UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Regina Coelly Mendes da Silva

Utilizando o *algeplan* como recurso didático para a compreensão de expressões algébricas

Rio Tinto – PB
2014

Regina Coelly Mendes da Silva

Utilizando o *algeplan* como recurso didático para a compreensão de expressões algébricas

Trabalho monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dra. Cristiane Fernandes de Souza.

Rio Tinto – PB
2014

S586u Silva, Regina Coelly Mendes da.

Utilizando o algeplan *como recurso didático para a compreensão de expressões algébricas. / Regina Coelly Mendes da Silva. – Rio Tinto: [s.n.], 2014.*

93 f. : il. –

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Fernandes de Souza.

Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Matemática – ensino-aprendizagem. 2. Álgebra. 3. Matemática – estudo e ensino.

UFPB/BS-CCAE CDU: 51(043.2)

Regina Coelly Mendes da Silva

Utilizando o *algeplan* como recurso didático para compreensão de expressões algébricas

Trabalho monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Cristiane Fernandes de Souza

Aprovado em: 24/04/14.

COMISSÃO EXAMINADORA

Cristiane Fernandes de Souza
Prof.ª Dra. Cristiane Fernandes de Souza (Orientadora) – UFPB/DCE

Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva
Prof.ª Ms. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva – UFPB/DCE

Graciana Ferreira Alves Dias
Prof.ª Ms. Graciana Ferreira Alves Dias – UFPB/DCE

Dedico este trabalho à minha mãe, Rejane Mendes, como singela homenagem aos seus 48 anos de vida. À todo o seu amor e dedicação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de força e sabedoria, por toda a benção concedida.

A minha família: tios(as), primos(as), irmão e, em especial, aos meus pais pelo direcionamento e apoio incondicional em todos os momentos dessa caminhada.

A minha amiga Ângela Tereza por ter construído comigo, além de conhecimento científico, amizade verdadeira. Agradeço também a toda sua família, pelo acolhimento como parte desta.

Ao primeiro mestre que despertou-me com sua destreza e inteligência o fascínio pela Matemática, professor Edízio Ricardo, o qual tenho como exemplo a seguir.

A minha orientadora, Cristiane Fernandes de Souza, por ter adotado os meus objetivos fazendo deles os seus, além do seu apoio e colaboração ativa em diversos momentos da graduação.

A todos os mestres que contribuíram para minha formação, em especial, a Severina Andréa, Laércio Cerqueira e Jussara Patrícia, que direta ou indiretamente formalizaram a constituição desse trabalho, seja com materiais de apoio, compartilhamento de ideias, incentivo ou referencial profissional, por minha admiração às suas práticas.

Meus sinceros votos a todos que, de alguma maneira, fizeram parte da conclusão deste projeto.

Obrigada!

Não há transição que não implique um ponto de partida, um processo e um ponto de chegada. Todo amanhã se cria num ontem, através de um hoje. De modo que o nosso futuro baseia-se no passado e se corporifica no presente. Temos de saber o que fomos e o que somos, para sabermos o que seremos.

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho vem apresentar os resultados de uma pesquisa realizada para o Trabalho de Conclusão de Curso – TCC. O objetivo da pesquisa foi avaliar as potencialidades e limitações do material didático *algeplan* na compreensão da escrita e representação de expressões algébricas, bem como, da manipulação dos termos algébricos a partir do conceito geométrico de perímetro e área de figuras planas. Dessa forma, foi realizado com uma turma do 9º do Ensino Fundamental de uma instituição da rede privada de ensino, Colégio Certo, localizada no município de Rio Tinto/PB, o desenvolvimento de três sequências didáticas com o uso do material didático manipulativo, que contemplam o conteúdo proposto. Por investigarmos as relações entre os obstáculos e a compreensão de expressões algébricas na busca de subsídios que nos permitissem melhor direcionarmos quanto ao objetivo geral desta pesquisa e descrevermos nossa abordagem utilizada para o estudo de expressões algébricas, esta pesquisa caracteriza-se como uma investigação exploratório-descritiva. A pesquisa, ainda, se delimita no âmbito do estudo de caso por realizarmos uma análise comparativa entre os dados que apontam as características conceituais e procedimentais em expressões algébricas do grupo de alunos participantes com os artigos utilizados em nossos referenciais. Para isso, foi realizada a aplicação de uma Avaliação Diagnóstica, em caráter Inicial e Final. A partir da apreciação dos registros obtidos com as avaliações, foi possível sistematizar características peculiares quanto às dificuldades apresentadas em expressões algébricas e os resultados apontados após a aplicação das sequências didáticas. As conclusões da pesquisa apontaram que o *algeplan* incluso a um planejamento de atividades bem elaboradas pode contribuir positivamente para a compreensão de expressões algébricas, e também verificou algumas limitações em manipulações quanto às restrições de suas peças.

Palavras-chaves: Ensino de Álgebra; Geometria; Expressões Algébricas; *Algeplan*.

ABSTRACT

This paper is presenting the results of a survey conducted for Work Course Conclusion. The research objective was to evaluate the potential and limitations of courseware algeplan written comprehension and representation of algebraic expressions, as well as the manipulation of algebraic terms from the geometrical concept of perimeter and area of plane figures. Thus, it was conducted with a class of ninth year of Elementary School an institution of private schools, Colégio Certo, in the municipality of Rio Tinto / PB, the development of three sequences didactics through the use of manipulative teaching materials, which include content proposed. By investigating the relationship between obstacles and understanding of algebraic expressions in seeking grants to allow us to better targeting on the overall objective of this research and describe our approach used for the study of algebraic expressions, this research is characterized as an exploratory-descriptive research. The survey also is delimited within the case study for conduct a comparative analysis of the data that link the conceptual and procedural characteristics on algebraic expressions of the group of students participating in the articles used in our benchmarks. For this, the application of a Diagnostic Assessment in Initial and Final character was performed. From the examination of records obtained from the reviews, it was possible to systematize the difficulties peculiar characteristics as presented in algebraic expressions and results presented after application of didactic sequences. The findings of the research show that the algeplan included elaborate planning activities can positively contribute to the understanding of algebraic expressions, and also found some limitations in handling as well as restrictions of its parts.

Keywords: Teaching Algebra; Geometry; Algebraic Expressions; Algeplan.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No currículo matemático da Educação Básica a Álgebra insere-se no bloco de conteúdos que trabalha os Números e Operações, constituindo um espaço bastante significativo a partir dos anos finais do Ensino Fundamental. Dentre as habilidades desenvolvidas através da aprendizagem em Álgebra, destacam-se o exercício do ‘pensar’, ‘abstrair’ e ‘generalizar’. Confirmando assim sua importância no cenário da sociedade atual.

Embora o tratamento algébrico seja dado de maneira discreta nas séries iniciais do Ensino Fundamental, é somente a partir dos anos finais que a linguagem e manipulação algébrica são formalmente ampliadas. E, a partir dessa transição do estudo centrado na Aritmética para a iniciação do estudo formal em Álgebra começam a surgir algumas dificuldades consideráveis de aprendizagem no contexto matemático.

De acordo com a literatura matemática, é possível perceber que a não reflexão sobre a prática pedagógica que busque contornar essas dificuldades apresenta-se como fator contribuinte para o recorrente insucesso da compreensão dos processos e métodos utilizados em Álgebra, resultando no não desenvolvimento das habilidades que este campo de estudo é capaz de promover ao aluno. Diante disto, este trabalho constituiu-se na reflexão, aplicação e avaliação de uma abordagem diferenciada para o ensino de Álgebra, com expressões algébricas.

Para tanto, foi realizado um breve estudo sobre as concepções da álgebra e as principais dificuldades na iniciação e aprendizagem desta, com o intuito de limitarmos nosso foco da pesquisa para a Álgebra estudada na Educação Básica, com os anos finais do Ensino Fundamental, e atermo-nos às habilidades a serem desenvolvidas pelo aluno com o estudo das expressões algébricas.

Com a narração do desenvolvimento histórico das notações algébricas pôde-se observar que as etapas da constituição da linguagem algébrica nos fornece uma possível forma de contornar as dificuldades na iniciação do estudo em Álgebra, que seria promover a compreensão geométrica das expressões algébricas em suas representações e manipulações.

Dentro do contexto que une a Álgebra à Geometria, no estudo de expressões algébricas, o presente trabalho aponta o material didático manipulativo *algeplan*, que dispõe o objetivo de estudar a escrita, representação e operações algébricas a partir da concepção de perímetro e área de figuras planas. De forma geral, esta pesquisa buscou investigar as potencialidades e limitações do material didático manipulativo proposto, para o ensino de expressões algébricas, a partir dos resultados apontados após o desenvolvimento de três sequências didáticas aplicadas em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma instituição da rede privada de ensino, Colégio Certo, localizada no município de Rio Tinto/PB.

Para o melhor delineamento da estrutura deste trabalho, o mesmo está organizado em três capítulos: o primeiro capítulo comporta as considerações a respeito da importância do estudo algébrico, bem como, a justificativa e questionamentos acerca desse estudo, os objetivos e tratamento metodológico utilizado na pesquisa.

O segundo capítulo refere-se às leituras que direcionaram o desenvolvimento da pesquisa. Este capítulo traz um breve levantamento bibliográfico a respeito da história do desenvolvimento das notações algébricas, as concepções e finalidades da Álgebra, as dificuldades e obstáculos cognitivos diante do estudo algébrico, e a iniciação deste estudo a sob a perspectiva geométrica com o uso do *algeplan*.

Por fim, o terceiro capítulo nos traz os relatos do desenvolvimento das sequências didáticas juntamente com a apreciação das informações obtidas através das aplicações do instrumento de coleta de dados utilizado para esta pesquisa.

Encerramos este trabalho com a apresentação das conclusões da pesquisa, nas quais buscamos retomar aos objetivos estabelecidos e apresentar nossas reflexões sobre os resultados obtidos na pesquisa.

1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A PESQUISA

1.1 Apresentação do Tema

No Ensino Fundamental regular, após o término das concepções aritméticas, a Álgebra é introduzida como campo matemático que lida com a manipulação e cálculo literal. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, p. 115), o *"*estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas*"*, verificando assim sua importância no cenário caracterizado pela sociedade atual.

A partir da nossa experiência com alunos, como professora, foi possível verificar que existem obstáculos no momento introdutório do ensino e aprendizagem da Álgebra. O principal deles vem do não entendimento, por parte do alunado, em *operar com letras*. Para Rêgo (2010, p. 2) "As finalidades da Álgebra são determinadas pelas diferentes concepções que temos dela e que correspondem às diferentes importâncias relativas dadas aos diversos usos das variáveis". Esta realidade inicial reflete na ausência da compreensão sobre as finalidades da álgebra, levando o aluno a reproduzir os procedimentos mais utilizados por parte do professor. O que nos leva a refletir sobre as formas e métodos adotados pelos professores no âmbito do currículo em Álgebra, e de que maneira podemos contribuir para que a passagem dos métodos do campo aritmético para o algébrico possa ser realizado de forma significativa.

Por meio de um breve estudo histórico, vimos que na era da Álgebra Babilônica podemos ter uma possível forma de superar tais obstáculos na aprendizagem e manipulação de cálculos algébricos, que seria associar estes ao ensino da Geometria, fazendo uso da sua analogia visual, possibilitando assim o significado da linguagem algébrica e, por fim, a compreensão dos processos em Álgebra.

Dentro desse contexto, insere-se um material manipulativo denominado *algeplan* que consiste em fazer uma associação direta aos campos supracitados, e pode ser aplicado no momento introdutório ao ensino algébrico com expressões literais e operações polinomiais.

Assim, nosso estudo versa sobre a seguinte problemática: O *algeplan* pode ser um instrumento facilitador para desenvolvimento da compreensão da escrita e manipulação no estudo de expressões algébricas? Para responder tal questão nosso estudo objetivou analisar, em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Certo, Rio Tinto – PB, os resultados de um conjunto de atividades de três sequências didáticas desenvolvidas com o objetivo de construir modelos mentais para a representação de expressões algébricas e tornar visível as propriedades da adição e multiplicação de termos algébricos por meio do *algeplan,* através do conceito geométrico de perímetro e área que caracteriza a natureza do material didático supracitado, sob a luz das orientações dos documentos oficiais para o ensino da Matemática.

A nossa hipótese considera que quando o aluno utiliza-se da associação entre Álgebra e Geometria, e interage de forma manipulativa o material apontado, *algeplan*, os objetivos almejados na aprendizagem em expressões algébricas são atingidos de forma dinâmica, possibilitando uma abstração futura com significado em Álgebra através da analogia visual da Geometria e o concretismo do material.

Para isso, verificamos se o *algeplan,* incluso a um planejamento de atividades, pode proporcionar ao aluno a compreensão geométrica das expressões algébricas, verificando que ambos os campos não podem ser dissociados, facilitando a visualização das manipulações algébricas, dessa forma, dando base para que o professor formalize as concepções da álgebra e construa uma estrutura de aulas mais significativa para o aluno.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Avaliar as potencialidades e limitações do material didático *algeplan* na compreensão da escrita e representação de expressões algébricas, bem como da manipulação dos termos algébricos, a partir do conceito geométrico de perímetro e área.

1.2.2 Objetivos Específicos

- ✓ Identificar as possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos do 9º ano na escrita de expressões algébricas e nas operações com essas expressões.
- ✓ Aplicar sequências didáticas para o estudo de expressões algébricas (monômios e polinômios) e operações (adição e multiplicação), utilizando como recurso pedagógico o *algeplan.*
- ✓ Verificar se as sequências didáticas aplicadas promoveram a compreensão de expressões algébricas (escrita e representação) e das manipulações algébricas (redução de termos semelhantes, propriedade da multiplicação de termos),

realizadas por meio da codificação e decodificação das peças do *algeplan*, e do conceito geométrico de perímetro e área do quadrado e retângulo.

1.3 Metodologia da Pesquisa

A presente pesquisa constitui-se num estudo com características de uma investigação exploratório-descritiva, por termos em nossa estrutura um processo que se inicia com uma “sondagem” prévia de conhecimentos seguindo-se da descrição de uma abordagem diferenciada para a compreensão da escrita e manipulação de expressões algébricas. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 70) a pesquisa de cunho exploratório “funciona como uma sondagem e visa verificar se uma determinada ideia de investigação é viável ou não”, neste sentido, buscamos por meio de um breve estudo entre artigos, da literatura matemática, identificar relações entre os obstáculos e a compreensão de expressões algébricas na busca de subsídios que nos permitissem melhor direcionarmos ao objetivo geral desta pesquisa.

Ainda sob a perspectiva dos autores, na modalidade de pesquisa descritiva, quando se deseja descrever ou caracterizar uma situação, geralmente se “utiliza a observação sistemática ou aplicação de questionários padronizados” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 70), dessa forma, com vistas a descrever os aspectos apresentados no desenvolvimento deste estudo, foi apresentado um relato que ilustra o momento da aplicação dos módulos de atividades inseridos em nossas sequências didáticas.

Por buscamos identificar características conceituais e procedimentais em expressões algébricas nos sujeitos da pesquisa, e sobre elas realizarmos uma análise comparativa com os dados encontrados nos artigos utilizados, nossa pesquisa se delimita no âmbito do estudo de caso. De acordo com Gil (1998, *apud* FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.109) o *caso* “é o estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, com contornos claramente definidos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento”, para isso, foi realizado a aplicação de duas Avaliações Diagnósticas (definidas no item 1.3.2), que compreendem o momento inicial e final da pesquisa. A partir da apreciação dos registros obtidos com as avaliações, foi possível sistematizar características peculiares quanto às dificuldades apresentadas em expressões algébricas, pelos participantes deste estudo.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006):

> O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 110)

Desta maneira, os resultados apontados nessa pesquisa não independem dos fatores que caracterizam nosso grupo pesquisado, ou seja, as potencialidades e limitações avaliadas neste estudo para o a*lgeplan* estão correlacionadas com as características peculiares do grupo em questão.

Ao descrevermos e analisarmos as relações que perpassam o momento das aplicações de nossas sequências didáticas na perspectiva de avaliarmos características, entre potencialidades e limitações, do material didático proposto para o estudo de expressões algébricas no grupo de participantes desta pesquisa, nossa abordagem versa sobre aspectos de natureza qualitativa com quantificação final dos dados obtidos.

Para a realização da pesquisa, foi solicitada à direção da instituição de ensino, que comporta os sujeitos da pesquisa, a Autorização para a Pesquisa de Campo (Apêndice A), bem como, a reserva de uma das salas de aula para a realização da mesma no contra turno de aulas. Do mesmo modo, foi elaborado para os alunos da pesquisa um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B), destacando os objetivos e finalidades da pesquisa, no qual seus responsáveis puderam autorizá-los a participar de forma voluntária de todos os momentos sugeridos e permitir a publicação da mesma.

De forma sistemática, na presente metodologia, distinguimos três fases que compõe nossa pesquisa: (i) aplicação de uma avaliação diagnóstica, com intuito de verificarmos o nível de conhecimento em expressões algébricas de cada aluno e analisar os possíveis erros cometidos; (ii) aplicação de três sequências didáticas com o uso do *algeplan*, que compreendem três atividades relativas ao estudo da escrita e representação geométrica, adição e multiplicação, respectivamente, de expressões algébricas, num método de interação pesquisador-aluno, com o objetivo de promover a compreensão da escrita e manipulações algébricas; (iii) reaplicação da avaliação diagnóstica, a fim de verificarmos os efeitos surtidos, entre potencialidades e limitações, do material didático proposto.

1.3.1 Sujeitos da Pesquisa

Participaram desta pesquisa um grupo de 25 (vinte e cinco) alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma instituição da rede privada de ensino, Colégio Certo, localizada no município de Rio Tinto/PB. A escolha do grupo de seu por estes estarem, atualmente, inseridos na prática pedagógica da pesquisadora, e por esta ter verificado no cotidiano do grupo dificuldades conceituais em expressões e operações algébricas.

1.3.2 Instrumentos de coleta de dados

No intuito de definirmos uma forma de investigação, controle e registro na obtenção dos resultados, foi elaborada uma Avaliação Diagnóstica (Apêndice C) composta por quatro questões que caracterizaram os aspectos a seguir.

A 1ª questão é composta por itens que se alternam entre adição e multiplicação de monômios e binômios. A questão busca investigar se o aluno compreende as distinções entre o significado de ambas as operações algébricas.

A 2ª questão consiste na aplicação da operação de soma para monômios e polinômios. O objetivo é verificar se o aluno detém o conceito da propriedade aditiva para termos algébricos, a partir da ideia de agrupamento dos termos semelhantes.

A 3ª questão apresenta um retângulo cujas dimensões estão representadas por monômios. Essa questão remete à escrita da expressão algébrica para o perímetro e área do retângulo apresentado. A questão tem por objetivo observar o desenvolvimento da soma e o produto entre monômios, e verificar o desempenho do aluno quanto à manipulação dos termos algébricos dentro das possibilidades de redução de termos semelhantes.

