



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DAVID OLIVEIRA DE FIGUEIREDO

**GRAVIDADE ANÁLOGA EM METAMATERIAIS: UM ELO ENTRE A FÍSICA DA
MATÉRIA CONDENSADA, GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA**

**JOÃO PESSOA
2018**

DAVID OLIVEIRA DE FIGUEIREDO

**GRAVIDADE ANÁLOGA EM METAMATERIAIS: UM ELO ENTRE A FÍSICA DA
MATÉRIA CONDENSADA, GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes

JOÃO PESSOA

2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F475g Figueiredo, David Oliveira de.

Gravidade análoga em metamateriais: um elo entre a física da matéria condensada, gravitação e cosmologia / David Oliveira de Figueiredo. - João Pessoa, 2018.
170 f. : il.

Orientação: Fernando Jorge Sampaio Moraes.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Relatividade. 2. Gravitação. 3. Cosmologia. 4. Metamateriais. I. Moraes, Fernando Jorge Sampaio. II. Título.

UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **David Oliveira de Figueiredo**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos trinta e um dias do mês de julho do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **David Oliveira de Figueiredo**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Fernando Jorge Sampaio Moraes* (UFPB),
7 orientador e presidente da banca examinadora, *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB),
8 *Bertúlio de Lima Bernardo* (UFPB), *Antônio de Pádua Santos* (UFRPE) e *Jonas*
9 *Romero Fonseca de Lima* (UFRPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fernando Jorge
10 Sampaio Moraes comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a
11 palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese
12 intitulado “*Gravidade análoga em metamateriais: um elo entre a física da matéria*
13 *condensada, gravitação e cosmologia*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido
14 pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo,
15 deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em
16 Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta
17 ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa,
18 Paraíba, **31 de julho de 2018**.

19

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
Orientador – PPGF/UFPB

Fernando Moraes

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB

Fábio Leal de Melo Dahia

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
PPGF/UFPB

Bertúlio de Lima Bernardo

Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos
UFRPE

Antônio de Pádua Santos

Prof. Dr. Jonas Romero Fonseca de Lima
UFRPE

Jonas Romero Fonseca de Lima

Dedico este trabalho aos meus avós: Felipe Santos de Oliveira, Maria de Jesus Mendes Oliveira, Celso Vieira de Figueiredo (in memoriam) e Maria de José Nasaré de Figueiredo (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus e aos meus pais: Marcelo Nasaré de Figueiredo e Flora Maria Mendes Oliveira pelo apoio e incentivo incondicional ao longo de todos esses anos de graduação e pós-graduação. Não há como expressar em palavras a gratidão e o amor que sinto por ambos.
- À minha amada esposa Maryele Gonçalves Lima pelo amor, companheirismo, cumplicidade, incentivo e paciência em todos os momentos, sobretudo nos mais difíceis.
- Ao meu irmão Mateus Oliveira de Figueiredo por ser sempre uma inspiração intelectual e pessoal para mim.
- Agradeço aos tios Maria de Socorro e Iremar Gonçalves, assim como os primos Ryan Celso e Rennah Francisco, pelo acolhimento e apoio no período de adaptação dos primeiros meses à mudança de cidade.
- Ao professor Fernando Moraes pela orientação e exemplo de profissionalismo. Suas considerações, ideias, sugestões e contribuições foram de extrema importância no desenvolvimento deste trabalho.
- Agradeço aos colegas de sala e de disciplinas ao longo desses quatro anos, em especial aos amigos Felipe Azevedo, Júlio Brandão, Anderson Alves e Ricardo Luís.
- Aos professores Antônio de Pádua Santos, Bertúlio de Lima Bernardo, Fábio Leal de Melo Dahia e Jonas Romero Fonseca de Lima por comparecerem à banca de avaliação desta tese.
- A todo o corpo docente do departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba.
- A todos os meus familiares e amigos.

“This is heavy Doc!”
(Marty McFly, Back to the Future)

RESUMO

O termo “gravidade análoga” remete a um campo de pesquisa cujo objetivo consiste em investigar análogos dos campos gravitacionais, sob a perspectiva da relatividade geral, em sistemas físicos de outras áreas, almejando assim obter uma melhor compreensão de ambos os sistemas envolvidos. Analogias têm se mostrado importantes na física e na matemática, pois, uma analogia tomada de forma meticulosa para um problema específico pode ser capaz de sugerir caminhos inesperados para uma possível solução do problema primitivo. Diante disso, exemplos de modelos análogos gravitacionais datam desde os primórdios da relatividade geral. Com o desenvolvimento da nanotecnologia, uma alternativa para a obtenção de modelos gravitacionais e cosmológicos análogos é através do estudo da propagação luminosa em metamateriais. Estes são construídos artificialmente, de modo que suas propriedades eletromagnéticas podem ser modeladas de forma cuidadosa, pois derivam dessa mesma estrutura artificial. Em virtude dessa liberdade, tornou-se possível emular um comportamento temporal em uma das três coordenadas espaciais, simulando, por exemplo, um espaço-tempo de $2 + 1$ dimensões. Neste trabalho, mediante um estudo teórico em metamateriais hiperbólicos e eletrônicos, estabelecemos modelos análogos para dois sistemas: o universo compacto de Milne, o qual representa um modelo simples de singularidade cósmica em modelos cosmológicos cíclicos, e a transição de assinatura entre um espaço-tempo de Minkowski e um espaço-tempo kleiniano, sendo este último caracterizado por ser dotado de duas coordenadas do tipo tempo. Em ambos os casos, mediante uma análise via óptica ondulatória, veremos como o comportamento de um campo escalar de Klein-Gordon pode ser reproduzido nos meios materiais correspondentes. Adicionalmente, no contexto do universo de Milne, mostraremos que o comportamento clássico, isto é, as geodésicas do tipo tempo e do tipo espaço também são reproduzidas no metamaterial pelas trajetórias descritas pelos raios luminosos.

Palavras-chave: Relatividade. Gravitação. Cosmologia. Metamateriais.

ABSTRACT

The term “analogous gravity” refers to a research programme whose purpose is to investigate analogues of gravitational fields, from the perspective of general relativity, in physical systems of other areas, aiming to obtain a better understanding of both systems involved. Analogies have proved important in physics and mathematics, for an analogy taken meticulously to a specific problem may be able to suggest unexpected routes to a possible solution. Thus, examples of analogous gravitational models date back to the beginnings of general relativity. With the development of nanotechnology, an alternative to obtaining similar gravitational and cosmological models is through the study of light propagation in metamaterials. These are artificially constructed, so that their electromagnetic properties can be carefully modeled because they derive from the same artificial structure. By virtue of this freedom, it has become possible to emulate a temporal behavior in one of the three spatial coordinates, simulating, for example, a $2 + 1$ spacetime. In this work, through a theoretical study in hyperbolic and electronic metamaterials, we establish analogous models for two systems: the compact Milne universe, which represents a simple model of cosmic singularity in cyclic cosmological models, and the signature transition between a Minkowski spacetime and a Kleinian spacetime, the latter being characterized by being endowed with two time-type coordinates. In both cases, through an analysis in the framework of wave optics, we will see how the behavior of a Klein-Gordon scalar field can be reproduced in the corresponding material medium. In addition, in the context of the Milne universe, we will show that the classical behavior, that is, the timelike and spacelike geodesics can also be reproduced in the metamaterial by the trajectories described by the light rays.

Keywords: Relativity. Gravitation. Cosmology. Metamaterials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama ilustrando a refração negativa numa interface entre um meio de índice positivo e um de índice negativo. Note que no meio de índice negativo, o vetor de onda (\mathbf{k}) e o vetor de Poynting (\mathbf{S}) são anti-paralelos, ao contrário do meio positivo, onde ambos são paralelos.	17
Figura 2 – Representação pictórica da estrutura atômica (molecular) e dos meta-átomos. (a) Arranjo periódico de átomos cujos raios e as distâncias interatômicas, representadas por d , entre os mesmos são muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente, λ . (b) Metamateriais são compostos por estruturas artificiais, denominadas meta-átomos, cujas dimensões são muito menores que o comprimento de onda da radiação. Os meta-átomos são os responsáveis pelas respostas aos campos eletromagnéticos sob os quais o metamaterial é submetido.	17
Figura 3 – Diagrama ilustrando o espaço paramétrico eletromagnético. O eixo horizontal (vertical) corresponde à permissividade (permeabilidade) elétrica (magnética) ϵ (μ). A linha pontilhada horizontal representa os materiais não magnéticos com $\mu = 1$	19
Figura 4 – Configuração entre os referenciais inerciais O e O' . Os eixos de ambos os referenciais são paralelos entre si e o vetor velocidade relativa \mathbf{u} é paralelo ao eixo x	23
Figura 5 – Trajetória no espaço-tempo de uma partícula através do cone de luz. A região interior ao cone representa o passado ($t < 0$) e futuro ($t > 0$) absolutos da partícula, enquanto a região exterior é denominada <i>alhures absoluto</i> . A palavra “absoluto” significa que o referido conjunto de eventos é o mesmo em todos os referenciais, devido à invariância do intervalo. Um ponto no interior (exterior) do cone de luz possui uma separação em relação à origem do tipo tempo (espaço).	25
Figura 6 – Diagrama bidimensional do espaço-tempo de Minkowski ilustrando a construção do sistema de coordenadas (x^+, x^-) através de retas da forma $x^\pm = C^\pm$. Na figura, as constantes C^\pm assumem valores inteiros no intervalo $[-7, -1]$. A hipérbole $x^+ x^- = 1$ caracteriza um lugar geométrico de pontos no espaço-tempo onde o intervalo é invariante.	33

Figura 7 – Diagrama bidimensional do espaço-tempo de Minkowski conforme o sistema de coordenadas (x^+, x^-) . A reta azul representa o eixo temporal ordinário ct , ao passo que de cor laranja representa o eixo espacial x . As curvas representam as hipérbolas $x^+x^- = \pm 1$, onde, uma transformação de Lorentz, aplicada sobre um ponto pertencente a qualquer uma delas, ocasiona um deslocamento do mesmo ao longo da respectiva curva. Por exemplo, para um ponto na hipérbole $x^+x^- = 1$, o deslocamento se dá para a esquerda (direita) se $\zeta > 0$ ($\zeta < 0$).	34
Figura 8 – Esquema representando o procedimento da troca de sinais luminosos entre os observadores A e B . A emissão de A ocorre no evento X , a reflexão por B em $X + dx_{A \rightarrow B}^0$, e a recepção final de A em $X + dx_{A \rightarrow B}^0 + dx_{B \rightarrow A}^0$	59
Figura 9 – “Paralelogramo” infinitesimal $OACB$ onde é efetuado o transporte paralelo do quadrivetor V^μ ao longo das vias OAC e OBC	64
Figura 10 – Partículas do fluido num espaço bidimensional (x^1, x^2) , rotuladas por (R^1, R^2) . Apesar das partículas se moverem no sistema de coordenadas (x^1, x^2) , seus rótulos mantêm-se inalterados, como num jogo de sinuca ou bilhar, onde as bolas se movem sobre a mesa mas seus números permanecem os mesmos.	74
Figura 11 – Necessidade de uma singularidade inicial: a reta tangente à curva $a(t)$ de inclinação \dot{a}_0 determina um limite superior para a idade do universo, dado que $(t_0 - t_{\text{sing}}) < a_0/\dot{a}_0$	88
Figura 12 – Digrama de Minkowski bidimensional (T, R) ilustrando as coordenadas de Milne (t, χ) . As curvas de cor laranja representam valores constantes de χ ao passo que as azuis retratam o tempo cósmico t . A reta vermelha, fronteira do cone de luz com vértice na origem, equivale ao valores $t = 0$ e $\chi = +\infty$ nas coordenadas de Milne.	90
Figura 13 – Configuração dos vetores de campo num cristal anisotrópico: como consequência das equações de Maxwell, os vetores $\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{S}$ residem no mesmo plano, porém, \mathbf{k} e \mathbf{S} em geral não são paralelos. Além disso, os campos \mathbf{H} e \mathbf{B} são ortogonais a todos os demais. Os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} representam as velocidades de fase e de raio, respectivamente.	95
Figura 14 – Superfícies determinadas pelo vetor índice de refração N para cristais do tipo (14a) óptico-negativo e (14b) óptico-positivo.	97
Figura 15 – Partes real e imaginária da constante dielétrica $\epsilon(\omega)$ na vizinhança de uma frequência de ressonância ω_0 . A região de dispersão anômala é também o intervalo de frequência onde ocorre absorção.	108
Figura 16 – Superfícies de isofrequência $\omega(\mathbf{k}) = \text{constante}$ características dos metamateriais de (a) tipo I e de (b) tipo II.	112

- Figura 17 – Protótipo de uma estrutura em multicamada: a construção se dá pelo empilhamento alternado de camadas metálicas (ϵ_m) e dielétricas (ϵ_d). As constantes dielétricas resultantes efetivas são denotadas por ϵ_{\parallel} e ϵ_{\perp} 118
- Figura 18 – Condições de contorno sobre os vetores de campo. Para o campo elétrico, a continuidade da componente tangencial $E^{(t)} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ é obtida integrando $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da espira de comprimento l e altura desprezível, e, atentando que o fluxo magnético sobre a espira pode ser negligenciado. Já para \mathbf{D} , podemos obter a continuidade da componente normal $D^{(n)} = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ mediante a aplicação do teorema da divergência sobre a “caixa de pílulas”, cuja área da base é A e possui altura desprezível. 118
- Figura 19 – Protótipo de um metamaterial estruturado por nanofios metálicos: as varetas metálicas de constante dielétrica ϵ_{\parallel} são imersas numa matriz dielétrica hospedeira, cuja constante é ϵ_{\perp} 120
- Figura 20 – Setor circular plano que pode ser transformado num cone removendo-se a fatia angular δ . O déficit angular $\delta = 2\pi(1 - \sin\theta)$ reduz o intervalo do ângulo χ para $[0, 2\pi \sin\theta)$ 126
- Figura 21 – Diagrama de Minkowski ilustrando o universo \mathcal{M}_C (região hachurada), delimitado pela identificação entre o eixo temporal T e a reta azul $X = T \operatorname{tgh} 2\pi\beta$. A relação de equivalência determinada por B permite “reduzir” todos os pontos de \mathcal{M} aos da região destacada. As retas $X = \pm T$ representam os eixos coordenados x^{\pm} , enquanto as hipérbolas são curvas onde $x^+x^- = \text{constante}$. 127
- Figura 22 – Cone duplo referente às equações (4.5) e (4.13) para o espaço euclidiano e o espaço de Minkowski tridimensional, respectivamente. A metade superior (inferior) corresponde aos valores $\bar{r}, t > 0$ ($\bar{r}, t < 0$). 128
- Figura 23 – Gráfico para a equação geodésica (4.33) com t em unidades de t_0 . As curvas azul e verde (laranja e vermelha) correspondem à trajetórias no cone superior (inferior). A seta do tempo apontando para cima ilustra que tempo sempre aumenta, o que significa que no primeiro e terceiro quadrantes o ângulo ϕ diminui com o tempo ($\ell < 0$), ao passo que no segundo e quarto quadrantes ele aumenta com o tempo ($\ell > 0$). 130
- Figura 24 – Geodésicas do tipo tempo (espirais de Poincaré), correspondentes às curvas da Figura 23. O tempo radial t está expresso em unidades de t_0 , e, $\beta = 1/3$. As curvas azul e verde (laranja e vermelha) estão se afastando (indo em direção) da (à) singularidade. Ademais, partículas percorrendo as trajetórias do primeiro (terceiro) e segundo (quarto) quadrantes estão espiralando no sentido horário (anti-horário). O ponto branco na origem serve apenas para enfatizar que analiticamente as curvas não tocam a singularidade. 132

Figura 25 – Gráfico para a equação geodésica (4.43) com t em unidades de t_0 . A curva azul (laranja) corresponde ao cone superior (inferior). Um táquion, oriundo da singularidade pela esquerda do gráfico ($\ell > 0$), acelera até atingir o seu tempo limite, t_0 , donde então desacelera em direção à singularidade, sendo por fim aniquilado. A destruição ocasiona a criação de um táquion na folha oposta do cone, que irá vivenciar o mesmo processo do seu antecessor.	134
Figura 26 – Geodésicas do tipo espaço (espirais de Poinot) correspondentes às curvas da Figura 25. O tempo radial t está expresso em unidades de t_0 , e, $\beta = 1/3$. As trajetórias fechadas mostram, que numa mesma folha do cone, os táquions espiralam tanto para fora quanto para dentro da singularidade.	134
Figura 27 – Estruturas de multicamada possíveis para um meio hiperbólico com geometria cilíndrica. O diretor (eixo óptico) $\hat{\mathbf{d}}$, em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , é dado por $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\rho}$ em (a) e $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\phi}$ em (b). Ambas as estruturas são delimitadas por um raio mínimo, $\rho_{\text{mín}}$, e um raio máximo, $\rho_{\text{máx}}$	136
Figura 28 – Diagrama de espaço-tempo ilustrando a estrutura dos cones de luz lorentziano ($z < 0$) e kleiniano ($z > 0$). Os entes v_L^β e v_K^β representam típicos quadrivetores do tipo tempo.	147
Figura 29 – (a) Tunelamento da parte real do campo escalar ϕ , através da porção kleiniana de extensão l : a curva azul representa as ondas incidente e transmitida, enquanto a curva laranja ilustra a onda refletida. (b) Gráfico mostrando a função de onda total para $z < 0$ (incidente+refletida). A corrente de probabilidade é conservada, pois nas equações (4.149) e (4.152) temos $ A ^2 + D ^2 = 1$. Em ambos os gráficos, z está em unidades de p^{-1}	150
Figura 30 – Elipsoide de revolução conforme a relação de dispersão (4.177) para os elétrons balísticos.	154
Figura 31 – Comportamento da parte real da função de onda $\Psi(\phi)$ para uma transição de massa efetiva (assinatura) em $z = 0$. A onda incidente (curva azul) é inteiramente refletida (curva laranja) com uma diferença de fase de $3\pi/2$. No gráfico, z está em unidades de p^{-1}	158
Figura 32 – (a) Tunelamento da parte real da função de onda $\Psi(\phi)$ pelo interior do metamaterial eletrônico (espaço-tempo kleiniano) de extensão l : comparando com a Figura 29, vemos que as ondas refletidas (curvas laranjas) apresentam uma diferença de fase de π . (b) Gráfico da função de onda total, ilustrando o “bico” em $z = 0$. Em ambos os gráficos, z está em unidades de p^{-1}	159
Figura 33 – Gráfico ilustrando os coeficiente de reflexão (R) e transmissão T como funções do comprimento da parede, l (em unidades de p^{-1}). Como é possível constatar, a corrente de probabilidade é conservada.	160

Figura 34 – Tempo de tunelamento dos elétrons balísticos (campo escalar) como função do comprimento da parede (espaço-tempo kleiniano), l (em unidades de p^{-1}). A curva azul ilustra o comportamento das funções (4.226) e (4.228). A curva laranja corresponde ao caso em que a parede (espaço-tempo kleiniano) está ausente, onde v_g é dada por $\hbar p/|m_2|$ para os elétrons balísticos e pc^2/ω para o campo ϕ . No gráfico, l está em unidades de p^{-1} e Δt em unidades de $|m_2|/\hbar p^2$. 161

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	O que São Metamateriais?	15
1.2	O Espaço Paramétrico Eletromagnético	18
2	RELATIVIDADE, GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA	21
2.1	Relatividade Especial	21
2.1.1	<i>Transformação de Lorentz</i>	22
2.1.2	<i>Intervalo</i>	24
2.1.3	<i>Grupo de Lorentz</i>	27
2.1.3.1	<i>Transformação de Lorentz como uma “Rotação” no Espaço-Tempo</i>	31
2.1.4	<i>Vetores e Tensores no Espaço-Tempo</i>	34
2.1.4.1	<i>Quadrivelocidade e Quadriaceleração</i>	38
2.1.5	<i>Dinâmica da Partícula</i>	39
2.1.6	<i>O Tensor Energia-Momento</i>	43
2.2	Relatividade Geral	48
2.2.1	<i>O Princípio da Equivalência</i>	48
2.2.2	<i>O Princípio da Covariância Geral</i>	53
2.2.3	<i>Distâncias e Intervalos de Tempo</i>	57
2.2.4	<i>A Derivada Covariante</i>	60
2.2.5	<i>O Tensor de Curvatura</i>	63
2.2.6	<i>A Ação de Einstein-Hilbert e as Equações de Campo da Relatividade Geral</i>	66
2.2.7	<i>Sistema de Coordenadas Síncrono</i>	73
2.3	Cosmologia	77
2.3.1	<i>Espaços de Curvatura Constante</i>	77
2.3.2	<i>A métrica de Friedmann-Robertson-Walker</i>	79
2.3.3	<i>Os Universos de Friedmann</i>	83
2.3.4	<i>O Universo de Milne</i>	88
3	ÓPTICA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS. CARACTERÍSTICAS DA DISPERSÃO ELETROMAGNÉTICA. METAMATERIAIS HIPERBÓLICOS	91
3.1	Propagação da Luz em Meios Anisotrópicos	91
3.1.1	<i>A Equação de Fresnel</i>	93
3.1.2	<i>Ondas Ordinárias e Extraordinárias</i>	96
3.1.3	<i>O Princípio de Fermat e a Trajetória da Componente Extraordinária da Luz</i>	98
3.1.4	<i>A Analogia Óptico-Geométrica</i>	101
3.2	Dispersão da Frequência em Dielétricos, Condutores e Plasmas	105
3.2.1	<i>Um Modelo Simples para $\epsilon(\omega)$, Dispersão Anômala e Absorção Ressonante</i>	105
3.2.2	<i>Comportamento em Frequências Baixas, Condutividade Elétrica</i>	108
3.2.3	<i>Limite de Altas Frequências, Frequência de Plasma</i>	110

3.3	Metamateriais Hiperbólicos	111
3.3.1	<i>Obtenção do Espaço-Tempo de Minkowski 2+1 Dimensional Mediante um Meio Hiperbólico</i>	113
3.3.2	<i>Principais Estruturas para os Meios Hiperbólicos</i>	117
3.3.2.1	<i>Construção de um Meio Hiperbólico Mediante Multicamadas</i>	117
3.3.2.2	<i>Construção de um Meio Hiperbólico Mediante Nanofios Metálicos</i>	119
4	APLICAÇÕES E RESULTADOS	124
4.1	Metamateriais Hiperbólicos e o Universo de Milne Compacto	124
4.1.1	<i>O Universo de Milne Compacto, \mathcal{M}_C</i>	125
4.1.2	<i>Movimento de uma Partícula Clássica no \mathcal{M}_C</i>	128
4.1.3	<i>Um Protótipo de Metamaterial para o Universo \mathcal{M}_C</i>	134
4.1.4	<i>Emulação do Campo de Klein-Gordon no \mathcal{M}_C</i>	140
4.2	Metamateriais Eletrônicos e o Espaço-Tempo Kleiniano	146
4.2.1	<i>Propagação de um Campo de Klein-Gordon Através de uma Mudança de Assinatura</i>	147
4.2.2	<i>Um Modelo de Metamaterial Eletrônico</i>	150
4.2.3	<i>Transição de Assinatura Descontínua</i>	154
4.2.4	<i>Junção Simples e o Efeito Refletor</i>	155
4.2.5	<i>Tunelamento pelo Interior de uma Parede Kleiniana</i>	158
5	CONCLUSÃO	162
	REFERÊNCIAS	164

1 INTRODUÇÃO

1.1 O que São Metamateriais?

Grande parte dos fenômenos e dispositivos eletromagnéticos resultam da interação entre onda e matéria. Nesse sentido, produzir uma funcionalidade eletromagnética requer necessariamente a elaboração de estruturas que, por meio de sua interação com as ondas e campos, gerem um efeito previamente estabelecido e desejado. Uma maneira possível de atingir tal façanha consiste na fabricação meticulosa de estruturas artificiais bem arranjadas, cuja unidade fundamental, ou célula unitária, possui dimensões na chamada escala do *sub-comprimento de onda*, isto é, tem medidas inferiores ao comprimento de onda da radiação com a qual interagem. Diante disso, apesar do meio ser altamente não homogêneo na escala atômica ou molecular, do ponto de vista eletromagnético essas imperfeições são completamente negligenciáveis, de maneira que as respostas eletromagnéticas do meio podem ser expressas em termo de parâmetros efetivos. Além disso, as propriedades físicas das células unitárias se devem principalmente ao modo como foram confeccionadas e não às propriedades intrínsecas de seus componentes internos. Materiais engenhadados artificialmente, dotados dessas características, são denominados *metamateriais*¹. O termo “metamaterial”, apareceu pela primeira vez na literatura em 2000, numa publicação que apresentava um sistema formado por anéis ressonantes dispostos numa rede periódica, capaz de exibir simultaneamente uma permissividade elétrica ($\epsilon_0\epsilon$) e uma permeabilidade magnética ($\mu_0\mu$) negativas [1]². Apesar da comprovação experimental ter sido deveras tardia, meios como esse haviam sido estudados sob a perspectiva teórica mais de trinta anos antes pelo físico russo V. G. Veselago [2].

Sistemas físicos com valores negativos de ϵ e μ são caracterizados por possuírem um índice de refração negativo, sendo esse fato de fácil constatação. Portanto, considere uma onda plana monocromática propagando-se num meio homogêneo e isotrópico. As componentes elétrica e magnética são da forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, respectivamente, onde \mathbf{k} é o vetor de onda e ω é a frequência angular. Se não há cargas e correntes no meio, as equações de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

juntamente com as relações constitutivas,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (1.4)$$

¹ O prefixo “meta” ($\mu\epsilon\tau\alpha$ no Grego) significa “além”, de modo que o termo “metamaterial” designa um sistema que está além dos materiais ordinários.

² Neste trabalho, ϵ (μ) denota a permissividade (permeabilidade) elétrica (magnética) relativa.

podem ser expressas na forma

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

Logo, se $\epsilon, \mu < 0$, das equações (1.5) e (1.6) podemos concluir que os vetores \mathbf{k}, \mathbf{E} e \mathbf{H} formam um sistema de mão esquerda, em contraste com o caso tradicional $\epsilon, \mu > 0$, onde formam um sistema de mão direita. Como consequência, o vetor de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ é anti-paralelo ao vetor \mathbf{k} .

Tomando o rotacional da equação (1.1), vem que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.7)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e $N^2 = \epsilon \mu$ é o quadrado do índice de refração. Então,

$$N = \pm \sqrt{|\epsilon| |\mu|}. \quad (1.8)$$

De acordo com [2], o sinal correto na expressão anterior deve preservar a condição de causalidade. Para qualquer meio real, isto é, não isento de perdas, tanto ϵ quanto μ são quantidades complexas dotadas de uma parte imaginária positiva, mesmo que seja pequena. Sendo assim, tomemos $\epsilon = -1 + i\delta_1$ e $\mu = -1 + i\delta_2$, onde $\delta_1, \delta_2 \ll 1$. Substituindo na expressão (1.8), resulta em

$$N = \pm \sqrt{(-1 + i\delta_1)(-1 + i\delta_2)} = \pm \sqrt{(1 - \delta_1 \delta_2) - i(\delta_1 + \delta_2)} \approx \pm \left[1 - \frac{i(\delta_1 + \delta_2)}{2} \right]. \quad (1.9)$$

De acordo com a condição de causalidade, a parte imaginária de N deve ser positiva. Portanto, o sinal de menos deve ser escolhido na expressão anterior.

Devido a essas duas propriedades exóticas, isto é, a configuração dos vetores $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ e o fato do índice de refração N ser negativo, materiais onde $\epsilon, \mu < 0$ são denominados *materiais de mão esquerda*, ou, *materiais de índice negativo*. Como discutido em [2], esses materiais dão origem a vários fenômenos contra-intuitivos. Por exemplo, considere o caso da refração da luz, na passagem de um meio usual com índice de refração positivo ($\epsilon_i, \mu_i, N_i > 0$) para um meio com índice de refração negativo ($\epsilon_r, \mu_r, N_r < 0$). Portanto, um pequeno algebrismo com a lei de Snell nos revela que

$$N_i \sin \theta_i = N_r \sin \theta_r = |N_r| \sin(-\theta_r). \quad (1.10)$$

Donde, concluímos que o ângulo de refração é negativo quando os meios possuem índices com sinais opostos, o que é uma propriedade no mínimo notável (veja a Figura 1). Outros exemplos incluem versões reversas do efeito Doppler e da radiação Cherenkov [3].

O propósito da discussão acima sobre materiais de mão esquerda é que eles constituem o primeiro tipo de metamaterial. Ademais, nos primórdios das pesquisas em metamateriais, os estudos eram tão focados em materiais de índice negativo, que os termos “metamateriais” e “materiais de mão esquerda” eram tidos como sinônimos [1, 4].

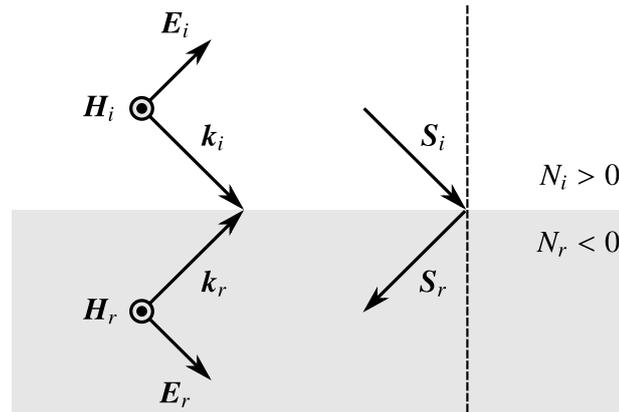


Figura 1 – Diagrama ilustrando a refração negativa numa interface entre um meio de índice positivo e um de índice negativo. Note que no meio de índice negativo, o vetor de onda (\mathbf{k}) e o vetor de Poynting (\mathbf{S}) são anti-paralelos, ao contrário do meio positivo, onde ambos são paralelos.

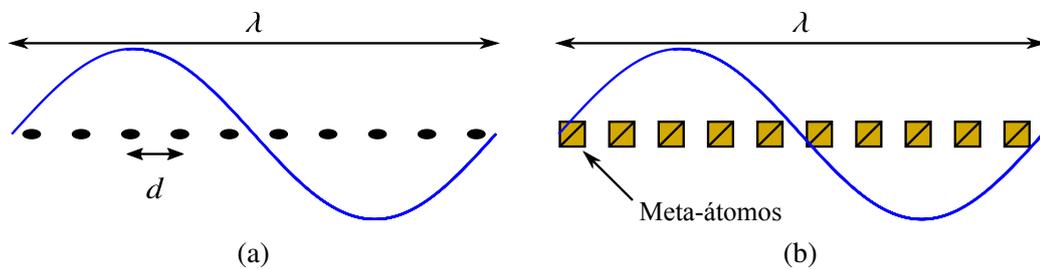


Figura 2 – Representação pictórica da estrutura atômica (molecular) e dos meta-átomos. (a) Arranjo periódico de átomos cujos raios e as distâncias interatômicas, representadas por d , entre os mesmos são muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente, λ . (b) Metamateriais são compostos por estruturas artificiais, denominadas meta-átomos, cujas dimensões são muito menores que o comprimento de onda da radiação. Os meta-átomos são os responsáveis pelas respostas aos campos eletromagnéticos sob os quais o metamaterial é submetido.

O advento da nanotecnologia possibilitou a fabricação de estruturas cada vez mais sofisticadas e em escalas menores, permitindo que a pesquisa em metamateriais florescesse, indo muito além de materiais com índice de refração negativo. Para citar alguns exemplos, metamateriais possuem aplicações em formação de imagem e sistemas ópticos [5, 6], mantos de invisibilidade [7, 8], sensores biológicos [9], e guias de onda [10]. Como consequência, o conceito de metamaterial se tornou nebuloso, de modo que ainda não existe uma definição precisa e isenta de ambiguidades [11]. Todavia, para os nossos propósitos, devemos assimilar que metamateriais são, em sua maioria³, moldados pelo homem. Suas unidades estruturais, denominadas *meta-átomos*, devem ser substancialmente menores do que o comprimento de onda em questão. Não só isso, a distância média entre dois meta-átomos também precisa estar na escala do sub-comprimento de onda, a fim de que a radiação não “enxergue” as imperfeições do meio, sendo este homogêneo do ponto de vista eletromagnético (veja a Figura 2).

³ É importante ressaltar que, em alguns casos o comportamento de determinados metamateriais é encontrado na natureza. Como exemplo, a estrutura ocular de certas lagostas podem exibir refração negativa [12].

1.2 O Espaço Paramétrico Eletromagnético

No eletromagnetismo, a permissividade elétrica (constante dielétrica) ϵ e a permeabilidade magnética μ são os dois parâmetros fundamentais que caracterizam as propriedades eletromagnéticas de um meio [13]. Fisicamente, a permissividade (permeabilidade) descreve como um campo elétrico (magnético) afeta e é afetado por um meio, onde este último efeito é determinado pela característica de polarização do material em resposta ao campo elétrico (magnético). Sendo assim, é costume classificar os materiais quanto aos seus valores de ϵ e μ no denominado *espaço paramétrico eletromagnético*, de tal forma que todas as combinações possíveis de ϵ e μ podem ser inclusas (veja a Figura 3). Materiais transparentes convencionais, cujos valores de ϵ e μ são ambos positivos, se encontram no primeiro quadrante⁴. Um valor negativo de ϵ (μ), indica que a direção do campo elétrico (magnético) induzido dentro do material está em direção oposta a do campo incidente. Os metais na faixa do espectro visível, e, materiais ferromagnéticos em frequências próximas a um pico de ressonância, são exemplos de meios com valores negativos de ϵ e μ , respectivamente. Meios como esses, pertencentes ao segundo e quarto quadrantes, não suportam a propagação de ondas eletromagnéticas, pois, como um dos dois parâmetros é negativo, o índice de refração é puramente imaginário, donde resulta uma onda evanescente. Vale ressaltar que, no domínio da óptica, todos os materiais convencionais encontram-se numa vizinhança muito próxima da reta horizontal, $\mu = 1$ [3].

Portanto, a pesquisa em metamateriais reside, essencialmente, na exploração do espaço paramétrico eletromagnético. O grande foco da comunidade científica consiste em: fabricar materiais localizados em regiões do espaço paramétrico que, apesar de não serem proibidas pelas equações de Maxwell, não são observadas nos meios convencionais. Naturalmente, pesquisas teóricas são desenvolvidas em conjunto, no sentido de tirar vantagem dessas regiões, até então inexploradas, objetivando ter um controle mais aprimorado das ondas eletromagnéticas. Como exemplo, o progresso em torno dos metamateriais ópticos possibilitou o distanciamento da linha horizontal não magnética, $\mu = 1$. Além disso, o terceiro quadrante do espaço paramétrico tornou-se acessível graças aos materiais de índice negativo [11].

Note que, até o momento consideramos os parâmetros eletromagnéticos ϵ e μ como grandezas escalares. Logo, do ponto de vista eletromagnético, os meios são isotrópicos, homogêneos e lineares. Caso exista anisotropia, a permissividade (permeabilidade) elétrica (magnética) deve ser caracterizada por um tensor, denotado por ϵ_{ij} (μ_{ij}) [14]. Materiais desse tipo, abrem caminho para acessar o segundo e quarto quadrantes do espaço paramétrico da Figura 3, pois, nesses casos, a propagação de ondas eletromagnéticas é suportada pelo meio desde que, pelo menos uma componente, tanto de ϵ_{ij} , quanto de μ_{ij} , seja positiva [15].

Seguindo essa linha de metamateriais anisotrópicos, um dos ramos de destaque é a *ótica de transformação* [16], que consiste no estudo de materiais portadores de uma propriedade

⁴ Neste trabalho adotamos a numeração dos quadrantes da mesma forma como no círculo trigonométrico usual.

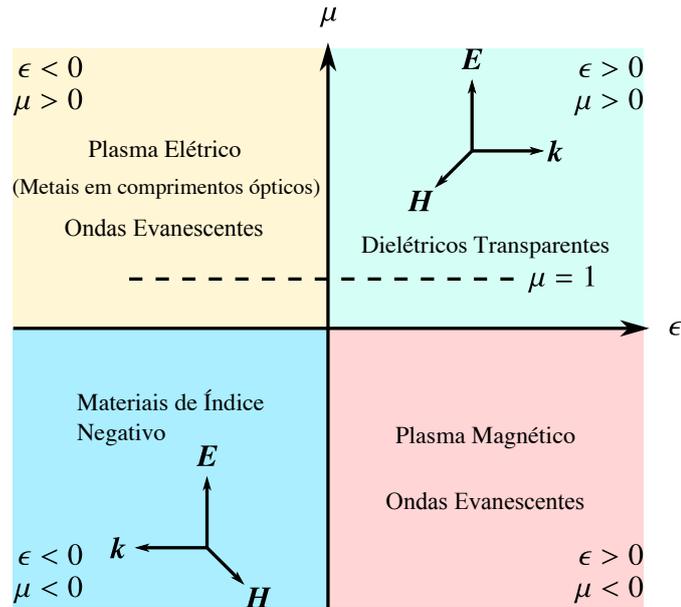


Figura 3 – Diagrama ilustrando o espaço paramétrico eletromagnético. O eixo horizontal (vertical) corresponde à permissividade (permeabilidade) elétrica (magnética) ϵ (μ). A linha pontilhada horizontal representa os materiais não magnéticos com $\mu = 1$.

chamada *correspondência de impedância*, isto é, nos quais o vínculo $\epsilon_{ij} = \mu_{ij}$ é satisfeito. A óptica de transformação é muito utilizada em trabalhos de *gravidade análoga*, onde, através da análise e observação de fenômenos eletromagnéticos, é possível estudar, e, principalmente, visualizar resultados teóricos bem estabelecidos em gravitação e cosmologia. Tais analogias podem ser frutíferas, uma vez que ajudam a lançar luz sobre cada uma das áreas envolvidas. Existem vários trabalhos que se enquadram neste quesito, incluindo tópicos como espaços-tempo análogos [17, 18], viagem no tempo [19], cordas cósmicas [20], mecânica celeste [21], buracos negros [22, 23], buracos de minhoca [24], dentre outros. A óptica de transformação é uma ótima ferramenta para o estudo de análogos gravitacionais, pois, uma vez atingido o vínculo $\epsilon_{ij} = \mu_{ij}$, o mapeamento entre a métrica do espaço-tempo desejado e o campo eletromagnético é imediato [16]. Todavia, a sua grande desvantagem é justamente o seu principal requisito, ou seja, a correspondência de impedância, a qual exige uma fabricação bastante sofisticada do metamaterial, já que a manipulação da permeabilidade magnética é mais complexa que a da permissividade elétrica.

Outra classe de metamateriais anisotrópicos, é a dos *metamateriais hiperbólicos* [25, 26], denominados desse modo devido à forma hiperbólica da sua relação de dispersão, isto é, o formato da superfície $\omega(\mathbf{k}) = \text{constante}$, onde ω é a frequência angular da onda eletromagnética e \mathbf{k} o vetor de onda. Como constituem um dos principais temas deste trabalho, sua menção aqui é apenas informativa, pois suas principais propriedades, aplicações e tipos de estrutura serão detalhados no capítulo 3.

O presente trabalho, consiste de um estudo no campo da gravidade análoga, onde faremos uma conexão entre a teoria da relatividade e a óptica (dinâmica) em metamateriais hiperbólicos

(eletrônicos). Sendo assim, em virtude de tratarmos sobre temas aparentemente desconexos, fizemos o possível para que o texto fosse completamente autossuficiente, almejando suprir, caso seja necessário, a ausência de algum conceito físico que porventura um leitor especialista em uma ou outra área possa carecer. Dito isso, a divisão do corpo principal da tese foi feita da seguinte forma: no capítulo 2, detalhamos os tópicos de relatividade e cosmologia necessários para a compreensão das aplicações que virão posteriormente. Dentre os temas abordados, destacam-se a seção 2.2.3 sobre distâncias e intervalos de tempo na relatividade geral, a seção 2.2.7 sobre o sistema de coordenadas síncrono, utilizado em cosmologia, e, por fim, a seção 2.3.4, referente ao universo de Milne, a qual estabelece a fundamentação teórica do principal modelo análogo em metamateriais apresentado neste trabalho. O capítulo 3 tem como objetivo discorrer sobre os metamateriais hiperbólicos, entretanto, devido os mesmos serem anisotrópicos do ponto de vista elétrico, primeiramente é preciso explicar a óptica em meios anisotrópicos convencionais. Feito isso, os metamateriais hiperbólicos são abordados a partir da seção 3.3, sendo então discutidas suas principais aplicações e propriedades, onde destacamos a seção 3.3.1, sobre a obtenção de um comportamento análogo ao espaço-tempo de Minkowski num metamaterial (meio) hiperbólico. No capítulo 4, enfim combinamos os conteúdos dos dois capítulos anteriores em duas aplicações, sendo estas o universo de Milne compacto e o espaço-tempo kleiniano. A primeira, como veremos, consiste num possível modelo de singularidade cósmica para certos modelos cosmológicos cíclicos. Já a segunda, representa um espaço-tempo incomum onde temos duas coordenadas temporais. Finalmente, dedicamos o capítulo 5 às conclusões e perspectivas acerca dos resultados obtidos.

2 RELATIVIDADE, GRAVITAÇÃO E COSMOLOGIA

Neste capítulo, serão abordados os principais conceitos da Teoria da Relatividade de Einstein e da Cosmologia de Friedman-Robertson-Walker, utilizados posteriormente nas aplicações em Física da Matéria Condensada. No tocante à relatividade especial, a teoria será apresentada de forma sucinta, cujo objetivo consiste em apresentar a notação utilizada e estabelecer algumas fórmulas importantes, necessárias posteriormente para uma correspondência com a teoria geral. Devido ao seu formalismo mais sofisticado, tanto conceitualmente como matematicamente, a relatividade geral ocupa a maior parte do capítulo: partindo do princípio da equivalência e do princípio da covariância geral, discorreremos sobre tópicos intermediários, chegando por fim na ação de Einstein-Hilbert e nas equações de campo da relatividade geral. Concluindo, serão explanados os elementos básicos da cosmologia padrão, possibilitando a compreensão do principal modelo cosmológico tratado neste trabalho, o universo de Milne.

2.1 Relatividade Especial

Fruto de diversas contribuições [27], mas apresentada em sua forma final por Albert Einstein em 1905 [28], a Teoria da Relatividade Especial é fundamentada em dois princípios:

- a) *Princípio da Relatividade*: Os fenômenos físicos são os mesmos em todos os referenciais inerciais;
- b) *Universalidade da Velocidade da Luz*: A velocidade da luz no vácuo, c , é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais, e é independente do movimento relativo entre a fonte e o observador.

Como se pode notar, o princípio da relatividade não é inteiramente inovador, pois já era bem conhecido por Galileu e Newton no que concerne aos fenômenos mecânicos. Em outras palavras, ele nos diz que as equações que traduzem as leis da natureza são invariantes em relação às transformações de coordenadas e do tempo, quando se passa de um referencial para o outro. Isso significa que a equação que descreve uma certa lei física, quando expressa pelas coordenadas e pelo tempo, tem a mesma forma qualquer que seja o referencial inercial adotado.

Tomando como exemplo as leis de movimento de Newton, as mesmas são invariantes sob as chamadas transformações de Galileu, as quais expressas na forma vetorial possuem a seguinte forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t, \quad (2.1)$$

$$t' = t, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{r} , t e \mathbf{r}' , t' são vetores de posição e coordenadas temporais relativos a dois referenciais inerciais distintos O e O' , respectivamente. O vetor constante \mathbf{u} representa a velocidade relativa entre os referenciais. Logo, sendo \mathbf{r} constante, derivando a equação (2.1) duas vezes com relação

ao tempo, temos

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (2.3)$$

e assim,

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Entretanto, as equações de Maxwell do eletromagnetismo não são invariantes de Galileu, o que pode ser visto analisando a clássica equação de onda

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

onde o campo escalar φ representa uma das componentes cartesianas do campo eletromagnético, por exemplo. Aplicando as equações (2.1) e (2.2) na expressão anterior, pode-se mostrar que

$$\nabla'^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} - \frac{2}{c^2} \mathbf{u} \cdot \nabla' \varphi + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla')^2 \varphi, \quad (2.6)$$

revelando explicitamente que a equação de onda não é um invariante de Galileu.

Inicialmente, pensou-se que a equação (2.5) para o campo eletromagnético seria válida somente para a propagação num meio misterioso que permearia todo o universo, denominado *éter*¹. Para o éter, a velocidade da luz teria o valor $c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Todavia, sucessivas falhas experimentais em encontrar a velocidade da Terra com relação ao éter, indicaram que a velocidade da luz é independente de qualquer movimento relativo uniforme entre uma fonte de luz e um observador, fato que é claramente incompatível com a transformação galileana de velocidades $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. A grande ideia de Einstein estava no postulado acerca da universalidade da velocidade da luz, decorrente do próprio princípio da relatividade, ao considerar as equações de Maxwell como leis fundamentais da física, e, sendo assim, a equação de onda (2.5) válida para todos os referenciais inerciais. Logo, o conceito de éter foi abandonado (pois a onda é capaz de se propagar no vácuo) e o princípio da relatividade retificado, no sentido de que as leis da física são invariantes não mais pela transformação de Galileu, mas por outro tipo de transformação, a chamada transformação de Lorentz.

2.1.1 Transformação de Lorentz

Sejam dois referenciais O e O' , de tal maneira que os eixos de O' são paralelos aos de O e a velocidade relativa entre ambos seja constante e dada pelo vetor $\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{x}}$, onde $\hat{\mathbf{x}}$ é o versor ao longo da direção x (veja a Figura 4). Além disso, vamos supor que as origens dos dois sistemas coincidam nos instantes $t = t' = 0$. Então as coordenadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z') , atribuídas a um mesmo *evento* por observadores fixos nos respectivos referenciais, estão relacionadas da

¹ A equação ondulatória também se aplicaria para uma classe especial de referenciais em repouso com relação ao éter. Apesar da ideia de um meio preenchendo todo o espaço parecer utópica, vale ressaltar que naquela época achava-se que qualquer tipo de fenômeno ondulatório necessitava de um meio para propagação, como ondas numa corda ou na água.

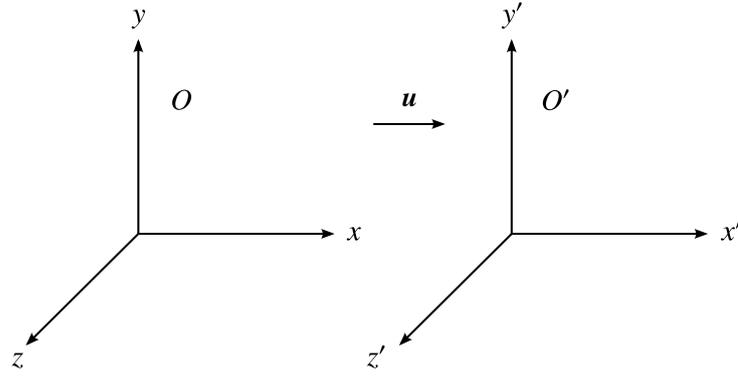


Figura 4 – Configuração entre os referenciais inerciais O e O' . Os eixos de ambos os referenciais são paralelos entre si e o vetor velocidade relativa \mathbf{u} é paralelo ao eixo x .

seguinte maneira [29]

$$t' = \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right), \quad (2.7)$$

$$x' = \gamma (x - ut), \quad (2.8)$$

$$y' = y, \quad (2.9)$$

$$z' = z, \quad (2.10)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. As equações acima foram obtidas primeiramente pelo físico holandês H. A. Lorentz. Entretanto, a teoria de Lorentz era mais complexa conceitualmente, pois ainda tinha como fundamento a ideia do éter luminífero [27]. Posteriormente, Einstein obteve as mesmas equações com base nos seus dois postulados já mencionados.

Através de um simples procedimento [30], é possível obter a transformação de Lorentz numa forma vetorial, generalizando as equações (2.7)–(2.10) com o intuito de eliminar a particularidade da velocidade relativa \mathbf{u} paralela ao eixo x de O . Em termos de $\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{x}}$, temos que $ux = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$, onde \mathbf{r} é o vetor posição. Logo, é possível escrever a parte espacial (2.8)–(2.10) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) x \hat{\mathbf{x}} - \gamma ut \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{u} \frac{\mathbf{u}}{u} - \gamma \mathbf{u} t \\ &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} ct, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Já para a parte temporal (2.7), temos

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right), \quad (2.12)$$

que não faz menção a nenhuma direção privilegiada para $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\beta}$.

Tomando o limite não relativístico $c \rightarrow +\infty$, nas equações (2.11) e (2.12), temos $\gamma \rightarrow +\infty$, e a transformação de Galileu dada por (2.1) e (2.2) é recuperada.

2.1.2 Intervalo

O fato de a velocidade da luz ser invariante entre diferentes referenciais inerciais gera uma importante consequência: sejam dois eventos X e $X + \delta X$ separados infinitesimalmente, cujas respectivas coordenadas são (t, x, y, z) e $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$. A quantidade ds , denominada *intervalo*, é definida por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2. \quad (2.13)$$

Se $ds = 0$ num certo referencial, então os dois eventos podem ser conectados por um sinal luminoso. Como a luz viaja com a mesma velocidade c em todos os referenciais inerciais, $ds' = 0$ em qualquer outro referencial inercial. Na verdade, é possível mostrar ainda que $ds = ds'$ para quaisquer dois eventos separados infinitesimalmente, e não somente aqueles conectados por sinais luminosos. Considerando ds^2 como função de ds'^2 e expandindo o primeiro em série de Taylor com potências de ds'^2 , temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds^2 \Big|_{ds'^2=0} + \frac{\partial (ds^2)}{\partial (ds'^2)} \Big|_{ds'^2=0} ds'^2 + \dots \\ &= k + a ds'^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde k e a são constantes. O fato de $ds = 0$ quando $ds' = 0$, implica em $k = 0$. Ademais, o coeficiente a só pode depender do módulo da velocidade relativa $|\mathbf{u}| = u$ entre os dois referenciais inerciais. Ele não pode conter as coordenadas e o tempo, pois senão pontos diferentes do espaço e instantes diferentes não seriam equivalentes, o que viria a contradizer a homogeneidade do espaço e do tempo. Do mesmo modo, ele não poderia depender da direção da velocidade relativa, pois poderia contradizer a isotropia do espaço. Daí, vem que

$$ds^2 = a(u) ds'^2, \quad (2.15)$$

e da mesma maneira,

$$\begin{aligned} ds'^2 &= a(|-\mathbf{u}|) ds^2 \\ &= a(u) ds^2 \\ &= a(u)^2 ds'^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

do que segue que $a = \pm 1$. Porém, como no limite $u \rightarrow 0$, tem-se $ds' \rightarrow ds$, então necessariamente $a = 1$. O que nos leva ao resultado

$$ds' = ds. \quad (2.17)$$

Logo, o intervalo entre dois eventos é um invariante de Lorentz. Naturalmente, o mesmo resultado vale para um intervalo finito Δs . Note que ds é análogo à distância infinitesimal $|d\mathbf{r}|$ entre dois pontos no espaço euclidiano tridimensional. Assim como é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre as componentes do vetor posição \mathbf{r} e os pontos do espaço

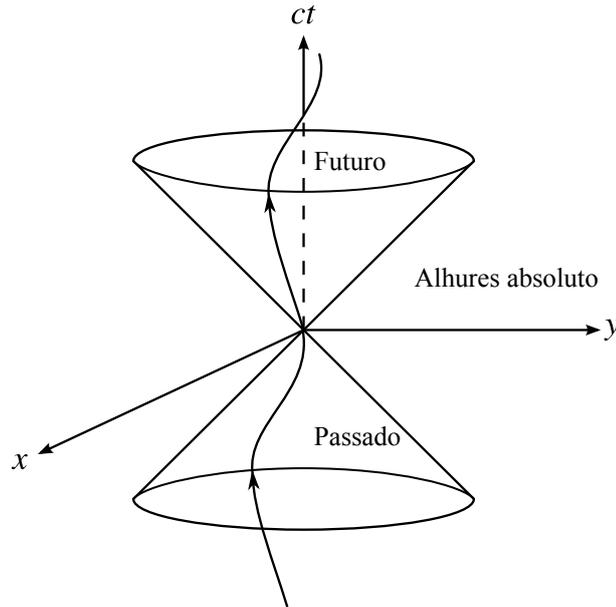


Figura 5 – Trajetória no espaço-tempo de uma partícula através do cone de luz. A região interior ao cone representa o passado ($t < 0$) e futuro ($t > 0$) absolutos da partícula, enquanto a região exterior é denominada *alhures absoluto*. A palavra “absoluto” significa que o referido conjunto de eventos é o mesmo em todos os referenciais, devido à invariância do intervalo. Um ponto no interior (exterior) do cone de luz possui uma separação em relação à origem do tipo tempo (espaço).

tridimensional, podemos fazer o mesmo com as coordenadas (ct, \mathbf{r}) de um certo evento X , representando o mesmo como um ponto do *espaço-tempo* quadridimensional. Em particular, quando ds^2 é dado pela equação (2.13), o espaço-tempo quadridimensional é chamado *espaço-tempo de Minkowski*. Um intervalo entre dois eventos é dito do *tipo espaço* se a parte espacial é maior do que a parte temporal ($ds^2 < 0$), e do *tipo tempo* se a parte temporal é maior que a parte espacial ($ds^2 > 0$). Se $ds^2 = 0$ o intervalo é dito do *tipo luz*. Como ds^2 é invariante, a classificação é absoluta, isto é, não depende do referencial.

Sendo $d\mathbf{r}$ o deslocamento de uma partícula para o intervalo de tempo dt , os eventos onde $ds^2 = 0$ definem uma região de velocidade c (pois $|d\mathbf{r}|/dt = c$), chamada *cone de luz* (veja a Figura 5). A região exterior ao cone corresponde à trajetórias no espaço-tempo de partículas com $v > c$ (caso em que $ds^2 < 0$). Para $v < c$, que é o caso das partículas massivas existentes na natureza, as trajetórias estarão no interior do cone de luz.

Do exposto acima, um ponto do espaço-tempo, tomado com relação a certo referencial inercial, é caracterizado por três coordenadas espaciais e uma temporal. As coordenadas serão representadas na forma

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, x^i) \equiv (ct, \mathbf{r}), \quad (2.18)$$

onde índices com letras gregas ($\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$) assumem valores (0, 1, 2, 3) e índices com letras romanas (i, j, k, l, \dots) assumem valores (1, 2, 3). Daí, vem que

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \eta = [\eta_{\mu\nu}] \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1), \quad (2.19)$$

onde utilizamos a *convenção de soma de Einstein* para índices repetidos: sempre que um índice aparecer repetido num termo de uma expressão, sendo um índice superior e outro inferior, existe um somatório implícito cuja soma se dá ao longo de todos os valores possíveis que o índice em questão pode assumir. A matriz $\eta = [\eta_{\mu\nu}]$ define uma *métrica* no espaço-tempo de Minkowski, e seus elementos são denominados componentes do *tensor métrico* ou simplesmente componentes da métrica. Também é importante ressaltar que na definição de ds^2 nas equações (2.13) e (2.19), foi utilizado um sinal positivo para o termo $c^2 dt^2$ e um sinal negativo para os termos espaciais dx^2, dy^2, dz^2 . A sequência de sinais dos termos $\eta_{\mu\nu}$ trata-se meramente de uma convenção, chamada de *assinatura*. Em geral, a assinatura é representada na forma $(-+++)$ ou $(+---)$, e a escolha de uma ou outra ocasiona apenas uma mudança de sinal em determinadas expressões. Neste trabalho, salvo mencionado o contrário, é utilizada a assinatura $(+---)$.

