaços métricos. A escolha desta temática surgiu durante a participação do autor no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), durante os anos de 2016 a 2018.

A grosso modo, um espaço métrico é um conjunto, de natureza arbitrária, onde se é possível definir/estabelecer distâncias entre os seus elementos. Através desta estrutura é possível generalizar conceitos estudados em Análise, como são os casos dos limites e da continuidade de funções em $\mathbb{R}$.

Este trabalho consiste de quatro capítulos. No Capítulo 1, fazemos algumas considerações históricas, ressaltando a importância da generalização do conceito de distância, a importância do rigor no estudo da Análise e uma motivação para o estudo dos espaços métricos. Ao final do capítulo apresentamos quatro curtas biografias de matemáticos de destaque na área de nosso estudo.

No capítulo 2 realizamos uma revisão dos principais tópicos estudados num curso introdutório de Análise Real e que são base para nossa investigação, dando enfase aos números reais, as sequências numéricas, a topologia na reta, ao limite de uma função real numa varável real e as funções contínuas.

No capítulo 3 apresentamos os tópicos mais importantes para um estudo introdutório acerca dos espaços métricos. Neste capítulo, definimos espaço métrico e apresentamos como exemplo o caso do próprio espaço $\mathbb{R}$, o espaço euclidiano ($\mathbb{R}^n$) e o espaço das funções limitadas. Ainda neste capítulo apresentamos três tipos de espaços métricos de características especiais: os espaços vetoriais normados, os espaços vetoriais com produto interno e o produto cartesiano de espaços métricos.

Ainda no Capítulo 3 apresentamos a generalização do conceito de vizinhança através dos conceitos de bola e esfera, novamente apresentando exemplos. Os conjuntos limitados são também abordados neste capítulo, de modo que enunciamos e demonstramos alguns resultados. Apresentamos as sequências em espaços métricos e trabalhamos com as funções contínuas, trabalhando resultados básicos no contexto do estudo destas funções na teoria dos espaços métricos. Ao final, apresentamos e demonstramos algumas propriedades elementares.

O Capítulo 4 consiste de um complemento de nossos estudos, onde procuramos generalizar o conceito de corpo ordenado completo para espaços que não possuem uma ordem definida. Apresentamos os espaços tratando-os tanto em dimensão finita quanto em dimensão infinita e apresentamos alguns espaços de sequências clássicos: o espaço das sequências de escalares que convergem para zero, o espaço das sequências eventualmente nulas, o espaço das sequências reais p-somáveis e o espaços das sequências quadrado somáveis.

Capítulo 1

Considerações Iniciais

Neste capítulo apresentamos algumas considerações iniciais (históricas, em particular), sobre a importância do estudo dos espaços métricos e destacamos alguns proeminentes pesquisadores que contribuíram para o desenvolvimento desta teoria. As fontes das informações aqui apresentadas foram [1, 4, 7, 12, 15, 16, 17] e [18].

1.1 A generalização do conceito de distância e sua importância

O conceito de distância é um dos mais importantes em Matemática. De fato uma grande variedade de outros conceitos dependem exclusivamente desta ideia. Um bom exemplo disso é a ideia de limite, algo vital para o entendimento do cálculo diferencial e integral. Pensar em um número se aproximando de outro, mas nunca se igualar a ele, é essencialmente perceber que sempre haverá uma certa distância que os separa.

Com os estudos de Análise Real (ou Análise na Reta), o estudante, de certa maneira, reaprende toda a teoria que outrora estudara, desta vez com o rigor necessário para compreender como estão fundamentados os conceitos que outrora aceitara sem esmerar-se em seus pormenores, como é o caso da continuidade, por exemplo.

Mesmo nos cursos de Análise (em sua grande maioria) constata-se a ausência de um aprofundamento do estudo do conceito de distância; para comprovar este fato basta conferir alguns dos livros didáticos clássicos utilizados nestes cursos, como [1] [12] e [13] por exemplo. Tal característica é compreensível, posto que foge do escopo da disciplina uma investigação mais detalhada de uma generalização do conceito de distância. No entanto essa tarefa é exatamente uma das pretensões da teoria dos espaços métricos.

A teoria dos espaços métricos busca generalizar alguns conceitos estudados em Análise

Real, especialmente aqueles relacionados aos conceitos topológicos. A disciplina Espaços Métricos é obrigatória no curso de Bacharelado em Matemática e opcional na maioria dos cursos de licenciatura. Infelizmente, há casos em que nem como opcional essa disciplina é oferecida. Devido a este fato, uma quantidade considerável de licenciandos terminam a graduação sem uma noção adequada acerca do conceito matemático de distância com o rigor que a teoria dos espaços métricos fornece, o que acarreta muitas vezes que estes estudantes pensem erroneamente já terem visto tudo, ou mais ainda, que já aprenderam tudo que o Cálculo e a Análise os tinham para oferecer.

A importância do estudo da teoria dos espaços métricos para a Matemática Pura reside no fato de que este conteúdo é essencial para a compreensão de diversos outros ramos de pesquisa, como por exemplo a Análise Funcional e a Topologia. No âmbito dos estudos da Licenciatura esta teoria fornece uma base sólida à compreensão do Cálculo e da sua versão rigorosa, a Análise, disciplinas que são de extrema importância para o desenvolvimento do estudo necessário para que o professor de Matemática da educação básica tenha uma formação plena e abrangente.

Ainda durante um curso de Análise Real, o aluno tem o primeiro contato com a Topologia. Esta área da Matemática, como dito por Lima [11], procura estabelecer de maneira generalizada a noção de limite, as propriedades das funções contínuas e dos conjuntos em que estas funções tomam valores. Contudo, aponta Lima [11], só se tem sentido determinar o limite ou refletir sobre a continuidade de uma função, o domínio e o contradomínio da mesma, se a tal função possuir um certo tipo de estrutura chamada "espaço topológico". É sabido que todo espaço métrico é um espaço topológico, no entanto, pode-se encontrar exemplos de espaços topológicos que não são espaços métricos.

A noção de vizinhança, estudada no curso de Análise Real, é mais intuitiva em espaços métricos do que em espaços topológicos, sendo assim para uma compreensão adequada da Topologia, deve-se primeiro estudar a teoria dos espaços métricos, posto que o estudante pode realizar um estudo mais generalizado dos conceitos vistos no curso de Análise Real.

Existem diversos casos de alunos da Licenciatura que após concluírem a graduação optam por uma pós-graduação na área de Matemática Pura. Estes, porém, enfrentam certas dificuldades no aprendizado, pois muitas das disciplinas que o Bacharelado oferece, a Licenciatura não contempla. Nestes casos, percebe-se a necessidade de um conhecimento básico acerca da teoria dos espaços métricos.

1.2 Sobre a necessidade do rigor em análise

No século XVII, os matemáticos, levados pela grande aplicabilidade do cálculo diferencial e integral, chegaram a uma série de questionamentos que colocavam em cheque a validade de muitos conceitos estudados e utilizados até aquele momento sem grandes questionamentos e até de forma intuitiva.

Como bem descreve Eves [7], os matemáticos de outrora eram tangidos pela aplicabilidade imensa do assunto e careciam de um entendimento real dos seus fundamentos. Eles manipulavam os processos analíticos de uma maneira quase cega, muitas vezes guiados apenas pela intuição. Como resultado, eles acumulavam absurdos, até que, como reação natural ao emprego desordenado do intuicionismo e do formalismo, alguns deles, conscienciosos, se sentiram na obrigação de tentar estabelecer uma fundamentação rigorosa para a análise.

Com o intuito de tornar a Análise mais rigorosa, surge na segunda metade do século XIX o movimento que ficou conhecido como aritmetização da análise. O principal objetivo dos pesquisadores que contribuíram para este movimento era buscar a abolição do uso da intuição geométrica das demonstrações.

Como nos diz Eves [7], o primeiro a sugerir uma possível solução para o estado dubitável dos fundamentos da Análise foi o matemático francês Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783), ao perceber, em 1754, que era necessária uma teoria dos limites mais consistente. Embora a sugestão parecesse de grande significância, até o ano de 1821 não houve êxito em seu desenvolvimento. O primeiro matemático que de fato apresentou uma solução para o problema foi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). A tentativa de Lagrange baseava-se na representação de uma função por uma expansão em série de Taylor, contudo, tal empreendimento não obteve o sucesso desejado.

Consta ainda em [7] que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pôs em prática com êxito a sugestão de d'Alembert, e assim conseguiu desenvolver uma teoria de limites mais rigorosa, de modo que através dela foi possível definir continuidade, diferenciabilidade e integral definida.

O matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) apresentou à comunidade acadêmica uma função um tanto quanto curiosa para à época. Esta função é contínua em todos os valores irracionais, no entanto, é descontínua para quaisquer valores racionais. Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 - 1897) por sua vez, apresentou uma função que era contínua e não derivável. Estas patologias fizeram os matemáticos perceberem que até então a teoria dos limites estava baseada em conceitos intuitivos do sistema de número reais.

Foi por intermédio de Karl Weierstrass e seus colaboradores, que a arimetização da análise enfim se estabeleceu. Boa parte dos resultados obtidos por estes matemáticos, incluindo os trabalhos de Georg Cantor (1845 - 1918), que se preocupou em formalizar o conceito de infinito dando o rigor matemático, são estudados de maneira introdutória na graduação, tanto na Licenciatura quanto no Bacharelado, na disciplina de Análise Real.

O conceito de espaço métrico foi introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (1878 - 1973). Nesta época a Análise Moderna, fundamentada no rigor, ainda estava começando a se desenvolver e a abordagem axiomática da matemática não era demasiadamente comum. Os pesquisadores da época de Fréchet trabalhavam com diversos espaços, todos possuindo noções distintas de convergência, de modo que para cada espaço era definida uma noção diferente.

Devido as semelhanças que foram encontradas nestes espaços e nas várias noções de convergência, Fréchet percebeu a importância da unificação de todos argumentos. A partir deste ponto ele propõe a axiomatização do conceito de distância e prova que os espaços outrora estudados separadamente são todos exemplos de um tipo especial de espaço, "o métrico". Assim, pode-se dizer que o conceito de espaço métrico é a axiomatização da noção de distância.

1.3 Alguns personagens de destaque

Além dos matemáticos já citados neste capítulo, incluímos aqui quatro curtas biografias de pesquisadores que foram/serão citados ao longo do texto e que julgamos importantes no âmbito da teoria dos espaços métricos.

1.3.1 Maurice René Fréchet

Maurice René Fréchet (1878 - 1973) foi um proeminente matemático francês que em sua tese de doutorado, defendida em 2 de abril de 1906, propõe pela primeira vez conceito de espaço métrico, embora essa terminologia não tenha sido utilizada por ele.

A importância do trabalho proposto por Fréchet reside no fato de que ela apresenta um sistema axiomático da Análise, ao mesmo tempo que fornece uma abordagem abstrata para conceitos até então estudados separadamente.

Fréchet foi o primeiro a usar a terminologia Espaço de Banach para se referir aos os espaços vetoriais normados completos munidos com a métrica induzida pela norma e introduziu ainda os termos convergência uniforme e continuidade uniforme

Os trabalhos mais expressivos de Maurice Fréchet são: *Les Espaces abstrait* de 1928, Récherchés théoretiques modernes sur la théorie des probabilités de 1937, Introduction à la *Topologie Combinatoire* de 1946, *Pages choisies d'analyse générale* de 1953 e *Les Mathématiques et le concret* de 1955.

1.3.2 Felix Hausdorff

Felix Hausdorff (1868 - 1942), foi um matemático alemão que deu consideráveis contribuições para a matemática, ajudando a Topologia se tornar uma área de destaque na pesquisa científica. Suas principais contribuições concentraram-se nas áreas de Teoria de Conjuntos e Topologia. Foi o primeiro a usar a terminologia "espaço métrico" para descrever o objeto matemático proposto por Maurice Fréchet em sua tese de doutorado.

Não foi apenas a Matemática que despertou o interesse investigativo de Hausdorff, o alemão foi também influenciado pela astronomia. Sua tese de doutorado, "*Zur Theorie der* *astronomischen Strahlenbrechung*", de 1891, por exemplo, tratou da refração e a extinção da luz na atmosfera. Trabalhou ainda nos campos da Filosofia e da Literatura e, nesta ultima, publicou uma série de trabalhos sob o pseudônimo de Paul Mongré.

A partir de 1904 Hausdorff passa a trabalhar efetivamente nas áreas em que é comumente lembrado: a Topologia e a Teoria de Conjuntos. Ele introduz o conceito de conjunto parcialmente ordenando e demonstra uma série de resultados para este tipo de conjunto.