A 4ª questão da avaliação diagnóstica refere-se à representação do perímetro de figuras geométricas básicas, sendo estes objetos descritos no sentido retórico. A questão objetiva identificar a percepção do aluno quanto a figura geométrica (número de lados e propriedades), a fim de escrever a expressão algébrica que defina o seu perímetro.

A avaliação foi aplicada no grupo pesquisado em dois momentos distintos, sendo a aplicação inicial - Avaliação Diagnóstica Inicial - a fim de investigarmos e registrarmos o nível de conhecimento dos alunos quanto ao conteúdo proposto; e a aplicação final - Avaliação Diagnóstica Final - no sentido de obtermos os dados necessários para a realização da nossa análise comparativa com os artigos utilizados em nosso referencial.

1.3.3 As sequências didáticas

As sequências didáticas (Apêndice D) elaboradas e desenvolvidas nessa pesquisa buscaram explanar o estudo das expressões algébricas – com escrita e representação, adição e multiplicação de monômios e polinômios – com o auxílio do *algeplan*. Para tanto foram incorporadas às nossas sequências um conjunto de atividades, as quais foram apresentadas no VII Encontro Paraibano de Educação Matemática, realizado em João Pessoa-PB em 2012, com a oficina pedagógica intitulada *Algeplan: trabalhando perímetros, áreas e expressões algébricas*[1].

A primeira sequência didática teve por objetivo apresentar as peças do *algeplan* com o intuito de propiciar familiaridade com as mesmas, visto que, todas as atividades desta sequência utilizam-se do material apontado. Dessa forma, a sequência buscou direcionar os alunos ao reconhecimento das dimensões de cada peça que compõe o *algeplan*, e a partir destas, encontrar a expressão que represente o perímetro e a área de cada uma delas. Nesta sequência didática, o enfoque principal está direcionado à escrita de expressões algébricas.

De posse do reconhecimento das peças, que representam monômios, a segunda sequência didática buscou trabalhar a soma dos monômios a partir da ideia de justapor as peças e fazer o registro dos resultados obtidos. O principal objetivo desta atividade compreende os conceitos de adição para termos algébricos.

A terceira sequência didática propôs a verificação das possibilidades posicionais das peças na formação de quadrados e retângulos a partir de uma expressão algébrica dada. Por meio de instruções quanto ao uso do material, a atividade trabalha a multiplicação de termos algébricos. O objetivo desta atividade é o de tornar visível o significado da propriedade multiplicativa através do conceito geométrico de perímetro e área de figuras planas.

---

[1] Oficina pedagógica constituída no projeto "INTEGRANDO A ESCOLA E A UNIVERSIDADE POR MEIO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA", financiado pelo conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq. Edital MCT/CNPq nº 03/2009. As atividades desenvolvidas nessa oficina foram elaboradas pelos alunos Jânio Elpídio de Medeiros e Kamillo Elias Araújo de Souza sob a coordenação da Prof. Dra. Cristiane Fernandes de Souza.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

2.1 A constituição da linguagem algébrica: breve histórico

Variante latina do termo árabe *al-jabr*, a palavra Álgebra passa a ser empregada em meados do ano 830 d.C. para o desígnio do método de eliminação de quantidades negativas numa equação através da adição da mesma quantidade a cada lado, desenvolvido pelo matemático Al-Khwarizmi, conhecido, juntamente com Diofanto, como o "pai da álgebra" (PICKOVER, 2011).

Acerca de considerações bibliográficas, podemos verificar que a constituição da álgebra se deu num período abrangente entre 1700 a.C. a 1700 d.C., aproximadamente, a partir da perspectiva de ensinar os "segredos" dos processos de aplicação matemática que eram estritamente centrados na aritmética prática e medição (STRUIK 1992, *apud* MENDES 1999). Um dos primeiros registros algébricos foi dado, por volta de 1650 a. C., com um dos mais importantes documentos relativo aos matemáticos do antigo Egito, intitulado Papiro de Rhind, que se trata de um rolo de pergaminho contendo informações que inclui problemas matemáticos envolvendo frações, progressões aritméticas, álgebra, geometria e contabilidade (PICKOVER, 2011). É possível afirmar que a álgebra começou a se constituir a partir da sistematização de técnicas de resolução de problemas desenvolvidas na antiguidade com os egípcios, babilônios e gregos. Segundo Baumgart (1992) esse processo de constituição se deu, gradativamente, a partir de três estágios de desenvolvimento: Fase Retórica (verbal); Fase Sincopada; Fase Simbólica.

A fase retórica (1700 a.C. a 250 d.C.) – que inclui os babilônios, egípcios e gregos – compreende o momento em que os problemas matemáticos e seus passos de resolução eram expressos por meio da linguagem corrente. Essa fase é marcada pela nova forma de tratamento matemático, onde o intuito era apresentar "prescrições" de regras para solução de determinados problemas. O exemplo a seguir, dado na Figura 1, ilustra o modelo de resolução desta fase, com um problema "típico" dos encontrados nas tábulas de argila referentes ao período do rei Hamurabi (1700 a. C) (BAUMGART, 1992). Na coluna à direita, o mesmo exemplo é interpretado em notação algébrica moderna (BAUMGART, 1992 p. 4-5):

Figura 1: Resolução de problema algébrico no estilo retórico.

[1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.

[2] [Dado] 32 soma; 252 área.	$\left.\begin{array}{r} x + y = k \\ xy = P \end{array}\right\} \ldots \text{(A)}$
[3] [Resposta] 18 comprimento, 14 largura.	
[4] Segue-se este método: Tome metade de 32 [que é 16].	$\frac{k}{2}$
16 × 16 = 256	$\left(\frac{k}{2}\right)^2$
256 − 252 = 4	$\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P = t^2 \Big\} \ldots \text{(B)}$
A raiz quadrada de 4 é 2.	$\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P} = t.$
16 + 2 = 18 comprimento.	$\frac{k}{2} + t = x.$
16 − 2 = 14 largura.	$\frac{k}{2} - t = y.$

[5] [Prova] Multipliquei 18 comprimento por 14 largura.

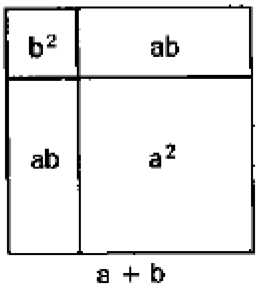
18 × 14 = 252 área.	$\left(\frac{k}{2} + t\right)\left(\frac{k}{2} - t\right)$
	$= \frac{k^2}{4} - t^2 = P = xy.$

Fonte: Baumgart (1992, p. 4-5)

O método de resolução acima era registrado por meio da escrita e enumeração de passos e utilizado, com frequência, para solucionar problemas semelhantes. A matemática que até então era estritamente utilizada como ciência prática, passou a dar espaço para uma ciência cultivada, a qual anos mais tarde viríamos a conhecer como álgebra.

Ainda diante desta fase, cada cultura solucionava problemas matemáticos com um caráter distinto. Os babilônios apresentavam o aspecto algébrico-aritmético e os egípcios utilizavam a geometria com a finalidade de apresentar questões algébricas. Já os gregos, buscavam resolver os problemas algébricos utilizando a sua interpretação geométrica, como aponta a Figura 2 que ilustra a concepção geométrica grega para, por exemplo, o que hoje conhecemos como: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (BAUMGART, 1992).

Figura 2: Representação geométrica da multiplicação de binômios



Fonte: Baumgart (1992, p. 7)

Neste período, os gregos buscaram reformular os problemas padrões resolvidos pelos babilônios utilizando a geometria, de forma a contornar seus problemas conceituais com frações e números irracionais (BAUMGART, 1992).

A fase sincopada surge no século III – com hindus, árabes e, posteriormente, europeus – impulsionada por Diofanto de Alenxandria (250 d.C.). Diofanto desenvolveu um estilo “abreviado” de palavras para escrever equações de forma mais prática e concisa, que passou a ser utilizado pelos hindus, árabes e introduzido na Europa. O estilo sincopado de Diofanto passou a ser trabalhado com notoriedade pelos hindus, em especial, com Brahmagupta (c. 628). De acordo com a Figura 3, nesta fase, o que hoje conhecemos como $5xy + \sqrt{35} - 12$, era escrito pelos hindus como sendo (BAUMGART, 1992, p. 10):

Figura 3: Notação algébrica no estilo sincopado

ya	*ka*	5	*bha*	*k*(*a*) 35	*ru*	$\dot{1}2$
x	*y*	5	produto	irracional 35	número “puro”	– 12

Fonte: Baumgart (1992, p. 10)

Por sua vez os árabes, com o princípio do Islamismo, que os levou à conquista da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha, puderam obter os escritos científicos dos gregos e hindus (BAUMGART, 1992), inclusive, o sistema numérico destes, que foi traduzido pelos árabes e atualmente o conhecemos como hindu-arábico. Os árabes constituíram um vocabulário técnico para o campo algébrico, o que incitou, mais tarde, a aceitação universal do termo *al-jabr* de Al-Khwarizmi (FIOTENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

As realizações avançadas de Diofanto foram introduzidas de modo deturpado na Europa, por não contribuir às súbitas necessidades surgidas com seu processo de desenvolvimento socioeconômico (BAUMGART, 1992). As necessidades com as manipulações algébricas determinaram uma aceleração para o simbolismo a fim de facilitar e manipular trabalhos numéricos.

O estilo simbólico passa a surgir por volta do ano 1500 d.C. e se constitui de forma gradativa, com nomes como Girolamo Cardano (1501-1576) e François de Viète (1540-1603). O estilo das notações utilizadas nos séculos XVI e XVII é dado na Figura 4 abaixo seguido da notação moderna (BAUMGART, 1992, p. 12-13):

Figura 4: Notação algébrica no inicio do estilo simbólico

Cardano (1545):	cubus $\bar{p}$ 6 rebus aequalis 20. $x^3 + 6x = 20$
Bombelli (1572):	$\overset{6}{\smile}\!\!\text{I} \cdot \text{p} \cdot \overset{3}{\smile}\!\!8$ · Eguale à 20. $x^6 + 8x^3 = 20$
Viète (1591):	I QC − 15 QQ + 85 C − 225 Q + 274 N aequatur 120. $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
Harriot (1631):	aaa − 3bba ═══ + 2 · ccc. $x^3 - 3b^2x = 2c^3$
Descartes (1637):	$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0.$
Wallis (1693):	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$

Fonte: Baumgart (1992, p. 12-13)

É válido considerarmos o desenvolvimento histórico da álgebra para que possamos compreender as dificuldades atuais, Schoen (1995) afirma que:

> [...] o desenvolvimento histórico do simbolismo algébrico começou com um período de álgebra verbal ou retórica, que durou pelo menos três milênios. Ao período retórico seguiu-se um outro, de mais de um milênio, em que o discurso algébrico caminhou gradualmente da fase retórica para a simbólica. (SCHOEN,1995, p. 138).

Compreende-se assim que, atualmente, a álgebra ensinada na Educação Básica é resultado de um fenômeno dos últimos cinco séculos e é resultado de um processo gradual que desenvolveu-se em tempo dez vezes maior (SCHOEN, 1995).

2.2 Diferentes perspectivas da álgebra: da escola média à universitária

Ainda que historicamente a palavra álgebra remeta ao método de resolução de equações, na atualidade, a Álgebra designa um ramo da Matemática de maior amplitude (BAUMGART, 1992). O desenvolvimento da literatura matemática para este campo de pesquisa torna clara a percepção de que o objeto de estudo da álgebra ultrapassa o domínio das equações (FIOTENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Usiskin (1995) aponta que a conotação da álgebra estudada na escola média é muito distinta da mesma utilizada no ensino superior, e que, “[...] as finalidades do ensino de álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas” (USISKIN, 1995, p. 12-13).

De forma sucinta, Usiskin (1995) apresenta cinco casos de equações em que as variáveis empregam caráter distinto, e, consequentemente remetem à diferentes maneiras de conceber a álgebra:

1. $A = b \cdot h$
2. $40 = 50x$
3. $sen\, x = \cos x \ \cdot tg\, x$
4. $1 \ = \ n \ \cdot (1 \ / \ (n)$
5. $y \ = \ kx$

(USISKIN, 1995, p. 10)

Em suma, o autor verifica que denominamos (1) por fórmula, (2) por equação (sentença aberta), (3) identidade, (4) propriedade e (5) equação de uma função que indica uma proporcionalidade direta. Essa diversidade de conceitos para cada equação acima está relacionada aos diferentes usos à que se aplicam as “variáveis”. Em (1), A corresponde a área, b à base e h à altura e ambos tem caráter de “coisa conhecida”. Em (2) x apresenta característica de valor fixo a ser determinado, ou incógnita. Em (3) x designa o argumento de uma função. Em (4) a equação representa uma generalização de um modelo aritmético, podendo n assumir diversos valores. Em (5), x é o argumento de uma função, k é uma constante (ou parâmetro) e y o valor resultante e, é somente neste caso que se apresenta o caráter de variabilidade, do qual se extraí o termo “variável”. Dentre outros casos, na Geometria, muitas vezes, a variável pode ser utilizada como representação de pontos. Na lógica, preposições. Na análise, funções. Na álgebra linear a variável pode se apresentar como matrizes ou vetores. Na álgebra abstrata pode surgir como a representação de uma operação (USISKIN, 1995). Genericamente, podemos verificar que todos os casos supracitados comportam diferentes conceitos aos símbolos utilizados. Desse modo, seria arbitrário tentar enquadrar a ideia de variável numa só concepção, consequentemente, provocaríamos uma deturpação dos objetos da álgebra.

Sobre as finalidades da álgebra para cada modalidade à que o conhecimento se aplica, Usiskin (1995) afirma que “[...] são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.” (USISKIN, 1995, p. 13). O autor distingue quatro concepções acerca do ensino de álgebra que compreendem os distintos aspectos assumidos pelas variáveis:

- ✓ A álgebra como aritmética generalizada;
- ✓ A álgebra como um estudo para resolver certos tipos de problemas;
- ✓ A álgebra como estudo de relações entre grandezas;
- ✓ A álgebra como estudo das estruturas.

A concepção de *álgebra como aritmética generalizada* está presente nas relações em que possamos utilizar as variáveis como generalizadoras de modelos. Isso ocorre quando percebemos um padrão e passamos a generalizá-lo. Para facilitar a compreensão da primeira concepção Usiskin (1995) nos propõe analisar o seguinte o modelo:

$$
\begin{gathered}
3 \cdot 5 = 15 \\
2 \cdot 5 = 10 \\
1 \cdot 5 = 5 \\
0 \cdot 5 = 0 \\
-1 \cdot 5 = -5 \\
-2 \cdot 5 = -10
\end{gathered}
$$

(USISKIN, 1995, p. 13)

Após a extensão aos números inteiros, este exemplo pode ser generalizado de modo a formular propriedades como $-x \cdot y = -xy$. Nessa concepção de álgebra, as capacidades a serem desenvolvidas pelo aluno são as de *traduzir* e *generalizar* (USISKIN, 1995).

A segunda concepção, *álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, diferentemente da anterior, além de traduzir um problema para a linguagem algébrica, é preciso resolvê-lo. Exemplo: A diferença entre 7 e o triplo de um número é igual 20. Que número é este? Ou seja, a variável assume papel de incógnita ou constante. Nesta concepção, o autor verifica que as instruções a serem trabalhadas com os alunos são as de *simplificar* e/ou *resolver*.

A terceira concepção da álgebra, como *estudo das relações entre grandezas*, não lida com a sensação de incógnitas, pois, não se busca resolver algo. Essa concepção se distingue das demais por suas variáveis apresentarem caráter de variabilidade, a fim de descrever o comportamento geral do modelo algébrico em questão. Nesta, a variável se apresenta como argumento ou parâmetro e, intrinsecamente, envolve noções de variável independente e variável dependente. Para esta concepção, as capacidades a serem desenvolvidas pelos alunos são as ações de *relacionar* (USISKIN, 1995).

A última concepção, *a álgebra como estudo das estruturas*, está direcionada à álgebra estudada no ensino superior que inclui estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Usiskin (1995) afirma que nesta concepção a variável tende a ser tratada como um "sinal no papel", sem referência numérica. Conforme o autor, nas manipulações em álgebra à nível abstrato, as variáveis tornam-se objetos arbitrários com o objetivo de *justificar* certas estruturas através da aplicação de propriedades para as mesmas. Não pretendemos com este trabalho aprofundarmos a perspectiva da álgebra para o ensino superior, visto que nosso principal objetivo está relacionado à álgebra na Educação Básica, mais precisamente, com sua iniciação nas séries finais do Ensino Fundamental.

2.3 A álgebra na educação básica

2.3.1 Dificuldades na aprendizagem de álgebra e obstáculos cognitivos

Concordamos com o pensamento de Beraldo-Prado (1990, *apud* MENDES, 1999) quando afirma que:

> As dificuldades encontradas pelos matemáticos podem ser precisamente os empecilhos que o aluno encontra na aprendizagem de determinados conteúdos. Se os matemáticos demoraram centenas de anos para usarem e aceitarem certos conceitos, seria ingênuo acreditar que os alunos não apresentassem dificuldades com seu domínio (BERALDO-PRADO, 1990, *apud* MENDES, 1999, p. 49).

Analogamente, em acordo com o desenvolvimento histórico das notações algébricas, podemos observar que a forma simbólica que hoje utilizamos em álgebra pode ser destacada como um dos obstáculos para a aprendizagem algébrica.

De acordo com Booth (1995, p. 23) "a álgebra é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos". Segundo a autora, um dos possíveis fatores para esse "estado das coisas" é que os alunos parecem relacionar a álgebra à algo difícil.

Na tentativa de descobrir a razão da álgebra se tornar uma ciência "difícil", Booth (1995) relata os resultados de uma investigação que consistiu na identificação dos tipos de erros que, comumente, os alunos cometem em álgebra, e a análise das possíveis razões desses erros. Os resultados apontados verificaram que os erros podem proceder nas ideias dos alunos sobre aspectos como:

- ✓ O foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas";
- ✓ O uso da notação e da convenção em álgebra;
- ✓ O significado das letras e das variáveis;
- ✓ Os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

Sobre a perspectiva quanto ao *foco da atividade algébrica e a natureza das respostas*, Booth (1995) afirma que diferentemente da aritmética onde o foco da atividade é encontrar uma resposta numérica, em álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações com o objetivo de expressá-los em sua forma mais simplificada. A não percepção quanto ao foco da atividade algébrica acarreta dois erros muito comuns, onde o aluno tende a apresentar uma resposta numérica, ou, aceitando a possibilidade de uma resposta algébrica, não aceita a "ausência de fechamento", inclinando-se a apresentar uma resposta com um único termo (BOOTH, 1995). A autora relata que esta ideia de resposta com um único termo parece ser subjacente a um erro, frequente, entre alunos em "simplificar" expressões do tipo 3x + 4y para 7xy.

