UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

O ensino-aprendizagem da Análise Combinatória em algumas escolas públicas do Estado da Paraíba

Rio Tinto – PB
2014

Adriano Alves da Silveira

O ensino-aprendizagem da Análise Combinatória em algumas escolas públicas do Estado da Paraíba

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Educação Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Carlos Alberto Almeida

Rio Tinto – PB
2014

S587e Silveira, Adriano Alves da.

O ensino-aprendizagem da análise combinatória em algumas escolas públicas do Estado da Paraíba. / Adriano Alves da Silveira. – Rio Tinto: [s.n.], 2014.

67 f. : il. –

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Almeida.

Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Matemática – ensino-aprendizagem. 2. Análise combinatória. 3. Matemática – estudo e ensino.

Adriano Alves da Silveira

O ensino-aprendizagem da Análise Combinatória em algumas escolas públicas do Estado da Paraíba

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profº Dr. Carlos Alberto Almeida

Aprovado em: 08/04/2019

COMISSÃO EXAMINADORA

Carlos Alberto Almeida

Profº Dr. Carlos Alberto Almeida – UFPB - DCE

Givaldo de Lima

Prof. Ms. Givaldo de Lima – UFPB - DCE

Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva

Prof. Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva - UFPB - DCE

Dedico este trabalho ao meu pai Ozildo Alves da Silvera (*in memorian*), a minha mãe Maria da Penha Silva Duarte que sempre fizeram o possível para que esse sonho se realizasse. E também ao meu amigo e irmão Leandro Alves (*in memorian*), por todos os ensinamentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me guiado e de estar sempre comigo diante da realização deste sonho.

Aos meus pais, Ozildo Alves da Silveira (*in memorian*) e Maria da Penha da Silva Duarte, por me incentivarem e por ser a razão de todas as coisas boas que acontecem em minha vida.

Ao meu orientador Carlos Alberto de Almeida, que sempre teve uma palavra de apoio e que foi essencial não só para realização deste trabalho, mas desde o primeiro período já dava uma palavra de incentivo no momento de dificuldades.

A Dayane Serafim que é uma pessoa muito especial na minha vida.

A todos os professores do CAMPUS IV- UFPB, na qual vão ficar marcados em minha vida, tanto na formação profissional, mas também como pessoa. Em especial a Givaldo Lima, Jussara Patrícia, Severina Andrea, Jamilson Campos, Cibelle Castro, Hélio Pires, José Elias, Ágnes Liliane, Surama Costa, Cristiane Borges e Cristiane Fernandes.

As minhas sobrinhas Gerlane Duarte, Daiana Duarte, Daniela Duarte e Ivam Junior e aos meus irmãos Erivam Duarte e Ivam Duarte.

Aos meus amigos que sempre me incentivaram como: Edneide Duarte, Natália Lima, Débora Janini, Jéssica Alves, Jéssica de Fátima, Marilene Freitas, Diego Matias, Manoel Júnior, Rosilanne Teixeira, Anne Souza, Samuel Fernandes, Francinaldo Meireles, Simone Patrício, Edilene Sousa, Anne Sousa e Maria José.

Eu não poderia esquecer dos meus amigos e irmãos que moraram comigo durante essa caminhada; em especial: Leandro Alves (*in memorian*), Alexandre Lins, Emanoel Alves, Aldo Eliazér, Islam Emmanuel e Romildo Sousa.

Aos meus amigos de turma que me ajudaram diante das dificuldades encontradas durante o curso, em especial: Antunes Menezes, Wanderson Ferreira, Jéssica de Almeida, Cleidson Cândido, Haisllan Alves, João Luís, Suelly, Bianca Matias e Luana Bernadino e Cinthia Danielle.

Agradeço também aos meus professores que fizeram parte da minha formação básica e que me incentivarem para realização deste sonho, em especial: Ester Meireles, Everaldo Nascimento, Abraão Henrique, Édson Souza e Luís Alves.

A todos os alunos que participaram da pesquisa.

Aos meus companheiros e amigos de trabalho, em especial: João Alves, Gabriel Pereira, Anderson Sousa, Cristiano Souza, Zé Leonel, Jordan Machado e Ronaldo Matias.

“Tudo é do pai, toda honra e toda glória, é dele a vitória alcançada em minha vida” (Pe. Fábio de Melo).

RESUMO

A presente pesquisa teve como foco o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória. Assim, este trabalho teve o objetivo de investigar, por meio de dois questionários, aplicados aos estudantes e professores, as estratégias e dificuldades encontradas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio, como também as percepções dos professores sobre o estudo dessa temática. O questionário aplicado aos estudantes era composto de quatro questões discursivas, enquanto o do professor foi composto de cinco questões. O nosso propósito era responder as seguintes questões: Qual foi o suporte que os alunos tiveram nos anos iniciais sobre os primeiros conceitos da Análise Combinatória? Quais justificativas dos professores em deixar o estudo da Análise Combinatória de lado? Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória? Será que esse conteúdo está sendo abordado na forma que os documentos oficiais orientam? Com isso, elegemos como sujeitos da pesquisa seis turmas do 2º ano do Ensino Médio distribuídas no**s** Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto – PB. O questionário aplicado aos estudantes trazia questões simples na qual poderia utilizar **o** Princípio Fundamental da Contagem (PFC), como também poderia enumerar todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los. Os resultados obtidos são comentados nas considerações finais, no qual é importante destacar que o professor deve selecionar os conteúdos que vão ser importantes para o aluno, tanto na sua formação profissional como também para prosseguimento dos estudos.

Palavras-chaves: Análise Combinatória. Ensino-aprendizagem. Formação profissional

ABSTRACT

This research focused on the teaching and learning of Combinatorial Analysis . This study aimed to investigate, by means of two questionnaires administered to students and teachers, the strategies and difficulties encountered by students of 2nd year of high school, as well as the perceptions of teachers on the study of this subject. The questionnaire given to the students was composed of four essay questions, while the teacher was composed of five questions. What our purpose was to answer the following questions: What was the support that the students in the early years of the first concepts of Combinatorial Analysis? What justifications teachers to leave the study of combinatorial analysis side? What are the difficulties encountered by students in the study of combinatorics? Does this content is being addressed in a way that the official documents guide? With this, we have chosen as research subjects six teams of the 2nd year of high school distributed in the municipalities of Alagoinha - PB, Mulungu - BP and Rio Tinto - PB. The questionnaire given to the students wore simple questions in which could use the Fundamental Counting Principle (PFC), but could also enumerate all possible groupings and then count them. The results are discussed in the concluding remarks, in which it is important to highlight that the teacher should select the content which will be important for the student, both in their professional training as well as for further education.

Keywords: Combinatorial Analysis. Teaching and learning. vocational training

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PB - Paraíba

PCN + - Parâmetros Curriculares Nacionais

PFC - Princípio Fundamental da Contagem

PIBID - Programa Institucional de Bolsa e Iniciação à Docência

UFPB - Universidade Federal da Paraíba

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

A temática em foco aparece no cenário escolar como um tema desafiador devido sua complexidade e importância. Na verdade, é comum se deparar com situações que necessitam do conhecimento da Análise Combinatória em nosso cotidiano e que, ao longo do tempo, foi preciso de um estudo mais aprofundado dessa temática.

Com as pesquisas bibliográficas, percebemos que as primeiras atividades matemáticas da humanidade estavam relacionadas com a contagem de objetos direta de um conjunto, porém foi necessária a utilização de técnicas de contagem para resolução de diversos problemas.

Desta forma, nos últimos anos, a educação passou a ter um caráter decisivo no desenvolvimento do país. Os alunos têm encontrado um tratamento diferenciado no ensino desta ciência, ao ser agregado novos métodos de ensino tais como: a utilização de software, equipamentos eletrônicos, jogos, resolução de problemas dentre outros. Segundo Morgado et al (1991):

> A Análise Combinatória teve um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente, devido às necessidades de teoria dos grafos, em análise combinatória de algoritmos, dentre outros estudos. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados utilizando computadores, e também problemas de matemática “pura”, como o famoso problema das quatro cores.

A Análise Combinatória é um dos conteúdos que vem se destacando com relação aos demais. Acredito que a maior importância se deva ao fato desse conteúdo está diretamente ligado a situações do nosso dia-a-dia, pois trabalha dentro da linha de resolução de problemas. Que hoje é uma forte tendência metodológica. Outro fator importante diz respeito à dimensão do estudo da Análise Combinatória como conteúdo que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo matemático.

Os documentos oficiais de Matemática apresentam a Análise Combinatória como conteúdo obrigatório que compõem a estrutura curricular do Ensino Médio.

A Análise Combinatória pertence ao bloco Análise de dados e probabilidade que deve ser discutido durante todos os anos de escolaridade do Ensino Básico. No entanto, este conteúdo se desenvolve ainda muito timidamente, no ambiente escolar, apesar de sua potencialidade, ao trabalhar de forma eficaz com algumas competências exigidas nos PCN+ (BRASIL, 2002) de Matemática, tais como: representação, leitura, investigação e compreensão, capacidade de enfrentamento e resolução de situações problemas, dentre outras.

Assim, um fator que deve ser levado em consideração é que o estudo da Análise Combinatória deveria ser contemplado de uma forma mais eficaz no Ensino Fundamental.

> No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los. (BRASIL, 1999, p. 52)

No entanto, o ensino da Análise combinatória só começa a ser discutido na maioria das instituições escolares a partir do 2° ano do Ensino Médio, tornando assim uma aprendizagem sem alguns suportes para determinada etapa. Porém, o problema é mais preocupante do que parece, pois existem muitas escolas que não trabalham com o estudo da Análise Combinatória em seu currículo. Este fato pode ocorrer pela insegurança do professor de Matemática no conteúdo de Análise Combinatória e também por achar que, ao discutir tal temática, seus alunos vão ter muita dificuldade em aprender os conceitos deste tópico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), destacam a importância do raciocínio combinatório para os alunos do Ensino Básico no Brasil.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizarem inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito e se tornaram bastante complexas. (BRASIL, 1999, p. 44).

Contudo é importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, Estatística e Probabilidades no Ensino Médio. Portanto, ao fim desse trabalho, pretendemos entender os principais obstáculos no estudo da Análise Combinatória.

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. Apresentamos, no primeiro, a nossa temática, na qual destaca-se a importância da Análise Combinatória no cenário escolar, além de mostrar as questões que justificam a realização da pesquisa e as problematizações, bem como também os objetivos dessa pesquisa.

No segundo capítulo, discorremos sobre alguns fatos históricos sobre a Análise Combinatória e também as definições sobre os principais tópicos dessa temática, destacando principalmente o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), como principal suporte para o estudo dessa temática. E, por fim, são destacadas algumas características importantes no estudo da Análise Combinatória.

No terceiro capítulo são apresentadas algumas questões da OBMEP e suas respectivas soluções e também algumas aplicações na probabilidade e na teoria dos conjuntos.

No quarto capítulo, mostramos todos os procedimentos metodológicos utilizados para atingir os objetivos pré-estabelecidos como o questionário utilizado para os alunos das escolas estaduais dos Municípios de Alagoinha - PB, Rio Tinto - PB e Mulungu – PB. Além disso, o questionário aplicado para os professores de Matemática das turmas, na qual ocorreu a pesquisa. E por fim, os resultados obtidos com a pesquisa.

Finalmente, o último capítulo volta-se à questão investigada, no início deste trabalho, e confronta-se com os resultados obtidos, com o intuito de atingir os objetivos desta investigação.

1.2 Justificativa e Problemática

Este trabalho está direcionado aos alunos e professores do Ensino Médio, mas especificamente nas turmas de Matemática do 2º ano, que estudam nas escolas públicas de alguns municípios da Paraíba, tais como: Alagoinha, Mulungu e Rio Tinto.