Em 1914, tomando por base o trabalho de Fréchet, Hausdorff publicou um de seus trabalhos mais populares, a saber, *Grundzüge der Mengenlehre*, onde apresenta à comunidade acadêmica resultados acerca da teoria dos espaços métricos e topológicos. Neste trabalho é desenvolvido uma teoria que engloba os resultados conhecidos anteriormente apresentando novos teoremas.

Dentre os principais trabalhos de Hausdorff destacamos aqui o já mencionado *Grundzüge der Mengenlehre* de 1914 e *Dimension und äusseres Mass*, de 1919, em que introduz a noção de dimensão de Hausdorff.

1.3.3 Stefan Banach

Stefan Banach (1892 - 1945) foi um matemático oriundo da Polônia que contribuiu com importantes trabalhos em Análise Funcional, uma área da matemática cuja teoria dos espaços métricos está fortemente envolvida.

Na década de 1920, Banach introduz (embora à época não tenha sido o único) de maneira axiomática o que Fréchet denominou de Espaço de Banach, nome utilizado até hoje para designar os espaços vetoriais normados (reais ou complexos) que são completos com a métrica induzida por uma norma. A essa norma pode-se associar uma distância, que permite tratar do conceito de convergência com maior formalidade.

Banach apresentou diversos resultados em teoria dos operadores lineares e vários teoremas que carregam o seu nome até os dias atuais (como o Teorema de Hahn-Banach, sobre a extensão dos operadores lineares contínuos e o Teorema de Banach-Steinhaus, sobre famílias de aplicações limitadas, para citar exemplos).

Dentre as principais publicações de Banach destacamos o notável *Théorie des opérations linéaires*, de 1932.

1.3.4 David Hilbert

Nascido em Königsberg, atual cidade de Kaliningrado, David Hilbert (1862 - 1943) foi um dos matemáticos mais prolíficos de seu tempo. Os estudos desenvolvidos se traduzem em importantes contribuições para a Matemática.

O trabalho de Hilbert se concentrou em várias áreas, sendo as principais a Geometria, a Teoria dos Números (em especial a teoria dos números algébricos) e a Análise. Os espaços vetoriais munidos com produto interno são chamados Espaços de Hilbert em sua homenagem.

No ano de 1900, Hilbert apresenta no 2º Congresso Internacional de Matemática vinte e três problemas que influenciaram substancialmente o trabalho dos pesquisadores até então. Alguns desses problemas estão abertos até os dias de hoje, como é o caso da Hipótese de Riemann (esta aparentemente foi resolvida em 2018 pelo respeitado matemático Michael Atiyah).

Ele recebeu diversas honrarias por suas contribuições à ciência, algumas que merecem destaque ocorreram em 1905, quando recebeu menção honrosa pela Academia Húngara de Ciências; em 1910, quando foi agraciado com o Prêmio Bolyai e em 1928, ano em que foi eleito membro da Royal Society, de Londres.

Capítulo 2

Estudo do caso particular da reta

O objetivo desse capítulo é apresentar um espaço métrico bem particular e já bastante conhecido de todos: o espaço $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, onde $|\cdot|$ é o módulo. Claro que, como dissemos na introdução do trabalho, os cursos de análise em licenciaturas não o apresentam como tal.

Faremos isso neste momento para que no próximo capítulo, quando de fato estudarmos um pouco da teoria abstrata de espaços métricos, já tenhamos um bom exemplo e possamos discutir diversos aspectos importantes relacionados à essa teoria.

Assim, faremos a revisão de alguns conceitos de Análise Real estudados no escopo de um curso de graduação. Pelo caráter elementar que este conteúdo possui em nosso estudo, omitiremos as demonstrações da maior parte das proposições apresentadas, nos restringindo apenas as que são essenciais. Outro fato que deve ser levado em consideração é o de que alguns conceitos mais ligados a Álgebra foram tradados de maneira mais prática, sem maiores detalhes pois fugiria ao escopo deste trabalho o aprofundamento em tais temas. Todo o capítulo está baseado nas obras [1, 5, 8, 12, 13] e [19], de modo que o leitor que necessite de maiores detalhes poderá consultá-las.

2.1 Números Reais

Quando dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo, significa que em $\mathbb{R}$ estão definidas as duas operações $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada de soma, que para cada par ordenado (x, y), de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ faz corresponder a sua soma $x+y \in \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada de multiplicação (ou produto), que para cada par ordenado (x, y), de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ faz corresponder o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$, que satisfazem os axiomas:

i) Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

ii) Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

iii) Elementos neutros: Existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos, chamados de 0 e 1, tais que $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}$.

iv) Elementos inversos: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um *inverso aditivo* $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x) = 0$ e se $x \neq 0$, existe um *inverso multiplicativo* $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

v) Distributividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Observação 2.1.1 O conceito de corpo é, de fato, bem mais abstrato do que o que foi apresentado, no entanto foge do escopo do nosso estudo entrar em maiores detalhes.

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares de manipulação no conjunto dos números reais.

Mais que isso, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Isso significa que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos *números reais positivos*, que satisfazem as seguintes condições:

C1 A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Em símbolos: $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

C2 Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$, ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Escreve-se $x < y$, e diz-se que x é menor do que y, quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$, onde z é positivo. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é maior do que x. Em particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, que $-x \in \mathbb{R}^+$.

Valem as seguintes propriedades da relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$:

(i) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

(ii) Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$, ou $y < x$.

(iii) Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$.

(iv) Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se, porém, $z < 0$ então $x < y$ implica $yz > xz$.

A relação de ordem em $\mathbb{R}$ permite definir o *valor absoluto* (ou módulo) de um número real $x \in \mathbb{R}$, representado por $|x|$, pondo-se $|x| = x$ se $x > 0$, $|0| = 0$, e $|x| = -x$ se $x < 0$. Noutras palavras, $|x| = \max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Proposição 2.1.2 *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então:*

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Desigualdade triangular).*

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Demonstração. Vamos provar (i). Note que somando membro a membro as desigualdades $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$ resulta $|x| + |y| \geq x + y$. De modo análogo, de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ resulta $|x| + |y| \geq -(x + y)$. Logo $|x| + |y| \geq |x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\}$. ■

Proposição 2.1.3 *Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$. Tem-se $|x - a| < \delta$ se, somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.*

Demonstração. Como $|x - a|$ é o maior dos dois números $x - a$ e $-(x - a)$, afimar que $|x - a| < \delta$ é equivalente a dizer que se tem $x - a < \delta$ e $-(x - a) < \delta$, ou seja, $x - a < \delta$ e $x - a > -\delta$. Somando a, vem: $|x - a| < \delta \Leftrightarrow x < a + \delta$ e $x > a - \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$. ■

De modo análogo mostra-se que $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$.

Em termos de intervalos, o que o teorema anterior afirma é que $|x - a| < \varepsilon$ se, e somente se, $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; e de modo análogo, $|x - a| \leq \varepsilon$ se, e somente se, $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Partindo para uma abordagem geométrica, é conveniente pensar no conjunto $\mathbb{R}$ como uma reta e os números reais como pontos nesta reta. Neste caso a relação $x < y$ significa que o ponto x está à esquerda de y (e y a direita de x), os intervalos são segmentos de retas e $|x - y|$ é tida como a distância do ponto x ao ponto y.

Da Proposição 2.1.3 também segue que o intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ é formado pelos pontos que distam do ponto a menos do que δ.

Proposição 2.1.4 *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, a distância entre x e y é dada por $|x - y|$.*

Demonstração. Seja d a distância entre x e y. Se $x < y$ então $d = y - x$ e neste caso, $|x - y| = -(x - y) = y - x = d$. Caso seja $x > y$ então $d = x - y$ e $|x - y| = x - y = d$. ■

Veremos no próximo capítulo uma generalização deste conceito através do estabelecimento da noção de métrica.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$, para todo $x \in X$. Neste caso diz-se que a é *cota superior* de x. Analogamente diz que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x$, para todo $x \in X$. O número b chama-se então uma *cota inferior* de X. Se X é limitado superior e inferiormente diz-se que X é *limitado.*

Definição 2.1.5 Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se *supremo* do conjunto X, e escreve-se $a = \sup X$ quando este é a menor das cotas superiores de X

Definição 2.1.6 Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se *ínfimo* do conjunto X, e escreve-se $b = \inf X$, quando este é a maior das cotas inferiores de X.

Quando é dito que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $a = \sup X \in \mathbb{R}$. De modo análogo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo. Note que para este caso o conjunto $Y = \{-x; x \in X\}$ é não vazio e limitado superiormente, o que implica que possui um supremo $a \in \mathbb{R}$. Dai, é fácil ver que o número $b = -a$ é o ínfimo do conjunto Y.

Algumas propriedades da completude do conjunto dos números reais são:

i) O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente;

ii) O ínfimo do conjunto $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ é igual a 0;

iii) Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x > y$.

Estas propriedades são equivalentes e significam que $\mathbb{R}$ é um corpo *arquimediano.*

Outras propriedades interessantes de $\mathbb{R}$ dizem respeito a enumerabilidade[1], por exemplo: o conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável e que todo intervalo não degenerado em $\mathbb{R}$ é também não enumerável.

2.2 Sequências de números reais

Nesta Seção revisaremos as definições e principais propriedades ligadas ao estudo das sequências de números reais.

Definição 2.2.1 Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um numero real x_n, chamado o *n-ésimo termo da sequência.*

Para representar uma sequência é comum escrever $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ou simplesmente (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.

Definição 2.2.2 Uma sequência (x_n) é dita *limitada superiormente* (respectivamente inferiormente) quando existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant K$ (respectivamente $x_n \geq K$), para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso a sequência x_n considerada seja limitada inferior e superiormente diremos apenas que é *limitada*, ou seja, existe $K > 0$ tal que $|x_n| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1]Não entraremos em maiores detalhes deste conceito. O leitor que necessitar de maiores informações poderá encontrá-las nas obras [[12], Capítulo 2] e [[13], Capítulo 3].

Definição 2.2.3 Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma *subsequência* de x é a restrição da função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}^{'} = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$.

Escrevemos $x^{'} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^{'}}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, ou $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x^{'} = x|_{\mathbb{N}^{'}}$.

Uma dos principais conceitos desta seção é o limite de sequências de números reais, definido logo abaixo.

Definição 2.2.4 Diz-se que um número real a é limite de uma sequência (x_n) quando para todo número real $\varepsilon > 0$, dado de maneira arbitrária, pode se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$. em símbolos:

$$a = \lim x_n \;.\equiv.\; \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

O símbolo $.\equiv.$ significa que o que vem depois é a definição do que vem antes.

De maneira geral, podemos dizer que $a = \lim x_n$ significa que todo intervalo aberto centrado em a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$), onde n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado.

Dizemos que uma sequência é *convergente* quando possui limite, e *divergente* quando não possui.

É conveniente lembrar aqui que, resulta diretamente da definição de limite que

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0.$$

A proposição a seguir coleta alguns dos primeiros resultados estudados num curso de análise sobre limites.

Proposição 2.2.5 *Seja (x_n) uma sequência. Então:*

i) *(x_n) não pode convergir para dois limites distintos, isto é se o limite de (x_n) existe, então ele é único.*

ii) *Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para a.*

iii) *Se (x_n) converge, então é uma sequência limitada.*

Nos estudos de sequências de números reais, o estudo da monotonia recebe, pela sua importância, uma atenção particular.

Definição 2.2.6 Uma sequência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso diz-se que a sequência (x_n) é *monótona não-decrescente* e, no segundo caso, que (x_n) é *monótona não-crescente.* Caso tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$), diremos que a sequência é *crescente* (respectivamente *decrescente*).

Toda sequência monótona não-decrescente (respectivamente não-crescente) é limitada inferiormente (respectivamente superiormente) pelo seu primeiro termo. É fácil ver que a fim que uma sequência monótona seja limitada é necessário e suficiente que ela possua uma subsequência limitada.

A próxima proposição, cuja demonstração apresentaremos, nos garante uma condição suficiente para que uma sequência seja convergente.

Proposição 2.2.7 *Toda sequência monótona limitada é covergente.*

Demonstração. Seja (x_n) monótona, digamos não-decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e dai $\lim x_n = a$. ■

Analogamente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores de x_n.

Embora a limitação não implique em convergência, o próximo teorema nos mostra uma característica importante de uma sequência limitada de números reais.

Teorema 2.2.8 (Teorema de Bolzano - Weierstrass.) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Para provar a veracidade desta proposição basta provarmos que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo (x_n) da sequência dada é *destacado* quando $x_n \geq x_p$, para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. ■

Os próximas duas últimas proposições apresentam algumas operações com limites de sequência de números reais.