Uma sequência contínua de pontos no espaço-tempo pode ser especificada pelas coordenadas $x^\mu(\lambda)$ dos eventos ao longo de uma curva parametrizada por um certo parâmetro λ , de modo semelhante à geometria diferencial de curvas no espaço euclidiano [31]. Como ds é invariante, podemos definir o análogo quadridimensional do comprimento de arco ao longo da curva, interligando dois eventos P e Q do espaço-tempo por

$$s(P, Q) = \int_P^Q |ds| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{|ds|}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda |\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|^{1/2}. \quad (2.20)$$

Na equação acima, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ e o módulo se faz necessário pois o sinal de ds^2 é em geral indefinido no espaço-tempo. Todavia, nos casos em que a curva possui um sinal definido para o comprimento de arco, ou seja, curvas cuja classificação (tipo tempo ou tipo espaço) se mantém inalterada por todo o percurso, é possível definir o sinal adequado na equação (2.20). Para curvas do tipo luz, o comprimento de arco é sempre nulo devido à condição $ds = 0$. O comprimento de arco é também invariante sob reparametrizações, ou seja, sob transformações do tipo $\lambda \rightarrow \lambda' = f(\lambda)$, pois

$$\begin{aligned} s &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left| \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right|^{1/2} \\ &= \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} d\lambda' \frac{d\lambda}{d\lambda'} \left| \eta_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda} \right) \right|^{1/2} \\ &= \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} d\lambda' \frac{d\lambda}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda} \left| \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'} \right|^{1/2} \\ &= \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} d\lambda' \left| \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'} \right|^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Entre as diversas possibilidades de curvas no espaço-tempo, destacam-se as que representam a trajetória de uma partícula material, denominada *linha de universo*. No espaço tridimensional, é possível descrever uma determinada trajetória expressando a posição como função do tempo, na forma vetorial $\mathbf{r}(t)$, com velocidade $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt$. Transpondo para o espaço-tempo, considere essa curva utilizando o parâmetro $\lambda = ct$, tal que $x^\mu = x^\mu(ct) = (ct, \mathbf{r}(t))$. Dada

a existência de uma velocidade máxima, devemos ter sempre $|\mathbf{v}| < c$ e a curva é monotonicamente do tipo tempo ($ds^2 > 0$). Nesses casos, é possível dar uma interpretação física do comprimento de arco ao longo da curva [32]: suponhamos que num certo referencial inercial O , é observado o movimento arbitrário de uma partícula, partícula esta que encontra-se munida de um relógio. O movimento, apesar de arbitrário, pode ser considerado uniforme em cada instante. Assim, em cada instante de tempo, podemos introduzir um sistema de coordenadas rigidamente ligado à partícula, que, juntamente com o relógio, irá constituir um referencial inercial O' . No decurso de um intervalo de tempo infinitesimal dt (indicado por um relógio em repouso em O), a partícula percorre a distância $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Para o sistema O' , a partícula permanecerá em repouso, logo, $dx' = dy' = dz' = 0$. Tomando $dt' \equiv d\tau$, e em virtude da invariância dos intervalos, temos

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2. \quad (2.22)$$

E assim,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.23)$$

onde $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}/dt$ é a velocidade da partícula (relógio) móvel. A integração da equação (2.23), fornece o tempo indicado pelo relógio transportado pela partícula quando o tempo indicado pelo relógio de O (em repouso) for $\Delta t = t_2 - t_1$. Daí, vem que

$$\tau = \int d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \quad (2.24)$$

O tempo indicado por um relógio que se move com um dado objeto é chamado o *tempo próprio* desse objeto. As equações (2.23) e (2.24) expressam o tempo próprio em função do tempo medido no referencial, ao qual o movimento considerado está relacionado. Claramente, o tempo próprio é sempre menor que o tempo correspondente num referencial fixo, de modo que um relógio móvel se movimenta mais lentamente que um relógio em repouso. Enfatizamos ainda que esses resultados valem para uma partícula descrevendo uma trajetória arbitrária, não necessariamente em movimento uniforme (a relatividade especial é satisfatória para descrever movimentos acelerados, não sendo necessário recorrer a teoria geral nesses casos).

2.1.3 Grupo de Lorentz

As transformações de Lorentz, apresentadas pelas equações (2.11) e (2.12), conhecidas como *boosts*, são exemplos particulares de uma classe mais geral [33], onde temos uma transformação linear da forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + d^{\mu}, \quad (2.25)$$

com Λ^{μ}_{ν} e d^{μ} constantes, restrita à condição de manter ds^2 (ou o tempo próprio $d\tau^2$) invariante, isto é,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} dx^{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\gamma} dx^{\gamma}. \quad (2.26)$$

Como todos os índices são mudos, façamos então as mudanças $\alpha \rightarrow \mu$ e $\gamma \rightarrow \nu$ no lado extremo direito da equação anterior. Daí, vem que

$$\Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\gamma} \Lambda^\gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

As equações fornecidas por (2.27), sendo elas 16 ao todo, são o que de fato caracterizam os coeficientes Λ^μ_ν da transformação de Lorentz. Expressando a equação (2.27) como um produto de matrizes, temos

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta. \quad (2.28)$$

Multiplicando a relação anterior pela direita por η e notando que $\eta^2 = 1_4$, onde $1_4 \equiv [\delta^\mu_\nu]$ é a matriz identidade quadridimensional, resulta $\Lambda^\top \eta \Lambda \eta = 1_4$, o que mostra que $\Lambda^\top \eta$ é a matriz inversa da $\Lambda \eta$. Portanto, temos também que $\Lambda \eta \Lambda^\top \eta = 1_4$, e assim

$$\Lambda \eta \Lambda^\top = \eta, \quad (2.29)$$

que é uma condição equivalente à expressão (2.28). Em notação de índices,

$$\Lambda^\mu_\alpha \eta^{\alpha\gamma} \Lambda^\nu_\gamma = \eta^{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde $[\eta^{\mu\nu}] = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ e é numericamente igual à $[\eta_{\mu\nu}]$. Uma transformação de Lorentz é uma espécie de rotação no espaço-tempo, e a matriz associada é ortogonal em relação à métrica η do espaço-tempo de Minkowski. No caso das rotações tridimensionais a métrica é dada pela matriz identidade $1_3 = [\delta_{ij}]$ (sendo δ_{ij} o delta de Kronecker), e a condição correspondente à equação (2.28) é $R^\top R = 1_3$ [34].

Antes de demonstrar que as matrizes que satisfazem as equações (2.28) e (2.29) formam um grupo, recordemos o que vem a ser um grupo. Assim, seja certo conjunto G , sobre o qual definimos uma operação \circ . Esse conjunto forma um grupo se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- Se $g_1 \in G$ e $g_2 \in G$, então $g_1 \circ g_2 \in G$ (a operação \circ é fechada);
- Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, temos $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ (propriedade associativa);
- Existe um elemento identidade $1 \in G$ tal que para todo $g \in G$ temos $1 \circ g = g \circ 1$;
- Para todo $g \in G$, existe um elemento inverso, que chamaremos g^{-1} , também pertencente a G , tal que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = 1$.

Podemos ver facilmente que a operação de fechamento é satisfeita. Sejam Λ_1 e Λ_2 duas matrizes pertencentes ao grupo de Lorentz, o produto matricial entre ambas também satisfaz as equações (2.28) e (2.29), pois

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^\top \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \underbrace{\Lambda_2^\top \Lambda_1^\top \eta \Lambda_1 \Lambda_2}_{\eta} = \Lambda_2^\top \eta \Lambda_2 = \eta, \quad (2.31)$$

$$(\Lambda_1 \Lambda_2) \eta (\Lambda_1 \Lambda_2)^\top = \underbrace{\Lambda_1 \Lambda_2 \eta \Lambda_2^\top \Lambda_1^\top}_{\eta} = \Lambda_1 \eta \Lambda_1^\top = \eta. \quad (2.32)$$

A propriedade associativa é trivialmente satisfeita já que o produto entre matrizes é associativo. O elemento identidade é a matriz identidade 1_4 , pois $1^\top \eta 1 = \eta$ e $1 \eta 1^\top = \eta$. Por fim, para o elemento inverso, sendo $1^\top \eta 1 = (\Lambda \Lambda^{-1})^\top \eta \Lambda \Lambda^{-1} = \eta$, temos

$$\begin{aligned} \eta &= (\Lambda \Lambda^{-1})^\top \eta \Lambda \Lambda^{-1} \\ &= \Lambda^{-1^\top} \underbrace{\Lambda^\top \eta \Lambda}_{\eta} \Lambda^{-1} \\ &= \Lambda^{-1^\top} \eta \Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Logo, o elemento inverso é a própria inversa Λ^{-1} e de fato as matrizes Λ formam um grupo.

Através das equações (2.27) e (2.28), podemos constatar quantas das 16 entradas de Λ^μ_ν são independentes. Assim, temos

$$\begin{aligned} \left(\Lambda^\top \eta_{\alpha\gamma} \Lambda \right)_{\mu\nu} &= \Lambda^\alpha_\mu \underbrace{\eta_{\alpha\gamma}}_{\eta_{\gamma\alpha}} \Lambda^\gamma_\nu \\ &= \Lambda^\gamma_\nu \eta_{\gamma\alpha} \Lambda^\alpha_\mu \\ &= \left(\Lambda^\top \eta_{\alpha\gamma} \Lambda \right)_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Então, das 16 equações de vínculo advindas de (2.27), teremos apenas 10 distintas: sendo 4 delas para o caso em que $\mu = \nu$, e 6 para o caso $\mu \neq \nu$, devido à simetria da equação (2.34). Logo, Λ^μ_ν terá $16 - 10 = 6$ entradas independentes. Daí, podemos concluir que o *grupo de Lorentz não homogêneo*, ou *grupo de Poincaré*, caracterizado pelas transformações da forma (2.25), é um grupo a 10 parâmetros, onde 6 parâmetros são oriundos de Λ^μ_ν , e os 4 parâmetros restantes oriundos das translações no espaço-tempo d^μ . No caso particular em que $d^\mu = 0$, o grupo de Lorentz é denominado *grupo de Lorentz homogêneo*.

As principais propriedades das transformações de Lorentz podem ser obtidas das equações (2.27) ou (2.28). Tomando o determinante de (2.28), temos

$$\det \Lambda^\top \det \eta \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 \det \eta = \det \eta. \quad (2.35)$$

Daí, vem que

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (2.36)$$

Além disso, tomando $\mu = \nu = 0$ na equação (2.27), obtemos

$$1 = \eta_{00} = \Lambda^\alpha_0 \eta_{\alpha\gamma} \Lambda^\gamma_0 = \left(\Lambda^0_0 \right)^2 - \left(\Lambda^1_0 \right)^2 - \left(\Lambda^2_0 \right)^2 - \left(\Lambda^3_0 \right)^2, \quad (2.37)$$

donde, resolvendo para Λ^0_0 ,

$$\Lambda^0_0 \geq +1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (2.38)$$

Se $\Lambda^0_0 \geq +1$, a transformação preserva o sentido do tempo e é dita *ortócrona*, pois, levando em conta eventos estacionários num certo referencial O , isto é, eventos nos quais a linha de universo é da forma $x^\mu = \delta^\mu_0 x^0$, então, aplicando equação (2.25) com $d^\mu = 0$, temos

$$t' = \Lambda^0_0 t. \quad (2.39)$$

Portanto, conclui-se que os relógios de O' marcam o tempo no mesmo sentido que os de O . Naturalmente, se $\Lambda^0_0 \leq -1$, a transformação inverte o sentido do tempo, e é dita *não ortócrona*.

As condições (2.36) e (2.38) permitem dividir as transformações de Lorentz em quatro subconjuntos, costumeiramente denotados por $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow$ e L_-^\downarrow . Os índices $+$ e $-$ referem-se a $\det \Lambda$, enquanto as setas $\uparrow\downarrow$ referem-se a $\Lambda^0_0 \geq 1$ e $\Lambda^0_0 \leq -1$, respectivamente. As transformações representadas por L_-^\uparrow e L_-^\downarrow envolvem inversão espacial (transformação de paridade), pois $\det \Lambda = -1$, e, as dadas por L_-^\downarrow e L_+^\downarrow , inversão temporal. Tais transformações não correspondem à simetrias exatas da natureza e são denominadas *impróprias* [35]. As transformações representadas pelo conjunto L_+^\uparrow são ditas *próprias*. Elas possuem a importante propriedade de serem as únicas que podem ser construídas a partir da transformação identidade $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ de forma contínua, ou seja, por aplicação de sucessivas transformações de Lorentz infinitesimais

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad (2.40)$$

onde os ω^μ_ν são quantidades infinitesimais. Ademais, a própria transformação identidade é do tipo L_+^\uparrow . Como uma transformação da forma (2.40) difere apenas infinitesimalmente da transformação identidade, ela é necessariamente própria, e, assim, não pode provocar um salto finito tanto de $\Lambda^0_0 \geq +1$ para $\Lambda^0_0 \leq -1$ quanto de $\det \Lambda = +1$ para $\det \Lambda = -1$ [33]. Daí, como a transformação identidade não faz parte de nenhum dos subconjuntos $L_+^\downarrow, L_-^\uparrow$ e L_-^\downarrow , eles não possuem o elemento identidade e, portanto, cada um deles não forma um grupo por si só.

O subconjunto L_+^\uparrow é o único dos mencionados anteriormente que forma um grupo. A única parte não trivial da demonstração é a verificação de que o produto de duas matrizes de Lorentz ortócronas é também uma matriz ortócrona ($\Lambda^0_0 \geq +1$). Considere então a seguinte demonstração adaptada de [34]: sejam $\bar{\Lambda}$ e Λ duas transformações de Lorentz ortócronas consecutivas e seja $\bar{\bar{\Lambda}} = \bar{\Lambda} \Lambda$. Então $\bar{\bar{\Lambda}}^\mu_\nu = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha \Lambda^\alpha_\nu$, de modo que

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Lambda}}^0_0 &= \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 + \bar{\Lambda}^0_1 \Lambda^1_0 + \bar{\Lambda}^0_2 \Lambda^2_0 + \bar{\Lambda}^0_3 \Lambda^3_0 \\ &= \bar{\Lambda}^0_0 \Lambda^0_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde, na equação anterior, fizemos $\mathbf{a} = (\bar{\Lambda}^0_1, \bar{\Lambda}^0_2, \bar{\Lambda}^0_3)$ e $\mathbf{b} = (\Lambda^1_0, \Lambda^2_0, \Lambda^3_0)$. Resolvendo a equação (2.37) para Λ^0_0 , obtém-se $\Lambda^0_0 = \sqrt{1 + b^2}$, sendo $b = |\mathbf{b}|$. De maneira semelhante, fazendo $\mu = \nu = 0$ em (2.30), temos

$$1 = \eta^{00} = \bar{\Lambda}^0_\alpha \eta^{\alpha\gamma} \bar{\Lambda}^0_\gamma = \left(\bar{\Lambda}^0_0\right)^2 - \left(\bar{\Lambda}^0_1\right)^2 - \left(\bar{\Lambda}^0_2\right)^2 - \left(\bar{\Lambda}^0_3\right)^2. \quad (2.42)$$

Resolvendo para $\bar{\Lambda}_0^0$, obtemos $\bar{\Lambda}_0^0 = \sqrt{1+a^2}$, com $a = |\mathbf{a}|$. Logo, podemos reescrever a equação (2.41) como

$$\bar{\Lambda}_0^0 = \sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.43)$$

Entretanto,

$$\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2} = \sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2} = \sqrt{(1+ab)^2 + (a-b)^2} \geq 1+ab, \quad (2.44)$$

e então

$$\bar{\Lambda}_0^0 \geq 1+ab + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.45)$$

Levando em conta que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \geq -ab$, obtemos que $\bar{\Lambda}_0^0 \geq +1$, como queríamos demonstrar.

2.1.3.1 Transformação de Lorentz como uma “Rotação” no Espaço-Tempo

Na seção 2.1.3, devido ao resultado (2.28), mencionamos que uma transformação de Lorentz é uma espécie de rotação no espaço-tempo. O objetivo desta seção é dar um caráter explícito para essa afirmação. Primeiramente, é importante ressaltar que o grupo das transformações de Lorentz próprias e homogêneas ($L_+^\uparrow, d^\mu = 0$), contém ainda o subgrupo formado pelas rotações tridimensionais ordinárias

$$\Lambda_0^0 = 1, \quad (2.46)$$

$$\Lambda_0^i = \Lambda_i^0 = 0, \quad (2.47)$$

$$\Lambda_j^i = R_{ij}, \quad (2.48)$$

onde $R = [R_{ij}]$ é uma matriz ortogonal de rotação, isto é, satisfaz as condições $R^T R = R R^T = 1$ e $\det R = 1$. Logo, no que diz respeito às rotações puramente espaciais e as translações no espaço-tempo $x^\mu \rightarrow x^\mu + d^\mu$, não existem diferenças entre o grupo de Lorentz e o grupo de Galileu [36]. As adversidades surgem apenas nas transformações de *boost* do tipo (2.11) e (2.12), quando se altera a velocidade do sistema de referência. Portanto, considere o *boost* usual de Lorentz na direção x dado pelas equações (2.7)–(2.10). Reescrevendo a transformação em forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

onde $\beta = u/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, sendo u a velocidade relativa entre os referenciais. Note que a transformação é própria. Considerando somente as coordenadas t e x , a equação (2.49) torna-se

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Fazendo a mudança de variável $\gamma = \cosh \zeta$, temos

$$\begin{aligned}\sinh^2 \zeta &= \cosh^2 \zeta - 1 \\ &= \gamma^2 - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 \\ &= \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \\ \sinh \zeta &= \gamma\beta.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Donde conclui-se que $\beta = \tanh \zeta$ ou ainda $\zeta = \tanh^{-1} \beta$. Assim, é possível reescrever a equação (2.50) somente em termos do ângulo hiperbólico ζ (denominado *rapidez*), isto é,

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}.\tag{2.52}$$

Utilizando as relações $\cosh \zeta = \cos i\zeta$ e $i \sinh \zeta = \sin i\zeta$ na transformação acima, obtemos facilmente

$$ict' = ict \cos i\zeta - x \sin i\zeta,\tag{2.53}$$

$$x' = ict \sin i\zeta + x \cos i\zeta,\tag{2.54}$$

e, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} ict' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos i\zeta & -\sin i\zeta \\ \sin i\zeta & \cos i\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ict \\ x \end{bmatrix}.\tag{2.55}$$

Note que, formalmente, a equação (2.55) representa uma “rotação” no plano formado por x e ict de um “ângulo” $i\zeta$, e, como tal, ela preserva o “comprimento” do vetor $x^2 + (ict)^2$. Se introduzirmos, por comodidade de exposição, $\tilde{t} \equiv ict$, então, um *boost* de Lorentz pode ser interpretado como uma rotação no espaço-tempo, onde a rotação ocorre num plano formado por um eixo temporal \tilde{t} (imaginário) e um eixo espacial x . Naturalmente, existem rotações associadas entre o eixo temporal e os outros eixos espaciais y e z . Logo, os parâmetros do grupo de Lorentz homogêneo são caracterizados por seis rotações quadridimensionais nos planos $xy, xz, yz, \tilde{t}x, \tilde{t}y, \tilde{t}z$, onde as três primeiras correspondem às rotações espaciais ordinárias, como no grupo de Galileu, e as restantes são da forma (2.55), cada uma com um parâmetro de rapidez ζ respectivo [32].

Tendo em mente aplicações futuras, vamos definir duas novas coordenadas,

$$x^+ \equiv x^0 + x^1 = ct + x,\tag{2.56}$$

$$x^- \equiv x^0 - x^1 = ct - x.\tag{2.57}$$

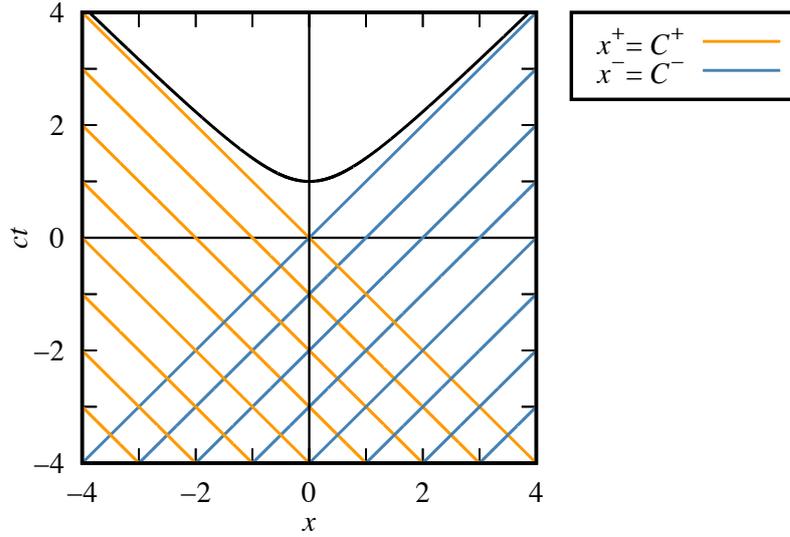


Figura 6 – Diagrama bidimensional do espaço-tempo de Minkowski ilustrando a construção do sistema de coordenadas (x^+, x^-) através de retas da forma $x^\pm = C^\pm$. Na figura, as constantes C^\pm assumem valores inteiros no intervalo $[-7, -1]$. A hipérbole $x^+ x^- = 1$ caracteriza um lugar geométrico de pontos no espaço-tempo onde o intervalo é invariante.

Logo, uma transformação de Lorentz (2.52) modifica as coordenadas x^\pm da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 x'^{\pm} &= ct' \pm x' \\
 &= (ct \cosh \zeta - x \sinh \zeta) \pm (-ct \sinh \zeta + x \cosh \zeta) \\
 &= ct (\cosh \zeta \mp \sinh \zeta) \pm x (\cosh \zeta \mp \sinh \zeta) \\
 &= (\cosh \zeta \mp \sinh \zeta) (ct \pm x) \\
 &= e^{\mp \zeta} x^\pm,
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

mostrando que a transformação de Lorentz comprime x^+ por um fator $e^{-\zeta}$ e expande x^- por $e^{+\zeta}$. Além disso, como $c^2 t^2 - x^2 = (ct + x)(ct - x) = x^+ x^-$, vê-se facilmente que o intervalo se mantém invariante, pois $x'^+ x'^- = (e^{-\zeta} x^+) (e^{+\zeta} x^-) = x^+ x^-$. Da mesma forma,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = (cdt + dx)(cdt - dx) = dx^+ dx^-. \tag{2.59}$$

Note que, curvas do tipo $x^\pm = C^\pm = \text{constante}$ são da forma $ct = \mp x + C^\pm$, ou seja, representam retas que conectam intervalos do tipo luz, pois $|dx/dt| = c$. Em particular, para o caso $C^\pm = 0$, as retas são geratrizes do cone de luz com vértice na origem. Tomando diferentes valores para as constantes C^\pm , podemos construir o sistema de coordenadas (x^+, x^-) no espaço-tempo de Minkowski (veja a Figura 6). Além disso, como o produto $x^+ x^-$ se mantém inalterado por transformações de Lorentz, conclui-se que o efeito de uma transformação da forma (2.58) é o de deslocar um ponto de coordenadas (x^+, x^-) ao longo da hipérbole $x^+ x^- = \text{constante}$ (veja a Figura 7).

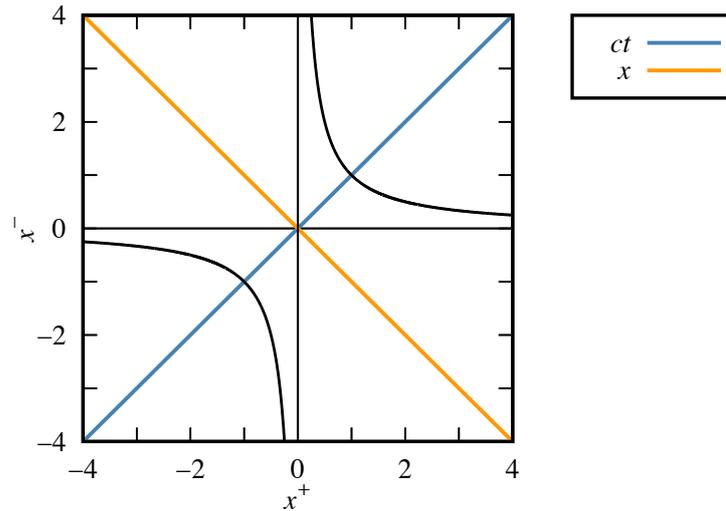


Figura 7 – Diagrama bidimensional do espaço-tempo de Minkowski conforme o sistema de coordenadas (x^+, x^-) . A reta azul representa o eixo temporal ordinário ct , ao passo que de cor laranja representa o eixo espacial x . As curvas representam as hipérbolas $x^+ x^- = \pm 1$, onde, uma transformação de Lorentz, aplicada sobre um ponto pertencente a qualquer uma delas, ocasiona um deslocamento do mesmo ao longo da respectiva curva. Por exemplo, para um ponto na hipérbole $x^+ x^- = 1$, o deslocamento se dá para a esquerda (direita) se $\zeta > 0$ ($\zeta < 0$).

2.1.4 Vetores e Tensores no Espaço-Tempo

O princípio da relatividade afirma que as leis da Física possuem a mesma forma em todos os referenciais inerciais. A fim de fazer valer este princípio, do ponto de vista matemático, as leis devem ser expressas de uma maneira intitulada *covariante*, isto é, sua forma permanece a mesma qualquer que seja o referencial inercial escolhido. Logo, a expressão matemática das leis físicas deve envolver somente quantidades com regras de transformação bem definidas na passagem de um referencial inercial para outro.

Considere um ponto arbitrário do espaço-tempo, tomado em relação a um certo referencial O , denotado por x^μ . Seja, agora, outro sistema O' onde o mesmo ponto é representado por x'^μ . Em princípio, O e O' podem ser sistemas quaisquer. Não consideraremos nenhuma restrição, como, por exemplo, o fato dos sistemas serem inerciais. Logo, o relacionamento entre x^μ e x'^μ deve ser, também, o mais geral possível. Diante disso, $x'^\mu = x'^\mu(x) = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$, e, pelas regras de derivação parcial,

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \tag{2.60}$$

O conceito de *campo escalar*, *campo vetorial* ou *campo tensorial*, está relacionado às funções escalares, vetoriais e tensoriais que dependem de pontos do espaço-tempo [37]. Em particular, um campo escalar tem como característica permanecer invariante relativamente a qualquer sistema de referência. Portanto, se φ é um campo escalar, então

$$\varphi'(x'^\mu) = \varphi(x^\mu). \tag{2.61}$$

Note que, de maneira geral, as expressões matemáticas para $\varphi'(x'^\mu)$ e $\varphi(x^\mu)$ são diferentes.

O que a equação (2.61) significa é que para um mesmo ponto do espaço-tempo, tomado quer com relação à O , quer com relação à O' , as funções $\varphi'(x'^{\mu})$ e $\varphi(x^{\mu})$ apresentam o mesmo valor numérico. Logo, podemos até mesmo reescrever a equação anterior como $\varphi(x'^{\mu}) = \varphi(x^{\mu})$.

Utilizando mais uma vez a regra de derivação parcial, temos

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}}. \quad (2.62)$$

E, analisando as equações (2.60) e (2.62), vemos que dx^{μ} e $\partial\varphi/\partial x^{\mu}$ transformam-se de modos distintos. Então, chamamos *quadrivetor contravariante* qualquer quantidade que se transforma como dx^{μ} , e *quadrivetor covariante*² qualquer quantidade que se transforma como $\partial\varphi/\partial x^{\mu}$. Entretanto, é importante ressaltar que essa classificação diz respeito às componentes do quadrivetor, pois, dado um quadrivetor, suas representações contravariante e covariante são

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad \text{e} \quad V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu}, \quad (2.63)$$

respectivamente.

Do exposto acima, generalizações imediatas para as relações (2.63) são

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} T^{\kappa\lambda}, \quad (2.64)$$

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} T_{\kappa\lambda}, \quad (2.65)$$

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} T^{\kappa}_{\lambda}. \quad (2.66)$$

Uma quantidade que se transforma como (2.64) denomina-se *tensor contravariante de segunda ordem*. Em (2.65), $T_{\mu\nu}$ é um *tensor covariante de segunda ordem*. E o T^{μ}_{ν} da equação (2.66) é um *tensor misto de segunda ordem*. E assim por diante. Portanto, um tensor contravariante de ordem r é um objeto $T^{\mu_1 \dots \mu_r}$ com 4^r componentes, que sob uma transformação de coordenadas, transforma-se segundo a regra

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\nu_r}} T^{\nu_1 \dots \nu_r}. \quad (2.67)$$

Analogamente, um tensor covariante $T_{\mu_1 \dots \mu_r}$ de ordem r é definido pela lei de transformação

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial x'^{\mu_r}} T_{\nu_1 \dots \nu_r}. \quad (2.68)$$

Obviamente, tensores mistos de ordem arbitrária, com um número qualquer de índices covariantes e contravariantes, são conceituados de modo similar.

Do parágrafo anterior, o conceito de campo tensorial, e, por conseguinte, campo vetorial, são naturalmente definidos. Um campo tensorial $T^{\mu \dots}_{\nu \dots}(X)$ é um tensor associado a cada ponto X

² O termo covariante possui dois significados. Um deles refere-se a uma das representações do vetor. O outro, mencionado no início desta seção, é a invariância de forma. Diz-se que uma relação é covariante se permanecer com a mesma forma após certa transformação característica.

do espaço-tempo e caracterizado pela lei de transformação

$$T'^{\mu\dots}{}_{\nu\dots} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \cdots T^{\kappa\dots}{}_{\lambda\dots}, \quad (2.69)$$

onde, um campo vetorial é o caso particular $T^{\mu}(X)$ ou $T_{\mu}(X)$.

Finalmente, consideremos o caso em que O e O' são referenciais inerciais. Assim, a transformação de coordenadas entre os dois se dá pela transformação de Lorentz, e, da equação (2.25) temos que $dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}$. Comparando com (2.60), obtemos que para uma transformação de Lorentz

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad (2.70)$$

o que nos permite concluir que um quadrivetor de Lorentz contravariante se transforma como $V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}$. Em contrapartida, um quadrivetor de Lorentz covariante possui como lei de transformação $V'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} V_{\nu}$, sendo $\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \partial x^{\nu} / \partial x'^{\mu}$ definida por

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\gamma} \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}, \quad (2.71)$$

onde $\eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$. Diante disso, $[\Lambda_{\mu}{}^{\nu}]$ é a inversa da matriz $[\Lambda^{\nu}{}_{\mu}]$, pois

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha}{}^{\mu} \Lambda^{\alpha}{}_{\nu} &= (\eta_{\alpha\gamma} \eta^{\mu\rho} \Lambda^{\gamma}{}_{\rho}) \Lambda^{\alpha}{}_{\nu} \\ &= \eta^{\mu\rho} \underbrace{\Lambda^{\alpha}{}_{\nu} \eta_{\alpha\gamma} \Lambda^{\gamma}{}_{\rho}}_{\eta_{\nu\rho}} \\ &= \eta^{\mu\rho} \eta_{\nu\rho} \\ &= \delta^{\mu}_{\nu}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Naturalmente, as substituições $\partial x'^{\mu} / \partial x^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ e $\partial x^{\nu} / \partial x'^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$ também se aplicam às leis de transformação (2.64)–(2.69). Da equação (2.72), segue que o *produto escalar* entre um quadrivetor contravariante e um quadrivetor covariante é um invariante de Lorentz, isto é,

$$V'_{\mu} W'^{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} \Lambda^{\mu}{}_{\gamma} V_{\alpha} W^{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} V_{\alpha} W^{\gamma} = V_{\gamma} W^{\gamma}. \quad (2.73)$$

Ademais, o caso particular $V_{\mu} V^{\mu}$ nos permite classificar os quadrivetores do mesmo modo que os intervalos, isto é

$$V_{\mu} V^{\mu} \begin{cases} > 0, & V^{\mu} \text{ é quadrivetor do tipo tempo.} \\ = 0, & V^{\mu} \text{ é quadrivetor do tipo luz.} \\ < 0, & V^{\mu} \text{ é quadrivetor do tipo espaço.} \end{cases} \quad (2.74)$$

Novamente, a classificação é absoluta pois $V_{\mu} V^{\mu}$ é um invariante de Lorentz.

Para todo quadrivetor contravariante V^{μ} , há um quadrivetor covariante correspondente

$$V_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} V^{\nu}, \quad (2.75)$$

assim como para todo quadri vetor covariante V_μ , existe um respectivo quadri vetor contravariante

$$V^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} V_\nu. \quad (2.76)$$

Daí, podemos reescrever o produto escalar (2.73) como

$$V_\mu W^\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu W^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\mu W_\nu = V^\nu W_\nu. \quad (2.77)$$

É importante ressaltar que a operação de abaixamento de índice (2.75) aplicada em V^μ , está plenamente de acordo com a lei de transformação de um quadri vetor contravariante, pois

$$\begin{aligned} V'^\mu &= \eta^{\mu\nu} V'_\nu \\ &= \eta^{\mu\nu} \Lambda_\nu^\alpha V_\alpha \\ &= \eta^{\mu\nu} \Lambda_\nu^\alpha \eta_{\alpha\gamma} V^\gamma \\ &= \Lambda^\mu_\gamma V^\gamma. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Analogamente, a operação de levantamento (2.75) concorda com a lei de transformação de um quadri vetor covariante $V'_\mu = \Lambda_\mu^\nu V_\nu$.

Uma operação do tipo $T^\mu{}_\nu$, $T^{\mu\nu}$, $T^\mu{}_\nu$, é chamada de *contração*. Assim, por exemplo, $T^\mu{}_\nu$ é a contração dos dois primeiros índices de $T^{\mu\alpha\nu}$. Claramente, a contração reduz a ordem do tensor em duas unidades. Por exemplo, no caso de um tensor de segunda ordem $T^{\mu\nu}$, o escalar

$$T^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu} T_{\nu\mu} = T_\nu{}^\nu = T_\mu{}^\mu \quad (2.79)$$

é chamado de traço do tensor.

O formalismo tensorial aqui explanado tem como principal objetivo fornecer um modo através do qual seja possível expressar matematicamente as leis da Física em forma covariante. Assim, suponha que num dado sistema de referência O , uma certa lei física possa ser expressa na forma

$$T^{\mu\dots\nu} = 0, \quad (2.80)$$

onde $T^{\mu\dots\nu}$ é um campo tensorial. Em virtude da lei de transformação (2.67) de suas componentes, se um campo tensorial é nulo num certo sistema de referência ele será nulo em todos os demais. Ou seja, num outro sistema O' , teremos

$$T'^{\mu\dots\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \dots \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} T^{\rho\dots\gamma} = 0. \quad (2.81)$$

Portanto, a equação (2.80) possui a mesma forma em todos os referenciais. Uma lei física assim representada está expressa numa forma manifestamente covariante, bastando olhar para a equação para reconhecer sua validade em todos os sistemas de referência. Além disso, exprimir uma lei numa forma covariante facilita a determinação de como se transformam as grandezas físicas relevantes quando se passa de um referencial para outro [34].

2.1.4.1 Quadrivelocity and Quadriacceleration

Com o intuito de ilustrar as ideias apresentadas na seção anterior, vamos considerar dois importantes quadrivectores associados ao movimento de uma partícula no espaço-tempo. Considere uma partícula descrevendo uma trajetória no espaço-tempo parametrizada pelo seu tempo próprio τ , isto é, $x^\mu(\tau)$. O quadrivector velocidade u^μ é definido como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.82)$$

que nada mais é do que o vetor tangente à curva. Note que, u^μ é de fato um quadrivector, pois dx^μ é quadrivector e $d\tau$ é um escalar.

Para exprimir as componentes de u^μ explicitamente, utilizaremos a equação (2.23) $d\tau = dt/\gamma = dt\sqrt{1 - \beta^2(t)}$, onde $\beta = v/c$ e $v = |\mathbf{v}|$ a velocidade ordinária da partícula no espaço tridimensional. Daí, vem que

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \mathbf{r}) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \quad (2.83)$$

Uma consequência imediata de (2.83) é que as componentes de u^μ não são independentes, pois

$$u_\mu u^\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2, \quad (2.84)$$

o que mostra que u^μ é um quadrivector do tipo tempo que nunca se anula. Além disso, no referencial de repouso momentâneo da partícula, onde $\gamma = 1$ e $\mathbf{v} = 0$, temos que $u^\mu = c\delta_0^\mu$.

Outra maneira conveniente de definir a quadrivelocity [32], é conceituar

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{u^\mu}{c} = (\gamma, \gamma \boldsymbol{\beta}). \quad (2.85)$$

De maneira que,

$$U_\mu U^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1, \quad (2.86)$$

e, portanto, U^μ possui módulo unitário. Em unidades naturais ($c = 1$), temos $d\tau = ds$ e $u^\mu = U^\mu$.

Analogamente, define-se a quadriaceleração como

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \quad (2.87)$$

cujas componentes são

$$a^\mu = \frac{d}{d\tau}(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \left(c\gamma \dot{\gamma}, \gamma \dot{\gamma} \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \right), \quad (2.88)$$

onde $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ e $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ é a aceleração tridimensional da partícula. Calculando $\dot{\gamma}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right)^{-3/2} \left(-\frac{2}{c^2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

e, substituindo na equação (2.88),

$$a^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \frac{\gamma^4}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \right). \quad (2.90)$$

No referencial de repouso momentâneo da partícula ($\gamma = 1, \mathbf{v} = 0$), as componentes de a^μ reduzem-se a $a^\mu = \ddot{x}^i \delta_i^\mu = (0, \mathbf{a})$, donde se deduz que a quadriaceleração é um quadri vetor do tipo espaço e só se anula se a *aceleração própria*, isto é, a aceleração medida no referencial de repouso instantâneo, for zero.

Por fim, derivando a equação (2.84), temos

$$u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = u^\mu a_\mu = 0, \quad (2.91)$$

o que mostra que a quadri velocidade e a quadriaceleração são ortogonais entre si.

2.1.5 Dinâmica da Partícula

Para o estudo do movimento das partículas materiais, partiremos do princípio da mínima ação, o qual estipula que, para todo sistema mecânico existe uma integral S , chamada ação, que tem um mínimo para o movimento efetivo e cuja variação δS é, conseqüentemente, nula³.

Assim, vamos definir a integral da ação para uma partícula livre, isto é, não submetida à ação de forças externas. Naturalmente, pelo princípio da relatividade, a integral deve ser um invariante de Lorentz, e, portanto, deve ter como integrando um escalar. Para uma partícula livre, cuja trajetória é $x^\mu(\tau)$, a escolha simples e direta é uma integral proporcional ao tempo próprio $d\tau$. Daí, vem que

$$S = -\alpha \int_P^Q d\tau, \quad (2.92)$$

onde α é uma constante a ser determinada e a integral é calculada sobre a linha de universo compreendida entre os eventos P e Q . Do mesmo modo como na mecânica clássica, vamos representar a ação (2.92) sob a forma de uma integral no tempo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.93)$$

Sendo assim, em virtude de (2.23), a equação (2.92) torna-se

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (2.94)$$

de maneira que a lagrangiana para a partícula é

$$L = -\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.95)$$

³ Estritamente falando, o princípio da mínima ação afirma que a integral S deve ser mínima somente para deslocamentos infinitesimais sobre o caminho de integração. Para caminhos de comprimento arbitrário podemos afirmar somente que S tem um extremo, podendo não ser um mínimo [38].

Para determinar a constante α , vamos expandir a lagrangiana L em série de potências de v^2/c^2 . Logo,

$$L = -\alpha \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \dots \right), \quad (2.96)$$

donde, tomando o limite não relativístico $c \rightarrow +\infty$ e considerando até a primeira ordem em v^2/c^2 , resulta em

$$L \approx -\alpha + \frac{\alpha v^2}{2c^2}. \quad (2.97)$$

Pelo princípio da correspondência, espera-se que a expressão de L em (2.97) recaia na expressão clássica $L = mv^2/2$ para a partícula livre não relativística. Tomando $\alpha = mc^2$, a equação (2.97) torna-se $L \approx mv^2/2 - mc^2$, onde a constante $-mc^2$ pode ser omitida pois duas lagrangianas que diferem por uma derivada total com relação ao tempo são equivalentes, isto é, geram as mesmas equações de movimento [30]. Portanto, conclui-se que a lagrangiana (2.97) é equivalente à lagrangiana clássica $L = mv^2/2$ e o princípio da correspondência é satisfeito.

Do exposto acima, a ação para uma partícula material livre é

$$S = -mc^2 \int_P^Q d\tau = -mc \int_P^Q ds. \quad (2.98)$$

Calculando a variação δS , temos

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_P^Q \delta ds \\ &= -mc \int_P^Q \delta \sqrt{dx_\mu dx^\mu} \\ &= -mc \int_P^Q \frac{1}{2} \frac{\delta (dx_\mu dx^\mu)}{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} \\ &= -mc \int_P^Q \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} \\ &= -m \int_P^Q u_\mu \delta dx^\mu, \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde u_μ é a quadrivelocidade da partícula. Utilizando o método de integração por partes e o fato de que $\delta dx^\mu = d\delta x^\mu$, a equação anterior torna-se

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int_P^Q d(u_\mu \delta x^\mu) + m \int_P^Q d\tau \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu \\ &= -m u_\mu \delta x^\mu \Big|_P^Q + m \int_P^Q d\tau \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu. \end{aligned} \quad (2.100)$$

No princípio da mínima ação, para estabelecer as equações de movimento, comparamos entre si diversas trajetórias que passam por dois pontos fixos dados, ou seja, trajetórias onde $\delta x^\mu|_P = \delta x^\mu|_Q = 0$. Logo, fazendo $\delta S = 0$ na equação (2.100), obtemos $du_\mu/d\tau = 0$, as quais exprimem a constância da velocidade de uma partícula livre.

Por outro lado, podemos obter a variação da ação como função das coordenadas, onde somente o ponto inicial P deve ser fixo, de maneira que $\delta x^\mu|_P = 0$ [38]. O ponto Q será suposto variável, e, só levaremos em consideração trajetórias reais, isto é, que satisfazem as equações de movimento. Desse ponto de vista, a integral do lado direito da equação (2.100) é nula, pois estamos considerando apenas trajetórias reais, e, por conseguinte, $du_\mu/d\tau = 0$. Assim, tomando $\delta x^\mu|_Q = \delta x^\mu$, temos

$$\delta S = -mu_\mu \delta x^\mu. \quad (2.101)$$

Como as derivadas da ação em relação às coordenadas definem os momentos canônicos, seguindo [32], definimos o quadrivetor momento como

$$p_\mu \equiv -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mu_\mu, \quad (2.102)$$

onde o sinal negativo é devido à assinatura utilizada. Utilizando (2.83), obtém-se

$$p_\mu = mu_\mu = (\gamma mc, -\gamma m\mathbf{v}) \equiv \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right), \quad (2.103)$$

e para a componentes contravariantes,

$$p^\mu = mu^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (2.104)$$

Das equações (2.103) e (2.104), vê-se claramente que $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ é o momento linear relativístico da partícula. Para obter o significado físico da componente temporal E/c , façamos uma expansão em série de potências de v^2/c^2 , isto é

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots. \quad (2.105)$$

Onde o segundo termo corresponde à energia cinética newtoniana, sugerindo que E é a energia relativística da partícula. Os termos seguintes são correções à expressão clássica. O primeiro termo não possui análogo clássico e estabelece uma equivalência entre massa e energia, ou seja, uma massa m em repouso pode ser convertida numa quantidade equivalente de energia mc^2 .

Para a hamiltoniana, temos

$$\mathcal{H} = -p_\mu u^\mu - L = -mu_\mu u^\mu + mc^2 = -mc^2 + mc^2 = 0, \quad (2.106)$$

onde utilizamos a relação $L = -mc^2$, oriundo da equação (2.98), além da propriedade $u_\mu u^\mu = c^2$. O sinal negativo no termo $p_\mu u^\mu$ é para compensar o sinal negativo introduzido na definição do quadrimomento p_μ em (2.102). É importante ressaltar que não há nada de alarmante no resultado (2.106). Ocorre que na ação (2.98), utilizamos o tempo como variável canônica e não como variável independente, como de costume. Nesses casos, a hamiltoniana (2.106) (às vezes denominada *super-hamiltoniana*) é sempre nula [34]. Portanto, considerando a lagrangiana (2.95) com $\alpha = mc^2$, e o tempo como variável independente, então

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \gamma m v^2 + \gamma^{-1} mc^2 = \gamma mc^2 = E, \quad (2.107)$$

o que justifica ainda mais identificar E com a energia da partícula. Consequentemente, em mecânica relativística, o momento linear e a energia são as componentes de um único quadrivetor. Logo, de acordo com (2.103), temos

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = \nabla S, \quad (2.108)$$

que são as mesmas relações da teoria clássica de Hamilton-Jacobi [30].

Das equações (2.103) e (2.104), e da identidade $u_\mu u^\mu = c^2$, obtém-se que $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$. Ademais, escrevendo de forma explícita as componentes do quadrivetor momento, obtemos a seguinte relação envolvendo momento e energia,

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.109)$$

No caso espacial de uma partícula sem massa ($m = 0$), como o fóton, $E = pc$. Para o fóton, sua energia é $\hbar\omega$ e seu momento linear é $\hbar\mathbf{k}$, sendo h conhecido como constante de Planck reduzida, $\hbar = h/2\pi$, onde h é a constante de Planck ($h = 6,62607004 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), ω a frequência angular e \mathbf{k} o vetor de onda. Assim, o quadrimomento de um fóton é $p^\mu = \hbar k^\mu$, onde k^μ é o *quadrivetor de onda*, definido por

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (2.110)$$

Como $\omega = |\mathbf{k}| c$, então $k_\mu k^\mu = 0$, ou seja, k^μ é do tipo luz.

É possível ainda obter uma relação entre momento, energia e velocidade. Pois, sendo $E = \gamma mc^2$ e $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, eliminando o fator de Lorentz γ , temos

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}, \quad (2.111)$$

onde, para uma partícula sem massa com $E = pc$, então $|\mathbf{v}| = c$.

Podemos agora definir a versão covariante da segunda lei de Newton na forma

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu \equiv f^\mu, \quad (2.112)$$

onde f^μ é a quadriforça. Note que, por razões de consistência com a (2.91), devemos ter $p_\mu f^\mu = 0$. Além disso, a fim de relacionar as componentes de f^μ com a força tridimensional \mathbf{F} , vamos considerar que a conexão newtoniana entre a força e a derivada temporal do momento linear permanece válida, ou seja,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \quad (2.113)$$

Comparando a equação (2.113) com as componentes espaciais f^i em (2.112), e utilizando $d/d\tau = \gamma d/dt$, encontra-se $f^\mu = (f^0, \gamma\mathbf{F})$. A componente temporal f^0 obtém-se facilmente do vínculo $p_\mu f^\mu = 0$. Daí, vem que

$$\gamma mc f^0 - (\gamma m\mathbf{v}) \cdot (\gamma\mathbf{F}) = 0, \quad (2.114)$$

donde $f^0 = \gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c$, e, portanto,

$$f^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \gamma \mathbf{F} \right), \quad (2.115)$$

sendo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = dE/dt$ é a potência fornecida à partícula pela força \mathbf{F} .

Por fim, substituindo as equações (2.108) em $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$, vem que

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x_\mu} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 c^2, \quad (2.116)$$

ou, com a soma tornada explícita,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m^2 c^2 = 0, \quad (2.117)$$

que é a forma relativística da equação de Hamilton-Jacobi.

A transição para o caso limite da mecânica clássica na equação anterior é feita da seguinte maneira: primeiramente, é preciso notar que, assim como na equação (2.105), a equação (2.117) também contém um termo que não possui correspondente clássico, $m^2 c^2$. Como a energia relativística possui o termo adicional mc^2 , e, a ação S está ligada à energia pela relação $E = -\partial S/\partial t$, então, é necessário introduzir uma nova ação $\bar{S} = S(x^\mu) - mc^2 t$. Substituindo na equação (2.117), temos

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} - \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (2.118)$$

Donde, tomando o limite $c \rightarrow +\infty$, obtém-se a equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica para a partícula livre [30].

2.1.6 O Tensor Energia-Momento

Em Física, no estudo de sistemas contínuos, é comum descrever as propriedades do sistema em questão por meio de densidades. Por exemplo, para uma distribuição contínua de matéria, seja ela um sólido, um líquido, ou um gás, espera-se que a mesma possua densidades de energia e de momento, além de tensões internas entre seus constituintes. A título de ilustração, considere um sistema de N partículas, cujas posições e cargas elétricas são dadas por $\mathbf{r}_n(t)$ e q_n , respectivamente. Definimos as densidades de carga e de corrente como

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)), \quad (2.119)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \frac{d\mathbf{r}_n(t)}{dt}, \quad (2.120)$$

onde $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))$ é a função delta de Dirac tridimensional.

Podemos combinar ρ e \mathbf{J} num único quadrivetor corrente J^μ , tomando $J^0 \equiv c\rho$, isto é

$$\begin{aligned} J^0 &= c \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ &= \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \frac{d(ct)}{dt} \\ &= \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \frac{dx_n^0(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

sendo $x_n^0(t) \equiv ct$. Logo, das equações (2.120) e (2.121), vem que

$$J^\mu(x) = \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \frac{dx_n^\mu(t)}{dt}. \quad (2.122)$$

Apesar de termos classificado J^μ como quadrivetor, isso não é evidente pela equação (2.122) pois dx_n^μ/dt não é um quadrivetor. A fim de nos convenceremos de que J^μ é um quadrivetor, vamos reescrever a equação anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \left[\int dt' \delta(t' - t) \right] \frac{dx_n^\mu(t)}{dt} \\ &= \int dt' \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t')) \delta(t' - t) \frac{dx_n^\mu(t')}{dt'}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

e, utilizando a propriedade $\delta(t' - t) = c\delta(ct' - ct)$, temos

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= c \int dt' \sum_{n=1}^N q_n \delta^4(x^\mu - x_n^\mu(t')) \frac{dx_n^\mu(t')}{dt'} \\ &= c \int d\tau \frac{dt'}{d\tau} \sum_{n=1}^N q_n \delta^4(x^\mu - x_n^\mu(\tau)) \frac{d\tau}{dt'} \frac{dx_n^\mu(\tau)}{d\tau} \\ &= c \int d\tau \sum_{n=1}^N q_n \delta^4(x^\mu - x_n^\mu(\tau)) \frac{dx_n^\mu(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

onde, na equação anterior, fizemos a mudança da diferencial de integração para o invariante $d\tau$. Logo, como $dx_n^\mu/d\tau$ é quadrivetor e sendo $\delta^4(x^\mu - x_n^\mu(\tau))$ um escalar⁴, conclui-se que J^μ é quadrivetor.

Tomando a divergência $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \partial_k J^k$, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N q_n \frac{\partial}{\partial x^k} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] \frac{dx_n^k(t)}{dt}, \quad (2.125)$$

⁴ Como veremos posteriormente na seção 2.2.6, o elemento de volume $d^4x\sqrt{-g}$, onde $g = \det[g_{\mu\nu}]$, é um escalar sob uma transformação geral de coordenadas. Sendo $\int d^4x \varphi(x) \delta^4(x - y) = \varphi(y)$ válida para qualquer sistema de coordenadas, conclui-se que $\delta^4(x - y)/\sqrt{-g}$ é um escalar. No caso da relatividade especial, temos $g = \det[\eta_{\mu\nu}] = -1$.

donde, definindo $y^i \equiv x^i - x_n^i(t)$, e notando que

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \delta_k^i = -\frac{\partial y^i}{\partial x_n^k}, \quad (2.126)$$

podemos obter a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] &= \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^i} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] \\ &= -\frac{\partial y^i}{\partial x_n^k} \frac{\partial}{\partial y^i} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_n^k} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))]. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Substituindo a relação anterior na expressão da divergência (2.125), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= -\sum_{n=1}^N q_n \frac{\partial}{\partial x_n^k} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] \frac{dx_n^k(t)}{dt} \\ &= -\sum_{n=1}^N q_n \frac{dx_n^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^k} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] \\ &= -\sum_{n=1}^N q_n \frac{\partial}{\partial t} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.128)$$

que nada mais é do que a equação da continuidade, expressando a conservação da carga elétrica. Reescrevendo (2.128) em notação de quadrivetores, obtemos a forma covariante da equação da continuidade,

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.129)$$

De acordo com a teoria clássica de campos [37], sempre que um quadrivetor corrente $J^\mu(x)$ satisfaz a uma lei de conservação covariante (2.129), podemos definir uma carga total

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x), \quad (2.130)$$

donde, utilizando (2.129) e o teorema da divergência, temos

$$\frac{dQ}{dx^0} = \frac{d}{dx^0} \left[\int_V d^3x J^0(x) \right] = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} J^0(x) = -\int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}(x) = -\oint_{\partial V} \mathbf{J}(x) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.131)$$

sendo ∂V a fronteira (superfície) bidimensional que limita o volume V . Se a região de integração V engloba todo o espaço e os campos tendem a zero com rapidez suficiente no infinito, a integral de superfície é nula e a carga Q (2.130) é conservada, pois é independente do tempo.

É possível demonstrar ainda que se $J^\mu(x)$ é um quadrivetor, então Q é também um escalar de Lorentz. Primeiramente, note que a equação (2.130) é uma integral no espaço-tempo

sobre hipersuperfície $x^0 = 0$, cujo vetor normal é $n_\mu = \delta_\mu^0$. Uma hipersuperfície no espaço-tempo é caracterizada por uma equação de vínculo $f(x^\mu) = 0$, ou, por equações paramétricas $x^\mu = x^\mu(a^1, a^2, a^3)$. No caso de (2.130), utilizamos como parâmetros as coordenadas x^i , porém, é possível reescrevê-la com outro conjunto de parâmetros a^i apropriado. Assim,

$$Q = \int d^3a \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(a^1, a^2, a^3)} J^0(x^\mu(a^i)), \quad (2.132)$$

e o jacobiano da transformação pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(a^1, a^2, a^3)} &= \det \left[\frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^1} \frac{\partial x^j}{\partial a^2} \frac{\partial x^k}{\partial a^3} \\ &= -\varepsilon_{0\nu\alpha\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial a^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial a^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial a^3}, \end{aligned} \quad (2.133)$$

onde $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}$ é o símbolo de Levi-Civita⁵, o qual nos permite escrever o determinante de uma matriz de forma bastante compacta [39]. Portanto, a integral (2.132) torna-se

$$Q = \int d\Sigma_\mu J^\mu, \quad (2.134)$$

donde

$$d\Sigma_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial a^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial a^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial a^3} d^3a, \quad (2.135)$$

é o elemento diferencial de área normal à hipersuperfície. Note que para $a^i = x^i$, temos $d\Sigma_\mu = -\varepsilon_{\mu 123} d^3x = \delta_\mu^0 d^3x$. Logo, como $d\Sigma_\mu$ é manifestamente um quadrivetor, e a equação (2.134) está expressa numa forma covariante, Q é de fato um escalar.

Naturalmente, das equações (2.119) e (2.130), obtemos

$$Q = c \int d^3x \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) = c \sum_{n=1}^N q_n \int d^3x \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) = c \sum_n q_n, \quad (2.136)$$

que, para $c = 1$, é a carga total do sistema e evidentemente um escalar. Todavia, a importância da equação (2.130) reside no fato de que a mesma define, de maneira geral, um escalar independente do tempo cujo quadrivetor associado J^μ obedece à lei de conservação (2.129).

Se a conservação de uma quantidade escalar envolve um quadrivetor, logo, é de se esperar, que a conservação de um quadrivetor envolva um tensor de segunda ordem. Naturalmente, o referido tensor não pode ser de todo arbitrário, pois deve satisfazer a uma lei semelhante à equação (2.129). Assim, tendo como inspiração o caso eletromagnético precedente, vamos definir a densidade e a corrente associadas ao quadrivetor momento p^μ . Então, considere um sistema de N partículas com respectivos quadrimomentos $p_n^\mu(t)$. A densidade de p^μ é definida como

$$T^{\mu 0}(\mathbf{r}, t) \equiv c \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)). \quad (2.137)$$

⁵ Aqui, estamos seguindo a convenção adotada em [32], onde $\varepsilon^{0123} = +1$, e, conseqüentemente, $\varepsilon_{0123} = -1$. Para o caso tridimensional euclidiano, onde a métrica é δ_{ij} , temos $\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = +1$.

Já para a corrente, temos

$$T^{\mu k}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{dx_n^k(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)). \quad (2.138)$$

Podemos combinar as duas equações acima numa única expressão, isto é,

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{dx_n^\nu(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)), \quad (2.139)$$

onde $x_n^0(t) \equiv ct$. Além disso, de acordo com a equação (2.111),

$$p_n^\mu = \frac{E_n}{c^2} \frac{dx_n^\mu}{dt}, \quad (2.140)$$

donde, substituindo em (2.139), obtemos

$$T^{\mu\nu}(x) = c^2 \sum_{n=1}^N \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{E_n} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)), \quad (2.141)$$

o que nos permite concluir que $T^{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x)$.

Pelo mesmo procedimento utilizado para obter (2.124), vamos reescrever a equação (2.139) da forma

$$T^{\mu\nu}(x) = c \int d\tau \sum_{n=1}^N p_n^\mu \frac{dx_n^\nu}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)), \quad (2.142)$$

e, daí, vem que $T^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, denominado *tensor energia-momento* [32].

Para obter a lei de conservação obedecida por $T^{\mu\nu}$, tomemos sua divergência $\partial_k T^{\mu k}$. Da equação (2.138) e utilizando a propriedade (2.127), temos

$$\begin{aligned} \partial_k T^{\mu k}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{dx_n^k(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ &= - \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{dx_n^k(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^k} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ &= - \sum_{n=1}^N p_n^\mu(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ &= - \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial t} [p_n^\mu(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))] + \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\mu(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ &= - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{\mu 0}(\mathbf{r}, t) + \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\mu(t)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^0} T^{\mu 0}(\mathbf{r}, t) + \sum_{n=1}^N f_n^\mu(\tau) \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)). \end{aligned} \quad (2.143)$$

Donde,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \sum_{n=1}^N f_n^\mu(\tau) \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \equiv G^\mu, \quad (2.144)$$

sendo G^μ a *densidade de força*. Ademais, note que o termo $d\tau/dt = \gamma^{-1}$ é o inverso do fator de Lorentz.