Para o uso das *notações e convenções em álgebra*, a autora retrata que parte das dificuldades dos alunos em expressões algébricas, advém da interpretação dos símbolos operatórios envolvidos. Em meio ao tratamento aritmético de uma questão, símbolos como "+" e "=" expressam ações a serem realizadas, de modo que, "+" representa a realização de uma adição e "=" representa o prenúncio de uma resposta, para tanto, neste campo de estudo, a simbologia apresenta um caráter unidirecional (BOOTH, 1995). No contexto algébrico, os símbolos apresentam uma conotação distinta, onde o símbolo "+" não só representa uma ação, como pode indicar o resultado de uma adição, e, o sinal "=" uma relação de equivalência além da precedência de um resultado. A forma inapropriada de interpretar o símbolo no campo algébrico gera um erro muito comum em álgebra, na tentativa de realizar a ação efetiva relacionada aos mesmos, os alunos apresentam uma tendência a "simplificar" expressões como 2x + 3 para 5x.

No contexto das *letras e variáveis*, em aritmética a utilização destas está estritamente relacionada à representação de unidades padronizadas como, por exemplo, a letra m, neste campo é comumente utilizada para indicar o "metro", *cm* para o "centímetro", *mm* para "milímetro", sendo comum em aritmética utilizar as iniciais ou abreviações das palavras para expressar a unidade em questão. Na álgebra, diferentemente, as letras são usadas para indicar valores e, noutras perspectivas, vetores, pontos, matrizes, preposições, dentre outros.

As afirmações constituídas em aritmética para o significado das letras pode gerar uma "falta de referencial numérico" em álgebra (BOOTH, 1995). Por exemplo, ao lidar com a expressão *3b*, o aluno poderia rotular um significado a letra e recair num erro comum, assim, uma afirmação do tipo "b representa o número de bananas" poderia levá-lo a pensar que a expressão indica "3 bananas", em vez de "3 vezes o número de bananas". Esse erro também decorre das dificuldades que os alunos em iniciação algébrica têm em perceber a relação de multiplicação por justaposição e a imprecisão quanto aos registros de afirmações.

Ainda dentro desse aspecto, Booth (1995) verifica que, mesmo quando o aluno considera a letra como uma representação numérica, eles apresentam uma forte tendência a considerá-la como um valor único, específico, como em "$a + 2 = 5$", e não como números genéricos ou variáveis como "$a + b = b + a$". Confirmando o que destaca os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN:

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita. (BRASIL, 1998, p. 62).

Quanto aos *tipos de relações e métodos usados em aritmética*, a autora descreve que muitas das dificuldades dos alunos que iniciam os estudos em álgebra provêm de problemas que não foram corrigidos em aritmética, visto que a álgebra não é isolada da aritmética, e que, em muitos aspectos, ela pode se apresentar como a "aritmética generalizada" (BOOTH, 1995), já descrita anteriormente. Há exemplo disso, a autora apresenta relatos de sua pesquisa que apontam que a não utilização do uso de parênteses em expressões aritméticas influem diretamente na incompreensão de expressões algébricas que necessitam destes, provocando erros do tipo $a(x + y) = a \cdot x + y = ax + y$.

A literatura das pesquisas em ensino de matemática nos aponta que é considerável a estatística de estudantes que se utilizam de métodos informais e/ou intuitivos para a resolução de um determinado problema matemático. Para Booth (1995, p. 35) “o uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em álgebra”. Podemos verificar que, por exemplo, alunos que se utilizam do método de contagem para expressar o resultado de uma adição, provavelmente terá dificuldade em expressar por $a + b$ o número total de elementos dos conjuntos a e b. Neste caso, a autora aponta a necessidade de análise quanto às limitações dos métodos informais em aritmética, e a reflexão destes para o campo algébrico.

2.3.2 A iniciação do ensino de álgebra e o uso do *algeplan*

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN os anos finais no Ensino Fundamental marcam uma nova fase da vida do aluno. O perfil do mesmo para este ciclo não é algo que se possa fazer de maneira simplificada à despeito dos aspectos instáveis que caracterizam a adolescência (BRASIL, 1998). Os documentos supracitados apontam que, no âmbito dos conteúdos matemáticos para este ciclo, nem sempre é possível vincular a matemática com situações cotidianas e, que, o trabalho individual do aluno na busca de resultados, sem intervenção do professor, vai ficando cada vez mais distante com relação ao ciclo anterior. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998):

> A Matemática começa, desse modo, a se configurar para os alunos como algo que foge à sua possibilidade de compreensão, que é de pouca utilidade prática, gerando representações e sentimentos que vão se concretizar muitas vezes no divórcio entre aluno e conhecimento matemático. Se por um lado, nessa fase do desenvolvimento dos alunos, acentuam-se de modo geral as atitudes de insegurança, por outro lado, ampliam-se as capacidades para estabelecer inferências e conexões lógicas [...] (BRASIL, 1998, p. 62).

Sob essa perspectiva os documentos ressaltam, dentre as possibilidades de mudanças deste quadro, a importância de levar em consideração os conhecimentos prévios, que nem sempre são expressos matematicamente de forma adequada, com o objetivo de consolidá-los. Para isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que é fundamental o diagnóstico individual do aluno, a nível de conteúdo, para que se possa identificar quais as suas possibilidades e dificuldades com relação aos mesmos (BRASIL, 1998).

No âmbito do currículo em álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, frequentemente, a iniciação do estudo com expressões é introduzida de modo formal por professores (CHALOUH; HERSCOVICS, 1995). O que parece não ser adequado para os alunos iniciantes em álgebra, visto que, para que a aprendizagem da mesma de fato se realize, muitas vezes o aluno carece de atribuir significação aos processos comumente utilizados nesse âmbito de estudo.

Segundo Chalouh e Herscoviscs (1995, p. 37): “Para que os iniciantes construam um significado para as expressões algébricas, é necessário que tenham em sua formação uma base cognitiva que o alicerce.” Para tanto, os autores relatam uma perspectiva didática para o ensino de álgebra em que o objetivo principal se apoia na constituição do significado com base nos conhecimentos prévios dos alunos. Onde, a partir disto, se possa construir um “esquema de ensino” que vise sanar os obstáculos cognitivos (definidos no item anterior) sobre o aprendizado de expressões algébricas.

Retomando o desenvolvimento histórico das notações algébricas, sob o âmbito do estilo retórico, destacamos que a forma com que os gregos tratavam os problemas algébricos pode ser uma forma didática superior para o ensino de expressões algébricas. Para Mendes (1999, p. 54):

> A compreensão geométrica de expressões como x^2, como a área de um quadrado de lado x e x^3 como o volume de um cubo de aresta x, poderia contribuir para que o aluno não cometesse um erro muito comum de fazer, por exemplo, $2x^3 + x^2 = 3x^5$ (MENDES, 1999, p. 54).

Tendo em vista que este trabalho está direcionado aos anos finais do Ensino Fundamental e que, nesta modalidade, os alunos já obtiveram o contato com o uso das “letras” em equações e detém os conceitos geométricos de perímetro e área para figuras planas, queremos com este inserir um material que vislumbra os aspectos supracitados, proposto para o ensino de expressões algébricas, o *algeplan.*

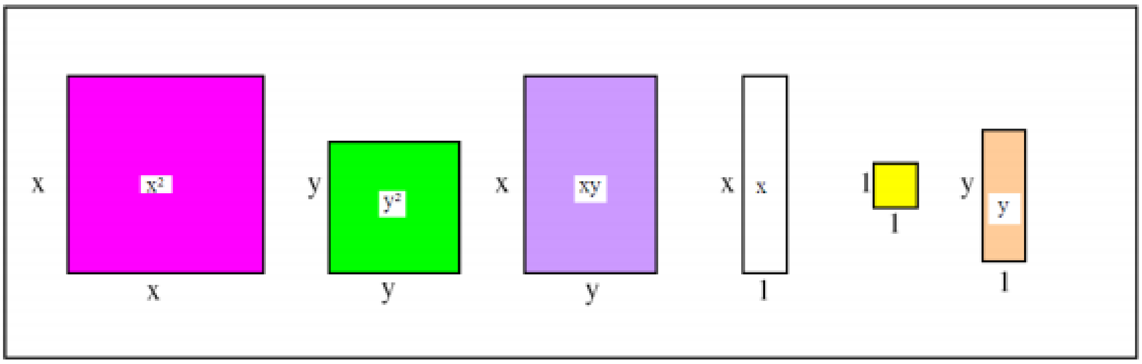
Apresentado pela primeira vez em 1994, em um encontro de Psicologia de Educação Matemática, em Lisboa (RÊGO, 2010), o *algeplan* consiste em um material didático manipulativo composto por quarenta peças – figuras geométricas planas– sendo elas:

- ✓ Quatro quadrados de lados com medida x (com $x > 0$), representado pelo termo algébrico que corresponde a sua área: x^2;

- ✓ Quatro quadrados de lados com medida y (com $0 < y < x$); representado pelo termo algébrico: y^2;
- ✓ Doze quadrados de lados *1;*
- ✓ Quatro retângulos de lados x e y, representando pelo termo algébrico xy;
- ✓ Oito retângulos de lados x e *1*, representado pelo termo algébrico x;
- ✓ Oito retângulos de lados y e *1*, representado pelo termo algébrico y.

Apoiado em medidas de valores "desconhecidos", as figuras geométricas que o compõe se relacionam diretamente com a álgebra, como mostra a Figura 5 a seguir:

Figura 5: Peças do *Algeplan*



Fonte: disponível em < http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/748/330>

O objetivo principal do *algeplan* é estudar as operações algébricas a partir da concepção de área de figuras planas. Cada peça do material representa um termo algébrico, considerando o valor das áreas a serem encontradas com as medidas propostas.

Para sua utilização, convém adotar algumas regras, como: utilizar o verso da peça (parte branca) para expressar os termos algébricos com sinais negativos, ou, em geometria, seus simétricos/opostos. Vale ressaltar que, apesar da convenção adotada, cada peça do *algeplan* é denominada de acordo com sua área, e que, não existe área de regiões negativas.

Pesquisas apontam que a utilização do *algeplan* em sala de aula se direciona a resultados bastante significativos quanto à compreensão das operações com expressões algébricas, possibilitando ao aluno a construção de modelos mentais, levando-o a realizar generalizações e formalizações do conteúdo em questão (RÊGO, 2010).

Com isso, nossa pesquisa se apoia na utilização de um material didático manipulativo para o ensino de escrita e operações com expressões algébricas (exceto divisão), valendo-se de critérios como os recursos visuais da geometria e os conhecimentos prévios dos alunos, compreendendo assim, que através desses seja possível tornar visível certas propriedades algébricas, e assim, sanar dificuldades cognitivas como: falta de referencial numérico; não aceitação da ausência de fechamento; justaposição algébrica.

3 DESENVOLMIMENTO E ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Considerações sobre a aplicação das sequências didáticas e análise dos dados

De forma sistemática, o terceiro capítulo deste trabalho constitui a análise dos dados obtidos com a avaliação diagnóstica inicial, o relato do desenvolvimento da aplicação das três sequências didáticas propostas neste estudo, e a apreciação dos dados apresentados na avaliação diagnóstica final.

Nossa amostra, que inicialmente era composta por 25 (vinte e cinco) alunos, foi reduzida a 20 (vinte) devido à inviabilidade de participação de cinco alunos da turma em atividades no contra turno. Dos vinte alunos, nem todos puderam participar dos três encontros, dessa forma, para o controle das participações foi realizada uma Frequência (Apêndice E) a cada dia em que foram realizadas as atividades para que pudéssemos verificar quais os alunos que participaram de todas as atividades, os que participaram de apenas duas, os que participaram de apenas uma e verificarmos o resultado de ambos.

Os dados são apresentados sob a perspectiva de uma análise qualitativa, com exibição quantitativa dos dados em gráficos e tabelas, por meio de uma estatística descritiva.

3.2 Dados da Avaliação Diagnóstica Inicial

Nesta seção apresentamos os dados obtidos com a Avaliação Diagnóstica Inicial (Apêndice C) e a análise desta, feita de forma qualitativa de acordo com os objetivos apontados para cada questão, e exibição quantitativa dos dados apresentados.

Nossa avaliação diagnóstica inicial foi aplicada com os sujeitos da pesquisa, no primeiro momento desta, com o objetivo de investigar o nível de compreensão do grupo pesquisado em expressões algébricas, mais precisamente, com relação à escrita e manipulação para efeitos de soma e multiplicação de monômios e binômios, e redução de polinômios.

A primeira questão de nossa avaliação diagnóstica é composta por sete itens que se alternam entre soma e multiplicação de monômios e multiplicação de binômios. Nessa questão, os itens foram organizados de modo que se possa verificar se o aluno sabe discernir que tipo de método é propriamente empregado para as propriedades da adição e multiplicação de termos algébricos.

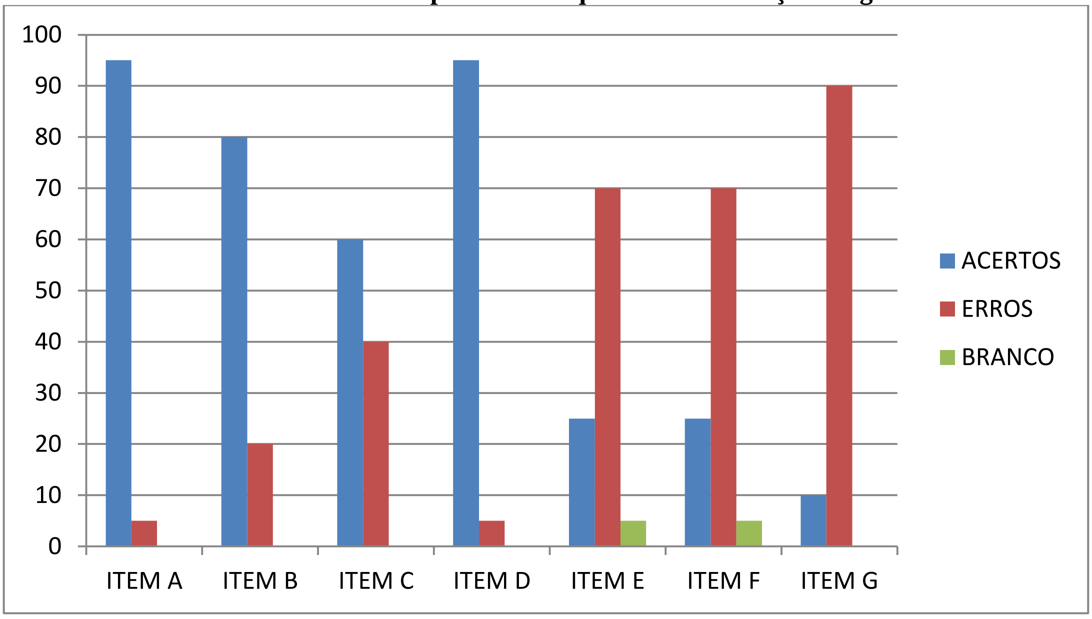
A Tabela 1 apresenta os dados obtidos, em porcentagem, dos itens da primeira questão da avaliação diagnóstica inicial e o Gráfico 1 ilustra esses resultados de modo a melhor visualizar as possíveis variações de repostas na Avaliação Diagnóstica Final.

Tabela 1 – Dados das respostas da 1ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial

RESPOSTAS/ ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)	ITEM C (%)	ITEM D (%)	ITEM E (%)	ITEM F (%)	ITEM G (%)
CERTAS	95	80	60	95	25	25	10
ERRADAS	5	20	40	5	70	70	90
BRANCO	0	0	0	0	5	5	0
TOTAL	100	100	100	100	100	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 1 – Dados das respostas da 1ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial



Fonte: Elaboração da autora

Como podemos observar na Tabela 1, no item (A) composto pela adição de dois termos algébricos semelhantes do primeiro grau, a porcentagem de erros para este item foi mínima e, nenhum dos alunos que compõe a amostra deixou de responder a questão. Do mesmo modo, também corresponderam positivamente ao item (D) que decorria o mesmo caráter conceitual.

O que pode parecer um resultado satisfatório para a ideia de adição de termos semelhantes, se contrapõe com as respostas apresentadas nas questões posteriores, onde a adição apresenta-se com mais de um termo algébrico, sendo estes semelhantes e não semelhantes.

Sobre os erros apresentados para o item (A), verificamos que o aluno A aplicou o conceito da propriedade multiplicativa para a soma apresentada, como mostra a Figura 6 a seguir:

Figura 6: Resposta do aluno A

Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Para Mendes (1999) o erro do aluno A é bastante comum em álgebra. A autora retrata que uma possível forma de contribuir para que o aluno deixe de cometê-lo seria promover a compreensão geométrica das expressões algébricas. Como pretendemos verificar com as conclusões deste trabalho.

O item (B) objetivou verificar, de maneira simples, se o aluno detém o conceito da propriedade da multiplicação para monômios, apresentando assim a multiplicação entre dois termos algébricos do primeiro grau. Ainda de acordo com a Tabela 1, neste item, o número de acertos diminui em 5% ao item anterior, enquanto o número de respostas em branco permanece nulo. Para esse item, destacamos um dos casos de erros apresentados, onde o aluno B (Figura 7) apresenta a incompreensão associada à ideia da soma.

Figura 7: Resposta do aluno B

Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Entendemos que o aluno B concebe a multiplicação algébrica com o mesmo conceito da propriedade da soma, visto que torna a repetir o mesmo erro nos itens e questões posteriores com multiplicação de binômios e cálculo de área de figuras planas.

O item (C) apresenta a soma de dois termos algébricos simétricos do primeiro grau. A Tabela 1 nos mostra que para este item o índice de acertos caiu 20% com relação ao item anterior e o índice de respostas em branco permanece constante. Os erros cometidos entre os 40% dos pesquisados apontaram duas origens distintas, e, para ambas, prevaleceu as possíveis dificuldades com relação à regra de sinais e não compreensão algébrica de termos simétricos. Para a aluna C (Figura 8) e o aluno D (Figura 9), respectivamente:

Figura 8: Resposta da aluna C

Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Figura 9: Resposta do aluno D

Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Não caracterizamos esses erros como descuido ou falta de atenção, pois eles tornam a repetir-se nas questões posteriores, tornando-se uma fonte de confusões nas manipulações algébricas dispostas nessa avaliação.

De acordo com o que foi explanado no item (A), o item (D) comporta o mesmo aspecto de resolução, do mesmo modo, conforme aponta a Tabela 1, os índices permaneceram em uniformidade para estes.

O item (E) comporta o mesmo objetivo do item (B). Deste, o índice de erros passa a ser superior, atingindo 70% do grupo que respondeu à avaliação diagnóstica inicial. Da mesma forma, a questão trazia a multiplicação de dois termos algébricos do primeiro grau. Para este item, dentre o índice de erros, 50% dos pesquisados realizaram o mesmo processo de resolução apontado pelo aluno A (Figura 10), realizando a multiplicação dos coeficientes e repetindo a parte literal.