Proposição 2.2.9 *Se* $\lim x_n = 0$ *e* y_n *é uma sequência limitada (convergente ou não) então* $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Proposição 2.2.10 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então:*

i) $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

iii) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$.

2.3 Noções de topologia

A topologia é uma ramo da matemática no qual as noções de limite e continuidade são estudadas de maneiras generalizadas. Esta seção apresenta alguns conceitos básicos de topologia referentes a subconjuntos da reta.

Definição 2.3.1 Um ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um certo número $\varepsilon > 0$ de modo que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está inteiramente contido em X.

O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado de *interior* do conjunto X, e é representado por $\operatorname{int} X$. Quando $a \in \operatorname{int} X$ diz-se que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto a. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *aberto* quando $A = \operatorname{int} A$, ou seja quando todos os pontos do conjunto A são interiores.

Observação 2.3.2 O limite de uma sequência pode agora ser reformulado através do conceito de conjuntos abertos, ou seja, $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

A próxima proposição lida com as construções mais naturais a se considerar quando tratamos de conjuntos: a interseção e a união.

Proposição 2.3.3 *Valem as seguintes afirmações:*

a) *Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.*

b) *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

Um resultado imediato de a), na proposição anterior, é que a interseção $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ de uma quantidade finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Mesmo que por b) a reunião de uma infinidade de conjuntos abertos seja ainda aberta, a interseção de uma quantidade infinita de abertos não necessariamente é aberta, como mostra o próximo exemplo:

Exemplo 2.3.4 Considere a família de abertos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcap_n A_n = \{0\}$. De fato, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > \frac{1}{n}$, logo $x \notin A_n$, donde $x \notin A$. Claro que $\{0\}$ é fechado pois não possui pontos interiores.

A seguir, definiremos o conceito de *ponto de fronteira* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.3.5 Diz-se que um ponto $a \in X$ é um ponto de fronteira do conjunto $X \subset \mathbb{R}$, se toda vizinhança V de a contém pontos de X e do complementar de X, isto é, $V \cap X \neq \emptyset$ e $V \cap (\mathbb{R} - X) \neq \emptyset$. Chama-se *fronteira* de X ao conjunto formado por todos os pontos de fronteira de X.

Apresentaremos a partir deste ponto a definição e algumas propriedades elementares dos conjuntos fechados, introduzindo primeiro o conceito de ponto aderente, ideia base para os estudos que se seguem.

Definição 2.3.6 Diz-se que um ponto a é *aderente* a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$.

É fácil ver que todo ponto a de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aderente a X. Com efeito, basta escolher $x_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$, que é formado por todos os pontos aderentes a X. Tem-se $X \subset \overline{X}$. Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X. Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é denso em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo ponto $b \in Y$ é aderente a X.

Exemplo 2.3.7 *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

A seguir apresentamos uma caracterização dos pontos de aderência que segue diretamente da definição. Este fato é consideravelmente útil para a demonstração de diversas outras propriedades dos conjuntos fechados.

Proposição 2.3.8 *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Segue desta proposição que, a fim de que um ponto a não pertença a $\overline{X}$ é necessário e suficiente que exista uma vizinhança $V \ni a$ tal que $V \cap X = \emptyset$. Um outro resultado advindo da proposição anterior é o fato de que o fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.

A próxima proposição apresenta uma relação entre conjuntos fechados e abertos que simplifica consideravelmente a demonstração da proposição que a segue, que trata da união e da interseção de fechados.

Proposição 2.3.9 *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Proposição 2.3.10 *São válidas as afirmações:*

a) *Se* F_1 *e* F_2 *são fechados então* $F_1 \cup F_2$ *é fechado.*

b) *Seja* $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção* $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ *é um conjunto fechado.*

Muito embora exista a noção de que um objeto não pode ser duas coisas ao mesmo tempo, quando se trata de conjuntos abertos e fechados tais características não são necessariamente excludentes.

Observação 2.3.11 Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Para uma demonstração desse fato, veja ([12], pág. 136).

Um dos conceitos essenciais que está por trás da definição de limite é o de ponto de acumulação.

Definição 2.3.12 Diz que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a. Em símbolos: $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

A definição acima significa que dado qualquer $\varepsilon > 0$, se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$, então a é um ponto de acumulação. Indicamos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X. Portanto, $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz-se que a é um *ponto isolado* de X. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$, de modo que a é o único ponto do conjunto X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Caso todos os pontos do conjunto X sejam isolados, chamamos este conjunto de *discreto*.

Apresentamos uma caracterização importante para pontos de acumulação.

Proposição 2.3.13 *Dados* $X \subset \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathbb{R}$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *a é ponto de acumulação de* X;

ii) *a é limite de uma sequência de pontos* $x_n \in X - \{a\}$;

iii) *Todo intervalo aberto de centro em a contém uma infinidade de pontos de* X.

Um fato que segue desta proposição é que se o conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto é não vazio, então este conjunto é infinito.

O próximo teorema nos apresenta uma nova versão do teorema de Bolzano-Weierstrass, agora em termos de ponto de acumulação.

Teorema 2.3.14 (Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Uma maneira alternativa de analisarmos um conjunto fechado é dada pela seguinte

Proposição 2.3.15 *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Ou seja, o fecho de um conjunto X é obtido acrescentando-se a X os seus pontos de acumulação.*

Segue desta proposição que uma condição necessária e suficiente para que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ seja fechado, é que se tenha $X' \subset X$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *compacto* quando é fechado e limitado. Todo conjunto finito é compacto. Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Por outro lado, (a, b) é limitado mas não é fechado, e portanto não é compacto. A próxima proposição estabelece uma condição necessária e suficiente para que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ seja compacto.

Proposição 2.3.16 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em X. Como X é compacto, (x_n) é limitada (pois X é limitado), logo pelo Teorema 2.3.14 possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de X (pois X é fechado). Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência (x_n) em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X. Assim, X é limitado porque, se não o fosse, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. A sequência (x_n), assim obtida, não possuiria subsequência limitada, logo não possuiria subsequência convergente. Além disso, X é fechado, pois, se não o fosse, existiria um ponto $a \notin X$ com $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in X$. Neste caso, a sequência (x_n) possuiria nenhuma subsequência convergindo para um ponto de X, pois todas as suas subsequências teriam limite a. Portanto X é compacto. ∎

Note que se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, então $a = \sup X$ e $b = \inf X$, que são pontos de acumulação de X, pertencem a X. Assim, todo compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo, ou seja, X compacto $\Rightarrow \exists\ x_1, x_2 \in X$ tais que $x_1 \leq x \leq x_2$, para todo $x \in X$.

Para encerrar os nossos comentários acerca dos conjuntos compactos, apresentaremos o Teorema de Borel-Lebesgue. Antes porém é preciso definir o conceito de cobertura.

Chama-se *cobertura* de um conjunto compacto X a uma família de conjuntos $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ cuja união contém X. A condição $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ significa que, para cada $x \in X$, deve existir (pelo menos) um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Quando $L = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ é um conjunto finito, diz-se que $X \subset C_{\lambda_1} \cup ... \cup C_{\lambda_n}$ é uma *cobertura finita.* Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$, diz-se que $\{C_{\lambda'}\}_{\lambda' \in L'}$ é uma *subcobertura* de C.

Teorema 2.3.17 (Borel-Lebesgue.) *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.*

A recíproca deste teorema também é verdadeira, ou seja, se toda cobertura aberta de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui uma subcobertura finita então X é limitado e fechado. (ver [12], pág. 144)

2.4 Limites de funções

Nesta seção é tratado o conceito de limite de maneira geral, onde consideraremos uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$.

Considere $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X.

Definição 2.4.1 Diz que o número real L é *limite* de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Em símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;.\equiv.\; \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Na definição de limite é essencial que a seja um ponto de acumulação do conjunto X mas é irrelevante que a pertença ou não a X, isto é que f esteja ou não definida no ponto a.

Nas condições da definição, negar que se tem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ equivale a dizer que existe um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$, pode-se sempre encontrar $x_\delta \in X$ tal que $0 < |x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon$.

A proposição seguinte mostra que a desigualdade de dois limites num ponto $a \in \mathbb{R}$ implica na desigualdade das respectivas funções nos pontos em uma vizinhança de a.

Proposição 2.4.2 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, para todo $x \in X$ com $0 < |x_\delta - a| < \delta$.*

Nesta proposição a hipótese $L < M$ pode ser substituída por $L \leq M$. Alguns corolários que seguem diretamente desta proposição são:

Corolário 2.4.3 *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.*

Corolário 2.4.4 *Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X - \{a\}$ então $L \leq M$.*

Tanto para a proposição anterior e seus corolários quanto para o teorema seguinte valem versões análogas com $>$ em lugar de $<$.

O resultado a seguir garante a existência do limite de uma função desde que, numa dada vizinhança, esta esteja limitada inferior e superiormente por duas outras funções que convergem para o mesmo limite.

Teorema 2.4.5 (Teorema do sanduíche.) *Sejam* $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções,* $a \in X'$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, *para todo* $x \in X - \{a\}$ *então* $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Como a noção de limite é *local*, dadas as funções $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$, se existir uma vizinhança V do ponto a tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \neq a$ em $V \cap X$ e existe o limite de f nesta vizinhança, então existe $\lim_{x\to a} g(x)$. Além disso, em caso de existirem, esses limites serão iguais.

A próxima proposição garante uma propriedade consideravelmente útil: ela caracteriza continuidade em termos de limite de sequências. O corolário que segue a proposição, embora possa ser demonstrado em termos de épsilons e deltas, é demonstrado aqui em termos do método validado pela proposição.

Proposição 2.4.6 *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$. *A fim de que se tenha* $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = L$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência* (x_n) *em* $X - \{a\}$ *com* $\lim x_n = a$, *tenha-se* $\lim f(x_n) = L$.

Demonstração. Suponha, primeiro, que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que se tenha uma sequência (x_n) em $X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ implicam em $|f(x) - L| < \varepsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $0 < |x_n - a| < \delta$ (pois $x_n \neq a$ para todo n). Por conseguinte, $n > n_0$ resulta em $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, logo $\lim f(x_n) = L$. Reciprocamente, suponhamos que (x_n) em $X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$ impliquem que $\lim f(x_n) = L$ e provaremos que se tem $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Com efeito, negar esta igualdade implicaria em afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, no entanto, $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Neste caso, teríamos (x_n) em $X - \{a\}$ tal que $\lim f(x_n) = a$ sem que $\lim x_n = L$ Assim temos uma contradição. ■

Corolário 2.4.7 (Unicidade do limite.) *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = M$ *então* $L = M$.

Demonstração. Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que $\lim_{x\to a} f(x) = M$ com $M \neq L$, pela proposição anterior temos, para toda sequência (x_n) em $X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, que ocorrem $\lim f(x_n) = L$ e $\lim f(x_n) = M$. O Teorema 2.2.5 parte a) garante que $L = M$, ou seja um absurdo. ■

Ainda como consequência da proposição anterior temos o seguinte

Corolário 2.4.8 (Operações com limites.) *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções e* $a \in X'$, *com* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$. *Então:*

i) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

iv) *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e* g *é limitada numa vizinhança de* a*, tem-se* $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

A última proposição desta seção generaliza, para o contexto mais geral de funções, o fato de que toda sequência convergente é limitada.

Proposição 2.4.9 *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$*. Se existe* $\lim_{x \to a} f(x)$ *então* f *é limitada numa vizinhança de* a*, isto é, existem* $\delta > 0$ *e* $K > 0$ *tais que* $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq K$.

2.5 Funções contínuas

Apresentamos nesta seção a definição e principais propriedades das funções contínuas, no que diz respeito ao estudo destas no escopo da Análise na Reta.

Definição 2.5.1 Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em símbolos:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : x \in X, \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Chama-se *descontínua em* $a \in X$ uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto. Isto significa que exite $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode-se achar $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *contínua* quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Algumas observações pertinentes:

• A continuidade é um fenômeno *local*, ou seja, a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição de f a $V \cap X$ é contínua no ponto a.

• Se a é um ponto isolado do conjunto X, isto é, se existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$, então toda função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.

• Se $a \in X \cap X'$, isto é se $a \in X$ é um ponto de acumulação de X, então $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

• Ao contrário do caso de limite, na definição de continuidade de uma função o ponto a deve pertencer ao conjunto X e pode-se tomar $x = a$.