Finalmente, se a partículas não sofrem a ação de forças, isto é, $f_n^\mu = 0$ e $p_n^\mu = \text{constante}$, então

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.145)$$

e, portanto, o tensor energia-momento é conservado. Como veremos posteriormente, o tensor-energia momento desempenha um papel fundamental na relatividade geral, onde o mesmo se faz presente nas equações de Einstein representando as fontes de campo gravitacional.

2.2 Relatividade Geral

Nesta seção, voltamos nossa atenção para a Teoria da Relatividade Geral. Esta, foi publicada de maneira segmentada em vários artigos, sendo o último deles o que contém as famosas equações de Einstein para o campo gravitacional, mais de uma década após a teoria especial da relatividade [40]. A relatividade geral caracteriza-se por ser uma teoria geral da gravitação. A construção de uma teoria relativística para o campo gravitacional advém do fato de que a ação à distância, presente na gravitação newtoniana, é claramente incompatível com o princípio da universalidade da velocidade da luz. Um passo crucial na busca desse objetivo foi o *princípio da equivalência* e que o mesmo implicava a covariância das leis físicas sob transformações gerais de coordenadas [33]. Assim, as transformações de Lorentz, que estão na base da teoria da relatividade especial, teriam de ser substituídas por transformações mais gerais, passando elas a ser apenas um caso particular na ausência do campo gravitacional.

2.2.1 O Princípio da Equivalência

Começemos por chamar a atenção para uma propriedade peculiar das forças gravitacionais, não compartilhada pelas outras forças, já há muito tempo conhecida, mas da qual, encarando-a de uma maneira nova, Einstein soube extrair importantes consequências.

Sabemos que a força gravitacional atuando sobre um corpo é dada por

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g}, \quad (2.146)$$

onde o vetor \mathbf{g} representa o campo gravitacional em módulo, direção e sentido. Sua intensidade mede a força por unidade de massa gravitacional m_g do corpo sujeito a esse campo. Por outro lado, a segunda lei de Newton nos diz que

$$m_i \mathbf{a} = m_g \mathbf{g}. \quad (2.147)$$

Através de diversas experiências ao longo da história científica, é um fato conhecido que a relação m_i/m_g é constante e independente da constituição química do corpo considerado. Portanto, mediante uma escolha conveniente de unidades, podemos fazer $m_i = m_g$, e daí

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}, \quad (2.148)$$

o que, por sua vez, significa que a trajetória do corpo em queda livre depende apenas das condições iniciais e independe de qualquer outra característica do mesmo. Einstein concluiu como consequência que nenhum campo gravitacional (estático) externo poderia ser detectado num elevador em queda livre. Pois tanto os observadores, quanto os utensílios experimentais, e, o próprio elevador, responderiam ao campo gravitacional com a mesma aceleração. Sendo assim, seja um sistema de N partículas com velocidades não relativísticas, sob a influência de um campo gravitacional externo \mathbf{g} e forças do tipo $\mathbf{F}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)$. Pela segunda lei de Newton, as equações de movimento para a k -ésima partícula serão

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = m_k \mathbf{g} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j). \quad (2.149)$$

Fazendo uma transformação não galileana

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2, \quad (2.150)$$

$$t' = t, \quad (2.151)$$

e, sendo $\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$, temos

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}'_k}{dt'^2} + \mathbf{g}. \quad (2.152)$$

Substituindo (2.152) na equação (2.149), o campo gravitacional \mathbf{g} será eliminado por uma “força inercial” $-m_k \mathbf{g}$ [41], e a equação de movimento torna-se

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}'_k}{dt'^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_j). \quad (2.153)$$

Logo, os dois referenciais irão concordar em relação às leis da mecânica, isto é, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para ambos. Todavia, o referencial em queda livre, empregando as coordenadas (\mathbf{r}', t') , não detecta o campo gravitacional. Esse processo de eliminar o campo gravitacional, mediante a passagem para um referencial em queda livre não inercial, é um dos principais resultados do princípio da equivalência.

Entretanto, na discussão acima consideramos o campo gravitacional como estático e homogêneo. Caso $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$, não teria sido possível eliminá-lo das equações de movimento através da transformação (2.150) e (2.151), isto é, analisando a situação através de um referencial não

inercial. Mas, apesar das forças inerciais não eliminarem completamente as forças gravitacionais para campos não homogêneos ou dependentes do tempo, podemos esperar que tal eliminação ainda seja possível, contanto que nos limitemos a uma pequena região no espaço e no tempo na qual os campos sejam aproximadamente constantes. Portanto, do ponto de vista matemático, pode-se formular o princípio da equivalência dizendo que, nas vizinhanças de qualquer ponto do espaço-tempo, sempre é possível introduzir um *sistema de coordenadas inercial* cuja origem esteja em queda livre na região, de maneira que, nesse sistema de referência, as leis da física são as mesmas que as leis da relatividade especial na ausência de campo gravitacional. Por sistema de coordenadas em queda livre, entende-se um sistema físico sujeito unicamente a forças gravitacionais. Por leis da relatividade especial, entende-se equações como (2.112) e (2.145).

Voltando à equação (2.153), no caso em particular em que as partículas estão sujeitas apenas à ação do campo gravitacional, ou seja, $\mathbf{F}(\mathbf{r}'_k - \mathbf{r}'_j) = 0$, temos

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'_k}{dt'^2} = 0. \quad (2.154)$$

Logo, para o referencial em queda livre, o movimento das partículas seria retilíneo e uniforme, e, assim, teríamos localmente um sistema inercial, concordando com o exposto no parágrafo precedente.

Tomando o caso relativístico, considere uma partícula livre sob a influência apenas de forças gravitacionais. De acordo com o princípio da equivalência, existe um sistema de coordenadas em queda livre ξ^α no qual sua equação de movimento é a de uma linha reta no espaço-tempo, isto é,

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.155)$$

onde o tempo próprio $d\tau$ é dado por

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\gamma} d\xi^\alpha d\xi^\gamma. \quad (2.156)$$

Façamos então uma transformação de coordenadas para um sistema arbitrário x^ν , onde o mesmo pode ser tanto um sistema em repouso no laboratório, quanto um sistema em rotação, de coordenadas curvilíneas, etc. Em suma, não há nenhuma restrição sobre a natureza de x^ν . Como se trata de uma transformação de coordenadas, então $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\nu(\tau))$ e a equação (2.155) torna-se

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Contraindo a expressão anterior com $\partial x^\mu / \partial \xi^\alpha$, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \delta_\nu^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \end{aligned} \quad (2.158)$$

onde $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu$ é a chamada *conexão afim*, definida por

$$\Gamma_{\gamma\nu}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\nu}. \quad (2.159)$$

O tempo próprio (2.156), expresso no sistema x^α será

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= \eta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (2.160)$$

onde $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ é o novo tensor métrico, definido como

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\gamma}, \quad (2.161)$$

e, assim, não sendo mais necessariamente constante como no espaço-tempo de Minkowski.

Para uma partícula sem massa, a equação de movimento no sistema inercial em queda livre também é da forma (2.155). Porém, a variável independente não pode ser o tempo próprio, pois $d\tau^2 = ds^2/c^2 = 0$. Mesmo assim, é possível utilizar outro parâmetro σ adequado, como, por exemplo, $\sigma \equiv \xi^0$. Daí, vem que

$$0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\sigma^2}, \quad (2.162)$$

$$0 = \eta_{\alpha\gamma} \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\gamma}{d\sigma}. \quad (2.163)$$

Donde, seguindo o mesmo raciocínio anterior, as equações de movimento para o fóton serão

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \frac{dx^\gamma}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad (2.164)$$

sujeitas ao vínculo

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \quad (2.165)$$

Como no caso precedente, $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu$ e $g_{\mu\nu}$ são obtidos pelas equações (2.159) e (2.161), respectivamente. Ademais, é importante ressaltar que, nas equações (2.158) e (2.164), não é necessário saber o significado de τ e σ para obter a trajetória da partícula, pois, após resolvidas, as equações fornecem $x^\mu(\tau)$ e $x^\mu(\sigma)$, de modo que é possível eliminar os parâmetros τ e σ para obter $\mathbf{r}(t)$.

Os valores do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e da conexão afim $\Gamma_{\gamma\nu}^{\mu}$ num ponto arbitrário X , fornecem informações suficientes para determinar o sistema de coordenadas inercial $\xi^{\alpha}(x^{\nu})$ numa vizinhança de X . Pois, contraindo (2.159) com $\partial\xi^{\kappa}/\partial x^{\mu}$, obtemos um sistema de equações diferenciais para ξ^{α} , isto é,

$$\Gamma_{\gamma\nu}^{\mu} \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\nu}}. \quad (2.166)$$

Tomando uma solução em série de potências

$$\xi^{\alpha}(x) = a^{\alpha} + b^{\alpha}_{\mu}(x^{\mu} - X^{\mu}) + \frac{1}{2}b^{\alpha}_{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}(x^{\mu} - X^{\mu})(x^{\nu} - X^{\nu}) + \dots, \quad (2.167)$$

sendo

$$a^{\kappa} = \xi^{\alpha}(X), \quad b^{\alpha}_{\mu} = \left. \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \right|_X, \quad (2.168)$$

é trivial verificar que a mesma satisfaz à equação (2.166) até segunda ordem em $x^{\mu} - X^{\mu}$. Além disso, combinando as equações (2.161) e (2.168), temos

$$b^{\alpha}_{\mu} \eta_{\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\nu} = g_{\mu\nu}(X). \quad (2.169)$$

Ou, em notação matricial

$$\mathbf{B}^{\top} \boldsymbol{\eta} \mathbf{B} = \mathbf{g}. \quad (2.170)$$

Portanto, dados $\Gamma_{\gamma\nu}^{\mu}$ e $g_{\mu\nu}$ num ponto X , o sistema de coordenadas inercial ξ^{α} fica determinado até a ordem $(x^{\mu} - X^{\mu})^2$, exceto por uma pequena ambiguidade nas constantes a^{α} e b^{α}_{μ} . Note que na equação (2.169), assim como em (2.27), temos 10 equações independentes. Logo, as 16 componentes de b^{α}_{μ} são mais do que suficiente para resolvê-las. Os 6 parâmetros restantes de b^{α}_{μ} correspondem às transformações de Lorentz homogêneas, isto é, 3 rotações espaciais e 3 *boosts*, sob as quais a métrica $\eta_{\alpha\gamma}$ é invariante. Então, os termos b^{α}_{μ} são determinados por (2.168) até a “precisão” de uma transformação de Lorentz $b^{\alpha}_{\mu} \rightarrow \Lambda^{\alpha}_{\nu} b^{\nu}_{\mu}$ [com a ajuda de (2.27), é fácil ver que uma transformação desse tipo não altera as equações (2.169) e (2.170)]. Já os termos a^{α} são ambíguos pois são alterados por translações no espaço-tempo. Em suma, a ambiguidade na solução de $\xi^{\alpha}(x)$ apenas reflete o fato que, se ξ^{α} são coordenadas inerciais locais, então $\Lambda^{\alpha}_{\nu} \xi^{\nu} + d^{\alpha}$ também o são. Assim, como $\Gamma_{\gamma\nu}^{\mu}$ e $g_{\mu\nu}$ determinam um sistema de coordenadas inercial local até a precisão de uma transformação de Lorentz não homogênea, e, como o campo gravitacional não ocasiona efeitos consideráveis nesse referencial, não nos deve causar espanto ou surpresa ao descobrir que todos os efeitos gravitacionais estão contidos em $\Gamma_{\gamma\nu}^{\mu}$ e $g_{\mu\nu}$, nos revelando a natureza geométrica da interação gravitacional. Essa geometrização da gravidade, torna-se mais clara se traçarmos um paralelo com uma propriedade bem conhecida da geometria não euclidiana, pois, assim como o princípio da equivalência nos permite estruturar um sistema de coordenadas local onde o intervalo invariante é caracterizado pela métrica de Minkowski e as leis físicas são as da relatividade especial, numa superfície curva, é possível estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas local no qual as distâncias podem ser calculadas pelo teorema de Pitágoras. Portanto, diz-se que o próprio espaço-tempo curva-se na presença do campo gravitacional, sendo plano apenas localmente [33].

2.2.2 O Princípio da Covariância Geral

Na seção anterior, apresentamos uma maneira de revelar os efeitos da gravitação nos sistemas físicos através do princípio da equivalência: primeiramente, consideramos um sistema inercial local em queda livre e, para esse sistema, escrevemos uma lei física válida na ausência de campos gravitacionais, isto é, válida na relatividade especial (por exemplo, $d^2\xi^\alpha/d\tau^2 = 0$). Em seguida, fizemos uma transformação de coordenadas para um sistema arbitrário, descobrindo assim a forma da referida lei física na presença de um campo gravitacional. No caso da equação (2.158) ou (2.164), poderíamos ter obtido a relação entre a conexão $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu$ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, e, daí, resolver as equações de movimento. É possível utilizar o mesmo procedimento para toda uma miríade de leis físicas da relatividade especial. Todavia, é mais conveniente partir de outro princípio, decorrente do princípio da equivalência, chamado *princípio da covariância geral*. Este último, afirma que uma equação (lei física) é válida na presença de gravitação se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a) A equação é válida na ausência de gravitação, isto é, está de acordo com as leis da Teoria da Relatividade Especial, na qual $g_{\mu\nu}$ é igual ao tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e a conexão $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu$ é nula;
- b) A equação é covariante mediante uma transformação geral de coordenadas, ou seja, preserva sua forma sob uma transformação arbitrária $x^\mu \rightarrow x'^\mu$.

Para ver que o princípio da covariância geral decorre do princípio da equivalência, considere um campo gravitacional arbitrário e uma equação que satisfaz às duas condições acima. Conforme o princípio da equivalência, na vizinhança de qualquer ponto do espaço-tempo existe uma gama de sistemas inerciais locais (diferindo uns dos outros por transformações de Lorentz) nos quais os efeitos gravitacionais são ausentes. De acordo com a condição a), nossa equação é satisfeita em tais sistemas. De b), conclui-se que se a equação é válida em qualquer sistema de coordenadas, por conseguinte será correta em todos os outros. Logo, devido à veracidade da nossa equação no sistema inercial local, ela é válida em todos os sistemas de coordenadas, e, por conseguinte, na presença de gravitação.

Segundo o princípio da covariância geral, as leis físicas devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em qualquer sistema de coordenadas. Matematicamente, essas mesmas leis deverão ser formuladas de uma maneira independente do referencial onde nos encontramos, qualquer que ele seja. Da discussão ao final da seção 2.1.4, elas carecem ser expressas numa forma manifestamente covariante, de caráter tensorial. Logo, há uma generalização de que todos os referenciais, e não apenas os inerciais, são equivalentes. Essa é a razão do nome relatividade geral.

Atentemos ainda para o chamado *princípio do acoplamento mínimo* [42]. Esse princípio nos diz que, ao generalizarmos expressões bem conhecidas na relatividade especial para o caso de onde há presença de campos gravitacionais, devemos fazê-lo da maneira mais econômica

possível, evitando o aparecimento explícito de termos contendo os tensores de curvatura⁶. Como uma aplicação direta desse princípio, considere uma partícula em queda livre descrevendo uma trajetória $x^\mu(\tau)$ no espaço-tempo, sendo τ o tempo próprio da partícula. De acordo com equação (2.160), a métrica será

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.171)$$

Donde, combinando com a equação (2.98), obtém-se a expressão da ação para uma partícula em queda livre num campo gravitacional

$$S = -mc \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.172)$$

Tomando a variação δS , temos

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_P^Q \frac{1}{2} \frac{\delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}{\sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}} \\ &= -mc \int_P^Q \frac{1}{2} \frac{\delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}{ds} \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} &= -m \int_P^Q \frac{1}{2} \frac{(\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2 g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu)}{d\tau} \\ &= -m \int_P^Q \frac{1}{2} (\delta g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu dx^\nu + 2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta dx^\nu), \end{aligned} \quad (2.174)$$

onde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ é a quadrivelocidade da partícula. Empregando o método de integração por partes e a propriedade $\delta dx^\nu = d\delta x^\nu$, a equação anterior torna-se

$$\begin{aligned} \delta S &= -m g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta x^\nu \Big|_P^Q - m \int_P^Q \frac{1}{2} [\delta g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu dx^\nu - 2 d(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu) \delta x^\nu] \\ &= -m \dot{x}_\mu \delta x^\mu \Big|_P^Q - m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{2} \left[\delta g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2 \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu) \delta x^\nu \right], \end{aligned} \quad (2.175)$$

onde na última passagem usamos o tempo próprio como parametrização na segunda integral. Considerando os extremos fixos, isto é, $\delta x^\mu|_P = \delta x^\mu|_Q = 0$, o primeiro termo do lado direito da equação anterior se anula. Daí, vem que

$$\delta S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{2} [g_{\mu\nu,\alpha} \delta x^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2 g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\mu \delta x^\nu - 2 g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu \delta x^\nu], \quad (2.176)$$

onde $g_{\mu\nu,\alpha} \equiv \partial_\alpha g_{\mu\nu}$. Finalmente, utilizando a identidade

$$g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\alpha + g_{\alpha\nu,\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\mu) \quad (2.177)$$

na equação (2.176), obtemos

$$\delta S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \delta x^\alpha \left[-g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right]. \quad (2.178)$$

⁶ Veja a seção 2.2.5.

Pelo princípio da mínima ação, $\delta S = 0$, logo,

$$\ddot{x}_\alpha + \{\mu\nu, \alpha\} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (2.179)$$

onde usamos a operação de abaixamento $g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu = \ddot{x}_\alpha$, semelhante à (2.75). Convém destacar que todos os resultados estabelecidos na seção 2.1.4 para o caso do espaço-tempo de Minkowski são válidos na presença de gravitação, bastando trocar $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e as transformações do grupo de Lorentz por transformações gerais de coordenadas.

Voltando à equação (2.179), os termos $\{\mu\nu, \alpha\}$, são denominados *símbolos de Christoffel de primeiro tipo* e definidos por

$$\{\mu\nu, \alpha\} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.180)$$

Contraindo a expressão (2.179) com o tensor métrico contravariante $g^{\lambda\alpha}$, isto é, o inverso do tensor métrico covariante, e, levando em conta que $g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta_\mu^\lambda$, temos

$$\ddot{x}^\lambda + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (2.181)$$

onde as quantidades $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ são nomeadas como *símbolos de Christoffel de segundo tipo* e expressas por

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \equiv g^{\lambda\alpha} \{\mu\nu, \alpha\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.182)$$

Comparando as equações (2.158) e (2.181), podemos fazer a identificação

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}. \quad (2.183)$$

Logo, a expressão da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ em função do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é dada pelos símbolos de Christoffel de segundo tipo. Ademais, conforme a equação (2.182), a conexão é simétrica nos índices inferiores, isto é, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$. As equações diferenciais (2.158) e (2.181) são denominadas *equações geodésicas*. Elas governam o movimento de partículas materiais na presença de um campo gravitacional, podendo ser encaradas como uma generalização da segunda lei na gravitação newtoniana [43].

É importante ressaltar que apesar da equação diferencial (2.181) ter como variável independente o tempo próprio τ , a mesma se mantém invariante para qualquer parâmetro λ que varie linearmente com τ , isto é

$$\lambda = a\tau + b, \quad (2.184)$$

onde a e b são constantes. Denomina-se *parâmetro afim* qualquer parâmetro que satisfaz à equação (2.184) [42]. Um exemplo imediato de parâmetro afim é o comprimento de arco (intervalo) s , pois $s = c\tau + \text{constante}$. Daí, reescreve-se a equação geodésica (2.181) da forma

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu U^\gamma U^\nu = 0, \quad (2.185)$$

sendo $U^\mu = dx^\mu/ds$ definido em (2.85). Ainda, note que de (2.171), conclui-se

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1, \quad (2.186)$$

o que constitui uma *integral primeira* do movimento de partículas massivas, assim como na relatividade especial em (2.86). Geodésicas nas quais o vínculo (2.186) é satisfeito são ditas geodésicas do tipo tempo.

Se considerarmos a ação como função das coordenadas, de maneira que em δS consideramos apenas trajetórias reais, e, sendo o ponto inicial fixo e o ponto final variável, então, o segundo termo da equação (2.175) se anula e temos que $p_\mu = m\dot{x}_\mu = -\partial_\mu S$. Ademais, de (2.186), obtém-se $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = c^2$, donde $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = m^2 c^2$. Daí, vem que

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2 c^2, \quad (2.187)$$

que é a equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula num campo gravitacional e generalização de (2.116). É importante ressaltar que a equação (2.187) está em conformidade com o princípio do acoplamento mínimo previamente mencionado.

Como mencionado na seção 2.2.1, as equações geodésicas sob a forma (2.181) ou (2.185) não são convenientes na propagação de sinais luminosos, pois, ao longo da trajetória de um raio luminoso temos $d\tau^2 = ds^2/c^2 = 0$ e os termos da equação geodésica divergem. Para contornar esse problema, vamos utilizar o fato de que a direção de propagação de um raio de luz em óptica geométrica é determinada pelo vetor de onda, tangente ao raio. Por conseguinte, podemos escolher um parâmetro afim σ tal que o quadri vetor de onda é dado por $k^\mu \equiv dx^\mu/d\sigma$. Nesse caso, $dx^\mu/d\sigma$ é o momento do fóton, em contraste com o caso para partículas massivas, onde o momento é dado por $p^\mu = mu^\mu$ [32]. Assim, a equação geodésica (2.164) para o fóton toma a forma

$$\frac{dk^\mu}{d\sigma} + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu k^\gamma k^\nu = 0. \quad (2.188)$$

Já para a integral primeira (2.165),

$$g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad (2.189)$$

a qual caracteriza as geodésicas do tipo luz.

Na aproximação da óptica geométrica, onde podemos introduzir a noção de *raio de luz*, linhas cujas tangentes em cada ponto coincidem com a direção de propagação da onda [32], temos $k_\mu = -\partial_\mu \psi$, onde ψ é a eikonal. Substituindo esse resultado na expressão (2.189), obtemos a equação diferencial da eikonal para um raio de luz num campo gravitacional, isto é,

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (2.190)$$

Concluindo, dado um tensor métrico $g_{\mu\nu}$, podemos calcular todos os termos da conexão $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu$ através da equação (2.182), e, assim, construir e resolver as equações geodésicas obtendo

a trajetória da partícula no espaço-tempo. Todavia, vale a pena comentar sobre um método alternativo, porém, mais eficaz e direto, para obter as equações geodésicas e os termos não nulos da conexão. Sendo assim, a despeito de termos como ponto de partida a ação (2.172), obtida por considerações físicas, ela possui pouca praticidade, pois, considerando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.191)$$

e o fato da lagrangiana em (2.172) possuir uma raiz quadrada, isso pode acarretar cálculos enfadonhos e desnecessários. Portanto, vamos retornar à equação (2.173), ou seja,

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_P^Q \frac{1}{2} \frac{\delta (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}{ds} \\ &= -mc \int_P^Q \frac{1}{2} \frac{(\delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2 g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu)}{ds}. \end{aligned} \quad (2.192)$$

Utilizando a propriedade

$$\delta dx^\nu = d\delta x^\nu = ds \frac{d}{ds} \delta x^\nu = ds \delta \left(\frac{dx^\nu}{ds} \right) = ds \delta U^\nu \quad (2.193)$$

e mudando a variável de integração para o intervalo s , a equação (2.192) torna-se

$$\delta S = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds \delta \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \right). \quad (2.194)$$

Como na variação $\delta S = 0$ o fator multiplicativo $-mc$ é irrelevante, então, a lagrangiana

$$K = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, \quad (2.195)$$

por meio das equações de Euler-Lagrange, fornece explicitamente tanto as equações geodésicas, quanto os termos não nulos da conexão $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu$. De maneira mais geral, podemos reescrever a equação anterior na forma

$$K = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.196)$$

onde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ e λ um parâmetro afim. Esse método pode ser utilizado qualquer que seja a natureza da curva geodésica, o que as difere é o valor da integral primeira $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \text{constante}$, pois sempre é possível escolher um parâmetro afim tal que [42]

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \begin{cases} +1, & \text{geodésica do tipo tempo.} \\ 0, & \text{geodésica do tipo luz.} \\ -1, & \text{geodésica do tipo espaço.} \end{cases} \quad (2.197)$$

2.2.3 Distâncias e Intervalos de Tempo

Na relatividade geral, como todos os sistemas de referência são equivalentes, a escolha das coordenadas no espaço-tempo $x^\mu = (x^0, x^i)$ é completamente arbitrária. Nesta seção, veremos

como é possível determinar a partir dos valores das coordenadas x^μ as distâncias e os intervalos de tempo reais. Por questões de brevidade, iremos apenas obter os resultados que serão utilizados posteriormente. Uma excelente discussão sobre o assunto pode ser encontrada em [44].

Determinaremos primeiramente a ligação entre o tempo real, denotado por τ , e a coordenada temporal x^0 . Para isso, considere dois eventos infinitesimalmente separados ocorrendo num mesmo ponto do espaço, isto é, $dx^i = 0$ ou ainda $dx^\mu = \delta_0^\mu dx^0$. Por outro lado, $ds = cd\tau$. Daí, vem que

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} \delta_0^\mu dx^\mu \delta_0^\nu dx^\nu = g_{00} (dx^0)^2, \quad (2.198)$$

donde

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x)} dx^0. \quad (2.199)$$

Para o tempo decorrido entre dois eventos arbitrários ocorrendo num mesmo ponto do espaço,

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}(x)} dx^0 + \text{constante}. \quad (2.200)$$

As relações (2.199) e (2.200) determinam os tempos reais ou, como dizemos, o tempo próprio num dado ponto do espaço-tempo em função da coordenada temporal x^0 . Aqui, é conveniente apontar que no caso da relatividade especial, temos $g_{00} = \eta_{00} = 1$ e, portanto, o tempo coordenado t e o tempo próprio τ diferem no máximo por uma constante. Esse resultado é compatível com a expressão (2.23), pois para eventos sem separação espacial estamos no referencial de repouso do relógio, de maneira que $v(t) = 0$ em (2.23).

Agora, vamos determinar o elemento de distância espacial dl , ou, a *distância própria*. Na relatividade especial, dl é simplesmente definido como o intervalo infinitesimal entre dois eventos que ocorrem no mesmo instante, isto é, $dx^\mu = \delta_i^\mu dx^i$. Todavia, na relatividade geral, esse procedimento normalmente não é correto, pois, conforme a equação (2.199), o tempo próprio num campo gravitacional possui uma dependência variável com a coordenada temporal x^0 [32].

Para determinar dl , procedemos do seguinte modo: considere dois observadores com coordenadas espaciais x^i constantes, denominados A e B , separados espacialmente de dx^i . Num certo evento X do espaço-tempo, um sinal luminoso é emitido por A em direção à B , sendo instantaneamente refletido por este e novamente captado por A (veja a Figura 8). Se o tempo próprio medido pelo relógio de A entre a emissão e recepção é $d\tau_A$, então a distância própria dl é definida por $dl \equiv cd\tau_A/2$.

Sendo $ds^2 = 0$ na propagação de sinais luminosos, então, para o trecho compreendido entre a emissão e a reflexão, temos

$$0 = g_{00} (dx_{A \rightarrow B}^0)^2 + 2 g_{0i} dx^i (dx_{A \rightarrow B}^0) + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.201)$$

que é uma equação do segundo grau em $dx_{A \rightarrow B}^0$. A solução é dada por

$$dx_{A \rightarrow B}^0 = \frac{-g_{0i} dx^i + \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{00} g_{ij}) dx^i dx^j}}{g_{00}}, \quad (2.202)$$

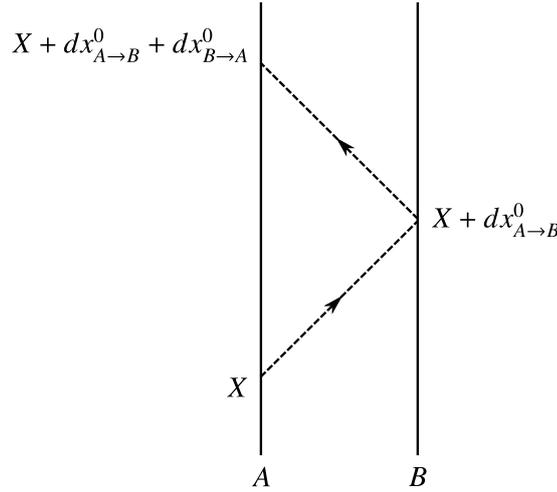


Figura 8 – Esquema representando o procedimento da troca de sinais luminosos entre os observadores A e B. A emissão de A ocorre no evento X, a reflexão por B em $X + dx_{A \rightarrow B}^0$, e a recepção final de A em $X + dx_{A \rightarrow B}^0 + dx_{B \rightarrow A}^0$.

onde usamos a identidade $(g_{0i} dx^i)^2 = g_{0i} g_{0j} dx^i dx^j$.

Para o trecho de volta, entre a reflexão e a recepção final do pulso luminoso, basta fazer $dx^i \rightarrow -dx^i$ e $dx^j \rightarrow -dx^j$ na equação (2.202). Daí, vem que

$$dx_{B \rightarrow A}^0 = \frac{g_{0i} dx^i + \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{00} g_{ij}) dx^i dx^j}}{g_{00}}. \quad (2.203)$$

De acordo com a equação (2.199), $cd\tau_A = \sqrt{g_{00}} (dx_{A \rightarrow B}^0 + dx_{B \rightarrow A}^0)$. Logo, a distância própria dl será

$$dl = \sqrt{\left(\frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j}. \quad (2.204)$$

Essa expressão determina a distância em função dos elementos das coordenadas espaciais. Já para dl^2 , temos

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.205)$$

onde

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \quad (2.206)$$

é o tensor métrico tridimensional que determina a métrica do espaço, isto é, suas propriedades geométricas. As equações (2.206) estabelecem uma ligação entre a métrica do espaço real e a métrica do espaço-tempo quadridimensional. Note que apenas quando $g_{0i} = 0$, temos $\gamma_{ij} = -g_{ij}$.

Como último comentário, vale ressaltar que os termos $g_{\mu\nu}$ dependem, em geral, de x^0 , de modo que a métrica espacial (2.206) também varia com o tempo. Logo, não há sentido em integrar dl , pois tal integração dependeria da linha de universo escolhida entre os dois pontos espaciais dados. Consequentemente, na relatividade geral, a distância entre os corpos só tem sentido localmente. Somente em casos onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ não depende do tempo, ou seja,

quando a integral $\int dl$ sobre uma curva espacial tem um sentido determinado, é que a distância também pode ser definida em regiões finitas [32].

2.2.4 A Derivada Covariante

Iniciamos esta seção apontando uma característica comum aos espaços-tempos curvos porém ausente no caso plano da geometria de Minkowski: objetos do tipo $\partial_\nu V^\mu$ ou $\partial_\nu T^\mu_\kappa$ não formam tensores em geral. Tomando como exemplo $\partial_\nu V^\mu$, podemos facilmente nos certificar desse fato,

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} V^\lambda. \quad (2.207)$$

A equação anterior revela um problema, pois, se as leis físicas devem ser covariantes sob transformações gerais de coordenadas, uma equação que contenha um operador diferencial ∂_μ certamente não terá a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas. Note que apenas no caso em que as segundas derivadas se anulam, isto é, os termos x'^μ são funções lineares dos x^μ , a operação usual de derivação não é problemática. No caso particular das transformações de Lorentz, $\partial x'^\mu / \partial x^\nu = \Lambda^\mu_\nu = \text{constante}$. Consequentemente, se faz necessário procurar um tensor que desempenha, em coordenadas arbitrárias x^μ , o mesmo papel que o tensor $\partial_\mu V^\nu$ no espaço-tempo (plano) de Minkowski.

Para solucionarmos esse infortúnio, primeiramente salientamos que, através das regras de transformação apresentadas na seção 2.1.4, pode-se mostrar que a conexão transforma-se segundo

$$\Gamma'^\mu_{\rho\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}. \quad (2.208)$$

Ou, utilizando

$$\frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^\rho} (\delta'^\mu_\nu) = \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x'^\rho \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} = 0, \quad (2.209)$$

obtem-se também

$$\Gamma'^\mu_{\rho\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}. \quad (2.210)$$

As equações (2.208) e (2.210) mostram que a conexão não possui caráter tensorial. Entretanto, o fato de o termo com a derivada segunda ser o mesmo, no tocante à transformação de coordenadas, nos permite concluir que dadas duas conexões $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e $\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, a diferença $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ é sempre um tensor.

Podemos construir uma quantidade tensorial combinando as expressões (2.207) e (2.210). Usando (2.210), percebe-se que

$$\begin{aligned} \Gamma'^\mu_{\rho\nu} V'^\rho &= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \right) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} V^\eta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} V^\sigma, \end{aligned} \quad (2.211)$$

a qual, adicionada à relação (2.207), nos dá

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \Gamma'^{\mu}_{\rho\nu} V'^{\rho} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\kappa} V^{\sigma} \right). \quad (2.212)$$

Daí, definimos a *derivada covariante* como

$$\nabla_{\nu} V^{\mu} = V^{\mu}_{;\nu} \equiv \partial_{\nu} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} V^{\lambda}, \quad (2.213)$$

donde, pela equação (2.212), é um tensor, ou seja,

$$\nabla'_{\nu} V^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} \nabla_{\kappa} V^{\lambda}, \quad (2.214)$$

e, portanto, está de acordo com todas as operações da álgebra tensorial.

Definido o conceito de derivada covariante, vejamos a razão pela qual a noção de derivada não pôde ser tomada de forma usual, isto é, procedendo de $V^{\mu}(x + dx) - V^{\mu}(x) = \partial_{\nu} V^{\mu} dx^{\nu}$. Assim, partindo da equação (2.213), temos

$$V^{\mu}(x + dx) - V^{\mu}(x) + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} V^{\lambda} dx^{\nu} = \left(\partial_{\nu} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} V^{\lambda} \right) dx^{\nu} = \nabla_{\nu} V^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.215)$$

de modo que definimos a diferencial de um vetor V^{μ} por

$$DV^{\mu} \equiv dV^{\mu} - \delta V^{\mu} = V^{\mu}(x + dx) - \left[V^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(x) V^{\lambda} dx^{\nu} \right], \quad (2.216)$$

onde

$$V^{\mu} \rightarrow V^{\mu} - \delta V^{\mu} = V^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(x) V^{\lambda} dx^{\nu} \quad (2.217)$$

é um procedimento denominado *transporte paralelo*. Num sistema de coordenadas arbitrário (ou curvilíneo), não podemos comparar diretamente $V^{\mu}(x)$ com $V^{\mu}(x + dx)$ pois é preciso que os dois vetores se encontrem num mesmo ponto do espaço. Logo, com o auxílio da conexão, devemos deslocar um dos vetores através de (2.217) até o encontro do outro, para, somente depois disso efetuar a diferença entre ambos. Em coordenadas cartesianas retangulares, $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = 0$, e as diferenciais DV^{μ} e dV^{μ} coincidem. Geometricamente, o transporte paralelo de um vetor caracteriza-se por deixar invariante o ângulo entre o vetor transladado e o vetor tangente à curva na qual se dá o deslocamento.

Para obter o efeito de um transporte paralelo num vetor covariante, atentemos para o fato do produto escalar $V_{\mu} V^{\mu}$ ser invariante sob tal operação, isto é, $\delta(V_{\mu} V^{\mu}) = 0$. Daí, vem que

$$V^{\mu} \delta V_{\mu} = -V_{\mu} \delta V^{\mu} = \underbrace{V_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} V^{\lambda} dx^{\nu}}_{\mu \leftrightarrow \lambda} = V_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.218)$$

e, assim, rearrumando os termos da equação anterior, temos

$$\delta V_{\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda} dx^{\nu}. \quad (2.219)$$

Portanto, sendo $DV_\mu \equiv dV_\mu - \delta V_\mu = \nabla_\nu V_\mu dx^\nu$, a derivada covariante $\nabla_\nu V_\mu$ será

$$\nabla_\nu V_\mu = V_{\mu;\nu} = \partial_\nu V_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda. \quad (2.220)$$

A generalização para campos tensoriais de ordem superior é direta, bastando apenas aplicar as expressões (2.213) e (2.220) para cada índice do tensor separadamente, ou seja,

$$\nabla_\sigma T_{\nu\cdots}^{\mu\cdots} = \partial_\sigma T_{\nu\cdots}^{\mu\cdots} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu T_{\nu\cdots}^{\lambda\cdots} + \cdots - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda T_{\lambda\cdots}^{\mu\cdots} - \cdots. \quad (2.221)$$

Além disso, para um escalar φ , a derivada covariante coincide com a usual, $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$.

Mostremos que a derivada covariante do tensor métrico é zero. Primeiramente, já que $V_{\mu;\nu}$ é um tensor, deveremos ter

$$V_{\mu;\nu} = g_{\mu\lambda} V_{;\nu}^\lambda. \quad (2.222)$$

Por outro lado, tomando a derivada covariante de ambos os lados da expressão $V_\mu = g_{\mu\lambda} V^\lambda$, temos

$$V_{\mu;\nu} = g_{\mu\lambda;\nu} V^\lambda + g_{\mu\lambda} V_{;\nu}^\lambda. \quad (2.223)$$

Comparando (2.222) e (2.223), concluímos que, de fato,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \quad (2.224)$$

Até aqui, sempre consideramos a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ como simétrica, isto é, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$. Entretanto, há ocasiões em que isso não é verdade, e, em tais casos, temos um espaço com torção, onde o tensor de *torção* é definido por [45]

$$T_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right). \quad (2.225)$$

Escrevendo (2.224) de forma explícita e considerando expressões similares através de permutações cíclicas dos índices μ , ν , λ , é possível mostrar que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + T_{\mu\nu}^\lambda + g^{\lambda\sigma} (T_{\mu\sigma}^\rho g_{\rho\nu} + T_{\nu\sigma}^\rho g_{\rho\mu}). \quad (2.226)$$

Neste trabalho, trataremos apenas de casos em que a conexão é simétrica.

Por fim, vale ressaltar que através do princípio do acoplamento mínimo, é possível obter as equações geodésicas (2.185) ou (2.188), por exemplo. Na relatividade especial, a equação de movimento de uma partícula livre é $dU^\mu/ds = 0$, ou ainda $dU^\mu = 0$, onde $U^\mu = dx^\mu/ds$ é a quadrivelocidade. Logo, em coordenadas curvilíneas, essa equação se generaliza como $DU^\mu = U^\mu_{;\nu} dx^\nu = 0$. Donde, dividindo por ds , recupera-se a (2.185). Da mesma forma, na ausência de gravitação, o quadrivetor de onda não varia ao longo de um raio de luz que se propaga no vácuo, pois a estrutura do cone de luz é sempre a mesma, logo, $dk^\mu = 0$. Num campo gravitacional, essa equação toma a forma $Dk^\mu = k^\mu_{;\nu} dx^\nu = 0$. Dividindo por $d\sigma$ e notando que $k^\nu = dx^\nu/d\sigma$, obtém-se novamente a expressão (2.188).

2.2.5 O Tensor de Curvatura

Suponha que nos seja dado um tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ arbitrário, tal que $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$. Sendo assim, a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ possui termos não nulos e a derivada covariante é diferente da derivada ordinária. Entretanto, essas condições não são suficientes para afirmarmos que o referido espaço-tempo é curvo, isto é, com a presença de gravitação. Por exemplo, se no espaço-tempo de Minkowski, utilizarmos coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) para a descrição do espaço tridimensional, é fácil ver que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.227)$$

sendo o tensor métrico

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag} \left(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (2.228)$$

e os termos não nulos da conexão

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \text{ctg } \theta. \quad (2.229)$$

Todavia, nesse caso o espaço-tempo é plano, pois apenas fizemos a transformação de coordenadas habitual

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.230)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.231)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.232)$$

Esse exemplo ilustra que se faz necessário algum critério para distinguir entre espaços-tempos curvos e planos. Como veremos a seguir, o ente responsável por tal distinção é o *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*, ou simplesmente *tensor de curvatura*.

Para definir o tensor de curvatura, seja o “paralelogramo” infinitesimal de vértices O, A, B, C cujas coordenadas são $x^\mu, x^\mu + \zeta^\mu, x^\mu + \eta^\mu, x^\mu + \zeta^\mu + \eta^\mu$, respectivamente (veja a Figura 9). Aqui, ζ^μ e η^μ são quantidades infinitesimais. Procederemos assim: primeiro deslocamos paralelamente o quadri vetor V^μ do ponto O até o ponto C no decurso das trajetórias OAC e OBC . Em seguida, contrapomos os quadri vetores resultantes V_{OAC}^μ e V_{OBC}^μ .

Sendo assim, para o caminho OA , temos

$$V_{OA}^\mu = V^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \zeta^\alpha, \quad (2.233)$$

onde $V^\mu = V^\mu(O)$ e $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(O)$ são calculados no ponto O . Para a conexão no ponto A , expandimos a mesma em série de potências até primeira ordem em ζ^β ,

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu(A) = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu \zeta^\beta. \quad (2.234)$$

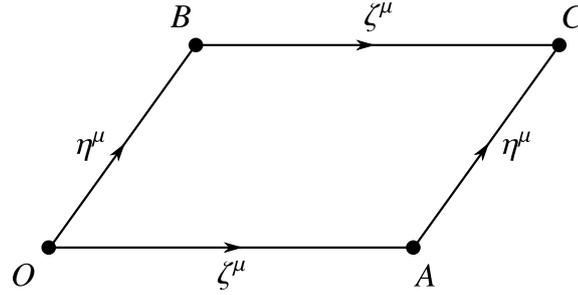


Figura 9 – “Paralelogramo” infinitesimal $OACB$ onde é efetuado o transporte paralelo do quadrivetor V^μ ao longo das vias OAC e OBC .

Do mesmo modo que em (2.233), o transporte de A até C considerando até primeira ordem em ζ^μ e η^μ , é dado por

$$\begin{aligned} V_{OAC}^\mu &= V_{OA}^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(A) V_{OA}^\nu \eta^\alpha \\ &= V^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \zeta^\alpha - \left(\Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu \zeta^\beta \right) \left(V^\nu - \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu V^\lambda \zeta^\gamma \right) \eta^\alpha \\ &= V^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \zeta^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \eta^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu V^\lambda \zeta^\gamma \eta^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu V^\nu \zeta^\beta \eta^\alpha. \end{aligned} \quad (2.235)$$

É fácil ver que para obter V_{OBC}^μ , basta permutar ζ e η na equação anterior. Daí, vem que

$$V_{OBC}^\mu = V^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \eta^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu \zeta^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu V^\lambda \eta^\gamma \zeta^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu V^\nu \eta^\beta \zeta^\alpha. \quad (2.236)$$

Computando a diferença $\Delta V_{OC}^\mu \equiv V_{OAC}^\mu - V_{OBC}^\mu$, vem,

$$\begin{aligned} \Delta V_{OC}^\mu &= \underbrace{\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu V^\lambda \zeta^\gamma \eta^\alpha}_{\lambda \rightarrow \nu \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \beta} - \underbrace{\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu V^\lambda \zeta^\alpha \eta^\gamma}_{\lambda \rightarrow \nu \rightarrow \gamma \rightarrow \beta} - \underbrace{\Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu V^\nu \zeta^\beta \eta^\alpha}_{\alpha \leftrightarrow \beta} + \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu V^\nu \zeta^\alpha \eta^\beta \\ &= - \left(\Gamma_{\nu\beta,\alpha}^\mu - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\gamma \right) V^\nu \zeta^\alpha \eta^\beta \\ &= -\frac{1}{2} R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu \left(\zeta^\alpha \eta^\beta - \zeta^\beta \eta^\alpha \right), \end{aligned} \quad (2.237)$$

onde usamos a propriedade antissimétrica $R_{\nu\alpha\beta}^\mu = -R_{\nu\beta\alpha}^\mu$. O termo $\zeta^\alpha \eta^\beta - \zeta^\beta \eta^\alpha$ está relacionado com a área do paralelogramo e

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu \equiv \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^\mu - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\gamma \quad (2.238)$$

é o tensor de curvatura. O caráter tensorial de $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ resulta de que na equação (2.237) temos um quadrivetor do lado direito, isto é, a diferença ΔV_{OC}^μ dos valores de um quadrivetor num mesmo ponto. Note que conforme à equação (2.237), $R_{\nu\alpha\beta}^\mu = 0 \Leftrightarrow \Delta V_{OC}^\mu = 0$.

Naturalmente, no espaço-tempo plano o tensor de curvatura é zero, pois, em tal caso é possível adotar um sistema de coordenadas global onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$. Se $R_{\nu\alpha\beta}^\mu = 0$, então, devido à sua natureza tensorial, também será nulo em qualquer outro sistema de coordenadas. Tudo isso está ligado ao fato de que o transporte paralelo é uma operação unívoca no espaço-tempo plano, ou seja, $\Delta V_{OC}^\mu = 0$ na equação (2.237).

Reciprocamente, se $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$, o espaço-tempo é plano. Consoante com a seção 2.2.1, é possível escolher um sistema de coordenadas local, denominado *sistema de coordenadas geodésico* [42], onde, de acordo com as relações

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}[(x - X)^2], \quad (2.239)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = 0 + \mathcal{O}(x - X), \quad (2.240)$$

os efeitos da curvatura podem ser aproximadamente negligenciados. Se $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$, então $\Delta V_{OC}^\mu = 0$ e o transporte paralelo é unívoco. Assim, transportando paralelamente o sistema geodésico por todo o espaço-tempo, podemos construir um sistema de coordenadas de Minkowski de maneira absoluta, constatando a natureza plana do espaço-tempo [32].

Do exposto acima, vemos que a anulação do tensor de Riemann, $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$, é uma condição necessária e suficiente para que o espaço-tempo seja plano.

Salientamos agora algumas propriedades do tensor de curvatura. Por conveniência, considere o sistema de coordenadas geodésico caracterizado por (2.239) e (2.240). Daí, vem que

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} \stackrel{*}{=} \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta}, \quad (2.241)$$

$$g_{\mu\nu;\lambda} \stackrel{*}{=} g_{\mu\nu,\lambda} = 0, \quad (2.242)$$

onde o símbolo “ $\stackrel{*}{=}$ ” denota que estamos utilizando um sistema de coordenadas geodésico. Da equação (2.241), imediatamente vê-se que $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = -R^\mu_{\nu\beta\alpha}$. Além disso, usando a propriedade (2.242), temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &\stackrel{*}{=} g_{\mu\lambda} R^\lambda_{\nu\alpha\beta} \\ &\stackrel{*}{=} g_{\mu\lambda} \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - g_{\mu\lambda} \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \\ &\stackrel{*}{=} \partial_\alpha (g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta}) - \partial_\beta (g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}) \\ &\stackrel{*}{=} \partial_\alpha \{ \nu\beta, \mu \} - \partial_\beta \{ \nu\alpha, \mu \} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} (g_{\beta\mu,\nu\alpha} - g_{\nu\beta,\mu\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\mu\beta}). \end{aligned} \quad (2.243)$$

Logo, se o espaço-tempo é curvo, mesmo utilizando coordenadas geodésicas não é possível tomar como nulas as derivadas primeiras da conexão, ou, igualmente, as derivadas segundas do tensor métrico.

Usando a equação (2.243), é trivial verificar que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0. \quad (2.244)$$

Ademais, diferenciando a expressão anterior, obtém-se a *identidade de Bianchi*

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta;\lambda} + R^\mu_{\lambda\nu\alpha;\beta} + R^\mu_{\beta\lambda\nu;\alpha} = 0. \quad (2.245)$$

Apesar de todas as propriedades anteriores terem sido obtidas em coordenadas geodésicas, elas permanecem válidas em qualquer sistema de coordenadas uma vez que são equações tensoriais.

Uma contração sobre dois índices do tensor de Riemann resulta em zero, isto é, $R^\lambda_{\lambda\mu\nu} = 0$, ou, no intitulado *tensor de Ricci*, $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. Como consequência de (2.244), este último é simétrico, quer dizer, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Uma nova contração gera o *escalar de Ricci*, $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Por fim, contraindo dois índices na identidade de Bianchi (2.245), obtemos

$$R^\nu_{\mu;\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu R. \quad (2.246)$$

Para finalizar este tópico, vejamos quantas componentes do tensor de curvatura são independentes num espaço-tempo N -dimensional. Na forma covariante, o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ é antissimétrico mediante às trocas $\mu \leftrightarrow \nu$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$. Portanto, tratando as duplas $\mu\nu$ e $\alpha\beta$ como dois índices distintos, digamos, $\mu\nu \equiv \gamma$ e $\alpha\beta \equiv \lambda$, o número de maneiras para escolher γ ou λ é $C_{N,2} = N!/2!(N-2)! = N(N-1)/2$. Além do mais, devido à simetria $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$, ou ainda $R_{\gamma\lambda} = R_{\lambda\gamma}$, então, o número de componentes independentes será

$$\frac{C_{N,2}(C_{N,2} + 1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{2} \left[\frac{N(N-1)}{2} + 1 \right]. \quad (2.247)$$

Resta-nos agora considerar a propriedade cíclica da equação (2.244). Para isso, definimos

$$B_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0, \quad (2.248)$$

donde se obtém um tensor $B_{\mu\nu\alpha\beta}$ totalmente antissimétrico, isto é, inverte o sinal mediante à troca de dois índices quaisquer. Por exemplo,

$$B_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} - R_{\nu\alpha\beta\mu} - R_{\nu\beta\mu\alpha} = -B_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (2.249)$$

Portanto, $B_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ gera $C_{N,4} = N!/4!(N-4)!$ equações de vínculo distintas. Combinando esse resultado com a relação (2.247), obtemos finalmente o número de componentes independentes de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{2} \left[\frac{N(N-1)}{2} + 1 \right] - \frac{N!}{4!(N-4)!} = \frac{N^2(N^2-1)}{12}. \quad (2.250)$$

Em particular, temos

$$N = \begin{cases} 2, & R_{\mu\nu\alpha\beta} \text{ possui 1 componente independente.} \\ 3, & R_{\mu\nu\alpha\beta} \text{ possui 6 componentes independentes.} \\ 4, & R_{\mu\nu\alpha\beta} \text{ possui 20 componentes independentes.} \end{cases} \quad (2.251)$$

2.2.6 A Ação de Einstein-Hilbert e as Equações de Campo da Relatividade Geral

Tendo feito a distinção entre espaços-tempos planos e curvos, podemos agora obter as equações do campo gravitacional, isto é, as expressões matemáticas obedecidas pelo tensor métrico e suas derivadas. Como já mencionado, o espaço-tempo curva-se na presença de matéria. Diante disso, e da equivalência entre massa e energia (2.105), firma-se que o espaço-tempo é

encurvado pela energia intrínseca à matéria. Em outras palavras, o tensor métrico é uma variável dinâmica, ou, uma coordenada generalizada, pois está acoplado à energia portada pela matéria.

Nosso objetivo aqui é formular a teoria da gravitação através do princípio da mínima ação e da covariância geral. Para que tal fim seja alcançado, as equações de movimento devem ser covariantes sob transformações gerais de coordenadas. Logo, a ação deve ter como integrando um escalar. Além disso, considerar o tensor métrico como variável dinâmica, significa que tomar variações $\delta g_{\mu\nu}$ na ação, e, diante disso, os escalares devem ser constituídos pelos termos de $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas. Todavia, conforme às equações (2.239) e (2.240), sempre é possível tomar coordenadas geodésicas onde $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu,\lambda} \approx 0$. Assim, somente faz sentido considerar invariantes que contêm pelo menos as derivadas segundas $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$.

Um escalar imediato que contém derivadas segundas é o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Ainda, veremos que a quantidade $d^4x\sqrt{-g}$ também é um invariante. Logo, a ação mais elementar para o campo gravitacional é da forma

$$S = a \int d^4x\sqrt{-g} R + b \int d^4x\sqrt{-g}, \quad (2.252)$$

onde a e b são constantes a serem determinadas. A ação (2.252) diz respeito à geometria do espaço-tempo, e, assim, fornece somente as equações de campo no caso de uma região sem a presença de matéria, ou seja, no vácuo. Em vista disso, deve-se adicionar um termo S_M à mesma, termo este que refere-se à matéria. Um exemplo de S_M já visto foi a ação para uma partícula em queda livre (2.172).

Em suma, vamos aplicar o princípio da mínima ação na expressão

$$S_{EH} = -\frac{c}{2\kappa} \int d^4x\sqrt{-g} (R + \Lambda) + S_M, \quad (2.253)$$

denominada *ação de Einstein-Hilbert*, onde, $\kappa = 8\pi G/c^2 = 1,86 \times 10^{-26} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$ é a constante de gravitação einsteiniana e $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ é a constante de gravitação universal [32]. O termo Λ é conhecido como *constante cosmológica*, inicialmente introduzido por Einstein em seu modelo cosmológico estático, e, posteriormente descartado devido à descoberta do astrônomo Edwin Hubble de que as galáxias estariam afastando-se umas das outras mutuamente. Atualmente, Λ tem uma outra interpretação, a qual está relacionada com o problema da *energia escura*. Ainda, a equação (2.253) está correta dimensionalmente, pois $[c/2\kappa] = \text{M} \cdot \text{T}^{-1}$ e $[d^4x\sqrt{-g} (R + \Lambda)] = \text{L}^2$, de modo que $[S_{EH}] = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$.

Antes de proceder com o cálculo de δS_{EH} , vamos derivar alguns resultados matemáticos necessários. Sendo assim, seja uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de dimensão N , cujo determinante $a \equiv \det A$ é dado pelo desenvolvimento de Laplace [46]

$$a = \sum_{j=1}^N a_{ij} \Delta^{ij}, \quad (\text{soma somente em } j) \quad (2.254)$$

onde Δ^{ij} é o cofator⁷. O somatório foi explicitado para destacar que a soma ocorre somente ao longo das colunas de A. Daí, vem que

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ik}} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{ik}} \Delta^{ij} = \sum_{j=1}^N \delta_j^k \Delta^{ij} = \Delta^{ik} = a a^{ki}, \quad (2.255)$$

pois, a_{ik} não ocorre em nenhum dos cofatores Δ^{ij} . Além disso, $A^{-1} = [a^{ij}]$ é a inversa de $A = [a_{ij}]$. Para o caso particular dos tensores $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, temos, respectivamente,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial g^{-1}}{\partial g^{\mu\nu}} = g^{-1} g_{\mu\nu}. \quad (2.256)$$

Donde, obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -g g_{\mu\nu}, \quad (2.257)$$

de forma que

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}. \quad (2.258)$$

Vejamos agora como o determinante g se transforma. Assim,

$$\begin{aligned} g' &= \det [g'_{\mu\nu}] \\ &= \det \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \right] \\ &= \det \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right] \det \left[\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \right] \det [g_{\alpha\beta}] \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g, \end{aligned} \quad (2.259)$$

o que nos mostra que g não é um escalar. Na realidade, g é uma *densidade escalar*, pois transforma-se de forma proporcional a uma determinada potência do jacobiano [42].

Por outro lado, para a quantidade $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, temos

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x. \quad (2.260)$$

Então, combinando as equações (2.259) e (2.260), obtemos o escalar

$$d^4x' \sqrt{-g(x')} = d^4x \sqrt{-g(x)} \underbrace{\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|}_{=1} = d^4x \sqrt{-g(x)}, \quad (2.261)$$

que é o elemento de volume invariante do espaço-tempo.

Agora, estamos aptos a calcular a variação δS_{EH} . Assim, temos

$$\delta S_{EH} = -\frac{c}{2\kappa} \left[\int d^4x (R + \Lambda) \delta \sqrt{-g} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta R \right] + \delta S_M. \quad (2.262)$$

⁷ O cofator de um elemento a_{ij} é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz obtida de A retirando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna.

Donde, com o auxílio de (2.257), facilmente se obtém $\delta\sqrt{-g}$, pois

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.263)$$

No que concerne à δR , temos $\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, de maneira que, juntamente com o resultado (2.263), a variação (2.262) torna-se

$$\delta S_{EH} = -\frac{c}{2K} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right\} + \delta S_M. \quad (2.264)$$

Restando agora obter $\delta R_{\mu\nu}$. Para isso, vamos utilizar coordenadas geodésicas. Da equação (2.241), vem que

$$\delta R_{\mu\nu} \stackrel{*}{=} \delta \left(\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right) \stackrel{*}{=} \partial_\lambda \left(\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) - \partial_\nu \left(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right). \quad (2.265)$$

Como as variações na conexão são obtidas pela diferença entre duas conexões, elas possuem caráter tensorial. Ademais, em coordenadas geodésicas a derivada covariante resume-se à derivada ordinária. Portanto, podemos fazer $\partial \rightarrow \nabla$ e reescrever a equação anterior na forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \left(\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) - \nabla_\nu \left(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right), \quad (2.266)$$

válida em qualquer sistema de coordenadas. Dessa forma,

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \left(\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) - \underbrace{g^{\mu\nu} \nabla_\nu \left(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \right)}_{\nu \leftrightarrow \lambda} = \nabla_\lambda \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \right) = \nabla_\lambda \delta V^\lambda, \quad (2.267)$$

onde

$$\delta V^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu \quad (2.268)$$

é um quadrivetor.