Figura 10: Resposta do aluno A

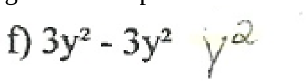
Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Os outros 50% apresentaram erros de forma aleatória, seja, somando os coeficientes e multiplicando a parte literal, ou repetindo a parte literal e multiplicando os coeficientes.

Com o item (F) nossa avaliação buscou mais uma vez verificar o entendimento do grupo quanto à adição de dois monômios simétricos, sendo estes, diferentemente do item (C), do segundo grau. Confirmando os índices apontados na Tabela 1 para o item (C), 70% do grupo em questão não compreendem a relação entre a soma de termos algébricos simétricos.

Dos erros verificados, pudemos observar que 64,3% dos alunos subtraíram os coeficientes e repetiram a parte literal dos monômios em questão, conforme realizou a aluna E (Figura11), e, os outros 35,7% apresentaram erros aleatórios que não se enquadram em uma tipologia estudada.

Figura 11: Resposta da aluna E

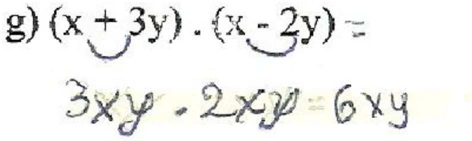


Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Para o item (G), nossa avaliação diagnóstica buscou investigar a compreensão da propriedade da multiplicação entre dois binômios, e ainda nesta, a redução de termos semelhantes, com a propriedade da soma. A Tabela 1 nos mostra que o índice de erros para esse item foi bastante expressivo, configurando que 90% dos alunos pesquisados não detém o conceito da propriedade distributiva para multiplicação de binômios. Para este, verificamos que dentre o número de alunos que cometeram erros, houve entre eles processos semelhantes.

De acordo com nossas observações, a aluna F (Figura 12) apresenta dificuldades quanto aos *tipos de relações utilizados em aritmética* (BOOTH, 1995), para ela o processo de resolução da multiplicação de binômios tem o mesmo aspecto dos métodos utilizados em aritmética, onde numa expressão, deve-se primeiro resolver as operações que estão dentro dos parênteses.

Figura 12: Resposta da aluna F

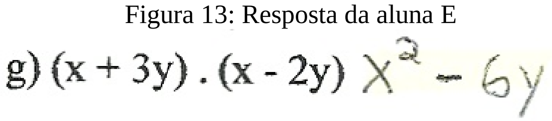


Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Na busca da resolução, a mesma realizou um processo inapropriado para adição de monômios, verificando assim sua incompreensão quanto à propriedade da soma, e, em seguida, na tentativa de multiplicar os resultados obtidos, a aluna F realizou a multiplicação dos coeficientes dos resultados e repetiu a parte literal, constatando assim uma sucessão de atitudes negativas quanto ao domínio das manipulações algébricas.

Outro erro muito comum entre os 90% apresentados para este item, verifica que os pesquisados compreendem o processo de resolução de multiplicação entre binômios de forma a multiplicar o primeiro termo do primeiro binômio com o primeiro termo do segundo binômio e o segundo termo do primeiro binômio com o segundo termo do segundo binômio, apontando assim sua incompreensão quanto à distributividade da propriedade da multiplicação. Conforme apresentamos na Figura 13 resposta da aluna E:

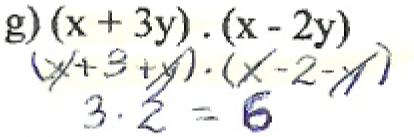
Figura 13: Resposta da aluna E



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Um terceiro erro "curioso" que aponta a inapropriada forma que os alunos concebem as manipulações em expressões algébricas é dado na apresentação da resposta da aluna G (Figura 14). Verifica-se que a aluna recorre a vários tipos de estratégias para chegar a uma resposta numérica:

Figura 14: Resposta do aluno G



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

A aluna G mostra não perceber os termos $3y$ e $-2y$ como uma multiplicação por justaposição colocando entre os coeficientes e partes literais uma adição e realizando um processo de cancelamento de termos, como em uma equação.

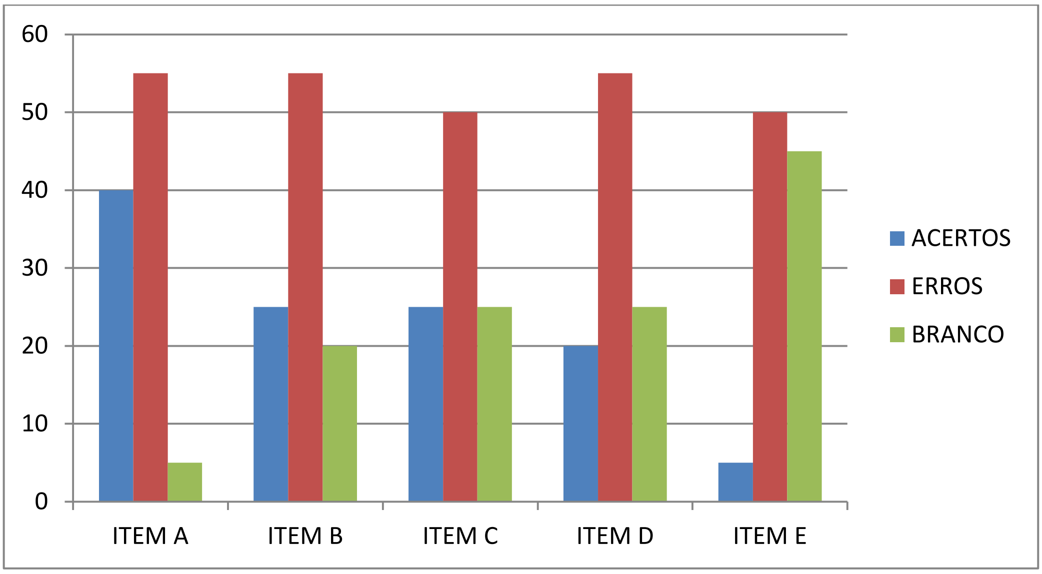
Para a segunda questão, nossa avaliação diagnóstica buscou verificar se o aluno detém o conceito da propriedade aditiva para termos algébricos, a partir da ideia de agrupamento dos termos semelhantes, de forma que os mesmos escrevessem os polinômios dados em sua forma reduzida. Apesar de o conceito utilizado ser o mesmo da questão anterior, a segunda questão apresentou maiores índices de erros, conforme aponta a Tabela 2 e o Gráfico 2, mostrando considerável o nível de incompreensão das propriedades das operações para expressões algébricas quanto ao grupo pesquisado.

Tabela 2 – Dados das respostas da 2ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial

RESPOSTAS/ ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)	ITEM C (%)	ITEM D (%)	ITEM E (%)
CERTAS	40	25	25	20	5
ERRADAS	55	55	50	55	50
BRANCO	5	20	25	25	45
TOTAL	100	100	100	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 2 – Dados das respostas da 2ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial

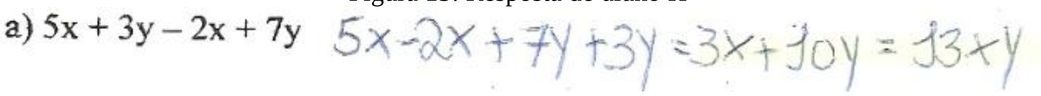


Fonte: Elaboração da autora

Para o item (A) (Tabela 2), o polinômio em questão apresentava quatro termos algébricos, cada um deles com uma única variável, ambos do primeiro grau.

De acordo com a resposta apresentada pelo aluno H (Figura 15), verificamos que mesmo quando alguns alunos conseguem chegar a um resultado correto para a expressão algébrica, estes se inclinam a não aceitação da ausência de fechamento, já retratado no item 2.3.1 deste trabalho, procedendo de maneira incorreta no intuito de apresentar uma resposta com um único termo:

Figura 15: Resposta do aluno H



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Já o aluno I (Figura 16), apresenta incompreensão na concepção da variável, assumindo para esta o papel de incógnita. Na tentativa de encontrar um valor para a variável da expressão, o aluno considerou os processos utilizados para determinação da raiz de uma equação, “inserindo” um sinal de igualdade entre os termos e isolando entre os membros a variável *x* e *y*, e, a partir disto, ele deparou-se com o seguinte problema: a expressão possuía duas variáveis distintas e por sua concepção acerca do foco desta atividade não seria possível determinar o valor numérico destas.

Figura 16: Resposta do aluno I

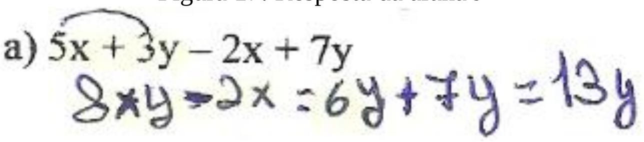
Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Essa reflexão se deu a partir do momento da aplicação da avaliação diagnóstica inicial, onde o aluno I indagou em sua fala: "*É para achar o valor de x, professora?*" Fala do aluno I.

Todos os itens posteriores da segunda questão foram deixados em branco pelo aluno I.

A aluna J (Figura 17) inicia o processo de resolução de acordo a ordem posicional dos termos. Para tanto, realiza a soma de termos não semelhantes e interpreta o sinal negativo de forma a subtrair os coeficientes e eliminar a variável do termo que o precede, mostrando assim não conformidade com a propriedade da adição de termos algébricos.

Figura 17: Resposta da aluna J

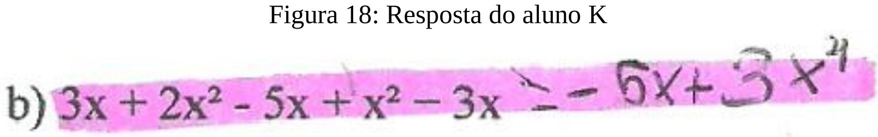


Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

O item (B) também constou o mesmo caráter do item anterior, distinguindo-se pelo grau apresentando, sendo o polinômio em questão do segundo grau. Como podemos verificar com a Tabela 2, para o item em questão, 75% do grupo pesquisado comportou a soma das respostas incorretas e em branco.

De acordo com a análise a partir dos índices de erros para este item, 45,5% dos pesquisados cometeram erros da mesma natureza descrita na resposta do aluno K (Figura 18), realizando a justaposição dos termos algébricos não semelhantes e somando as potências dos termos do segundo grau.

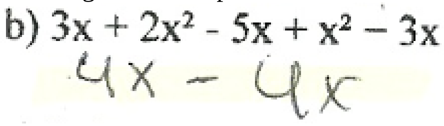
Figura 18: Resposta do aluno K



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Os demais 54,5% não apresentaram a resolução correta devido suas possíveis dificuldades de operações com números inteiros e incompreensão para as manipulações algébricas de um modo geral, visto que, apresentaram erros aleatórios que não se enquadram em nenhuma tipologia estudada, como aponta a resposta do aluno B na Figura 19:

Figura 19: Resposta do aluno B

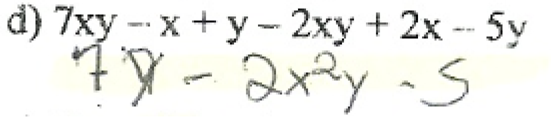


Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Para o item (C) da segunda questão os aspectos e objetivos foram idênticos ao item anterior. A natureza de algumas questões apresentaram aspectos iguais para que pudéssemos verificar se os erros cometidos foram gerados por falta de atenção ou alguma outra relação que perpasse esse conceito. Como podemos observar na Tabela 2, o índice de acertos permaneceu constante, já o número de respostas em branco sofreu de aumento com relação ao item anterior. As características dos erros apontados para este item enquadram-se na mesma tipologia dos erros analisados ao item anterior.

O item (D) distingue-se dos demais por alguns de seus termos algébricos dispostos no polinômio apresentarem duas variáveis distintas. A Tabela 2 aponta que o índice de acertos caiu com relação ao item anterior e que o número de respostas em branco permaneceu constante. Entre o índice de erros apresentados, 36,4% dos pesquisados cometeram as mesmas falhas apresentadas pelo aluno B (Figura 20) para a propriedade da adição de termos algébricos:

Figura 20: Resposta do aluno B



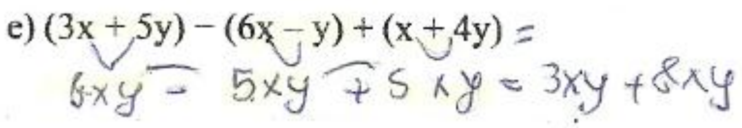
Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

O aluno B, juntamente com os demais que somam a porcentagem supracitada, interpreta o sinal negativo de forma a retirar do termo anterior a variável que o sucede. Essa dificuldade em manipulações de expressões algébricas diz respeito à interpretação dos símbolos e as ações à que eles remetem na aritmética (BOOTH, 1995). Os outros

63,6% contidos no índice de erros, apresentaram as mesmas falhas com adição de termos não semelhantes, dificuldades com termos simétricos, ou, possivelmente, com números inteiros.

O item (E) da segunda questão de nossa avaliação diagnóstica objetivou verificar como os pesquisados procedem na solução da adição de três binômios. Responder de modo satisfatório a este item implicaria em realizar a eliminação dos parênteses considerando os sinais que os precedem e, após isso, reduzir o polinômio obtido. De acordo com a Tabela 2, podemos observar que 95% dos pesquisados não atenderam às expectativas do item supracitado. Entre o índice de erros, 50% dos pesquisados (que corresponde à metade do número geral de respostas erradas) apresentaram os mesmos aspectos de desenvolvimento para este item, como mostra a resposta da aluna F (Figura 21):

Figura 21: Resposta da aluna F



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Utilizando o mesmo processo adotado em aritmética, os alunos que compreendem o percentual supracitado, realizaram as ações que indicam os sinais de adição e subtração para os termos que estavam dentro dos parênteses, mesmo sendo eles não semelhantes, concluindo assim, suas dificuldades em operações com expressões algébricas que apresentam parênteses, não dispondo da compreensão da ausência de fechamento e de adição de binomial.

Os outros 50% (que correspondem à segunda metade do número de respostas erradas para o item (E)), realizaram erros como a soma de todos os coeficientes apresentados nos termos algébricos e repetição da parte literal. Ainda, os que mais se aproximaram do resultado satisfatório, compreendendo que não é possível reduzir a um único termo monômios não semelhantes, não souberam lidar com os parênteses, não realizando a propriedade distributiva para o sinal negativo que antecedia o segundo binômio.

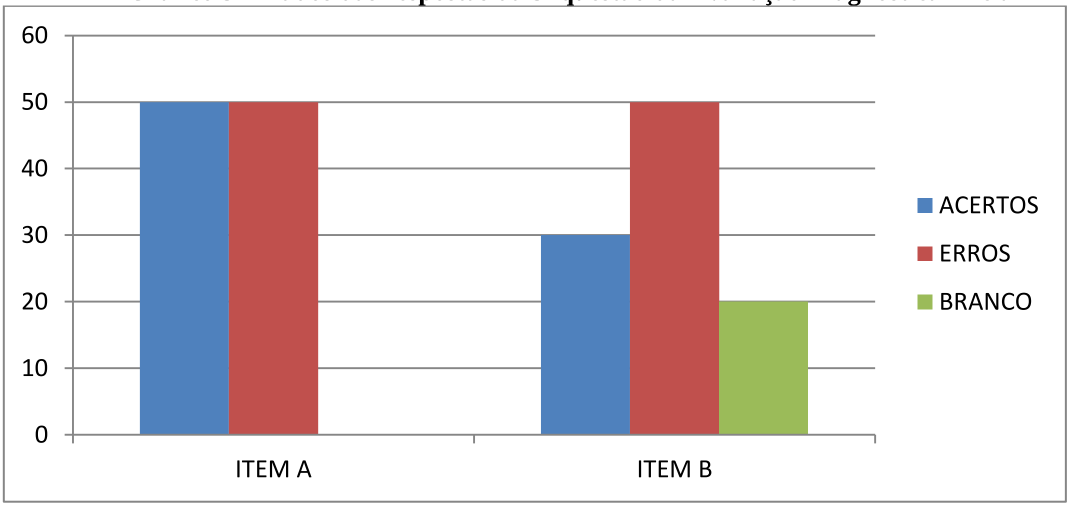
A terceira questão, da nossa avaliação diagnóstica, apresenta um retângulo cujas dimensões estão representadas por monômios. Essa questão apresenta dois itens que remetem à escrita da expressão algébrica para o perímetro e área do retângulo apresentado, respectivamente. A questão teve por objetivo observar o desenvolvimento da soma e o produto entre monômios, e verificar o desempenho do aluno quanto à manipulação dos termos algébricos dentro das possibilidades de redução de termos semelhantes. A Tabela 3 e o Gráfico 3 representam, em porcentagens, os dados obtidos com a terceira questão da nossa avaliação diagnóstica inicial.

Tabela 3 – Dados das respostas da 3ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial

RESPOSTAS/ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)
CERTAS	50	30
ERRADAS	50	50
BRANCO	0	20
TOTAL	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 3 – Dados das respostas da 3ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial



Fonte: Elaboração da autora

O item (A) solicita o monômio que designa o perímetro da figura geométrica dada. Responder satisfatoriamente a este item implica que o aluno deva escrever todos os termos que indicam os lados da figura, e em seguida reduzi-los a um único termo, visto que os lados foram dados em função de uma única variável. De acordo com a Tabela 3, 50% do grupo pesquisado corresponderam positivamente a este, enquanto os outros 50% cometeram erros quanto à não compreensão do conceito de perímetro, manipulações algébricas inapropriadas ou não redução dos termos ao monômio que pedia-se no item proposto.