Proposição 2.5.2 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Demonstração. Seja $c = \frac{[g(a)+f(a)]}{2}$ e $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então para todo $\varepsilon > 0$ e $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < c$ e $x \in X, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$. ∎

Consequência imediata da proposição acima, a continuidade acarreta a permanência de sinal da função:

Corolário 2.5.3 *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de f(a).*

A próxima proposição, equivalente a Proposição 2.4.6 e, consequentemente, de demonstração análoga, caracteriza uma função contínua através do limite de sequência.

Proposição 2.5.4 *A fim de que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha* $\lim f(x_n) = f(a)$.

Consequências imediatas da proposição anterior são apresentadas no corolário seguinte, também análogo ao Corolário 2.4.8.

Corolário 2.5.5 *Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g, f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, bem como a função f/g, caso seja $g(a) \neq 0$.*

Vale salientar que o domínio da função f/g está bem definido: é o subconjunto de X formado pelos pontos onde a função g não se anula.

A proposição seguinte garante que a composta de duas funções contínuas num ponto é também uma função contínua neste ponto.

Proposição 2.5.6 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, tal que a composta $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a.*

Apresentaremos agora alguns resultados de funções contínuas num intervalo. O teorema seguinte é uma versão unidimensional do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 2.5.7 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Uma consequência deste teorema é que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo. Se $I = [a, b]$ é um intervalo compacto, então $f(I)$ é também um intervalo compacto. No entanto, se I não é fechado e limitado, $f(I)$ pode não ser do mesmo tipo que I. É o que nos mostra o

Exemplo 2.5.8 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tomando sucessivamente os intervalos abertos $I_1 = (0, 7), I_2 = (0, \frac{\pi}{2})$ e $I_3 = (0, \pi)$ temos $f(I_1) = [-1, 1]$, $f(I_2) = (0, 1)$ e $f(I_3) = (0, 1]$.

A próxima proposição nos garante que se uma bijeção $f : I \longrightarrow J$, entre intervalos, é contínua, então sua inversa $f^{-1} : J \longrightarrow I$ também é contínua.

Proposição 2.5.9 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \longrightarrow I$, definida no intervalo $J = f(I)$, é contínua.*

Apresentamos agora alguns resultados de compacidade relativos continuidade de funções.

Proposição 2.5.10 *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.3.16, devemos provar que toda sequência (y_n) em $f(X)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto em $f(X)$. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in X$. Como X é compacto, a sequência (x_n) possui uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ que converge para um ponto $a \in X$. Sendo f contínua no ponto a, do fato de termos $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$, concluímos que, pondo $b = f(a)$, temos $b \in f(X)$ e, além disso, $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} y_n = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}'} f(x_n) = f(a) = b$. ■

Um resultado imediato que decorre do fato acima é que toda função contínua definida num conjunto compacto é limitada. É o que diz a seguinte consequência:

Corolário 2.5.11 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto então toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in X$.*

O teorema seguinte, que também pode ser considerado consequência da proposição anterior, garante a existência de valores máximos e mínimos para uma função contínua quando o seu domínio é compacto.

Teorema 2.5.12 (Weierstrass.) *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Então existem pontos $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Do que já foi visto neste capítulo acerca da compacidade de conjuntos, sabemos que o compacto $f(X)$ possui um menor elemento $f(x_0)$ e um maior elemento $f(x_1)$. Isto quer dizer que existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in X$. ■

Percebe-se aqui como a propriedade de ser compacto é importante. A próxima proposição também é um importante reflexo da compacidade.

Proposição 2.5.13 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda bijeção contínua $f : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \longrightarrow X$.*

Demonstração. Tomemos um ponto qualquer $b = f(a)$ em Y e mostremos que g é contínua no ponto b. Se não fosse assim existiriam $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(y_n) = f(x_n)$ em Y tal que $\lim y_n = b$ e $|g(y_n) - g(b)| \geq \varepsilon$, isto é, $|x_n - a| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a^{'} \in X$, pois X é compacto. Tem-se $\left|a^{'} - a\right| \geq \varepsilon$ e em particular, $a^{'} \neq a$. Pela continuidade de f, $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a^{'})$. Como já temos $\lim y_n = b = f(a)$, obteríamos $f(a) = f(a^{'})$, contradizendo a injetividade de f. ■

2.6 Continuidade uniforme

Diz-se que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *uniformemente contínua* no conjunto X quando, para todo $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Uma função uniformemente contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos do conjunto X. No entanto, a recíproca desta afirmação é falsa, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 2.6.1 A função $f : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, é contínua. No entanto, dado ε, de modo que $0 < \varepsilon < 1$, seja qual for o número $\delta > 0$ escolhido, tomamos um número natural $n > \frac{1}{\delta}$ e pomos $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{2n}$. Então $0 < y < x < \delta$, donde $|y - x| < \delta$ porém $|f(y) - f(x)| = 2n - n = n \geq 1 > \varepsilon$.

Na continuidade uniforme pode-se fazer com que $f(x)$ e $f(y)$ se tornem tão próximos um do outro quanto se queira, bastando que $x, y \in X$ estejam também próximos. A próxima proposição nos garante uma condição necessária e suficiente para que uma função seja uniformemente contínua.

Proposição 2.6.2 *$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se, se somente se, para todo par de sequências $(x_n), (y_n)$ em X com $\lim(y_n - x_n) = 0$, tenha-se $\lim\left[f(y_n) - f(x_n)\right] = 0$.*

A próxima proposição garante que se um conjunto for compacto, então toda função contínua definida neste conjunto também é uniformemente contínua, o que mais uma vez mostra a importância dos conjuntos compactos para o estudo da continuidade de funções.

Proposição 2.6.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\varepsilon > 0$ e duas sequências $(x_n), (y_n)$ em X satisfazendo $\lim (y_n - x_n) = 0$ e $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de X, que $\lim x_n = a \in X$. Então como $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, vale também $\lim y_n = a$. Sendo f contínua no ponto a, temos $\lim [f(y_n) - f(x_n)] = \lim f(y_n) - \lim f(x_n) = f(a) - f(a) = 0$, contradizendo que seja $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

A proposição abaixo, cuja demonstração omitiremos, nos traz resultados muito significativos no contexto do estudo da limitação e da existência de limites de funções:

Proposição 2.6.4 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um função uniformemente contínua. Temos:*

a) *Se X é conjunto limitado, então f é uma função limitada.*

b) *Para todo $a \in X'$ (mesmo que $a \notin X$), existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.*

Capítulo 3

Espaços Métricos

Neste capítulo vamos introduzir o conceito abstrato de espaço métrico, que generaliza os conceitos vistos no capítulo anterior para conjuntos bem mais gerais. Buscaremos sempre exibir novos exemplos da teoria e compará-la com casos conhecidos. Alguns conceitos mais ligados a Álgebra, foram tratados de maneira menos detalhada, posto que partimos do pressuposto de que o leitor possui familiaridade com temas estudados em cursos introdutórios de Álgebra Linear e Álgebra Abstrata, por exemplo. O leitor que precisar de maiores informações poderá encontrá-las facilmente nas obras indicadas na bibliografia deste trabalho.

Toda a informação aqui contida está baseada nas obras [2, 3, 6, 10, 11] e [20]

3.1 Definição e exemplos de espaços métricos

Antes de falarmos propriamente do que se trata um espaço métrico, ou seja, sua definição formal, precisamos definir o conceito de métrica.

Uma *métrica* num conjunto M é uma aplicação $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real, denotado por $d(x, y)$, o qual chamamos de *distância* de x a y, de maneira que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:

C1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

C2) $d(x, y) \geq 0$;

C3) $d(x, y) = d(y, x)$;

C4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A condição C3 afirma que $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x e y. A condição C4 já é nossa conhecida: a desigualdade triangular.

Finalmente estamos aptos para definir o conceito de espaço métrico.

Definição 3.1.1 Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto qualquer e d é uma métrica em M.

A fim de dar maior praticidade a notação empregada neste trabalho, salvo quando não houver eventual possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual a métrica d que está sendo levada em consideração.

Aqui adentramos num cenário diferente de tudo o que foi mostrado no capítulo anterior. Note que lá todos os conceitos apresentados estavam alicerçados no conjunto dos números reais e essa restrição não ocorre aqui. Veja, quando definimos métrica o nosso conjunto M pode ser qualquer tipo de conjunto, por exemplo, pode ser o próprio $\mathbb{R}$, pode ser $\mathbb{R}^2$, pode ainda ser o conjunto dos complexos ($\mathbb{C}$) ou até mesmo o conjunto $\mathbb{R}^n$. Assim sendo, os elementos de um espaço métrico podem ser de naturezas consideravelmente arbitrárias: números, pontos, funções, vetores, matrizes, conjuntos, etc.

É importante salientar aqui que devido ao fato dos elementos de um espaço métrico serem arbitrários, algumas ideias tornam-se bastante contra-intuitivas. Por exemplo, a partir de agora haverá todo um sentido matemático, bem fundamentado, em considerar a distância de uma matriz a outra.

Para facilitar a comunicação dos conceitos sempre trataremos os elementos de um espaço métrico como *pontos*.

Exemplo 3.1.2 (A métrica zero-um) De maneira geral podemos tomar qualquer conjunto M e transformá-lo num espaço métrico. Para isto basta que esteja definida a métrica $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, pondo $d(x, y) = 0$, se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

Para mostrar a validade do exemplo citado precisamos mostrar que para esta métrica, zero-um, valem todas as propriedades de métrica. Com efeito, a propriedade C1) é válida pela própria definição da métrica zero-um. C2) também segue diretamente da definição pois, se $x \neq y$, $d(x, y) = 1 \geq 0$. No caso de C3), se $x = y$, então $d(x, y) = 0 = d(y, x)$; se por outro lado $x \neq y$, teremos $d(x, y) = 1 = d(y, x)$. Finalmente, para o caso da propriedade C4), se $x = y$, então $d(x, z) \leq d(x, y)$, ficando clara a igualdade. Se $x \neq y$, então devemos considerar duas possibilidades: se $x \neq z$, então $d(x, z) = 1 \leq d(x, y) + d(y, z)$; Por outro lado, se $y \neq z$, então $d(x, y) = 1 = d(y, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

Voltemos novamente ao conjunto dos números reais. Como visto no Capítulo 2, a Proposição 2.1.4 define a distância entre dois pontos na reta real, no entanto, no contexto de espaços métricos esta é apenas uma maneira, dentre varias outras, de se definir uma métrica.

Exemplo 3.1.3 Define-se uma distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ através da função $d(x, y) = |x - y|$.

Não é difícil mostrar que $\mathbb{R}$ munido da métrica do exemplo anterior é um espaço métrico, ou seja $(\mathbb{R}, d)$ é espaço métrico. De fato as quatro propriedades se verificam imediatamente através das propriedades elementares do valor absoluto e da desigualdade triangular, vistas no capítulo anterior.

Não é costume, nos estudos introdutórios de Análise, trabalhar com o espaço $\mathbb{R}^n$. No contexto da teoria dos espaços métricos este espaço generaliza o caso da reta, abrangendo os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, estudados no contexto da Algebra Linear. Comumente chamado de *espaço euclidiano*, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, ..., x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real.

Há diferentes maneiras de se definir uma distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, escrevemos:

1) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\right]^{\frac{1}{2}}$

2) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$

3) $d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

As funções d, d_1 e $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são todas métricas. Para o caso de d é comum o emprego do termo *métrica euclidiana.* Sua origem vem da fórmula para a distância entre dois pontos no plano em que são consideradas coordenadas cartesianas.

Na próxima proposição mostraremos, por exemplo, que o espaço $\mathbb{R}^n$ é métrico munido com a métrica euclidiana.

Proposição 3.1.4 $(\mathbb{R}^n, d)$ *é um espaço métrico.*

Demonstração. Queremos mostrar que

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

é uma métrica sobre o espaço $\mathbb{R}^n$. Verifiquemos então a validade das quatro propriedades da métrica.

C1) Temos

$$\begin{aligned} d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i-y_i)^2 = 0, (1 \le i \le n) \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i, (1 \le i \le n) \\ &\Leftrightarrow (x_1,...,x_n) = (y_1,...,y_n). \end{aligned}$$

C2) Esta propriedade é óbivia, pois se trata de uma soma de termos não negativos.