Vamos agora expressar a divergência de δV^λ , isto é, $\nabla_\lambda \delta V^\lambda$, de uma outra forma. Segundo à equação (2.258), teremos

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\sigma g_{\lambda\rho} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\sigma}, \quad (2.269)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \delta V^\lambda &= \partial_\lambda \delta V^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \delta V^\sigma \\ &= \partial_\lambda \delta V^\lambda + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\sigma} \delta V^\sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \delta V^\lambda \right). \end{aligned} \quad (2.270)$$

Diante disso, a integral remanescente da ação em (2.264) torna-se

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \delta V^\mu = \int_{\mathcal{V}} d^4x \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \delta V^\mu \right) = \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3x |\gamma|^{1/2} n_\mu \delta V^\mu, \quad (2.271)$$

onde, na última passagem, utilizamos o teorema da divergência quadridimensional [47], transformando uma integração sobre uma região do espaço-tempo \mathcal{V} para uma integração sobre sua fronteira $\partial\mathcal{V}$. Além disso, $\gamma \equiv \det \gamma_{ij}$, sendo γ_{ij} o tensor métrico sobre a hipersuperfície, e, n_μ o quadri vetor normal a esta última.

Como as variações são nulas na fronteira $\partial\mathcal{V}$, então $\delta V^\mu = 0$ e a integral (2.271) é zero. De modo que se reescreve a variação (2.264) da forma

$$\delta S_{EH} = -\frac{c}{2\kappa} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right] \right\} + \delta S_M, \quad (2.272)$$

faltando ainda obter δS_M .

Vamos assumir que δS_M , sendo invariante sob transformações de coordenadas, possui a forma

$$S_M \equiv \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}_M (g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (2.273)$$

Portanto, devido ao fato de $d^4x \sqrt{-g}$ ser um escalar, a lagrangiana \mathcal{L}_M é uma densidade escalar. Além disso, tomamos \mathcal{L}_M como função do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas primeiras $g_{\mu\nu,\alpha}$ pois assim obtém-se equações diferenciais de segunda ordem. Calculando a variação δS_M , e, usando o teorema da divergência considerando $\delta g^{\mu\nu} = 0$ na fronteira de integração, temos

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\alpha g^{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} d^4x \delta g^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} + \frac{1}{c} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \Big|_{\partial\mathcal{V}} \\ &= \frac{1}{2c} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \Theta_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.274)$$

onde introduzimos o tensor covariante de segunda ordem

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\}. \quad (2.275)$$

Logo, $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$.

Para clarificar o significado físico de $\Theta_{\mu\nu}$, ressaltamos que entre as variações da métrica $\delta g^{\mu\nu}$, destacam-se duas: as que ocasionam variações na curvatura do espaço-tempo, isto é, $\delta R_{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$. E aquelas que representam apenas mudanças triviais de coordenadas, onde $\delta R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ ⁸. Considerando o último caso, seja uma transformação infinitesimal nas coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \eta^\mu(x)$, onde $\eta^\mu(x)$ é um campo vetorial muito pequeno. Daí, vem que

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x) \\ &= (\delta_\alpha^\mu + \partial_\alpha \eta^\mu) (\delta_\beta^\nu + \partial_\beta \eta^\nu) g^{\alpha\beta}(x) \\ &\approx g^{\mu\nu}(x) + \partial^\mu \eta^\nu + \partial^\nu \eta^\mu \equiv g^{\mu\nu}(x) + \partial^{(\mu} \eta^{\nu)}. \end{aligned} \quad (2.276)$$

⁸ Enquanto para o primeiro tipo de variações há uma deformação real do espaço-tempo (as distâncias entre os pontos são alteradas), o segundo tipo corresponde à transformações entre diferentes sistemas de referência no mesmo espaço-tempo.

Por outro lado, se $g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x + \eta)$, é possível fazer uma expansão em série de potências de η^μ , ou seja,

$$g'^{\mu\nu}(x') \approx g'^{\mu\nu}(x) + \eta^\alpha \partial_\alpha g'^{\mu\nu}(x). \quad (2.277)$$

Perceba que a variação δ , usualmente utilizada na mecânica analítica e teoria clássica de campos, só leva em conta a mudança da forma funcional do campo, não considerando alteração de seu argumento. Então, combinando as equações (2.276) e (2.277), resulta em

$$\delta g^{\mu\nu} \equiv g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) \approx -\eta^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} + \partial^{(\mu} \eta^{\nu)}. \quad (2.278)$$

Donde, usando a propriedade $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$, temos $-\partial_\alpha g^{\mu\nu} = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu g^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu g^{\mu\beta}$. Substituindo esse resultado na expressão (2.278), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= \partial^\mu \eta^\nu + \partial^\nu \eta^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu g^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu g^{\mu\beta} \\ &= g^{\mu\beta} \left(\partial_\beta \eta^\nu + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu \eta^\alpha \right) + g^{\beta\nu} \left(\partial_\beta \eta^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \eta^\alpha \right) \\ &= g^{\mu\beta} \nabla_\beta \eta^\nu + g^{\beta\nu} \nabla_\beta \eta^\mu \\ &= \nabla^{(\mu} \eta^{\nu)}. \end{aligned} \quad (2.279)$$

Sob variações do gênero (2.279), a ação S_M não se altera, pois é um invariante. Logo, usando a relação anterior na equação (2.274), vem

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_M &= \frac{1}{2c} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \Theta_{\mu\nu} \nabla^{(\mu} \eta^{\nu)} \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \Theta_{\mu\nu} \nabla^\mu \eta^\nu \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla^\mu (\Theta_{\mu\nu} \eta^\nu) - (\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}) \eta^\nu \right] \\ &= \frac{1}{c} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\Sigma^\mu \Theta_{\mu\nu} \eta^\nu - \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}) \eta^\nu, \end{aligned} \quad (2.280)$$

onde usamos a propriedade simétrica $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$, o método de integração por partes e o teorema da divergência. Ainda, como de costume assumimos que as variações são nulas na fronteira de integração, $\delta\eta^\mu|_{\partial\mathcal{V}} = 0$. Portanto, como δS_M deve se anular para qualquer variação η^μ , obtemos a identidade

$$\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0, \quad (2.281)$$

ou ainda,

$$\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \quad (2.282)$$

que é uma lei de conservação manifestamente covariante. Na realidade, no espaço-tempo plano a equação anterior reduz-se à $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$, a qual pode ser obtida através da aplicação do teorema de Noether na teoria de campos clássica [34, 37].

Agora, veremos o importante resultado de $\Theta_{\mu\nu}$ para o caso da partícula em queda livre (2.172). Assim,

$$\begin{aligned} S_M &= -mc \int ds \\ &= -mc \int dx^0 \frac{ds}{dx^0} \underbrace{\int d^3x \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))}_{=1} \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[-mc^2 \frac{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}}{dx^0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \right], \end{aligned} \quad (2.283)$$

donde, conforme (2.273),

$$\mathcal{L}_M = -mc^2 \frac{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}}{dx^0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)). \quad (2.284)$$

Daí, vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\frac{mc}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \\ &= -\frac{mc}{2} \frac{dt}{ds} \left(-g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \\ &= \frac{mc}{2} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \end{aligned} \quad (2.285)$$

onde usamos a identidade $\partial g_{\alpha\beta} / \partial g^{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$, obtida a partir de $g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta_\beta^\alpha$. Substituindo o resultado acima na equação (2.275), temos

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{mc}{\sqrt{-g}} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = p_\mu \frac{dx_\nu}{dt} \frac{\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))}{\sqrt{-g}}, \quad (2.286)$$

sendo $p_\mu = m dx_\mu / d\tau = mc dx_\mu / ds$ o quadrimomento da partícula. Compare com o caso $N = 1$ na expressão (2.139). Como a equação (2.286) não está numa forma que nos permite classificar $\Theta_{\mu\nu}$ como um tensor, então, introduzindo a integral $\int dt' \delta(t' - t)$ e seguindo os mesmos passos da seção 2.1.6, resulta em

$$\Theta_{\mu\nu} = c \int d\tau p_\mu \frac{dx_\nu}{d\tau} \frac{\delta^4(x - x(\tau))}{\sqrt{-g}}. \quad (2.287)$$

Assim, sendo $\delta^4(x^\mu - x^\mu(\tau)) / \sqrt{-g}$ um escalar, p_μ e $dx_\nu / d\tau$ quadrivetores, então $\Theta_{\mu\nu}$ é um tensor. Note que (2.287) é a versão covariante generalizada da expressão (2.142). Portanto, combinando esse fato com a lei de conservação manifestamente covariante (2.282), conclui-se que $\Theta_{\mu\nu}$ caracteriza o tensor de energia-momento.

Finalmente, a equação (2.272) torna-se

$$\delta S_{EH} = -\frac{c}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) - \frac{\kappa}{c^2} \Theta_{\mu\nu} \right], \quad (2.288)$$

donde, para uma variação arbitrária $\delta g^{\mu\nu}$, obtemos as equações de campo da relatividade geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + \Lambda) = \frac{\kappa}{c^2}\Theta_{\mu\nu}, \quad (2.289)$$

também denominadas *equações de Einstein*. Elas relacionam a geometria do espaço-tempo (lado esquerdo) ao tensor de energia-momento (lado direito).

Concluindo esta seção, apontemos algumas propriedades de (2.289). No vácuo, $\Theta_{\mu\nu} = 0$ e $\Lambda = 0$. Daí, vem que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (2.290)$$

Contraindo com $g^{\mu\nu}$ e sabendo que $\delta_{\mu}^{\mu} = 4$, encontramos $R = 0$. Donde, substituindo na equação anterior, obtém-se

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.291)$$

É importante ressaltar que a relação (2.291) não é suficiente para afirmarmos que o espaço-tempo é plano, isto é, $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. Naturalmente, se $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, então $R_{\mu\nu} = 0$.

Aplicando o operador ∇^{μ} na expressão (2.289), temos

$$\frac{\kappa}{c^2}\nabla^{\mu}\Theta_{\mu\nu} = \nabla^{\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^{\mu}R = \underbrace{\nabla_{\mu}R^{\mu}_{\nu}}_{\text{equação (2.246)}} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}R = 0, \quad (2.292)$$

o que nos leva mais uma vez à conservação do tensor energia-momento $\nabla^{\mu}\Theta_{\mu\nu} = 0$. Assim, mesmo se no início não tivéssemos assumido que $\Theta_{\mu\nu}$ é conservado, essa condição é consequência das equações de Einstein. Tal ligação, entre as leis de conservação de $\Theta_{\mu\nu}$ e as equações de campo, permite-nos optar pelas expressões oriundas de (2.281) ou (2.282) como alternativa a alguma(s) das equações provenientes de (2.289).

2.2.7 Sistema de Coordenadas Síncrono

Para finalizarmos nossa explanação sobre relatividade geral, e, ao mesmo tempo, fazer uma preparação para os tópicos sobre cosmologia, trataremos acerca de um sistema de coordenadas bastante útil, nomeado *sistema de coordenadas síncrono* [32], ou, *sistema de coordenadas gaussiano* [33].

Considere uma região finita do espaço preenchida por um fluido denso, cujos elementos de matéria (ou partículas) constituintes estão em queda livre. Almejando obter uma descrição satisfatória do movimento do fluido, assinalamos um conjunto de coordenadas $\mathbf{R} = (R^i) = (R^1, R^2, R^3)$ para cada partícula do mesmo. Assim, seu movimento pode ser especificado por uma função $x_{\mathbf{R}}^i(t) \equiv x^i(\mathbf{R}, t)$, indicando a posição da partícula \mathbf{R} no instante t . Todavia, é mais conveniente uma descrição através da função inversa $\mathbf{R}(x^i, t) = \mathbf{R}(x^{\mu})$, a qual estabelece um campo vetorial informando o rótulo da partícula que ocupa a posição x^i no instante t . Supondo que cada partícula do fluido carrega consigo um relógio, é possível construir um sistema de

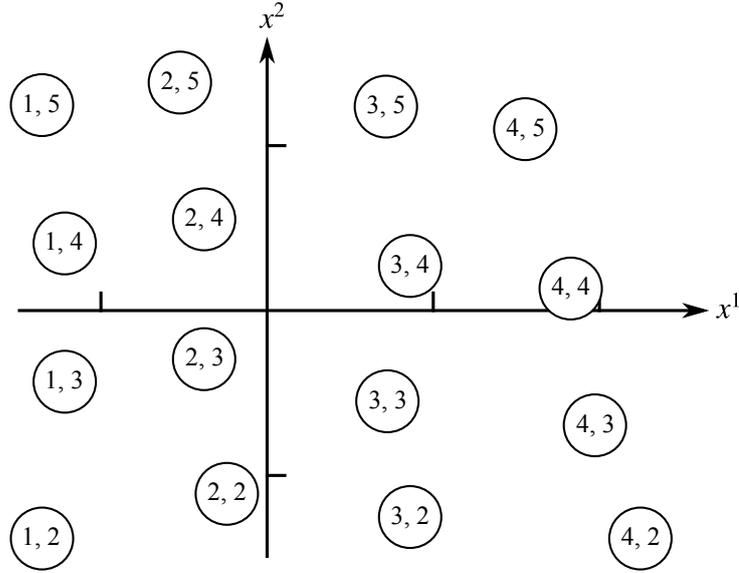


Figura 10 – Partículas do fluido num espaço bidimensional (x^1, x^2) , rotuladas por (R^1, R^2) . Apesar das partículas se moverem no sistema de coordenadas (x^1, x^2) , seus rótulos mantêm-se inalterados, como num jogo de sinuca ou bilhar, onde as bolas se movem sobre a mesa mas seus números permanecem os mesmos.

coordenadas \bar{x}^μ em que um ponto no espaço-tempo possui como coordenada espacial \mathbf{R} , e, como coordenada temporal, a indicação $t_{\mathbf{R}}$ do relógio portado por \mathbf{R} . O rótulo \mathbf{R} deve ser entendido como se fosse uma “etiqueta”, ou, um “número serial” da partícula, sendo assim imutável. Logo, em coordenadas $\bar{x}^\mu = (t_{\mathbf{R}}, \mathbf{R})$, cada partícula do fluido encontra-se fixa no espaço (veja a Figura 10). Podemos imaginar a malha de coordenadas sendo arrastada juntamente com o fluido, e, os relógios indicadores de tempo presos à malha [33].

Tendo deixado claro o sistema de coordenadas no qual estamos trabalhando, por economia de notação, façamos $\bar{x}^\mu = (t_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}) \rightarrow x^\mu = (t, \mathbf{r}) = (x^0, x^i)$. A métrica $g_{\mu\nu}$ do sistema de coordenadas síncrono possui algumas peculiaridades. Por definição, relógios (partículas) em queda livre indicam o tempo próprio, daí, o intervalo entre os pontos (t, \mathbf{r}) e $(t + dt, \mathbf{r})$ será (tomando $c = 1$)

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} \delta_t^\mu dt \delta_t^\nu dt = g_{tt} dt^2 = g_{tt} d\tau^2, \quad (2.293)$$

donde

$$g_{tt} = 1. \quad (2.294)$$

Ademais, os relógios em queda livre descrevem geodésicas no espaço-tempo. Então, substituindo $x^\mu = c\tau\delta_t^\mu$ nas equações geodésicas (2.181), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ 0 &= \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \delta_t^\alpha \delta_t^\nu \\ 0 &= \Gamma_{tt}^\mu. \end{aligned} \quad (2.295)$$

Daí, vem que

$$\Gamma_{tt}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(2 g_{t\nu,t} - g_{t,\nu}^{\rightarrow 0} \right) = g^{\mu t} g_{t,t}^{\rightarrow 0} + g^{\mu i} g_{ti,t} = 0. \quad (2.296)$$

Ou ainda, considerando que $[g^{\mu\nu}]$ é uma matriz não singular,

$$\frac{\partial g_{ti}}{\partial t} = 0. \quad (2.297)$$

Até agora deixamos em aberto a opção de ajustar os relógios transportados pelas diferentes partículas. Assim, vamos redefinir a indicação dos relógios através da transformação

$$t' = t + f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad (2.298)$$

da qual podemos concluir que

$$\frac{\partial t}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}^t - \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta_{\mu}^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}^i. \quad (2.299)$$

Além disso, conforme à regra de transformação tensorial,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial t}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial t}{\partial x'^{\nu}} g_{tt} + \left(\frac{\partial t}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial t}{\partial x'^{\nu}} \right) g_{ti} + \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\nu}} g_{ij}. \quad (2.300)$$

Então, substituindo a expressão (2.299) na equação (2.300), resulta em

$$g'_{tt} = g_{tt} = 1, \quad (2.301)$$

$$g'_{ti} = g_{ti} - \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (2.302)$$

$$g'_{ij} = g_{ij} - \frac{\partial f}{\partial x^i} g_{tj} - \frac{\partial f}{\partial x^j} g_{ti} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (2.303)$$

Desse modo, seria de grande valia uma transformação onde os termos do lado direito da equação (2.302) se cancelassem, isto é, $g_{ti} = \partial f / \partial x^i$. Em tais ocasiões,

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.304)$$

Prossigamos então com o caso de nosso interesse quando ds^2 pode ser especificado sob a forma (2.304): considere uma métrica detentora de uma *simetria esférica*, ou seja, é invariante sob rotações tridimensionais ordinárias $\mathbf{r}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$, onde $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = 1$. Diante disso, temos os seguintes invariantes rotacionais:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (2.305)$$

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = x dx + y dy + z dz = r dr, \quad (2.306)$$

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.307)$$

Donde, se r^2 é invariante, então r é invariante e, conseqüentemente, dr e $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ também são invariantes. Sendo assim, a métrica mais geral com simetria esférica é da forma [45]

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - 2B(t, r) dt dr - C(t, r) dr^2 - D(t, r) r^2 d\Omega^2. \quad (2.308)$$

Seja a transformação

$$dt' = \sqrt{A(t,r)} dt + \Phi(t,r) dr, \quad (2.309)$$

onde o fator de integração Φ assegura que a diferencial dt' seja exata, isto é,

$$\frac{\partial \Phi(t,r)}{\partial t} = \frac{\partial \sqrt{A(t,r)}}{\partial r}. \quad (2.310)$$

Daí, vem que

$$dt = \frac{1}{\sqrt{A}} (dt' - \Phi dr), \quad (2.311)$$

$$dt^2 = \frac{1}{A} (dt'^2 - 2\Phi dt' dr + \Phi^2 dr^2). \quad (2.312)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.308), obtemos

$$ds^2 = dt'^2 - 2E(t',r) dt' dr - F(t',r) dr^2 - D(t',r) r^2 d\Omega^2, \quad (2.313)$$

onde

$$E = \frac{B}{\sqrt{A}} + \Phi, \quad (2.314)$$

$$F = C - \frac{2B}{\sqrt{A}} \Phi - \Phi^2. \quad (2.315)$$

Suprimindo os sinais primos na expressão (2.313), temos uma situação condizente com as equações (2.294) e (2.297), sendo $g_{tr} = -E(t,r)$ a única componente não nula do tipo g_{ti} . Logo, conforme à equação (2.297),

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(r), \quad (2.316)$$

de maneira que E é função apenas de r . Assim, podemos realizar outra transformação com o intuito de anular o coeficiente g'_{tr} . De acordo com (2.302), vem que

$$g_{tr} = -E(r) = \frac{df}{dr}, \quad (2.317)$$

donde,

$$f(r) = - \int^r E(r) dr. \quad (2.318)$$

Portanto, a métrica (2.313) é convertida em

$$ds^2 = dt^2 - U(t,r) dr^2 - V(t,r) d\Omega^2, \quad (2.319)$$

onde U e V são novas funções que substituem E e F , respectivamente.

É factível estabelecer sistemas de coordenadas cuja métrica é dada pela equação (2.304) mesmo se o fluido em queda livre é apenas imaginário. Entretanto, tais sistemas de coordenadas

são mais utilizados em casos onde o sistema físico em questão realmente é constituído por um fluido em queda livre [33]. Como veremos em cosmologia, o próprio universo será tratado como um fluido perfeito cujas “partículas” são aglomerados de galáxias típicas.

Por fim, como as partículas do fluido possuem coordenadas espaciais fixas, a quadrive-locidade possui apenas a componente temporal não nula, isto é, $U^\mu = \delta_t^\mu U^t$. Sendo $U_\mu U^\mu = 1$, então,

$$U^t = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} = 1. \quad (2.320)$$

2.3 Cosmologia

Na escala de comprimento do nosso sistema solar, o universo é bastante heterogêneo. De fato, pois na realidade observamos diversos corpos celestes orbitando imensos espaços vazios. Entretanto, em escalas da ordem de centenas de milhões de parsecs⁹ ($\sim 10^8$ pc), o universo pode ser considerado isotrópico e homogêneo. Além disso, dados observacionais atestam que, independente da direção, as galáxias distantes estão se afastando da Via Láctea.

A cosmologia estuda a estrutura do universo em larga escala, esta sendo grande o suficiente para estar de acordo com o chamado *princípio cosmológico*, o qual afirma que o universo é espacialmente isotrópico e homogêneo. É bem conhecido [32, 33, 43, 39] que o tensor métrico mais geral, em acordo com o princípio cosmológico é da forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.321)$$

onde consideramos $c = 1$, e, $dl^2 \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j$ representa as seções espaciais. Ademais, comparando a expressão anterior com a equação (2.206), vemos que $-g_{ij} = a^2(t) \gamma_{ij}$ caracteriza as distâncias no espaço tridimensional, cujo tamanho varia de acordo o *fator de escala* $a(t)$. Naturalmente, devido à necessidade das propriedades de isotropia e homogeneidade, todos os pontos nas seções espaciais devem ser equivalentes. Portanto, a métrica tridimensional dl^2 deve possuir curvatura constante.

2.3.1 Espaços de Curvatura Constante

Vamos primeiramente nos concentrar na métrica espacial $dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$. A característica isotrópica demanda uma métrica com simetria esférica, de maneira que reescrevemos dl^2 como

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.322)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ é a métrica da esfera S^2 de raio unitário e k uma constante que pode assumir os valores $-1, 0, 1$. A equação (2.322) caracteriza um espaço de curvatura constante, sendo trivial mostrar que o escalar de Ricci é dado por $R = 6k$.

⁹ O parsec (1 pc = $3,0857 \times 10^{16}$ m) é uma unidade astronômica, utilizado para indicar distâncias estelares, definido como a distância correspondente ao paralaxe de $1''$ de arco. Um aglomerado de galáxias típico possui extensão da ordem de milhões de parsecs ($\sim 10^6$ pc).

Analisemos separadamente os casos correspondentes aos três valores de k . Se $k = 0$ (curvatura nula), temos $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$, ou seja, o espaço tridimensional euclidiano ordinário com a métrica expressa em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Diante disso, o espaço é infinito em extensão.

Para $k = 1$ (curvatura positiva), então

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.323)$$

Note que na métrica anterior, para que r permaneça como uma coordenada do tipo espaço, ela deve ser limitada ao intervalo $0 \leq r \leq 1$. Portanto, através da mudança de coordenada $r = \text{sen } \chi$, onde $0 \leq \chi \leq \pi$, temos

$$dl^2 = d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi d\Omega^2, \quad (2.324)$$

que é a métrica sobre uma hipersfera tridimensional de raio unitário. A hipersfera S^3 é o lugar geométrico dos pontos, no espaço euclidiano quadridimensional \mathbb{R}^4 , onde

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (2.325)$$

Sendo a métrica do \mathbb{R}^4 dada por

$$dl_{\mathbb{R}^4}^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.326)$$

então, tomando a parametrização

$$w = \cos \chi, \quad (2.327)$$

$$x = \text{sen } \chi \text{ sen } \theta \cos \phi, \quad (2.328)$$

$$y = \text{sen } \chi \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi, \quad (2.329)$$

$$z = \text{sen } \chi \cos \theta, \quad (2.330)$$

e, substituindo de maneira apropriada as diferenciais dw, dx, dy, dz na equação (2.326), recupera-se a métrica (2.324). Logo, concluí-se que o universo possui um volume total finito, pois

$$V = a^3(t) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \text{sen } \theta \int_0^\pi d\chi \text{sen}^2 \chi = 2\pi^2 a^3(t). \quad (2.331)$$

Perceba que as expressões (2.325) e (2.326) são invariantes sob a ação do grupo de rotações quadridimensionais $SO(4)$. Logo, os elementos desse grupo são *isometrias* de S^3 pois não alteram suas propriedades métricas [32]. Ademais, para cada par de pontos $X, Y \in S^3$, existe um elemento $R_4 \in SO(4)$, tal que $R_4(X) = Y$. Portanto todos pontos de S^3 se equivalem, caracterizando a homogeneidade da mesma e, por conseguinte, da métrica (2.324).

Por isotropia num ponto X , entende-se que o *estabilizador* desse ponto, isto é, o grupo de isometrias que mantém X fixo, denotado por $\text{Stab}(X)$, é isomorfo ao grupo $SO(3)$. No caso de S^3 , o ponto $(w, x, y, z) = (1, 0, 0, 0)$ permanece inalterado sob a ação do subgrupo de isometrias

$SO(3)$, donde $\text{Stab}(1, 0, 0, 0) = SO(3)$ e o ponto é isotrópico. Em outras palavras, o subgrupo $SO(3)$ fixa a direção que determina o ângulo polar χ . Daí, vem que S^3 é o espaço homogêneo e isotrópico $SO(4)/SO(3)$ [39].

Finalmente, se $k = -1$ (curvatura negativa), temos

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.332)$$

donde, por meio da transformação $r = \sinh \chi$, sendo $\chi \in [0, +\infty)$, obtém-se

$$dl^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2. \quad (2.333)$$

E o universo possui um volume infinito, uma vez que

$$V = a^3(t) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{+\infty} d\chi \sinh^2 \chi = +\infty. \quad (2.334)$$

A métrica (2.333) pode ser obtida da seguinte maneira: seja o hiperboloide de duas folhas

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad (2.335)$$

imerso no espaço-tempo de Minkowski, onde

$$ds^2 = dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.336)$$

Sendo assim, de modo similar ao caso anterior, considere a parametrização

$$w = \cosh \chi, \quad (2.337)$$

$$x = \sinh \chi \cos \theta \cos \phi, \quad (2.338)$$

$$y = \sinh \chi \cos \theta \sin \phi, \quad (2.339)$$

$$z = \sinh \chi \sin \theta, \quad (2.340)$$

da qual tomando as diferenciais dw, dx, dy, dz e substituindo-as na expressão (2.336), obtém-se a métrica (2.333). As equações (2.335) e (2.336) são invariantes sob a ação do grupo de Lorentz $SO(1, 3)$, do tipo L_+^\uparrow , caracterizado por três parâmetros de rapidez (ou *boost*) e três ângulos de rotação. Assim, os elementos de $SO(1, 3)$ são isometrias do hiperboloide, e, sendo possível interligar qualquer par de pontos do hiperboloide pela ação de $SO(1, 3)$, temos um espaço homogêneo. Ademais, o ponto $(w, x, y, z) = (1, 0, 0, 0)$ se mantém fixo sob transformações do subgrupo de isometrias $SO(3)$, donde $\text{Stab}(1, 0, 0, 0) = SO(3)$. Diante disso, $SO(3)$ fixa a direção do eixo temporal w , o que assegura a isotropia do hiperboloide. Portanto, temos um espaço homogêneo e isotrópico $SO(1, 3)/SO(3)$.

2.3.2 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Assegurada a homogeneidade e isotropia do espaço, em conformidade com o princípio cosmológico, podemos agora combinar as equações (2.321) e (2.322), donde resulta

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.341)$$

conhecida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker, ou simplesmente métrica FRW. Note que temos um sistema de coordenadas síncrono (gaussiano), pois $g_{tt} = 1$ e $g_{tr} = g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$. Além disso, como esperado, a expressão (2.341) se encaixa no caso discutido ao final da seção 2.2.7 sobre simetria esférica, pois, comparando-a com a equação (2.319), temos que $U(t, r) = a^2(t)/(1 - kr^2)$ e $V(t, r) = a^2(t)r^2$.

Conforme (2.341), as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são

$$g_{tt} = 1, \quad g_{rr} = -\frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = -a^2r^2, \quad g_{\phi\phi} = -a^2r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.342)$$

e, sendo assim, as componentes do inverso $g^{\mu\nu}$ dadas por

$$g^{tt} = 1, \quad g^{rr} = -\frac{1 - kr^2}{a^2}, \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{a^2r^2}, \quad g^{\phi\phi} = -\frac{1}{a^2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.343)$$

Através das equações (2.342) e (2.343), podemos obter a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e, de posse da mesma, calcular os tensores $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ e $R_{\mu\nu}$, além do escalar de curvatura R . Entretanto, por questões de brevidade omitiremos esse cálculos, explicitando apenas os resultados necessários. Dessa forma, as componentes não nula da conexão serão

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{\phi\phi}^t &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{tr}^r &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1 - kr^2}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{t\phi}^\phi &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \text{ctg } \theta, \end{aligned} \quad (2.344)$$

onde $\dot{a} \equiv da/dt$. Além disso, perceba que a equação (2.296) é satisfeita. Daí, vem que

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (2.345)$$

e, o escalar de Ricci,

$$R = -\frac{6(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)}{a^2}. \quad (2.346)$$

Para encontrar a dependência do fator de escala a com o tempo t , é necessário resolver as equações de Einstein (2.289). Logo, devemos especificar a forma do tensor energia-momento $\Theta_{\mu\nu}$, respeitando as simetrias presentes no problema. Em aplicações cosmológicas, toma-se como modelo do universo um fluido perfeito, isento de viscosidade e qualquer tipo de dissipação, caracterizado por uma densidade de energia $\rho(t)$ e uma pressão isotrópica $p(t)$. As partículas desse “gás” universal, isto é, observadores para os quais $dx^i = 0$, são caracterizadas por aglomerados de galáxias típicos. Recorrendo mais uma vez à Figura 10, tais aglomerados seriam as bolas com rótulos (R^1, R^2) .

Diante disso, para um fluido relativístico perfeito, temos [29]

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = [\rho(x) + p(x)]u_\mu(x)u_\nu(x) - p(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (2.347)$$

Vamos expor alguns argumentos para justificar que a expressão anterior é a forma correta de $\Theta_{\mu\nu}$. Assim, tomando a equação de conservação $\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0$, vem que

$$\nabla^\mu \Theta_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu \nabla^\mu u_\nu + \nabla^\mu [(\rho + p) u_\mu] u_\nu - \nabla_\nu p = 0. \quad (2.348)$$

Donde, fazendo uma contração com u^ν e utilizando $u^\nu u_\nu = 1$ (o que acarreta $u^\nu \nabla^\mu u_\nu = 0$), obtemos a expressão

$$\nabla^\mu [(\rho + p) u_\mu] - u^\mu \nabla_\mu p = \nabla^\mu (\rho u_\mu) + p \nabla^\mu u_\mu = 0. \quad (2.349)$$

Desejamos tomar o limite não relativístico da equação (2.349). Entretanto, esta última foi obtida em unidades onde $c = 1$. Logo, para reescrevê-la em unidades onde c não é adimensional, basta fazer $p \rightarrow p/c$ na expressão anterior. Portanto, no limite não relativístico, $p \ll 1$ ($p/c \ll 1$) pela mesma razão que a energia cinética não relativística $mv^2/2$ é muito menor que a energia de repouso m (mc^2). Além disso, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, $\nabla \rightarrow \partial$ e $u_\mu \rightarrow (1, -\mathbf{v})$, de maneira que (2.349) reduz-se à equação de continuidade clássica [41]

$$\partial^\mu (\rho u_\mu) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.350)$$

Usando a equação de continuidade covariante (2.349) na expressão (2.348), resulta em

$$(\rho + p) u_\mu \nabla^\mu u_\nu = (\delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu) \nabla_\mu p. \quad (2.351)$$

Tomando novamente o limite não relativístico, $[\delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu] \rightarrow \text{diag}(0, 1, 1, 1)$, pois $u^i = v^i \ll 1$ e, dado isso, $u^\mu u_\nu \approx \delta_\nu^\mu \delta_\nu^t$. Logo, $\delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu$ é um projetor sobre as direções espaciais. Para a componente temporal t , a equação anterior fornece a identidade $0 = 0$. Com relação às componentes espaciais,

$$\rho u_\mu \partial^\mu u_i = \delta_i^k \partial_k p, \quad (2.352)$$

ou seja,

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (2.353)$$

logo, obtém-se a equação de Euler clássica para fluidos perfeitos [41].

Retornando ao nosso problema, a expressão de $\Theta_{\mu\nu}$ apropriada é

$$\Theta_{\mu\nu} = [\rho(t) + p(t)] u_\mu u_\nu - p(t) g_{\mu\nu}, \quad (2.354)$$

cuja peculiaridade é que ρ e p são funções apenas de t devido a homogeneidade do espaço. Ademais, como trata-se de um sistema de coordenadas síncrono, segundo a (2.320) temos $u^\mu = \delta_t^\mu$ e $u_\mu = \delta_\mu^t$. Daí, vem que

$$\Theta_{\mu\nu} = [\rho(t) + p(t)] \delta_\mu^t \delta_\nu^t - p(t) g_{\mu\nu}, \quad (2.355)$$

donde,

$$\Theta_{tt} = \rho, \quad \Theta_{rr} = \frac{pa^2}{1 - kr^2}, \quad \Theta_{\theta\theta} = pa^2 r^2, \quad \Theta_{\phi\phi} = \Theta_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (2.356)$$

Ademais, o traço Θ^{ν}_{ν} é dado por

$$\Theta^{\nu}_{\nu} = g^{\nu\mu}\Theta_{\mu\nu} = (\rho + p) \underbrace{g^{\nu\mu}\delta_{\mu}^t\delta_{\nu}^t}_{=g^{tt}=1} - p \underbrace{g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}}_{=\delta^{\nu}_{\nu}=4} = \rho + p - 4p = \rho - 3p. \quad (2.357)$$

Combinando as expressões (2.345), (2.346) e (2.356), as equações de Einstein (com $\Lambda = 0$) fornecem as seguintes equações diferenciais:

$$3(\dot{a}^2 + k) = 8\pi G\rho a^2, \quad (2.358)$$

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k = -8\pi Gpa^2, \quad (2.359)$$

denominadas *equações de Friedmann*. A expressão (2.358) advém de $R_{tt} - (Rg_{tt}/2) = 8\pi G\Theta_{tt}$, enquanto (2.359) é oriunda da parte espacial $R_{ii} - (Rg_{ii}/2) = 8\pi G\Theta_{ii}$, com $i = r, \theta, \phi$. Expressões para as quais $\mu \neq \nu$ nas equações de Einstein (2.289) resultam na identidade $0 = 0$.

Da conservação do tensor de energia-momento, vamos considerar a equação de continuidade covariante (2.349), ou seja,

$$u^{\mu}\partial_{\mu}\rho + (\rho + p)(\partial_{\mu}u^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}u^{\alpha}) = 0. \quad (2.360)$$

Dado isso, substituindo $u^{\mu} = \delta^{\mu}_t$ na expressão anterior, obtemos a relação

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^{\mu}_t\partial_{\mu}\rho + (\rho + p)\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}\delta^{\alpha}_t \\ &= \dot{\rho} + (\rho + p)\Gamma^{\mu}_{t\mu} \\ &= \dot{\rho} + (\rho + p)(\Gamma^r_{tr} + \Gamma^{\theta}_{t\theta} + \Gamma^{\phi}_{t\phi}) \\ &= \dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (2.361)$$

que não é independente das equações de Friedmann. Na realidade, é possível obter a expressão anterior combinando as equações (2.358) e (2.359), o que não é nenhuma surpresa, haja vista que as equações de Einstein e a conservação do tensor energia-momento não são inteiramente independentes.

Com relação à equação de Euler covariante (2.351), sendo $u^{\mu} = \delta^{\mu}_t$, temos

$$-(\rho + p)\delta^{\mu}_t\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\delta^{\nu}_t = (\delta^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_t\delta^t_{\nu})\partial_{\mu}p = \delta^k_{\nu}\partial_k p, \quad (2.362)$$

onde, no lado esquerdo sobra apenas o termo identicamente nulo $\Gamma^t_{\nu t}$, e, no lado direito, o projetor espacial $\delta^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_t\delta^t_{\nu}$ seleciona apenas as componentes do gradiente de pressão $\partial_k p$. Como $p = p(t)$, então $\partial_k p = 0$, e, assim, o lado direito de (2.362) também é nulo. Ainda, observando o lado esquerdo de (2.351), constata-se que $u^{\mu}\nabla_{\mu}u_{\nu} = 0$, cujo significado é que os aglomerados galácticos descrevem geodésicas no espaço-tempo. Esse fato, apesar de já conhecido por toda a discussão anterior sobre sistemas de coordenadas gaussianos, também é esperado pois não existe um gradiente de pressão para “arrancar” as partículas das trajetórias geodésicas [48].

2.3.3 Os Universos de Friedmann

Para resolver as equações de Friedmann (2.358) e (2.359), é necessário uma relação entre a pressão p e a densidade de energia ρ , ou seja, uma equação de estado. Em cosmologia, geralmente se assume a relação linear

$$p = w\rho, \quad (2.363)$$

onde w é uma constante. Dois casos notáveis são representados pelos valores $w = 0$ e $w = 1/3$. No primeiro, $p = 0$, donde se conclui que o fluido é incapaz de exercer qualquer tipo de pressão. Diante disso, é denominado *poeira* ou *matéria incoerente* [39]. Note que nesse caso, $\Theta_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$, similar às equações (2.139) e (2.286) para partículas pontuais. Já a alternativa onde $w = 1/3$ acarreta que o traço $\Theta^\mu{}_\mu$ se anule, pois, da equação (2.357), vem que

$$\Theta^\mu{}_\mu = \rho - 3p = \rho - 3(\rho/3) = 0. \quad (2.364)$$

Essa mesma situação ocorre para o caso do campo eletromagnético, isto é, sendo

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu\kappa} g^{\alpha\kappa} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\kappa} F_{\alpha\kappa} \right), \quad (2.365)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético e A^μ o quadrivetor potencial, então

$$\Theta^\nu{}_\nu = \frac{1}{\mu_0} \left(g^{\nu\mu} F_{\mu\alpha} F_{\nu\kappa} g^{\alpha\kappa} - \frac{1}{4} \delta^\nu{}_\nu F^{\alpha\kappa} F_{\alpha\kappa} \right) = \frac{1}{\mu_0} (F^{\nu\kappa} F_{\nu\kappa} - F^{\alpha\kappa} F_{\alpha\kappa}) = 0. \quad (2.366)$$

Logo, $w = 1/3$ corresponde ao caso da radiação eletromagnética na forma de um gás de fótons [29].

Agora, substituindo a equação de estado (2.363) na relação (2.361), obtemos

$$0 = \dot{\rho} + 3\rho(1+w) \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.367)$$

$$= \dot{\rho} a^{3(1+w)} + 3\rho(1+w) \dot{a} a^{3(1+w)-1} \quad (2.368)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\rho a^{3(1+w)} \right], \quad (2.369)$$

o que nos permite concluir que

$$\rho a^{3(1+w)} = M = \text{constante}. \quad (2.370)$$

Logo, para $w = 0$, a equação anterior torna-se $\rho(t) a^3(t) = M$, o que significa que o crescimento das dimensões espaciais é proporcional a $a(t)$. Ou seja, sendo $V \propto a^3(t)$, onde V é o volume espacial, então $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$.

Por outro lado, se $w = 1/3$, a expressão (2.370) resulta em $\rho(t) a^4(t) = M$. Essa variação mais acentuada de ρ com $a(t)$ é consequência de um fator adicional, causado pela diminuição da frequência e da energia de cada fóton com a expansão do universo. Isto é, como a energia

E de um fóton é diretamente proporcional à sua frequência ω e inversamente proporcional ao seu comprimento de onda λ , logo, sendo $\omega \propto \lambda^{-1}$, onde $\lambda \propto a(t)$, então $\omega \propto a^{-1}(t)$. Daí, vem que $\rho(t) \propto a^{-4}(t)$. Podemos concluir que, mesmo tendo em conta que predomina no presente a densidade de energia associada com a matéria, houve no passado uma época em que a radiação dominava, devido ao crescimento mais rápido de ρ com a diminuição de $a(t)$. Daí a importante conclusão de que o universo primitivo era dominado pela energia associada à radiação [49].

É importante salientar que existem outros constituintes do universo além de radiação e matéria. Além de constituintes como a matéria escura e a energia escura, há propostas de defeitos topológicos que seriam relíquias das transições de fase do universo primordial. Entre esses defeitos topológicos destacam-se as cordas cósmicas, onde $w = -1/3$, e as barreiras de domínio (*domains walls*), onde $w = -2/3$.

Prosseguindo com o objetivo de resolver as equações de Friedmann, primeiramente vamos considerar o espaço plano onde $k = 0$. Assim, da equação (2.358), temos

$$dt = \pm \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}a^2\rho - k}} = \pm \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}a^2\rho}}, \quad (2.371)$$

com os sinais “+” e “-” correspondem a soluções relacionadas entre si por uma reversão temporal $t \rightarrow -t$. Tomando $w = 0$ ($\rho a^3 = M$) e o sinal positivo na expressão anterior, vem que

$$t = \left(\frac{3}{8\pi GM} \right)^{1/2} \int_0^a a'^{1/2} da' = \left(\frac{4}{3\kappa M} \right)^{1/2} a^{3/2}, \quad (2.372)$$

onde reintroduzimos a constante de gravitação einsteiniana $\kappa = 8\pi G$ e tomamos $a(t = 0) = 0$. Resolvendo (2.372) para a , resulta em

$$a(t) = \left(\frac{3\kappa M}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad (2.373)$$

donde,

$$\rho(t) = \left(\frac{4}{3\kappa} \right) t^{-2}. \quad (2.374)$$

Logo, $a(t) \propto t^{2/3}$ e $\rho(t) \propto t^{-2}$ monotonicamente.

Para os outros casos ($k = \pm 1$), é conveniente fazer a transformação $dt = a(\eta) d\eta$ na métrica (2.341). Assim,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.375)$$

e a variável η é denominada *tempo conforme*. Portanto, através da equação (2.371),

$$\eta = \pm \int_0^a \frac{da'}{a' \sqrt{\frac{8\pi G}{3}a'^2\rho - k}}, \quad (2.376)$$

onde $a(\eta = 0) = 0$. De agora em diante, iremos considerar apenas o sinal positivo das expressões (2.371) e (2.376).

Tomando agora o espaço com curvatura positiva $k = 1$ para $w = 0$, e, redefinindo

$$\rho(t) a^3(t) = M \equiv \frac{3a_0}{4\pi G} = \frac{6a_0}{\kappa}, \quad (2.377)$$

a integral do tempo conforme (2.376) torna-se

$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^a \frac{da'}{a' \sqrt{\frac{2a_0}{a'} - 1}} \\ &= \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{2a_0 a' - a'^2}} \\ &= \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{a_0^2 - a_0^2 + 2a_0 a' - a'^2}} \\ &= \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{a_0^2 - (a' - a_0)^2}}. \end{aligned} \quad (2.378)$$

Fazendo a mudança de variável $a = a_0(1 + \psi)$ na integral, temos

$$\eta = \int_{-1}^{\psi} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - \psi'^2}} = \text{sen}^{-1} \psi + \frac{\pi}{2}. \quad (2.379)$$

Resolvendo a expressão acima para $a(\eta)$, resulta em

$$a(\eta) = a_0(1 - \cos \eta) = \frac{\kappa M}{6}(1 - \cos \eta). \quad (2.380)$$

Uma vez que $dt = a(\eta) d\eta$, então

$$t(\eta) = a_0(\eta - \text{sen } \eta) = \frac{\kappa M}{6}(\eta - \text{sen } \eta). \quad (2.381)$$

Assim, para pequenos valores de η , obtém-se

$$a(\eta) = \frac{\kappa M}{6} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta^2}{2!} + \dots \right) \right] \approx \frac{\kappa M}{6} \left[\frac{\eta^2}{2} \right], \quad (2.382)$$

$$t(\eta) = \frac{\kappa M}{6} \left[\eta - \left(\eta - \frac{\eta^3}{3!} + \dots \right) \right] \approx \frac{\kappa M}{6} \left[\frac{\eta^3}{6} \right], \quad (2.383)$$

donde,

$$a(t) \approx \left(\frac{3\kappa M}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad \rho(t) \approx \left(\frac{4}{3\kappa} \right) t^{-2}, \quad (2.384)$$

da mesma forma que nas equações (2.373) e (2.374) para $k = 0$. A função $a(t)$ inicia a expansão em $t = 0$ ($\eta = 0$) com comportamento $a(t) \propto t^{2/3}$ para pequenos valores de t , prosseguindo com a expansão até atingir seu valor máximo $a(\pi) = 2a_0 = \kappa M/3$ em $t(\pi) = \pi a_0 = \pi \kappa M/6$. A partir daí, ocorre um processo de contração, culminando num colapso total do espaço-tempo

(*Big Crunch*) em $t(2\pi) = 2\pi a_0 = \pi \kappa M/3$. Portanto, temos um universo que atingirá um volume máximo finito e tempo de vida infinito.

Finalmente, tomemos $k = -1$ e $w = 0$. Levando ainda em conta a expressão (2.377), temos

$$\eta = \int_0^a \frac{da'}{a' \sqrt{\frac{2a_0}{a'} + 1}} = \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{2a_0 a' + a'^2}} = \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{(a' + a_0)^2 - a_0^2}}. \quad (2.385)$$

Fazendo a mudança de variável $a = a_0 (\cosh \psi - 1)$ na integral acima, vem que

$$\eta = \int_0^\psi d\psi' = \psi, \quad (2.386)$$

e, sendo assim,

$$a(\eta) = a_0 (\cosh \eta - 1) = \frac{\kappa M}{6} (\cosh \eta - 1), \quad (2.387)$$

$$t(\eta) = a_0 (\sinh \eta - \eta) = \frac{\kappa M}{6} (\sinh \eta - \eta). \quad (2.388)$$

No estágio inicial da expansão, ou seja, para pequenos valores do tempo conforme η ,

$$a(\eta) = \frac{\kappa M}{6} \left[\left(1 + \frac{\eta^2}{2!} + \dots \right) - 1 \right] \approx \frac{\kappa M}{6} \left[\frac{\eta^2}{2} \right], \quad (2.389)$$

$$t(\eta) = \frac{\kappa M}{6} \left[\left(\eta + \frac{\eta^3}{3!} + \dots \right) - \eta \right] \approx \frac{\kappa M}{6} \left[\frac{\eta^3}{6} \right], \quad (2.390)$$

e, novamente,

$$a(t) \approx \left(\frac{3\kappa M}{4} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad \rho(t) \approx \left(\frac{4}{3\kappa} \right) t^{-2}. \quad (2.391)$$

Para todos os valores da constante de curvatura k , inicialmente $\rho(t) \propto t^{-2}$, de maneira que a origem $t = 0$ possui uma densidade infinita. Como já mencionado, para $k = 1$ o universo é fechado, pois após atingir um tamanho máximo na expansão, sofre uma contração até um colapso completo. Nos casos dos universos abertos, a expansão do fator de escala $a(t)$ se mantém indefinidamente. Porém, a diferentes taxas de crescimento: para $k = -1$, das expressões (2.387) e (2.388) vê-se que $a(t) \propto t$ para grandes valores de t , enquanto para $k = 0$ temos sempre $a(t) \propto t^{2/3}$ [39].

Para universos dominados por radiação ($w = 1/3$), o comportamento é qualitativamente o mesmo dos dominados por matéria ($w = 0$), diferindo no modo como o fator de escala a varia com o tempo. Sendo assim, pelo mesmo procedimento utilizado nos casos anteriores, mostra-se

que:

$$k = 0, \quad a(t) = \left(\frac{4\kappa M}{3}\right)^{1/4} t^{1/2}, \quad (\text{aberto}) \quad (2.392)$$

$$k = 1, \quad a(\eta) = \left(\frac{\kappa M}{3}\right)^{1/2} \text{sen } \eta, \quad (\text{fechado}) \quad (2.393)$$

$$t(\eta) = \left(\frac{\kappa M}{3}\right)^{1/2} (1 - \cos \eta), \quad (2.394)$$

$$k = -1, \quad a(\eta) = \left(\frac{\kappa M}{3}\right)^{1/2} \text{senh } \eta, \quad (\text{aberto}) \quad (2.395)$$

$$t(\eta) = \left(\frac{\kappa M}{3}\right)^{1/2} (\cosh \eta - 1). \quad (2.396)$$

Além disso, no estágio inicial de expansão, obtém-se $a(t) \propto t^{1/2}$ e $\rho(t) \propto t^{-2}$ independente do valor de k .

Todos os modelos de Friedmann possuem uma singularidade física inicial, não removível por transformações de coordenadas, caracterizada por uma densidade de energia e curvatura infinitas. Dado isso, substituindo (2.358) em (2.359) e rearranjando os termos, temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p), \quad (2.397)$$

donde se conclui que

$$\ddot{a} < 0 \quad \text{se} \quad \rho + 3p > 0. \quad (2.398)$$

Pressupõe-se que a segunda desigualdade seja válida para a matéria ordinária, qualquer que seja a equação de estado satisfeita por p e ρ . Portanto, $\ddot{a} < 0$ e o gráfico de $a(t)$ possui concavidade para baixo. Além disso, se considerarmos que $\dot{a} > 0$, então, $a = 0$ para algum momento no passado, digamos, em $t = t_{\text{sing}}$. Na realidade, tomando a época atual como $t = t_0$, temos necessariamente a desigualdade

$$t_0 - t_{\text{sing}} < \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^{-1} \equiv H_0^{-1}, \quad (2.399)$$

onde $a_0 \equiv a(t_0)$, $\dot{a}_0 \equiv \dot{a}(t_0)$ e $H_0 = 70 \pm 7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ é o *parâmetro de Hubble* atual [50]. Sendo assim, o limite superior para a idade do universo, fornecido pelo *tempo de Hubble* (veja a Figura 11), é quantificado pelo valor de

$$t_H \equiv H_0^{-1} = 14,0 \pm 1,4 \text{ bilhões de anos.} \quad (2.400)$$

Em suma, o cenário que emerge da resolução das equações de Einstein a partir da métrica FRW é de um universo em expansão advindo de uma singularidade inicial (*Big Bang*). O universo irá se expandir indefinidamente se as seções espaciais são infinitas ($k = 0$ ou $k = -1$), ou, caso

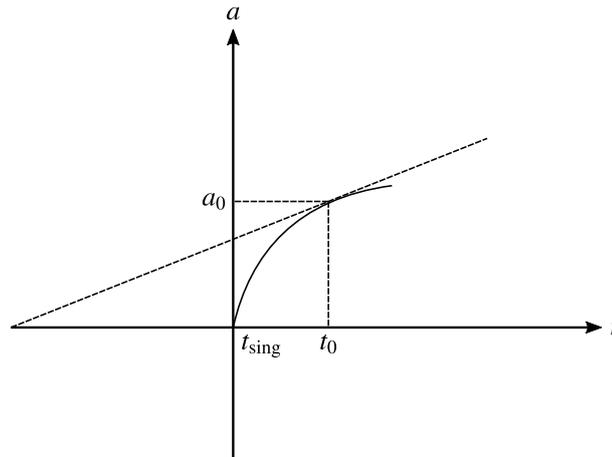


Figura 11 – Necessidade de uma singularidade inicial: a reta tangente à curva $a(t)$ de inclinação \dot{a}_0 determina um limite superior para a idade do universo, dado que $(t_0 - t_{\text{sing}}) < a_0/\dot{a}_0$.

forem finitas ($k = 1$), em algum momento se iniciará um processo de contração, culminando numa outra singularidade (*Big Crunch*). Características como a taxa de expansão, densidade e tempo total de existência (caso se aplique), dependem do modelo em particular e da equação de estado (2.363).

2.3.4 O Universo de Milne

Concluindo este capítulo, trataremos de uma aplicação simples da cosmologia FRW, utilizada mais adiante numa das aplicações apresentadas no capítulo 4. Portanto, considere um universo aberto com $k = -1$, no limite onde a densidade de energia tende a zero, isto é, $\rho \rightarrow 0$ (logo, $p \rightarrow 0$). Nesse caso, a primeira equação de Friedmann (2.358) torna-se

$$\dot{a} = 1, \quad (2.401)$$

cuja solução é $a(t) = t$. Perceba que a expansão é mais rápida comparando-se tanto com um universo dominado por poeira ($w = 0, a \propto t^{2/3}$), quanto com um dominado por radiação ($w = 1/3, a \propto t^{1/2}$). Sendo assim, a métrica FRW assume a forma

$$ds^2 = dt^2 - t^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2], \quad (2.402)$$

que caracteriza o espaço-tempo conhecido como *universo de Milne*, proposto em 1935 pelo astrofísico e matemático britânico E. A. Milne [51]. Tal modelo retrata um universo homogêneo, isotrópico e em expansão, resultado da solução das equações de Einstein para o espaço vazio. É natural pressupor, que a solução das equações de campo para um espaço isotrópico e sem matéria, é o espaço-tempo de Minkowski. De fato, o universo de Milne constitui apenas uma porção do espaço-tempo de Minkowski. A fim de demonstrar essa afirmação, seja a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas,

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (2.403)$$

Efetuada a transformação de coordenadas

$$T = t \cosh \chi, \quad (2.404)$$

$$R = t \sinh \chi, \quad (2.405)$$

obtem-se

$$dT^2 - dR^2 = dt^2 - t^2 d\chi^2. \quad (2.406)$$

É importante ressaltar que devido a essa correspondência entre as coordenadas de Minkowski e as de FRW, infere-se que o universo de Milne possui curvatura quadridimensional nula ($R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$ no espaço-tempo de Minkowski) e curvatura espacial constante $R = 6k = -6$.

No espaço-tempo de Minkowski, um observador de Milne (gaussiano) com coordenadas espaciais fixas (χ, θ, ϕ), move-se com uma velocidade constante

$$|\mathbf{v}| = \frac{R}{T} = \operatorname{tgh} \chi < 1, \quad (2.407)$$

donde se conclui que χ é o parâmetro de rapidez no espaço-tempo de Minkowski, associado a um *boost* de Lorentz. Além disso, por definição, o seu tempo próprio é igual ao tempo cósmico t , ou seja,

$$t = \frac{T}{\gamma} = T\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} = T\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \chi} = T \operatorname{sech} \chi, \quad (2.408)$$

o que corrobora com (2.404). Para obter as hipersuperfícies onde $t = \text{constante}$, basta eliminar χ nas expressões (2.404) e (2.405) por meio da identidade trigonométrica $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$. Daí, vem que

$$t^2 = T^2 - R^2, \quad (2.409)$$

as quais caracterizam hipérbolas nas coordenadas de Minkowski. Naturalmente, como as hipérbolas possuem extensão infinita, o universo de Milne é aberto, o que já era esperado pois desde o princípio tomamos $k = -1$. Para $t = 0$, as hipérbolas degeneram-se no cone de luz com vértice na origem, estabelecendo um horizonte de eventos para os observadores de Milne. Assim, as coordenadas de Milne cobrem apenas um quarto do espaço-tempo de Minkowski (veja a Figura 12).

Considere agora a coordenada $\chi = 0$, que em coordenadas de Minkowski corresponde ao eixo temporal $R = 0$. Para tal observador, o tempo próprio (cósmico) t é igual ao tempo coordenado T , e, assim, linhas horizontais $T = \text{constante}$ representam seu espaço de simultaneidade em diferentes instantes de tempo, sendo batizado por Milne de *espaço privado* [52]. Perceba que o referido espaço possui uma extensão finita l em cada instante de tempo T , correlacionadas por $l = T$. Diante disso, na singularidade inicial, temos $t = T = 0$ e, por conseguinte, $l = 0$, de maneira que o *Big Bang* é um evento pontual (o universo possui um “centro”). Porém, é importante ressaltar que, como as retas $\chi = \text{constante}$ podem ser conectadas por um *boost* de Lorentz $(T \pm R) \rightarrow e^{\mp\chi} (T \pm R)$, cada observador de Milne $\chi = \text{constante}$ possui seu próprio

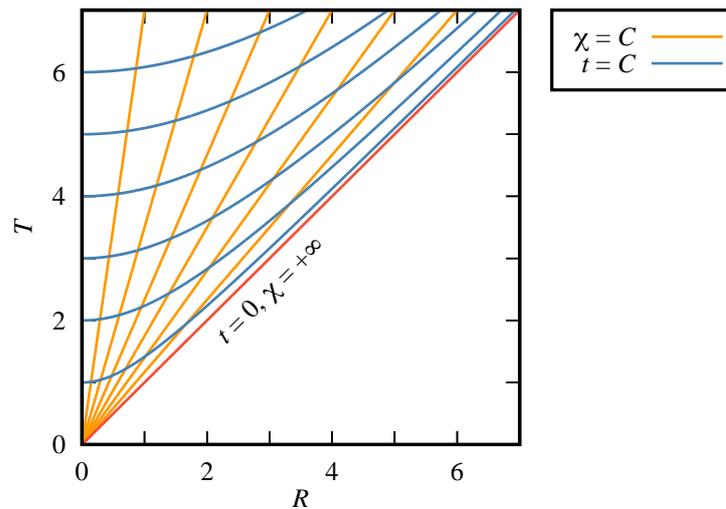


Figura 12 – Digrama de Minkowski bidimensional (T, R) ilustrando as coordenadas de Milne (t, χ). As curvas de cor laranja representam valores constantes de χ ao passo que as azuis retratam o tempo cósmico t . A reta vermelha, fronteira do cone de luz com vértice na origem, equivale ao valores $t = 0$ e $\chi = +\infty$ nas coordenadas de Milne.

espaço privado. Em outras palavras, é possível deslocar a “origem” do universo e o resultado é indiferente, caracterizando a homogeneidade do espaço.