A escolha dessa temática se justifica de duas maneiras: verificar como está ocorrendo o estudo da Análise Combinatória em algumas escolas públicas, determinando quais as dificuldades encontradas pelos alunos e professores no estudo dessa temática. A segunda se justifica pelo estudo da Análise Combinatória, por se tratar de uma parte desafiadora e estimulante da Matemática, onde esta propicia a contextualização do cotidiano do aluno, na qual desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo matemático. Desta forma, é importante um olhar crítico do que é necessário para melhorar o Ensino da Matemática no Brasil, contando com algumas ferramentas inovadoras, tais como: jogos, a utilização de softwares, Matemágica.

Além disso, é preciso começar o estudo desta temática com problemas motivadores que provocam a curiosidade e estimulam o aluno a querer resolvê-los. Pode-se fazer uma introdução dos problemas que serão resolvidos com o estudo da Análise Combinatória e depois começar com os problemas simples que são os de contagem, onde estes preparam para etapas seguintes.

Ao longo deste trabalho, iremos defender que essa temática deve ser trabalhada no Ensino Fundamental de uma forma concreta e eficaz com a utilização de jogos e de software, na qual o aluno possa se familiarizar com os conceitos de contagem, já que este é o principal alicerce do estudo da Análise Combinatória.

Podemos definir como problemática alguns focos de pesquisa deste trabalho, ou seja, questionamentos como: qual foi o suporte que os alunos tiveram nos anos iniciais sobre os primeiros conceitos da Análise Combinatória? Quais justificativas dos professores em deixar o estudo da Análise Combinatória de lado? Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória? Será que esse conteúdo está sendo abordado na forma que os documentos oficiais orientam?

Pretendemos verificar, diante da pesquisa, quais dificuldades encontradas no estudo da Análise Combinatória e que medidas devem ser tomadas para tornar o ensino dessa temática mais estimulante.

1.3 Objetivos da Pesquisa

1.3.1 Geral

Analisar como os estudantes do 2° ano do Ensino Médio dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto-PB, provenientes de escolas públicas, resolvem problemas matemáticos a partir de situações reais que envolvem o conceito da Análise Combinatória.

1.3.2 Específicos

Averiguar se os alunos conseguem resolver problemas que estão diretamente relacionados ao seu cotidiano.

Identificar as principais estratégias utilizadas pelos alunos das escolas públicas investigadas sobre o conteúdo Análise Combinatórias.

Verificar como os professores concebem o conteúdo de Análise Combinatória nas escolas citadas acima.

1.4 Caracterização da Pesquisa

Esta seção tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos utilizados no presente estudo. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para os problemas na qual se justifica a realização da mesma. Deste modo, apresentamos, a seguir, o tipo de estudo bem como os participantes e a metodologia aplicada, segundo o objetivo e à análise de dados.

A metodologia de pesquisa pode ser caracterizada, segundo seus objetivos, como um estudo descritivo e exploratório, elaborado a partir da investigação e de materiais publicados sobre a temática em questão.

Quanto à análise de dados, este estudo se caracteriza por ser do tipo estudo de caso com apenas uma interação. O estudo de caso pode ser compreendido segundo Oliveira (2007), como um estudo profundo de uma temática. Quanto aos instrumentos de pesquisa, utilizaremos um questionário semiestruturado composto por questões abertas sobre o estudo da Análise Combinatória na sala de aula.

Para alcançar os objetivos da pesquisa, elegemos como sujeitos do estudo, os professores e alunos do 2° ano do Ensino Médio das Escolas Públicas dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto – PB. A metodologia de ação será estruturada em duas etapas: aplicação do questionário e a verificação dos resultados obtidos.

A primeira etapa da pesquisa visa conhecer os estudantes e professores participantes, bem como identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no Estudo da Análise Combinatória. Neste momento, desejamos também investigar como os professores das instituições trabalham a Análise Combinatória no ambiente escolar. Desta forma, utilizamos dois questionários, um elaborado para os professores e o outro para os estudantes. Este instrumento é composto de duas partes: a primeira – identificar o perfil dos estudantes e professores das instituições investigadas; e a segunda – identificar as concepções dos docentes e estudantes sobre o conteúdo da Análise Combinatória.

A segunda etapa remete à verificação e à análise dos resultados baseados na teoria estudada. Neste momento, estamos interessados em investigar quais as principais dificuldades que os professores e estudantes tem acerca do Ensino e na aprendizagem da Análise combinatória.

2 - REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Análise Combinatória

Segundo Silva e Filho (2008, p 498) a Análise Combinatória é o ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar elementos de um conjunto.

E tem como ponto de partida o princípio da contagem, que é o alicerce primordial desta área, envolvendo o princípio multiplicativo e aditivo.

Com o estudo da Análise Combinatória podemos resolver muitos problemas que estão relacionados ao nosso cotidiano, como por exemplo: de quantos modos diferentes Ana pode se vestir para ir à festa, sabendo que ela tem 4 saias e 6 blusas? Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por três letras e quatro algarismos, podem existir? Quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre sessenta números para jogar a mega - sena? Quantas senhas de quatro algarismos você pode obter com os algarismos de 1 a 9? Em uma classe de trinta alunos, quantas são as possíveis escolhas para três representantes de sala?

A Análise Combinatória se desenvolveu ao longo do tempo com diversos problemas que necessitava de métodos de contagem adequados.

Assim a necessidade de contagem é muita antiga. A partir da ideia de organização numérica surgiu um novo ramo da Matemática, a Análise Combinatória na qual vamos abordar alguns acontecimentos que mostram como se deu o desenvolvimento dessa temática. A história da matemática nos possibilitou inúmeras situações envolvendo o conteúdo de Análise Combinatória, ao se determinar as possíveis soluções de resolver tantos problemas envolvendo situações planas como em situações tridimensionais, como é o caso do problema das Sete pontes que veremos a seguir.

Segundo Dante (2010, p 274), a Análise Combinatória se desenvolveu ainda na Antiguidade, quando o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. -212 a.C.) propôs um problema geométrico que se tornou famoso, chamado Stomachos (palavra derivada do grego Stomachos; em português, “estômago”), que consistiam em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado. Conta a história que alguns estudiosos da época atribuíram o nome Stomachos pelo grau de dificuldade do jogo, no qual dava dor de estômago em quem jogava. Este exemplo é um dos primeiros registros da necessidade do estudo de combinações para resolver situações matemáticas na antiguidade. Abaixo apresentamos uma das soluções do Stomachion:

Figura 1 – Stomachion

Fonte: Dante 2010

Em 1736, ainda segundo Dante (2010, p 274), outro matemático que também utilizou os conhecimentos de combinatória para resolver um famoso problema da época foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Este matemático resolveu o problema que havia surgido na cidade de Konigsberg, na Prússia (atual Kaliningrado, Rússia), conhecida por suas sete pontes, das quais cinco ligavam o continente a uma ilha. Denominado: *As sete pontes de Konigbsberg*, o problema consistia em descobrir se era possível caminhar ao redor de toda cidade passando sobre cada ponte uma única vez: *Partindo-se de uma das ilhas, é possível ir pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?* Mais tarde, este matemático resolveu esse problema, dando origem ao estudo da teoria dos grafos, no qual tem grande aplicação na ciência da computação atualmente.

Podemos destacar também o famoso problema 79 do papiro de Rhind, encontra-se nele os seguintes conjunto de dado (EVES, 2004 p.75):

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
espigas de trigo	2041

hectares de grãos	16807
TOTAL	19607

O problema citado acima trabalha com o princípio multiplicativo como técnica de contagem.

Segundo Dante (2010, p 274), entretanto, o grande desenvolvimento da Análise Combinatória se deve aos jogos de azar (jogos de cartas, dados ou moedas), por serem instigantes e desafiadores.

Atualmente a Análise Combinatória é alicerce na teoria do grafos, probabilidades, topologia, além de outras áreas do conhecimento.

2.2 Métodos de cálculo para Análise Combinatória

Princípio fundamental da contagem (PFC)

O conceito mais importante que acompanha a discussão de combinatória é apresentado por Souza (2010, p 217), como sendo o Princípio Fundamental da contagem (PFC), assim definido por ele:

> Se um acontecimento **A** pode ocorrer de **n** maneiras distintas, e para cada uma dessas maneiras, um acontecimento **B** pode ocorrer de **m** maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos **A** e **B** é dada pelo produto **n x m**.

Um recurso que é utilizado para resolver diversos problemas de contagem é o diagrama de árvores.

Segundo (BRASIL, 2006, p 79), a utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Para um conjunto que existem muitas possibilidades, esse recurso se torna limitado, porém contribui de forma significativa para o entendimento do (PFC).

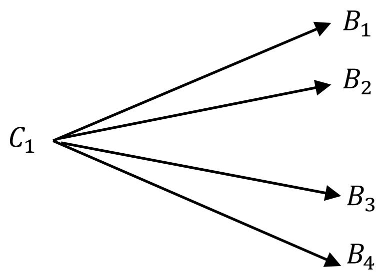
De forma geral todo problema de contagem pode, ser resolvido por um processo de contagem, pelo menos na teoria. No entanto, na prática, a resolução de alguns desses problemas pode se tornar muito complicada. Assim existem técnicas de contagem que facilitam a resolução de muitos problemas como, por exemplo, arranjos simples, permutações simples e combinações simples.

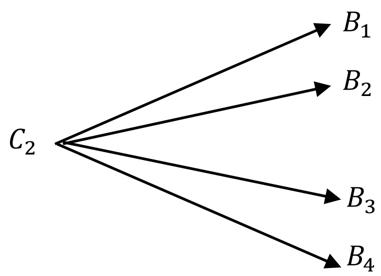
Exemplo:

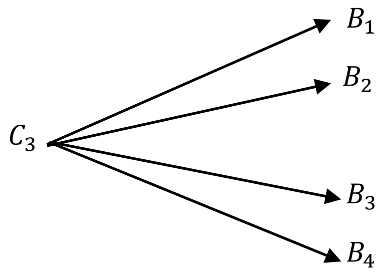
Maria possui 3 calças e 4 blusas. De quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa?

Solução:

Vamos utilizar o diagrama de árvore e determinar todas as possibilidades:







Observando o diagrama de árvore acima, podemos perceber que temos:

$$3 \cdot 4 = 12$$

Desta forma, Maria pode ir para festa de 12 modos distintos.

Fatorial

É definido como um grupo, cuja característica principal é indicado por **n!**, o produto de **n** por seus antecessores naturais até o 1, ou seja:

$$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3),...,1$$ (HARIKI, 1996)

Na verdade, a leitura do símbolo n! é: “n fatorial”. Veja alguns exemplos:

Exemplos:

a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
b) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Segundo Paiva (2010, p 162), é necessário definir fatorial de zero (0!) e fatorial de um (1!), pois zero e um também fazem parte da contagens.

Vamos mostrar o fatorial desse números a partir da validade da propriedade fundamental dos fatoriais, que, por enquanto, foi estrita para **n** natural, com n**≥3:**

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

As demonstrações de 0! e 1! que veremos logo abaixo se encontra em Paiva (2010, p 162).

1º Vamos definir 1! De modo que a propriedade continue válida, devemos admitir, para n = 2.

$$2! = 2 \cdot (2 - 1)! \Rightarrow 2! = 2 \cdot 1!$$

Sabemos que 2! = 2 · 1, substituindo na equação acima temos:

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1!$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por 2, temos:

$$1 = 1!$$

2º De forma análoga vamos definir 0! de modo que a propriedade continue válida, devemos admitir, para n = 1:

$$1! = 1 \cdot (1 - 1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot 0!$$

$$1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 1 = 0!$$

Como já definimos 1! = 1, concluímos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser explicada para n = 1 sob a definição:

$$0! = 1$$

Arranjos simples

A demonstração logo abaixo se encontra em Dante (2010).