C3) Podemos calcular

$$\begin{aligned} d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2} \\ &= d((y_1,...,y_n),(x_1,...,x_n)). \end{aligned}$$

C4) Para mostrar a validade da desigualdade triangular, para este caso específico de métrica, faremos uso da *Desigualdade de Minkowski* (ver [20], pág. 68), cujo enunciado nos diz que se $x_1,...,x_n$ e $y_1,..,y_n$ são números reais então:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Passemos então a demonstração. Sejam $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n)$ e $z = (z_1,...,z_n)$ pontos em $\mathbb{R}^n$. Então:

$$\begin{aligned} [d(x,z)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2 \\ &= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)}\right]^2 \\ &= [d(x,y)+d(y,z)]^2 \end{aligned}$$

Logo, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ e d é uma métrica em $\mathbb{R}^n$. ■

Exemplos importantes de espaços métricos são espaços de funções. Vejamos o caso do espaço de funções limitadas.

Definição 3.1.5 Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in X$. Indicaremos com $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Não é difícil mostrar que a soma, a diferença e o produto de funções limitadas são também limitadas. Definiremos agora uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ pondo, para $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \,. \tag{3.1}$$

Esta é a chamada *métrica da convergência uniforme* ou *métrica do* sup. Vamos verificar agora todas as propriedades que fazem de (3.1) uma métrica.

C1) Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ e $x \in X$. Temos:

$$\begin{aligned} d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f = g. \end{aligned}$$

C2) Esta propriedade é imediata devido as propriedades do módulo.

C3) Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ e $x \in X$. Temos:

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in X} |-(-f(x) + g(x))| = \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| \,.$$

C4) Sejam $f, g, h \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. Para todo $x \in X$ temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in X} |h(x) - g(x)| \\ &= d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

Portanto, $d(f,h)+d(h,g)$ é uma cota superior para o conjunto $\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ e assim

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$$

Podemos pensar na interpretação geométrica da distância definida acima: seja $X = [a, b]$. Dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas, a distância $d(f, g)$ é o comprimento da maior corda vertical que se pode traçar ligando o gráfico de f ao gráfico de g.

3.1.1 Espaços vetoriais normados

No escopo dos estudos de um curso introdutório de Álgebra Linear é estudado o ambiente dos espaços vetoriais[1], definindo-se as operações de soma de vetores e a multiplicação destes por escalares. Nesta seção trataremos dos espaços vetoriais normados, ambiente em que as estruturas de espaço vetorial e espaço métrico estão unificadas.

Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado de *norma de* x, de modo a serem cumpridas as seguintes condições abaixo, para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ escalar:

C1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

C2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

C3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 3.1.6 Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em E.

Com frequência designamos um espaço vetorial normado apenas por E, deixando a norma subentendida.

Alguns exemplos de espaços vetoriais normados são $(\mathbb{R}, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, pondo-se, para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$,

i) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2)}$;

ii) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

iii) $\|x\|_3 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Vamos provar o caso $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$.

C1) $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0$, para todo $i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ $x = 0$.

[1]Para uma revisão deste tópico sugerimos as obras [[2], Capítulo 4], e [[10], Capítulo 1.]

C2) $\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1 .$

C3) $\|x + y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\| + \|x\| .$

Portanto, $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado.

Um exemplo interessante de espaço vetorial normado é o espaço das funções limitadas, $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}))$, com a norma dada por $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Não apresentaremos a demonstração das propriedades de norma aqui pois são muito semelhantes às já feitas para o espaço métrico correspondente. É conveniente atentar para que não seja confundido o símbolo $\|f\|$, que designa a norma da função, com a função $|f| : X \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $|f|(x) = |f(x)|$, chamada de função valor absoluto de f.

A próxima proposição nos mostra que toda norma define uma métrica. Assim, todo espaço vetorial normado torna-se um espaço métrico por uma escolha conveniente da métrica.

Proposição 3.1.7 *A função $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica sobre o espaço vetorial normado E.*

Demonstração. Verifiquemos as quatro propriedades da métrica.

C1) $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$

C2) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, pela definição de norma.

C3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$

C4) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$

Portanto d é uma métrica sobre E. ■

A métrica da proposição anterior, que provém da norma $\|\cdot\|$, é dita uma *métrica induzida pela norma*. As métricas d, d_1 e d_2 em $\mathbb{R}^n$ são provenientes das normas $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. A métrica do sup, no espaço das funções limitadas, é proveniente da norma que acabamos de introduzir neste espaço. É comum o emprego de $\|f - g\|$ em vez de $d(f, g)$.

3.1.2 Espaços vetoriais com produto interno

Já sabemos que a estrutura dos espaços vetoriais normados unifica as estruturas de espaços vetoriais e espaços métricos. Contudo, aponta Kreysig [9], é importante considerar (devido as diversas aplicações) a possibilidade de termos também nos espaços normados algo análogo ao produto interno de vetores e condições de ortogonalidade, isto é, noções de geometria nesses espaços. Surge então a necessidade de se verificar uma possível generalização destes conceitos para espaços vetoriais arbitrários, o que motiva o estudo dos espaços vetoriais com produto interno.

Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função $\langle , \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$, chamado *produto interno* de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para quaisquer $x_1, x_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

P1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;

P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$;

P3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

P4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

Das quatro propriedades do produto interno resultam que

i) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$;

ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$ e $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle - \langle x, y_2 \rangle$;

iv) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

v) Se $\langle x, y_1 \rangle = \langle z, y_2 \rangle$, para todo $z \in E$. Então $y_1 = y_2$.

Diz-se que o par $(E, \langle , \rangle)$ é um *espaço com produto interno*.

A próxima proposição nos mostra que em todo espaço com produto interno é possível definir uma norma e, por conseguinte, todo espaço com produto interno é espaço normado e métrico.

Proposição 3.1.8 *Num espaço vetorial com produto interno, define-se uma norma de um vetor $x \in E$ pondo-se $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ou seja, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.*

Demonstração. Note que pela própria definição, $\|x\| \geq 0$. Verifiquemos então as propriedades de norma.

C1) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

C2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

C3) Para mostrar a validade de C3) faremos uso da desigualdade de Cauchy-schwarz (ver [3], pág. 105): para quaisquer vetores x, y de um espaço vetorial com produto interno, se tem $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Note que,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|_2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 .
\end{aligned}$$

Logo, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

■

A norma definida na proposição anterior é usualmente chamada de *norma induzida pelo produto interno*.

Um exemplo usual de espaço vetorial com produto interno é $\mathbb{R}^n$, com o produto interno dado por $\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n$.

Nem toda norma num espaço vetorial E provém de um produto interno. Nos casos onde isso ocorre é válida a *lei do paralelogramo*, que nos diz que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

consequência imediata da definição $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ e das propriedades do produto interno.

Exemplo 3.1.9 A norma $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ no espaço euclidiano não advém do produto interno pois não satisfaz a lei do paralelogramo.

Finalizamos esta seção com um exemplo importante de espaço métrico que trabalharemos mais adiante em nosso estudo.

Exemplo 3.1.10 (Produto cartesiano de espaços métricos.) Sejam $M_1, \ldots, M_n$ espaços métricos, cujas métricas indicaremos por $d_1, \ldots, d_n$, respectivamente. O produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é definido como o conjunto das listas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, onde $x_1 \in M_1$, …, $x_n \in M_n$.

Mostra-se sem grandes dificuldades que, munido de uma das três das seguintes métricas, $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ é um espaço métrico.

i) $\varphi(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$;

ii) $\psi(x,y) = d_1(x_1,y_1) + \cdots + d_n(x_n,y_n)$;

iii) $\xi(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n)\}$.

Caso $M = M_1 \times \ldots \times M_n = \mathbb{R}^n$, retorna-se ao espaço euclidiano n-dimensional, produto cartesiano de n cópias do espaço $\mathbb{R}$.

3.2 Bolas e esferas

Nesta seção trataremos de uma noção que desempenha um papel importante na teoria dos espaços métricos. As noções de bola e esfera generalizam o conceito de intervalos (um tipo comum de vizinhança), dai sua importância em nosso estudo.

Se a é um ponto num espaço métrico M qualquer, dado um número real $r > 0$, definimos:

Definição 3.2.1 A bola aberta de centro $a \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$, é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r, ou seja, $B(a;r) = \{x \in M; d(x;a) < r\}$.

Definição 3.2.2 A bola fechada de centro $a \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$, é o conjunto $B[a;r]$, formado pelos pontoss de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a. Isto é $B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}$.

Definição 3.2.3 A esfera de centro $a \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$, é o conjunto $S(a;r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x,a) = r$, ou seja, $S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}$.

Consideremos o espaço $\mathbb{R}$. Com a métrica $d(x,y) = |x-y|$ (métrica usual da reta), para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, a bola aberta $B(a,\varepsilon)$ é o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, posto que $|x-a| < \varepsilon$ equivale a, $-\epsilon < x-a < \varepsilon$, ou seja, $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$. De modo análogo, a bola fechada $B[a,\varepsilon]$ é o intervalo fechado $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ e a esfera $S(a,\varepsilon)$ consiste apenas dos pontos $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$.

Consideremos agora o espaço $\mathbb{R}^2$. Vejamos como são as bolas nesses espaços com diferentes métricas, como as definidas na Seção 3.1.

Usando a métrica usual (euclidiana), sendo $a = (a_1,a_2)$, temos:

$$\begin{aligned} d\left((x,y),(a_1,a_2)\right) &= \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < r \\ &\Leftrightarrow (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$B(a,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right\} < r^2$$

e portanto temos o interior de um círculo de centro a e raio r.

Levando em consideração a métrica d_2 temos:

$$d_2\left((x,y),(a_1,a_2)\right) = \max\left\{|x-a_1|, |y-a_2| < r\right\} \Rightarrow |x-a_1| < r \text{ e } |y-a_2| < r$$

e assim

$$B(a,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x-a_1| < r \text{ e } |y-a_2| < r\right\}.$$

Observamos então que esta bola representa o interior de um quadrado centrado em a e lados de comprimento $2r$ paralelos aos eixos.

Caso seja escolhida a métrica d_1 temos:

$$d_1\left((x,y),(a_1,a_2)\right) = |x-a_1| + |y-a_2| < r \Rightarrow |x-a_1| < r \text{ e } |y-a_2| < r.$$

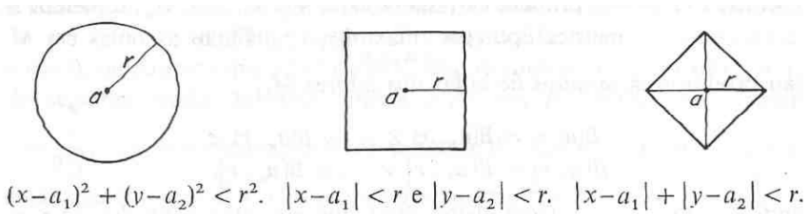
logo,

$$B(a,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x-a_1| + |y-a_2| < r\right\},$$

ou seja, esta bola representa o interior de um quadrado de centro a e diagonais de comprimento $2r$ que são paralelos aos eixos.

As situações acima descritas estão ilustradas na Figura 1.

Figura 1



Fonte: LIMA, [11]

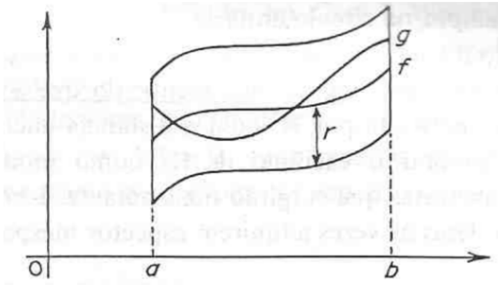
Nos três casos apresentados a esfera $S(a,r)$ é a fronteira da figura correspondente e no caso da bola fechada temos, nos três casos, $B[a,r] = B(a,r) \cup S(a,r)$.

Consideremos agora $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Na métrica do sup, o que se é exigido para que uma função limitada $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertença a bola fechada $B[f,r]$ é que,

$$\sup\left\{|f(x)-g(x)|; x \in [a,b]\right\} \leq r,$$

ou seja, $|f(x)-g(x)| \leq r$, para todo $x \in [a,b]$. Para interpretar este fato de uma maneira geométrica consideremos o gráfico $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b]\}$ da função f. Chamaremos de *faixa de amplitude* $2r$ em torno de $G(f)$ ao conjunto dos pontos (x,y) tais que $x \in [a,b]$ e $f(x) - r \leq y \leq f(x) + r$. As funções $g \in B[f,r]$ são aquelas cujos gráficos estão contidos na faixa de amplitude $2r$ em torno do gráfico de f, como nos mostra a Figura 2. Quanto à bola aberta, se $g \in B(f,r)$ então G(g) está contido na *faixa* *aberta*, formada pelos pontos (x, y) tais que $x \in [a, b]$ e $f(x)-r < y < f(x)+r$. Mas pode ocorrer o caso em que $G(g)$ esteja nesta faixa e, apesar disto, seja $\sup\limits_{x\in[a,b]} [f(x) - g(x)| = r$, e portanto $g \notin B(f, r)$.