Por outro lado, sob a perspectiva dos observadores gaussianos de Milne (FRW), sabemos que as seções espaciais em instantes do tempo cósmico t são infinitas e, o espaço-tempo se iniciou de uma singularidade, expandindo-se a partir daí de maneira homogênea e isotrópica. Logo, como a direção da coordenada radial χ é irrelevante devido à isotropia, além dos observadores serem equivalentes pela homogeneidade, então, conclui-se que nesse caso o *Big Bang* aconteceu em todo e qualquer lugar.

O ponto principal dessa discussão é o seguinte: num universo em expansão, a simultaneidade de acordo com um observador em particular é diferente da simultaneidade conjunta de todos os observadores. Isto é, os respectivos espaços tridimensionais são distintos. O *Big Bang* é um evento pontual e o universo possui tamanho finito sob o ponto de vista de um observador particular. Mas, se mensurado por uma seção espacial de tempo cósmico constante, é infinito [52].

3 ÓPTICA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS. CARACTERÍSTICAS DA DISPERSÃO ELETROMAGNÉTICA. METAMATERIAIS HIPERBÓLICOS

Concluída a discussão sobre relatividade e cosmológica, nosso objetivo agora é apresentar os metamateriais hiperbólicos e, em seguida, mostrar como eles podem ser ferramentas úteis na pesquisa de modelos gravitacionais análogos, sendo capazes de reproduzir o comportamento temporal numa coordenada espacial real. Todavia, para que esse propósito tenha êxito, é necessário compreender os princípios nos quais os meios hiperbólicos são fundamentados. Sendo assim, pelo fato dos metamateriais hiperbólicos serem, em sua essência, anisotrópicos do ponto de vista elétrico, iniciaremos pelo estudo da óptica em meios anisotrópicos (cristais), discorrendo sobre a propagação luminosa sob a perspectiva ondulatória e geométrica, concluindo com a analogia óptico-geométrica. Nesta última, a resposta elétrica do meio, isto é, sua permissividade elétrica, é interpretada em termos de uma geometria efetiva num espaço virtual. Seguindo adiante, como as estruturas fundamentais dos metamateriais são, em geral, formadas de elementos metálicos e dielétricos, e, sendo a permissividade ou constante dielétrica o fator determinante para o caráter hiperbólico, discutiremos as características da constante dielétrica em materiais puramente condutores ou puramente dielétricos. Finalmente, tendo consolidado todos esses conhecimentos, discutiremos os metamateriais hiperbólicos. Inicialmente, vamos expor suas características gerais e aplicações. Após isso, veremos como é possível reproduzir o caráter temporal numa das coordenadas espaciais ordinárias, e, por conseguinte, emular um espaço-tempo 2 + 1 dimensional. Finalizando, faremos uma análise das duas principais estruturas que caracterizam um meio hiperbólico.

3.1 Propagação da Luz em Meios Anisotrópicos

Na literatura [53, 14], o termo *cristal anisotrópico* caracteriza um meio dotado de uma anisotropia elétrica. Isto é, a polarização \mathbf{P} produzida por um dado campo elétrico \mathbf{E} não pode ser caracterizada pelo produto de uma constante pelo campo, pois, tal polarização varia de acordo com a direção do campo elétrico aplicado. Em outras palavras, o vetor \mathbf{E} não é mais paralelo ao deslocamento elétrico \mathbf{D} . Nesse caso, a dependência entre \mathbf{P} e \mathbf{E} é expressa pela equação tensorial

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Ou ainda, em notação diádica,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \cdot \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

onde χ é o tensor de susceptibilidade elétrica:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Diante disso, o vetor deslocamento \mathbf{D} é dado pela relação constitutiva

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (\mathbf{1} + \chi_e) \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.4)$$

sendo $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ a permissividade elétrica no vácuo, $\mathbf{1}$ o tensor (matriz) identidade, e,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{1} + \chi_e \quad (3.5)$$

o tensor dielétrico.

É possível demonstrar que o tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ é simétrico. A fim de constatar essa propriedade, usamos o *teorema de Poynting*, que expressa a conservação da energia eletromagnética por meio da equação [13]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (3.6)$$

onde

$$W = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (3.7)$$

é a densidade de energia do campo eletromagnético e

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.8)$$

o vetor de Poynting. Assumindo que o meio não possui magnetização, isto é, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, então, calculando explicitamente os termos da equação (3.6) de acordo com (3.7) e (3.8), temos

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial |\mathbf{H}|^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

e ainda,

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (3.10)$$

Ademais, considerando o meio isento de cargas e correntes, então $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}$ e $\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}$. Daí, vem que

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial |\mathbf{H}|^2}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.11)$$

donde, combinando com a equação (3.9), obtemos

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Se substituirmos a expressão (3.4) na relação (3.12), empregando a notação de índices com a convenção de soma, resulta em

$$\epsilon_{ij} E_i \partial_t E_j = \epsilon_{ij} E_j \partial_t E_i. \quad (3.13)$$

Como os índices são todos mudos, fazendo $i \leftrightarrow j$ no lado direito da expressão anterior, obtém-se

$$(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}) E_i \partial_t E_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad (3.14)$$

e, portanto, a lei da conservação da energia exige que o tensor ϵ_{ij} seja simétrico.

É importante ressaltar que ϵ_{ij} sempre pode ser diagonalizado em seus eixos principais, mediante a resolução da equação característica de autovalores

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \lambda & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \lambda & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.15)$$

sendo as direções dos eixos principais (autovetores), correspondentes à duas raízes *distintas* de (3.15), ortogonais entre si. Para duas raízes iguais advindas da equação de autovalores, os eixos principais tornam-se indeterminados num plano. Entretanto, podem ser escolhidos tal que sejam ortogonais [14].

De agora em diante, iremos admitir que o tensor dielétrico foi diagonalizado em todo e qualquer ponto do meio anisotrópico, de maneira que ϵ_{ij} é escrito da forma

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde as entradas $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ são chamadas de *constantes dielétricas principais*.

3.1.1 A Equação de Fresnel

Prosseguindo com o estudo da propagação luminosa num cristal não magnético, desprovido da presença de cargas e correntes elétricas, considere as equações de Maxwell, em unidades do sistema internacional SI,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.20)$$

Vamos levar em conta soluções representadas por ondas monocromáticas planas, isto é,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.21)$$

sendo \mathbf{r} o raio vetor desde a fonte da onda até o ponto de observação, ω a frequência angular e \mathbf{k} o vetor de onda. Soluções da forma (3.21) permitem simplificar a ação dos operadores diferenciais nas equações de Maxwell. Por exemplo, utilizando coordenadas cartesianas (x, y, z)

e as propriedades do símbolo de permutação de Levi-Civita [39], vem que

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E})_k &= \varepsilon_{ljk} \partial_l E_j \\
 &= \varepsilon_{ljk} (E_0)_j \partial_l e^{i(k_m x_m - \omega t)} \\
 &= \varepsilon_{ljk} (E_0)_j e^{i(k_m x_m - \omega t)} i k_m \delta_{lm} \\
 &= i \varepsilon_{ljk} k_l E_j \\
 &= (i \mathbf{k} \times \mathbf{E})_k.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

De modo semelhante,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \partial_k H_k = (H_0)_k \partial_k e^{i(k_j x_j - \omega t)} = (H_0)_k e^{i(k_j x_j - \omega t)} i k_j \delta_{kj} = i k_j H_j = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}. \tag{3.23}$$

Finalmente, com respeito à derivada temporal,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{H}_0 \partial_t e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (-i\omega) = -i\omega \mathbf{H}. \tag{3.24}$$

Portanto, conforme (3.22)–(3.24), a ação dos operadores ∇ e ∂_t sobre o campo eletromagnético torna-se

$$\nabla \rightarrow i \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \tag{3.25}$$

respectivamente.

Substituindo (3.25) nas equações de Maxwell (3.17)–(3.20), temos

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \omega \mathbf{H}, \tag{3.26}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}, \tag{3.27}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{3.28}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{3.29}$$

As expressões (3.27)–(3.29) implicam que os vetores \mathbf{k} , \mathbf{D} e \mathbf{H} são ortogonais entre si. Além disso, $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ pela equação (3.26). Sendo assim, $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$, \mathbf{D} , \mathbf{E} , e, portanto, estes três últimos formam um plano. Entretanto, é importante enfatizar que, como \mathbf{k} é ortogonal a \mathbf{D} e não necessariamente a \mathbf{E} , então, \mathbf{k} e $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ geralmente não são paralelos. Naturalmente, num meio isotrópico com $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, as direções de \mathbf{k} e \mathbf{S} coincidem.

Agora, considere um raio de luz propagando-se pelo cristal. Para um instante de tempo fixo, a fase $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ permanece constante nos planos ortogonais a \mathbf{k} , constituindo as frentes de onda. Porém, as frentes de onda se deslocam ao longo da direção de \mathbf{S} , pois o vetor de Poynting estabelece a direção de propagação da energia. Diante disso, os planos de fase constante estão inclinados em relação à direção de movimento (veja a Figura 13). Se θ é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{S} , então, as frentes de onda movem-se com uma velocidade u , denominada *velocidade de raio*, na direção de \mathbf{S} , cuja magnitude é

$$u = \frac{v}{\cos \theta}, \tag{3.30}$$

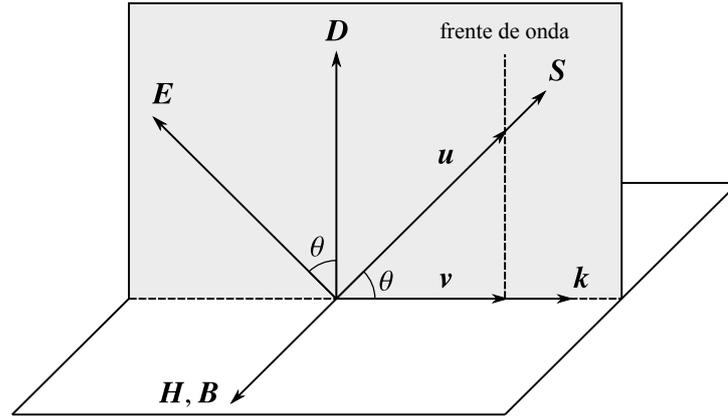


Figura 13 – Configuração dos vetores de campo num cristal anisotrópico: como consequência das equações de Maxwell, os vetores $\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{S}$ residem no mesmo plano, porém, \mathbf{k} e \mathbf{S} em geral não são paralelos. Além disso, os campos \mathbf{H} e \mathbf{B} são ortogonais a todos os demais. Os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} representam as velocidades de fase e de raio, respectivamente.

onde v é a *velocidade de fase* da onda (na direção de \mathbf{k}).

Eliminando \mathbf{H} das equações (3.26) e (3.27), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= \mu_0 \omega \mathbf{k} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) &= -\omega^2 \mu_0 \mathbf{D} \\ \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} k^2 &= -\omega^2 \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{=1/c^2} \epsilon \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} k^2 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

ou, em notação de índices,

$$k_i (k_j E_j) - E_i k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} E_j, \quad (3.32)$$

donde, fazendo $E_i = \delta_{ij} E_j$, resulta em

$$\left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \right) E_j = 0. \quad (3.33)$$

Para seguirmos adiante, é necessário especificar ϵ_{ij} . Como veremos posteriormente, no caso dos metamateriais hiperbólicos que nos interessam, a forma do tensor dielétrico é uma simplificação da expressão (3.16), na qual $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \equiv \epsilon_o$ e $\epsilon_{33} \equiv \epsilon_e$, ou seja,

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

e o meio anisotrópico (cristal) é dito *uniaxial*. No caso geral em que $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$, o cristal é dito *biaxial* [53].

A equação (3.33) caracteriza um sistema linear homogêneo de equações. Logo, afim de obter outra solução além da trivial $\mathbf{E} = 0$, é necessário que [46]

$$\begin{vmatrix} k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o & -k_x k_y & -k_x k_z \\ -k_x k_y & k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_e \end{vmatrix} = 0. \quad (3.35)$$

Tal condição determina uma superfície no espaço \mathbf{k} . Após um laborioso cálculo, a expressão anterior pode ser simplificada para a forma

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o \right) \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_e} + \frac{k_z^2}{\epsilon_o} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0, \quad (3.36)$$

denominada *equação de Fresnel* [53, 54].

3.1.2 Ondas Ordinárias e Extraordinárias

A equação de Fresnel (3.36) revela que, para um meio uniaxial, a superfície (3.35) determinada pelo vetor de onda \mathbf{k} decompõe-se na esfera

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o, \quad (3.37)$$

e, no elipsoide de revolução

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{(\epsilon_e \omega^2 / c^2)} + \frac{k_z^2}{(\epsilon_o \omega^2 / c^2)} = 1. \quad (3.38)$$

Perceba que existem dois pontos onde as superfícies (3.37) e (3.38) se tocam, sendo eles $\mathbf{k}_{\pm} = (0, 0, \pm \epsilon_o \omega / c)$. Denomina-se *eixo óptico* do cristal a reta determinada por esses pontos e, *diretor* o versor que determina o sentido do eixo óptico [53].

Para nos livrarmos da constante ω^2 / c^2 , definimos o vetor “índice de refração”

$$\mathbf{N} \equiv \frac{c}{\omega} \mathbf{k}. \quad (3.39)$$

Sendo assim, podemos reescrever as equações (3.37) e (3.38) como

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = \epsilon_o \quad (3.40)$$

e

$$\frac{N_x^2 + N_y^2}{\epsilon_e} + \frac{N_z^2}{\epsilon_o} = 1. \quad (3.41)$$

Do exposto acima, existem duas ondas propagando-se no cristal uniaxial: a primeira, correspondente às soluções (3.37) e (3.40), denomina-se *onda ordinária*. Para ela, o meio se comporta como um meio isotrópico com índice de refração $n_o \equiv \sqrt{\epsilon_o}$. Já as soluções (3.38) e (3.41) caracterizam a *onda extraordinária*, para a qual o índice de refração N depende da direção de propagação.

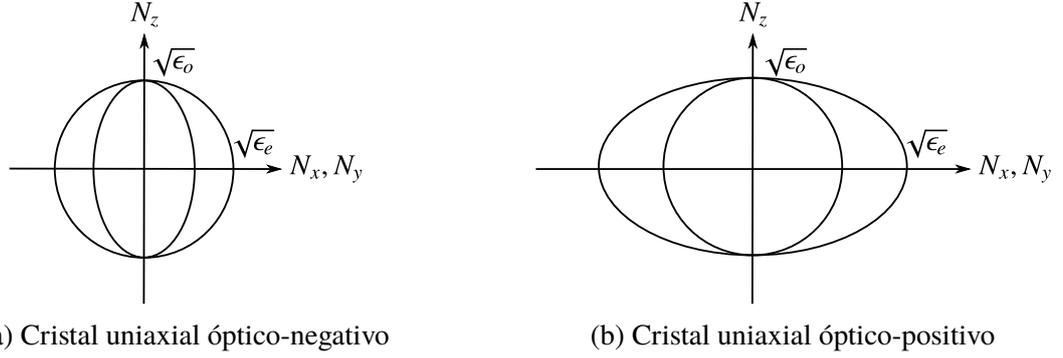


Figura 14 – Superfícies determinadas pelo vetor índice de refração N para cristais do tipo (14a) óptico-negativo e (14b) óptico-positivo.

Denotando como θ o ângulo entre o eixo óptico e o vetor de onda \mathbf{k} , tal que $N_z^2 = N^2 \cos^2 \theta$ e $N_x^2 + N_y^2 = N^2 \sin^2 \theta$, então, a equação (3.41) torna-se

$$\frac{1}{N^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}, \quad (3.42)$$

ou mesmo

$$N(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.43)$$

onde $n_e \equiv \sqrt{\epsilon_e}$ é o índice de refração extraordinário [54].

Se $n_e < n_o$, a esfera é externa ao elipsoide e o cristal é dito *óptico-negativo*. Caso contrário ($n_e > n_o$), a esfera é interna ao elipsoide e o cristal é dito *óptico-positivo* (veja a Figura 14). Vale ressaltar que, caso a propagação seja ao longo do eixo óptico (eixo z), então $\theta = 0$ na equação (3.43) e as ondas ordinária e extraordinária propagam-se com a mesma velocidade de fase $v_o = c/n_o = c/\sqrt{\epsilon_o}$, sendo assim indistinguíveis. Perceba que o índice de refração ao longo de uma determinada direção não depende da constante dielétrica correspondente à mesma direção. Por exemplo, no caso oposto em que $\theta = \pi/2$, $N(\pi/2) = n_e = \sqrt{\epsilon_e}$ e a velocidade de fase é $v_e = c/n_e = c/\sqrt{\epsilon_e}$. Isso ocorre porque as ondas eletromagnéticas são transversais, ou seja, os campos são ortogonais à direção de propagação.

Por meio das equações (3.33) e das relações de dispersão (3.37) e (3.38), podemos obter as polarizações das ondas ordinária e extraordinária. Sem perda de generalidade, iremos assumir que o plano coordenado xz contém os vetores paralelos \mathbf{k} e N , isto é, $k_y = 0$ e $N_y = 0$. Sendo assim, para a onda ordinária, combinando as equações (3.33) e (3.37), obtemos

$$k_x E_x + k_z E_z = 0, \quad -k_x k_z E_x + \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_e \right) E_z = 0, \quad (3.44)$$

donde,

$$E_z \left(k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_e \right) = 0. \quad (3.45)$$

Nessa última equação, como o termo entre parênteses não é nulo, então $E_z = 0$, o que implica $E_x = 0$ de acordo com (3.44). Assim, para a onda ordinária,

$$E_x^{(o)} = 0, \quad E_y^{(o)} \neq 0, \quad E_z^{(o)} = 0. \quad (3.46)$$

Sendo $D_x = \epsilon_0 \epsilon_o E_x^{(o)} = 0$, $D_y = \epsilon_0 \epsilon_o E_y^{(o)} \neq 0$ e $D_z = \epsilon_0 \epsilon_e E_z^{(o)} = 0$, então, $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ e $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$. No diagrama da Figura 13, $\theta = 0$ e as velocidades de raio u e de fase v possuem o mesmo valor $c/n_o = c/\sqrt{\epsilon_o}$. Portanto, a polarização é ortogonal ao plano formado por \mathbf{k} e pelo eixo óptico.

Com relação à onda extraordinária, as equações (3.33) e (3.38) fornecem

$$\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o\right) E_x - k_x k_z E_z = 0, \quad E_y = 0, \quad -k_x k_z E_x + \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_e\right) E_z = 0, \quad (3.47)$$

donde, combinando a primeira e a última equação, vem que

$$\begin{aligned} 0 &= E_z \left[k_x^2 k_z^2 - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o\right) \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_e\right) \right] \\ &= E_z \left[\frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_o \epsilon_e - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_e k_z^2 \right] \\ &= E_z \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2}{\epsilon_e} - \frac{k_z^2}{\epsilon_o} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

O termo entre colchetes da equação anterior é a própria relação de dispersão (3.38). Logo,

$$E_x^{(e)} \neq 0, \quad E_y^{(e)} = 0, \quad E_z^{(e)} \neq 0. \quad (3.49)$$

Resolvendo a primeira das equações (3.47) para o quociente $E_z^{(e)}/E_x^{(e)}$, temos

$$\frac{E_z^{(e)}}{E_x^{(e)}} = \frac{1}{k_x k_z} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o\right) = \frac{1}{k_x k_z} \left(-\frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} k_x^2\right) = -\frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} \frac{k_x}{k_z} = -\frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} \frac{N_x}{N_z}, \quad (3.50)$$

revelando que o vetor \mathbf{E} é tangente ao elipsoide (3.41), pois, tomando a equação do elipsoide como uma função implícita $\varphi(N_x, N_z) = 0$, a tangente possui inclinação

$$\frac{dN_z}{dN_x} = -\frac{\partial \varphi / \partial N_x}{\partial \varphi / \partial N_z} = -\frac{\epsilon_o}{\epsilon_e} \frac{N_x}{N_z}. \quad (3.51)$$

Ademais, como $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}$ e o campo elétrico é tangente ao elipsoide, \mathbf{S} é paralelo ao gradiente $(\partial \varphi / \partial N_x, \partial \varphi / \partial N_z) = (2N_x / \epsilon_e, 2N_z / \epsilon_o)$ da função $\varphi(N_x, N_z)$. Portanto, a direção do vetor de Poynting é fornecida pela relação

$$\frac{S_z^{(e)}}{S_x^{(e)}} = \frac{\partial \varphi / \partial N_z}{\partial \varphi / \partial N_x} = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_o} \frac{N_z}{N_x}. \quad (3.52)$$

Para finalizar, salientamos que \mathbf{s} , \mathbf{k} e o eixo óptico do cristal residem no mesmo plano [54].

3.1.3 O Princípio de Fermat e a Trajetória da Componente Extraordinária da Luz

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas, em particular, a luz, por meio do conceito de raios, isto é, curvas cuja tangente em cada ponto coincide com a direção de propagação da onda, constitui o domínio da *óptica geométrica*. Diante disso, a análise é feita sob a perspectiva de trajetórias, desconsiderando a natureza ondulatória da luz. Em outras

palavras, a óptica geométrica corresponde ao caso limite de pequenos comprimentos de onda, $\lambda \rightarrow 0$. Na propagação de raios luminosos, um meio óptico altera a geometria obedecida pela luz, no sentido de provocar um desvio da trajetória original dos raios caso o meio não estivesse presente. Um exemplo simples e imediato é o da passagem de um raio luminoso por uma interface ar-água, constatado facilmente ao imergir uma fração do comprimento de um lápis num copo d'água. Matematicamente, essa mudança na geometria da luz, é expressa pelo *princípio de Fermat*, o qual afirma que os raios de luz descrevem trajetórias de menor *caminho óptico*. Tais caminhos geralmente diferem dos trajetos com menor comprimento geométrico (menor distância), pois, o caminho óptico é apenas proporcional ao caminho geométrico, sendo a constante de proporcionalidade o índice de refração do meio [16].

Segundo o princípio de Fermat, a integral

$$\mathcal{F} = \int_P^Q \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.53)$$

é minimizada ao longo do caminho “percorrido” pela energia, ou seja, no qual o vetor tangente é paralelo ao vetor de Poynting. Logo, trata-se de um princípio variacional, onde $\delta\mathcal{F} = 0$ fornece a trajetória luminosa. Na integral de Fermat (3.53), \mathbf{N} é o vetor índice de refração apresentado em (3.39) e $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{S}$.

No caso da onda ordinária, o índice de refração é independente da direção de propagação. Sendo assim,

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = n_o |d\mathbf{r}| = n_o dl \quad (3.54)$$

e a variação

$$\delta\mathcal{F} = n_o \delta \int_P^Q dl = 0 \quad (3.55)$$

resulta numa trajetória retilínea, uma vez que dl é o comprimento de arco euclidiano. Além disso, os vetores \mathbf{k} , \mathbf{S} e $d\mathbf{r}$ são colineares.

No que concerne à onda extraordinária, a propagação ocorre de uma maneira mais complexa, já que \mathbf{S} e $d\mathbf{r}$ não estão mais alinhados com \mathbf{k} . Consequentemente, a integral de Fermat assume uma forma mais intrincada. A fim de simplificar (3.53), expressemos o vetor de onda \mathbf{k} em termos da velocidade de fase \mathbf{v} por meio da relação

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v^2} \mathbf{v}, \quad (3.56)$$

onde, combinando com a equação (3.39), resulta em

$$\mathbf{N} = \frac{c}{v^2} \mathbf{v}. \quad (3.57)$$

Substituindo a expressão anterior na integral (3.53), obtemos

$$\mathcal{F} = \int_P^Q \frac{c}{v^2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q \frac{c}{v^2} v \cos \theta dl = \int_P^Q \frac{c}{v} \cos \theta dl = \int_P^Q \frac{c}{u} dl. \quad (3.58)$$

Na última passagem, utilizamos a relação (3.30), sendo u a velocidade de raio e θ o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} (ou, entre \mathbf{v} e $d\mathbf{r}$). Definindo o índice de raio $N_r \equiv c/u$, o princípio de Fermat também pode ser expresso como a minimização da integral

$$\mathcal{F} = \int_P^Q N_r dl. \quad (3.59)$$

Além disso, substituindo $u = dl/dt$ em (3.59) e descartando o fator c que é irrelevante do ponto de vista variacional, então

$$\mathcal{F} = \int_P^Q dt, \quad (3.60)$$

nos revelando que a luz percorre o caminho com menor duração entre os pontos P e Q [53].

A discussão do parágrafo anterior só possui sentido prático caso seja possível expressar N_r de forma útil, como por exemplo, semelhante à equação (3.43). Sendo assim, considere o vetor auxiliar $\mathbf{s} \equiv \mathbf{u}/c$, paralelo à trajetória ($\mathbf{s} \parallel \mathbf{S}, d\mathbf{r}$) e que de acordo com (3.57) satisfaz $\mathbf{s} \cdot \mathbf{N} = 1$. Conforme a equação (3.52), o vetor \mathbf{S} é ortogonal ao elipsoide (3.41) e paralelo ao gradiente

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_x}, \frac{\partial \varphi}{\partial N_y}, \frac{\partial \varphi}{\partial N_z} \right) = \left(\frac{2N_x}{\epsilon_e}, \frac{2N_y}{\epsilon_e}, \frac{2N_z}{\epsilon_o} \right). \quad (3.61)$$

Diante disso, é fácil ver que uma expressão para \mathbf{s} que satisfaz o vínculo $\mathbf{s} \cdot \mathbf{N} = 1$ é

$$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = \left(\frac{N_x}{\epsilon_e}, \frac{N_y}{\epsilon_e}, \frac{N_z}{\epsilon_o} \right), \quad (3.62)$$

donde,

$$\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z) = (\epsilon_e s_x, \epsilon_e s_y, \epsilon_o s_z). \quad (3.63)$$

Substituindo a expressão anterior na equação do elipsoide (3.41), temos

$$\epsilon_o s_z^2 + \epsilon_e (s_x^2 + s_y^2) = 1. \quad (3.64)$$

Se ϑ é o ângulo entre \mathbf{s} e o eixo óptico, tomemos $s_z^2 = s^2 \cos^2 \vartheta$ e $s_x^2 + s_y^2 = s^2 \sin^2 \vartheta$, onde $s = |\mathbf{s}|$. Daí, vem que

$$\frac{1}{s^2} = \epsilon_o \cos^2 \vartheta + \epsilon_e \sin^2 \vartheta. \quad (3.65)$$

Finalmente, sendo $1/s = c/u = N_r$, $n_o^2 = \epsilon_o$ e $n_e^2 = \epsilon_e$, então,

$$N_r^2 = n_o^2 \cos^2 \vartheta + n_e^2 \sin^2 \vartheta, \quad (3.66)$$

ou ainda

$$N_r(\vartheta) = \sqrt{n_o^2 \cos^2 \vartheta + n_e^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (3.67)$$

Em virtude da anisotropia, o ângulo ϑ em (3.67) depende tanto da posição \mathbf{r} quanto do vetor tangente à trajetória $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dl$, de modo que $N_r = N_r(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Concluindo, a equação da curva descrita pelos raios luminosos pode ser obtida por meio da resolução das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\partial N_r}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial N_r}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (3.68)$$

3.1.4 A Analogia Óptico-Geométrica

Na seção anterior, vimos que a aplicação do princípio variacional sobre a integral de Fermat (3.59) fornece a trajetória descrita pelos raios de luz. Entretanto, existe um método alternativo, correlacionando óptica e geometria, no qual o caminho percorrido pela luz é interpretado como uma curva geodésica numa geometria riemanniana efetiva [53]. A ideia por trás desse modelo geométrico para a propagação luminosa é simples: na geometria riemanniana, as equações geodésicas são oriundas do princípio variacional

$$\delta \int_P^Q ds = \delta \int_P^Q \sqrt{h_{ij} dx^i dx^j} = 0, \quad (3.69)$$

onde h_{ij} denota um tensor métrico tridimensional. Já na óptica geométrica, a trajetória é obtida minimizando a integral de Fermat

$$\delta \int_P^Q N_r dl = \int_P^Q \sqrt{N_r^2 \delta_{ij} dx^i dx^j} = 0. \quad (3.70)$$

Portanto, fazendo a correspondência

$$h_{ij} = N_r^2 \delta_{ij}, \quad (3.71)$$

em princípio teríamos o tensor métrico da geometria efetiva obedecida pela luz.

Todavia, a equação (3.71) merece cautela. No caso isotrópico, onde $N_r = N_r(x^i)$, a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por $ds = \sqrt{N_r^2(x) \delta_{ij} dx^i dx^j}$ e a correspondência almejada pela equação (3.71) é válida, pelo fato do tensor métrico $h_{ij} = h_{ij}(x)$ depender apenas da posição. Já para um meio anisotrópico, temos

$$N_r = N_r(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = N_r(x, dx/dt), \quad (3.72)$$

o que, de acordo com a expressão (3.71), acarreta em

$$h_{ij} = h_{ij}(x, dx/dt) = h_{ij}(x, \dot{x}). \quad (3.73)$$

Como já esperado, o elemento de linha ds depende, além da posição, dos deslocamentos infinitesimais $dx^i = \dot{x}^i dt$, onde t é um parâmetro da curva. Logo, ds depende da velocidade com a qual a curva é percorrida. Tal situação encontra-se fora do escopo da geometria riemanniana, pertencendo ao domínio da *geometria de Finsler* [55]. Na geometria de Finsler, o comprimento de arco é dado por

$$ds = F(x, dx) = F(x, \dot{x} dt) = F(x, \dot{x}) dt, \quad (3.74)$$

onde $F(x, \dot{x})$ é a *função finsleriana*, homogênea de primeiro grau com respeito ao argumento dx . Ademais, as equações geodésicas são da forma

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \frac{d(\ln F)}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0, \quad (3.75)$$

sendo a conexão Γ_{jk}^i ainda determinada pelos símbolos de Christoffel de segundo tipo (2.182).

Pelo exposto no parágrafo anterior, para manter a correspondência $ds = N_r dl$ entre geometria e óptica num meio anisotrópico, a identificação correta, em substituição à equação (3.71) é [56]

$$N_r dl = F(x, dx) = F(x, \dot{x}) dt. \quad (3.76)$$

Entretanto, atente que quando $t = s$, a equação (3.74) resulta em $F(x, \dot{x}) = 1$, o que implica $\ln F = 0$. Como consequência, as equações geodésicas (3.75) tomam a forma tradicional da geometria riemanniana. Além disso, por meio da identidade $ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j = F^2(x, \dot{x}) dt^2$, podemos obter h_{ij} a partir de $F(x, \dot{x})$, visto que

$$\begin{aligned} h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j &= F^2(x, \dot{x}) \\ h_{ij} \delta_k^i \dot{x}^j + h_{ij} \dot{x}^i \delta_k^j &= \frac{\partial F^2}{\partial \dot{x}^k} \\ h_{ij} \delta_k^i \delta_l^j + h_{ij} \delta_l^i \delta_k^j &= \frac{\partial F^2}{\partial \dot{x}^l \partial \dot{x}^k} \\ h_{lk} &= \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial \dot{x}^l \partial \dot{x}^k}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Logo, é factível utilizar a geometria riemanniana como ferramenta para descrever e analisar as trajetórias dos raios luminosos, contanto que a parametrização da trajetória (geodésica) seja dada pelo comprimento de arco (3.74).

Para completar a analogia óptico-geométrica, estenderemos a discussão acima para o formalismo quadridimensional do espaço-tempo, conforme [57]. Considere uma métrica $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ dita *estática*, caracterizada pela invariância sob reversão e translação temporal, ou seja, $t \rightarrow -t$ e $t \rightarrow t + \text{constante}$, respectivamente. Logo,

$$g_{0i} = g_{i0} = 0 \quad \text{e} \quad g_{ij} = g_{ij}(x^i). \quad (3.78)$$

No espaço-tempo, a propagação dos raios luminosos é descrita pelas equações geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = 0, \quad (3.79)$$

sendo σ um parâmetro afim e $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$ os símbolos de Christoffel. Transpondo a parametrização para o tempo coordenado t , então

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{dt}{d\sigma} \frac{d}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{d\sigma^2} = \frac{d^2 t}{d\sigma^2} \frac{d}{dt} + \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2}. \quad (3.80)$$

Substituindo na equação geodésica, obtemos

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha + \frac{d^2 t / d\sigma^2}{(dt/d\sigma)^2} \dot{x}^\mu = 0, \quad (3.81)$$

onde $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dt$ e $\ddot{x}^\mu = d^2x^\mu/dt^2$. Contraindo a expressão anterior com $g_{i\mu}$ e utilizando a primeira relação em (3.78), resulta em

$$g_{ik}\ddot{x}^k + \{\nu\alpha, i\} \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha + \frac{d^2t/d\sigma^2}{(dt/d\sigma)^2} g_{ik}\dot{x}^k = 0, \quad (3.82)$$

onde $\{\nu\alpha, i\} \equiv g_{i\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$. Explicitando $\{\nu\alpha, i\} \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha$, vem que

$$\begin{aligned} \{\nu\alpha, i\} \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha &= \{0\alpha, i\} \dot{x}^\alpha + \{j\alpha, i\} \dot{x}^j \dot{x}^\alpha \\ &= \{00, i\} + 2\dot{x}^j \{0j, i\} + \{jk, i\} \dot{x}^j \dot{x}^k \\ &= \{00, i\} + \{jk, i\} \dot{x}^j \dot{x}^k. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Por meio da integral primeira

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = g_{00} + g_{jk}\dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad (3.84)$$

obtém-se

$$-\frac{g_{jk}}{g_{00}} \dot{x}^j \dot{x}^k = 1. \quad (3.85)$$

Daí, vem que

$$\{\nu\alpha, i\} \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha = -\{00, i\} \frac{g_{jk}}{g_{00}} \dot{x}^j \dot{x}^k + \{jk, i\} \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (3.86)$$

e, portanto, a equação geodésica (3.82) assume a forma

$$g_{ik}\ddot{x}^k - \{00, i\} \frac{g_{jk}}{g_{00}} \dot{x}^j \dot{x}^k + \{jk, i\} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{d^2t/d\sigma^2}{(dt/d\sigma)^2} g_{ik}\dot{x}^k = 0. \quad (3.87)$$

O termo $(d^2t/d\sigma^2) (dt/d\sigma)^{-2}$ pode ser obtido da componente temporal de (3.79), uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= g_{0\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \{\nu\alpha, 0\} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \\ &= g_{00} \frac{d^2t}{d\sigma^2} + \{00, 0\} + 2\{0j, 0\} \frac{dx^j}{d\sigma} \frac{dt}{d\sigma} + \frac{dx^j}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\sigma} \{jk, 0\} \\ &= g_{00} \frac{d^2t}{d\sigma^2} + 2\{0j, 0\} \dot{x}^j \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde,

$$\frac{d^2t/d\sigma^2}{(dt/d\sigma)^2} = -2\{0j, 0\} \frac{\dot{x}^j}{g_{00}}. \quad (3.89)$$

Diante disso, a expressão (3.87) torna-se

$$g_{ik}\ddot{x}^k + \left[\{jk, i\} - \{00, i\} \frac{g_{jk}}{g_{00}} - 2\{0j, 0\} \frac{g_{ik}}{g_{00}} \right] \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (3.90)$$

Substituindo na equação anterior a forma explícita dos termos

$$\{00,i\} = -\frac{1}{2}g_{00,i}, \quad (3.91)$$

$$\{0j,0\} = \frac{1}{2}g_{00,j}, \quad (3.92)$$

$$\{jk,i\} = \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}), \quad (3.93)$$

obtemos

$$g_{ik}\ddot{x}^k + \left[\frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}) + \frac{1}{2}\frac{g_{jk}}{g_{00}}g_{00,i} - \frac{1}{2}\frac{g_{ik}}{g_{00}}g_{00,j} - \frac{1}{2}\frac{g_{ij}}{g_{00}}g_{00,k} \right] \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (3.94)$$

Introduzindo a relação,

$$h_{ij} \equiv -\frac{g_{ij}}{g_{00}}, \quad (3.95)$$

da qual resulta

$$h_{ij,k} = -\frac{1}{g_{00}}g_{ij,k} + \frac{1}{g_{00}^2}g_{ij}g_{00,k}, \quad (3.96)$$

podemos reescrever a expressão (3.94) da forma

$$\begin{aligned} 0 &= g_{ik}\ddot{x}^k + \frac{g_{00}}{2}(-h_{ij,k} - h_{ik,j} + h_{jk,i})\dot{x}^j\dot{x}^k \\ &= -\frac{g_{ik}}{g_{00}}\ddot{x}^k + \frac{1}{2}(h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i})\dot{x}^j\dot{x}^k \\ &= h_{ik}\ddot{x}^k + \frac{1}{2}(h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i})\dot{x}^j\dot{x}^k \\ &= \ddot{x}_i + \frac{1}{2}(h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i})\dot{x}^j\dot{x}^k, \end{aligned} \quad (3.97)$$

que nada mais é do que a equação geodésica num espaço tridimensional com tensor métrico h_{ij} , cujo parâmetro afim é o tempo coordenado t . Além disso, a equação anterior é oriunda do princípio variacional

$$\delta \int_P^Q \sqrt{h_{ij}dx^i dx^j} = 0. \quad (3.98)$$

Façamos agora uma correspondência entre h_{ij} e a métrica espacial γ_{ij} apresentada na seção 2.2.3. Comparando as equações (3.95) e (2.206), temos $h_{ij} = \gamma_{ij}/g_{00}$. Assim, o princípio variacional (3.98) torna-se

$$\delta \int_P^Q \sqrt{h_{ij}dx^i dx^j} = \delta \int_P^Q \sqrt{\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{g_{00}}} = \delta \int_P^Q \frac{dl}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (3.99)$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio (2.199) e dl a distância definida em (2.205). Usando o fato de que $ds^2 = 0$ para intervalos do tipo luz, então,

$$0 = g_{00}dt^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j = d\tau^2 - dl^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dl}{d\tau} = 1, \quad (3.100)$$

para $c = 1$. Juntamente com (2.199), a relação anterior nos permite reescrever a expressão (3.98) da forma

$$\delta \int_P^Q dt = 0, \quad (3.101)$$

que é justamente o princípio de Fermat aplicado à integral (3.60).

Resumindo, podemos estudar a propagação da luz em um meio anisotrópico através de uma geometria efetiva no espaço-tempo: a parte espacial, definida em termos de h_{ij} , advém da expressão (3.77). A complementação temporal é feita por meio da equação (3.95). Sendo assim, considerando nossa escolha de assinatura $(+, -, -, -)$, $g_{00} = 1$ e a métrica da geometria efetiva será

$$ds^2 = c^2 dt^2 - h_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.102)$$

Finalizamos esta seção ressaltando que esse modelo geométrico é bastante utilizado na óptica de cristais líquidos portadores de defeitos topológicos, havendo uma extensa lista de publicações a respeito desses temas, por exemplo, [58, 59, 60, 61].

3.2 Dispersão da Frequência em Dielétricos, Condutores e Plasmas

No estudo dos metamateriais em geral, os meta-átomos constituintes combinam características de materiais dielétricos e condutores metálicos para formar o meio efetivo [11]. Entretanto, é importante primeiro compreender como cada um desses meios responde à aplicação de um campo elétrico em separado. Em outras palavras, devemos analisar, em meios isotrópicos dielétricos e condutores, como se comporta a permissividade elétrica $\epsilon(\omega)$ em função da frequência do campo aplicado \mathbf{E} . A essa dependência dos valores da permissividade com a frequência da radiação eletromagnética, dá-se o nome de *dispersão*.

3.2.1 Um Modelo Simples para $\epsilon(\omega)$, Dispersão Anômala e Absorção Ressonante

Em nossa análise da dispersão, vamos utilizar o *modelo do oscilador harmônico de Drude-Lorentz* [62], no qual os elétrons encontram-se ligados as suas respectivas moléculas por meio de uma força restauradora linear, sendo assim tomados como osciladores harmônicos amortecidos. O amortecimento, linear e proporcional à velocidade, é oriundo do movimento dos elétrons. Além disso, o caso de elétrons livres também é contemplado, tratando-se de um caso particular onde a força restauradora do oscilador é nula.

A equação de movimento para um elétron de carga elementar $-e$ ligado por uma força harmônica e atuado por um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ é

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - m \omega_0^2 \mathbf{r} - m \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3.103)$$

onde γ é a constante de amortecimento e os efeitos magnéticos foram desprezados. Se o campo varia harmonicamente com o tempo com frequência ω , segundo $e^{-i\omega t}$, então

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow -i\omega \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \rightarrow -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (3.104)$$

Donde, substituindo na equação de movimento (3.103), resulta em

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m} \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \right)^{-1} \mathbf{E}. \quad (3.105)$$

Logo, o momento de dipolo provocado por um elétron é

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2}{m} \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \right)^{-1} \mathbf{E}. \quad (3.106)$$

Admitindo que se tenham N moléculas por unidade de volume, com Z elétrons por molécula, e que, em lugar de uma única frequência própria de oscilação para todos eles, existam f_j elétrons por molécula, cada qual com uma frequência ω_j e com uma constante de amortecimento γ_j , o momento de dipolo total numa molécula, será dado por

$$\mathbf{p}_{\text{molécula}} = -e \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i = \frac{e^2 \mathbf{E}}{m} \sum_j f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j \right)^{-1}, \quad (3.107)$$

onde as *intensidades dos osciladores*, f_j , satisfazem à regra da soma,

$$\sum_j f_j = Z. \quad (3.108)$$

Diante disso, a polarização na molécula, isto é, a densidade de momentos dipolares, é

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = N \mathbf{p}_{\text{molécula}} = \frac{Ne^2 \mathbf{E}}{m} \sum_j f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j \right)^{-1}, \quad (3.109)$$

Por conseguinte, a constante dielétrica, $\epsilon = 1 + \chi_e$, será

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j \right)^{-1}, \quad (3.110)$$

cujas partes real e imaginária são

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_j^2}, \quad (3.111)$$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j \gamma_j \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_j^2}. \quad (3.112)$$

Com definições quânticas apropriadas de f_j , γ_j e ω_j , a equação (3.110) é uma expressão acurada para a contribuição atômica à constante dielétrica [13].

As constantes de amortecimento γ_j são em geral pequenas em comparação com as frequências de oscilação ou *ressonância* ω_j . Isso quer dizer que $\epsilon(\omega)$ é aproximadamente real para a maioria das frequências. O fator $(\omega_j^2 - \omega^2)^{-1}$ é positivo para $\omega < \omega_j$ e negativo para $\omega > \omega_j$. Então, em frequências baixas, abaixo do menor dos ω_j , todos os termos da soma (3.110) contribuem com o mesmo sinal positivo, e $\epsilon(\omega) > 1$. À medida que se passam os valores

sucessivos de ω_j , aparecem cada vez mais termos negativos da soma, até que finalmente toda a soma é negativa, e $\epsilon(\omega) < 1$. Nas vizinhanças de qualquer dos ω_j , naturalmente existe um comportamento ressonante. Sendo assim, considere o caso mais simples onde só existe uma frequência de ressonância ω_0 e uma constante de amortecimento γ . Na vizinhança de $\omega = \omega_0$, vale a aproximação

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \quad (3.113)$$

donde, substituindo em (3.111) e (3.112), resulta em

$$\text{Re } \epsilon(\omega) - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{(\omega_0 - \omega)/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (3.114)$$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (3.115)$$

sendo a frequência

$$\omega_p^2 \equiv \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m}, \quad (3.116)$$

que depende somente do número total NZ elétrons por unidade de volume, é denominada *frequência de plasma* do meio. A função $\text{Im } \epsilon$ tem a forma chamada *lorentziana*, ilustrada na Figura 15, que também mostra $(\text{Re } \epsilon - 1)$. Tais funções possuem propriedades simples: $\text{Im } \epsilon$ é par em relação a $(\omega_0 - \omega)$ enquanto $(\text{Re } \epsilon - 1)$ é ímpar. É fácil demonstrar que a largura de $\text{Im } \epsilon$ na metade do máximo é γ e que os extremos de $(\text{Re } \epsilon - 1)$ ocorrem nos mesmos pontos. O valor máximo de $\text{Im } \epsilon$ na ressonância,

$$M = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \gamma} = \frac{\omega_p^2 \omega_0}{\omega_0^2 \gamma}, \quad (3.117)$$

pode ser bastante grande. Para um gás, à pressão atmosférica, $(\omega_p/\omega_0)^2 \sim 10^{-3}$, porém $(\omega_0/\gamma) \sim 10^{-5}$, de modo que M pode ser maior que 100. Esse valor acarreta uma condutividade¹ na frequência de ressonância comparável a de um metal [62]. A *dispersão normal* está associada a um aumento de $\text{Re } \epsilon(\omega)$ com ω , ao passo que a *dispersão anômala* associa-se ao comportamento inverso. A dispersão normal é a regra geral, exceto nas vizinhanças da frequência de ressonância. Somente quando há dispersão anômala a parte imaginária de ϵ é apreciável. Uma vez que uma parte imaginária positiva de ϵ representa dissipação de energia da onda eletromagnética no meio, as regiões em que $\text{Im } \epsilon$ é grande são denominadas regiões de *absorção ressonante*.

A atenuação de uma onda plana é expressa, em termos das partes real e imaginária do número de onda k . Se o número de onda for escrito como

$$k = k_R + ik_I, \quad (3.118)$$

¹ É possível mostrar, através da equação (3.128), que a parte real da condutividade é correlacionada com a parte imaginária da constante dielétrica via $\text{Re } \sigma = \epsilon_0 \omega \text{Im } \epsilon$.

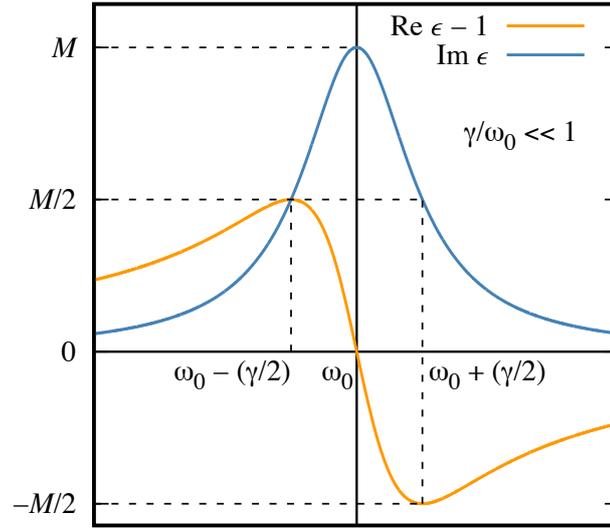


Figura 15 – Partes real e imaginária da constante dielétrica $\epsilon(\omega)$ na vizinhança de uma frequência de ressonância ω_0 . A região de dispersão anômala é também o intervalo de frequência onde ocorre absorção.

então podemos escrever o campo elétrico da forma (considerando $\mathbf{k} = k\hat{z}$)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)}, \quad (3.119)$$

onde o parâmetro $2k_I$ é conhecido como constante de atenuação ou coeficiente de absorção. O fator 2 advém do fato da intensidade da onda cair com $e^{-2k_I z}$. Ademais, como $N^2 = \epsilon$ e $N = ck/\omega$, sendo N o índice de refração, então

$$k_R^2 - k_I^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re } \epsilon, \quad (3.120)$$

$$2k_R k_I = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Im } \epsilon. \quad (3.121)$$

Se $k_I \ll k_R$, conforme é o caso, exceto quando a absorção é muito intensa ou quando $\text{Re } \epsilon < 0$, temos

$$k_R^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re } \epsilon \quad \Rightarrow \quad k_R \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\text{Re } \epsilon}, \quad (3.122)$$

de forma que a constante de atenuação pode ser escrita, aproximadamente, como

$$2k_I \approx \left(\frac{\text{Im } \epsilon}{\text{Re } \epsilon} \right) k = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\text{Im } \epsilon}{\text{Re } \epsilon} \right) \sqrt{\text{Re } \epsilon}. \quad (3.123)$$

Logo, o decréscimo relativo da intensidade, por comprimento de onda, dividido por 2π , isto é, $2k_I/k_R$, é dado então pela razão $\text{Im } \epsilon/\text{Re } \epsilon$ uma vez que $k_R = 2\pi/\lambda$.

3.2.2 Comportamento em Frequências Baixas, Condutividade Elétrica

Quando $\omega \rightarrow 0$, há uma diferença qualitativa na resposta do meio conforme a frequência de ressonância mais baixa $\omega_<$ seja ou não nula. Para os isolantes, $\omega_< \neq 0$, logo, o comportamento

é obtido tomando o limite $\omega \rightarrow 0$ na equação (3.110), ou seja,

$$\epsilon_{\text{dielétrico}}(\omega \rightarrow 0) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}, \quad (3.124)$$

o que caracteriza o modelo de polarização estática nos dielétricos [63].

Todavia, quando uma certa fração f_0 dos elétrons por molécula é livre, no sentido de os elétrons terem $\omega_0 = 0$, a constante dielétrica é singular em $\omega = 0$. Se a contribuição dos elétrons livres for expressa separadamente, a expressão (3.110) fica

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_d(\omega) - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{f_0}{\omega^2 + i\omega\gamma_0} = \epsilon_d(\omega) + i \frac{Ne^2 f_0}{\epsilon_0 m \omega (\gamma_0 - i\omega)}, \quad (3.125)$$

onde ϵ_d é a contribuição de todos os outros dipolos. O comportamento singular pode ser compreendido quando se examina a equação de Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.126)$$

admitindo-se que o meio obedece à lei de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, e tem uma constante dielétrica ordinária ϵ_d . Com uma dependência harmônica no tempo, $\partial_t \mathbf{D} = -i\omega \mathbf{D}$, e a equação torna-se

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} - i\omega \mathbf{D} = (\sigma - i\omega \epsilon_0 \epsilon_d) \mathbf{E} = -i\omega \left(\epsilon_0 \epsilon_d + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}. \quad (3.127)$$

Por outro lado, caso atribuíssemos todas as propriedades do meio à constante dielétrica, ou seja, utilizando $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}$ com $\epsilon(\omega)$ dada por (3.125), podemos interpretar a grandeza entre parênteses no lado direito de (3.127) como sendo $\epsilon(\omega)$. Daí, vem que

$$\sigma = \frac{Ne^2 f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)}, \quad (3.128)$$

e, portanto, temos em essência o modelo de Drude [63], com Nf_0 sendo o número de elétrons livres por unidade de volume do meio e $\tau = 1/\gamma_0$ o tempo de relaxação, cujo valor representa o tempo decorrido para a corrente \mathbf{J} cair para e^{-1} do seu valor inicial. A razão γ_0/f_0 pode ser determinada a partir de dados experimentais sobre a condutividade. Para o cobre, $N \approx 8 \times 10^{28}$ átomos/m³ e, em temperaturas normais, a condutividade em baixas frequências é $\sigma \approx 5,9 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, donde $\gamma_0/f_0 \approx 4 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ [13]. Admitindo $f_0 \sim 1$, o resultado mostra que, até frequências bem além da região de micro-ondas ($\omega \lesssim 10^{11} \text{ s}^{-1}$), a condutividade dos metais é essencialmente real, isto é, \mathbf{J} e \mathbf{E} ficam em fase, e independentes da frequência. Em frequências mais altas (no infravermelho e além) a condutividade é complexa e varia com a frequência numa forma descrita qualitativamente pela expressão (3.128).

As considerações anteriores mostram que a distinção entre dielétricos e condutores é artificial, pelos menos nas faixas distantes de $\omega = 0$. Quando o meio possui elétrons livres, ele é um condutor em frequências baixas ($\omega \rightarrow 0$), nos outros casos é um isolante. Em frequências diferentes de zero, porém, a contribuição da condutividade à permissividade $\epsilon(\omega)$ em (3.110) aparece simplesmente como uma amplitude ressonante, tal como o restante. Logo, as propriedades dispersivas do meio podem ser atribuídas, não só a uma constante dielétrica complexa, mas também a uma condutividade dependente da frequência e a uma constante dielétrica.

3.2.3 Limite de Altas Frequências, Frequência de Plasma

Passando para o extremo oposto do espectro de frequências, examinemos agora o limite de altas frequências. Em frequências muito acima da frequência mais elevada $\omega_>$, a constante dielétrica (3.110) assume a forma simples,

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &\approx 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega^2} \\ &\approx 1 - \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2} \\ &\approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},\end{aligned}\quad (3.129)$$

onde ω_p é a frequência de plasma (3.116). O número de onda $k^2 = \omega^2 \epsilon / c^2$ é dado, neste limite, por

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad (3.130)$$

donde se obtém a relação de dispersão $\omega(k)$,

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (3.131)$$

Nos meios dielétricos, a equação (3.131) vale somente para $\omega^2 \gg \omega_p^2$. A constante dielétrica é então próxima da unidade, embora um pouco menor que ela, e aumenta com a frequência tendendo ao valor unitário no limite assintótico $\omega \rightarrow +\infty$. O número de onda permanece real até o limite inferior da frequência de corte ω_p .

Em certas situações, como na região da ionosfera² ou num plasma rarefeito de laboratório, os elétrons são livres e o amortecimento é desprezível. Então a equação (3.129) vale para uma ampla faixa de frequências, incluindo $\omega < \omega_p$. Note que para $\omega < \omega_p$ o número de onda é puramente imaginário. Ondas desse tipo são refletidas ao incidirem num plasma, pois de acordo com (3.118), $k_R = 0$ e $k_I \neq 0$, de forma que só existe o termo de atenuação em (3.119). Os campos caem exponencialmente com a distância medida a partir da superfície. Em $\omega = 0$, a constante de atenuação $2k_I$ é

$$2k_I = \frac{2\omega_p}{c}. \quad (3.132)$$

Na escala de laboratório, as densidades de plasma são da ordem de 10^{18} – 10^{22} elétrons/m³. Isso significa que $\omega_p \approx 6 \times 10^{10}$ – 6×10^{12} s⁻¹, de modo que os comprimentos típicos de atenuação $1/2k_I$ são da ordem de $0,2$ – 2×10^{-3} cm para campos estáticos ou de baixa frequência [13].

A refletividade dos metais em frequências óticas e mais elevadas é provocada, essencialmente, pelo mesmo comportamento que no caso de um plasma rarefeito. A constante dielétrica de um metal é dada por (3.125). Em frequências elevadas ($\omega \gg \gamma_0$), essa expressão assume a

² A ionosfera é a parte superior da atmosfera terrestre, constituída de íons e do chamado plasma ionosférico, localizada entre 60–1000 km de altitude.

forma aproximada,

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (3.133)$$

onde $\omega_p^2 = ne^2/\epsilon_0 m^*$ é a frequência de plasma dos elétrons de condução, e a *massa efetiva* m^* inclui parcialmente os efeitos de ligação expressos por $\epsilon_b(\omega)$ em (3.125) [64]. Para $\omega \ll \omega_p$, o comportamento da luz incidente sobre o metal é aproximadamente o do plasma descrito por (3.129). A luz penetra somente uma distância muito pequena no metal e é quase inteiramente refletida. Porém, quando a frequência chega ao domínio em que $\epsilon(\omega) > 0$, o metal pode subitamente transmitir a luz e a sua refletividade modifica-se drasticamente. Isso ocorre tipicamente na região do ultravioleta, e, constitui a transparência dos metais ao ultravioleta.