Já o item (B), pede que o aluno escreva o monômio que expressa a área da figura geométrica dada. Para este, espera-se que o aluno realize a multiplicação entre dois monômios do primeiro grau com uma única variável cada, compreendendo assim o mesmo objetivo apresentado nos itens (B) e (E) da primeira questão desta avaliação, com multiplicação de monômios e, também, sua compressão geométrica para o conceito de área de figuras planas. Conforme a Tabela 3, 70% da amostra se configura em alunos que não corresponderam positivamente a este. Dentre o índice de respostas erradas, 40% dos alunos escreveram a expressão correta para a área, mas não realizaram a multiplicação entre os termos. Ainda, outros 40% cometeram erros de origens aleatórias que não se enquadram em nenhuma tipologia estudada, e os 20% restantes realizou o mesmo erro cometido pelo aluno H (Figura 22):

Figura 22: Resposta do aluno H


b) Escreva o monômio que expressa a área desse tapete. $2x \cdot 4x = 8x$

Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

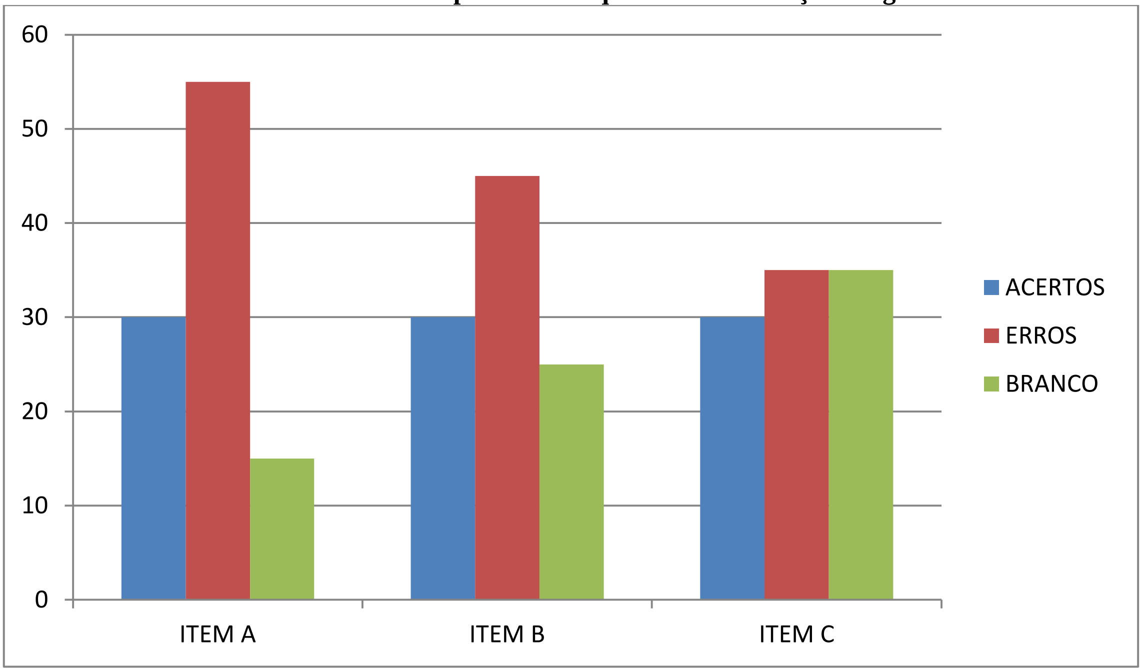
A quarta questão, composta por três itens, refere-se à representação do perímetro de figuras geométricas básicas, sendo estes objetos descritos no sentido retórico. A questão objetiva identificar a percepção do aluno quanto à figura geométrica (número de lados e propriedades), a fim de escrever a expressão algébrica que defina o seu perímetro. Com a Tabela 4 e o Gráfico 4 apresentamos, estatisticamente, os dados obtidos com a quarta questão da nossa avaliação diagnóstica inicial:

Tabela 4 – Dados das respostas da 4ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial

RESPOSTAS/ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)	ITEM C (%)
CERTAS	30	30	30
ERRADAS	55	45	35
BRANCO	15	25	35
TOTAL	100	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 4 – Dados das respostas da 4ª questão da Avaliação Diagnóstica Inicial



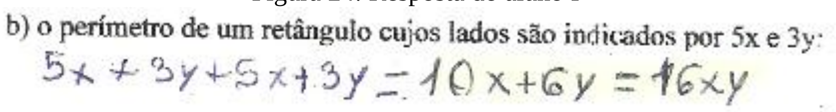
Fonte: Elaboração da autora

Dos erros apresentados para esta questão, verificamos que os mesmos se enquadravam em três naturezas distintas, sendo: incompreensão para a relação entre perímetro e área, incompreensão quanto ao foco da atividade algébrica, ou a interpretação dos símbolos, e erros de cunho aleatório. Como apontam as Figuras 23, 24 e 25, para as respostas dos alunos E, I, e N respectivamente:

Figura 23: Resposta da aluna E

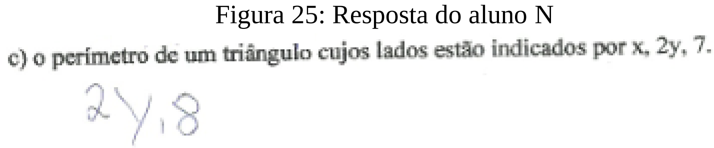
Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Figura 24: Resposta do aluno I



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

Figura 25: Resposta do aluno N



Fonte: Avaliação Diagnóstica Inicial

3.3 Relato do desenvolvimento da aplicação das sequências didáticas

Os encontros para a aplicação das três sequências didáticas foram organizados da seguinte forma: 10 alunos participariam das atividades nos dias 10, 12 e 24 de março, e os outros 10 nos dias 11, 13 e 25 do mesmo mês, ambos os grupos em nosso contra turno de aulas. A escolha da divisão da turma em dois grupos se deu devido às dificuldades em conciliação de horários. Também por este motivo e por nossa última aplicação coincidir com a semana de provas do colégio para o grupo em questão, os encontros da segunda semana para a aplicação das sequências foram adiados para a semana seguinte, ficando esta marcada para os dias 24 e 25 de março.

As mudanças em nosso planejamento proporcionaram maior interação entre a pesquisadora e os sujeitos da pesquisa. As alterações ocorreram também nas sequências didáticas, onde o planejamento didático apontava a distribuição dos conjuntos de peças do *algeplan* por duplas, com as mudanças, pôde-se distribuir um conjunto para cada aluno.

Os relatos aqui apresentados não fazem referência aos dias de aplicação, e sim a cada sequência didática. Ou seja, quando relatamos as realizações ocorridas na aplicação da primeira sequência didática, referimo-nos, de modo geral, aos dias 10 e 11 (que comportam as mesmas atividades, com grupos distintos), destacando assim os aspectos mais importantes que ocorreram nas datas supracitadas.

3.3.1 Aplicação da primeira sequência didática

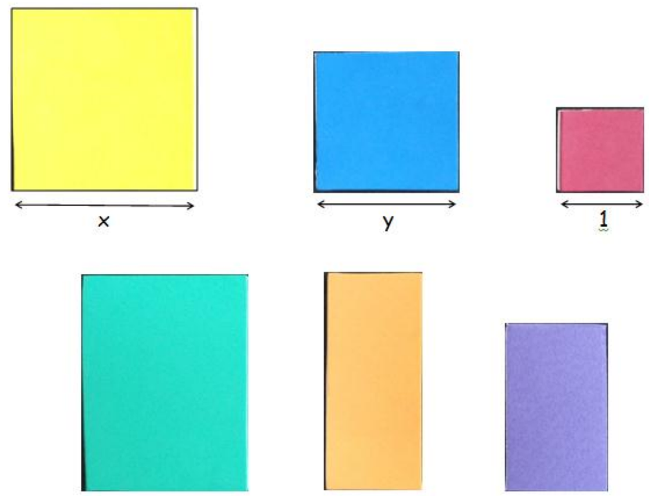
No primeiro momento foi entregue, a cada aluno, um conjunto contendo 40 peças do *algeplan*, duas fichas de atividades (compreendidas na primeira sequência didática como material de apoio – Apêndice D), lápis, papel e borracha, como mostra Figura 26 a seguir:

Figura 26: material utilizado no desenvolvimento das sequências

Fonte: Arquivo pessoal

Com a aplicação da primeira sequência didática, os alunos tiveram seu primeiro contato com o *algeplan*. Todos os participantes da pesquisa relataram que nunca haviam visto, ou ouvido falar deste material didático manipulativo. Ainda no primeiro momento, foi solicitado que os alunos abrissem o conjunto de peças, retirassem uma de cada cor e analisassem suas características. Indagados sobre os aspectos que compunha aquele conjunto, os alunos destacaram as cores, tamanhos e formatos das peças do *algeplan*. A partir disto, com a primeira ficha de atividades, foi solicitado que os alunos considerassem as medidas dos lados dos quadrados grande, médio e pequeno, como sendo, *x*, *y* e *1*, respectivamente, e que com o auxílio dessas medidas pré-estabelecidas eles encontrassem as dimensões dos três retângulos distintos, que também compõem o *algeplan*, como aponta a Figura 27:

Figura 27 – Peças do *Algeplan*



Fonte: Ficha de Atividades

Os alunos foram instruídos a comparar as medidas dos retângulos com as medidas “já conhecidas” dos quadrados, e assim, registrar estas em sua folha de atividades. Com isso, os mesmos chegaram a concluir que o retângulo da cor verde possui lados com medidas *x* e *y*, o retângulo da cor laranja possui os lados com medidas *x* e *1*, e o retângulo da cor lilás possui os lados com medidas *y* e *1*.

De posse do conhecimento das dimensões de cada peça, a segunda ficha de atividades solicitou o preenchimento de uma tabela, que compreende o registro das dimensões, perímetro e a área de cada peça do *algeplan*. Neste momento, foram observadas algumas dificuldades para o cálculo do perímetro e área das peças. Os erros percebidos estavam relacionados à não aceitação da ausência de fechamento para soma de termos algébricos. Para o perímetro dos retângulos, muitos alunos apresentaram o erro $x + x + y + y = 2x + 2y = 4xy$, ainda $x + x + 1 + 1 = 2x + 2 = 4x$ e $y + y + 1 + 1 = 2y + 2 = 4y$. Quando indagados sobre ser possível reduzir a um único termo os termos não-semelhantes, todos concordaram não ser possível, mas não souberam justificar a razão. Dessa forma, foi apresentado, algebricamente, o perímetro do retângulo verde, chegando a concluir que $x + x + y + y = 2x + 2y$, neste momento, um aluno questionou: “*Esse é o resultado?*”. Enquanto o resto da turma silenciava, atentos a resposta que viria. Ou seja, foi visto que a maior parte da turma estava de acordo com o questionamento do aluno, mas diferentemente dele “aceitaram” como verdade uma justificativa em linguagem algébrica, apesar de não compreendê-la. Decorrente disto é possível verificar que a ausência de compreensão para esta propriedade tanto pode advir do *foco da atividade algébrica e natureza da reposta*, quanto ao *uso da notação e convenção em álgebra* como definimos anteriormente por Booth (1995). O sinal “+” remete uma ação a ser realizada, com isto $2x + 2y$, para eles, não parece ser uma resposta aceitável, levando-os a realizar a ação da soma reduzindo a expressão à um único termo.

Para o último momento, após a obtenção de todos os itens solicitados na tabela, foi esclarecido aos alunos que cada peça do *algeplan* fosse nomeada de acordo com a expressão de sua área. Por exemplo, o termo algébrico x^2 refere-se ao quadrado de lado *x*. E assim, sucessivamente. Com isso, possibilitamos o aluno a perceber, que cada termo algébrico faz referência a uma figura geométrica. A partir disto, foram realizadas ações que propiciassem a codificação e decodificação das peças, partindo da figura geométrica para a linguagem algébrica, e da linguagem algébrica para a figura geométrica. Foi dado a cada aluno participante um grupo de peças aleatórias e solicitado que os mesmos escrevessem em sua atividade que expressão definia aquele grupo de peças, do mesmo modo, foi dada uma expressão algébrica qualquer de forma que os mesmos representassem-na com o material didático. Nosso objetivo foi o de construir modelos mentais para a representação de expressões algébricas com base nas peças do *algeplan*. Todos os alunos participaram ativamente e realizaram esta atividade de modo satisfatório. Ao término, alguns deles relataram que a atividade havia sido bastante agradável.

Os alunos foram recomendados a guardarem e retornarem aos encontros nas datas seguintes com as fichas de atividades utilizadas, visto que, a tabela com o preenchimento das áreas poderia ser útil caso eles esquecessem como referenciar cada peça do *algeplan*.

3.3.2 Aplicação da segunda sequência didática

A segunda sequência didática (Apêndice D) objetivou promover a compreensão da propriedade da soma para expressões algébricas, fixando conceitos muito utilizados em álgebra como, redução de termos semelhantes e cancelamento de quantidades opostas com a utilização do *algeplan*. Nos dias de aplicação dessa segunda sequência, foi redistribuído aos alunos o material a ser utilizado e entregue duas novas fichas de atividades.

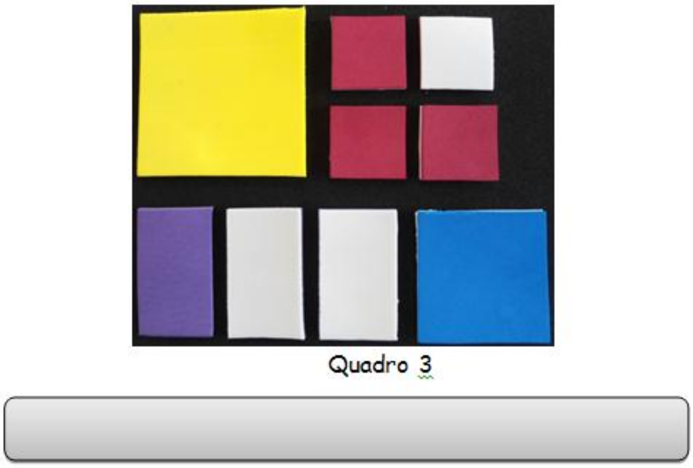
Para a primeira atividade foram adotadas algumas “convenções” quanto ao uso do material: o lado colorido das peças representaria os termos positivos e o lado branco (verso das peças) os termos negativos, e que as peças com o mesmo tamanho e formato e com cores distintas se anulariam. Nesse momento, também foi esclarecido aos alunos que apesar da convenção utilizada para o *algeplan*, não existe áreas de regiões com valores negativos.

A atividade iniciou-se após as orientações de que para a adição, quando se dispunha de várias peças do *algeplan* de mesmo tamanho, formato e cor não era preciso escrever a soma das áreas de cada uma delas e sim, escrever um único termo que expressasse a quantidade de peças do termo algébrico em questão, definindo a ideia de justapor as peças. Exemplo: Se temos duas peças de área x^2, temos $2x^2$, ou, dados cinco retângulos de área x temos então cinco peças x, ou simplesmente $5x$. Do mesmo modo, destacamos que para expressar o resultado final da soma das áreas, seria preciso fazer os possíveis “cancelamentos das peças”. Exemplo: dispondo de duas peças de área x^2 coloridas mais uma peça x^2 branca, a branca anularia uma colorida, e a peça que sobrasse seria a expressão final obtida. Ainda, salientamos que quando as expressões algébricas fossem apresentadas entre parênteses, o grupo de peças que representariam os termos dos parênteses antecedidos de um sinal positivo manter-se-iam com a mesma cor e os parênteses poderiam ser dispensados, e caso o sinal que antecedesse os parênteses fosse negativo, cada peça representante dos termos que estavam dentro deste parêntese teria que “mudar de cor”. A partir disto, a atividade solicitou-os a tomar determinadas peças do algeplan e realizar a soma de suas áreas, realizando os possíveis cancelamentos e justapondo as peças iguais, caracterizando assim a propriedade da adição algébrica com redução de termos semelhantes ou opostos.

Para este momento, houve algumas “confusões” com o manuseio do material: quando haviam cancelamentos a serem realizados alguns participantes retiravam apenas uma das peças, ou quando restavam certas quantidades de peças na cor branca, alguns dos alunos não as agrupavam mantendo o sinal negativo. Podendo eles não ter concebido a ideia que as peças brancas representavam valores negativos ou, simplesmente, estarem desatentos a isso. Dessa forma, as orientações foram dadas de modo individual aos que apresentaram dificuldades, visto que, o baixo número de alunos para cada encontro pôde nos proporcionar maior interação.

A segunda atividade desta sequência trazia uma imagem com um determinado grupo de peças, entre coloridas e negativas, de formas e tamanhos iguais e/ou distintos, como mostra a Figura 28, e requisitava os alunos a obter a expressão algébrica final que designava a imagem em questão:

Figura 28 – Representação de uma expressão algébrica com o Algeplan



Fonte: Ficha de Atividades

Ainda para esta sequência, após o término das atividades, foi verificado que alguns dos alunos estavam muito centrados nas peças, não podendo perceber a sua relação algébrica. Deste modo, foram dadas algumas expressões algébricas e solicitado que os mesmos as somassem, porém, sem o uso do material. Numa breve correção, foi visto que grande parte do grupo cometeu erros quanto a termos simétricos, nenhum deles agrupou termos semelhantes. Assim, com a mesma questão, foi pedido que eles reavaliassem suas respostas buscando relacionar os termos positivos com as peças coloridas e os termos negativos com as peças brancas, e imaginassem estar manuseando as peças para que em seguida expressassem o resultado final.

Ao término desta sequência didática, os alunos teceram alguns comentários que são válidos considerar para este trabalho, dos quais destacamos a fala de dois alunos:

"*Porque a Sra. não deu isso antes de fazer aquela prova?*" Comentário de aluno A referindo-se as sequências didáticas e avaliação diagnóstica.

"*Se eu tivesse visto isso antes, eu tinha aprendido*." Comentário da aluna B referindo-se ao uso do *algeplan* para a compreensão da escrita e adição de expressões algébricas.

"*Porque a Sra. não leva mais dessas 'coisas' para as aulas da tarde? Seria legal.*" Comentário da aluna C referindo-se ao uso dos materiais didáticos manipulativos.

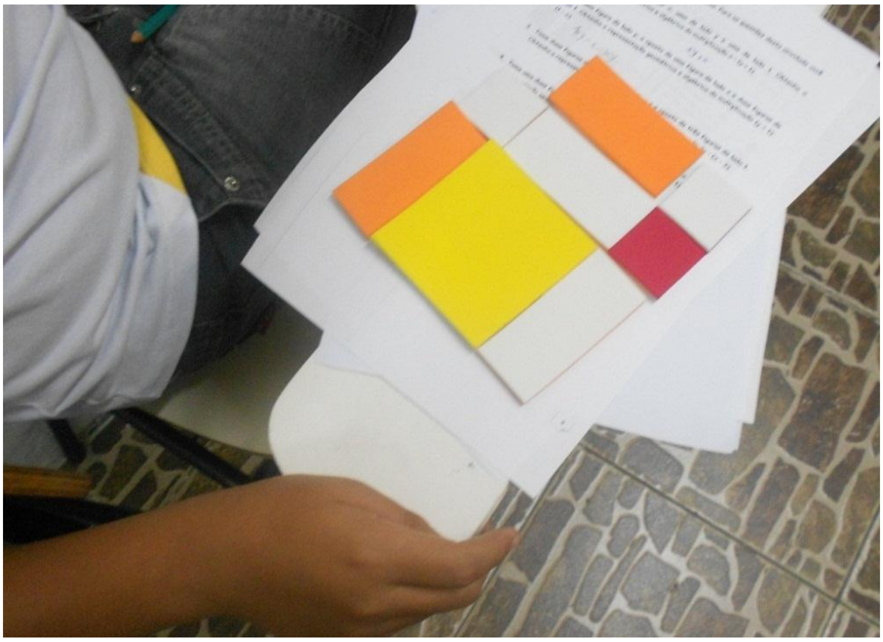
3.3.3 Aplicação da terceira sequência Didática

A nossa terceira sequência didática (Apêndice D) objetivou atribuir um significado concreto à propriedade multiplicativa através do conceito geométrico de perímetro e área de figuras planas por meio da analogia visual e manipulação do *algeplan*. Para isto, é preciso lembrar que o *algeplan* é composto de figuras geométricas planas, não podendo este atingir a resolução de expressões com termos algébricos de grau superior a dois. Dessa forma, as multiplicações algébricas realizadas nas atividades dispostas em nossa sequência referem-se sempre a multiplicações entre termos do primeiro grau, para que se possam obter sempre resultados com, no máximo, grau dois.