Para calcular o número total desses agrupamentos no caso geral de **n** elementos arranjados **p** a **p**, com $\mathbf{n} \geq \boldsymbol{p}$, ou seja, como calcular $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo de **n** elementos tomados **p** a **p**).

Para $\mathbf{n} > \boldsymbol{p}$, temos **n** elementos distintos vamos arranjá-los **p** a **p**. Construindo a árvore de possibilidades, obtemos:

1º) na primeira posição: **n** possibilidades (pois temos **n** elementos disponíveis).

2º) na segunda posição: (n - 1) possibilidades (pois temos (n - 1) elementos disponíveis).

3º) na terceira posição: (n - 2) possibilidades (pois temos (n - 1) elementos disponíveis).

$\vdots$

4º) na p- ésima posição: n - (n - 1) possibilidades (pois temos n – (p - 1) elementos disponíveis).

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número total de possibilidades é dado por:

$$\boxed{A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}$$

Podemos ainda indicar $A_{n,p}$ por meio de fatoriais. Observe:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando esse número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Resumindo, temos:

> Arranjo simples de **n** elementos tomados **p** a **p** (**p**≤ **n**) são os agrupamentos ordenados diferentes que podem formar com **p** dos **n** elementos distintos.
>
> Indica-se por $A_{n,p}$ o total desses agrupamentos, que calculamos assim:
>
> $$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$
>
> $$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$ (idem, p 282)

Observações:

1º) Quando tratamos de arranjo simples, a ordem é importante.
2º) Podemos usar tanto o conceito de arranjo, como o (PFC) para resolver os problemas.

Exemplo:

Com os algarismos 1, 2, 3 e 7, quantos números de dois algarismos, sem repeti-los podemos formar?
Solução:

1º maneira: usando o princípio da contagem

$$\underset{dezena}{\underline{\quad 4 \quad}}\ \underset{unidade}{\underline{\quad 3 \quad}}$$

Observando acima percebemos que temos 4 possibilidades para o algarismo das dezenas e 3 possibilidades para o algarismo das unidades.
Pelo (PFC) temos:

$4 \cdot 3 = 12$ possibilidades

2º maneira: usando a fórmula

Podemos perceber que a ordem dos agrupamentos formados são importante, por exemplo: $13 \neq 31$. Assim, temos 4 elementos que devem ser arranjados 2 a 2. Então, basta calcular:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Permutação simples

Segundo Dante (2010, p 278), permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

Segundo Barroso (2010, p 308), dado um conjunto de **n** elementos, chama-se permutação simples dos **n** elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses **n** elementos.

Como virmos anteriormente:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Vamos tomar n = p, daí temos:

$$A_{n,n} = P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n\,(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Portanto:

$$P_n = n\,(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

$$P_n = n!$$

Exemplo:

Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 3, 4 e 5 sem repeti-los?

Solução:

1º maneira: usando a fórmula.

Como devemos formar número de três algarismos distintos, permutando entre si, basta calcular:

$$P_n = n!$$

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

2º maneira: sem usar a fórmula

Solução:

Como o número de agrupamentos são pequenos, então podemos enumerar todos e depois contá-los.

- Vamos determinar os números que começa com 3:
  345, 354
- Vamos determinar os números que começa com 4:
  453, 435
- Vamos determinar os números que começa com 5:
  543, 534

Como vimos acima, podemos formar 6 números distintos.

3º maneira: Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Temos 3 possibilidades para escolha do primeiro algarismo, 2 possibilidades para escolha do segundo algarismo e 1 possibilidade para escolha do terceiro número, ou seja,

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ maneiras}$$

Permutação circular

Chama-se permutação circular de **n,** objetos distintos, qualquer disposição desses objetos em torno de um círculo. Indica – se por **(PC)n.** (idem, p 310)

O número de permutações circulares de **n** elementos é dado por:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo: Determine de quantas maneiras diferentes podemos reunir 4 pessoas em uma mesa circular.

Solução:

$$(PC)_n = (n-1)! = (4-1)! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Portanto, as 4 pessoas podem se reunir de 6 maneiras diferentes.

Combinação simples

Segundo Silva e Filho (2008, p 507), chama-se combinação simples todos os agrupamentos simples de **p** elementos que podemos formar com **n** elementos distintos, sendo **p**$\leq \boldsymbol{n}$. Cada um desses agrupamentos se diferencia do outro apenas pela natureza de seus elementos.

Segundo Dante (2010, p 286) a cada combinação de **n** elementos tomados **p** a **p** correspondem **p!** arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{n-p!}}{p!} = \frac{n!}{n-p!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Observação: quando tratamos de combinação simples a ordem não é importante.

Exemplo:

Na secretaria de infraestrutura de uma cidade tem 5 garis. Três deles deverão varrer a rua. Quantos grupos de 3 garis, podemos formar?

Solução:

1ª maneira: sem usar a fórmula

Observe que se trata de combinação simples, pois os agrupamentos se distingue do outro somente quando apresenta pelo menos uma pessoa diferente. No entanto, invertendo a ordem dos elementos não altera o grupo.

Note que vamos escolher 3 garis entre os 5. Assim vamos utilizar como se fosse arranjo simples.

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

Porém consideramos distintos os agrupamentos do tipo $(g_{1,}\, g_2,\ \ g_3)$ e $(\, g_2, g_{1,}\ \ g_3)$. Com isso devemos calcular todas as permutações de três elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Assim o número de combinações simples será dado por 60/6 = 10

2ª maneira: usando a fórmula.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Portanto, podemos formar 10 grupos de 3 garis.

Permutações com repetição

Segundo Silva e Filho (2008, p 511), um conjunto foi escrito com n elementos. Um dos elementos foi repetido $\boldsymbol{\alpha}$**,** outro elemento foi repetido $\boldsymbol{\beta}$ vezes e assim por diante, até um elemento repetido $\boldsymbol{\gamma}$ vezes.

O número de permutações que se pode obter com os elementos é:

$$p_n^{(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!, \beta!, \ldots, \gamma!}$$

Exemplo:

Determine o número de anagramas da palavra PAPA.

Solução:

Note que a letra A e a letra P se repetem duas vezes, logo estamos diante de um problema de permutação com repetição.

$$p_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

2.3 Análise Combinatória no Ensino Médio

A nossa investigação teve como foco de estudo a Análise Combinatória abordada no 2º ano do Ensino Médio.

Segundo (BRASIL, 2006, p 94), no ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Na verdade é importante trabalhar com problemas que desenvolva o pensar matemático dos alunos e que o enunciado seja de fácil entendimento, onde eles possam enumerar todas possibilidades, vale ressaltar que os problemas não precisa ser necessariamente fácil.

A Análise Combinatória, trata de um tema matemático que causa angústia entre os alunos e professores. Assim, fomos buscar as principais dificuldades que remetem ao processo ensino-aprendizagem da Análise Combinatória.

Essa pesquisa apontou alguns motivos que justificam essa angústia. Podemos apontar a falta de instigação do conhecimento combinatório, a falta de compreensão do professor, acerca da importância do estudo da Análise Combinatória.

Assim, podemos destacar algumas ideias como: é importante trabalharmos com os alunos problemas de contagem, sem a utilização direta de fórmulas e é preciso que as fórmulas sejam entendidas pelos alunos para que a utilização das mesmas não ocorra de uma forma mecânica.

Um dos grandes problemas do estudo da Análise Combinatória no ambiente escolar é perceber que tipo de agrupamento a questão está trabalhando, desta forma podemos destacar alguns questionamentos que estão bem presentes na sala de aula, tais como: é arranjo ou combinação? Que fórmulas utilizar?

De acordo com Hariki (1996), problemas envolvendo combinatória são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de Matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

No processo Ensino e aprendizagem da Análise Combinatória é necessário trabalhar com diversos recursos que facilite o aprendizado dos alunos.

Os PCN (BRASIL, 2000), ratificam o impacto provocado pela tecnologia de informação e Comunicação na configuração da sociedade atual. Como afirma (BRASIL, 2006, p 87):

> Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia a dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se, nessa mesma tecnologia, um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante vislumbramos uma formação escolar dos estudantes nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

Um exemplo de aplicação de combinatória agregada ao uso de tecnologia no ensino é o *software Combinat.* Este aplicativo, a princípio, tem a função de uma calculadora para resolver problemas de arranjo, combinação e permutação, porém, quando bem explorado, pode ser utilizado para fixar de forma eficaz as definições de arranjo simples, combinação simples e permutação simples.

Outra ferramenta que possui destaque no cenário da educação, principalmente no ensino da Matemática, é a utilização de jogos. Com isso, podemos destacar o jogo *Mastermind*, que trabalha com combinação simples e permutação simples e arranjo simples.

E, por fim, a Resolução de problemas pode ser uma metodologia eficaz no Ensino de combinatória no ambiente escolar, no qual proporciona que os alunos desenvolvam o raciocino lógico-dedutivo, pois permite que eles resolvam problemas do seu cotidiano sem a ajuda do professor.

Vale destacar que alguns alunos utilizam o diagrama de árvore para representar suas atividades de combinação, pois permitem uma melhor visualização da questão em foco. Na verdade, esse recurso proporciona uma aprendizagem significativa, pois ajuda a visualização do estudante, sendo significativa para este.

Por outro lado, muitos estudantes, ao se deparem com situações de problemas envolvendo combinatória, recorrem imediatamente às fórmulas, tornando assim um aprendizado mecânico e sem significados. Neste momento, é importante a mediação do professor e o incentivo na elaboração de estratégias que possam resolver as questões sem precisar utilizar as fórmulas de imediato. Com isso, há uma necessidade de sair do modelo tradicional, ao possibilitarmos a construção de novos modelos que vislumbrem um ensino mais construtivo e eficaz.

3 - APLICAÇÕES

Neste capítulo, vamos ver algumas aplicações da Análise Combinatória em alguns ramos da Matemática.

Para a primeira, seção 3.1, traremos algumas questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). A segunda aplicação, na seção 3.2, está voltada para o estudo da probabilidade, mais especificamente para descrever um espaço amostral de um experimento, na qual é utilizado o raciocínio combinatório. A seção 3.3 está voltada para uma aplicação da Análise Combinatória, na teoria dos conjuntos.

3.1 Questões da OBMEP

Questão: (OBMEP, 2011) Com os algarismos 1, 4, 6 e 8, pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

A) 12654
B) 12740
C) 13124
D) 13210
E) 13320

Solução:

Observe que com os quatros algarismos acima podemos formar 24 números distintos, pois temos uma permutação de 4 elementos, ou seja, $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ algarismos. Veja o quadro abaixo:

C	**D**	**U**
1	**4**	**8**
1	**6**	**8**
4	**1**	**8**
6	**1**	**8**
⋮	⋮	⋮
6	**8**	**1**
8	**6**	**1**

Note que a ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 6 vezes (P_3). Assim, também ocorre o mesmo nas outras ordens.

Desta forma, a soma dos valores em cada ordem é dada por:

$(8 + 8 + ...+ 8) + (6 + 6 + ...+ 6) + (4 + 4 + ...+ 4) + (1 + 1 + ...+ 1) = 48 + 36 + 24 + 6 = 114$

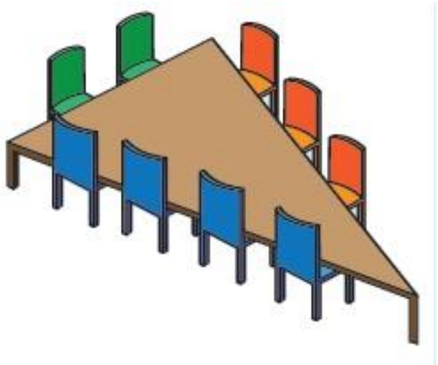
Assim a soma (S) é dada por:

$S = 114\ U + 114\ D + 114\ C = 1 \cdot 114 + 10 \cdot 114 + 114 \cdot 100 = 114 + 1140 + 11400 = 12654$

Portanto, a resposta é a alternativa A.