Figura 2



Fonte: LIMA, [11]

3.3 Conjuntos limitados

Um subconjunto não vazio X de um espaço métrico M chama-se *limitado* quando existe uma constante $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$, para quaisquer $x, y \in X$. Quando se diz que $x, y \in X$ implica em $d(x, y) \leq K$, significa que K é uma cota superior do conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre os pontos de X. Como descrito no capitulo anterior, a menor das cotas superiores de um conjunto de números reais é chamado de supremo deste conjunto. Sendo assim, podemos definir o *diâmetro* de um conjunto limitado $X \subset M$ como o número real

$$\text{diam}\,(X) = \sup \{d(x, y); x, y \in X\}.$$

No caso em que X não é limitado, escreve-se diam $(X) = \infty$. Isto significa que, dado qualquer $K > 0$, podem-se obter pontos $x_k, y_k \in X$ tais que $d(x_k, y_k) > K$. Se X é limitado e $Y \subset X$, então também Y é limitado, de modo que diam $(Y) \leq$ diam (X).

Quando trabalhamos o conceito de diâmetro de um conjunto X, é necessário supor que $X \neq \emptyset$. Isto será admitido implicitamente.

Um primeiro fato interessante:

Proposição 3.3.1 *Toda bola $B(a, r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$.*

Demonstração. Dados $x, y \in B(a, r)$, então $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r$. ∎

De maneira análoga mostra-se que o diâmetro da bola fechada $B[a, r]$ e, consequentemente da esfera $S(a, r)$, não excede $2r$. Pode ocorrer que o diâmetro de $B[a, r]$ (e portanto da bola aberta e da esfera) seja menor do que $2r$. Por exemplo, basta considerar M reduzido a um único ponto a. Então $B[a, r] = \{a\}$, tem diâmetro 0 para todo $r > 0$.

Se num espaço métrico, além de sua estrutura, também tivermos a estrutura de espaço vetorial, as bolas, bem como todo o espaço, satisfazem algumas propriedades singulares, como nos mostram as proposições seguintes.

Proposição 3.3.2 *Seja E um espaço vetorial normado não nulo, com a métrica proveniente de sua norma. Então, toda bola aberta $B = B(a, r)$ tem diâmetro $2r$.*

Demonstração. Como mostrado anteriormente, diam $(B) \leq 2r$. Resta então mostrar que nenhum número positivo $s < 2r$, pode ser o diâmetro de B. Para isto, seja $y \neq 0$ em E um número real t tal que $s < 2t < 2r$. O vetor $x = \dfrac{ty}{\|y\|}$ tem norma $t < r$. Logo, $a+x$ e $a-x$ pertencem a B. Além disso, $d(a+x, a-x) = \|(a+x) - (a-x)\| = 2\|x\| = 2t > s$. Portanto, s não é o diâmetro de B, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.3.3 *Um espaço vetorial normado $E \neq 0$, com a métrica proveniente de sua norma, nunca é limitado.*

Demonstração. Dado $x \neq 0$ em E, para cada $k > 0$ podemos tomar em E o vetor $x_k = \dfrac{2kx}{\|x\|}$, o qual tem norma $2k > k$, e portanto, $d(x_k, 0) = \|x_k\| > k$. ■

3.4 Sequências

No Capítulo 2 abordamos o conceito de sequência no contexto da reta real. Nosso objetivo com esta seção é trabalharmos este tipo de conceito no contexto abstrato da teoria dos espaços métricos.

Definição 3.4.1 Uma sequência num conjunto M é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow M$, definida no conjunto dos números naturais. Indica-se por x_n o valor que esta função assume no número $n \in \mathbb{N}$, de modo que chamamos x_n de *n-ésimo* termo da sequência.

As notações para representar sequências em nosso ambiente são as mesmas usadas no Capítulo 2. Ao conjunto formados pelos termos da sequência representamos por $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$.

Como era de se esperar, faz-se necessário considerar as subsequências também neste contexto mais geral. Com efeito, Uma *subsequência* de (x_n) é uma restrição da função como na Definição 3.4.1 a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$ dos naturais. As notações para representarmos uma subsequência também são as mesmas que usamos no caso da reta real.

Vale salientar aqui que, estritamente falando, uma subsequência em nosso contexto não é uma sequência, pois está definida apenas num subconjunto dos números naturais, no entanto, se escrevermos $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$, a subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ pode ser considerada, naturalmente, como a aplicação $1 \mapsto x_{n_1}, 2 \mapsto x_{n_2}, \ldots, k \mapsto x_{n_k}, \ldots$ e neste sentido ser uma sequência.

Não é difícil mostrar que toda subsequência de uma sequência limitada é também limitada. A próxima definição trata do *limite* de uma sequência num espaço métrico M.

Definição 3.4.2 Diz-se que um ponto $a \in M$ é limite de uma sequência (x_n) em M quando, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $d(x_n, a) < \varepsilon$.

A representação do limite destas sequências é feita de modo análogo ao caso da reta e vale ainda lembrar que, caso exista o limite de (x_n), dizemos que esta sequência é convergente no espaço métrico M. De maneira semelhante, caso não exista o limite da sequência em M dizemos que (x_n) é divergente.

Uma afirmação equivalente a de que $\lim x_n = a$ num espaço métrico M é dizer que toda bola B, centrada em a, contém x_n, para qualquer valor de n, exceto para um número finito deles.

Abaixo seguem algumas primeiras propriedades válidas no contexto da reta, agora na perspectiva generalizada pelo ambiente dos espaços métricos.

i) Toda sequência convergente é limitada.

ii) Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.

iii) Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.

Vamos provar i). Suponha $\lim x_n = a \in M$. Se tomarmos $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ nos garante $x_n \in B(a, 1)$. Portanto o conjunto dos valores de (x_n) está contido na reunião $\{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup B(a, 1)$, os quais são conjuntos limitados.

Faremos agora alguns comentários sobre alguns conceitos topológicos que generalizam o caso apresentado no Capítulo 2. A importância do próximo teorema, por exemplo, é considerável devido a sua aplicação no estudo das funções contínuas.

Proposição 3.4.3 *Sejam M e N espaços métricos. Uma condição necessária e suficiente para que a função $f : M \longrightarrow N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é que $\lim(x_n) = a$ em M implique em $\lim f(x_n) = f(a)$ em N.*

Demonstração. Suponha que f seja contínua em $a \in M$. Se $lim x_n = a$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica em $d(f(x), f(a) < \varepsilon$. Partindo deste δ podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implique em $d(x_n, a) < \delta$ que por sua vez acarreta

$d(f(x_n, f(a)) < \varepsilon$. Portanto, $\lim f(x_n) = f(a)$. Reciprocamente, suponha que f não seja contínua em a. Assim sendo, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in M$ de modo que $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Assim, obtemos uma sequência (x_n) em M onde $\lim x_n = a$ sem que $\lim f(x_n) = f(a)$. ■

Uma consequência imediata da proposição anterior é enunciada no

Corolário 3.4.4 *A função $f : M \longrightarrow N$ é contínua se, e somente se, a imagem $(f(x_n))$ de toda a sequência convergente (x_n) em M é uma sequência convergente em N, e neste caso $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$.*

A próxima proposição nos apresenta uma característica importante da convergência de sequências em um produto cartesiano de espaços métricos. Para demonstra-la utilizaremos a métrica $d(z_1, z_2) = \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2}$, onde $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

Proposição 3.4.5 *Uma sequência $(z_n) = (x_n, y_n)$ no espaço métrico $M \times N$ converge para um ponto $c = (a, b) \in M \times N$ se, e somente se, $\lim x_n = a$ em M e $\lim y_n = b$ em N.*

Demonstração. Seja $\lim(x_n, y_n) = (a, b)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $n > n_0$, $d((x_n, y_n), (a, b) < \varepsilon$. Assim,

$$d((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{d_1(x_n, a)^2 + d_2(y_n, b)^2} < \varepsilon.$$

Logo, $d_1(x_n, a)^2 + d_2(y_n, b)^2 < \varepsilon^2$, ou seja, $d_1(x_n, a)^2 < \varepsilon^2$ e $d_2(y_n, b)^2 < \varepsilon^2$. Do fato de $d_1(x_n, a) \geq 0$ e $d_2(y_n, b) \geq 0$, temos $d_1(x_n, a) < \varepsilon$ e $d_2(y_n, b) < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Portanto, $\lim x_n = a$ em M e $\lim y_n = b$ em N. Reciprocamente, sejam $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ de modo que, $d_1(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, sempre que $n > n_1$ e $d_2(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, sempre que $n > n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. temos então que, para todo $n > n_0$, $d_1(x_n, a)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ e $d_2(y_n, b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Deste modo, $d_1(x_n, a)^2 + d_2(y_n, b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$, o que implica que $\sqrt{d_1(x_n, a)^2 + d_2(y_n, b)^2} < \varepsilon$ e assim, $d((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon$, ou seja, $d(z_n, c) < \varepsilon$, para todo $n > n_0$ e portanto $\lim z_n = c$.
■

3.5 Funções Contínuas

Nosso objetivo nesta seção é apresentar os resultados mais importantes de funções contínuas no contexto da teoria dos espaços métricos. Devido ao fato da natureza dos elementos dos espaços envolvidos ser abstraída assim como as métricas (distâncias), a continuidade aqui trabalhada generaliza a continuidade apresentada no capítulo anterior.

Definição 3.5.1 Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : (M, d) \longrightarrow (N, d')$ é *contínua no ponto* $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica em $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Diz-se que $f : M \longrightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Equivalentemente, $f : (M, d) \longrightarrow (N, d')$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$ de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

Deste ponto em diante, para facilitar a escrita, utilizaremos a notação d para a métrica dos espaços aqui considerados, ficando subentendido que tais métricas podem ser distintas.

Vale lembrar aqui que a noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. De forma mais precisa isto quer dizer que, se existir em M uma bola B, de centro a, tal que$f|B$ (f restrita a B) seja contínua no ponto a, então $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto a. Deste fato segue que, se para toda parte limitada $X \subset M$, $f|X$ for contínua, então $f : M \longrightarrow N$ é contínua.

Outro fato importante a se ressaltar é que a métrica adotada também detém influencia na continuidade de uma função. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Se considerarmos $\mathbb{R}$ munido da métrica *zero-um*, f é sempre contínua.

Teceremos a partir deste ponto algumas considerações de um tipo importante da funções continuas: as funções lipschitzianas.

Definição 3.5.2 Dada $f : M \longrightarrow N$ e supondo que exista uma constante $k > 0$ (que chamaremos de constante de *Lipschitz*) tal que $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$, para todos $x, y \in M$, dizemos então que f é uma *função lipschitziana.*

Vamos verificar que, de fato, uma aplicação lipschitziana é contínua em todo ponto de M.

Proposição 3.5.3 *Toda função lipschitziana é contínua em cada ponto $a \in M$.*

Demonstração. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ temos $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq k \cdot d(x, a) < k \cdot \delta = \varepsilon$ ■

Mostra-se também, sem grandes dificuldades, que se $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são lipschitzianas o mesmo ocorre com as funções $f + g$ e $a \cdot f$, onde $a \in \mathbb{R}$. Deste modo pode-se concluir que toda combinação linear $a_1 \cdot f_1 + \cdots + a_n \cdot f_n$ de funções lipschitzianas é lipschitziana.

Definição 3.5.4 *Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ chama-se localmente lipschitziana quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B = B(a, r)$ tal que a restrição $f|B$ é lipschitziana.*

Ao falarmos da noção de continuidade fica implícito o conceito de *descontinuidade*, o qual trataremos a partir deste ponto.

Se $f : M \longrightarrow N$ não é contínua no ponto a, diz-se que f é descontínua nesse ponto. Mais precisamente isto significa que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d\left(f(x_\delta, f(a)\right) \geq \varepsilon$.

Há casos em que é mais conveniente reformular a definição de descontinuidade da seguinte maneira: existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, pode-se obter $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d\left(f(x_n), f(a)\right) \geq \varepsilon$.

3.5.1 Algumas propriedades elementares de funções contínuas

A próxima proposição generaliza a Proposição 2.5.6, do Capítulo 2, apresentada no contexto de $\mathbb{R}$.