A terceira sequência requereu o uso de duas novas fichas de atividades, o *algeplan*, lápis, papel e borracha. A primeira atividade pedia que os alunos, utilizando um determinado grupo de peças do a*lgeplan*, montassem quadrados ou retângulos, de acordo com cada item, desenhassem a figura obtida e verificassem se haviam outras possibilidades de organização, familiarizando-os com o conceito que seria trabalhado posteriormente. Para a verificação da propriedade distributiva, os alunos foram instruídos a realizar a multiplicação de monômios, de forma a montar possíveis quadrados e/ou retângulos. Exemplo: com as peças $y^2 + 4y + 4$ é possível formar um quadrado ou retângulo? Se sim, quais as medidas dos lados desta figura? Retomando o conceito de área, foi possível perceber que o produto entre a base e a altura da figura geométrica encontrada resulta nas peças que inicialmente foram dispostas. Concluímos assim que a multiplicação de termos algébricos objetiva encontrar a área de determinada figura geométrica, ou seja, quando multiplicamos $x \cdot (x + y)$ queremos encontrar a área de um retângulo cujos lados são indicados por x e $x + y$.

Para a realização deste processo inverso, determinação da área da figura plana com o uso do *algeplan*, os alunos foram instruídos a construir a estrutura de um quadrado ou retângulo (dependendo da multiplicação em questão) dispondo o primeiro termo a ser multiplicado numa linha vertical e o segundo numa horizontal, e a partir disso, buscar preencher o espaço interno dessa composição respeitando a delimitação das linhas de cada peça e a relação das cores. Para esta última, foi configurado que na multiplicação de termos com cores iguais o resultado seria sempre colorido, e na multiplicação de termos brancos com coloridos o resultado seria sempre indicado por uma peça na cor branca. A Figura 29 a seguir mostra o exemplo de uma multiplicação realizada pelo aluno D, onde foi solicitado a resolver com o *algeplan* a multiplicação entre os binômios $(x-1)\cdot(x-1)$:

Figura 29: Multiplicação de binômios com o *algeplan*



Fonte: Arquivo pessoal

A partir disso, os alunos verificaram que as peças que compunham o preenchimento da estrutura montada era exatamente o resultado da multiplicação que se pedia.

Sob a perspectiva de observações quanto à aplicação desta sequência, apontamos que durante a realização das atividades, para multiplicação de expressões algébricas, foi possível verificar que o *algeplan* não contempla as multiplicações entre termos que possuam duas ou mais variáveis. Por exemplo, não é possível encontrar com o material a área de um retângulo de lados x e xy, pois não existe nenhuma peça cujo lado seja indicado por uma composição de duas variáveis.

3.4 Dados da Avaliação Diagnóstica Final

Nesta seção apresentamos os dados obtidos com a da Avaliação Diagnóstica Final (Apêndice C) e a análise desta, feita de forma qualitativa de acordo com os objetivos apontados para cada questão, e quantitativa por meio de uma estatística descritiva. Reportamos que as avaliações inicial e final se referem à mesma avaliação diagnóstica, sendo estas aplicadas em momentos distintos, conforme apresentamos no item 1.3.2.

Nossa avaliação diagnóstica final foi aplicada com os sujeitos da pesquisa após o término das três seções que compuseram o momento da aplicação de nossas sequências didáticas, e no horário de aulas do grupo em questão. Abaixo estão expostos em forma de tabelas e gráficos os resultados apresentados, e decorrido as nossas percepções a partir da apreciação destes em comparativo com os dados apresentados anteriormente com nossa avaliação diagnóstica inicial.

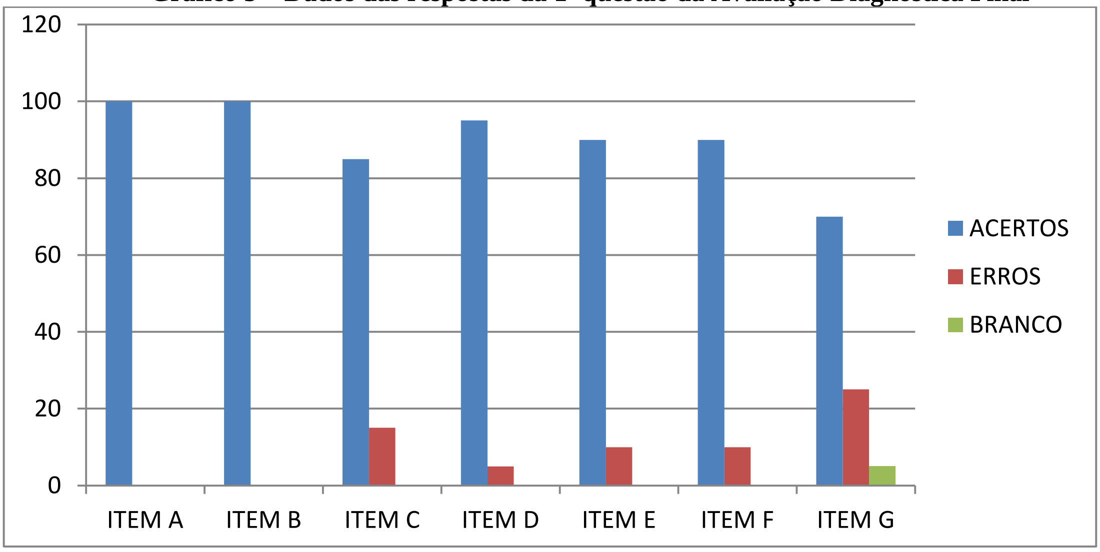
A Tabela 5 apresenta os dados obtidos, em porcentagem, dos itens da primeira questão da avaliação diagnóstica final e o Gráfico 5 ilustra esses resultados de modo a melhor visualizar as possíveis variações:

Tabela 5 – Dados das respostas da 1ª questão da Avaliação Diagnóstica Final

RESPOSTAS/ ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)	ITEM C (%)	ITEM D (%)	ITEM E (%)	ITEM F (%)	ITEM G (%)
CERTAS	100	100	85	95	90	90	70
ERRADAS	0	0	15	5	10	10	25
BRANCO	0	0	0	0	0	0	5
TOTAL	100	100	100	100	100	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 5 – Dados das respostas da 1ª questão da Avaliação Diagnóstica Final

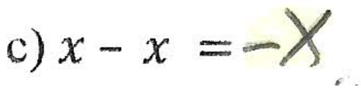


Fonte: Elaboração da autora

Em linhas gerais, comparando os índices apresentados na Tabela 5 com os índices da Tabela 1 (p. 41), é possível observar que o item (D) da primeira questão permaneceu estável para o percentual de acertos, erros e respostas em branco. Os demais itens da primeira questão apresentaram um aumento quanto ao índice de acertos, sendo mais expressiva a variação para os itens (E), (F) e (G). O índice de respostas em branco para os itens (E) e (F) passaram a ser nulos. Já para o item (G), o índice de respostas em branco sofreu um aumento de 5% com relação à avaliação inicial. Concluímos assim para a primeira questão da avaliação final que, o número de erros apresentados na avaliação diagnóstica inicial diminuiu consideravelmente após a aplicação das sequências didáticas utilizadas.

Sobre a reflexão dos 15% para o item (C) que continuaram a cometer erros, pudemos observar que 66,7% destes se mantiveram com a mesma origem de erro apresentada em nossa análise da avaliação diagnóstica inicial que retrata as possíveis dificuldades com relações de sinais e não compreensão algébrica de termos simétricos. Quanto aos 33,3% restantes refere-se a um erro distinto do apresentado na primeira avaliação, conforme aponta a Figura 30 para a resposta do aluno H. Com este, observamos que o erro remete a uma possível falta de atenção na resolução, visto que o aluno não o repete em itens da mesma natureza descrita no item (C).

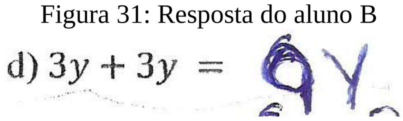
Figura 30: Resposta do aluno H



Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

Quanto ao item (D), apesar dos índices de acertos e erros apresentados se manterem estáveis, houve uma mudança com relação aos resultados apontados nas avaliações. A margem de erro indicada não se refere ao erro do mesmo aluno na avaliação inicial, aluno A. Após a análise comparativa entre as duas avaliações do aluno A, foi verificado que suas dificuldades quanto aos objetivos deste item foram sanadas (adição de termos algébricos simétricos). Já o aluno B, que inicialmente acertou o item (D) na avaliação inicial, cometeu um erro na segunda avaliação, como mostra a Figura 31.

Figura 31: Resposta do aluno B



Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

As rasuras nas respostas apresentadas pelo aluno B caracterizam que este não deteve segurança na solução das questões propostas, mostrando, ainda, sua incompreensão com as propriedades para soma e multiplicação de expressões algébricas. É válido ressaltar que, de acordo com a frequência (Apêndice E) que caracteriza a intersecção entre as participações dos alunos nas atividades propostas, o aluno B apenas participou da atividade referente à escrita de expressões algébricas.

Com relação ao índice de erros compreendidos no item (E), é possível afirmar que a aluna L permaneceu com o mesmo erro apontado em sua avaliação inicial para este item. Porém, a partir da análise de ambas as avaliações da aluna L, verificamos que apesar de ter cometido o erro deste item, que retratava a multiplicação de dois monômios, a mesma aluna acertou todas as demais questões que dispunham deste mesmo caráter, entre multiplicação de monômios e binômios.

Já a aluna M, também compreendida no índice de erros do item (E), saiu da margem de respostas em branco da avaliação inicial. Embora a aluna M não tenha apresentado o domínio das propriedades de adição e multiplicação algébrica, é possível verificar, entre ambas as avaliações, que a mesma passou a "arriscar-se" mais em suas tentativas de resolução, visto que a mesma deixou muitas questões em branco em sua avaliação inicial.

O item (G), com a multiplicação entre binômios, decaiu em 65% dos erros cometidos com relação à avaliação inicial. Dos alunos que permaneceram no índice de erros, destacamos os alunos B e C, que mantiveram a mesma característica de erro apresentada na avaliação inicial, mostrando incompreensão quanto à propriedade distributiva da multiplicação. Já os alunos I, J, K e L, mesmo com erros apresentados no desenvolvimento do item, apresentaram mudanças quanto às suas concepções em manipulações algébricas. Destacamos para este o aluno K.

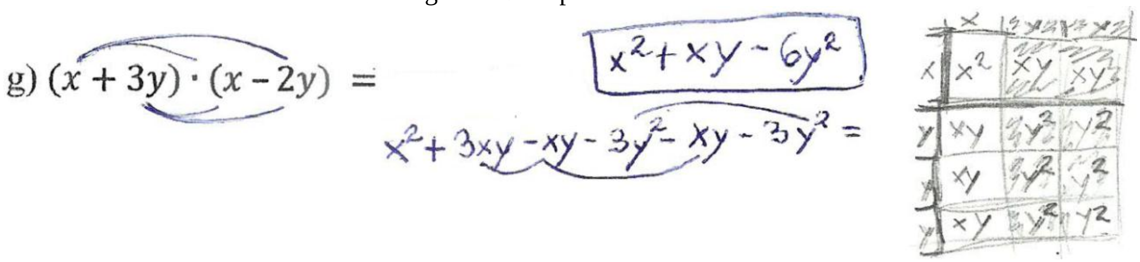
Anterior à aplicação das nossas sequências didáticas, o aluno K (Figura 32), realizou a multiplicação entre binômios, de forma a multiplicar primeiros termos de ambos e somar com a multiplicação dos segundos termos de ambos, e em meio a isto, o aluno apresentava dificuldades em aceitar a ausência de fechamento para expressões algébricas, além de, na propriedade aditiva, realizar a soma dos expoentes das variáveis. Com a avaliação diagnóstica final, foi possível observar que seus erros restringiram-se a confusão com relações de sinais, e neste caso, a não realização correta para a multiplicação de dois termos algébricos em particular:

Figura 32: Resposta do aluno K

Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

Achamos válido destacar para este item o processo de resolução utilizado na avaliação final pelos alunos A, G e M. Para a multiplicação entre os binômios em questão, os alunos supracitados, que estavam no índice de erros para o item (G) na primeira avaliação, passaram para o índice de acertos do mesmo item na avaliação final através do processo de resolução que comporta o conceito geométrico da multiplicação algébrica, desenhando no papel a estrutura do *algeplan* e realizando o preenchimento do espaço interno dessa composição respeitando a delimitação das linhas de cada peça, encontrando assim a área de um retângulo, cujos lados são indicados pelos binômios apresentados, como mostra a Figura 33:

Figura 33: Resposta da aluna G



Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

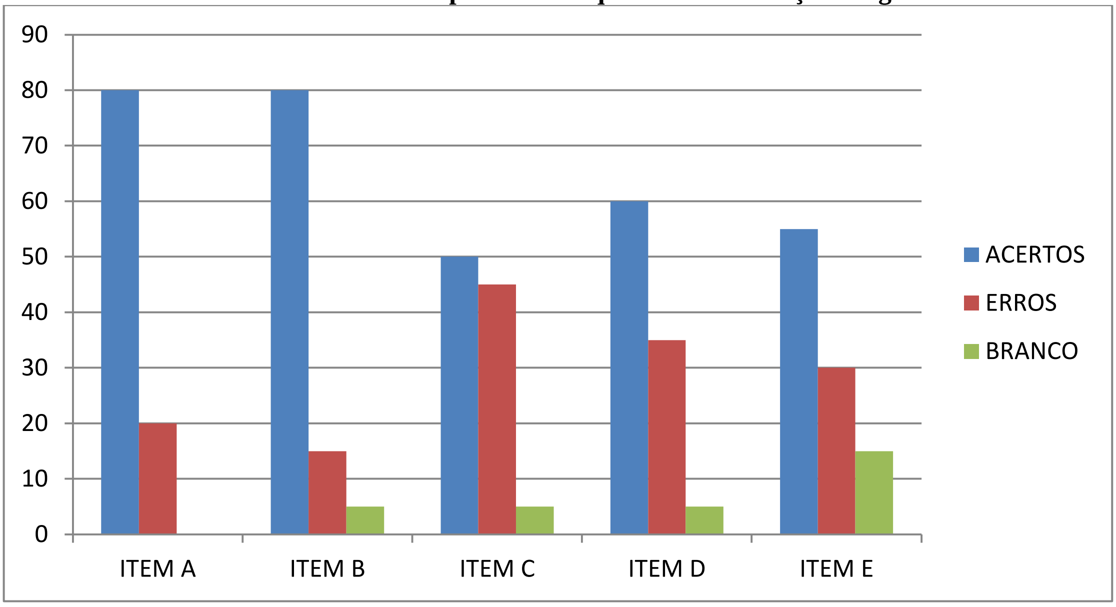
A Tabela 6 e o Gráfico 6 representam, em porcentagens, os dados obtidos com a segunda questão da nossa avaliação diagnóstica final.

Tabela 6 – Dados das respostas da 2ª questão da Avaliação Diagnóstica Final

RESPOSTAS/ ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)	ITEM C (%)	ITEM D (%)	ITEM E (%)
CERTAS	80	80	50	60	55
ERRADAS	20	15	45	35	30
BRANCO	0	5	5	5	15
TOTAL	100	100	100	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 6 – Dados das respostas da 2ª questão da Avaliação Diagnóstica Final



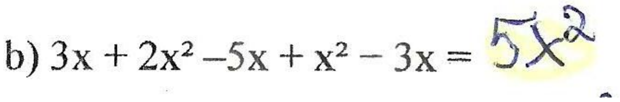
Fonte: Elaboração da autora

Realizando um comparativo entre os índices apresentados na Tabela 6 com os dados obtidos para a segunda questão da avaliação diagnóstica inicial (Tabela 2, p. 45), é possível verificar que houve um decréscimo para o percentual de respostas erradas e em branco de todos os itens da questão, sendo o aumento de acertos mais expressivos refletidos no item (B).

Para o item (A), verificamos que, dentre os 20% dos alunos que continuaram a cometer erros, o aluno B manteve o mesmo aspecto de erros, agrupando termos não semelhantes, enquanto os alunos C, M e N apresentaram erros com a relação de sinais dos termos algébricos, não refletindo quanto à adição de termos opostos. Não caracterizamos os erros destes como falta de atenção ao item em particular, visto que em itens de mesmo aspecto os mesmos tornaram a repetir o erro, ou não responderam a questão.

Para o item (B) a soma dos índices entre respostas erradas e em branco corresponde, em exato, ao mesmo grupo de alunos que erraram o item anterior. Antes de concluirmos esta análise, destacamos que além do aluno B, consta em nossa frequência de participações (Apêndice E) nas atividades que a aluna C apenas esteve presente na atividade que referiu-se a escrita de expressões algébricas. A aluna M manteve-se com o erro em relações de sinais. Já para o aluno N, fica clara a permanência da sua incompreensão nas manipulações algébricas, como mostra a Figura 34:

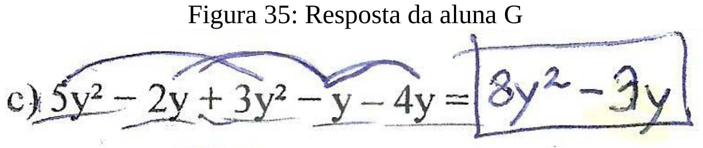
Figura 34: Resposta do aluno N



Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

Com o item (C), verificamos que entre os alunos que cometeram erros, nenhum deles cometeu o erro de somar as potências dos termos algébricos na soma de monômios, como apontamos em nossa análise da avaliação inicial. Ainda neste item, 66,7% dos alunos que não responderam corretamente, apresentaram deslizes quanto à adição de termos com sinais negativos, como ilustra a Figura 35 para a resposta da aluna G.

Figura 35: Resposta da aluna G



Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

Os outros 33,3% contidos no índice de erros, representam o grupo descrito anteriormente que permeia o núcleo dos alunos que permaneceram apontando incompreensão para as propriedades algébricas.

As considerações apontadas para os itens (D) e (E) refletem o mesmo aspecto apresentado ao item anterior, verificando que, com relação a este último, os alunos que na avaliação inicial apresentaram erros quanto o uso dos parênteses em expressões algébricas, deixaram de cometê-lo nesta segunda avaliação. Mantiveram-se na margem das respostas erradas, erros em adição de termos com sinais negativos como o apontado na figura anterior (Figura 35), e apenas um erro aleatório que não se enquadra em nenhuma tipologia.