Questão18 (OBMEP, 2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 2: mesa triangular



Fonte: OBMEP 2012

A) 288
B) 6720
C) 10080
D) 15120
E) 60480

Solução:

- No lado que tem 2 lugares, há 1 possibilidade de sentar juntos;
- No lado que tem 3 lugares, há 2 possibilidades de sentar juntos;
- No lado que tem 4 lugares, há 3 possibilidades de sentar juntos;

Totalizando 6 possibilidades. Porém, devemos levar em consideração que Alice e Bernardo podem sentar de 2 maneiras diferentes nesses lugares.

- No entanto, os 4 amigos que estão em pé podem sentar nos 7 lugares vazios ou seja: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ maneiras diferentes.

Portanto, os amigos podem se sentar-se à mesa de $6 \cdot 2 \cdot 840 = 10080$ maneiras diferentes; o que corresponde a alternativa **C**.

3.2 Aplicação na Probabilidade

Quando temos um espaço amostral com um grande número de possibilidades, é utilizado o conceito de combinação simples, já que não recomendável enumerar todas as possibilidades. Assim, o aluno que não tem o conhecimento da Análise Combinatória, vai ter dificuldade no estudo da probabilidade.

Exemplo 1:

Uma caixa contém 500 lâmpadas. Destas, 10 estão queimadas. Ao escolher aleatoriamente 3 lâmpadas dessa caixa e verificar se estão queimadas ou não. Determine o número de elemento do espaço amostral desse experimento.

Solução:

Observe que listar todos os casos possíveis desse experimento não é recomendável, devido ao elevado número de possibilidades.

No entanto, podemos utilizar o conhecimento de Análise Combinatória para determinar o número de possibilidades desse espaço amostral. Na verdade, trata-se de um caso de combinação simples, já que a ordem que a lâmpada é sorteada não é importante. Desta forma, vamos determinar de quantos modos podemos escolher 3 lâmpadas.

500 !

$$C_{500,3} = \frac{500!}{3!(500-3)!} = \frac{500!}{3!497!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497!}{3!497!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498}{3!} = 20.708.500$$

Assim, o espaço amostral tem 20.708.500 elementos.

Exemplo 2:

Uma máquina produziu 80 parafusos, dos quais 6 eram defeituosos. Ozildo pretende pegar ao acaso 2 parafusos. Determine o espaço amostral desse experimento.

Solução:

Assim, como no exemplo acima, não é recomendável listar todos os casos possíveis, como se trata de uma combinação de 80 elementos tomados 2 a 2, temos:

$$C_{80,2} = \frac{80!}{2!(80-2)!} = \frac{80!}{2!78!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78!}{2!78!} = \frac{80 \cdot 79}{2} = 40 \cdot 79 = 3.160$$

Portanto, temos um espaço amostral com 3.160 elementos.

3.3 Aplicação da Análise Combinatória na teoria dos conjuntos.

Segundo Paiva (2009, p 159), alguns resultados da teoria dos conjuntos têm importante aplicação na Análise Combinatória; um deles é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos.

Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ (idem, p 159)}$$

Exemplo:

Quantos números de dois ou três algarismos distintos podem formar com os algarismos 2, 3, 5 e 6?

Solução:

Vamos denominar A como o conjunto dos números de dois algarismos, ou seja, para casa da dezena, temos 4 possibilidades e para casa da unidade, 3 possibilidades. Assim, pelo (PFC) temos:

$$n(A) = 4 \cdot 3 = 12$$

De modo análogo, vamos denominar B como o conjunto dos números de 3 algarismos. Assim, para casa das centenas, temos 4 possibilidades, para casa das dezenas, 3 possibilidades e para casa das unidades, 2 possibilidades. Assim, pelo (PFC) temos:

$$n(B) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Note que A e B são disjuntos, logo $A \cap B = \emptyset$

$$n(A) = n(A) + n(B) = 12 + 24 = 36$$

Assim podem ser formados 36 números.

4 - CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Neste capítulo vamos descrever a metodologia que foi utilizada na pesquisa, identificando os resultados do questionário aplicado nas escolas. Com isso, visamos responder a algumas questões que justificam a realização da temática em foco.

Assim, apresentamos a discussão dos resultados obtidos através dos questionários aplicados para os alunos e professores, determinando alguns pontos positivos e negativos encontrados durante a pesquisa.

Pretendemos alcançar os nossos objetivos estabelecidos bem como colaborar para que tenhamos sucesso no processo ensino-aprendizagem da Análise Combinatória.

4.1 O questionário

O questionário que se encontra no apêndice foi aplicado nas escolas estaduais dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto - PB. Desta forma, tivemos, como público alvo, alunos e alguns professores destas escolas.

O questionário que foi direcionado para os alunos era composto por 4 questões, na qual abordamos os conceitos do princípio da contagem, permutação simples, arranjo simples e combinação simples. No entanto, as três primeiras questões poderiam ser resolvidas pelo Princípio da Contagem, enquanto a quarta questão precisava saber distinguir que tipo de agrupamentos estava ocorrendo, mais precisamente se era arranjo simples, permutação simples ou combinação simples.

Já o questionário aplicado para os professores foi composto por cinco questões que tratava do conhecimento dos professores sobre os documentos oficiais, as estratégias e as dificuldades encontradas no estudo da Análise Combinatória.

Nosso objetivo com a aplicação deste questionário era colher informações sobre o conhecimento dos alunos no Ensino da Análise Combinatória, além de identificar as concepções dos professores sobre essa temática.

Para que a pesquisa fosse realizada, tivemos que conversar com os professores das turmas investigadas para que, durante as suas aulas, pudéssemos aplicar o questionário, mais precisamente em uma aula com duração de 1 hora. No entanto, é importante destacar que a questão 4, os alunos tinham que justificar sua resposta.

Participaram da pesquisa 134 alunos. Enquanto os alunos estavam resolvendo as questões, o professor respondia o questionário que lhe era direcionado.

4.1.1 Os alunos

Para aplicação do questionário, tivemos a participação de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio, de cada escola, totalizando 6 turmas. Desta forma, fomos verificar se realmente o conteúdo de Análise Combinatória estava ocorrendo nas escolas investigadas.

Tivemos a participação de 53 alunos do Município de Alagoinha -PB, 40 alunos do Município de Mulungu - PB e 41 alunos do Município de Rio Tinto – PB.

No entanto, como a pesquisa foi realizada no período em que as escolas estavam no 4º bimestre, esperávamos que os alunos do 2º ano do Ensino Médio destas escolas tivessem visto o conteúdo de Análise Combinatória.

4.1.2 Os professores

Para entender algumas concepções do estudo da Análise Combinatória no ambiente escolar, tivemos também a aplicação de um questionário para os professores das turmas investigadas, totalizando 5 professores, mais precisamente 2 professores da escola do Município de Alagoinha - PB, 2 do professores da escola do Município de Rio Tinto - PB e 1 professor da escola do Município de Mulungu - PB.

Visamos determinar como os professores das escolas investigadas concebem o estudo dessa temática no ambiente escolar; destacando os problemas encontrados no estudo da Análise Combinatória e se os professores utilizam algum documento que serve como guia para sua prática de sala de aula.

4.2 Os resultados obtidos em cada questão

Inicialmente vamos apresentar os resultados do questionário em relação a cada Município.

Tabela 1: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Alagoinha.

Respostas dos alunos de Alagoinha – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1ª questão	3	42	0	8	53
2ª questão	2	0	0	51	53
3ª questão	2	26	0	25	53
4ª questão	47	0	1	5	53

Fonte: Arquivo pessoal

Tabela 2: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Mulungu.

Respostas dos alunos de Mulungu – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1ª questão	0	19	2	19	40
2ª questão	3	6	0	31	40
3ª questão	3	4	0	33	40
4ª questão	37	0	0	3	40

Fonte: Arquivo pessoal

Tabela 3: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Rio Tinto.

Respostas dos alunos de Rio Tinto – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1ª questão	1	35	0	5	41
2ª questão	6	0	1	36	41
3ª questão	3	4	1	33	41
4ª questão	38	0	1	2	41

Fonte: Arquivo pessoal

Observação: a categoria não sei estão incluídas as respostas: Não sei e também para aqueles alunos que deixaram a questão sem responder.

4.3 Discussão e analise do questionário

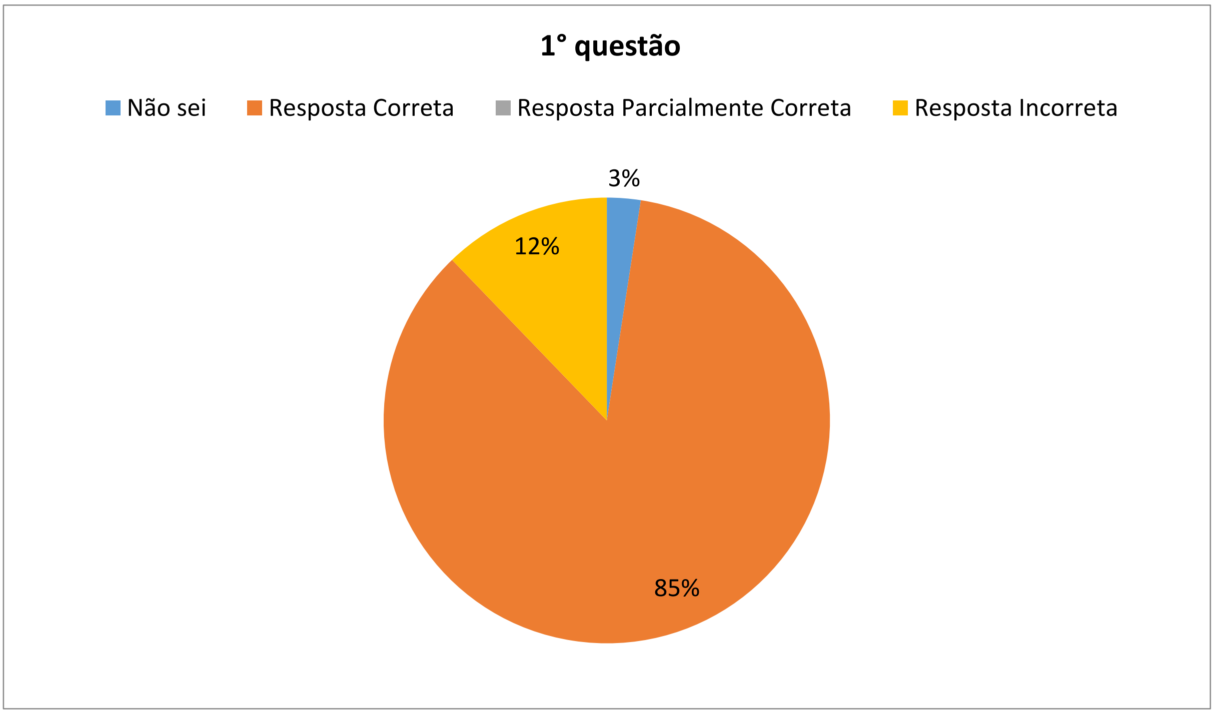
Agora vamos apresentar algumas respostas dadas, como também o objetivo de cada uma das questões, além de discutir as dificuldades encontradas e as estratégias utilizadas.

Questão 1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa.