3.3 Metamateriais Hiperbólicos

Metamateriais hiperbólicos constituem uma subclasse de metamateriais. Em geral, são estruturados artificialmente por meio de meta-átomos, células unitárias cujas dimensões são muito menores do que o comprimento de onda da radiação com a qual interagem. Alguns metamateriais hiperbólicos, entretanto, ocorrem na natureza. Veja, por exemplo, as referências [65, 66]. Porém, o que os distingue é a sua peculiar anisotropia elétrica. Como vimos na seção 3.1.2, num cristal uniaxial, cujo tensor constante dielétrica é dado por

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{bmatrix}, \quad (3.134)$$

a solução da equação de Fresnel (3.36) resulta em duas soluções: uma delas, a onda ordinária, possui uma relação de dispersão isotrópica, em coordenadas cartesianas (x, y, z) ,

$$|\mathbf{k}|^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_o, \quad (3.135)$$

enquanto a outra solução, a onda extraordinária, tem como relação de dispersão

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_e} + \frac{k_z^2}{\epsilon_o} = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.136)$$

Naturalmente, se $\epsilon_e, \epsilon_o > 0$, as superfícies de isofrequência representam, para as ondas ordinária e extraordinária, uma esfera e um elipsoide de revolução, respectivamente. A situação é alterada consideravelmente se uma das constantes dielétricas é negativa, ou seja, $\epsilon_e > 0$ ou $\epsilon_o < 0$. Nesses casos, a equação (3.136) irá caracterizar um hiperboloide, sendo de duas folhas se $\epsilon_e < 0$ e de uma folha caso $\epsilon_o < 0$. Neste último, o número de onda ordinário $k^2 = -\omega^2 |\epsilon_o| / c^2$ é puramente imaginário, donde se conclui que a onda ordinária é evanescente e, diante disso, não há propagação. Em contrapartida, sempre haverá propagação extraordinária, o que é notável, já que num meio isotrópico tradicional um valor $\epsilon < 0$ acarreta uma onda evanescente. Vale ressaltar também que, as características das polarizações dos campos \mathbf{E} e \mathbf{S} , obtidas em (3.50) e

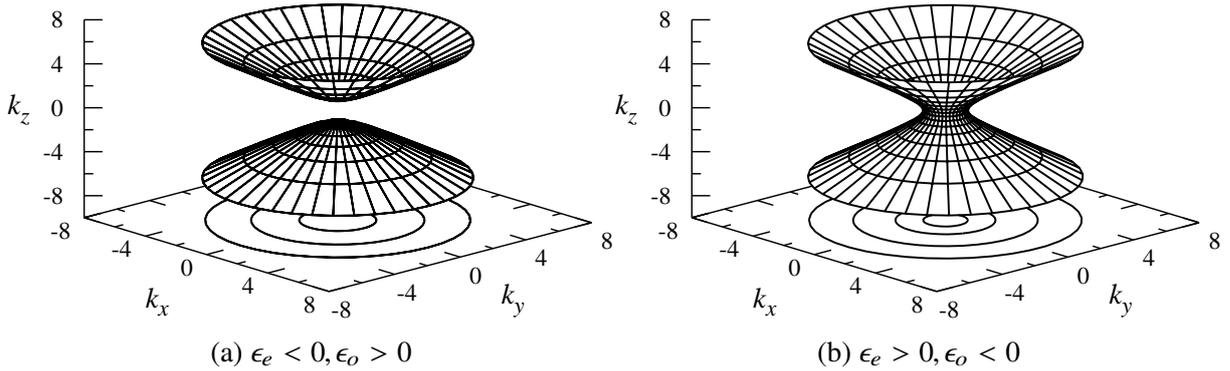


Figura 16 – Superfícies de isofrequência $\omega(\mathbf{k}) = \text{constante}$ características dos metamateriais de (a) tipo I e de (b) tipo II.

(3.52), permanecem válidas. Mesmo permutando o sinal de uma das constantes dielétricas, \mathbf{E} se mantém tangente ao hiperboloide e \mathbf{S} permanece ortogonal a \mathbf{E} e, portanto, ao hiperboloide.

Conforme explanado na seção 3.2, para um meio metálico, $\text{Re } \epsilon(\omega) < 0$ se a frequência dos campos for inferior à frequência de plasma do metal ω_p . Portanto, a fim de atingir o caráter hiperbólico no meio anisotrópico, isto é, obter $\epsilon_e < 0$ ou $\epsilon_o < 0$, devemos restringir o movimento dos elétrons livres a uma ($\epsilon_e < 0$), ou a duas ($\epsilon_o < 0$) direções espaciais. Em outras palavras, é necessário produzir um caráter metálico em uma ($\epsilon_e < 0$), ou duas ($\epsilon_o < 0$) dimensões espaciais. Daí vem o fato das principais estruturas de metamateriais hiperbólicos serem construídas alternando-se entre camadas dielétricas e metálicas [25].

De acordo com a literatura [26], os metamateriais hiperbólicos são classificados em dois tipos (veja a Figura 16), conforme o número de constantes dielétricas negativas: os de *tipo I* são os que possuem uma componente dielétrica negativa ($\epsilon_e < 0, \epsilon_o > 0$), enquanto os de *tipo II* têm duas componentes dielétricas negativas ($\epsilon_e > 0, \epsilon_o < 0$). Por serem mais metálicos, meios hiperbólicos do tipo II são mais refletivos, haja vista que não há propagação ordinária. Ademais, é importante salientar que, se todas as componentes de ϵ_{ij} forem negativas, teremos um metal anisotrópico, de modo análogo ao caso onde todas componentes são positivas, em que temos um dielétrico anisotrópico.

Do ponto de vista tecnológico e de engenharia [26], a propriedade mais importante dos meios hiperbólicos, é a capacidade de suportar a propagação de ondas com enormes valores de $|\mathbf{k}|$. No caso da anisotropia usual, onde $\epsilon_e, \epsilon_o > 0$, $|\mathbf{k}|$ é limitado à superfície da esfera (3.135), ou, à do elipsoide (3.136). Ondas, cuja intensidade do vetor de onda é superior ao raio da esfera ou ao semi-eixo maior do elipsoide, são evanescentes. Todavia, para os hiperboloides ilustrados na Figura (16), a forma ilimitada da superfície de isofrequência permite, numa situação ideal, o limite $|\mathbf{k}| \rightarrow +\infty$. Daí, como $|\mathbf{k}| \propto 1/\lambda$, em tese também seria possível o limite $\lambda \rightarrow 0$, ou seja, a propagação de comprimentos de onda bastante pequenos. Essa é a principal ideia por trás da construção das chamadas hiper-lentes, instrumentos ópticos aptos a capturar imagens além do limite de difração da luz [6, 67]. Naturalmente, o limite ideal $|\mathbf{k}| \rightarrow +\infty$ é restringido quando

λ torna-se comparável com o tamanho da célula unitária do metamaterial, a . Logo, existe um limite superior para o vetor de onda, dado por

$$|\mathbf{k}|_{\text{máx}} \approx \frac{1}{a}. \quad (3.137)$$

Pelas características descritas acima, a pesquisa científica em metamateriais hiperbólicos é um campo bastante ativo e com larga abrangência [68]. No que concerne ao tema deste trabalho, isto é, análogos gravitacionais em meios hiperbólicos, a produção científica possui em grande parte autoria do Dr Igor I. Smolyaninov. Como exemplo, há publicações sobre transição de assinatura do tensor métrico [69], modelagem do tempo [70], inflação [71], radiação Hawking [72], paredes de domínio [73], dentre outros. Porém, apesar da variedade, todos partem basicamente do mesmo princípio: a análise da propagação eletromagnética num meio hiperbólico, feita sobre a componente extraordinária da radiação (3.136).

3.3.1 Obtenção do Espaço-Tempo de Minkowski 2 + 1 Dimensional Mediante um Meio Hiperbólico

A título de ilustração, vamos mostrar como o modelo geométrico da luz apresentado nas seções 3.1.3 e 3.1.4, aplicado a propagação extraordinária num meio hiperbólico, pode emular o comportamento de um espaço-tempo de Minkowski 2 + 1 dimensões. Tomando coordenadas cartesianas, considere o tensor dielétrico

$$\epsilon = \epsilon_o \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + \epsilon_o \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + \epsilon_e \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.138)$$

onde, por enquanto deixaremos em aberto a escolha se o metamaterial é tipo I ($\epsilon_e < 0, \epsilon_o > 0$) ou tipo II ($\epsilon_e > 0, \epsilon_o < 0$). Denotando o versor (diretor) na direção do eixo óptico como $\hat{\mathbf{d}}$, então, $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{z}}$.

Iniciemos descobrindo a métrica efetiva (3.102) obedecida pelos raios. Para isso, devemos primeiro obter o índice de raio N_r , dado por (3.67). Sendo assim, como os metamateriais são classificados conforme os valores de ϵ_e e ϵ_o , é conveniente expressar o índice de refração sob a forma

$$N_r(\vartheta) = \sqrt{\epsilon_o \cos^2 \vartheta + \epsilon_e \sin^2 \vartheta}, \quad (3.139)$$

onde ϑ é o ângulo entre o diretor $\hat{\mathbf{d}}$ e o vetor tangente à trajetória dos raios, denotado por \mathbf{u} . Assumindo que a trajetória tridimensional seja descrita por uma curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, parametrizada por t , vem que

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{\mathbf{z}} = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.140)$$

sendo

$$|\mathbf{u}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{dl}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (3.141)$$

Se utilizarmos como parâmetro o comprimento de arco tridimensional, isto é, $t = l$, conclui-se que $|\mathbf{u}| = 1$ e a equação anterior se reduz ao vínculo

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1. \quad (3.142)$$

Do exposto acima, obtemos

$$\cos \vartheta = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{d}} = \dot{z}, \quad (3.143)$$

a qual, combinada com o vínculo (3.142), fornece como resultado

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 - \dot{z}^2 = 1 - \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta. \quad (3.144)$$

Portanto, reescrevemos o índice de raio 3.139 da forma

$$N_r = \sqrt{\epsilon_o \dot{z}^2 + \epsilon_e (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}, \quad (3.145)$$

donde, o caminho óptico será

$$N_r^2 dl^2 = \epsilon_e dx^2 + \epsilon_e dy^2 + \epsilon_o dz^2. \quad (3.146)$$

Transpondo para o modelo geométrico, o caminho óptico acima torna-se a métrica efetiva mediante $ds = N_r dl$. Além disso, de acordo com a equação (3.74), temos $ds^2 = F^2(x, \dot{x}) dl^2$. Dado isso, a função finsleriana é expressa por

$$F^2(x, \dot{x}) = \epsilon_e \dot{x}^2 + \epsilon_e \dot{y}^2 + \epsilon_o \dot{z}^2, \quad (3.147)$$

a partir da qual obtemos o tensor métrico tridimensional h_{ij} através da relação (3.77),

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}, \quad (3.148)$$

donde

$$[h_{ij}] = \text{diag}(\epsilon_e, \epsilon_e, \epsilon_o). \quad (3.149)$$

Finalmente, por meio da relação (3.102), obtemos a métrica no espaço-tempo. Daí, vem que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \epsilon_e dx^2 - \epsilon_e dy^2 - \epsilon_o dz^2. \quad (3.150)$$

Utilizando a aproximação de onda escalar para a luz [53], ou seja, tratando a luz como um campo escalar φ não massivo, então, podemos utilizar a forma covariante da equação de onda de d'Alembert, isto é,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = 0, \quad (3.151)$$

onde o operador ∇ representa a derivação covariante. Usando a expressão da divergência (2.269) para o quadrivetor $\nabla^\mu \varphi = \partial^\mu \varphi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$, a equação anterior torna-se

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) \equiv \Delta \varphi = 0, \quad (3.152)$$

sendo Δ denominado operador *Laplace-Beltrami*. Portanto, a equação ondulatória (3.152) conforme a métrica (3.150) assume a forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.153)$$

Fisicamente, o campo escalar φ representa, na maioria das vezes, uma das componentes dos campos \mathbf{E} ou \mathbf{H} . Diante disso, podemos associar à onda uma dependência harmônica com o tempo $e^{-i\omega t}$, o que acarreta $\partial_t^2 \rightarrow -\omega^2$. Daí, vem que

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varphi + \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.154)$$

Portanto, para um meio hiperbólico do tipo I ($\epsilon_e < 0, \epsilon_o > 0$), a expressão (3.154) torna-se

$$\frac{1}{\epsilon_o} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{|\epsilon_e|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{|\epsilon_e|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0, \quad (3.155)$$

onde, reescalando as variáveis espaciais segundo $\bar{x} = x |\epsilon_e|^{1/2}, \bar{y} = y |\epsilon_e|^{1/2}, \bar{z} = z \epsilon_o^{1/2}$ e, reescrevendo o termo ω^2/c^2 como $m^{*2} c^2/\hbar^2$, temos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{m^{*2} c^2}{\hbar^2} \right) \varphi = 0. \quad (3.156)$$

Logo, a expressão (3.156) é análoga à equação obedecida por um campo escalar de Klein-Gordon [35] num espaço-tempo de Minkowski de 2 + 1 dimensões, onde $m^* = \hbar\omega/c^2$ é a massa efetiva e \bar{z} assume o papel de uma variável do tipo tempo. Vale ressaltar que a equação anterior é invariante sob a transformação de “*boost*”

$$\bar{z}' = \frac{\bar{z} - \beta \bar{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.157)$$

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x} - \beta \bar{z}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.158)$$

onde β é o parâmetro de *boost*. Assim, da mesma forma como no espaço-tempo de Minkowski, o grupo de Poincaré é constituído pelas transformações de *boost* nos planos $\bar{x}\bar{z}$ e $\bar{y}\bar{z}$, pelas translações ao longo de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, e, pelas rotações espaciais no plano $\bar{x}\bar{y}$.

Vejamos agora como recuperar a relação de dispersão extraordinária (3.136) por meio da equação eikonal. De acordo com (2.190), temos para a métrica em questão,

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{|\epsilon_e|} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{|\epsilon_e|} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\epsilon_o} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = 0. \quad (3.159)$$

Substituindo as relações usuais $\partial_t \psi = -\omega$ e $k_j = -\partial_j \psi$ na equação anterior, vem que

$$\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{k_x^2}{|\epsilon_e|} + \frac{k_y^2}{|\epsilon_e|} - \frac{k_z^2}{\epsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_z^2}{\epsilon_o} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{|\epsilon_e|} = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.160)$$

Salientamos que, apesar desse último procedimento parecer um tanto quanto óbvio, ele é de grande valia quando coordenadas diferentes das cartesianas são empregadas.

Seja agora um meio hiperbólico tipo II ($\epsilon_e > 0, \epsilon_o < 0$). Pelo mesmo procedimento anterior, com a única diferença que agora $\epsilon_o = -|\epsilon_o|$, a equação de onda (3.154) assume a forma

$$\frac{1}{|\epsilon_o|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0, \quad (3.161)$$

donde, fazendo o reescalonamento $\bar{x} = x \epsilon_e^{1/2}, \bar{y} = y \epsilon_e^{1/2}, \bar{z} = z |\epsilon_o|^{1/2}$, resulta em

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{m^{*2} c^2}{\hbar^2} \right) \varphi = 0. \quad (3.162)$$

Porém, nesse caso,

$$m^* = i\mu^* = \frac{i\hbar\omega}{c^2} \quad (3.163)$$

é a massa efetiva “imaginária”. Na realidade, a expressão (3.162) caracteriza a equação de Klein-Gordon para um *táquion* [74, 72], isto é, partículas que na presença de um campo gravitacional descrevem geodésicas do tipo espaço, com velocidades compreendidas no intervalo $v \geq c$ ³.

Da mesma forma, para obter a relação de dispersão, utilizamos a equação da eikonal. Logo,

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\epsilon_e} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{\epsilon_e} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{|\epsilon_o|} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (3.164)$$

onde, substituindo novamente $\partial_t \psi = -\omega$ e $k_j = -\partial_j \psi$, obtemos

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{\epsilon_e} - \frac{k_z^2}{|\epsilon_o|} = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.165)$$

Concluindo, vimos que um meio hiperbólico permite emular o comportamento temporal numa coordenada espacial. Esse fato possibilitou a geração de um campo fértil para o estudo de modelos gravitacionais análogos, haja vista a variedade de temas das publicações previamente citadas. Ademais, é possível também criar situações inusitadas, não encontradas na relatividade geral clássica. Um exemplo interessante desse último caso pode ser visto em [72], onde é construída uma estrutura formada por um metamaterial tipo I ($\epsilon_e < 0, \epsilon_o > 0$) e um dielétrico anisotrópico tradicional ($\epsilon_e > 0, \epsilon_o > 0$). Na passagem de um meio para o outro, a coordenada \bar{z} deixa de possuir o caráter temporal, de maneira que o fluxo do “tempo” é interrompido. Nessa mesma linha, um outro exemplo [75], discutido no próximo capítulo em detalhes, consiste no metamaterial análogo de um espaço-tempo kleiniano [76], cuja assinatura é (+, -, -, +).

³ A massa de “repouso” de um táquion é puramente imaginária devido ao fato do seu quadrimomento p^μ ser do tipo espaço. Como temos o vínculo $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$, se $m = i\mu$ então $p_\mu p^\mu < 0$. A hipótese de uma massa imaginária, de acordo com [74], é sustentada pelo argumento de que m não é diretamente mensurável para um táquion, uma vez que este não pode ser levado ao repouso.

3.3.2 Principais Estruturas para os Meios Hiperbólicos

Após termos visto as principais propriedades de um metamaterial hiperbólico, e, em seguida, uma pequena aplicação de como o mesmo pode ser útil como ferramenta para análogos gravitacionais, é interessante ver de quais maneiras é possível obter os meios hiperbólicos descritos na seção 3.3. Em outras palavras, queremos saber como os meta-átomos, isto é, as unidades fundamentais dos metamateriais, são construídos. Como já explanado, o procedimento consiste em induzir uma constante dielétrica negativa em uma ou duas dimensões espaciais. Vale ressaltar que, o referido confinamento de elétrons em menos de três dimensões, tornou-se viável graças aos avanços na fabricação de estruturas nanométricas [77]. Atualmente, duas estruturas mostram-se satisfatórias para gerar uma anisotropia hiperbólica: a denominada *multicamada*, que consiste no empilhamento de camadas alternadas entre um metal e um dielétrico, e, a estrutura de *nanofios metálicos*, na qual uma rede de varetas metálicas são embebidas numa matriz dielétrica hospedeira. Naturalmente, ambas as estruturas mesclam as propriedades dos seus metais e dielétricos constituintes para, ao final, fornecer um meio hiperbólico efetivo com o tensor dielétrico ϵ_{ij} almejado.

Nesta seção, iremos discutir os aspectos teóricos da construção das duas estruturas citadas acima (multicamada e nanofios metálicos), seguindo uma rota similar ao da aproximação de Maxwell-Garnett para um meio efetivo [78]. Porém, desde já adiantamos que ambas são capazes de produzir um meio hiperbólico de tipo I ou II. Como veremos adiante, o que determina a classificação do meio são as características dos metais e dielétricos usados, e, a quantidade de cada um deles utilizada na célula unitária [79]. Por fim, salientamos que manteremos a notação utilizada até aqui, onde a constante dielétrica na direção do eixo óptico é denotada por ϵ_e .

3.3.2.1 Construção de um Meio Hiperbólico Mediante Multicamadas

Primeiramente vamos analisar a estrutura de multicamada. A Figura 17 ilustra o processo de empilhamento alternado entre camadas metálicas, cujo valor da constante dielétrica é ϵ_m , e camadas dielétricas, cujo valor da constante é ϵ_d . Além disso, definimos a *fração de preenchimento* do metal como

$$f \equiv \frac{d_m}{d_m + d_d}, \quad (3.166)$$

onde, d_m é a soma de todas as espessuras das camadas metálicas e d_d é a soma de todas as espessuras dielétricas. Naturalmente, para que o meio possa caracterizar um metamaterial, a espessura de cada camada, seja metálica ou dielétrica, deve estar na escala do sub-comprimento de onda, para que a radiação seja indiferente às “imperfeições” da estrutura.

Nosso objetivo é obter as constantes efetivas $\epsilon_{||}$ e ϵ_{\perp} que compõem o tensor dielétrico ϵ_{ij} como função de ϵ_m e ϵ_d . Iremos obter primeiro a componente ordinária $\epsilon_o = \epsilon_{||}$. Para isso, considere uma onda eletromagnética incidindo sobre o metamaterial. Como vamos analisar as componentes dos vetores de campo sobre as interfaces, então, é necessário obter condições de

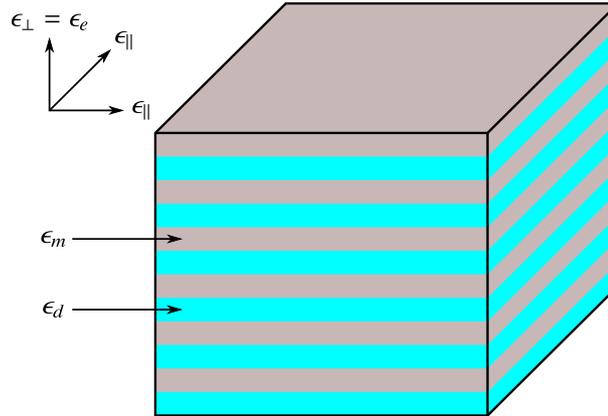


Figura 17 – Protótipo de uma estrutura em multicamada: a construção se dá pelo empilhamento alternado de camadas metálicas (ϵ_m) e dielétricas (ϵ_d). As constantes dielétricas resultantes efetivas são denotadas por ϵ_{\parallel} e ϵ_{\perp} .

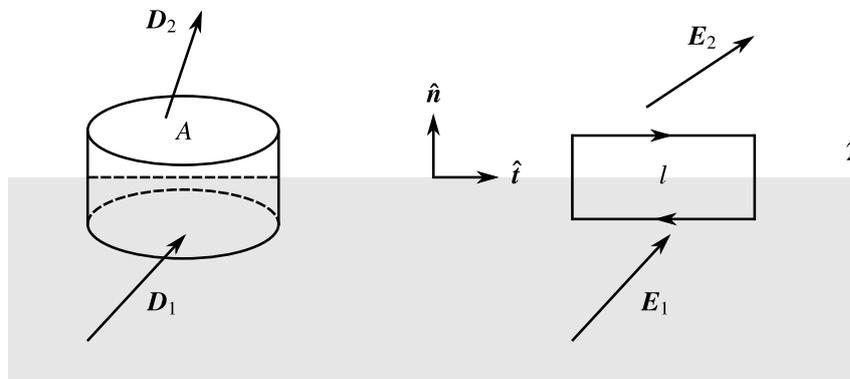


Figura 18 – Condições de contorno sobre os vetores de campo. Para o campo elétrico, a continuidade da componente tangencial $E^{(t)} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ é obtida integrando $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo da espira de comprimento l e altura desprezível, e, atentando que o fluxo magnético sobre a espira pode ser negligenciado. Já para \mathbf{D} , podemos obter a continuidade da componente normal $D^{(n)} = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ mediante a aplicação do teorema da divergência sobre a “caixa de pílulas”, cuja área da base é A e possui altura desprezível.

contorno para as componentes. Por meio da lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.167)$$

concluí-se que a componente do campo elétrico tangente à interface, $E^{(t)}$, é contínua (veja a Figura 18). Daí, vem que

$$E_m^{(t)} = E_d^{(t)} \equiv E_{\parallel}, \quad (3.168)$$

onde $E_m^{(t)}$ é a componente tangencial de \mathbf{E} nas camadas metálicas, $E_d^{(t)}$ a componente elétrica nas camadas dielétricas, e E_{\parallel} é a componente tangencial efetiva percebida pelo metamaterial.

Pela relação entre os campos efetivos, temos que $D_{\parallel} = \epsilon_0 \epsilon_{\parallel} E_{\parallel}$. O valor de D_{\parallel} é calculado

tomando a média das contribuições metálicas e dielétricas, ou seja,

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= f D_m^{(t)} + (1 - f) D_d^{(t)} \\ \epsilon_{\parallel} E_{\parallel} &= f \epsilon_m E_m^{(t)} + (1 - f) \epsilon_d E_d^{(t)} \\ \epsilon_{\parallel} E_{\parallel} &= f \epsilon_m E_{\parallel} + (1 - f) \epsilon_d E_{\parallel}, \end{aligned} \quad (3.169)$$

onde na última passagem utilizamos (3.168). Portanto, obtemos o resultado final

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_o = f \epsilon_m + (1 - f) \epsilon_d. \quad (3.170)$$

Prosseguindo, vamos agora obter a componente extraordinária $\epsilon_e = \epsilon_{\perp}$. De forma semelhante ao caso anterior, necessitamos de uma condição de contorno para os campos \mathbf{E} e \mathbf{D} . Dado que não há cargas em cada interface, vem que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (3.171)$$

donde deduzimos que a componente normal à interface $D^{(n)}$ é contínua (veja a Figura 18). Logo, assim como na expressão (3.168),

$$D_m^{(n)} = D_d^{(n)} \equiv D_{\perp}. \quad (3.172)$$

De forma que o campo elétrico efetivo será dado pela média das contribuições metálicas e dielétricas, ou seja,

$$E_{\perp} = f E_m^{(n)} + (1 - f) E_d^{(n)}. \quad (3.173)$$

Substituindo na expressão anterior $E_{\perp} = D_{\perp} (\epsilon_0 \epsilon_{\perp})^{-1}$, $E_m^{(n)} = D_{\perp} (\epsilon_0 \epsilon_m)^{-1}$, $E_d^{(n)} = D_{\perp} (\epsilon_0 \epsilon_d)^{-1}$ e, resolvendo para ϵ_{\perp} , resulta em

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_e = \frac{\epsilon_m \epsilon_d}{f \epsilon_d + (1 - f) \epsilon_m}. \quad (3.174)$$

Portanto, as equações (3.170) e (3.174) expressam as constantes dielétricas efetivas não somente em função de ϵ_m e ϵ_d como também da densidade metálica f , o que permite uma miríade de combinações. Ademais, vale ressaltar que o tamanho médio de um meta-átomo de multicamada é $a \sim 10$ nm [80], estabelecendo o limite superior (3.137). Finalmente, além das aplicações em gravidade análoga, existem trabalhos utilizando a estrutura de multicamada em mantos de invisibilidade [81], super-lentes e hiper-lentes [82, 83, 6, 84].

3.3.2.2 Construção de um Meio Hiperbólico Mediante Nanofios Metálicos

Analisemos agora a estrutura de nanofios metálicos ilustrada na Figura 19. Nesse caso, a direção do eixo óptico, determinada por $\epsilon_e = \epsilon_{\parallel}$, é paralela ao eixo dos nanofios. Ademais, a fração ou densidade metálica é definida por

$$f \equiv \frac{\text{área da seção transversal do nanofio}}{\text{área da célula unitária}} = \frac{\pi R^2}{A}, \quad (3.175)$$

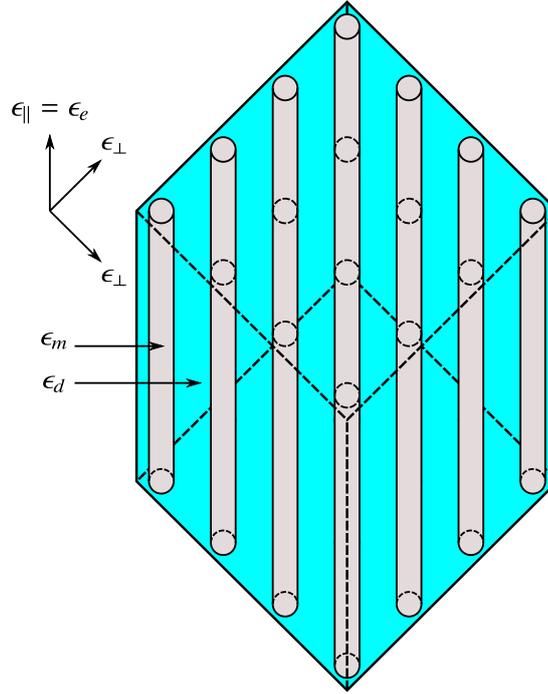


Figura 19 – Protótipo de um metamaterial estruturado por nanofios metálicos: as varetas metálicas de constante dielétrica ϵ_{\parallel} são imersas numa matriz dielétrica hospedeira, cuja constante é ϵ_{\perp} .

onde R é o raio do nanofio. Uma célula unitária hexagonal contém três nanofios: um encontra-se no centro do hexágono, enquanto os outros dois são divididos igualmente em seis nanofios parciais (com área $\pi R^2/3A$) localizados nos vértices [26].

Diferente do caso anterior, no qual apenas as condições de contorno dos vetores de campo foram suficientes, aqui devemos resolver a equação de Laplace [13],

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (3.176)$$

para o potencial elétrico Φ , dentro e fora do nanofio, e, em seguida, comparar ambas as soluções na fronteira. Como o raio do nanofio é muito menor do que o seu comprimento, iremos assumir que Φ não depende da direção ao longo do eixo do nanofio. Sendo assim, utilizando coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , então $\Phi = \Phi(\rho, \phi)$. Além disso, vamos considerar a aplicação de um campo elétrico externo constante, polarizado num plano de seção transversal do nanofio. Sem perda de generalidade, tomemos $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$, onde $\hat{\mathbf{x}}$ é o versor na direção $x = \rho \cos \phi$.

Para resolver a equação de Laplace, são necessárias condições de contorno. Naturalmente, o potencial deve ser contínuo na interface $\rho = R$. Além disso, podemos utilizar novamente a continuidade da componente normal do deslocamento elétrico \mathbf{D} . Essas duas condições fornecem, respectivamente,

$$\Phi_m|_{\rho=R} = \Phi_d|_{\rho=R}, \quad (3.177)$$

$$\epsilon_m \left. \frac{\partial \Phi_m}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = \epsilon_d \left. \frac{\partial \Phi_d}{\partial \rho} \right|_{\rho=R}, \quad (3.178)$$

onde Φ_m é o potencial interno ao nanofio e Φ_d é o potencial externo ao nanofio. Uma outra condição de contorno é a exigência do potencial Φ_m ser finito na origem, ou seja,

$$|\Phi_m(\rho = 0)| < +\infty. \quad (3.179)$$

Como última condição de contorno, exigimos que o potencial numa distância $\rho \gg R$ seja resultado exclusivamente do campo elétrico E_0 . Daí, vem que

$$\Phi_d(\rho \rightarrow +\infty) = - \int^x E_0 \cdot d\mathbf{r} = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \phi. \quad (3.180)$$

A equação de Laplace (3.176) em coordenadas cilíndricas, no caso particular em que há uma simetria de translação ao longo do eixo z , possui como solução os *harmônicos cilíndricos* [62]

$$\Phi(\rho, \phi) = A + B \ln \rho + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r^n} (C_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi). \quad (3.181)$$

Usando as equações (3.179) e (3.180), podemos simplificar de imediato a expressão anterior para Φ_m e Φ_d . Portanto, conforme à equação (3.179), o termo logarítmico e o segundo somatório devem ser nulos para Φ_m . Já de acordo com a equação (3.180), o termo logarítmico é nulo e o primeiro somatório deve ser quase nulo para Φ_d , com exceção apenas do termo proporcional à $\cos \phi$. Além disso, o termo constante pode ser desconsiderado para ambas as soluções, pois não interferem nas derivadas, ou, em outras palavras, no cálculo do campo elétrico. Daí, vem que

$$\Phi_m(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi), \quad (3.182)$$

$$\Phi_d(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r^n} (C_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi). \quad (3.183)$$

Utilizando a condição de contorno (3.177), obtemos, após equacionar corretamente os termos, as expressões

$$R^n A_n = \frac{C_n}{R^n}, \quad (3.184)$$

$$R^n B_n = \frac{D_n}{R^{n+1}}, \quad (n > 1) \quad (3.185)$$

$$R B_1 = -E_0 R + \frac{D_1}{R}. \quad (3.186)$$

Para usufruir da condição (3.178), devemos calcular as derivadas dos potenciais. Logo, derivando as expressões de Φ_m e Φ_d , resulta em

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{+\infty} n r^{n-1} (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi), \quad (3.187)$$

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \rho} = -E_0 \cos \phi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{r^{n+1}} (C_n \sin n\phi + D_n \cos n\phi). \quad (3.188)$$

Donde, usando (3.178), obtemos as relações

$$\epsilon_m R^{n-1} A_n = -\epsilon_d \frac{C_n}{R^{n+1}}, \quad (3.189)$$

$$\epsilon_m R^{n-1} B_n = -\epsilon_d \frac{D_n}{R^{n+1}}, \quad (n > 1) \quad (3.190)$$

$$\epsilon_m B_1 = -E_0 - \frac{D_1}{R^2}. \quad (3.191)$$

Combinando as equações (3.184) e (3.189), ou, (3.185) e (3.190), encontramos a identidade $\epsilon_m = -\epsilon_d$, o que claramente não é satisfatório, haja vista que se torna impossível encontrar os coeficientes das expansões dos potenciais Φ_m e Φ_d . Portanto, a única solução possível é $A_n = C_n = 0$, para qualquer valor de n , e, $B_n = D_n = 0$ para $n > 1$. Todavia, ainda é possível combinar (3.186) e (3.191) para obter B_1 e D_1 em termos de E_0 e R . Sendo assim, após tal operação, temos

$$B_1 = -\frac{2\epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d} E_0, \quad (3.192)$$

$$D_1 = \left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d} \right) E_0 R^2 \quad (3.193)$$

Assim, substituindo a expressão obtida para B_1 na equação (3.182), resulta em

$$\Phi_m(\rho, \phi) = -\frac{2\epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d} E_0 \rho \cos \phi, \quad (3.194)$$

da qual extraímos a componente normal do campo elétrico $E_m^{(n)} = -\partial_\rho \Phi_m$, ou seja,

$$E_m^{(n)} = \frac{2\epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d} E_0 \cos \phi. \quad (3.195)$$

Agora, substituindo D_1 na expressão (3.183), obtemos o potencial externo ao nanofio. Logo,

$$\Phi_d(\rho, \phi) = -\left[1 - \frac{R^2}{\rho^2} \left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d} \right) \right] E_0 \rho \cos \phi \approx -E_0 \rho \cos \phi, \quad (3.196)$$

pois $R^2/\rho^2 \ll 1$. Sendo assim, a componente normal do campo elétrico externo será

$$E_d^{(n)} \approx -E_0 \cos \phi, \quad (3.197)$$

a qual, se combinada com a expressão (3.195), fornece como resultado

$$E_m^{(n)} = \frac{2\epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d} E_d^{(n)}. \quad (3.198)$$

A equação (3.198) é importante porque possibilita o cálculo da constante dielétrica ϵ_\perp . Considere então a componente normal ao fio efetiva $D_\perp^{(n)}$. Podemos escrevê-la como a média das contribuições metálicas e dielétricas, isto é,

$$D_\perp^{(n)} = f D_m^{(n)} + (1 - f) D_d^{(n)} = f \epsilon_m E_m^{(n)} + (1 - f) \epsilon_d E_d^{(n)}. \quad (3.199)$$

Por outro lado, é possível expressá-la através do produto entre uma constante efetiva ϵ_{\perp} e o campo elétrico efetivo E_{\perp} , ou seja,

$$D_{\perp} = \epsilon_{\perp} E_{\perp} = \epsilon_{\perp} \left[f E_m^{(n)} + (1 - f) E_d^{(n)} \right]. \quad (3.200)$$

Logo, identificando as equações (3.199) e (3.200), vem que

$$\epsilon_{\perp} = \frac{f \epsilon_m E_m^{(n)} + (1 - f) \epsilon_d E_d^{(n)}}{f E_m^{(n)} + (1 - f) E_d^{(n)}}. \quad (3.201)$$

Substituindo na expressão anterior a relação entre os campos (3.198), e, após um certo algebrismo, obtemos

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_o = \frac{(1 + f) \epsilon_m \epsilon_d + (1 - f) \epsilon_d^2}{(1 + f) \epsilon_d + (1 - f) \epsilon_m}. \quad (3.202)$$

Sigamos então para o cálculo da constante dielétrica efetiva extraordinária $\epsilon_e = \epsilon_{\parallel}$. Sendo a componente tangencial do campo elétrico contínua na interface entre o nanofio e o meio dielétrico, temos novamente

$$E_m^{(t)} = E_m^{(d)} \equiv E_{\parallel}. \quad (3.203)$$

Ademais, tomando $D_{\parallel} = \epsilon_{\parallel} E_{\parallel}$ e expressando D_{\parallel} como a média das contribuições metálicas e dielétricas, temos

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= f D_m^{(t)} + (1 - f) D_d^{(t)}, \\ \epsilon_{\parallel} E_{\parallel} &= f \epsilon_m E_{\parallel} + (1 - f) \epsilon_d E_{\parallel}, \end{aligned} \quad (3.204)$$

que nos conduz à relação

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_e = f \epsilon_m + (1 - f) \epsilon_d. \quad (3.205)$$

Sendo idêntica à equação (3.170) de ϵ_{\perp} no caso da multicamada.

Assim como na estrutura de multicamada, a liberdade oferecida pelas equações (3.202) e (3.205), em termos dos parâmetros ϵ_m, ϵ_d e f , permite vários tipos de aplicações para o modelo de nanofios [25]. Todavia, uma notável propriedade da estrutura de nanofios que merece ser destacada é a de exibir, em casos específicos, uma forma para ϵ_{\parallel} idêntica a de um plasma (3.129), ou seja, $\epsilon_{\parallel} = 1 - (\Omega_p^2/\omega^2)$, onde a frequência de plasma Ω_p é determinada pelas propriedades geométricas da estrutura, como, por exemplo, o raio R dos nanofios e a distância a entre eles [85].

4 APLICAÇÕES E RESULTADOS

No presente capítulo, iremos combinar a teoria apresentada nos capítulos 2 e 3 em duas aplicações. A primeira, mostra uma analogia entre metamateriais hiperbólicos e uma variante compacta do universo de Milne, apresentado na seção 2.3.4, que ganhou importância por ser um protótipo de singularidade cósmica em modelos cosmológicos cíclicos. A analogia será feita da seguinte forma: classicamente, as trajetórias de partículas relativísticas serão correlacionadas com as trajetórias dos raios de luz no metamaterial. Já no caso quântico, o campo de Klein-Gordon terá correspondência com a onda escalar eletromagnética. Vale ressaltar que, tanto partículas convencionais quanto táquions possuem um meio hiperbólico equivalente. A segunda aplicação, voltada à Física da Matéria Condensada, consiste em associar campos escalares num espaço-tempo kleiniano com a dinâmica de elétrons nos chamados *metamateriais eletrônicos*, materiais que podem exibir propriedades eletrônicas similares às características dos metamateriais ópticos.

4.1 Metamateriais Hiperbólicos e o Universo de Milne Compacto

A ideia de uma singularidade inicial, o *Big Bang*, sempre foi um problema para a cosmologia. Além da densidade de energia e da curvatura do espaço-tempo serem infinitas num único ponto, existe a questão dos efeitos quânticos, que em tal escala não podem ser negligenciados. Mas, como bem sabemos, uma descrição quântica da gravidade completamente satisfatória ainda não existe. Uma maneira de contornar esse problema é através de modelos cosmológicos cíclicos, como, por exemplo, modelos em que o universo no qual habitamos experimenta uma sequência infundável e ininterrupta de colapsos (*Big Crunches*) e “explosões” (*Big Bangs*). De acordo com uma proposta relativamente recente [86], o modelo do *Big Bang* quente é o resultado de uma colisão (*Big Crunch*) entre duas branas quadridimensionais, onde uma delas é o nosso universo. A colisão ocorre ao longo de uma quinta dimensão, escondida, na qual apenas a interação gravitacional pode se propagar. As branas colidem, “grudam” momentaneamente, e se separam, sendo a energia cinética da colisão convertida nas partículas elementares usuais: *quarks*, elétrons, fótons, etc. Todavia, apesar da complexidade, a ideia central é de fácil compreensão: na relatividade geral clássica, o *Big Crunch* representa o colapso completo de todo o espaço-tempo, isto é, o desaparecimento total de todas as quatro dimensões, ocasionando uma densidade (temperatura) e curvatura infinitas. Em contrapartida, no modelo cíclico mencionado acima, o colapso acontece apenas em uma dimensão, a qual caracteriza a separação entre as branas. Portanto, as três dimensões espaciais permanecem finitas e o tempo fluindo continuamente. Ademais, a geometria do espaço-tempo é plana imediatamente antes, e, imediatamente depois da colisão [87].

O nosso interesse no modelo cíclico acima reluz sob essa pequena faixa plana, antes e depois do colapso da quinta dimensão, pois a mesma pode ser modelada por uma forma compacta do universo de Milne [88]. Diante disso, obtendo um meio hiperbólico análogo ao *universo de*

Milne compacto, em tese teríamos no laboratório um modelo, capaz de simular a passagem pela singularidade cósmica. Veremos adiante que tal simulação é factível mediante a construção de um metamaterial hiperbólico adequado.

4.1.1 O Universo de Milne Compacto, \mathcal{M}_C

Nesta seção, vamos definir e apresentar as características do universo de Milne compacto, \mathcal{M}_C . Todavia, por motivos que ficarão claros mais tarde, antes é instrutivo recordar algumas propriedades de uma superfície cônica no \mathbb{R}^3 . Portanto, seja θ o ângulo entre a geratriz e o eixo de simetria do cone. Em coordenadas cartesianas (x, y, z) , temos a equação de vínculo

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta, \quad (4.1)$$

advinda das equações paramétricas

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos(\chi/\operatorname{sen} \theta), \quad (4.2)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\chi/\operatorname{sen} \theta), \quad (4.3)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (4.4)$$

devido ao fato do cone ser localmente isométrico a um plano [31]. Na parametrização acima, $0 \leq \chi < 2\pi \operatorname{sen} \theta$ é o ângulo mensurado ao longo do setor circular gerador do cone, e, $2\pi(1 - \operatorname{sen} \theta)$ é o déficit angular (veja a Figura 20). Mediante o reescalonamento $\phi = \chi/\operatorname{sen} \theta$, recuperamos a parametrização em termos de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Logo, a métrica bidimensional induzida na superfície cônica, em termos de ϕ , é

$$ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (4.5)$$

cujo tensor métrico é dado por

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Fazendo $r \rightarrow \bar{r} \in \mathbb{R}$, ou seja, ampliando o domínio da variável radial, podemos construir um cone duplo, onde $\bar{r} > 0$ ($\bar{r} < 0$) corresponde ao cone superior (inferior). Com essas mudanças, a métrica (4.5) toma a forma

$$ds^2 = d\bar{r}^2 + \alpha^2 \bar{r}^2 d\phi^2, \quad (4.7)$$

sendo $\alpha \equiv \operatorname{sen} \theta$.

Considere o lugar geométrico dos pontos \mathcal{M} no espaço-tempo de Minkowski, definido como

$$\mathcal{M} \equiv \{(x^+, x^-) \in \mathbb{R}^2 \mid x^+ x^- > 0 \text{ ou } x^+ = x^- = 0\}, \quad (4.8)$$

onde x^+ e x^- são as coordenadas tipo luz introduzidas nas equações (2.56) e (2.57), respectivamente. Além disso, tomemos em \mathcal{M} a operação de *boost finito*,

$$B : (x^+, x^-) \longrightarrow \left(e^{2\pi\beta} x^+, e^{-2\pi\beta} x^- \right), \quad (4.9)$$

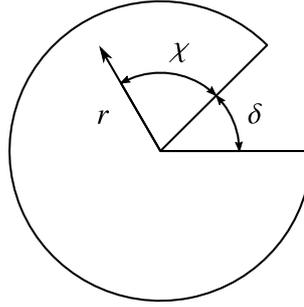


Figura 20 – Setor circular plano que pode ser transformado num cone removendo-se a fatia angular δ . O déficit angular $\delta = 2\pi(1 - \text{sen } \theta)$ reduz o intervalo do ângulo χ para $[0, 2\pi \text{sen } \theta)$.

donde, fazendo uma comparação com a expressão (2.58), concluímos que a rapidez de B é $\zeta = -2\pi\beta$. Logo, de acordo com a Figura 7, B desloca para a esquerda os pontos sobre as hipérbolas $x^+x^- = \text{constante}$.

Dessa forma, o universo de Milne compacto é definido pelo espaço quociente $\mathcal{M}_C \equiv \mathcal{M}/B$ [88, 89]. Isso significa estabelecer uma relação de equivalência entre os pontos de \mathcal{M} , interligados por B . Em outras palavras, limitamos o universo de Milne original, pois, se dois pontos conectados por B são equivalentes, estamos na realidade “colando” um ponto no outro. Por exemplo, utilizando coordenadas de Minkowski (T, X) , conforme o exposto acima podemos identificar as retas $X = 0$ e $X = T \text{ tgh } 2\pi\beta$, pois, as mesmas estão conectadas pelo *boost* B (veja a Figura 21).

Conforme [90, 91], é possível visualizar o universo \mathcal{M}_C estando imerso num espaço de Minkowski tridimensional, dotado da métrica $ds^2 = dz^2 - dx^2 - dy^2$, através do mapeamento

$$x = t\beta \cos(\chi/\beta), \tag{4.10}$$

$$y = t\beta \text{sen}(\chi/\beta), \tag{4.11}$$

$$z = t\sqrt{1 + \beta^2}, \tag{4.12}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e β é o parâmetro do *boost* B (4.9). Ademais, como identificamos o eixo temporal T com a reta $X = T \text{ tgh } 2\pi\beta$, então χ possui um período $2\pi\beta$.

Prosseguindo, assim como no caso do cone ordinário, vamos fazer o reescalonamento $\phi = \chi/\beta$, donde conclui-se que o período de ϕ é 2π . Diante disso, as equações (4.10)–(4.12) fornecem

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) z^2. \tag{4.13}$$

Essa expressão é muito similar à equação (4.1), pois, o espaço é euclidiano para planos $z = \text{constante}$ e a variável ϕ é periódica. Como x, y, z podem assumir valores positivos e negativos, a equação (4.13) representa um cone duplo no espaço de Minkowski tridimensional, cujo vértice possui coordenadas $(0, 0, 0)$ (veja a Figura 22). Entretanto, por causa do caráter temporal de z , o ângulo de abertura θ do cone é hiperbólico, com $\text{tgh}^2 \theta = \beta^2/(1 + \beta^2)$.

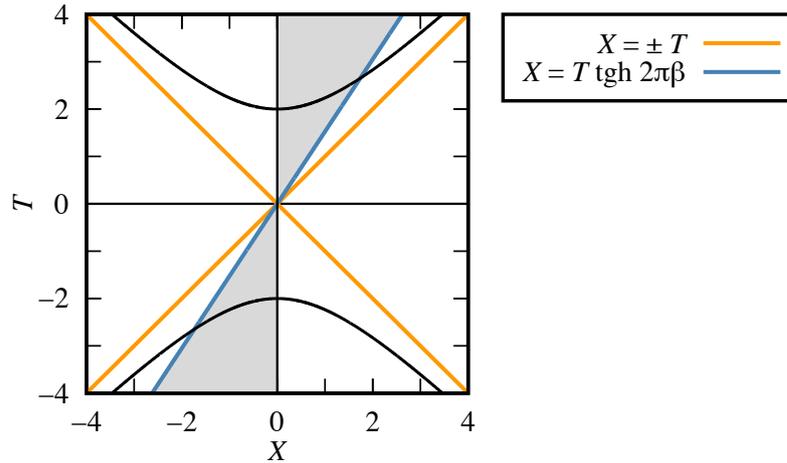


Figura 21 – Diagrama de Minkowski ilustrando o universo \mathcal{M}_C (região hachurada), delimitado pela identificação entre o eixo temporal T e a reta azul $X = T \operatorname{tgh} 2\pi\beta$. A relação de equivalência determinada por B permite “reduzir” todos os pontos de \mathcal{M} aos da região destacada. As retas $X = \pm T$ representam os eixos coordenados x^\pm , enquanto as hipérbolas são curvas onde $x^+ x^- = \text{constante}$.

Levando em conta todas a reparametrizações anteriores, as equações (4.10)–(4.12) tornam-se

$$x = t \operatorname{senh} \theta \cos \phi, \tag{4.14}$$

$$y = t \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \phi, \tag{4.15}$$

$$z = t \operatorname{cosh} \theta, \tag{4.16}$$

onde $\operatorname{senh} \theta = \beta$ e $\operatorname{cosh} \theta = \sqrt{1 + \beta^2}$. Portanto, a métrica do universo \mathcal{M}_C , em termos das coordenadas (t, θ, ϕ) , é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \beta^2 t^2 d\phi^2. \tag{4.17}$$

A equação anterior, difere da métrica de Milne (2.402) (para $d\Omega = \text{constante}$) pelo fator β e, principalmente, porque agora a variável espacial é angular, caracterizando a compactação. Ademais, a presença do termo β indica uma singularidade cônica na origem. Veremos mais tarde que isso tem implicações importantes, no que diz respeito às trajetórias geodésicas e funções de onda das partículas, à medida que estas se aproximam da singularidade. Mais especificamente, a singularidade cósmica atua como um filtro para partículas clássicas e como uma “borracha” de fase para partículas quânticas.

Devido à natureza cônica do \mathcal{M}_C , ele possui algumas semelhanças com o cone ordinário, haja vista que o tensor métrico de Milne,

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta^2 t^2 \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

é muito similar ao tensor métrico h_{ij} (4.6). Sendo assim, qualquer expressão oriunda da métrica irá apresentar uma forma parecida em ambos os casos. Por exemplo, o operador Laplace-Beltrami

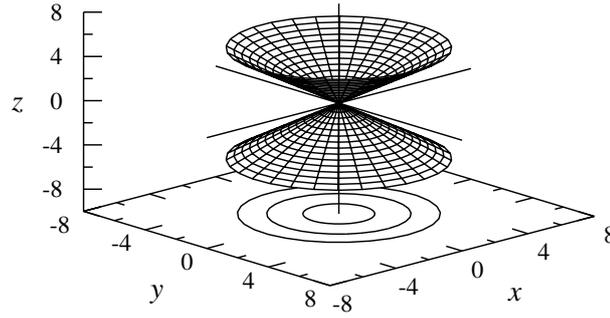


Figura 22 – Cone duplo referente às equações (4.5) e (4.13) para o espaço euclidiano e o espaço de Minkowski tridimensional, respectivamente. A metade superior (inferior) corresponde aos valores $\bar{r}, t > 0$ ($\bar{r}, t < 0$).

(3.152), aplicado às métricas (4.5) e (4.17), resulta em

$$\Delta_{\text{Cone}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \bar{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (4.19)$$

$$\Delta_{\mathcal{M}_C} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{\beta^2 t^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (4.20)$$

Naturalmente, as diferenças surgem por causa do carácter temporal de t e da natureza hiperbólica do ângulo $\beta^2 = \sinh^2 \theta$.

4.1.2 Movimento de uma Partícula Clássica no \mathcal{M}_C

Introduzido o universo de Milne compacto, vamos obter suas geodésicas do tipo tempo, isto é, as trajetórias clássicas de partículas livres relativísticas. Para isso, iremos utilizar o lagrangiano cinético (2.196), ou seja,

$$K = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{\dot{t}^2}{2} - \frac{\beta^2 \dot{\phi}^2}{2}, \quad (4.21)$$

onde tomamos $c = 1$. Logo, as equações de Euler-Lagrange, para as variáveis t e ϕ fornecem, respectivamente,

$$\ddot{t} + \beta^2 t \dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.22)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{t} \dot{t} \dot{\phi} = 0, \quad (4.23)$$

onde $\dot{t} = dt/d\lambda$, $\ddot{t} = d^2t/d\lambda^2$, e assim por diante, sendo λ um parâmetro afim da geodésica. Portanto, concluímos que os termos da conexão não nulos são

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \beta^2 t \quad \text{e} \quad \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{1}{t}. \quad (4.24)$$

Além disso, como ϕ é uma coordenada cíclica no lagrangiano, o momento angular

$$p_\phi = \frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}} = -\beta^2 t^2 \dot{\phi} \equiv -\ell, \quad (4.25)$$

é conservado, o que está expresso na equação (4.23).

Sendo o espaço bidimensional, o tensor de Riemann $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$, conforme à equação (2.250), só possui uma componente independente, isto é, $R^t_{\phi t\phi}$, que é essencialmente o escalar de Ricci R . Logo,

$$\begin{aligned} R^t_{\phi t\phi} &= \partial_t \Gamma^t_{\phi\phi} - \cancel{\partial_\phi \Gamma^t_{\phi t}} + \cancel{\Gamma^t_{\mu t} \Gamma^\mu_{\phi\phi}} - \Gamma^t_{\mu\phi} \Gamma^\mu_{\phi t} \\ &= \partial_t (\beta^2 t) - (\beta^2 t) \left(\frac{1}{t} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

o que é esperado, pois a geometria em questão é cônica.

Conforme explanado na seção 2.2.2, para resolver as equações geodésicas, é bastante útil utilizar a integral primeira $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, cujo valor para partículas massivas é 1. Daí, vem que

$$\dot{t}^2 - \beta^2 t^2 \dot{\phi}^2 = \dot{t}^2 - \frac{\ell^2}{\beta^2 t^2} = 1, \quad (4.27)$$

onde, na última passagem, usamos a equação (4.25). Introduzindo a variável auxiliar $t = 1/u$, temos

$$\dot{t} = \frac{dt}{du} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{u^2 \ell}{\beta^2} = -\frac{\ell}{\beta^2} \frac{du}{d\phi}. \quad (4.28)$$

Substituindo a expressão anterior em (4.27), obtemos a equação diferencial da trajetória

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - \beta^2 u^2 = \frac{\beta^4}{\ell^2}, \quad (4.29)$$

donde,

$$\int \frac{du}{\sqrt{\beta^2 + \ell^2 u^2}} = \pm \frac{\beta}{|\ell|} \int d\phi. \quad (4.30)$$

A integral acima é facilmente resolvida por meio da substituição trigonométrica $|\ell| u = \beta \sinh \psi$. Sendo assim,

$$\frac{1}{|\ell|} \int \frac{\cosh \psi d\psi}{\sqrt{1 + \sinh^2 \psi}} = \frac{1}{|\ell|} \int d\psi = \pm \frac{\beta}{|\ell|} \int d\phi \quad \Rightarrow \quad \psi = \pm \beta \Delta\phi, \quad (4.31)$$

onde, $\Delta\phi = \phi - \phi_0$, sendo ϕ_0 constante de integração. Logo, em termos da variável $t = 1/u$, obtemos a trajetória

$$t(\phi) = \pm \frac{|\ell|}{\beta \sinh \beta \Delta\phi}. \quad (4.32)$$

Todavia, como $t > 0$ ($t < 0$) corresponde ao cone superior (inferior), a interpretação da solução anterior torna-se mais cômoda reescrevendo-a da forma

$$t(\phi) = \pm \frac{t_0}{|\sinh \beta \Delta\phi|}, \quad (4.33)$$

onde $t_0 \equiv |\ell|/\beta$. A equação (4.33) é uma *espiral de Poincot* [92], com o sinal + (−) correspondendo ao cone superior (inferior). Ademais, para $\ell \neq 0$, é possível concluir que uma vez escolhido o

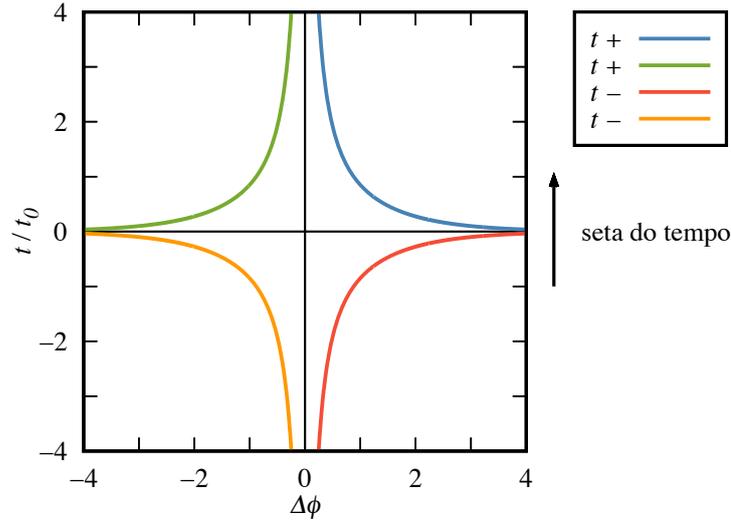


Figura 23 – Gráfico para a equação geodésica (4.33) com t em unidades de t_0 . As curvas azul e verde (laranja e vermelha) correspondem à trajetórias no cone superior (inferior). A seta do tempo apontando para cima ilustra que tempo sempre aumenta, o que significa que no primeiro e terceiro quadrantes o ângulo ϕ diminui com o tempo ($\ell < 0$), ao passo que no segundo e quarto quadrantes ele aumenta com o tempo ($\ell > 0$).

sinal de t , isto é, a folha do cone, a partícula permanecerá indefinidamente na região superior ($t > 0$) ou inferior ($t < 0$). Portanto, nesse caso não há nenhuma ligação entre essas regiões do espaço tempo (veja a Figura 23). Entretanto, caso $\ell = 0$, o que corresponde à $\phi = \phi_0$ e $t = t(\phi_0)$, as geodésicas são linhas retas.