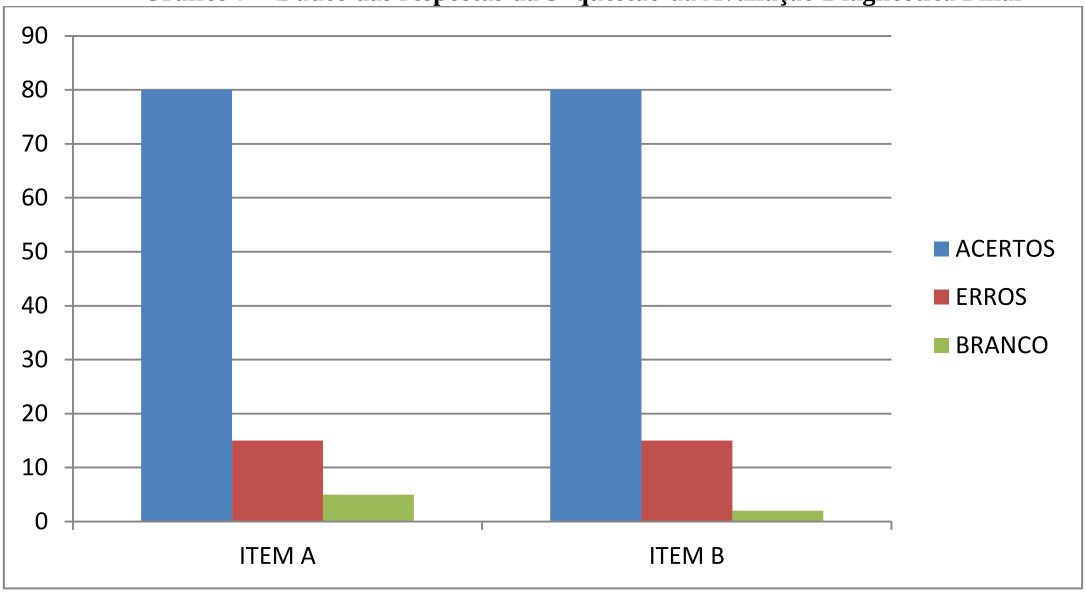
A Tabela 7 e o Gráfico 7 compreendem os dados, em porcentagem, apresentados na questão 3ª da nossa avaliação diagnóstica final.

Tabela 7 – Dados das respostas da 3ª questão da Avaliação Diagnóstica Final

RESPOSTAS/ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)
CERTAS	80	80
ERRADAS	15	15
BRANCO	5	5
TOTAL	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 7 – Dados das respostas da 3ª questão da Avaliação Diagnóstica Final



Fonte: Elaboração da autora

Em contraponto com os dados apresentados na Tabela 3 (p. 50), com a terceira questão da nossa avaliação inicial, a Tabela 7 nos mostra que ocorreu um aumento de 30% e 50% para os itens (A) e (B), respectivamente, com relação aos acertos apresentados nas avaliações diagnósticas. Com esse percentual considerável, consequentemente, o número de erros também sofre uma queda em 35% para ambos os itens. Ainda nesta questão, o número de respostas em branco aumentou para o item (A) e decresceu para o item (B).

Os 15% de alunos que não responderam satisfatoriamente ao item (A) correspondem aos mesmos alunos que não atingiram aos objetivos esperados para o item (B). O mesmo ocorre para o percentual relacionado às respostas em branco.

Dos erros apontados para essa questão, verificou-se que o aluno B apresentou um erro aleatório, que não se enquadra em nenhuma tipologia estudada, constatando assim sua incompreensão com manipulações algébricas. Já as alunas G e J, apesar de terem escrito a expressão correta para o que se pede nos itens (A) e (B), as mesmas não responderam satisfatoriamente a estes itens, visto que as questões solicitavam a escrita do monômio que expressava o perímetro e a área de um retângulo dado. Sendo assim, estas alunas não reduziram a expressão apresentada ao que se pedia, logo suas respostas foram enquadradas nos índices de erros.

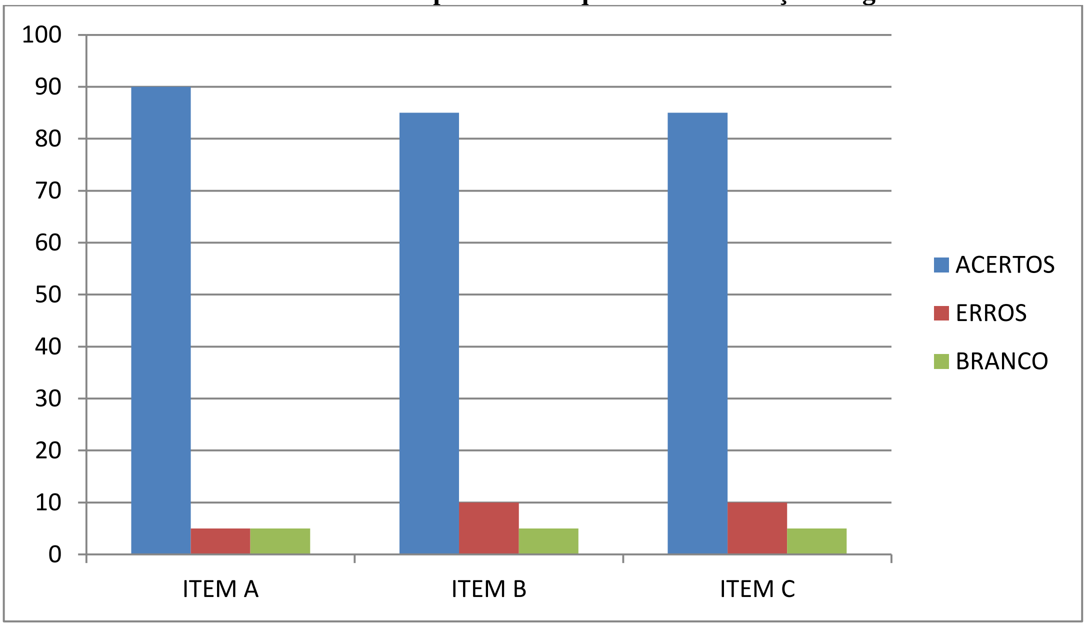
Com a Tabela 8 e o Gráfico 8 apresentamos, estatisticamente, os dados obtidos com a terceira questão da nossa avaliação diagnóstica final.

Tabela 8 – Dados das respostas da 4ª questão da Avaliação Diagnóstica Final

RESPOSTAS/ITENS	ITEM A (%)	ITEM B (%)	ITEM C (%)
CERTAS	90	85	85
ERRADAS	5	10	10
BRANCO	5	5	5
TOTAL	100	100	100

Fonte: Elaboração da autora

Gráfico 8 – Dados das respostas da 4ª questão da Avaliação Diagnóstica Final



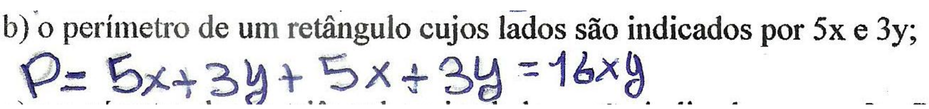
Fonte: Elaboração da autora

Analisando os dados apresentados na Tabela 8 e comparando-os com os apresentados na Tabela 4 (p. 51), podemos verificar que para esta questão o acréscimo quanto ao índice de respostas corretas foi bastante significativo com relação a avaliação diagnóstica inicial. Em conformidade, o índice de respostas erradas e em branco decresceram em todos os itens também com relação a primeira avaliação. É possível observar que os dados indicados na Tabela 8 apresentam certa uniformidade entre os índices de respostas certas, erradas e em branco para todos os itens da quarta questão, isto se explica devido a natureza análoga entre ambos os itens.

Em linhas gerais, o índice de 5% de respostas em branco para todos os itens dessa questão, corresponde a avaliação do aluno N. No índice de erros, a margem de 5% de todos os itens, corresponde ao aluno B, que respondeu a todos estes de modo aleatório não enquadrando-se em nenhuma das tipologias de erros estudadas.

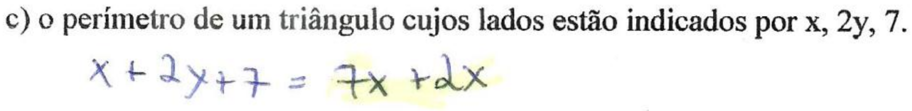
Nos itens (B) e (C), os erros encontrados correspondem aos alunos J e P, respectivamente, como aponta a Figura 36 e Figura 37:

Figura 36: Resposta da aluna J


b) o perímetro de um retângulo cujos lados são indicados por 5x e 3y;
P= 5x+3y+5x+3y =16xy

Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

Figura 37: Resposta do aluno P


c) o perímetro de um triângulo cujos lados estão indicados por x, 2y, 7.
x+2y+7 = 7x +2x

Fonte: Avaliação Diagnóstica Final

Apesar dos alunos J e P apresentarem o erro de reduzir termos não semelhantes para este item, os mesmos não realizaram este erro para todas as outras questões que compunham o mesmo caráter analisado desta avaliação.

Em linhas gerais, podemos observar com essa avaliação que dentre as mudanças ‘mais expressivas’ dos gráficos, verificamos que 60% dos alunos pesquisados saíram do índice de erros na multiplicação entre binômios para o patamar de acertos, 50% dos pesquisados que estavam entre o índice de respostas em branco e erradas, passaram ao nível de acertos para expressões algébricas com o uso de parênteses. Do mesmo modo, 55% dos que estavam entre respostas erradas e em branco, mostraram em todas as questões sua aceitação quanto à legitimidade da uma resposta algébrica não-fechada.

CONCLUSÕES DA PESQUISA

A constituição deste trabalho mostrou quão enriquecedor para a nossa prática docente é o desafio da busca por alternativas metodológicas que possam contribuir para uma aprendizagem com significado aos nossos alunos.

À priori, nosso maior interesse era o de descobrir as potencialidades e limitações do material didático utilizado quanto aos resultados finais verificados com esta pesquisa. Ao longo do nosso trabalho, percebemos a importância na análise dos erros cometidos neste campo de estudo, além da significativa contribuição da História da Matemática para o entendimento destes.

Com a análise das respostas apresentadas pelos alunos, em nossa Avaliação Diagnóstica, e as observações refletidas no momento das aplicações das Sequências Didáticas foi possível verificar que, para o grupo pesquisado, o *algeplan* incluso a um planejamento de atividades bem elaboradas pôde contribuir positivamente para a compreensão da escrita e representação de expressões algébricas, bem como, das manipulações para estas, com adição e multiplicação de termos algébricos.

Todos os alunos que participaram dos encontros para aplicação das sequências didáticas deixaram de cometer erros para a propriedade da adição, como o de somar os expoentes dos termos algébricos, verificando assim que o material didático manipulativo *algeplan* proporcionou a compreensão geométrica dos termos algébricos contemplando sua eficácia na escrita e representação. Ainda, o uso deste material mostrou-se muito útil para a aceitação da legitimidade de uma resposta algébrica não-fechada, bem como, a percepção quanto às distinções da natureza das atividades aritméticas e algébricas.

Apesar do número de erros ter diminuído com relação às questões que explanavam a redução de expressões algébricas, muitos dos alunos continuaram a cometer erros com relações de sinais, para este, como nossa amostra não representou um número tão expressivo, não ficou claro em nossos resultados se os erros cometidos refletem falta de atenção, ou os efeitos das convenções utilizadas quanto às cores do *algeplan* não contribuem significativamente para a compreensão da adição de termos algébricos simétricos.

Como ponto negativo, destacamos que o uso do *algeplan* mostra-se limitado quanto às manipulações em multiplicações algébricas com termos que contenham mais de uma variável, e de grau maior que 1. Para o trabalho com este material o(a) professor(a) deve refletir quanto às questões a serem utilizadas, buscando as que melhor “convém”, visto que algumas expressões, ou resultados das operações com estas, não podem ser representadas com as peças do *algeplan*.

Para a avaliação diagnóstica, apontamos como falha a ausência de itens que contemplassem a multiplicação entre termos algébricos, ambos com duas variáveis distintas, para que assim fosse possível realizar considerações sobre os possíveis erros cometidos anteriores às sequências e, após a aplicação destas, realizarmos a análise quanto aos resultados obtidos.

Sob as percepções da pesquisadora, a partir das aplicações das atividades foi possível constatar que o(a) professor(a) deve estar atento quanto ao uso do material didático manipulativo, visto que em determinados momentos os alunos mostraram-se muito apegados tão somente ao manuseio das peças do *algeplan* e, dessa forma, não refletindo sobre a atividade algébrica e geométrica proposta. Também percebemos que um possível fator contribuinte para o acréscimo expressivo de acertos nos resultados para determinadas questões, seria o baixo número de alunos participantes em cada sessão de aplicação das sequências didáticas, por este promover maior interação entre cada participante e a pesquisadora. Além disso, a ludicidade do material promoveu maior dinamismo, envolvimento, interatividade e estímulo, entre os participantes, com relação ao conteúdo matemático a ser estudado.

Dessa forma, acreditamos que os resultados deste estudo possam possibilitar ao(a) professor(a) de Matemática da Educação Básica subsídios para refletir sobre o uso planejado do material didático *algeplan*, compreendendo suas potencialidades e limitações, e destacamos que as sequências didáticas elaboradas são passíveis de modificação de forma a levar em consideração as potencialidades e limitações do *algeplan*.

REFERÊNCIAS

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da Matemática para o uso em sala de aula:** Álgebra. São Paulo: Atual, 1992.

BOOTH, L R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In:
COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual,1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHALOUH, L.; HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., & MIGUEL, A. (1993). Contribuição para um Repensar... A Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, *4*(1), 78-91

MENDES, J. R. Algumas considerações sobre o ensino de Álgebra com base nos estudos da História da Matemática. **Revista Educação e Ensino**. Bragança Paulista: Núcleo de publicação e Divulgação Científica da PROPEP/EDUSF, v. 4, n. 2. p. 49-57, jul.-dez., 1999.

PICKOVER, C. A.**O livro da matemática**: de Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da História da Matemática. Holanda: Libero, 2011. ISBN: 978-90-8998-165-3.

RÊGO, R. G. Tópicos Especiais em Matemática: Introdução à Linguagem Algébrica *II*. *In*: ASSIS et al. **Licenciatura em Matemática a distância**, volume 5. João Pessoa: UFPB, 2010.

SCHOEN, H. L. A resolução de problemas em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

USISKIN, Z. O que é álgebra da escola média? In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

APÊNDICE A

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Da Professora Orientadora de TCC

À Direção da Escola Colégio Certo

Solicitação de Pesquisa de Campo

Prezado(a) Diretor(a)

Vimos por meio deste, solicitar autorização de Vossa Senhoria para que o(a) aluno(a) **Regina Coelly Mendes da Silva** matrícula **nº 80811090**, do Curso de Licenciatura em Matemática, Campus IV/UFPB realize atividades de pesquisa de campo neste estabelecimento escolar em virtude do Trabalho de Conclusão de Curso por este(a) desenvolvido, intitulado **UTILIZANDO O *ALGEPLAN* COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A COMPREENSÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS** desenvolvido nessa Instituição de Ensino.

O(A) aluno(a) acima referido(a) se compromete em guardar sigilo de fatos confidenciais e ainda deixar a disposição do estabelecimento de ensino observada e/ou Universidade os dados e as análises resultantes deste estudo.

Outrossim, informamos que todas as atividades acima descritas serão desenvolvidas pelo(a) aluno(a), sob a minha orientação, professora efetiva vinculada a Universidade Federal da Paraíba – DCE/CCAE/UFPB.

Contando com a colaboração de vossa Senhoria, subscrevemo-nos.

Respeitosamente,

Rio Tinto, 06 março de 2014.

Cristiane Fernandes de Souza

Cristiane Fernandes de Souza
UFPB / CCAE / DCE
SIAPE 1313600

Professora Orientadora

Eliane B Figueiredo

Diretora da Instituição de Ensino

Autorizado em: 07 / 03 / 2014.
Carimbo

Eliane B Figueiredo
Diretora
Aut. ITE 6874

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Senhor(a),

Sou aluno(a) do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal da Paraíba – Campus IV, Rio Tinto – PB; e, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Cristiane Fernandes de Souza, pretendo realizar uma pesquisa, intitulada: **UTILIZANDO O *ALGEPLAN* COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A COMPREENSÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS**, com o objetivo de propor uma sequência didática que proporcione a compreensão de expressões algébricas (monômios e polinômios) e suas operações com a utilização do material didático *algeplan*. Esta pesquisa tem por finalidade colher dados para a produção do Trabalho de Conclusão de Curso – TCC.

A realização deste estudo só será possível com a sua colaboração. Porém, sua participação é voluntária. Assim, solicito sua autorização e/ou do responsável, para realizar um(a) avaliação diagnóstica e, após a conclusão do mesmo poder apresentar em eventos científicos e publicar em revista científica.

Com relação a sua participação, me comprometo em manter o seu nome em sigilo, bem como os dados confidenciais a serem apresentados e também aceitar a livre decisão do(a) senhor(a) aceitar e participar ou não do estudo, respeitando o seu direito de desistir em qualquer momento da pesquisa, sem nenhum dano e/ou qualquer prejuízo da assistência prestada.

Diante do exposto, agradeço antecipadamente sua atenção e colaboração, estando a sua disposição para qualquer esclarecimento que considere necessário.

Eu, ____, declaro que fui devidamente esclarecido(a) sobre a pesquisa e dou meu consentimento para participar da pesquisa e publicação dos resultados. Estou ciente que receberei uma cópia deste documento.

Rio Tinto, _____/_____/_____

________________________________ ________________________________

Participante do estudo | Responsável pelo participante

____________________________ ______________________________

Pesquisador (licenciando) | Orientadora

APÊNDICE C

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Aluno(a):____

1- Resolva estas operações:
a) $x + x =$

b) $x \cdot x =$

c) $x - x =$

d) $3y + 3y =$

e) $3y \cdot 3y =$

f) $3y^2 - 3y^2 =$

g) $(x + 3y) \cdot (x - 2y) =$

2- Escreva na forma reduzida estes polinômios:
a) $5x + 3y - 2x + 7y =$

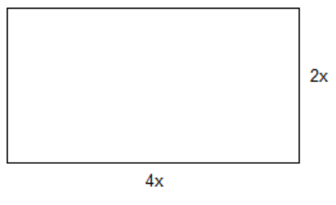
b) $3x + 2x^2 - 5x + x^2 - 3x =$

c) $5y^2 - 2y + 3y^2 - y - 4y =$

d) $7xy - x + y - 2xy + 2x - 5y =$

e) $(3x + 5y) - (6x - y) + (x + 4y) =$

3- A figura abaixo representa um tapete:



a) Escreva o monômio que expressa o perímetro desse tapete.

b) Escreva o monômio que expressa a área desse tapete.

4- Escreva uma expressão algébrica que represente cada situação descrita abaixo:
a) o perímetro de um quadrado cujo cada lado é indicado por 2x;

b) o perímetro de um retângulo cujos lados são indicados por 5x e 3y;

c) o perímetro de um triângulo cujos lados estão indicados por x, 2y, 7.

APÊNDICE D

Sequência didática 1

Reconhecimento das peças / Escrita e Representação Algébrica

Objetivos:

- Explorar e identificar as peças do algeplan (formas e dimensões).
- Representar algebricamente o perímetro e a área de cada peça, a partir das dimensões dadas.
- Construir modelos mentais para representação de expressões algébricas, codificando e decodificando-as com base nas peças do algeplan.