O nosso objetivo, com a questão acima, era verificar se os alunos possuíam o raciocínio combinatório de tal forma que utilizasse o (PFC), além de fazer com que eles percebessem que esse tipo de questão está bem presente em nosso cotidiano.

Observando as tabelas que apresentam os resultados da questão 1, podemos verificar que foi a questão em os alunos tiveram o melhor rendimento. Veja abaixo o rendimento dos alunos de Rio Tinto - PB, através de um gráfico que mostra os percentuais aproximados de acordo com cada categoria:

Gráfico 1 – Desempenho dos alunos do Município de Rio Tinto – PB na 1° questão



Fonte: Elaboração do autor

Note que os alunos do Município de Rio Tinto – PB tiveram um rendimento melhor em relação aos outros Municípios, com aproximadamente 85% das respostas corretas, pois ao calcular o rendimento dos alunos de Alagoinha – PB, constatamos que eles tiveram aproximadamente 79% das respostas corretas. E por fim o Município de Mulungu – PB na qual os alunos tiveram o rendimento de 47%.

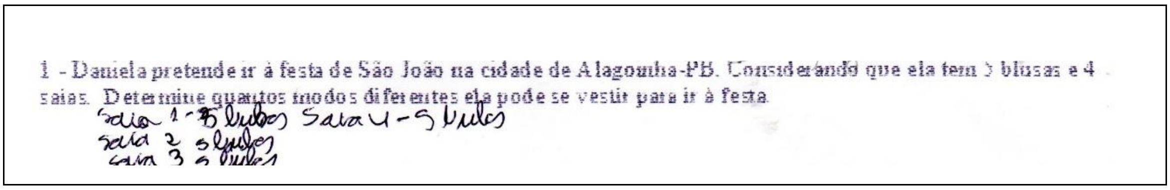
Observe no gráfico 1 que mostra o desempenho dos alunos do Município de Rio Tinto – PB, que aproximadamente 12% dos alunos não tiveram sucesso na questão, no qual é um percentual considerável.

Por outro lado, vamos destacar os principais erros cometidos pelos alunos nessa questão. O principal equívoco é que os alunos apresentavam os resultados de uma forma intuitiva, ou seja, sem justificar a resposta. Outro tipo de erro foi que os alunos somavam as 5 blusas e as 4 calças obtendo 9 maneiras de se arrumar para ir à festa.

Assim, observando as tabelas acima, constatamos que o Município que apresentou o maior número de respostas incorretas foi Mulungu – PB, totalizando 19 respostas inadequadas.

Vale destacar também que, no Município de Mulungu, tivemos duas respostas parcialmente correta, pois dois alunos relacionou corretamente que com cada saia, Daniela poderia vestir uma blusa. Porém, não soube contar o número de maneiras possíveis. Veja abaixo a estratégia que o aluno ou a aluna utilizou, porém não soube definir o resultado final:

Figura 3 – Resolução da questão 1, apresentada pelo aluno(a)



1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 3 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa.

Saia 1 - 5 blusas Saia 4 - 5 blusas
saia 2 5 blusas
saia 3 5 blusas

Fonte: pessoal

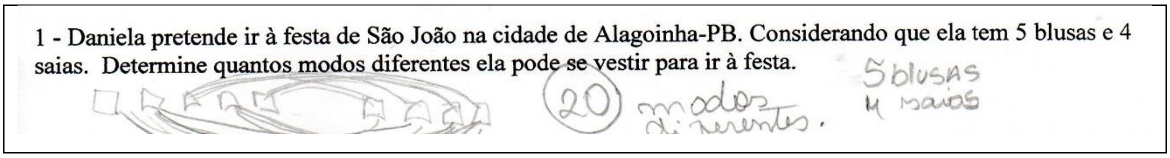
No entanto, nosso objetivo foi atingido, pois dentre os três Municípios, nos quais o questionário foi aplicado, tivemos um total de 134 alunos, onde 96 alunos responderam a questão corretamente o que representa aproximadamente 71,64% do total de alunos.

É importante destacar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver a questão. A principal estratégia foi a utilização do princípio fundamental da contagem (PFC). Alguns resolveram de uma forma intuitiva sem expressar cálculos. Enquanto tivemos alguns alunos, que recorreram para outros recursos como a utilização do diagrama de árvores, a utilização de uma tabela para enumerar todas as possibilidades, onde esses tipos de ferramenta permitem uma melhor visualização da solução dada.

Veja abaixo as estratégias utilizadas por dois alunos ou alunas para resolver a questão proposta:

Aluno 1:

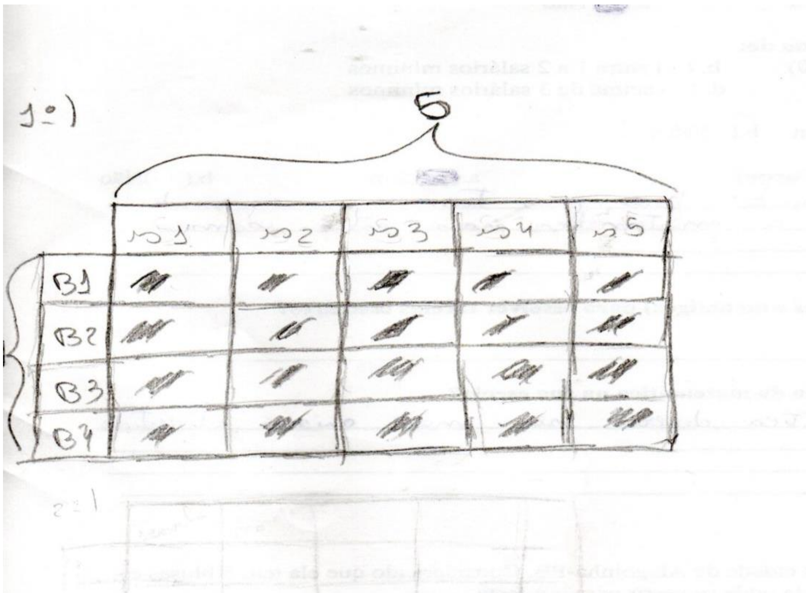
Figura 4: Segunda resolução da questão 1, apresentada pelo aluno(a).



Fonte: pessoal

Aluno 2:

Figura 5 –Tercera resolução da questão 1, apresentada pelo aluno(a).



Fonte: pessoal

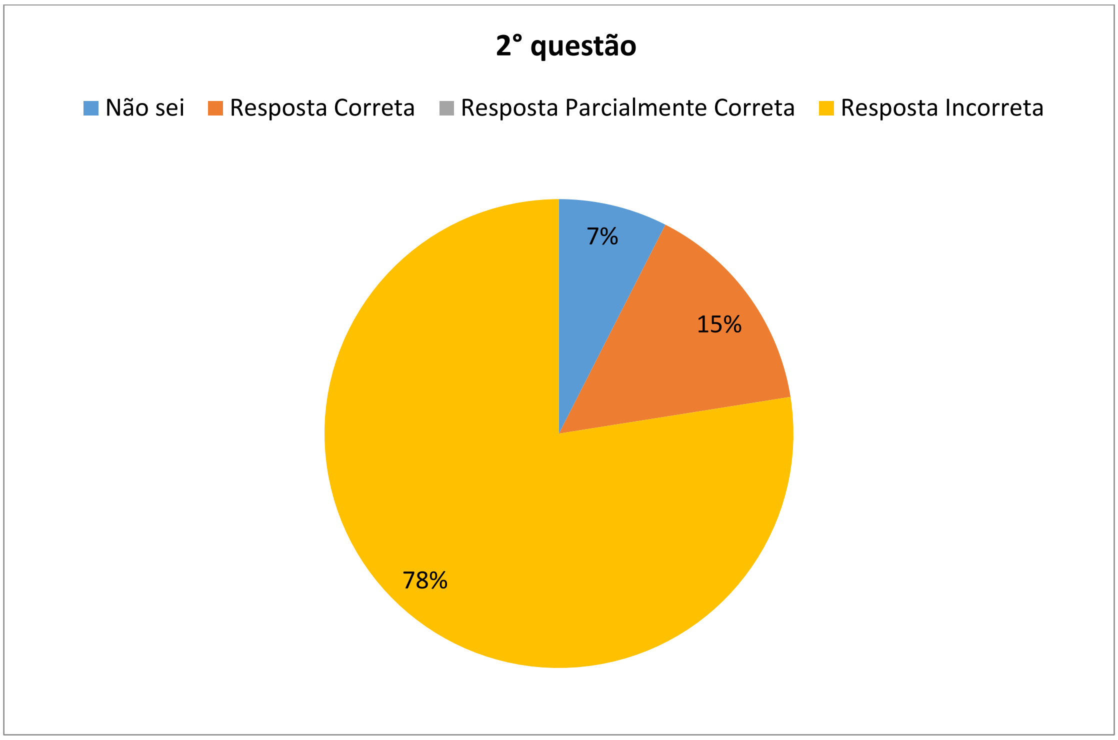
Essa questão não só apresentou o maior número de respostas corretas, como também percebemos que os alunos ficaram muito interessados em resolvê-la, principalmente as meninas, já que muitas das vezes se deparam com essa situação.

Questão 2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações?

Nesta questão pretendíamos verificar se os alunos sabiam que tipo de agrupamento estava ocorrendo, para, daí, utilizar a fórmula correta ou ainda que eles percebessem que poderiam utilizar o (PFC).

Os resultados obtidos, nessa questão, são preocupantes, pois dos 134 alunos que participaram do questionário, somente 6 alunos conseguiram dar a resposta correta, na qual estes foram do Município de Mulungu – PB. Veja no gráfico abaixo o desempenho dos alunos do Município de Mulungu - PB:

Gráfico 2 – Desempenho dos alunos do Município de Mulungu – PB na 2° questão

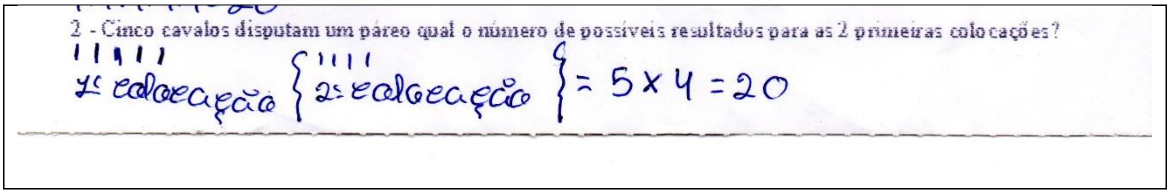


Fonte: Elaboração do autor

Note que o número de alunos que respondeu corretamente nesse Município corresponde a 15% do total de alunos participantes referente a Mulungu – PB. No entanto aproximadamente 78%, responderam incorretamente o que ainda é muito preocupante, já que está longe do percentual que consideramos como um bom desempenho.

Podemos verificar que todas as soluções corretas, os alunos utilizaram o (PFC), ou seja, nenhum percebeu que era um problema de arranjo simples e que poderia utilizar a fórmula. No entanto, isso ocorreu de uma forma geral, pois todos alunos não apresentaram qualquer tipo de fórmula. Veja abaixo a melhor solução dada pelo aluno ou aluna:

Figura 6 – Resolução da questão 2, apresentada pelo aluno(a).


2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações?

1ª colocação { 2ª colocação } = 5 x 4 = 20

Fonte: pessoal

Por outro lado, é importante fazer um estudo detalhado dos erros cometidos pelos alunos. A principal resposta dada pela maioria alunos foi: $5 \cdot 2 = 10$. Na verdade isso ocorre devido à primeira questão que aplicava o (PFC) de forma direta. Assim, a maioria achou que bastava multiplicar o número de cavalos pelo número de colocações. Na verdade, a contagem direta era impraticável neste caso, era preciso que os alunos observassem a regularidade para criar estratégias de contagem adequada para a situação proposta. Outros alunos tentaram utilizar os dados numéricos da questão e fazer algum tipo de operação como 2/5, ou seja, dividir o número de cavalos pelo número de colocações.