Por outro lado, voltando para as coordenadas de Minkowski (T, X), cuja relação com as de Milne é dada por

$$T = t \cosh \chi = t \cosh \beta \phi, \quad (4.34)$$

$$X = t \sinh \chi = t \sinh \beta \phi, \quad (4.35)$$

é possível mostrar que as trajetórias fornecidas por (4.33) são retas no espaço-tempo de Minkowski. Para ver isso, considere o caso da curva verde da Figura 23. Logo, devemos tomar o sinal positivo em (4.33), e, ainda, $\Delta\phi > 0$ pois $\ell > 0$. Sendo assim, utilizando a equação da trajetória (4.33), temos

$$\begin{aligned} t_0 &= t \sinh \beta (\phi - \phi_0) \\ &= t \sinh \beta \phi \cosh \beta \phi_0 - t \cosh \beta \phi \sinh \beta \phi_0 \\ &= X \cosh \beta \phi_0 - T \sinh \beta \phi_0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde,

$$X = \frac{t_0}{\cosh \beta \phi_0} + T \operatorname{tgh} \beta \phi_0. \quad (4.37)$$

Repetindo o mesmo procedimento para as outras curvas da Figura 23, isto é, considerando o sinal da folha do cone e do momento angular, podemos condensar todas as trajetórias como retas

no espaço-tempo de Minkowski, cujas equações são da forma

$$X = \pm \frac{t_0}{\cosh \beta \phi_0} + T \operatorname{tgh} \beta \phi_0. \quad (4.38)$$

Note que para $t_0 = 0$, que é o mesmo que $\ell = 0$, a partícula passa pela origem e pode de fato viajar de um cone para o outro. Todavia, tais trajetórias são bastante instáveis, pois pequenas perturbações no valor de $\ell = 0$ causam grandes variações nas trajetórias. Um resultado semelhante foi obtido em [93], onde uma partícula não relativística clássica, cujo movimento se restringe a um cone duplo, só pode cruzar o vértice por meio de linhas retas.

Não obstante, de acordo com [89, 90], devido ao fato de geodésicas do tipo tempo coincidirem com as trajetórias percorridas por partículas de *prova*, isto é, entes que não distorcem o espaço-tempo ao seu redor mediante o seu próprio campo gravitacional, a princípio não há nenhum obstáculo para que tais trajetórias não atinjam, ou, escapem, da singularidade. Ademais, caso se postule que uma partícula de prova, ao atingir a singularidade no cone inferior, seja “aniquilada”, enquanto outra é “criada” no cone superior, existem diversos tipos de propagação dependendo do modo como a partícula viaja até a singularidade [94]. Porém, todos eles devem ser consistentes com o vínculo (4.27) e com a constância do momento angular ℓ .

Prosseguindo, apresentamos as geodésicas de tipo tempo através de um gráfico polar, o qual provê um modo mais claro de visualizar as trajetórias (veja a Figura 24). Como ilustrado pela Figura (23), as trajetórias no cone inferior dirigem-se para a singularidade cósmica, significando que partículas percorrendo curvas de cor vermelha (laranja) possuem momento angular positivo (negativo), e, portanto, espiralam na direção anti-horária (horária). Para o cone superior, partículas viajando ao longo da curva verde (azul), têm momento angular positivo (negativo), e espiralam no sentido anti-horário (horário). Como exemplo, tendo como ponto de partida a curva vermelha no cone inferior, então, numa transição para a curva verde, o momento angular seria conservado, enquanto que uma transição para a curva azul não conservaria o valor de ℓ . Naturalmente, o mesmo raciocínio se aplica para partículas oriundas da curva laranja.

Vejamos agora as geodésicas do tipo espaço, isto é, as linhas de universo dos táquions [74]. O procedimento é o mesmo do anterior, porém, devemos alterar o valor da integral primeira (4.27). De acordo com a seção 2.2.2, temos,

$$i^2 - \frac{\ell^2}{\beta^2 t^2} = -1, \quad (4.39)$$

donde, a equação da trajetória será

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 - \beta^2 u^2 = -\frac{\beta^4}{\ell^2}, \quad (4.40)$$

sendo $u = 1/t$. Daí, vem que

$$\int \frac{du}{\sqrt{\ell^2 u^2 - \beta^2}} = \pm \frac{\beta}{|\ell|} \int d\phi. \quad (4.41)$$

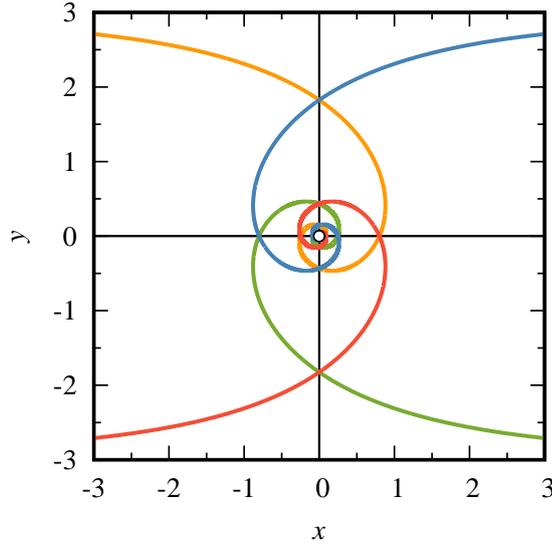


Figura 24 – Geodésicas do tipo tempo (espirais de Poinot), correspondentes às curvas da Figura 23. O tempo radial t está expresso em unidades de t_0 , e, $\beta = 1/3$. As curvas azul e verde (laranja e vermelha) estão se afastando (indo em direção) da (à) singularidade. Ademais, partículas percorrendo as trajetórias do primeiro (terceiro) e segundo (quarto) quadrantes estão espiralando no sentido horário (anti-horário). O ponto branco na origem serve apenas para enfatizar que analiticamente as curvas não tocam a singularidade.

Logo, fazendo a mudança de variável $|\ell|u = \beta \cosh \psi$ na integral anterior, obtemos

$$\frac{1}{|\ell|} \int \frac{\sinh \psi d\psi}{\sqrt{\cosh^2 \psi - 1}} = \frac{1}{|\ell|} \int d\psi = \pm \frac{\beta}{|\ell|} \int d\phi \Rightarrow \psi = \pm \beta \Delta\phi. \quad (4.42)$$

Reescrevendo a expressão acima em termos de $t = 1/u$, resulta na trajetória

$$t(\phi) = \pm \frac{t_0}{\cosh \beta \Delta\phi}, \quad (4.43)$$

onde $t_0 = |\ell|/\beta$ e $\Delta\phi = \phi - \phi_0$. A curva (4.43) é uma outra forma de espiral de Poinot, e, novamente, o sinal $+$ ($-$) corresponde ao cone superior (inferior). Ademais, como no caso anterior, as trajetórias são linhas retas no espaço-tempo de Minkowski, cujas equações são

$$X = \mp \frac{t_0}{\sinh \beta \phi_0} + T \coth \beta \phi_0, \quad (4.44)$$

onde aqui $-$ ($+$) corresponde à folha superior (inferior).

De acordo com a equação (4.43), a variável t possui t_0 como limite superior. A fim de clarificar esse resultado, recorreremos ao argumento mencionado em [74], o qual afirma que os táquions perdem energia quando aumentam sua velocidade, isto é, ao acelerarem. Sendo assim, conforme as equações (2.205) e (2.206), a distância própria dl no \mathcal{M}_C é dada por

$$dl = \sqrt{-g_{ij} dx^i dx^j} = \sqrt{\beta^2 t^2 d\phi^2} = |\beta t d\phi|. \quad (4.45)$$

Além disso, como o tempo próprio é igual ao tempo coordenado (pois $g_{tt} = 1$), podemos expressar a velocidade de um táquion da forma

$$v_{\text{táquion}} = \frac{dl}{dt} = \left| \beta t \frac{d\phi}{dt} \right|, \quad (4.46)$$

onde a derivada $d\phi/dt$ pode ser obtida a partir de (4.43). Portanto, tomando a solução para o cone superior, temos

$$\frac{dt}{d\phi} = -\frac{t_0}{\cosh^2 \beta \Delta \phi} \beta \sinh \beta \Delta \phi = -\beta t \operatorname{tgh} \beta \Delta \phi. \quad (4.47)$$

Observe que, se $\cosh \beta \Delta = t_0/t$, então, $\sinh \beta \Delta \phi = \pm \sqrt{t_0^2 - t^2}/t$ e $\operatorname{tgh} \beta \Delta \phi = \pm \sqrt{t_0^2 - t^2}/t_0$. Daí, vem que

$$\left| \frac{dt}{d\phi} \right| = \frac{\beta t \sqrt{t_0^2 - t^2}}{t_0} \quad \text{e} \quad \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{t_0}{\beta t \sqrt{t_0^2 - t^2}}. \quad (4.48)$$

Substituindo a expressão anterior na equação da velocidade (4.46), resulta em

$$v_{\text{táquion}} = \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2 - t^2}}. \quad (4.49)$$

Portanto, de acordo com a expressão (4.49), $v_{\text{táquion}} \in (1, +\infty)$. Note que para a luz ($ds^2 = 0$), $dl/dt = \beta t d\phi/dt = 1$, o que corrobora com o discutido em [74].

No que concerne à energia, seja a expressão do tensor energia-momento de um táquion [95], ou seja,

$$\Theta^{\alpha\beta} = \mu \int d\lambda \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{\delta^4(x - x(\lambda))}{\sqrt{-g}}, \quad (4.50)$$

a qual difere da equação (2.287) apenas no fator multiplicativo da integral, correspondente à massa, pois, nesse caso, utilizamos $\operatorname{Im} m = \mu$ uma vez que para os táquions $m = i\mu$. Logo, a densidade de energia é dada por

$$\Theta^{tt} = \mu \int d\lambda \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \frac{\delta^4(x - x(\lambda))}{\sqrt{-g}} \sim \dot{t}^2. \quad (4.51)$$

Analisando a integral primeira (4.39), em conjunto com os resultados (4.49) e (4.51), concluímos que um táquion começa a acelerar partindo da singularidade $t = 0$, onde $v_{\text{táquion}} = 1$ e $\dot{t}^2 \rightarrow +\infty$, permanecendo assim até o instante t_0 , quando a densidade de energia $\Theta^{tt} \sim \dot{t}^2$ atinge seu valor mínimo e $v_{\text{táquion}} \rightarrow +\infty$. Desse ponto em diante, o táquion começa a desacelerar indo em direção à singularidade, o que naturalmente acarreta o aumento da densidade de energia (veja a Figura 25). De modo similar ao caso anterior, interpretamos esses resultados em termos de criação e aniquilação de táquions, numa mesma folha do cone. Cada destruição numa folha cria um táquion na folha oposta, caracterizando um ciclo eterno. Esse comportamento é ilustrado no gráfico polar da Figura 26.

O propósito desta seção consistia em calcular as trajetórias clássicas no \mathcal{M}_C , tanto para partículas ordinárias quanto para táquions. Perceba que, mesmo lidando com um tratamento clássico, tudo ocorre como se as partículas de ambos os tipos sofressem processos de criação

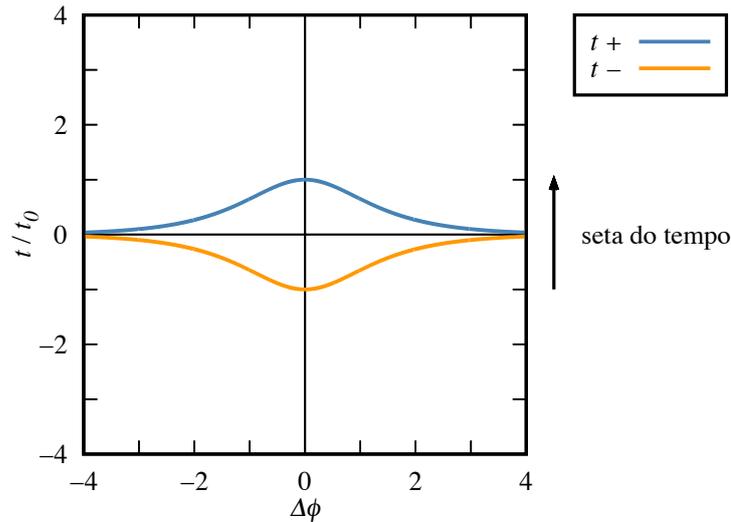


Figura 25 – Gráfico para a equação geodésica (4.43) com t em unidades de t_0 . A curva azul (laranja) corresponde ao cone superior (inferior). Um táquion, oriundo da singularidade pela esquerda do gráfico ($\ell > 0$), acelera até atingir o seu tempo limite, t_0 , donde então desacelera em direção à singularidade, sendo por fim aniquilado. A destruição ocasiona a criação de um táquion na folha oposta do cone, que irá vivenciar o mesmo processo do seu antecessor.

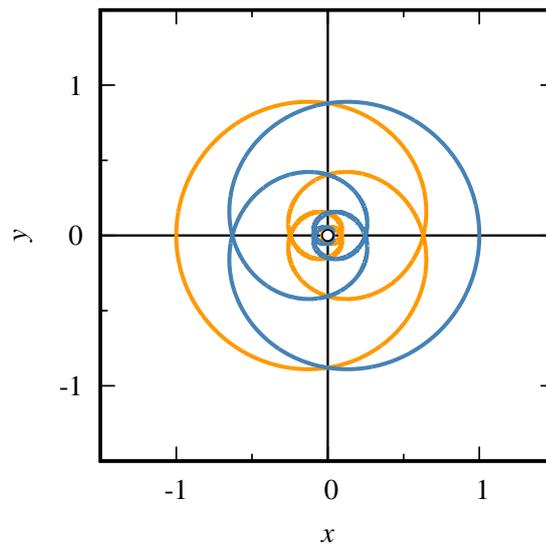


Figura 26 – Geodésicas do tipo espaço (espirais de Poincaré) correspondentes às curvas da Figura 25. O tempo radial t está expresso em unidades de t_0 , e, $\beta = 1/3$. As trajetórias fechadas mostram, que numa mesma folha do cone, os táquions espiralam tanto para fora quanto para dentro da singularidade.

e aniquilação na singularidade cósmica. Na próxima seção, iremos discutir um modelo de metamaterial hiperbólico que simula as geodésicas do universo \mathcal{M}_C , mediante um estudo via óptica geométrica.

4.1.3 Um Protótipo de Metamaterial para o Universo \mathcal{M}_C

Objetivando simular partículas de Milne num meio hiperbólico, estudaremos a propagação da luz num metamaterial com a estrutura de multicamada, introduzida na seção 3.3.2.1. Todavia, as

camadas estruturais metálicas e dielétricas serão cascas cilíndricas, dispostas de modo concêntrico, partindo de uma núcleo cilíndrico de raio $\rho_{\text{mín}}$, até um raio máximo, $\rho_{\text{máx}}$, formando uma coroa cilíndrica. Naturalmente, a espessura de cada casca deve estar na escala do sub-comprimento de onda, para que assim a luz não perceba as inomogeneidades do meio e a teoria do meio efetivo seja aplicável. Além disso, salientamos que a estrutura em nanofios metálicos, apresentada em 3.3.2.2, também pode ser utilizada para o mesmo estudo que faremos adiante. Uma análise empregando a estrutura em nanofios, sob a perspectiva de cristais líquidos, pode ser encontrada em [96].

No que se segue, iremos utilizar duas configurações da estrutura em multicamadas, ilustradas na Figura 27. A primeira (veja a Figura 27a), destinada a emular o caso das partículas ordinárias da seção 4.1.1, é caracterizada pelo tensor dielétrico

$$\epsilon = \epsilon_e \hat{\rho} \otimes \hat{\rho} + \epsilon_o \hat{\phi} \otimes \hat{\phi} + \epsilon_o \hat{z} \otimes \hat{z}, \quad (4.52)$$

sendo $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ e \hat{z} os versores base usuais em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Já a segunda estrutura (veja a Figura 27b), especificada para o caso dos táquions, possui como tensor dielétrico

$$\epsilon = \epsilon_o \hat{\rho} \otimes \hat{\rho} + \epsilon_e \hat{\phi} \otimes \hat{\phi} + \epsilon_o \hat{z} \otimes \hat{z}. \quad (4.53)$$

É importante ressaltar que, da mesma forma como na seção 3.3.2.1, a direção de ϵ_e (eixo óptico) é no sentido de “furar” as camadas, ao passo que as direções de ϵ_o são paralelas ao plano de cada camada. Ademais, ambas as configurações da Figura 27 são meios hiperbólicos de tipo I, isto é, $\epsilon_e < 0$ e $\epsilon_o > 0$.

De acordo com as equações (3.170) e (3.174), as expressões das constantes dielétricas principais são

$$\epsilon_o = f \epsilon_m + (1 - f) \epsilon_d, \quad (4.54)$$

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_m \epsilon_d}{f \epsilon_d + (1 - f) \epsilon_m}, \quad (4.55)$$

onde ϵ_m (ϵ_d) é a constante dielétrica do metal (dielétrico) e f é a fração de preenchimento do metal. Segundo [67], o valor de $f = 1/2$ é satisfatório para produzir a anisotropia desejada. Substituindo esse valor nas expressões prévias de ϵ_o e ϵ_e , temos

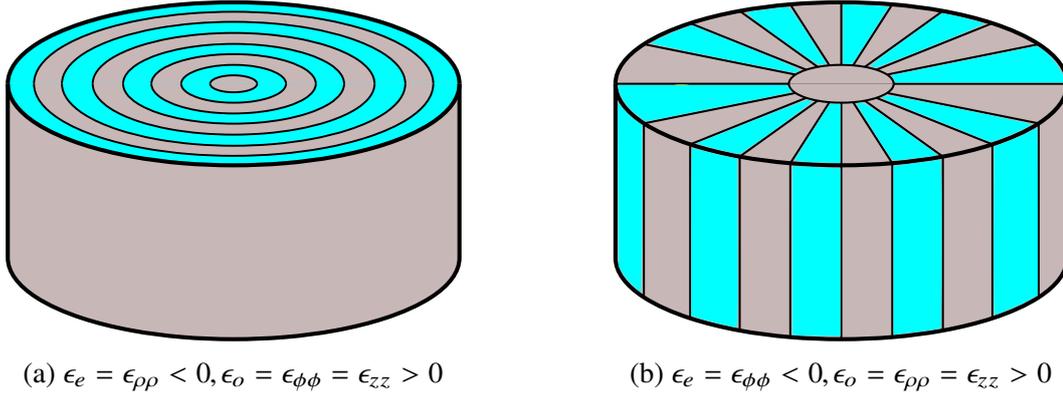
$$\epsilon_o = \frac{\epsilon_m + \epsilon_d}{2}, \quad (4.56)$$

$$\epsilon_e = \frac{2\epsilon_m \epsilon_d}{\epsilon_m + \epsilon_d}, \quad (4.57)$$

donde se conclui que $\epsilon_e \epsilon_o = \epsilon_m \epsilon_d < 0$.

Para obter as trajetórias dos raios luminosos propagando-se no metamaterial, primeiramente devemos calcular o índice de refração dos raios extraordinários (3.67), ou seja,

$$N_r(\vartheta) = \sqrt{\epsilon_o \cos^2 \vartheta + \epsilon_e \sin^2 \vartheta}, \quad (4.58)$$



$$(a) \epsilon_e = \epsilon_{\rho\rho} < 0, \epsilon_o = \epsilon_{\phi\phi} = \epsilon_{zz} > 0$$

$$(b) \epsilon_e = \epsilon_{\phi\phi} < 0, \epsilon_o = \epsilon_{\rho\rho} = \epsilon_{zz} > 0$$

Figura 27 – Estruturas de multicamada possíveis para um meio hiperbólico com geometria cilíndrica. O diretor (eixo óptico) $\hat{\mathbf{d}}$, em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , é dado por $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ em (a) e $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ em (b). Ambas as estruturas são delimitadas por um raio mínimo, ρ_{\min} , e um raio máximo, ρ_{\max} .

onde ϑ é o ângulo entre o diretor $\hat{\mathbf{d}}$ e o vetor tangente à trajetória dos raios de luz, \mathbf{u} . Em outras palavras, ϑ é a angulação entre o diretor e o vetor de Poynting \mathbf{S} . A fim de obter \mathbf{u} , expressemos o vetor posição que descreve da trajetória, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$, em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Portanto,

$$\mathbf{r}(l) = \rho(l)\hat{\boldsymbol{\rho}} + z(l)\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.59)$$

onde o parâmetro da trajetória, l , é o comprimento de arco tridimensional. Daí, vem que

$$\mathbf{u} = \frac{d\rho(l)}{dl}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\frac{d\phi(l)}{dl}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{dz(l)}{dl}\hat{\mathbf{z}} \equiv \rho'\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\phi'\hat{\boldsymbol{\phi}} + z'\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.60)$$

Além disso, devido à parametrização adotada, o módulo de \mathbf{u} é unitário. Logo,

$$\rho'^2 + \rho^2\phi'^2 + z'^2 = 1. \quad (4.61)$$

Começando com o caso do tensor dielétrico (4.52), o eixo óptico está na direção radial, e, então, $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$. Tomando o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{d}}$, obtemos

$$\cos \vartheta = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{d}} = \rho'. \quad (4.62)$$

Substituindo a expressão anterior no vínculo (4.61), resulta em

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \rho'^2 = \rho^2\phi'^2 + z'^2. \quad (4.63)$$

Sendo assim, reescrevemos o índice de refração extraordinário (4.58) da forma

$$N_r = \sqrt{\epsilon_o\rho'^2 + \epsilon_e(\rho^2\phi'^2 + z'^2)}, \quad (4.64)$$

donde, o caminho óptico será

$$N_r^2 dl^2 = \epsilon_o d\rho^2 + \epsilon_e \rho^2 d\phi^2 + \epsilon_e dz^2. \quad (4.65)$$

Considerando o modelo geométrico para a propagação luminosa, o caminho óptico (4.65) fornece a métrica efetiva por meio da relação $ds = N_r dl = F(x, x') dl$. No caso em questão, a função finsleriana é dada por

$$F^2(x, x') = \epsilon_o \rho'^2 + \epsilon_e \rho^2 \phi'^2 + \epsilon_e z'^2. \quad (4.66)$$

A partir da qual, podemos extrair a métrica efetiva h_{ij} via (3.77), ou seja,

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i \partial x'^j}. \quad (4.67)$$

Daí, vem que

$$[h_{ij}] = \text{diag}(\epsilon_o, \epsilon_e \rho^2, \epsilon_e). \quad (4.68)$$

Por fim, obtemos a métrica no espaço-tempo através da equação (3.102). Então,

$$ds^2 = dt^2 - \epsilon_o d\rho^2 - \epsilon_e \rho^2 d\phi^2 - \epsilon_e dz^2, \quad (4.69)$$

onde t é o tempo minkowskiano.

Na seção 3.1.2, vimos que a onda extraordinária está polarizada no plano formado pelo vetor diretor \hat{d} e pelo vetor de onda \mathbf{k} . Logo, se o vetor de onda só possui componentes nas direções dos versores $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$, então, a onda está polarizada num plano $z = \text{constante}$ (no que diz respeito ao campo elétrico \mathbf{E}). Por conseguinte, a métrica (4.69) assume a forma

$$ds^2 = dt^2 - \epsilon_o d\rho^2 - \epsilon_e \rho^2 d\phi^2. \quad (4.70)$$

Além disso, como mencionado previamente, assumimos que o meio hiperbólico é do tipo I. Logo, $\epsilon_e = -|\epsilon_e| < 0$ e $\epsilon_o > 0$. Dado isso, vamos reescalonar a coordenada radial através da relação $r = \rho\sqrt{\epsilon_o}$. Assim,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2, \quad (4.71)$$

onde $\alpha^2 \equiv |\epsilon_e|/\epsilon_o$.

De acordo com a equação (2.196), a métrica (4.71) fornece a lagrangiana

$$K = \frac{\dot{t}}{2} - \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha^2 r^2 \dot{\phi}^2}{2}, \quad (4.72)$$

donde resultam as seguintes equações geodésicas:

$$\dot{t} = \omega, \quad (4.73)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0, \quad (4.74)$$

$$\ddot{r} + \alpha^2 r \dot{\phi}^2 = 0. \quad (4.75)$$

A primeira equação apenas expressa a conservação do momento canônico temporal (ω é constante), enquanto as outras duas são equivalentes às equações geodésicas (4.22) e (4.23),

respectivamente. Ademais, como a luz descreve geodésicas nulas no espaço-tempo, podemos utilizar a integral primeira

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \omega^2 - \dot{r}^2 + \alpha^2 r^2 \dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.76)$$

da qual, resulta a equação de vínculo

$$\dot{r}^2 - \frac{L^2}{\alpha^2 r^2} = \omega^2, \quad (4.77)$$

sendo $L = \alpha^2 r^2 \dot{\phi}$ o momento angular. Note que a equação anterior é essencialmente a integral primeira (4.27) para partículas massivas. Procedendo exatamente da mesma maneira como na seção 4.1.2, obtemos a trajetória tridimensional

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\alpha |\sinh \alpha \Delta \phi|}, \quad (4.78)$$

onde $r_0 \equiv |L|/\omega$. Portanto, a curva percorrida pelos raios de luz num metamaterial são espirais de Poincot, da mesma forma como as geodésicas de tipo tempo no \mathcal{M}_C . Comparando as equações (4.78) e (4.33), a coordenada radial r possui o comportamento do tempo de Milne t , e, a constante α é o análogo do parâmetro de abertura do cone β .

Conforme apontado em [97], o caráter hiperbólico do meio gera uma “força” central atrativa, sendo o parâmetro α intimamente relacionado com esse fenômeno. Para ver isso, basta interpretar o vínculo (4.77) em termos da conservação da energia para uma partícula de massa unitária. Daí, vem que

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\bar{L}^2}{2\alpha^2 r^2} = \frac{\omega^2}{2} \equiv E, \quad (4.79)$$

onde $\bar{L} = r^2 \dot{\phi} = \alpha^2 L$ é o momento angular clássico usual e E é a “energia total” da partícula [41]. Portanto, a força radial gerada pelo potencial $-\alpha^2 \bar{L}^2 / (2r^2)$, será

$$F_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\alpha^2 \bar{L}^2}{2r^2} \right) = -\frac{\alpha^2 \bar{L}^2}{r^3}. \quad (4.80)$$

A equação anterior nos revela que o parâmetro α e a força radial F_r são diretamente proporcionais. Portanto, quanto menor o valor de α , maior é a vorticidade, isto é, mais a partícula espirala antes de atingir o cilindro mais interno do metamaterial. Finalmente, como o meio gera uma força de atração para o centro, as trajetórias fornecidas pela expressão (4.78) são equivalentes às curvas geodésicas (4.33) movendo-se em direção à singularidade cósmica (*Big Crunch*).

Vejamos agora a estrutura da Figura 27b, designada para simular as trajetórias dos táquions no universo \mathcal{M}_C (geodésicas tipo espaço). Naturalmente, a forma (4.53) do tensor dielétrico é o que distingue este caso do anterior. Todavia, a receita é a mesma. Sendo o diretor

circular, isto é, $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$, temos

$$\cos^2 \vartheta = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2 = \rho^2 \phi'^2, \quad (4.81)$$

$$\sin^2 \vartheta = \rho'^2 + z'^2, \quad (4.82)$$

$$N_r = \sqrt{\epsilon_o \rho^2 \phi'^2 + \epsilon_e (\rho'^2 + z'^2)}, \quad (4.83)$$

$$N_r^2 dl^2 = \epsilon_e d\rho^2 + \epsilon_o \rho^2 d\phi^2 + \epsilon_e dz^2. \quad (4.84)$$

Donde, transpondo para o formalismo geométrico, as equações anteriores fornecem

$$F^2(x, x') = \epsilon_e \rho'^2 + \epsilon_o \rho^2 \phi'^2 + \epsilon_e z'^2, \quad (4.85)$$

$$[h_{ij}] = \text{diag}(\epsilon_e, \epsilon_o \rho^2, \epsilon_e). \quad (4.86)$$

Novamente, considerando a propagação restrita a um plano $z = \text{constante}$, a métrica no espaço-tempo será

$$ds^2 = dt^2 - \epsilon_e d\rho^2 - \epsilon_o \rho^2 d\phi^2. \quad (4.87)$$

Considerando $\epsilon_e = -|\epsilon_e| < 0$ e $\epsilon_o > 0$ (meio tipo I), e, reescalando a variável radial segundo $r = \rho\sqrt{|\epsilon_e|}$, a equação anterior torna-se

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2, \quad (4.88)$$

onde agora $\alpha^2 \equiv \epsilon_o/|\epsilon_e|$.

Portanto, a partir da métrica (4.88), obtemos a lagrangiana

$$K = \frac{\dot{t}^2}{2} + \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha^2 r^2 \dot{\phi}^2}{2}, \quad (4.89)$$

que também gera as mesmas equações diferenciais (4.73)–(4.75). Porém, agora teremos um vínculo diferente de (4.77), pois

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \omega^2 + \dot{r}^2 - \alpha^2 r^2 \dot{\phi}^2 = 0, \quad (4.90)$$

donde,

$$\dot{r}^2 - \frac{L^2}{\alpha^2 r^2} = -\omega^2, \quad (4.91)$$

sendo, mais uma vez, $L = \alpha^2 r^2 \dot{\phi}$ o momento angular. Com efeito, a equação anterior é análoga ao vínculo (4.39) das geodésicas do tipo espaço no \mathcal{M}_C . Logo, a trajetória será

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\alpha \cosh \alpha \Delta\phi}, \quad (4.92)$$

onde $r_0 = |L| \omega$. Assim, obtemos trajetórias equivalentes às geodésicas dos táquions, expressas pela equação (4.43).

Vale ressaltar que ambas as trajetórias, (4.78) e (4.92), foram obtidas por meio de simulações numéricas num sistema de hiper-lentes [67]. A simulação computacional, consistia

inicialmente em observar a propagação de um feixe de luz estreito no meio hiperbólico. Devido à existência do potencial atrativo, os raios se propagavam em direção ao centro até sofrerem reflexão (especular) no núcleo cilíndrico mais interno (raio $\rho_{\text{mín}}$), sendo então espalhados. Tal experimento, se mostra uma alternativa interessante para visualizar a geometria do cone duplo, característica do \mathcal{M}_C , pois, poderíamos interpretar a propagação em direção ao centro como as trajetórias no cone inferior e, a luz espalhada pela reflexão como as geodésicas do cone superior. Portanto, o núcleo cilíndrico interno faria o papel da singularidade cósmica, isto é, “aniquilando” as partículas incidentes e “criando” as partículas emergentes.

4.1.4 Emulação do Campo de Klein-Gordon no \mathcal{M}_C

Vimos na seção anterior que as trajetórias clássicas do universo compacto de Milne, isto é, suas geodésicas, foram reproduzidas num meio hiperbólico adequado. Nesse caso, estávamos interessados em simular trajetórias, e, portanto, o estudo foi realizado empregando a óptica geométrica. Agora, com o intuito de reproduzir o comportamento de um campo escalar de Klein-Gordon no \mathcal{M}_C , ou seja, um comportamento quântico, iremos explorar a natureza ondulatória da luz.

Primeiramente, seja a equação de Klein-Gordon para um campo escalar φ , isto é,

$$\left(\Delta + m^2\right) \varphi = 0, \quad (4.93)$$

onde utilizamos unidades naturais ($c, \hbar = 1$) e Δ é o operador Laplace-Beltrami (3.152). Para o universo \mathcal{M}_C , $\Delta_{\mathcal{M}_C}$ é dado pela expressão (4.20). Daí, vem que

$$\left[\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{1}{\beta^2 t^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + m^2\right] \varphi = 0. \quad (4.94)$$

No que concerne ao metamaterial, procederemos da mesma forma como na seção 3.3.1, ou seja, na obtenção do espaço-tempo de Minkowski em 2 + 1 dimensões. Logo, vamos examinar a propagação da luz mediante a aproximação de onda escalar, na qual faremos uso da equação covariante de d’Alembert (3.152),

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) = 0, \quad (4.95)$$

onde $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\rho, \phi, t)$ é a função de onda.

Igualmente ao caso da óptica geométrica, iremos utilizar as duas estruturas da Figura 27. Sendo assim, considere primeiro a métrica (4.70), da qual resulta

$$-\frac{1}{\epsilon_o} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \rho}\right) - \frac{1}{\epsilon_e} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.96)$$

Assumindo uma dependência harmônica com o tempo, $e^{-i\omega t}$, então $\partial_t^2 \rightarrow -\omega^2$. Assim,

$$-\frac{1}{\epsilon_o} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \rho}\right) - \frac{1}{\epsilon_e} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \phi^2} - \omega^2 \bar{\varphi} = 0, \quad (4.97)$$

onde ω^2 é a frequência de propagação da luz. Lembrando que temos um meio hiperbólico do tipo I, então, $\epsilon_e = -|\epsilon_e| < 0$ e $\epsilon_o > 0$. Ademais, reescalando a coordenada radial segundo $r = \rho\sqrt{\epsilon_o}$ e introduzindo a constante $\alpha^2 = |\epsilon_e|/\epsilon_o$, temos

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \omega^2 \right] \bar{\varphi} = 0. \quad (4.98)$$

A expressão (4.98) é análoga à equação (4.94), se ω for interpretada como uma massa efetiva¹ m^* (em unidades naturais). Com respeito à constante α , ela está associada com o parâmetro de abertura do cone duplo, ou seja, $\beta = \sinh \theta$.

A fim de resolver a equação (4.98), precisamos da relação de dispersão para a componente extraordinária da luz. Para obtê-la, tomemos a equação da eikonal (2.190), de acordo com a métrica (4.71). Daí, vem que

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)^2 = 0. \quad (4.99)$$

Substituindo na expressão acima as relações $\partial_t \psi = -\omega$, $\partial_r \psi = -k_r$ e $\partial_\phi \psi = l = \text{constante}$ ², resulta em

$$k_r^2 - \frac{l^2}{\alpha^2 r^2} - \omega^2 = 0, \quad (4.100)$$

que é a relação que procurávamos, pois, é consistente com a equação (4.98). Para ver isso, basta reescrever esta última em termos de operadores, isto é,

$$\left[\hat{k}_r^2 - \frac{\hat{L}_z^2}{\alpha^2 r^2} - \omega^2 \right] \psi = 0, \quad (4.101)$$

onde \hat{k}_r^2 e \hat{L}_z^2 são os operadores usuais [13]

$$\hat{k}_r^2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (4.102)$$

$$\hat{L}_z^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (4.103)$$

Ademais, sendo a eikonal $\psi = -k_\mu x^\mu = -\omega t - k_r r + l\phi$, e, na aproximação da óptica geométrica, $\bar{\varphi} \propto e^{i\psi}$, então, para uma mudança na eikonal de $\delta\phi = 2\pi$, a função de onda $\bar{\varphi}$ não pode variar. Sendo assim, $e^{i\psi} = e^{i\psi + i2\pi l}$, o que implica que l é inteiro.

É possível ainda, recuperar a relação de dispersão na forma (3.136), a partir da equação (4.100). Perceba que de acordo com (4.102) e a relação $r = \rho\sqrt{\epsilon_o}$, temos $k_r = k_\rho/\sqrt{\epsilon_o}$. Substituindo esse resultado na expressão (4.100), e, reescrevendo novamente a coordenada radial em termos de ρ , vem que

$$\frac{k_\rho^2}{\epsilon_o^2} - \frac{(l/\rho)^2}{|\epsilon_e|} = \omega^2. \quad (4.104)$$

¹ Na realidade, assim como na seção 3.3.1, a massa efetiva é dada por $m^* = \hbar\omega/c^2$, ou seja, o equivalente em massa do fóton.

² Na seção 4.1.3, vimos que a variável ϕ é cíclica, isto é, não aparece na lagrangiana, de maneira que o momento canônico angular associado é constante.

Donde, comparando com a expressão (3.136) (com k_ρ no lugar de k_z e k_ϕ^2 no lugar de $k_x^2 + k_y^2$), temos que $k_\phi = l/\rho$. Essa relação de fato se verifica, sendo o número l importante na expansão de uma onda em termos de componentes (ondas) cilíndricas [98, 6].

Usando o método de separação de variáveis, tomemos $\bar{\varphi}(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$. Logo, substituindo na equação diferencial (4.98), obtemos as equações

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + l^2\Phi = 0, \quad (4.105)$$

e,

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left[\omega^2 r^2 - \left(\frac{il}{\alpha} \right)^2 \right] R = 0. \quad (4.106)$$

A solução da equação (4.105), é trivial e da forma

$$\Phi(\phi) = Ae^{il\phi} + Be^{-il\phi}, \quad (4.107)$$

onde A e B são constantes de integração. Já com relação à equação radial (4.106), ela é uma equação diferencial de Bessel com ordem imaginária il/α , cuja solução geral é [99, 100]

$$R(r) = C\tilde{J}_{l/\alpha}(\omega r) + D\tilde{Y}_{l/\alpha}(\omega r), \quad (4.108)$$

sendo C e D constantes de integração. As soluções $\tilde{J}_{l/\alpha}$ e $\tilde{Y}_{l/\alpha}$ são linearmente independentes, e, definidas como [100]

$$\tilde{J}_{l/\alpha} = \operatorname{sech} \left(\frac{\pi l}{2\alpha} \right) \operatorname{Re} J_{il/\alpha}(\omega r), \quad (4.109)$$

$$\tilde{Y}_{l/\alpha} = \operatorname{sech} \left(\frac{\pi l}{2\alpha} \right) \operatorname{Re} Y_{il/\alpha}(\omega r), \quad (4.110)$$

onde $\operatorname{Re} J_{il/\alpha}$ e $\operatorname{Re} Y_{il/\alpha}$ são as partes reais das funções de Bessel e de Neumann, respectivamente. Vale ressaltar que, caso fizéssemos o mesmo procedimento para a equação (4.94), o qual foi feito em [90], obteríamos as mesmas soluções para o campo escalar φ , porém, com os termos r, ω, α substituídos por t, m, β , respectivamente.

Uma característica interessante [99, 100] das equações (4.109) e (4.110), é a sua violenta oscilação próximo da origem, como se pode notar analisando ambos os comportamentos no limite $r \rightarrow 0^+$, isto é,

$$\tilde{J}_{l/\alpha}(\omega r) = \left(\frac{\operatorname{tgh}(\pi l/2\alpha)}{\pi l/2\alpha} \right)^{1/2} \cos \left[\frac{l}{\alpha} \ln \left(\frac{\omega r}{2} \right) - \gamma_{l/\alpha} \right] + \mathcal{O}(\omega^2 r^2), \quad (4.111)$$

$$\tilde{Y}_{l/\alpha}(\omega r) = \left(\frac{\operatorname{coth}(\pi l/2\alpha)}{\pi l/2\alpha} \right)^{1/2} \operatorname{sen} \left[\frac{l}{\alpha} \ln \left(\frac{\omega r}{2} \right) - \gamma_{l/\alpha} \right] + \mathcal{O}(\omega^2 r^2), \quad (4.112)$$

onde $\gamma_{l/\alpha}$ é uma constante definida como $\gamma_{l/\alpha} \equiv \arg \Gamma(1 + il/\alpha)$, sendo Γ a função Gama. As rápidas oscilações se devem ao fator logarítmico dentro do argumento das funções trigonométricas. Ainda, para um valor fixo de l , quanto menor o valor de α , mais forte as oscilações se tornam

(a redução de α “comprime” o período das funções trigonométricas). Esse comportamento é análogo ao encontrado na seção 4.1.2, quando a vorticidade nas trajetórias era proporcional a $1/\alpha$ devido ao potencial atrativo para o centro.

Também é importante ressaltar que, para $l \neq 0$, as equações (4.109) e (4.110) não são contínuas através da origem, donde é possível traçar um paralelo com o caso clássico, pois, de modo semelhante, as geodésicas não cruzam a singularidade. Um interpretação interessante para esse fato [90], consiste em construir um espaço de Hilbert, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(-)} \oplus \mathcal{H}^{(+)}$, como uma soma direta de dois espaços de Hilbert, $\mathcal{H}^{(-)}$ e $\mathcal{H}^{(+)}$. Os elementos de $\mathcal{H}^{(-)}$ são soluções de (4.94) na era anterior ao *Big Crunch* ($t < 0$), enquanto os elementos de $\mathcal{H}^{(+)}$ são soluções na era posterior ao *Big Bang* ($t > 0$). Sendo assim, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(-)} \oplus \mathcal{H}^{(+)}$ é um espaço vetorial, cujos elementos φ são da forma [101]

$$\varphi = \left(\varphi^{(-)}, \varphi^{(+)} \right) \in \mathcal{H}^{(-)} \times \mathcal{H}^{(+)}, \quad (4.113)$$

e, dotado do produto interno

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi^{(-)} | \psi^{(-)} \rangle + \langle \varphi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle, \quad (4.114)$$

onde

$$\langle \varphi^{(-)} | \psi^{(-)} \rangle \equiv \beta \int_{-T}^0 dt \int_0^{2\pi} d\phi |t| \varphi^{(-)}(t, \phi) \psi^{(-)}(t, \phi), \quad (4.115)$$

$$\langle \varphi^{(+)} | \psi^{(+)} \rangle \equiv \beta \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\phi |t| \varphi^{(+)}(t, \phi) \psi^{(+)}(t, \phi). \quad (4.116)$$

Note que as expressões (4.115) e (4.116) são integrais de volume no espaço-tempo, uma vez que $d^4x \sqrt{-g} = \beta |t| dt d\phi$. Além disso, o parâmetro T deve ser de tal forma que de $[-T, T]$ o espaço-tempo possa ser descrito pelo \mathcal{M}_C . Portanto, do exposto acima, vetores como $(\varphi^{(-)}, 0)$ e $(0, \varphi^{(+)})$ descrevem estados de aniquilação e destruição de partículas na singularidade, respectivamente. Diante disso, conforme as equações (4.114)–(4.116), o produto interno entre estados desse tipo é nulo, donde se conclui que não existe correlação entre eles. Logo, a singularidade atua como uma “borracha” na função de onda, ou seja, há uma total perda de fase, como se após o *Big Bang* a partícula não tivesse qualquer “memória” do período antes do *Big Crunch*.

Em contrapartida com a análise acima, o caso $l = 0$ é extremamente direto. Segundo as equações (4.107), (4.109) e (4.110), $\Phi(\phi) = \text{constante}$ e as funções de Bessel de ordem imaginária se reduzem as usuais $J_0(\omega r)$ e $Y_0(\omega r)$. Todavia, no caso clássico, as geodésicas são linhas retas que cruzam a singularidade. Com efeito, a função Y_0 não se mostra satisfatória como solução, haja vista que diverge na origem. Por outro lado, J_0 é contínua e bem comportada na origem (singularidade) $r = 0$ ($t = 0$), sendo assim uma solução física apropriada.

Vejam agora brevemente o caso dos táquions. Assim como na óptica geométrica, iremos utilizar o meio hiperbólico da Figura 27b. Como já mencionado previamente, táquions possuem uma massa de “repouso” imaginária $m = i\mu$. Substituindo esse resultado na equação

(4.94), temos

$$\left[\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right) - \frac{1}{\beta^2 t^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \mu^2 \right] \varphi = 0. \quad (4.117)$$

Para a onda escalar $\bar{\varphi}$ eletromagnética, a métrica (4.88) gera a equação ondulatória

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \bar{\varphi} = 0. \quad (4.118)$$

Portanto, assumindo uma dependência harmônica com o tempo, $e^{-i\omega t}$, vem que

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \omega^2 \right] \bar{\varphi} = 0. \quad (4.119)$$

Ainda, reescrevendo a equação anterior em termos dos operadores (4.102) e (4.103), temos

$$\left[\hat{k}_r^2 - \frac{\hat{L}_z^2}{\alpha^2 r^2} + \omega^2 \right] \bar{\varphi} = 0, \quad (4.120)$$

onde $\alpha^2 = \epsilon_o/|\epsilon_e|$ e ω é o análogo da componente imaginária da massa, $\text{Im } m = \mu$.

A relação de dispersão é extraída a partir da equação eikonal (2.190). Sendo assim,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)^2 = 0. \quad (4.121)$$

Donde, utilizando novamente as expressões $\partial_t \psi = -\omega$, $\partial_r \psi = -k_r$ e $\partial_\phi \psi = l = \text{constante}$, obtemos a equação

$$k_r^2 - \frac{l^2}{\alpha^2 r^2} + \omega^2 = 0, \quad (4.122)$$

a qual está de acordo com (4.120). Ademais, caso se deseje obter a relação de dispersão da forma (3.136), basta substituir as relações $k_r = k_\rho/\sqrt{|\epsilon_e|}$, $k_\phi = l/\rho$ e $r = \rho\sqrt{|\epsilon_o|}$ na equação (4.122).

Daí, vem que

$$\frac{k_\phi^2}{\epsilon_o} - \frac{k_\rho^2}{|\epsilon_e|} = \omega^2. \quad (4.123)$$

Separando novamente as variáveis mediante $\bar{\varphi}(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, a EDP (4.119) é desmembrada em duas: a parte angular, é a mesma EDO (4.105), já a parte radial, é dada por

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \left[\omega^2 r^2 + \left(\frac{il}{\alpha} \right)^2 \right] R = 0. \quad (4.124)$$

A EDO acima é a equação diferencial de Bessel modificada, com ordem imaginária il/α , cuja solução geral é da forma [99, 100]

$$R(r) = C\tilde{I}_{l/\alpha}(\omega r) + D\tilde{K}_{l/\alpha}(\omega r), \quad (4.125)$$

onde, seguimos a notação adotada em [100], com $\tilde{I}_{l/\alpha} \equiv \text{Re } I_{il/\alpha}$ e $\tilde{K}_{l/\alpha} \equiv K_{il/\alpha}$. As funções $I_{il/\alpha}$ e $K_{il/\alpha}$ são funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Da

mesma forma como no caso anterior, o seu comportamento é caracterizado por rápidas oscilações próximo da origem. Todavia, os comportamentos assintóticos são exponenciais [99, 100], isto é,

$$\tilde{I}_{l/\alpha}(\omega r) = \left(\frac{1}{2\pi\omega r}\right)^{1/2} e^{\omega r} \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega r}\right)\right], \quad (4.126)$$

$$\tilde{K}_{l/\alpha}(\omega r) = \left(\frac{\pi}{2\omega r}\right)^{1/2} e^{-\omega r} \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega r}\right)\right]. \quad (4.127)$$

Recorrendo ao caso clássico, ilustrado nas Figuras 25 e 26, vemos que ambas dão a ideia de estados ligados. Portanto, uma solução física mais apropriada é dada por (4.127).

Naturalmente, no que diz respeito a modelagem da singularidade cósmica, o modelo de metamaterial apresentado aqui não está isento de falhas. Por exemplo, existe a limitação do raio do cilindro interno, que possui valor finito. Entretanto, podemos tirar proveito desse fato através de um modelo de metamaterial mais sofisticado. Para ver isso, considere que no caso ilustrado na Figura 27a, temos novas constantes dielétricas principais, ϵ_e e ϵ_o , funções da coordenada radial $r = \rho\sqrt{\epsilon_o}$, expressas da forma

$$\epsilon_e(r) = \epsilon_e \left(1 + \frac{\delta^2}{r^2}\right), \quad (4.128)$$

$$\epsilon_o(r) = \epsilon_o \left(1 + \frac{\alpha^2\delta^2}{r^2 + \delta^2}\right), \quad (4.129)$$

onde ϵ_e, ϵ_o são os valores prévios das constantes dielétricas, $\alpha^2 = |\epsilon_e|/\epsilon_o$, e, $\delta = \rho_{\min}\sqrt{\epsilon_o}$ é o raio do cilindro mais interno, cujo valor é pequeno. Substituindo as expressões (4.128) e (4.129) na métrica (4.70), resulta em

$$ds_\delta^2 = dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha^2\delta^2}{r^2 + \delta^2}\right) dr^2 + \alpha^2 (r^2 + \delta^2) d\phi^2. \quad (4.130)$$

Donde, a equação covariante de d'Alembert (3.152), após um laborioso cálculo, assume a forma

$$\frac{r^2 + \delta^2}{r^2 + \delta^2(1 + \alpha^2)} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{r[r^2 + \delta^2(1 + 2\alpha^2)]}{[r^2 + \delta^2(1 + \alpha^2)]^2} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{\alpha^2(r^2 + \delta^2)} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \phi^2} + \omega^2 \bar{\varphi} = 0. \quad (4.131)$$

Logo, separando as variáveis por meio de $\bar{\varphi}(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, obtemos novamente a EDO (4.105) para a parte angular. No que concerne a parte radial, temos

$$\frac{(r^2 + \delta^2)^2}{r^2 + \delta^2(1 + \alpha^2)} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r(r^2 + \delta^2)[r^2 + \delta^2(1 + 2\alpha^2)]}{[r^2 + \delta^2(1 + \alpha^2)]^2} \frac{dR}{dr} + \left[\omega^2(r^2 + \delta^2) - \left(\frac{il}{\alpha}\right)^2\right] R = 0, \quad (4.132)$$

a qual, obviamente, é mais difícil de resolver se comparada com o caso $\delta = 0$ (4.106). Entretanto, a equação anterior pode ser resolvida numericamente, como apontado em [90]. Na realidade, a solução de (4.132), juntamente com (4.107), representa a solução para um campo escalar de Klein-Gordon, φ , onde tal campo descreve uma partícula que se move num hiperboloide de uma

folha, imerso num espaço de Minkowski tridimensional, cuja parametrização é

$$x = \sqrt{t^2 + \delta^2} \beta \cos \phi, \quad (4.133)$$

$$y = \sqrt{t^2 + \delta^2} \beta \sin \phi, \quad (4.134)$$

$$z = t \sqrt{1 + \beta^2}, \quad (4.135)$$

onde o cone duplo (4.14)–(4.16) é o caso particular $\delta = 0$. Naturalmente, o campo de Klein-Gordon φ , assim como nos casos anteriores, pode ser extraído da solução de (4.131) mediante as trocas $\bar{\varphi} \rightarrow \varphi, r \rightarrow t$ e $\alpha \rightarrow \beta$. Essa deformação do cone duplo num hiperboloide, foi sugerida em [102], e, utilizada em [90] com o intuito de resolver o problema da descontinuidade das soluções na singularidade cósmica, pois, como vimos, apenas no caso $l = 0$ a propagação entre as folhas do cone duplo é possível, sem que tenha de se recorrer às interpretações de aniquilação e criação de partículas. A motivação física para tal regularização do \mathcal{M}_C , é que o próprio campo gravitacional das partículas modificaria o espaço-tempo, à medida que as mesmas se aproximam da singularidade cósmica, deformando o cone no hiperboloide (4.133)–(4.135) e, por fim, permitindo a passagem entre as folhas inferior e superior. Portanto, a quinta dimensão, onde ocorre a colisão entre branas, iria se contrair até um valor mínimo (representado acima por δ). Com efeito, a propagação é definida de maneira unívoca em todo o espaço-tempo, isto é, as funções de onda são contínuas na origem (singularidade) da mesma forma como em $l = 0$. Portanto, através de uma estrutura mais refinada do metamaterial, torna-se possível circular, ou, pelo menos minimizar, a limitação imposta pelo raio do cilindro interno, por meio de uma analogia com a regularização do \mathcal{M}_C discutida acima.

4.2 Metamateriais Eletrônicos e o Espaço-Tempo Kleiniano

A conjectura de que a assinatura da métrica do espaço-tempo pode ter sido alterada no universo primordial, passando de euclidiana $(+, +, +, +)$, para lorentziana $(-, +, +, +)$ ³, é uma consequência da famosa *condição sem contorno* [103], proposta por J.B. Hartle e S.W. Hawking [104]. Uma outra possibilidade, sugerida por [105], é a transição entre uma assinatura lorentziana $(-, +, +, +)$, e uma kleiniana $(-, +, +, -)$, onde esta última caracteriza-se por possuir duas coordenadas temporais. Dado isso, assumindo que partículas são livres para transitar entre as duas regiões, efeitos físicos anômalos poderiam ser observados, devido à estrutura do cone de luz kleiniano (veja a Figura 28). Por exemplo, seria possível utilizar a região kleiniana para viajar no tempo lorentziano, construindo curvas de tempo (lorentziano) fechadas em tal região. Ademais, em tese também seria factível extrair energia da região kleiniana, por um método similar ao processo de Penrose, utilizado na extração de energia de um buraco negro em rotação [76].

³ Nesta seção, como trabalharemos em grande parte com métricas tridimensionais, usaremos a convenção de assinatura $(-, +, +, +)$.

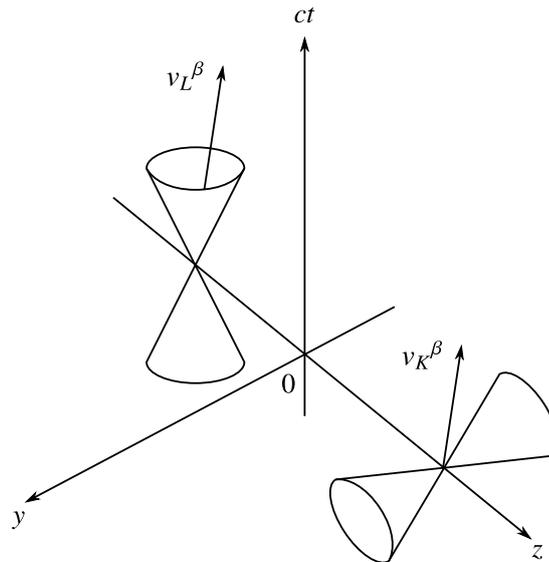


Figura 28 – Diagrama de espaço-tempo ilustrando a estrutura dos cones de luz lorentziano ($z < 0$) e kleiniano ($z > 0$). Os entes v_L^β e v_K^β representam típicos quadrivetores do tipo tempo.

Por outro lado, metamateriais oferecem a alternativa de emular um comportamento temporal em uma das três dimensões espaciais. Logo, é possível engenhar sistemas físicos capazes de externar fenômenos equivalentes a uma mudança de assinatura no espaço-tempo. Em metamateriais ópticos, por exemplo, vimos anteriormente que, a mudança de assinatura se manifesta em decorrência de valores negativos das constantes dielétricas principais (ϵ_e, ϵ_o). Trabalhos específicos sobre mudança de assinatura em metamateriais ópticos, podem ser vistos em [69, 73, 15].

No que se segue, veremos como é possível reproduzir uma mudança de assinatura kleiniana sob a perspectiva de metamateriais eletrônicos [106, 107], nos quais os objetos fundamentais são os *elétrons balísticos*, isto é, elétrons cujo o *livre percurso médio* é maior do que as dimensões do meio pelo qual se propagam, de maneira que não sofrem nenhum tipo de espalhamento pelos átomos da rede, tendo o movimento alterado por colisões de outra natureza, como, por exemplo, choques contra as paredes do meio [106].

4.2.1 Propagação de um Campo de Klein-Gordon Através de uma Mudança de Assinatura

Primeiramente, antes de definir e apresentar o modelo de metamaterial eletrônico que vamos utilizar, se faz necessário explanar, com maiores detalhes, as principais características de uma transição de assinatura entre uma região lorentziana $(-, +, +, +)$ e uma região kleiniana $(-, +, +, -)$ do espaço-tempo. Uma análise detalhada sobre tal transição foi feita em [76], de modo que aqui tomaremos esse estudo como referência, excetuando-se a derivação das condições de contorno apropriadas, obtidas em [108, 109, 75] por métodos distintos.

Iniciemos justificando a estrutura do cone de luz kleiniano, ilustrado na Figura 28. Daqui por diante, em todo o nosso estudo, consideraremos que na região kleiniana do espaço-tempo, o

eixo z é do tipo tempo. Portanto, na referida região, temos

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, +1, +1, -1), \quad (4.136)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 - dz^2. \quad (4.137)$$

O cone de luz, num ponto arbitrário, é determinado pelo lugar geométrico dos pontos onde o intervalo Δs , a partir do evento de origem, é nulo. Tomando o quadrivetor $\Delta x^\mu = (c\Delta t, 0, \Delta y, \Delta z)$, vem que

$$\Delta x_\mu \Delta x^\mu = -c^2 \Delta t^2 + \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 \Delta t^2 + \Delta z^2 = \Delta y^2, \quad (4.138)$$

o que corrobora com o cone de luz kleiniano da Figura 28.