Conteúdo: expressões algébricas; monômios; área; perímetro.
Ano: 8°
Tempo estimado: Três aulas
Material necessário: Conjuntos do algeplan, ficha de atividade, lápis, papel e borracha.

Desenvolvimento:

1º Momento: Iniciaremos a aula dividindo a turma em duplas e distribuindo os conjuntos de algeplan com o material de apoio (ficha de atividades). Será solicitado que os alunos verifiquem o material, percebendo individualmente a composição do conjunto e as características de cada peça (formato e dimensões).

2º Momento: Após a percepção de que cada quadrado possui dimensões pré-estabelecidas - x, y e 1 – será pedido que com o auxílio destas se encontrem as dimensões dos retângulos também presentes no kit, ou seja, as dimensões dos retângulos serão expressas pelos alunos em função da medida do lado de cada quadrado.

3º Momento: A partir da obtenção das dimensões de cada peça, os alunos utilizarão seus conhecimentos prévios para identificar a área e o perímetro de cada figura que compõe o algeplan. Será solicitado o preenchimento de uma tabela com as informações de cada peça (dimensões, perímetro e área).

4º Momento: Com a conclusão dos momentos iniciais, serão propostas situações que levem os alunos a estabelecer uma correspondência entre as peças e as expressões algébricas. Isso poderá ser feito destacando um conjunto quaisquer de peças e pedindo que seja feita a codificação das mesmas na linguagem algébrica. Em seguida promover o processo inverso, apresentando uma expressão algébrica qualquer e solicitando que seja feita a representação daquela expressão com as peças do algeplan.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

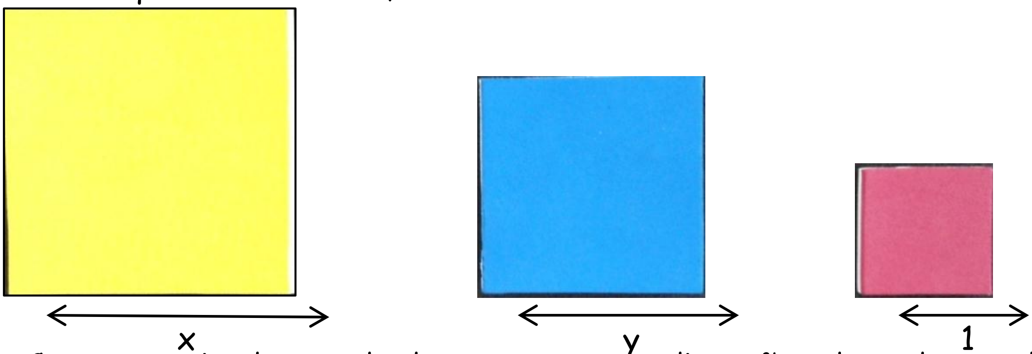
LABORATORIO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM ENSINO DE MATEMÁTICA - LEPEM

OFICINA PEDAGÓGICA

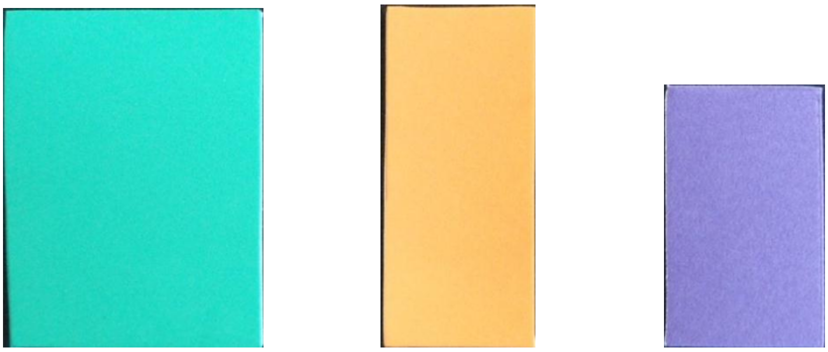
ALGEPLAN: TRABALHANDO PERÍMETROS, ÁREAS E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Atividade 1 – Reconhecimento de peças

Considere os quadrados abaixo, com suas dimensões indicadas:



a) Com o auxílio dos quadrados, encontre as dimensões de cada um dos retângulos abaixo.



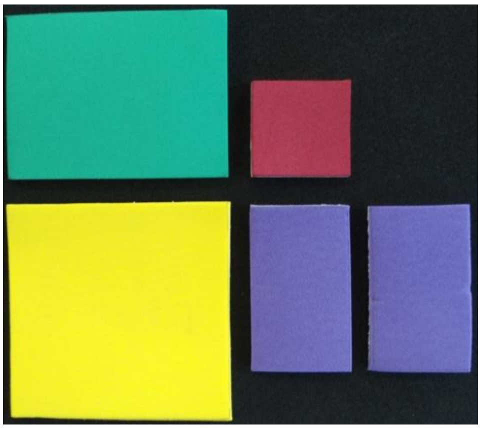
b) Agora que você conhece as dimensões dos quadrados e dos retângulos encontre o **perímetro** e a **área** de cada uma das peças.

c) Com as informações dos itens (a) e (b), complete a tabela a seguir:

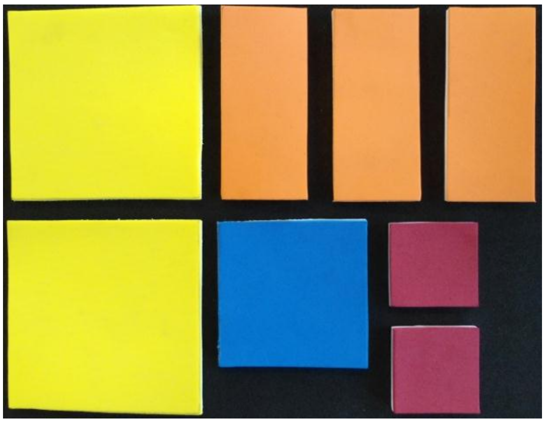
Figura	Dimensões	Perímetro	Área
			
			
			
			
			
			

<u>Atividade 2 — Escrevendo expressões algébricas a partir das figuras</u>

Observe os quadros abaixo formados com peças do *algeplan*.
Escreva a expressão algébrica completa (termo a termo) que representa cada um desses quadros, levando em consideração as peças do *algeplan*:



Quadro 1



Quadro 2

Sequência didática 2

Soma de Monômios e Polinômios

Objetivos:

- Promover a compreensão da propriedade da soma para expressões algébricas, fixando conceitos como redução de termos semelhantes e cancelamento de quantidades opostas.

Conteúdo: expressões algébricas; soma de monômios/polinômios.
Ano: 9°
Tempo estimado: Três aulas
Material necessário: Conjuntos do algeplan, ficha de atividade, lápis, papel e borracha.

Desenvolvimento:

1º Momento: Nesta etapa os alunos iniciarão o processo de operações com monômios e em seguida polinômios. Com nossa mediação, serão expostas algumas considerações sobre a manipulação do material. Tais como: as peças coloridas do material serão identificadas como sendo valores positivos e o verso destas (parte branca) os valores negativos, e que, peças de mesmo tamanho com cores distintas se anulam.
Observação: Ressaltar aos grupos que apesar da convenção adotada com os valores negativos para as peças do algeplan, não existem áreas de regiões com resultados negativos.

2º Momento: Após as orientações com o manuseio das peças, será solicitado que as mesmas sejam aplicadas. Exemplo: retirando um quadrado de lado x, colorido, e uma peça de mesma medida na cor branca, qual o resultado obtido? As questões a serem aplicadas para o andamento desta etapa tenderão a incluir um maior número de peças do algeplan, assim, incorporando as propriedades da soma também para polinômios. Pede-se que o registro seja feito na simbologia algébrica para que posteriormente os grupos possam trabalhar sem o auxílio das peças.

Atividade 1 – Soma de monômios

Para as questões desta atividade você vai precisar das peças do *algeplan*.

> Vamos adotar uma convenção: a frente das peças (parte colorida) será considerada o **valor positivo** de sua representação algébrica, e o verso de cada uma delas (a parte branca) será considerado o **valor negativo**. Positivo e negativo se anulam

De posse das peças do *algeplan*, responda as questões abaixo:

1. Tome **um quadrado de lado y**, **dois retângulos de lado x e y**, e **três quadrados de lado 1**. Escreva a soma das áreas de cada uma das peças. Qual é a expressão algébrica final obtida?

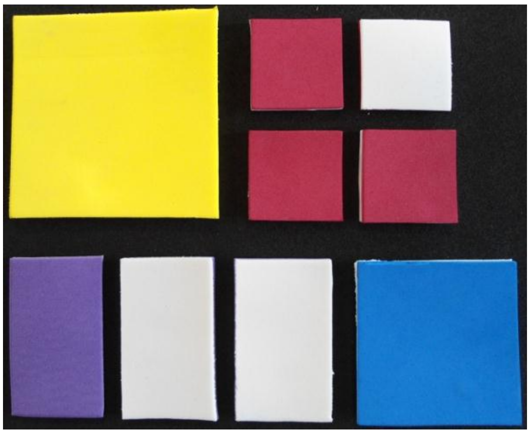
2. Tome **dois quadrados de lado x**, **três retângulos x e y** e **cinco retângulos x e 1**. Escreva a soma das áreas de cada uma das peças. Qual é a expressão algébrica final obtida?

3. Tome o **oposto de dois retângulos de lado x e y**, **três retângulos de lado x e 1**, **o oposto de quatro quadrados de lados 1**. Escreva a soma das áreas de cada uma das peças. Qual é a expressão algébrica final obtida?

4. Tome **um quadrado de lado x**, **dois quadrados de lado y**, sendo **um oposto**, **cinco retângulos de lados x e 1**, sendo **três opostos**, e **três quadrados de lado 1**, sendo **um oposto**. Escreva a soma das áreas de cada uma das peças. Qual é a expressão algébrica final obtida?

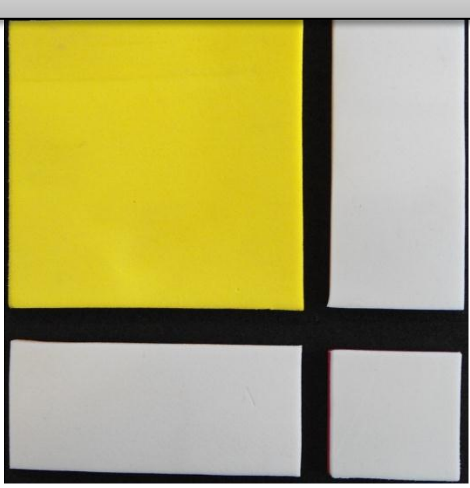
<u>Atividade 2 — Escrevendo e reduzindo expressões algébricas a partir das figuras</u>

Após escrever a expressão algébrica dada, reduza os termos semelhantes.



Quadro 3

Quadro 4



Quadro 5

Sequência didática 3

Montando quadrados e retângulos com expressões algébricas/Multiplicação de monômios e polinômios

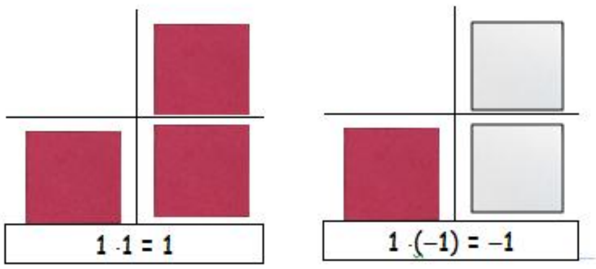
Objetivos:

- Identificar a propriedade multiplicativa através do conceito geométrico de perímetro e área.
- Atribuir significado concreto à propriedade multiplicativa para expressões algébricas.

Conteúdo: expressões algébricas; multiplicação de monômios e polinômios
Ano: 9°
Tempo estimado: Quatro aulas
Material necessário: Conjuntos do algeplan, ficha de atividade, lápis, papel e borracha.

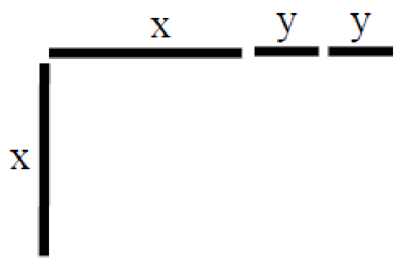
Desenvolvimento:

1º Momento: Para a multiplicação de monômios e/ou polinômios, será estabelecido algumas regras para a utilização das peças, quanto aos sinais (positivo e negativo) e a distribuição destas respeitando a delimitação dos lados das peças a serem multiplicadas (conceito de perímetro e área). Com relação aos sinais, fica estabelecido que peças que multiplicam-se com cores iguais, a peça resultante será colorida, e, o produto de uma peça colorida por uma de cor branca resulta numa peça de cor branca, como na ilustração:

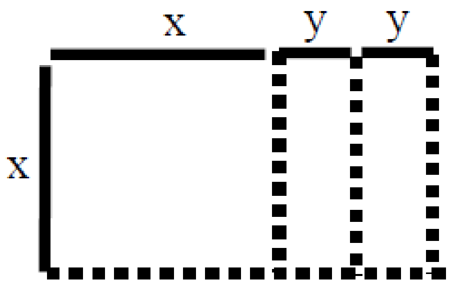


2º Momento: Para a verificação da propriedade distributiva, os alunos serão instruídos a realizar a multiplicação de monômios, de forma a montar possíveis quadrados e/ou retângulos. Exemplo: com as peças y^2+4y+4 é possível formar um quadrado ou retângulo? Se sim, quais as medidas dos lados desta figura? Retomando o conceito de área, será possível perceber que o produto entre a base e a altura resulta das peças que inicialmente foram dispostas.

3º Momento: O processo inverso também será realizado. Como exemplo, para realizar o produto entre as expressões: (x) . (x+2y). Queremos com isso montar um retângulo (determinar sua área), cujos lados equivalem as expressões dadas:



Para isso, os grupos serão orientados a preencher este espaço com peças que respeitem a delimitação de cada peça disposta no esquema. Ou seja:



Os alunos serão estimulados a pensar e utilizar o conceito de área, verificando com o algeplan: Qual a peça possui os lados com a medida x? A peça de área x^2. Do mesmo modo: Que peça possui um lado com medida y e outro com medida x? A referida peça é a de área xy. Constatando assim que o resultado deste produto é: $x^2 + 2xy$.

4º Momento: No último momento desta atividade os alunos trabalharão entre si respondendo a quatro questões da natureza descrita nos momentos iniciais, com o auxílio do algeplan.

Atividade 1 — Montando quadrados e retângulos a partir de expressões algébricas dadas

1. Com as peças do *algeplan*, forme um QUADRADO que represente a expressão:

$$y^2 + 4y + 4$$

Desenhe abaixo o quadrado que você formou.

Existem outras possibilidades de organização das peças do *algeplan* para representar essa mesma expressão? Em caso afirmativo, apresente outras representações.

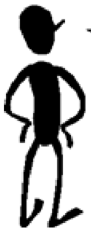
2. Com as peças do *algeplan*, forme um RETÂNGULO que represente a expressão:

$$x^2 + xy - 3x + y + 2$$

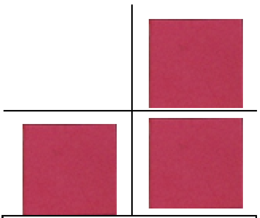
Desenhe abaixo o retângulo que você formou.

Existem outras possibilidades de organização das peças do *algeplan* para representar essa mesma expressão? Em caso afirmativo, apresente outras representações.

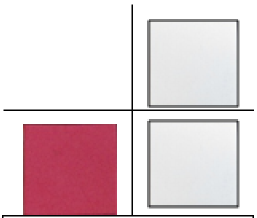
Atividade 2 — Multiplicação de monômios e binômios



Para a multiplicação de monômios utilizando as peças do *algeplan* precisamos estabelecer algumas regras. Veja os exemplos abaixo.

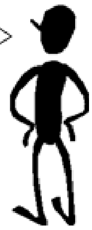


1 ·1 = 1

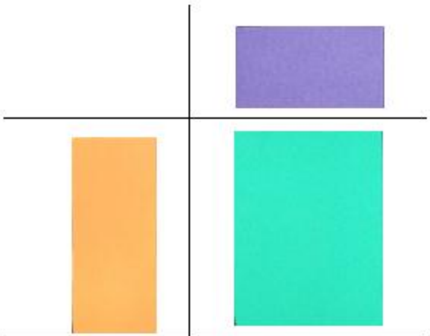


1 ·(−1) = −1

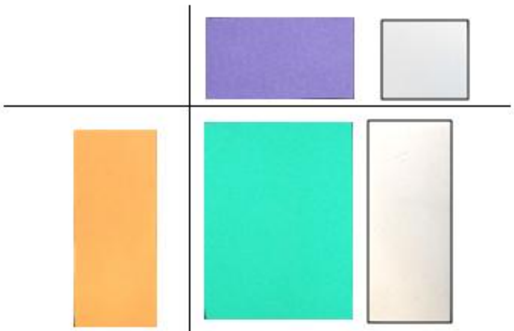
As regras de multiplicação são relacionadas com a cor. Na "multiplicação" de uma peça colorida por outra branca, é atribuída uma peça branca.



Vamos ver outros exemplos:



x ·y = xy



x ·(y − 1) = xy− x

Observe que na "multiplicação" de peças de cor diferente, o resultado é uma peça (ou peças) com os lados correspondentes às peças da "multiplicação".

Agora é com você! Responda as questões abaixo. Para as questões desta atividade você vai precisar das peças do *algeplan*.

1. Tome uma figura de lado x, uma de lado y e uma de lado 1. Obtenha a representação geométrica e algébrica da multiplicação $x \cdot (y + 1)$.

2. Tome uma figura de lado y, o oposto de uma figura de lado x e duas figuras de lado 1. Obtenha a representação geométrica e algébrica da multiplicação $(y + 1) \cdot (1 - x)$.

3. Tome duas figuras de lado y, uma de lado x e o oposto de três figuras de lado 1. Obtenha a representação geométrica e algébrica da multiplicação $2y \cdot (x - 3)$.

4. Tome uma duas figuras de lado x e o oposto de duas figuras de lado 1. Obtenha a representação geométrica e algébrica da multiplicação $(x - 1) \cdot (x - 1)$.

APÊNDICE E

FREQUÊNCIA DAS PARTICIPAÇÕES

ALUNO	PARTICIPAÇÃO NA PRIMEIRA SEQUÊNCIA	PARTICIPAÇÃO NA SEGUNDA SEQUÊNCIA	PARTICIPAÇÃO NATERCEIRA SEQUÊNCIA
A	X	X	X
B	X	-	-
C	X	-	-
D	X	-	X
E	X	X	X
F	X	X	X
G	X	X	X
H	X	X	X
I	X	X	-
J	-	X	X
K	X	X	X
L	X	X	X
M	X	X	X
N	X	-	X
O	X	X	X
P	X	X	X
Q	X	X	X
R	X	X	X
S	X	X	X
T	X	X	X