Podemos observar, na tabela, que na categoria “resposta parcialmente correta”, tivemos só um aluno do Município de Rio Tinto – PB. Na verdade, o aluno ou aluna percebeu que para 1ª colocação havia 5 cavalos e para 2ª colocação, também havia 5 cavalos. Desta forma, obteve $5 \cdot 5 = 25$. No primeiro raciocínio estava correto, mas houve um equívoco no segundo raciocínio, já que havia cavalos para 2ª colocação, 4 possibilidades, obtendo assim $5 \cdot 4 = 20$ possíveis resultados.

Portanto, diante dos objetivos estabelecidos nessa questão, podemos constatar que, de uma forma bem discreta, os alunos utilizaram o (PFC). Por outro lado, tivemos um resultado realmente preocupante, já que constatamos que os alunos participantes da pesquisa não conhecem o tipo de agrupamento que estava ocorrendo e o pior é que, em nenhum momento ficaram em dúvida se era um arranjo simples ou uma combinação simples, já que não foi utilizado nenhum tipo de fórmula relativo a esses tipos de agrupamentos.

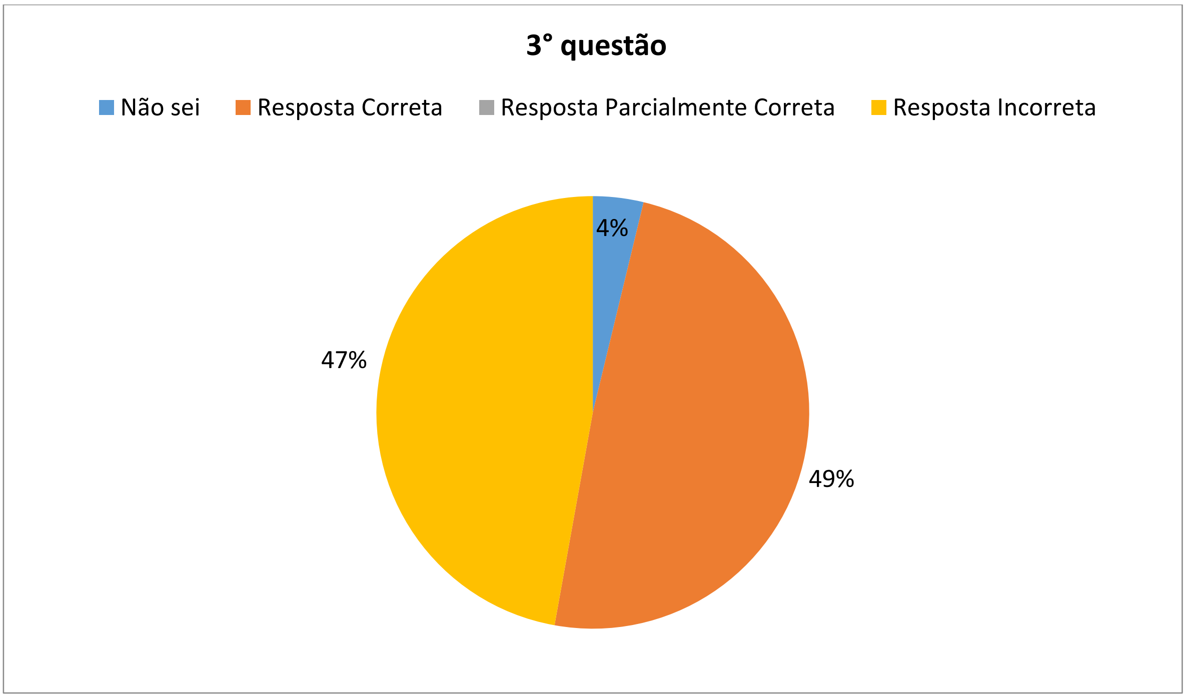
Questão 3 - De quantas maneiras uma família de 3 pessoas pode sentar se num banco de 3 lugares?

Com esta questão, pretendíamos verificar se os alunos conseguiam resolver utilizando o conceito de permutação simples, na qual podemos observar, na questão acima, que o enunciado era de fácil compreensão e que o aluno poderia enumerar todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los, se caso não conhecesse a fórmula de permutação simples ou ele também poderia utilizar o (PFC).

O principal erro cometido pelos alunos foi idêntico ao da segunda questão, pois tiraram os dados da questão e assim, como fizeram na primeira questão, que utilizaram o PFC de um forma direta, obtendo o seguinte resultado: $3 \cdot 3 = 9$ maneiras de sentar no banco. Na verdade, não utilizaram o raciocínio combinatório para que assim verificassem o número de possibilidades que havia para cada evento.

Veja o desempenho dos alunos do Município de Alagoinha – PB em percentuais, como mostra o gráfico abaixo:

Gráfico 3 – Desempenho dos alunos do Município de Alagoinha – PB na 3° questão



No Município de Alagoinha – PB, tivemos o melhor rendimento, na qual 26 alunos conseguiram resolver a questão o que corresponde aproximadamente 49%, como mostra o gráfico 3. Por outro lado aproximadamente 47% responderam incorretamente a questão proposta o que mostra um equilíbrio no sucesso e insucesso na questão.

Em todas as soluções foi utilizado o (PFC), na qual percebemos que os alunos não conhecem o conceito de permutação simples, já que em nenhum momento foi utilizado qualquer tipo de representação da troca de elementos ou a utilização da fórmula de permutação simples, porém possui o raciocínio combinatório. Observe no gráfico abaixo os percentuais para essa questão em relação a cada categoria

Na categoria "Resposta parcialmente correta", tivemos um aluno(a) no Município de Rio tinto – PB que utilizou o (PFC), porém errou nos cálculos fazendo: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$.

Contudo, com objetivos estabelecidos, podemos verificar que os alunos não resolveram a questão proposta utilizando o conceito de permutação simples. Por outro lado, utilizaram o (PFC) com sucesso.

Questão 4 - Dezesseis times se inscreveram em um torneio de futsal amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida entre os times do grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas de times do jogo de abertura pode ser calculada através de:

a) **Combinação e um arranjo, respectivamente.**
b) **Um arranjo e uma permutação, respectivamente.**
c) **Duas combinações**
d) **Um arranjo e uma combinação, respectivamente.**
e) **Dois arranjos**

Explique sua resposta.

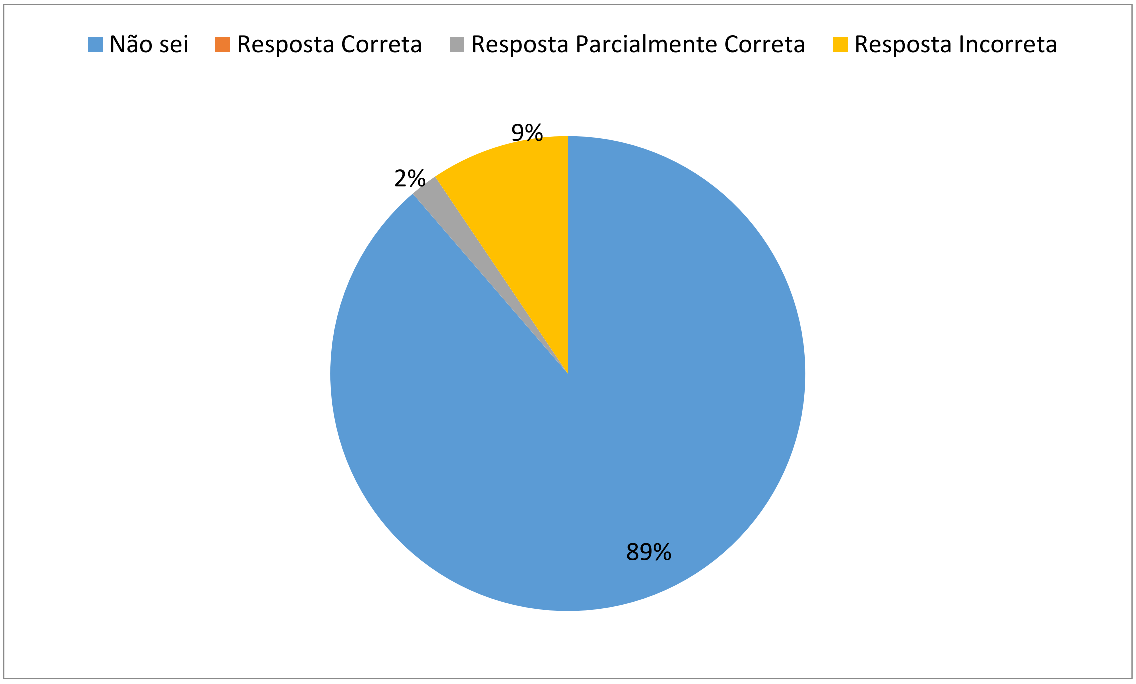
A questão acima tinha um objetivo primordial, que era identificar se diante de uma situação problema, os alunos sabiam distinguir que tipo de agrupamento estava ocorrendo. E foi nesta questão que os alunos tiveram o pior desempenho como mostra a tabela.

Esta questão evidencia algumas questões que propusemos responder, diante do Ensino da Análise Combinatória. O que foi constatado com essa questão realmente é desesperador, pois dos 134 alunos que participaram da pesquisa, nenhum conseguiu responder corretamente. Na verdade, para que a questão fosse considerada correta, era preciso que explicasse a alternativa escolhida, distinguindo os tipos de agrupamentos, diferenciando arranjo simples, combinação simples e permutação simples. No entanto, o que foi constatado é que os alunos não conheciam esses tipos de agrupamento.

E para entender melhor a dimensão do problema, basta olhar para tabela e perceber que a categoria “Não sei” teve aproximadamente 93,6% das respostas. Simplesmente os alunos não tinha ideia do que seriam esses tipos de agrupamentos.

Vamos fazer um estudo do desempenho dos alunos do Município de Alagoinha – PB em relação à questão acima. Veja o gráfico abaixo, que mostra os percentuais aproximados:

Gráfico 4 – Desempenho dos alunos do Município de Alagoinha – PB na 4° questão



Fonte: Elaboração do autor

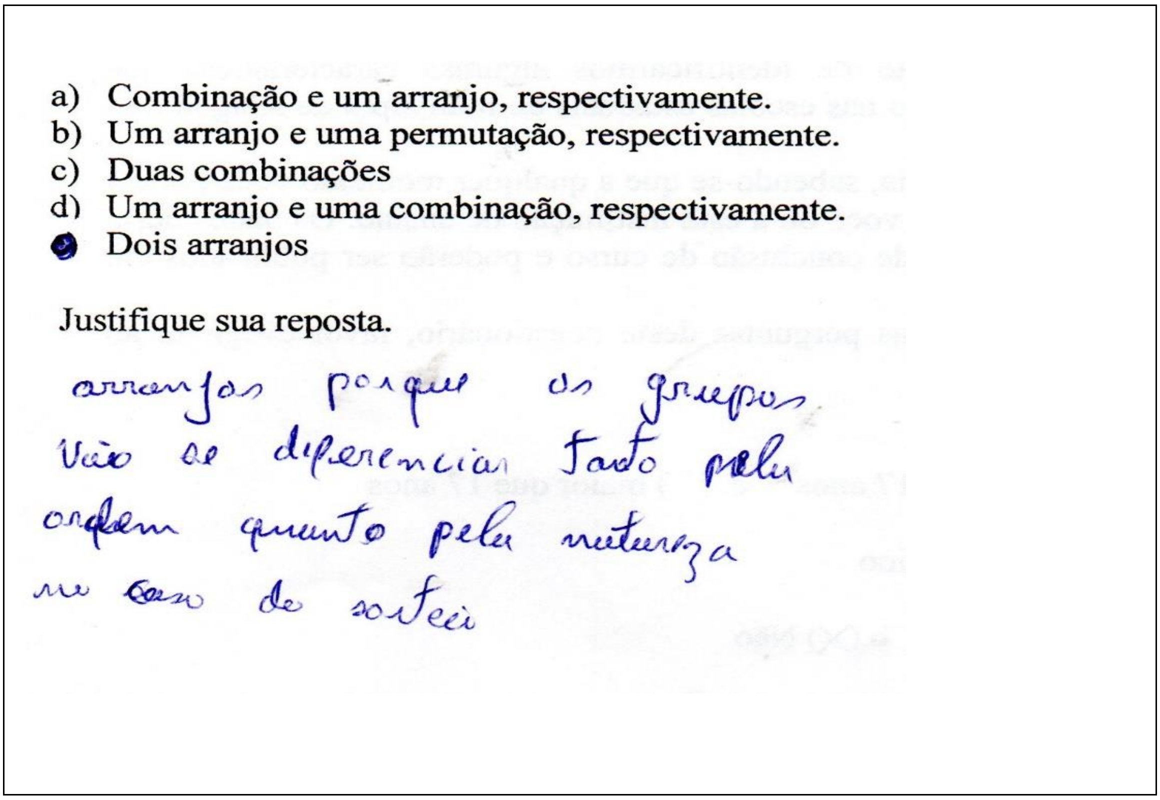
Observe no gráfico que aproximadamente 89% dos alunos não sabiam como responder à questão. Perceba que esse desempenho fica aproximado da média dos três Municípios que foi 93%, como citamos acima.