Proposição 3.5.5 *A composta de duas aplicações contínuas é também contínua. Mais precisamente, se $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto a e $g : N \longrightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \longrightarrow P$ é contínua no ponto a.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Da continuidade de g no ponto $f(a)$ podemos obter $\lambda > 0$ tal que $y \in N$ e $d(y, f(a)) < \lambda$ implicam em $d\left(g(y), gf(a)\right) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto a nos fornece $\delta > 0$ de modo que $x \in M$ e $d(x, a) < \delta$ nos dá $d\left(f(x), f(a)\right) < \lambda$. Assim concluímos que $d\left(gf(x), gf(a)\right) < \varepsilon$. ■

Antes de enunciarmos e demonstrarmos a próxima proposição, que apresenta uma condição necessária e suficiente para que uma função cujo contradomínio é um produto cartesiano seja contínua, definiremos o conceito de *funções coordenadas* e *projeção na* i-*ésima* coordenada.

Definição 3.5.6 Sejam $M_1, \ldots, M_n$ e M espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow M_1 \times \ldots \times M_n$ é definida através das n aplicações $f_1 : M \longrightarrow M_1$, $f_2 : M \longrightarrow M_2$, $f_n : M \longrightarrow M_n$, as quais são chamadas de funções coordenadas de f, de modo que $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, para todo $x \in M$.

Definição 3.5.7 Sejam $M_1, \ldots, M_n$. Para $n \in \mathbb{N}$, A função definida por

$$\begin{array}{rccc} p_i : & M_1 \times \ldots \times M_n & \longrightarrow M_i & \\ & (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

é *chamada de projeção sobre a i-ésima coordenada.*

Vejamos que as projeções acima definidas são sempre aplicações contínuas. De fato, seja $(x_1^j, \ldots, x_i^j, \ldots, x_n^j)_j$, $j \in \mathbb{N}$, em $M_1 \times \ldots \times M_n$ de modo que

$$(x_1^j, \ldots, x_i^j, \ldots, x_n^j) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$

ou seja, $x_1^j \xrightarrow{j} x_1, \ldots, x_i^j \xrightarrow{j} x_i, \ldots, x_n^j \xrightarrow{j} x_n$. Pelo Teorema 3.4.3 temos:

$$\lim p_i\left(x_1^j, \ldots, x_i^j, \ldots, x_n^j\right) = \lim x_i^j = x_i = p_i(x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Portanto p_i é contínua.

Proposição 3.5.8 *A aplicação $f : M \longrightarrow N_1 \times N_2$ é contínua (no ponto $a \in M$) se, e somente se, suas funções coordenadas $f_1 : M \longrightarrow N_1$ e $f_2 : M \longrightarrow N_2$ são contínuas (no ponto a).*

Demonstração. Se f é contínua então o mesmo ocorre com $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$ porque as projeções p_1 e p_2 são contínuas.

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, como as funçõesf_1 e f_2 são contínuas no ponto a, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ de modo que $d(x,a) < \delta_1$ implica em $d\left(f_1(x), f_1(a)\right) < \varepsilon$ e $d(x,a) < \delta_2$ implica que $d\left(f_2(x), f_2(a)\right) < \varepsilon$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $d(x,a) < \delta$ implica que

$$d(f(x), f(a)) = \max\left\{d\left(f_1(x), f_1(a)\right), d\left(f_2(x), f_2(a)\right)\right\} < \varepsilon.$$

Logo f é contínua no ponto a. ■

Proposição 3.5.9 *Sejam M um espaço métrico, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com valores reais. Então, $f+g$, $f \cdot g$ e caso $(g(x) \neq 0$, para todo $x \in M)$, f/g são funções contínuas.*

Demonstração. Vamos provar o caso $f+g$. Com efeito, seja (x_n) em M talque $\lim x_n = a$, ou seja, $d(x_n, a) < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Como f e g são contínuas, de acordo com a Proposição 3.4.3, temos

$$\lim(f+g)(x_n) = \lim(f(x_n)+\lim g(x_n)) = \lim f(x_n)+\lim g(x_n) = f(a)+g(a) = (f+g)(a).$$

Portanto, $f+g$ é contínua em a. De modo análogo mostra-se, sem grandes dificuldades que $f \cdot g$ e f/g são contínuas. ■

Capítulo 4

Espaços Métricos Completos

Como complemento dos estudos desenvolvidos neste trabalho, abordaremos neste capítulo os espaços métricos completos. Ainda no contexto de generalização, concentraremos nossa abordagem tanto em dimensão finita como em dimensão infinita.

Da revisão apresentada no Capítulo 2 sabemos que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo, no entanto, quando partimos para outros espaços métricos, de natureza distinta, precisamos compreender como funciona o conceito de completude, posto que existem diversos exemplos de espaços em que não é possível estabelecer o conceito de ordem, como o caso dos Complexos, por exemplo. Sendo assim, faz-se necessário uma caracterização de completude que seja adequada ao contexto da teoria dos espaços métricos e é isto que este capítulo pretende fazer.

Toda a informação aqui contida está baseada nas obras [3, 6, 9, 10, 11, 14, 19] e [20].

4.1 Espaços de dimensão finita

Vejamos como se comportam os espaços de dimensão finita com relação à completude. Começamos esta seção definindo o conceito de sequência de Cauchy num contexto da teoria dos espaços métricos.

Definição 4.1.1 Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é dita ser de Cauchy (ou fundamental) se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica em $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Mostra-se sem grandes dificuldades que:

i) Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy;

ii) A fim de que uma sequência (x_n) seja de Cauchy, é necessário e suficiente que para todo $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $n > n_0$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Uma forma intuitiva de considerar uma sequência de Cauchy é atentar para o seguinte detalhe: a medida que o índice n aumenta, a distância entre os termos da sequência se estreita cada vez mais. Se consideramos uma sequência em cujos termos se aproximam de um ponto fixado (como é o caso da definição usual de convergência), é uma propriedade característica desta que seus termos se tornem cada vez mais próximos, como nos mostra a

Proposição 4.1.2 *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Considere $\lim x_n = a$ em M. Dado $\varepsilon > 0$, existe, por definição, um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que sempre que $n > n_0$ teremos $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, tomando $m, n > n_0$ teremos $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ e portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ∎

A recíproca da proposição anterior não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, Rudin ([19], pág. 2) nos mostra uma sequência de Cauchy (x_n), de números racionais, tal que $\lim x_n = \sqrt{2}$ em $\mathbb{Q}$. Sendo convergente nos reais, pela proposição anterior esta é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$, no entanto, (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

No contexto das sequências de Cauchy é possível mostrar, sem grandes dificuldades que:

i) Toda sequência de Cauchy é limitada.

ii) Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é também convergente e tem o mesmo limite que a subsequência.

Proposição 4.1.3 *Uma sequênica $(z_n) = (x_n, y_n)_n$ no espaço métrico $M \times N$ é de Cauchy se, e somente se, são de Cauchy as sequências x_n em M e (y_n) em N.*

Demonstração. Para esta demonstração faremos uso da métrica do máximo. Seja $(x_n, y_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, sempre que $m, n > n_0$, teremos $d((x_m, y_m), (x_n, y_n)) = \max\{d(x_m, x_n), d(y_m, y_n))\} < \varepsilon$. Assim, temos: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e $d(y_m, y_n) < \varepsilon$, sempre que $m, n > n_0$. Portanto, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N. Reciprocamente, se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existem m_0 e n_0 tais que, para todos $m, n > m_0$, tem-se $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, assim como para quaisquer $m, n > n_0$, $d(y_m, y_n) < \varepsilon$. Seja $\xi = \max\{m_0, n_0\}$. Então, sempre que $m, n > \xi$ teremos $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e $d(y_m, y_n) < \varepsilon$. Assim, $\max\{d(x_m, x_n), d(y_m, y_n)\} < \varepsilon$, o que garante que $d((x_m, y_m), (x_n, y_n)) < \varepsilon$. Portanto, $(x_n, y_n)_n$ é uma sequência de Cauchy no espaço $M \times N$. ∎

Estamos aptos agora a definir o conceito de completamento de espaços métricos.

Definição 4.1.4 Um espaço métrico M é completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.

Fica claro, a partir da definição anterior que num espaço métrico qualquer a condição imposta pela definição anterior não é um critério suficiente para a convergência, dado que o espaço pode não ser completo. Por exemplo, considere o espaço $M := (0, 1]$ munido da métrica usual, $d(x, y) = |x - y|$. Defina a sequência (x_n) como $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. De fato, (x_n) é de Cauchy, no entanto ela não converge, pois o ponto 0 para o qual ela converge não pertence a M.

Um primeiro exemplo de espaço métrico completo é dado na próxima proposição, uma propriedade que é comumente demonstrada através dos estudos introdutórios em análise.

Proposição 4.1.5 *A reta real é um espaço métrico completo.*

Através da proposição anterior é possível mostrar que o espaço métrico $\mathbb{C}$, dos número complexos é completo.

Proposição 4.1.6 *$\mathbb{C}$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $(z_n) = (x_n + y_n i)$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que, para todo $n > n_0$, $|z_n - z_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Note que,

$$|x_n - x_m| = |Re(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } n, m > n_0.$$

Assim, $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, sempre que $n, m > n_0$ e portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. De modo análogo mostra-se que (y_n) é também uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, como $\mathbb{R}$ é completo, existem $x, y \in \mathbb{R}$ limites de (x_n) e de (y_n), respectivamente. Agora temos:

$$|(x_n + y_n i) - (x + yi)| = |(x_n - x) - (y_n - y)i| \leq |x_n - x| + |(y_n - y)i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim, $\lim z_n = z$ em $\mathbb{C}$ e portanto $\mathbb{C}$ é completo. ■

Proposição 4.1.7 *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy em M e N respectivamente. Pela Proposição 4.1.3, $(x_n, y_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Supondo que $M \times N$ é completo, $(x_n, y_n)_n$ é convergente e converge para um certo $c = (a, b) \in M \times N$. Da Proposição 3.4.5, segue que $\lim x_n = a$ em M e $\lim y_n = b$ em N e portanto, M e N são completos. Reciprocamente, suponha que $(z_n) = (x_n, y_n)_n$ em $M \times N$ seja de Cauchy. Então, novamente pela Proposição 4.1.3, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N respectivamente. Como por hipótese M e N completos, temos $\lim x_n = a$ em M e $\lim y_n = b$ em N e pela Proposição 3.4.5, $(x_n, y_n)_n$ converge para $(a, b) \in M \times N$ e portanto $M \times N$ é completo. ■

A generalização da proposição anterior é imediata:

Corolário 4.1.8 *$M_1 \times \ldots \times M_n$ é completo se, e somente se, cada $M_1, \ldots, M_n$ é completo.*

De uma maneira geral, para mostrar que um espaço métrico M é completo tomamos uma sequência (x_n), de Cauchy, em M e mostramos que, de fato, esta sequência converge para para um elemento de M. Dependendo da natureza do espaço a prova desta propriedade pode ser relativamente fácil ou difícil, mas em geral, segue o seguinte padrão:

i) Construção de um elemento a, para ser usado como limite;

ii) Demonstração de que o elemento a está no espaço em questão;

iii) Mostra-se a convergência $x_n \longrightarrow a$ (no sentido da métrica adotada).

A próxima proposição (e exemplo), cuja importância em dimensão finita será vista a seguir, utiliza exatamente o roteiro acima exibido.

Proposição 4.1.9 *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Demonstração. Vamos utilizar aqui a métrica euclidiana,

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
Seja (x_m) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, com $(x_m) = (x_1^m, \ldots, x_n^m)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^m - y_i^r)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \text{ sempre que } m, r > n_0 \tag{4.1}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade temos, para todos $m, r > n_0$ e $i \in \mathbb{N}$,

$$|x_i^m - x_i^r|^2 = (x_i^m - x_i^r)^2 < \varepsilon^2.$$

O que isto nos garante é que, para i fixado, a sequência $(x_i^1, x_i^2 \ldots)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e converge, pois $\mathbb{R}$ é completo. Digamos que $x_i^m \longrightarrow x_i$ a medida que $m \longrightarrow \infty$. Utilizando destes n limites podemos definir um um ponto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. A medida que $r \longrightarrow \infty$ em (4.1) ocorre, sempre que $m > n_0$, que $d(x_m, x) \leq \varepsilon$, o que nos mostra que $\lim x_m = x$ e por consequência, que $\mathbb{R}^n$ é completo. ■

Como todo espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo ao espaço $\mathbb{R}^n$ (ver [10], pág. 64), em termos práticos, o que a proposição anterior garante é que

Corolário 4.1.10 *Todo espaço métrico de dimensão finita é completo.*

Um leitor atento poderia questionar: o espaço $\mathbb{R}^n$ é completo com outra norma que não a usada na demonstração da Proposição 4.1.9? Um fato interessante que deve ser ressaltado é que num espaço vetorial normado de dimensão finita, quaisquer normas são equivalentes, num sentido a ser definido a seguir, o que na prática significa que a completude do espaço independe da norma usada.