Podemos destacar também que aproximadamente 9% responderam incorretamente.

No entanto, tivemos um aluno(a) do Município de Alagoinha – PB o que corresponde a 2% dos alunos desse Município que definiu com propriedade o conceito de arranjo simples, descrevendo que em tal tipo de agrupamento a ordem é importante, podendo evidenciar que nas duas situações do problema proposto tratava de arranjo.

Veja abaixo a resposta dada pelo o aluno(a):

Figura 7: Resolução da questão 4, apresentada pelo aluno(a).


a) Combinação e um arranjo, respectivamente.
b) Um arranjo e uma permutação, respectivamente.
c) Duas combinações
d) Um arranjo e uma combinação, respectivamente.
e) Dois arranjos

Justifique sua reposta.

arranjos porque os grupos vão se diferenciar tanto pela ordem quanto pela natureza no caso do sorteio

Fonte: pessoal

4.4 Análise geral do questionário aplicado aos alunos

De modo geral, podemos afirmar que os resultados obtidos com o questionário aplicado aos alunos foram preocupantes. Constatamos que os mesmos não tiveram qualquer aproximação com o estudo da Análise Combinatória.

Por outro lado, evidenciamos um ponto bastante positivo que é a facilidade de se trabalhar com o raciocínio combinatório, visto que a maioria dos alunos demonstraram possuí-la. Assim, cabe ao professor trabalhar com diversos problemas, os quais permitam aos alunos utilizarem alguns métodos de contagem. Daí, a importância de trabalhar os primeiros conceitos de Análise Combinatória, nos anos iniciais.

Em relação às estratégias utilizadas, percebemos que os alunos conseguiram resolver as questões propostas referentes aos diversos tipos de agrupamentos, utilizando o (PFC). Podemos relatar também que alguns alunos conseguiram utilizar o diagrama de árvore para resolução da questão proposta. O que é algo sensacional, pois até então, eles não haviam tido contato com este tipo de recurso e mesmo assim, foram capazes de utilizá-lo de modo adequado, confirmando o que os documentos oficiais orientam sobre diagrama de árvore.

Nas questões propostas os alunos poderiam utilizar os conceitos referentes aos agrupamentos que a questão abordava e utilizar o (PFC); poderiam também enumerar todas as possibilidades para depois contar. E isso foi feito de modo intencional, visando que os alunos utilizassem as estratégias matemáticas que eles achassem adequadas.

Notamos que um dos principais equívocos cometidos pelos alunos foi em relação à retirada de dados dos problemas propostos. Este erro é bastante comum entre os educandos, visto que a maioria têm dificuldades de interpretação.

4.5 Discussão e análise do questionário aplicado aos professores

1 - Qual a importância da familiarização dos alunos nos anos iniciais, sobre os primeiros conceitos da Análise Combinatória?

Com a análise do questionário, percebemos que a maioria dos professores estava ciente da importância dos primeiros conceitos da Análise Combinatória e destacaram que seria importante para o prosseguimento dos estudos. Veja no quadro abaixo a resposta de um professor:

Figura 8: Resposta dada pelo professor(a) referente a questão 1.

(1) A importância está em não causar em alunos quando chegam no ensino médio, que, nesta fase, o grau de dificuldade e de dos conteúdos aumenta bastante.

Fonte: pessoal

2 - Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória?

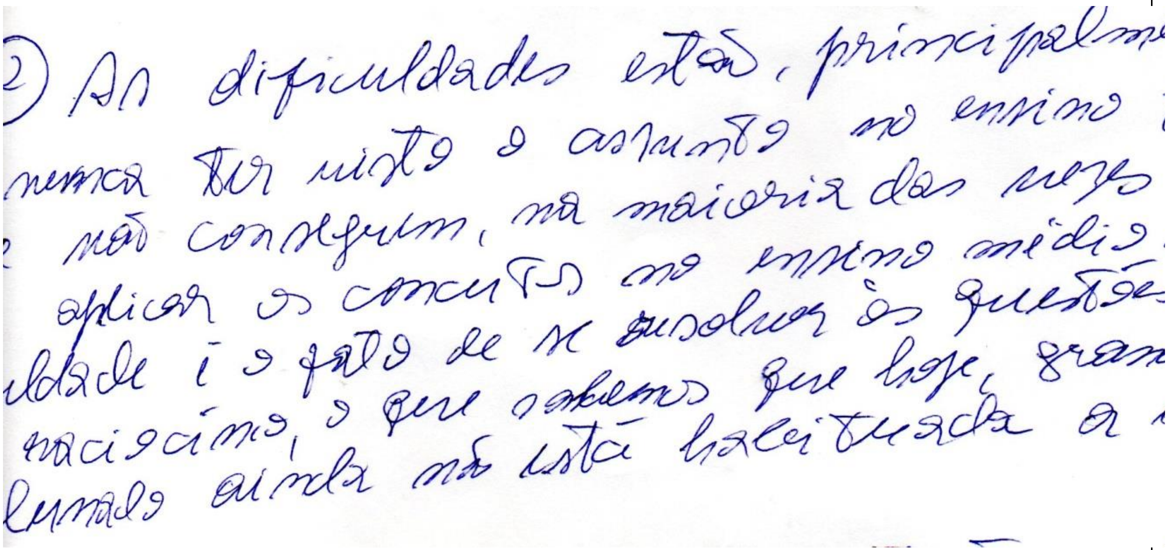
Tivemos algumas respostas interessantes em relação a esta questão. A princípio, uma dificuldade até que já esperada diz respeito ao tipo de agrupamento, ou seja, se arranjo ou combinação.

Por outro lado, destacamos uma resposta dada por dois professores que afirmaram que uma das principais dificuldades era a insegurança do docente em abordar tal conteúdo em sala de aula.

Outro ponto interessante destacado pelo professor era a baixa estima dos alunos e em consequência disso, surge a falta de interesse pela aprendizagem e isso não ocorre só no Ensino da Análise Combinatória, mas também em outros conteúdos.

Na primeira questão, percebemos que os professores estavam cientes da importância dos conceitos preliminares da Análise Combinatória, porém um professor afirmou que uma das principais dificuldades está no Ensino da Análise Combinatória nos anos iniciais. Veja abaixo a resposta dada pelo professor:

Figura 9: Resposta dada pelo professor (a) referente a questão 2.


2) As dificuldades estão, principalme
nunca ter visto o assunto no ensino
não conseguem, na maioria das vezes
aplicar os conceitos no ensino médio.
ldade é o fato de se resolver as questões
raciocínio, o que sabemos que hoje, gran
lunado ainda não está habituada a

Fonte: pessoal

3 - Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar?

Confrontando o questionário aplicado aos alunos dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto – PB, com que os professores desses municípios responderam. Verificamos que as estratégias estavam de acordo com que os professores mencionaram no questionário. Assim destacamos as estratégias mencionadas pelos professores: estimular a resolução de problemas envolvendo contagem através de modelos (diagrama de árvores, tabelas, agrupamentos, entre outros), de forma que os estudantes compreendam o que estão fazendo. Vale destacar também que é dispensado incialmente questões envolvendo resultados relativamente grandes e impossíveis de serem representados através dos modelos.

4 – Você costuma deixar o estudo da Análise Combinatória de lado? Se for sim, explique o porquê?

De modo geral, os professores relataram que o conteúdo de Análise Combinatória é deixado de lado por estar no final do livro didático e que muitas das vezes não dá tempo de ser lecionado. Porém, alguns reconhecem a importância da Análise Combinatória e relataram que é preciso deixar alguns conteúdos de lado e dar prioridade ao estudo dessa temática. Porém, isso não é o bastante; é preciso que essa ideia seja colocada em prática. Uma vez que, pela pesquisa, percebemos que mesmo sabendo da importância dessa temática, os professores deixam esse estudo de lado.

5 – Você aborda o conteúdo de Análise Combinatória da forma que os documentos oficiais orientam? Explique.

A maioria dos professores destacou a importância da resolução de problemas e da contextualização. Trabalhando com situações reais, evitando atividades do tipo $A_{4,3}$ que, de forma mecânica, estimula o aluno a apenas decorar fórmulas para resolver questões propostas.

4.6 Análise geral do questionário aplicado aos professores

O ensino e aprendizagem da Matemática atualmente vêm sofrendo algumas mudanças no que diz respeito aos conteúdos que devem ser trabalhados. Deste modo, é preciso evidenciar a importância dos conceitos matemáticos e sobretudo, se questionar a respeito de que conteúdos serão necessários para que os alunos resolvam problemas do seu cotidiano.

Nesta perspectiva, o estudo da Análise Combinatória não deve ser deixado de lado, já que essa temática trabalha com diversas situações do nosso dia a dia. O professor deve ser cauteloso na escolha dos conteúdos a serem trabalhados e durante o seu planejamento não pode deixar essa temática de lado. Desculpas como: “o assunto está no final do livro didático” ou “é um assunto difícil para o entendimento dos alunos”, são inadmissíveis. Não devem ser levadas em consideração, pois ao conhecer as potencialidades dessa temática fica claro o quanto se faz necessária na vida dos alunos.

Percebemos com o questionário que os professores concordavam com a ideia de que a Análise Combinatória deveria ser trabalhada de forma mais intensa no Ensino Fundamental, isso facilitaria nos conceitos que seriam trabalhados mais adiante.

Uma proposta recomendável no ensino e na aprendizagem dos conteúdos matemáticos é ter como referência em sua prática os documentos oficiais. Por meio do questionário percebemos que os professores conheciam como trabalhar o conteúdo da Análise Combinatória.

Portanto, fica evidente o quanto precisamos da Matemática durante o nosso cotidiano. Em consequência disso, o professor tem que está cada vez mais perto das necessidades dos seus alunos e da sociedade em geral.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das dificuldades encontradas no Ensino da Análise Combinatória, tanto para o professor como para o aluno, refletimos que é preciso um trabalho que utilize metodologias diversificadas, que facilite o ensino dessa temática. Uma ferramenta importante para o professor é a utilização da tecnologia que permite sair do modelo tradicional de ensino, proporcionando, assim, um ensino diferenciado, no qual o aluno constrói o conhecimento.

No entanto, evidenciamos pela aplicação do questionário que os problemas de contagem têm uma grande importância no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Com isso, é interessante trabalhar com problemas, nos quais o aluno pode fazer todos os agrupamentos possíveis para depois contá-lo. Ficou evidenciado que um percentual significativo dos estudantes que participaram da pesquisa resolveram os problemas utilizando o (PFC).

Com a análise do questionário e a pesquisa bibliográfica, podemos afirmar que os objetivos foram atingidos. Conseguimos descobrir algumas estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas propostos como: a utilização do (PFC), a utilização do diagrama de árvore e enumerar todos os agrupamentos para depois contar.

Diante da pesquisa, constatamos um dado alarmante no Ensino da Análise Combinatória. Com o questionário, percebemos que as turmas, na qual a pesquisa foi realizada, não tiveram o Ensino da Análise Combinatória, ou seja, os professores, por alguma razão, trabalhou com essa temática na sala de aula. Podemos afirmar isso por vários motivos, como: todas as questões que foram resolvidas foi utilizado o (PFC), quando a questão não utilizava o (PFC) de uma forma direta, a maioria dos alunos não conseguia resolver a questão. Nos questionários aplicados, verificamos que não foi utilizado nenhum tipo de fórmula correspondente a qualquer tipo de agrupamento. E o motivo mais significativo é que em todos os Municípios os alunos tiveram dúvidas. Houve algumas perguntas bem comum em cada Município, referente a questão 4 do questionário como: o que é permutação? O que é arranjo? O que combinação? O objetivo dessa questão era verificar que tipo de agrupamento estava ocorrendo, ou seja, era preciso perceber se a ordem é relevante ou não. Essa questão tinha um papel importantíssimo nessa pesquisa, pois iríamos constatar se realmente o Ensino da

Análise Combinatória estava ocorrendo e foi o que aconteceu. Com a ajuda das outras questões, ficou evidenciado que os alunos não tiveram qualquer aproximação com o estudo da Análise Combinatória.

Por outro lado, podemos constatar esse fato pelo discurso dos professores sobre o Ensino da Análise Combinatória, na qual apontaram que não trabalharam essa temática na sala de aula, devido não dar tempo de trabalhar esse conteúdo durante o ano letivo.

Como vimos acima, uma das principais dificuldades encontradas no Ensino da Análise Combinatória, é saber se a ordem é importante ou não. Porém, durante a aplicação do questionário não constamos esse tipo de dificuldade. E isso é explicado devido os estudantes não terem tido qualquer tipo de aproximação com o estudo da Análise Combinatória.

Podemos destacar que mesmo não conhecendo alguns conceitos importantes para o estudo dessa temática, os alunos utilizaram algumas estratégias para resolver as questões, mostrando que tem o raciocínio combinatório. Com isso, é importante que esse raciocínio combinatório seja trabalhado no Ensino Básico de uma forma bem intensa e significativa. Seria interessante trabalhar com questões que utilize o (PFC), além de ser importante trabalhar com questões que o aluno pode representar através de modelos, ou seja, que o número de agrupamentos seja pequeno para que os estudantes possam enumerar para depois contá-los.

Assim, além dos objetivos atingidos, essa pesquisa nos proporcionou refletir sobre o processo ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. Desta forma, é recomendável que os docentes trabalhem com metodologias diversificadas, através de ferramentas que facilitem esse processo. É importante que o docente seja criterioso e cauteloso com os conteúdos que devem ser trabalhados, ou seja, conteúdos que trabalham o cotidiano do aluno, mostrando que o conhecimento matemático se faz necessário, sem dúvida é essencial para o desenvolvimento de habilidades que caracterizam o pensar matemático do aluno. Desta forma, o conteúdo de Análise Combinatória não deve ser deixado de lado, devido à facilidade de trabalhar com o cotidiano do aluno.

REFERÊNCIAS

BARROSO, J.M. Conexão com a Matemática. São Paulo: Moderna, 2010

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*, Brasília: MEC/SEB, 2000.

________. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, Brasília: MEC/SEB, 2006.

_______. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática)*. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

DANTE, L.R. *Matemática contextos e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010.

EVES. H. *Introdução à história da matemática*. tradução: Hygino H. Domingues. Campinas. Editora UNICAMP. 2004.

FILHO, B.B.; SILVA, J. *Matemática participação e contexto*. São Paulo: FTD, 2008.

HARIKI, S. *Conectar problemas*: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios. Revista Educação e Matemática, nº37, 1º trimestre de 1996 (Portugal).

MORGADO, A.C.O; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C .P.; FERNANDEZ, P. Análise combinatória e probabilidade. 2ª ed, Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2006.

OLIVEIRA, M. M. *Como fazer pesquisa qualitativa*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.
Paiva, M. Matemática – Paiva. São Paulo: Moderna, 2009.

SILVA, C.X. *Matemática participação e contexto*. São Paulo: FTD, 2008.

SOUSA, J.R. Novo olhar matemática. São Paulo: FTD, 2010

< http://www.inep.gov.br/basica/enem >. Acesso em 12 de agosto de 2013.

APÊNDICE

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Curso de Licenciatura em Matemática - 2012.1

Trabalho de Conclusão de Curso

QUESTIONÁRIO

Estamos realizando este questionário com o intuito de identificarmos algumas características que acompanham os estudantes ao concluírem o Ensino Médio nas escolas estaduais do município de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto-PB.

Gostaríamos de contar com a sua participação voluntária, sabendo-se que a qualquer momento você poderá interromper suas respostas sem que haja qualquer dano a você ou a esta instituição de ensino. Os dados desta pesquisa serão utilizados na elaboração de um trabalho de conclusão de curso e poderão ser publicados em revistas científicas.

Caso haja qualquer dúvida na sua participação ou nas perguntas deste questionário, favor dirigir-se ao pesquisador.

Situações Matemáticas:

1 **-** Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa.

2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações?

3 - De quantas maneiras uma família de 3 pessoas pode sentar se num banco de 3 lugares?

4 – Adaptada do (ENEM): Dezesseis times se inscreveram em um torneio de futsal amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo **A**. Em seguida entre os times do grupo **A**, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo **A** e a quantidade total de escolhas de times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) Combinação e um arranjo, respectivamente.
b) Um arranjo e uma permutação, respectivamente.
c) Duas combinações
d) Um arranjo e uma combinação, respectivamente.
e) Dois arranjos

Justifique sua reposta.

ANEXOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Da: Coordenação do curso em Licenciatura em Matemática – Campus IV

À

Direção da Escola Municipal de Ensino Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos.

Solicitação de Pesquisa de Campo

Prezado(a) Diretor(a)

Vimos por meio deste, solicitar autorização de Vossa Senhoria para que o aluno **ADRIANO ALVES DA SILVEIRA** matrícula 80911105, do Curso de Licenciatura em Matemática, Campus IV/UFPB realize atividades de observação e pesquisa de campo neste estabelecimento escolar em virtude do trabalho de conclusão de curso por esta desenvolvido, intitulado "Análise Combinatória: uma abordagem no Ensino da Matemática" desenvolvido nessa Instituição de Ensino.

O aluno acima referido se compromete em guardar sigilo de fatos confidenciais e ainda deixar a disposição do estabelecimento de ensino observada e/ou Universidade os dados e as análises resultantes deste estudo.

Outrossim, informamos que todas as atividades acima descritas serão desenvolvidas pela aluna, sob a orientação da professor **Carlos Alberto de Almeida,** matrícula Siape 1673896, Professor vinculada a Universidade Federal da Paraíba – DCE/CCAE/UFPB.

Contando com a colaboração de vossa Senhoria, subescrevemo-nos.

Atenciosamente,

Rio Tinto, novembro de 2013.

Professor Orientador

Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
Campus IV- Litoral Norte

Diretor(a) da Instituição de Ensino

Autorizado em: 12/ 11 / 2013.
Carimbo

E.E.E.F.M. Agenor Clemente dos Santos
ALAGOINHA - PB / CEP: 58.390-000
DECRETO - 10.452 DE 19/11/84
CONJUNTO SEBASTIÃO VALDO PACÍFICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Da: Coordenação do curso em Licenciatura em Matemática – Campus IV

À

Direção da Escola Municipal de Ensino Fundamental e Médio Major Antônio de Aquino.

Solicitação de Pesquisa de Campo

Prezado(a) Diretor(a)

Vimos por meio deste, solicitar autorização de Vossa Senhoria para que o aluno **ADRIANO ALVES DA SILVEIRA** matrícula 80911105, do Curso de Licenciatura em Matemática, Campus IV/UFPB realize atividades de observação e pesquisa de campo neste estabelecimento escolar em virtude do trabalho de conclusão de curso por esta desenvolvido, intitulado "Análise Combinatória: uma abordagem no Ensino da Matemática" desenvolvido nessa Instituição de Ensino.

O aluno acima referido se compromete em guardar sigilo de fatos confidenciais e ainda deixar a disposição do estabelecimento de ensino observada e/ou Universidade os dados e as análises resultantes deste estudo.

Outrossim, informamos que todas as atividades acima descritas serão desenvolvidas pela aluna, sob a orientação da professor **Carlos Alberto de Almeida,** matrícula Siape 1673896, Professor vinculada a Universidade Federal da Paraíba – DCE/CCAE/UFPB.

Contando com a colaboração de vossa Senhoria, subescrevemo-nos.

Atenciosamente,

Rio Tinto, novembro de 2013.

Professor Orientador

Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
Campus IV- Litoral Norte

mat.: 170.164-9

Diretor(a) da Instituição de Ensino

Autorizado em: 11 / 11 / 2013

Carimbo

01.610.770/0001-19
E. E. E. F. M. MAJOR
ANTÔNIO DE AQUINO
Estrada de Acesso à Alagoinha
Rod. PB 063 - CEP: 58354-000
MULUNGU - PARAÍBA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Da: Coordenação do curso em Licenciatura em Matemática – Campus IV

À

Direção da Escola Municipal de Ensino Fundamental e Médio Prof. Luiz Gonzaga Burity.

Solicitação de Pesquisa de Campo

Prezado(a) Diretor(a)

Vimos por meio deste, solicitar autorização de Vossa Senhoria para que o aluno **ADRIANO ALVES DA SILVEIRA** matrícula 80911105, do Curso de Licenciatura em Matemática, Campus IV/UFPB realize atividades de observação e pesquisa de campo neste estabelecimento escolar em virtude do trabalho de conclusão de curso por esta desenvolvido, intitulado "Análise Combinatória: uma abordagem no Ensino da Matemática" desenvolvido nessa Instituição de Ensino.

O aluno acima referido se compromete em guardar sigilo de fatos confidenciais e ainda deixar a disposição do estabelecimento de ensino observada e/ou Universidade os dados e as análises resultantes deste estudo.

Outrossim, informamos que todas as atividades acima descritas serão desenvolvidas pela aluna, sob a orientação da professor **Carlos Alberto de Almeida,** matrícula Siape 1673896, Professor vinculada a Universidade Federal da Paraíba – DCE/CCAE/UFPB.

Contando com a colaboração de vossa Senhoria, subescrevemo-nos.

Atenciosamente,

Rio Tinto, novembro de 2013.

Professor Orientador

Suama S. P. da Costa

Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
Campus IV- Litoral Norte

Sanderline Ribeiro dos Santos

Sanderline Ribeiro dos Santos
DIRETORA ESCOLAR
MAT. 180.318-2

Diretor(a) da Instituição de Ensino

Autorizado em: 13 / 11 / 2013
Carimbo

Esc. Est. de Ensino Fundamental e Médio
RIO TINTO - PB
Professor Luiz Gonzaga Burity