A seguir, definiremos precisamente o conceito de equivalência de normas.

Definição 4.1.11 Uma norma $\|\cdot\|_1$ em um espaço vetorial E é dita equivalente a $\|\cdot\|_2$ em E se existe $a > 0$ e $b > 0$ tal que, para todo $x \in E$ temos

$$a \|\cdot\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1 .$$

Nossa intenção agora é provar que, de fato, num espaço vetorial normado de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Antes porém, enunciaremos o seguinte lema:

Lema 4.1.12 *Seja $\{x_1, \cdots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores num espaço normado E (de qualquer dimensão). Então existe $c > 0$ tal que, para toda escolha de escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c\left(|\alpha_1| + \cdots |\alpha_n|\right).$$

Demonstração. Veja [[9], Lema 2.4-1] ■

Teorema 4.1.13 (Normas equivalentes) *Num espaço vetorial de dimensão finita E, qualquer norma $\|\cdot\|_1$ é equivalente a qualquer outra norma $\|\cdot\|_2$.*

Demonstração. Seja *dim* $X = n$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base para E. Pelo lema anterior, segue que existe $c > 0$ tal que, para todo $x \in E$, temos

$$\|x\|_1 \geq c\left(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|\right),$$

onde $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Agora, considerando a norma $\|\cdot\|_2$ e aplicando a desigualdade triangular temos

$$\|x\|_2 \leq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,$$

onde $k = \max\{\|e_1\|_2, \cdots, \|e_n\|_2\}$. Assim, aplicando a desigualdade anterior, temos

$$\|x\|_2 \leq \frac{k}{c} \|x\|_1 .$$

A outra desigualdade é obtida através da troca das normas no argumento usado. Portanto, $\|\cdot\|_1$ é equivalente a $\|\cdot\|_2$. $\blacksquare$

4.2 Espaços de dimensão infinita

A seção anterior levanta uma questão importante quando se trata da natureza dos espaços de dimensão infinita: também são eles todos completos? Podemos reformular a pergunta, na negativa, da seguinte maneira: existe um espaço métrico de dimensão infinita onde nenhuma sequência de Cauchy converge para um elemento deste espaço?

Vamos mostrar que em dimensão infinita a completude dos espaços não é imediata. Antes porém, precisamos da seguinte proposição:

Proposição 4.2.1 *Um subespaço N de um espaço completo M é completo se, e somente se, N é fechado em M.*

Demonstração. Seja (x_n) em N uma sequência tal que $\lim x_n = a \in M$. Esta sequência é, portanto, de Cauchy em N e como N é completo tem-se $a \in N$. Assim N é fechado em M. Reciprocamente, dada uma sequência de Cauchy em N (e portanto em M), existe $a = \lim x_n$ em M pois M é completo. Como N é fechado em M, tem-se $a \in N$ e portanto N é completo. $\blacksquare$

Considere o espaço das sequências de escalares que convergem para zero, isto é fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, definimos o espaço por c_0 por

$$c_0 = \{(x_j); x_j \in \mathbb{K}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim x_j = 0\}.$$

Mostra-se sem grandes dificuldade que c_0 é um espaço vetorial, de dimensão infinita, com as operações usuais de sequências (operações coordenada a coordenada). Mostra-se também que a expressão

$$\|(x_j)\|_\infty = \sup\{|x_j|; j \in \mathbb{N}\}$$

define uma norma em c_0 e, portanto, este é um espaço métrico com métrica induzida por essa norma.

Para mostrar que c_0 é completo, consideremos uma sequência (x_n) de Cauchy em c_0 onde $x_n = (a_n^k)_{k=1}^\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$\left|x_n^k - x_m^k\right| \leq \sup\left\{\left|x_n^j - x_m^j\right|; j \in \mathbb{N}\right\} = \|x_n - x_m\|_\infty$$

é verdadeira e garante que a sequência de escalares $(x_n^k)_n$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, e portanto convergente, pois $\mathbb{K}$ é completo. Supondo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x_k$, para $k \in \mathbb{N}$. Escrevendo $x = (x_k)$, é tarefa simples mostrar que $x \in c_0$ e que $\lim x_n = x$ em c_0 e assim, tal espaço torna-se completo.

Vamos considerar agora um subespaço de dimensão infinita de c_0, o espaço das sequências eventualmente nulas, ou seja as sequências em que, a partir de um certo índice, todos os seus termos se tornam nulos. Denotando este espaço por c_{00}, temos:

$$c_{00} = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0;\ \text{existe } j_0 \in \mathbb{N}; a_j = 0, \text{ para todo } j \geq j_0\right\}. \tag{4.2}$$

Também pode-se mostrar, sem grandes dificuldades, que c_{00} é um espaço vetorial e mais ainda, que munido da norma $\|(x_j)\|_\infty = \sup\{|x_j|\,; j \in \mathbb{N}\}$, este é também um espaço vetorial normado.

Considere os seguintes elementos de c_{00}: $x_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$, $x_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 0, 0, \ldots)$, ... Esta sequência, cujo termo geral é $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, está no espaço c_{00}. Agora, dado $\varepsilon > 0$, vale que

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|_\infty &= \left\|\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots\right) - \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|\left(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots\right)\right\|_\infty \\
&= \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

sempre que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim, (x_n) é uma sequência de Cauchy em c_{00}. Resta-nos apenas verificar se de fato esta sequência converge para um elemento de c_{00}. Para isto, suponha que exista $y = (y_1, y_2, \ldots)$ tal que $\lim x_n = y$. Escrevendo $x_n = (\alpha_j^n)$, temos $\alpha_j^n = \frac{1}{j}$, para qualquer $1 \leq j \leq n$ e $\alpha_j^n = 0$, para todo $j > n$. Do fato da primeira coordenada de cada um dos vetores x_n é igual a 1, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1^n = 1$ e portanto

$$|1 - y_1| = |\alpha_1^n - y_1| \leq \sup\{\left|\alpha_j^n - y_j\right|, j \in \mathbb{N}\} = \|(x_n) - y\|_\infty \longrightarrow 0,$$

donde podemos concluir que $y_1 = 1$. O mesmo acontece de modo análogo nas demais coordenadas, de modo que podemos concluir que $y_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Claramente, esta sequência não é eventualmente nula, donde concluímos que (x_n) não converge em c_{00}. Portanto, temos um caso onde um espaço de dimensão infinita não é completo.

Conclusão: Em dimensão infinita nem todos os espaços métricos são completos.

Para espaços normados, existe uma caracterização de completude diferente da que vimos trabalhando. Não vamos demonstrar essa equivalência neste trabalho mas vamos coloca-la aqui por sua importância na investigação da completude de certos espaços.

Precisamos antes de algumas definições.

Definição 4.2.2 Sejam M um espaço vetorial normado e (x_n) uma sequência em M. Diz-se que (x_n) é uma sequência *absolutamente somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente.

Definição 4.2.3 Diz-se que uma sequência (x_n) num espaço vetorial normado M é incondicionalmente somável quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge em M, para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Agora estamos em condições de enunciar o

Teorema 4.2.4 *Um espaço normado M é completo se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.*

4.3 Espaços de Banach

Nesta seção faremos breves comentários sobre os espaços de Banach, um conceito que abarca espaços de naturezas diversas.

Definição 4.3.1 Um espaço normado M é chamado de *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Um primeiro exemplo de espaço de Banach de dimensão finita é o espaço $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Como todo espaço de dimensão finita é completo, podemos dizer que todo espaço normado de dimensão finita é Banach. Vale ressaltar ainda que a Proposição 4.2.4 pode ser reformulada para a nomenclatura de espaços de Banach.

Um primeiro exemplo de espaço de Banach de dimensão infinita foi visto na seção anterior: o espaço c_0.

Para apresentar um segundo exemplo de espaço de Banach de dimensão infinita vamos considerar agora o caso do espaço das sequências reais p-somáveis.

Sendo $1 \leq p \leq \infty$, define-se o espaço ℓ_p como sendo o espaço das sequência reais *p-somávis*, ou seja,

$$\ell_p = \left\{ (x_i) \text{ em } \mathbb{K}; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Prova-se com o uso da desigualdade de Minkwski, que ℓ_p dotado da norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço vetorial normado. A próxima proposição garante que tal espaço é completo.

Proposição 4.3.2 *ℓ_p é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_p, onde $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $m, n > n_0$,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Usando as somas parciais da série acima e um argumento análogo ao usado anteriormente na Proposição 4.1.9, segue que, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon, \text{ sempre que } m, n > n_0. \tag{4.4}$$

Isto nos diz que, para i fixo, $(x_i^1, x_i^2, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de escalares, que converge, pois $\mathbb{K}$ é completo. Digamos que $\lim x_i^n = x_i$ e usando estes limites, podemos definir $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e nos resta mostrar então que $x \in \ell_p$ e $\lim x_n = x$ em ℓ_p.

De 4.3, segue que, sempre que $m, n > n_0$ e $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^m - x_i^n|^p < \varepsilon^p$$

e fazendo $n \to \infty$, temos para todo $m > n_0$, e $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^m - x_i|^p < \varepsilon^p.$$

Assim, quando $k \to \infty$, para todo $m > n_0$, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i|^p < \varepsilon^p.$$

e pode-se concluir que $(x_n) - x \in \ell_p$. Como ℓ_p é espaço vetorial, temos que e $x = (x_n) + (x - (x_n)) \in \ell_p$ e a expressão acima também nos permite concluir que (x_n) converge para x em ℓ_p. ■

4.4 Espaços de Hilbert

Nesta seção apresentaremos um último exemplo de espaços métricos completos, os espaços de Hilbert. Esse tipo de espaço detém uma importância significativa, especialmente pela sua utilização em problemas oriundos da Física.

Definição 4.4.1 Dizemos que um espaço vetorial com produto interno é um *espaço de Hilbert* quando este é completo em relação a métrica induzida pelo seu produto interno.

A partir da definição podemos identificar alguns primeiros exemplos, tais como o próprio espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, munido da norma

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

norma esta induzida pelo produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

Para apresentar mais um exemplo de espaço de Hilbert vamos agora considerar o espaço ℓ_2 das sequências 2-somáveis, também chamado *espaço das sequências quadrado somáveis.*

Como ℓ_2 é um caso particular de espaço ℓ_p, já visto na seção anterior, já sabemos que ele é um espaço de Banach com as operações usuais de sequências. Além disso, um produto interno em ℓ_2 pode ser definido pela aplicação

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : & \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \end{aligned}$$

Note agora que a norma em ℓ_2 é induzida por esse produto interno, pois

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Assim ℓ_2 é, de fato, um espaço de Hilbert.

Bibliografia

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2001. 153 p.

[2] BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980. 411 p.

[3] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2015. 431 p.

[4] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496 p. Tradução de Elza Furtado Gomide.

[5] DOMINGUES, Higino Hugeuros; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. 368 p.

[6] DOMINGUES, Higino Hugeuros. **Espaços métricos e introdução a topologia**. São Paulo: Atual, 1982. 183 p.

[7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. 844 p. Tradução de Hygino Hugeuros Domingues.

[8] HALMOS, Paul Richard. **Teoria ingênua dos conjuntos**. São Paulo: Editora Polígono, 1970. 116 p. Tradução de Irineu Bicudo.

[9] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with aplications**. New York: Wiley Classics Library Edition, 1989. 688 p.

[10] LIMA, Elon Lages. **Algebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 357 p.

[11] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA - CNPq, 1977. 299 p.

[12] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise Vol. 1**. 7. ed. Rio de Janeiro: Impa - Cnpq, 1976. 344 p.

[13] LIMA, Elon Lages. **Análise real Vol. 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 198 p.

[14] MEDEIROS, Luiz Adalto da Justa. **Introdução às funções complexas**. São Paulo: Mcgraw-hill, 1972. 243 p.

[15] O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **David Hilbert**. 2014. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert.html>. Acesso em: 14 set. 2018.

[16] O´CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Felix Hausdorff**. 2004. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff.html>. Acesso em : 13 set. 2018.

[17] O´CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **René Maurice Fréchet**. 2005. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frechet.html>. Acesso em : 13 set. 2018.

[18] O´CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Stefan Banach**. 2004. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach.html>. Acesso em : 13 set. 2018.

[19] RUDIN, Walter. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.a., 1971. 297 p. Tradução de Eliana Rocha Henriques de Brito.

[20] SILVA, Gentil Lopes. **Espaços Métricos**: com aplicações. Boa Vista: Kiron, 2013. 628 p.