Agora, vamos considerar um espaço-tempo genérico descrito pela métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \begin{cases} -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, & \text{se } z < 0. \\ -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 - dz^2, & \text{se } 0 < z < l. \\ -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, & \text{se } z > l. \end{cases} \quad (4.139)$$

Ou seja, temos uma região kleiniana de extensão l entre duas regiões lorentzianas. Seja equação de Klein-Gordon para um campo escalar ϕ , isto é,

$$(\Delta - \mu^2) \phi = 0, \quad (4.140)$$

onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami e $\mu \equiv mc/\hbar$. Logo, nas regiões lorentzianas,

$$\Delta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.141)$$

e o operador Δ se reduz ao d'Alembertiano usual do espaço-tempo de Minkowski. Todavia, na região kleiniana, temos

$$\Delta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.142)$$

A solução da equação (4.140) nas regiões lorentzianas, é a onda plana

$$\phi = e^{ik_\mu x^\mu} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (4.143)$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ é o vetor de onda e ω a frequência angular. Substituindo a equação anterior na expressão (4.140), sendo Δ dado por (4.141), obtemos a relação de dispersão

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \mu^2, \quad (4.144)$$

que nada mais é do que a relação (2.109), $E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$, se substituirmos as relações de Broglie $E = \hbar\omega$ e $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Assumindo a mesma onda plana (4.143) como solução de (4.140), agora na região kleiniana, resulta em

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 - k_z^2 + \mu^2, \quad (4.145)$$

o que não condiz com a expressão (4.144), se considerarmos $k_z \in \mathbb{R}$. A fim de manter a relação de dispersão sempre na forma (4.144), k_z deve ser puramente imaginário na faixa kleiniana [76]. Sendo assim, fazendo $k_z \rightarrow ip$ ($p \in \mathbb{R}$) no intervalo $0 < z < l$, a equação (4.145) toma a forma

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + p^2 + \mu^2. \quad (4.146)$$

Donde, a solução para o campo escalar na região kleiniana será

$$\phi = e^{i(k_x x + k_y y - \omega t) \pm pz}. \quad (4.147)$$

Combinando as soluções (4.143) e (4.147), podemos expressar o campo escalar ϕ , no espaço-tempo definido em (4.139), por

$$\phi = e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \begin{cases} e^{ipz} + A e^{-ipz}, & \text{se } z < 0, \\ B e^{pz} + C e^{-pz}, & \text{se } 0 < z < l, \\ D e^{ipz}, & \text{se } z > l, \end{cases} \quad (4.148)$$

onde B e C são amplitudes complexas, A é a amplitude refletida e D a amplitude transmitida. Para determinar os coeficientes A, B, C, D , necessitamos de condições de contorno adequadas ao problema. Conforme obtido em [76], aplicando as condições de contorno usuais, isto é, considerando que ϕ e $\partial_z \phi$ são contínuas nas interfaces, vem que

$$A = -i \operatorname{tgh}(pl), \quad (4.149)$$

$$B = \left(\frac{1+i}{2} \right) \frac{e^{-pl}}{\cosh(pl)}, \quad (4.150)$$

$$C = \left(\frac{1-i}{2} \right) \frac{e^{pl}}{\cosh(pl)}, \quad (4.151)$$

$$D = \frac{e^{-ipl}}{\cosh(pl)}. \quad (4.152)$$

Portanto, há tunelamento através da região kleiniana, uma vez que $D \neq 0$. Ademais, verifica-se facilmente que a corrente de probabilidade é conservada, somando-se o módulo quadrado das amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitida (veja a Figura 29).

Não obstante, olhando com mais atenção para a configuração do espaço-tempo definida em (4.139), é possível expressar a componente g_{zz} da forma

$$g_{zz} = H(-z) - H(z) + 2H(z-l), \quad (4.153)$$

onde $H(z)$ é a função degrau de Heaviside. Posteriormente, na seção 4.2.4, vamos mostrar que o comportamento descontínuo de g_{zz} acarreta outra condição de contorno para $\partial_z \phi$ nas interfaces $z = 0$ e $z = l$, e, sendo assim, fornecendo uma solução distinta das equações (4.149)–(4.152). Por questões de clareza e concisão, iremos postergar a solução correta até a seção 4.2.5.

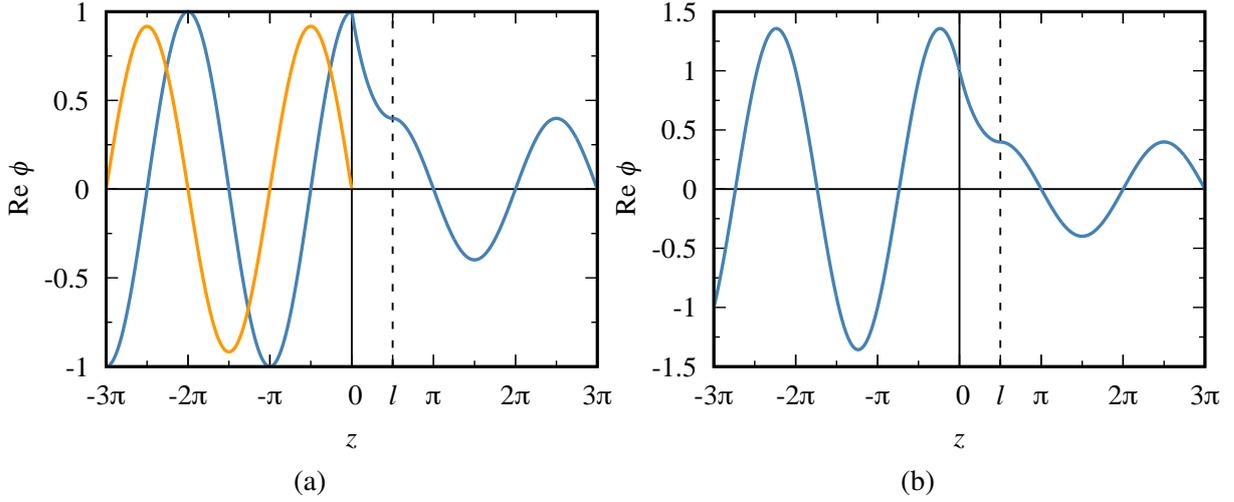


Figura 29 – (a) Tunelamento da parte real do campo escalar ϕ , através da porção kleiniana de extensão l : a curva azul representa as ondas incidente e transmitida, enquanto a curva laranja ilustra a onda refletida. (b) Gráfico mostrando a função de onda total para $z < 0$ (incidente+refletida). A corrente de probabilidade é conservada, pois nas equações (4.149) e (4.152) temos $|A|^2 + |D|^2 = 1$. Em ambos os gráficos, z está em unidades de p^{-1} .

4.2.2 Um Modelo de Metamaterial Eletrônico

Seja uma geometria não euclidiana dotada de um tensor métrico g_{ij} . Portanto, a equação de Schrödinger independente do tempo, para elétrons em tal geometria é

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \psi + V \psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \psi \right) + V \psi = E \psi, \quad (4.154)$$

onde Δ é o operador Laplace-Beltrami, $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg é a massa de repouso real do elétron e $g = \det [g_{ij}]$.

Por outro lado, em Física do Estado Sólido [64], um conceito bastante útil para a compreensão do movimento de elétrons em semicondutores é o de *massa efetiva*. Esta, incorpora os efeitos da rede atômica pela qual os elétrons se movem, simplificando a estrutura de bandas de energia por meio de uma única grandeza m^* . A massa efetiva tem relação com a curvatura do gráfico $E = E(k)$, sendo E a energia do elétron e k o número de onda. No caso do movimento unidimensional de um elétron livre, por exemplo, temos $E = \hbar^2 k^2 / 2m_e$, donde $d^2 E / dk^2 = \hbar^2 / m_e$, e, portanto, a curvatura do gráfico é determinada por $1/m_e$. De modo semelhante, definimos m^* como

$$\frac{1}{m^*} \equiv \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2}. \quad (4.155)$$

Logo, assim como no caso do elétron livre, a curvatura $d^2 E / dk^2$ para elétrons ligados à estrutura de bandas de energia também é descrita em termos de uma massa recíproca $1/m^*$. É importante ressaltar que, devido a definição de m^* estar ligada à curvatura do gráfico $E = E(k)$, em certos casos m^* pode até mesmo assumir valores negativos. Com efeito, os níveis de energia serão

determinados pela equação de Schrödinger de massa efetiva

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi. \quad (4.156)$$

O caso $m^* < 0$ mencionado acima, acarreta possibilidades interessantes no que diz respeito à função de onda ψ . Como exemplo, considere a equação (4.156) unidimensional ao longo do eixo z , isto é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dz^2} + V\psi = E\psi, \quad (4.157)$$

ou ainda,

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -k^2\psi, \quad (4.158)$$

de maneira que o número de onda k é dado pela expressão

$$k = \frac{\sqrt{2m^*(E - V)}}{\hbar}. \quad (4.159)$$

Diante disso, temos soluções na forma de ondas “planas”

$$\psi(z) = e^{\pm ikz}. \quad (4.160)$$

Considerando os respectivos sinais de m^* e $(E - V)$, concluímos que se ambos tiverem o mesmo sinal, então o número de onda k na equação (4.159) é real e a solução (4.160) é de fato uma onda plana. Porém, se os sinais são distintos, k é puramente imaginário e a equação (4.160) é uma exponencial real. Portanto, igualmente ao caso kleiniano visto na seção 4.2.1, tomando $k \rightarrow ip$ ($p \in \mathbb{R}$) na expressão (4.160), resulta em

$$\psi(z) = e^{\pm pz}, \quad (4.161)$$

onde p é dado por

$$p = \frac{\sqrt{2|m^*(E - V)|}}{\hbar}. \quad (4.162)$$

Na realidade, as equações (4.155) e (4.156) podem ser generalizadas no caso de semicondutores anisotrópicos, isto é, cuja superfície $E = E(\mathbf{k})$ é anisotrópica nas direções determinadas pelas componentes k_x, k_y, k_z do vetor de onda. Esse é o caso, por exemplo, de elétrons no Si ou no Ge [110]. Daí, vem que

$$\left[\frac{1}{m^*} \right]^{ij} \equiv \left[\frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} \right] = \begin{bmatrix} m_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m_3^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

é o *tensor de massa efetiva recíproco*, e,

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m^*} \right]^{ij} \partial_i \partial_j \psi + V\psi = E\psi \quad (4.164)$$

é a generalização da equação (4.156). Os inversos das entradas do tensor (4.163) são denominadas *massas principais* e, assim como no caso isotrópico (4.155), também podem assumir valores positivos e negativos.

Comparando os termos cinéticos das equações (4.154) e (4.164), podemos concluir que ambas coincidem caso $\partial_i (g^{ij} \sqrt{g}) = 0$. Logo, o tensor de massa efetiva gera uma geometria efetiva, cuja métrica é

$$g^{ij} = m_e \left[\frac{1}{m^*} \right]^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (4.165)$$

onde $\alpha_i = m_e/m_i$.

Finalmente, como modelo de metamaterial eletrônico, tomemos como base o apresentado em [106], o qual explanaremos a seguir em linhas gerais. Sendo assim, considere uma onda eletromagnética plana, cujo vetor de onda é $\mathbf{k} = k\hat{z}$ e ω é a frequência angular. O meio de propagação é isotrópico tanto eletricamente quanto magneticamente, isto é, podemos caracterizar as respostas eletromagnéticas do meio por escalares ϵ e μ , os quais denotam a permissividade elétrica relativa (constante dielétrica) e a permeabilidade magnética relativa, respectivamente. Além disso, considere que a polarização dos campos é da forma

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.166)$$

$$\mathbf{H} = H_y \hat{\mathbf{y}} = H_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.167)$$

onde E_0 e H_0 são amplitudes constantes. Logo, as equações de Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon \partial_t \mathbf{E}$ e $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \partial_t \mathbf{H}$ fornecem, respectivamente,

$$\frac{dH_y}{dz} = i\omega \epsilon_0 \epsilon E_x \quad \text{e} \quad \frac{dE_x}{dz} = i\omega \mu_0 \mu H_y. \quad (4.168)$$

Donde,

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} H_y \\ E_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i\omega \epsilon_0 \epsilon \\ i\omega \mu_0 \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_y \\ E_x \end{bmatrix}. \quad (4.169)$$

De modo semelhante, definindo a quantidade $\varphi \equiv (\hbar/im^*) d\psi/dz$, podemos reescrever a equação de Schrödinger de massa efetiva unidimensional (4.156) como

$$\frac{d\varphi}{dz} = i \frac{2(E - V)}{\hbar} \psi. \quad (4.170)$$

Daí, vem que

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & im^*/\hbar \\ i2(E - V)/\hbar & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.171)$$

Portanto, no modelo eletrônico de metamaterial proposto em [106], a massa efetiva m^* e a diferença $(E - V)$ são os equivalentes eletrônicos da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética relativas, respectivamente. Em outras palavras, a analogia é feita no sentido de que uma

massa efetiva positiva (negativa) corresponde a uma permeabilidade elétrica positiva (negativa). Sendo o mesmo raciocínio aplicado para $(E - V)$ e μ .

Almejando estender a correspondência entre m^* e ϵ descrita no parágrafo anterior, seja um meio hiperbólico de tipo I, cujo tensor dielétrico é (em coordenadas cartesianas)

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -|\epsilon_2| \end{bmatrix}, \quad (4.172)$$

onde $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_{zz} = -|\epsilon_2| < 0$. Portanto, o seu equivalente eletrônico será

$$\left[\frac{1}{m^*} \right]^{ij} = \begin{bmatrix} m_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -|m_2|^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.173)$$

sendo $m_{xx} = m_{yy} = m_1 > 0$ e $m_{zz} = m_2 < 0$. Entretanto, devemos proceder com cautela no que diz respeito à relação de dispersão. De acordo com a relação (3.136), um meio hiperbólico dado por (4.172) satisfaz a equação

$$\frac{k_z^2}{\epsilon_1} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{|\epsilon_2|} = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (4.174)$$

que é um hiperboloide de duas folhas no espaço \mathbf{k} (veja a Figura 16a). Agora, seja o tensor (4.173) para as ondas de matéria eletrônicas, o qual segundo (4.165) é equivalente a um tensor métrico contravariante g^{ij} com assinatura $(+, +, -)$. Para um elétron livre com energia $E > 0$, a equação (4.164) assume a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{|m_2|} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi. \quad (4.175)$$

Então, procedendo do mesmo modo como em (4.161), tomemos o *ansatz*

$$\psi(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_y y) \pm p z}, \quad (4.176)$$

a partir do qual, substituindo na expressão (4.175), resulta em

$$\frac{p^2}{(2|m_2|\omega/\hbar)} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{(2m_1\omega/\hbar)} = 1. \quad (4.177)$$

Naturalmente, a equação anterior representa um elipsoide no espaço \mathbf{k} , em contraste com o hiperboloide (4.174) (veja a Figura 30). Ademais, na obtenção de (4.177) usamos a relação $E = \hbar\omega$.

Portanto, comparando a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t} = e^{i(k_x x + k_y y - \omega t) \pm p z}, \quad (4.178)$$

com o campo escalar (4.147), vemos que um tensor de massa efetivo como (4.173) nos conduz a mesma solução da equação de Klein-Gordon na região kleiniana do espaço-tempo. Diante disso, podemos simular um campo escalar de Klein-Gordon mediante uma escolha adequada de $[1/m^*]^{ij}$.

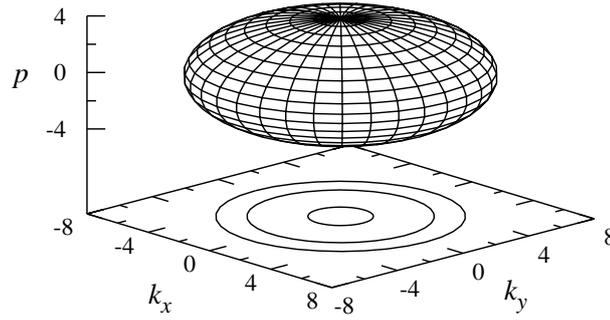


Figura 30 – Elipsoide de revolução conforme a relação de dispersão (4.177) para os elétrons balísticos.

4.2.3 Transição de Assinatura Descontínua

Agora que sabemos como manifestar o comportamento da região kleiniana no meio eletrônico, o próximo passo é tentar reproduzir uma mudança de assinatura descontínua, análoga à equação (4.139). Então, seja um semiconductor anisotrópico que apresenta uma mudança abrupta na massa efetiva, indo subitamente de um valor positivo para um negativo. Ou seja, temos uma junção de materiais semicondutores, um com massa efetiva positiva e o outro com massa efetiva negativa. Levando em conta (4.165), esse comportamento pode ser alcançado escolhendo uma transição de assinatura $(+, +, +)$ para $(+, +, -)$ no tensor métrico g_{ij} . Se a transição ocorre em $z = z_0$, temos

$$g_{ij} = \begin{cases} \text{diag}(+, +, +), & \text{se } z < z_0, \\ \text{diag}(+, +, -), & \text{se } z > z_0. \end{cases} \quad (4.179)$$

Conforme já discutido, a métrica com assinatura $(+, +, -)$ resulta numa equação de Schrödinger cuja solução é a mesma da equação de Klein-Gordon num espaço-tempo kleiniano. Todavia, a função de onda não pode crescer indefinidamente no limite $z \rightarrow +\infty$. Logo, no caso (4.179), devemos descartar soluções do tipo e^{+pz} para $z > z_0$, permanecendo apenas com ondas evanescentes em z , isto é,

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{i(k_x x + k_y y - \omega t) - pz}. \quad (4.180)$$

Para $z < z_0$, temos uma métrica de assinatura $(+, +, +)$. Sendo assim, por conveniência tomemos $m_{zz} = |m_2|$, de modo que a equação de Schrödinger independente do tempo torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{|m_2|} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi. \quad (4.181)$$

Portanto,

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (4.182)$$

onde novamente obtemos a relação de dispersão (4.177). De agora em diante, até o final deste capítulo faremos uso da seguinte notação:

$$\mathbf{x} = (x, y), \quad (4.183)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = (k_x, k_y), \quad (4.184)$$

$$p = k_z. \quad (4.185)$$

Combinando as equações (4.180) e (4.182), resulta em

$$\Psi(\mathbf{x}, z, t) = e^{i(\kappa \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \begin{cases} Ae^{ipz} + Be^{-ipz}, & \text{se } z < z_0, \\ Ce^{-pz}, & \text{se } z > z_0, \end{cases} \quad (4.186)$$

onde A, B e C são amplitudes complexas. Como esperado, a solução (4.186) é a mesma da equação de Klein-Gordon numa transição de assinatura $(-, +, +, +)$ para $(-, +, +, -)$ [76]. Além disso, assim como não era apropriado aplicar as condições de contorno usuais (a continuidade da função de onda e de sua derivada primeira) na solução (4.148), aqui também, no caso eletrônico, esse procedimento não se mostra correto em decorrência da mudança abrupta da massa (assinatura) em $z = z_0$. Sendo assim, o propósito da próxima seção consiste em obter as condições de contorno adequadas para ambos os casos, isto é, tanto para o campo escalar do problema original, quanto para a propagação dos elétrons balísticos.

4.2.4 Junção Simples e o Efeito Refletor

Como já adiantado nas seções 4.2.1 e 4.2.3, uma interface com um comportamento descontínuo ocasiona outra condição de contorno para a primeira derivada da função de onda. No que concerne o campo escalar, a fim de obter a condição de contorno correta, considere o tensor métrico

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(z) \end{bmatrix}, \quad (4.187)$$

a partir do qual o operador Laplace-Beltrami assume a forma

$$\Delta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\sqrt{|g|} f(z) \frac{\partial}{\partial z} \right]. \quad (4.188)$$

Substituindo o *ansatz* $\phi(\mathbf{x}, z, t) = e^{i(\kappa \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \varphi(z)$ na equação de Klein-Gordon (4.140), obtemos

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 - \mu^2 + \frac{1}{\varphi(z)} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{|g|} f(z) \frac{d\varphi}{dz} \right] = 0. \quad (4.189)$$

Sendo assim, se quisermos manter a relação de dispersão (4.146), necessariamente devemos ter

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{|g|} f(z) \frac{d\varphi}{dz} \right] = -p^2 \varphi(z). \quad (4.190)$$

Então, tomando $|g| = \pm 1/f(z)$ na equação anterior e, após um certo algebrismo, vem que

$$\left[-\frac{f'(z)}{2} \frac{d}{dz} + \frac{d}{dz} \left(f(z) \frac{d}{dz} \right) \right] \varphi(z) = -p^2 \varphi(z), \quad (4.191)$$

onde o sinal primo denota d/dz .

Finalmente, vamos analisar o nosso caso de interesse, ou seja, a transição de assinatura $(-, +, +, +)$ para $(-, +, +, -)$ num ponto arbitrário $z = z_0$. Portanto, em termos das funções de Heaviside e delta de Dirac,

$$f(z) = H(-z + z_0) - H(z - z_0), \quad (4.192)$$

$$f'(z) = -2\delta(z - z_0). \quad (4.193)$$

Substituindo as expressões acima na equação (4.191), obtemos

$$\delta(z - z_0) \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d}{dz} \left(f(z) \frac{d\varphi}{dz} \right) = -p^2 \varphi(z). \quad (4.194)$$

Agora, iremos integrar a equação (4.194) ao redor do ponto $z = z_0$, no intervalo $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$, sendo ε um número pequeno. Daí, vem que

$$\frac{\varphi'(z_0^+) + \varphi'(z_0^-)}{2} + \left[f(z) \frac{d\varphi}{dz} \right]_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} = -p^2 \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \varphi dz, \quad (4.195)$$

onde, na integração do primeiro termo do lado esquerdo da equação (4.195), usamos a seguinte propriedade da função delta de Dirac:

$$\varphi'(z) \delta(z - z_0) = \frac{\varphi'(z_0^+) + \varphi'(z_0^-)}{2} \delta(z - z_0). \quad (4.196)$$

No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a expressão (4.195) assume a forma

$$\frac{\varphi'(z_0^+) + \varphi'(z_0^-)}{2} + f(z_0^+) \varphi'(z_0^+) - f(z_0^-) \varphi'(z_0^-) = 0. \quad (4.197)$$

Conforme a própria definição de $f(z)$ em (4.192), então, $f(z_0^+) = -1$ e $f(z_0^-) = +1$. Assim, substituindo essas relações na expressão anterior, vem que

$$\varphi'(z_0^+) = -\varphi'(z_0^-). \quad (4.198)$$

Portanto, a condição de contorno para a derivada $\partial_z \phi$ na junção $z = z_0$ é dada por

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=z_0^+} = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=z_0^-}. \quad (4.199)$$

Para o caso eletrônico, primeiramente é importante ressaltar que, a equação (4.164) só é válida para as metades $z < z_0$ e $z > z_0$ quando analisadas em separado. Uma análise correta [111], exige que o tensor de massa efetiva recíproco $[1/m^*]^{ij}$ atue como um operador. Naturalmente, a forma funcional do operador deve ser tal que o hamiltoniano seja hermitiano e invariante sob transformações de Galileu. No que se segue, adotaremos a forma para o operador $[1/m^*]^{ij}$ proposta em [111]. Porém, salientamos que ela não é definitiva. Como alternativa, outra interessante possibilidade pode ser encontrada em [112]. Dado isso, a parte cinética do hamiltoniano será

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2} \hat{p}_i \left[\frac{1}{m^*} \right]^{ij} \hat{p}_j, \quad (4.200)$$

a partir da qual obtemos a equação de Schrödinger de massa efetiva

$$-\frac{\hbar^2}{2} \partial_i \left(\left[\frac{1}{m^*} \right]^{ij} \partial_j \psi \right) + V\psi = E\psi, \quad (4.201)$$

que claramente se reduz à equação (4.164) caso $[1/m^*]^{ij}$ seja independente da posição.

Em nosso caso de interesse, $[1/m^*]^{ij}$ é diagonal em todo o espaço. Ademais, como a transição (4.179) afeta somente a componente m_{zz} em $z = z_0$, vamos nos concentrar apenas na direção z , considerando uma alteração no valor da massa de m_1 para m_2 em $z = z_0$. Sendo assim,

$$\frac{1}{m(z)} = \frac{1}{m_1} H(-z + z_0) + \frac{1}{m_2} H(z - z_0), \quad (4.202)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{m(z)} \right] = \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \delta(z - z_0). \quad (4.203)$$

Para uma partícula livre ($E > 0$), tomemos o *ansatz* $\psi(\mathbf{x}, z) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} Z(z)$. Donde, substituindo na equação (4.201), resulta em

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{m(z)} \frac{dZ}{dz} \right) = -P^2 Z(z), \quad (4.204)$$

sendo P uma constante de dimensão p/m . Procedendo da mesma maneira como em (4.194), integramos a equação anterior na vizinhança do ponto $z = z_0$, no intervalo $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$. Daí, vem que

$$\left[\frac{1}{m(z)} \frac{dZ}{dz} \right]_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} = -P^2 \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} Z dz. \quad (4.205)$$

Assim, no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$\frac{1}{m_2} Z'(z_0^+) = \frac{1}{m_1} Z'(z_0^-). \quad (4.206)$$

Donde, levando em conta o nosso caso de interesse, ou seja, $m_1 = |m_2|$ e $m_2 = -|m_2|$, obtemos a seguinte condição de contorno para $\partial_z \psi$:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=z_0^+} = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=z_0^-}, \quad (4.207)$$

que é a mesma encontrada em (4.199) para $\partial_z \phi$.

Portanto, uma vez que condições de contorno para φ e ψ são iguais, a analogia entre os sistemas está completa, pois, como discutido na seção 4.2.3, a solução para ambos os problemas possui a mesma forma funcional. Vale ressaltar que, o mesmo resultado para a condição de contorno da derivada $\partial_z \varphi$ pode ser obtido pelo método de extensão auto-adjunta do hamiltoniano [108, 109].

Aplicando a continuidade da função de onda e a relação (4.207) na solução (4.186), obtemos $B = iA$ e $C = (1 + i)A$. Munidos das amplitudes de cada onda em particular, podemos

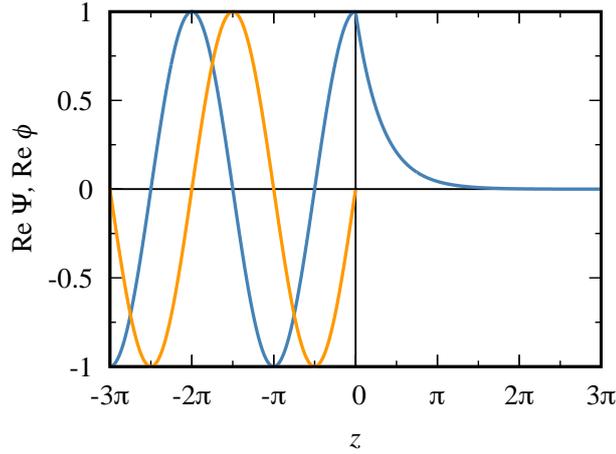


Figura 31 – Comportamento da parte real da função de onda $\Psi(\phi)$ para uma transição de massa efetiva (assinatura) em $z = 0$. A onda incidente (curva azul) é inteiramente refletida (curva laranja) com uma diferença de fase de $3\pi/2$. No gráfico, z está em unidades de p^{-1} .

calcular a corrente de probabilidade $j_z = (\hbar/m) \text{Im}(\psi^* \partial_z \psi)$ associada a cada uma delas. Sendo assim, as correntes de probabilidade incidente, refletida e transmitida serão, respectivamente:

$$j_0 = \frac{\hbar |A|^2}{|m_2|} p, \quad (4.208)$$

$$j_R = -\frac{\hbar |A|^2}{|m_2|} p, \quad (4.209)$$

$$j_T = 0. \quad (4.210)$$

O resultado acima é esperado, pois na solução (4.186) temos apenas a onda evanescente para $z > z_0$. Naturalmente, o mesmo também se concretiza na transição de assinatura simples entre $(-, +, +, +)$ e $(-, +, +, -)$, haja vista termos as mesmas condições de contorno. Além disso, podemos concluir que o coeficiente de reflexão $R = |j_R/j_0| = 1$, é máximo. Logo, a onda é totalmente refletida, mas com uma diferença de fase de $3\pi/2$ em relação à onda incidente (veja a Figura 31), uma vez que

$$\psi_{\text{refletida}} = B e^{-ipz} = i A e^{-ipz} = A e^{-i(pz+3\pi/2)}. \quad (4.211)$$

Esse resultado é análogo ao caso óptico do fenômeno da reflexão em espelhos semi-refletores e sem perdas (isto é, isentos de absorção) [113]. Assim, a junção atua como uma espécie de espelho para as correntes de probabilidade eletrônicas.

4.2.5 Tunelamento pelo Interior de uma Parede Kleiniana

Retornamos agora ao problema inicial da seção 4.139, ou seja, o tunelamento através de uma região kleiniana do espaço-tempo. Então, considere um semiconductor de massa efetiva negativa e cujo comprimento na dimensão z é l , cercado por dois semicondutores dotados de massa efetiva positiva, nos pontos $z = 0$ e $z = l$. O tensor métrico contravariante efetivo g^{ij} para

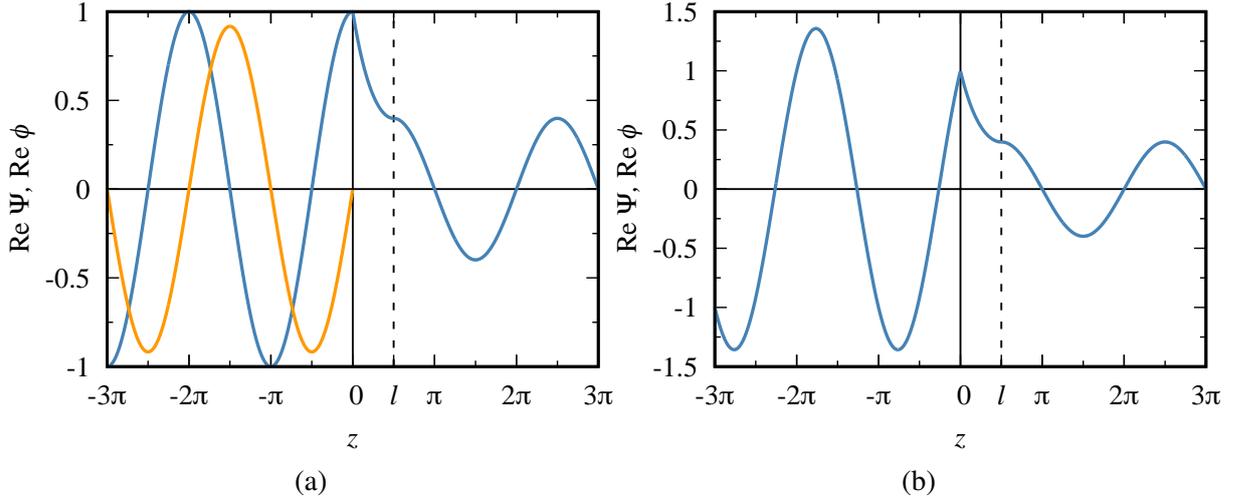


Figura 32 – (a) Tunelamento da parte real da função de onda $\Psi(\phi)$ pelo interior do metamaterial eletrônico (espaço-tempo kleiniano) de extensão l : comparando com a Figura 29, vemos que as ondas refletidas (curvas laranjas) apresentam uma diferença de fase de π . (b) Gráfico da função de onda total, ilustrando o “bico” em $z = 0$. Em ambos os gráficos, z está em unidades de p^{-1} .

tal configuração é

$$g^{ij} = \begin{cases} \text{diag}(+, +, +), & \text{se } z < 0. \\ \text{diag}(+, +, -), & \text{se } 0 < z < l. \\ \text{diag}(+, +, +), & \text{se } z > l. \end{cases} \quad (4.212)$$

De acordo com as seções 4.2.1 e 4.2.3, podemos expressar a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo, $\Psi(\mathbf{x}, z, t)$, da forma

$$\Psi(\mathbf{x}, z, t) = e^{i(\kappa \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \begin{cases} e^{ipz} + Ae^{-ipz}, & \text{se } z < 0. \\ Be^{pz} + Ce^{-pz}, & \text{se } 0 < z < l. \\ De^{ipz}, & \text{se } z > l. \end{cases} \quad (4.213)$$

Aplicando a continuidade de Ψ e a equação (4.207) para $\partial_z \Psi$ nos pontos $z = 0$ e $z = l$, obtemos

$$A = i \operatorname{tgh}(pl), \quad (4.214)$$

$$B = \left(\frac{1-i}{2} \right) \frac{e^{-pl}}{\cosh(pl)}, \quad (4.215)$$

$$C = \left(\frac{1+i}{2} \right) \frac{e^{pl}}{\cosh(pl)}, \quad (4.216)$$

$$D = \frac{e^{-ipl}}{\cosh(pl)}. \quad (4.217)$$

Como se pode notar, exceto por alguns pormenores, as equações (4.214)–(4.217) assemelham-se bastante com as expressões (4.149)–(4.152). As diferenças surgem por causa da descontinuidade de $\partial_z \Psi$ nas interfaces, expressa pela relação (4.207), cujo o efeito é ajustar de um ângulo π a fase da onda refletida, produzindo um “bico” na função de onda em $z = 0$ (veja a Figura 32).

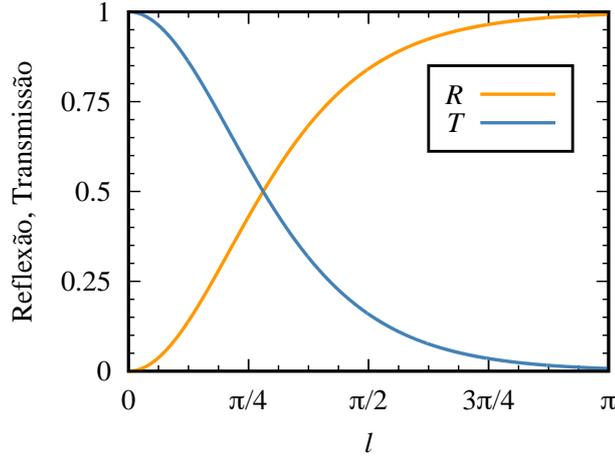


Figura 33 – Gráfico ilustrando os coeficiente de reflexão (R) e transmissão T como funções do comprimento da parede, l (em unidades de p^{-1}). Como é possível constatar, a corrente de probabilidade é conservada.

Todavia, apesar dessas diferenças, as principais propriedades físicas permanecem as mesmas. Por exemplo, calculando as correntes j_0 , j_R e j_T , temos

$$j_0 = \frac{\hbar p}{|m_2|}, \quad (4.218)$$

$$j_R = -\frac{\hbar p}{|m_2|} \operatorname{tgh}^2(pl), \quad (4.219)$$

$$j_T = \frac{\hbar p}{|m_2|} \operatorname{sech}^2(pl), \quad (4.220)$$

donde vemos explicitamente que $j_0 + j_R = j_T$, confirmando a conservação da corrente de probabilidade. Ademais, os coeficientes de reflexão e transmissão são dados, respectivamente, por

$$R = \frac{|j_R|}{|j_0|} = \operatorname{tgh}^2(pl), \quad (4.221)$$

$$T = \frac{|j_T|}{|j_0|} = \operatorname{sech}^2(pl). \quad (4.222)$$

Ainda, sua dependência com a extensão da parede, l , está ilustrada na Figura 33.

Conforme já mencionado, a solução (4.148) para o campo escalar ϕ no problema original possui a mesma forma que (4.213). Além disso, as condições de contorno (4.199) e (4.207) são equivalentes. Logo, os coeficientes de ϕ em (4.148) são necessariamente expressos pelas equações (4.214)–(4.217). Diante disso, o gráfico de ϕ é o mesmo de Ψ , ilustrado pela Figura 32.

Por fim, analisemos o tempo de transição Δt transcorrido no processo de tunelamento, em ambos os casos. Sendo assim, por definição,

$$\Delta t = \int_0^l \frac{dz}{v_g(z)}, \quad (4.223)$$

onde $v_g(z) \equiv j_z/\rho$ é a velocidade de grupo da onda e ρ é a densidade de probabilidade. A corrente j_z é expressa da mesma forma tanto para Ψ quanto para ϕ . Todavia, o mesmo não ocorre

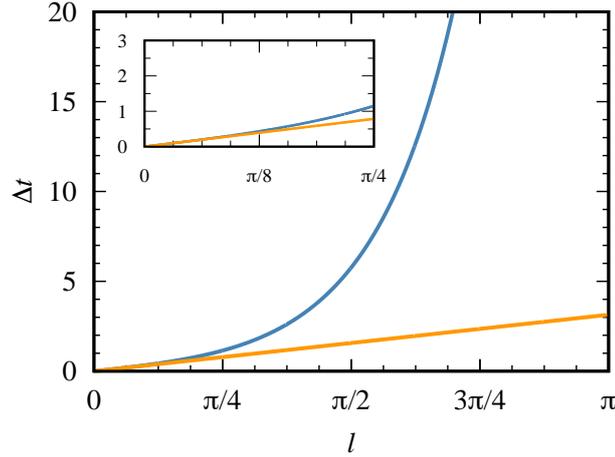


Figura 34 – Tempo de tunelamento dos elétrons balísticos (campo escalar) como função do comprimento da parede (espaço-tempo kleiniano), l (em unidades de p^{-1}). A curva azul ilustra o comportamento das funções (4.226) e (4.228). A curva laranja corresponde ao caso em que a parede (espaço-tempo kleiniano) está ausente, onde v_g é dada por $\hbar p/|m_2|$ para os elétrons balísticos e pc^2/ω para o campo ϕ . No gráfico, l está em unidades de p^{-1} e Δt em unidades de $|m_2|/\hbar p^2$.

com ρ , pois, para o campo escalar ϕ , temos [114]

$$\rho = -\frac{\hbar}{mc^2} \text{Im} (\phi^* \partial_t \phi). \quad (4.224)$$

Portanto, combinando as equações (4.215), (4.216) e (4.220), resulta em

$$v_g(z) = \frac{pc^2}{\omega} \text{sech} [2p(z-l)]. \quad (4.225)$$

Donde, substituindo na integral (4.223), e, resolvendo uma integração trigonométrica trivial, vem que

$$\Delta t_{KG} = \frac{\omega}{2p^2 c^2} \sinh(2pl). \quad (4.226)$$

No que concerne aos elétrons balísticos, $\rho = \Psi\Psi^*$. Assim, pelo mesmo procedimento, ou seja, por meio das equações (4.215), (4.216) e (4.220), obtemos

$$v_g(z) = \frac{\hbar p}{|m_2|} \text{sech} [2p(z-l)]. \quad (4.227)$$

A expressão anterior para a velocidade é essencialmente a mesma obtida no caso do campo de Klein-Gordon, com exceção da constante multiplicativa. Logo, o resultado da integral (4.223) será

$$\Delta t_{EB} = \frac{|m_2|}{2\hbar p^2} \sinh(2pl). \quad (4.228)$$

A dependência de Δt com a extensão da parede l está ilustrada na Figura 34. Comparando as equações (4.226) e (4.228), podemos concluir que é possível estabelecer uma conexão entre Δt_{KG} e Δt_{BE} , mediante $\omega/p^2 c^2 \leftrightarrow |m_2|/\hbar p^2$, ou mesmo $\hbar\omega \leftrightarrow |m_2| c^2$. Essa correspondência, provê uma ligação numérica entre os dois sistemas, permitindo que experimentos no caso eletrônico tenham análogos no espaço-tempo kleiniano, sendo a recíproca também verdadeira.

5 CONCLUSÃO

Naturalmente, qualquer obra sobre modelos gravitacionais e cosmológicos análogos, deve efetuar uma correspondência entre a gravitação e um outro campo de estudo. Além disso, para que a analogia seja produtiva, é necessário que ambos os sistemas, sobre os quais o elo é estabelecido, sejam compreendidos separadamente em suas respectivas áreas. No caso deste trabalho, através do estudo em metamateriais, duas analogias com a gravitação e a cosmologia foram contempladas, sendo elas: a correspondência entre o universo de Milne compacto e os metamateriais hiperbólicos, e a correlação entre o espaço-tempo kleiniano e os metamateriais eletrônicos. Porém, para que tal fim fosse atingido, e, ao mesmo tempo, com o intuito de manter a autossuficiência da obra, primeiramente explanamos os fundamentos teóricos referentes a cada uma das áreas envolvidas em separado, procurando mostrar o máximo de clareza nos tópicos principais.

Na introdução, iniciamos com uma breve discussão salientando a importância do campo de pesquisa da gravidade análoga. Em seguida, apresentamos o conceito de metamaterial e dissertamos sobre o seu surgimento e estágios iniciais de evolução. Por fim, introduzimos a classe de metamateriais abordados por este trabalho, a dos metamateriais hiperbólicos.

O capítulo 2 foi inteiramente dedicado à relatividade e à cosmologia. Partindo dos postulados da relatividade especial, discorremos sobre os principais aspectos da teoria, tanto do ponto de vista cinemático quanto do dinâmico. Salientamos a importância da seção 2.1.5, sobre dinâmica da partícula, onde utilizamos o princípio da mínima ação. A relatividade geral teve como ponto de partida o princípio da equivalência, sucedido pelo princípio da covariância geral, onde este último constitui um tópico importante, pois várias expressões da relatividade especial são apresentadas em sua forma generalizada. Após isso, tratamos de temas clássicos da teoria, dos quais destacamos a seção 2.2.6, acerca das equações de Einstein, e a seção 2.2.7 sobre o sistema de coordenadas gaussiano, utilizado em cosmologia. Seguindo, exploramos a cosmologia FRW, cujo objetivo era apresentar o universo de Milne, exposto na seção 2.3.4. Todavia, para a total compreensão desse tópico, o conteúdo exposto nas seções anteriores, ou seja, 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, é indispensável.

No capítulo 3, tratamos da óptica em meios anisotrópicos e dos metamateriais hiperbólicos. Primeiramente, analisamos as características das equações de Maxwell em cristais anisotrópicos através da solução de ondas planas, donde originaram os conceitos de onda ordinária e extraordinária. Após isso, nas seções 3.1.3 e 3.1.4, obtivemos um modelo geométrico para a propagação da luz, o qual está associado a uma métrica efetiva num espaço virtual. Pelo fato de as células unitárias dos metamateriais hiperbólicos serem compostas por meios dielétricos e condutores, é necessário entender como é o comportamento isolado desses materiais na presença de campos eletromagnéticos, o que é explanado ao longo da seção 3.2. Por fim, na seção 3.3, os metamateriais hiperbólicos são apresentados. Para os propósitos deste trabalho, convém

destacarmos a analogia entre um meio hiperbólico e o espaço-tempo de Minkowski em $2 + 1$ dimensões, exposta na seção 3.3.1, e também as estruturas mais utilizadas na construção dos metamateriais hiperbólicos, abordadas nos tópicos 3.3.2.1 e 3.3.2.2.

No capítulo 4, dedicado às aplicações e resultados, combinamos os assuntos tratados nos capítulos 2 e 3. Como primeira aplicação, propomos um modelo de metamaterial capaz de simular uma versão compacta do universo de Milne, onde este representa o protótipo mais simples de singularidade cósmica em modelos cosmológicos cíclicos. Em outras palavras, retrata um espaço-tempo capaz de descrever uma transição entre um colapso (*Big-Crunch*) e uma “explosão” (*Big-Bang*). Assim, mostramos que no \mathcal{M}_C , tanto partículas de Klein-Gordon quanto táquions possuem características análogas com a propagação da luz em meios hiperbólicos. No domínio da óptica geométrica, apontamos que as trajetórias clássicas dessas partículas estão em perfeito acordo com as trajetórias descritas pelos raios luminosos no metamaterial. No que concerne ao comportamento quântico, isto é, o campo escalar de Klein-Gordon, o mesmo pode ser obtido através de um estudo em óptica ondulatória. Ainda sobre este último caso, salientamos que é possível atenuar o problema da singularidade, engenhando um material cujas componentes do tensor dielétrico sejam funções da coordenada radial r . Diante disso, o modelo apresentado fornece a possibilidade de constatar, experimentalmente, não apenas as trajetórias mas também a falta de correlação entre as funções de onda em lados distintos da singularidade cósmica. Como perspectiva, outros resultados teóricos podem ser obtidos mediante uma análise de espalhamento na singularidade pelo método de decomposição em ondas parciais [60].

Na segunda aplicação, de modo similar a [106], estudamos o tunelamento de elétrons balísticos através de uma parede constituída de um metamaterial eletrônico, isto é, um semicondutor dotado de massa efetiva negativa. Além disso, apontamos que no caso de um metamaterial eletrônico anisotrópico, o tensor de massa efetiva recíproco deve ser tratado como um operador. Esse fato se mostrou importante, pois a partir dele obtivemos as condições de contorno apropriadas nas interfaces. Obtendo a solução da equação de Schrödinger, vimos que o comportamento da função de onda é o mesmo que o de um campo escalar de Klein-Gordon, numa transição de assinatura entre uma região lorentziana e uma região kleiniana do espaço-tempo. Onde concluímos que, para simular o comportamento de uma partícula de Klein-Gordon numa região kleiniana, devemos escolher ou um material com massa efetiva eletrônica negativa e $(E - V > 0)$ ou um material com massa efetiva positiva e $(E - V < 0)$. Finalmente, calculamos o tempo total de tunelamento dos elétrons balísticos (campo escalar) através do metamaterial eletrônico (região kleiniana), constatando que os dois casos diferem somente por uma constante multiplicativa. Sendo assim, extraímos um elo numérico entre ambos os sistemas, tornando possível a ligação entre o experimento e o resultado teórico do problema original.

REFERÊNCIAS

- 1 SMITH, D. R.; PADILLA, W. J.; VIER, D.; NEMAT-NASSER, S. C.; SCHULTZ, S. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 84, n. 18, p. 4184, 2000.
- 2 VESELAGO, V. G. Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . **Soviet Physics Uspekhi**, IOP Publishing, v. 10, n. 4, p. 504, 1968.
- 3 LIU, Y.; ZHANG, X. Metamaterials: a new frontier of science and technology. **Chemical Society Reviews**, Royal Society of Chemistry, v. 40, n. 5, p. 2494, 2011.
- 4 PENDRY, J. B. Negative refraction makes a perfect lens. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 85, n. 18, p. 3966, 2000.
- 5 MILTON, G. W.; NICOROVICI, N.-A. P.; MCPHEDRAN, R. C.; PODOLSKIY, V. A. A proof of superlensing in the quasistatic regime, and limitations of superlenses in this regime due to anomalous localized resonance. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 461, n. 2064, p. 3999–4034, 2005.
- 6 JACOB, Z.; ALEKSEYEV, L. V.; NARIMANOV, E. Optical hyperlens: far-field imaging beyond the diffraction limit. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 14, n. 18, p. 8247, 2006.
- 7 PENDRY, J. B.; SCHURIG, D.; SMITH, D. R. Controlling electromagnetic fields. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 312, n. 5781, p. 1780, 2006.
- 8 SCHURIG, D.; MOCK, J.; JUSTICE, B.; CUMMER, S. A.; PENDRY, J. B.; STARR, A.; SMITH, D. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 314, n. 5801, p. 977, 2006.
- 9 KABASHIN, A.; EVANS, P.; PASTKOVSKY, S.; HENDREN, W.; WURTZ, G.; ATKINSON, R.; POLLARD, R.; PODOLSKIY, V.; ZAYATS, A. Plasmonic nanorod metamaterials for biosensing. **Nature Materials**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 11, p. 867, 2009.
- 10 GOVYADINOV, A. A.; PODOLSKIY, V. A. Metamaterial photonic funnels for subdiffraction light compression and propagation. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 73, n. 15, p. 155108, 2006.
- 11 CAI, W.; SHALAEV, V. **Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2010.
- 12 STAVENGA, D. Invertebrate superposition eyes-structures that behave like metamaterial with negative refractive index. **Journal of the European Optical Society - Rapid Publications**, Springer, v. 1, 2006.
- 13 JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1999.
- 14 PAULI, W.; ENZ, C. P. **Optics and the Theory of Electrons**. Nova Iorque: Dover Publications, 2000.

- 15 REYES-GÓMEZ, E.; CAVALCANTI, S. B.; OLIVEIRA, L. E.; CARVALHO, C. A. A. de. Metric-signature topological transitions in dispersive metamaterials. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 89, n. 3, p. 033202, 2014.
- 16 LEONHARDT, U.; PHILBIN, T. **Geometry and Light: The Science of Invisibility**. Mineola, Nova Iorque: Dover Publications, 2010.
- 17 THOMPSON, R. T.; FRAUENDIENER, J. Dielectric analog space-times. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 82, n. 12, p. 124021–124028, 2010.
- 18 MACKAY, T. G.; LAKHTAKIA, A. Metamaterial models of curved spacetime. In: **METAMATERIALS, METADEVICES, AND METASYSTEMS 2015**, 2015, San Diego, Califórnia. **Proceedings of SPIE Vol. 9544**. Bellingham, Washington: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2015. v. 9544, p. 95442K–1–95442K–8.
- 19 BOSTON, S. R. Time travel in transformation optics: metamaterials with closed null geodesics. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 91, p. 124035, 2015.
- 20 MACKAY, T. G.; LAKHTAKIA, A. Towards a metamaterial simulation of a spinning cosmic string. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 374, n. 23, p. 2305, 2010.
- 21 GENOV, D. A.; ZHANG, S.; ZHANG, X. Mimicking celestial mechanics in metamaterials. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 5, n. 9, p. 687, 2009.
- 22 ISABEL, F.-N. n.; BULASHENKO, O. Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 380, n. 1–2, p. 1–8, 2016.
- 23 CHEN, H.; MIAO, R.-X.; LI, M. Transformation optics that mimics the system outside a schwarzschild black hole. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 18, n. 14, p. 15183, 2010.
- 24 GREENLEAF, A.; KURYLEV, Y.; LASSAS, M.; UHLMANN, G. Electromagnetic wormholes and virtual magnetic monopoles from metamaterials. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 99, n. 18, p. 183901, 2007.
- 25 PODDUBNY, A.; IORSH, I.; BELOV, P.; KIVSHAR, Y. Hyperbolic metamaterials. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 12, p. 948, 2013.
- 26 SHEKHAR, P.; ATKINSON, J.; JACOB, Z. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications. **Nano Convergence**, Springer, v. 1, n. 1, p. 1–14, 2014.
- 27 LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H.; SOMMERFELD, A. **The Principle of Relativity: a Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity**. Nova Iorque: Dover Publications, 1952.
- 28 EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik**, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905.
- 29 RINDLER, W. **Introduction to Special Relativity**. Nova Iorque: Oxford University Press, 1982.
- 30 GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. Nova Delhi: Narosa Publishing House, 2000.
- 31 CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- 32 LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Curso de Física: Teoria do Campo**. São Paulo: Editora Hemus, 2004.
- 33 WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1972.
- 34 LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- 35 NETO, J. B. **Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.
- 36 ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1988. v. 60.
- 37 SOPER, D. E. **Classical Field Theory**. Mineola, Nova Iorque: Dover Publications, 2008.
- 38 LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Curso de Física: Mecânica**. São Paulo: Editora Hemus, 2004.
- 39 HUGHSTON, L. P.; TOD, K. P. **An Introduction to General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- 40 EINSTEIN, A. The foundation of the general theory of relativity. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.
- 41 SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996.
- 42 D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Nova Iorque: Oxford University Press, 1992.
- 43 PADMANABHAN, T. **Gravitation: Foundations and Frontiers**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2010.
- 44 COOK, R. J. Physical time and physical space in general relativity. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 72, n. 2, p. 214, 2004.
- 45 LAW DEN, D. F. **Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology**. Mineola, Nova Iorque: Dover Publications, 2002.
- 46 BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Harbra, 1986.
- 47 SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2009.
- 48 FOSTER, J. A.; NIGHTINGALE, J. D. **A Short Course in General Relativity**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2010.
- 49 HENRIQUES, A. B. **Teoria da Relatividade Geral, Uma Introdução**. Lisboa: IST Press, 2015.
- 50 RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. São Francisco: Cambridge University Press, 2016.
- 51 MILNE, E. A. **Relativity, Gravitation, and World Structure**. Oxford: Clarendon Press, 1935.

- 52 GRØN, Ø.; HERVIK, S. **Einstein's General Theory of Relativity: with Modern Applications in Cosmology**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2007.
- 53 BORN, M.; WOLF, E. **Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- 54 KLEMAN, M.; LAVRETOVICH, O. D. **Soft Matter Physics: an Introduction**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2007.
- 55 ASANOV, G. S. **Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories**. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company, 1985.
- 56 JOETS, A.; RIBOTTA, R. A geometrical model for the propagation of rays in an anisotropic inhomogeneous medium. **Optics Communications**, Elsevier, v. 107, n. 3–4, p. 200, 1994.
- 57 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. São Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- 58 SÁTIRO, C.; MORAES, F. Lensing effects in a nematic liquid crystal with topological defects. **The European Physical Journal E**, Springer, v. 20, n. 2, p. 173–178, 2006.
- 59 SÁTIRO, C.; MORAES, F. On the deflection of light by topological defects in nematic liquid crystals. **The European Physical Journal E**, Springer, v. 25, n. 4, p. 425–429, 2008.
- 60 PEREIRA, E.; MORAES, F. Diffraction of light by topological defects in liquid crystals. **Liquid Crystals**, Taylor & Francis, v. 38, n. 3, p. 295, 2011.
- 61 XIANG, J.; LAVRETOVICH, O. D. Liquid crystal structures for transformation optics. **Molecular Crystals and Liquid Crystals**, Taylor & Francis, v. 559, n. 1, p. 106–114, 2012.
- 62 REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.
- 63 FOWLES, G. R. **Introduction to Modern Optics**. Nova Iorque: Dover Publications, 1989.
- 64 OLIVEIRA, I. S.; JESUS, V. L. B. D. **Introdução à Física do Estado Sólido**. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2005.
- 65 KORZEB, K.; GAJC, M.; PAWLAK, D. A. Compendium of natural hyperbolic materials. **Optics express**, Optical Society of America, v. 23, n. 20, p. 25406, 2015.
- 66 NARIMANOV, E. E.; KILDISHEV, A. V. Metamaterials: naturally hyperbolic. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 4, p. 214, 2015.
- 67 JACOB, Z.; ALEKSEYEV, L. V.; NARIMANOV, E. Semiclassical theory of the hyperlens. **Journal of the Optical Society of America A**, Optical Society of America, v. 24, n. 10, p. A52–A59, 2007.
- 68 NOGINOV, M.; LAPINE, M.; PODOLSKIY, V.; KIVSHAR, Y. Focus issue: hyperbolic metamaterials. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 21, n. 12, p. 14895, 2013.
- 69 SMOLYANINOV, I. I.; NARIMANOV, E. E. Metric signature transitions in optical metamaterials. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 105, n. 6, p. 067402, 2010.

- 70 SMOLYANINOV, I. I.; HUNG, Y. J. Modeling of time with metamaterials. **Journal of the Optical Society of America B**, Optical Society of America, v. 28, n. 7, p. 1591, 2011.
- 71 SMOLYANINOV, I. I.; HUNG, Y.-J.; HWANG, E. Experimental modeling of cosmological inflation with metamaterials. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 376, n. 38–39, p. 2575, 2012.
- 72 SMOLYANINOV, I. I.; HWANG, E.; NARIMANOV, E. Hyperbolic metamaterial interfaces: Hawking radiation from rindler horizons and spacetime signature transitions. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 85, n. 23, p. 235122, 2012.
- 73 SMOLYANINOV, I. I.; HUNG, Y.-J. Minkowski domain walls in hyperbolic metamaterials. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 377, n. 5, p. 353–356, 2013.
- 74 FEINBERG, G. Possibility of faster-than-light particles. **Physical Review**, American Physical Society, v. 159, p. 1089–1105, 1967.
- 75 FIGUEIREDO, D.; GOMES, F. A.; FUMERON, S.; BERCHE, B.; MORAES, F. Modeling kleinian cosmology with electronic metamaterials. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 94, n. 4, p. 044039, 2016.
- 76 ALTY, L. J. Kleinian signature change. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 11, n. 10, p. 2523, 1994.
- 77 FERRARI, L.; WU, C.; LEPAGE, D.; ZHANG, X.; LIU, Z. Hyperbolic metamaterials and their applications. **Progress in Quantum Electronics**, Elsevier, v. 40, p. 1–40, 2015.
- 78 MARKEL, V. A. Introduction to the maxwell garnett approximation: tutorial. **Journal of the Optical Society of America A**, Optical Society of America, v. 33, n. 7, p. 1244, 2016.
- 79 SMOLYANINOV, I. I. **Hyperbolic Metamaterials**. São Rafael, Califórnia: Morgan & Claypool Publishers, 2018.
- 80 JACOB, Z.; SMOLYANINOV, I. I.; NARIMANOV, E. E. Broadband purcell effect: radiative decay engineering with metamaterials. **Applied Physics Letters**, AIP Publishing, v. 100, n. 18, p. 181105, 2012.
- 81 CAI, W.; CHETTIAR, U. K.; KILDISHEV, A. V.; SHALAEV, V. M. Designs for optical cloaking with high-order transformations. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 16, n. 8, p. 5444, 2008.
- 82 RAMAKRISHNA, S. A.; PENDRY, J.; WILTSHIRE, M.; STEWART, W. Imaging the near field. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 50, n. 9, p. 1419, 2003.
- 83 BELOV, P. A.; HAO, Y. Subwavelength imaging at optical frequencies using a transmission device formed by a periodic layered metal-dielectric structure operating in the canalization regime. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 73, n. 11, p. 113110, 2006.
- 84 LIU, Z.; LEE, H.; XIONG, Y.; SUN, C.; ZHANG, X. Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 315, n. 5819, p. 1686, 2007.
- 85 PENDRY, J. B.; HOLDEN, A.; STEWART, W.; YOUNGS, I. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 76, n. 25, p. 4773, 1996.

- 86 STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. **Endless Universe: Beyond the Big Bang**. Nova Iorque: Doubleday, 2007.
- 87 STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. Cosmic evolution in a cyclic universe. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 65, n. 12, p. 126003, 2002.
- 88 KHOURY, J.; OVRUT, B. A.; SEIBERG, N.; STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. From big crunch to big bang. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 65, n. 8, p. 086007, 2002.
- 89 MAŁKIEWICZ, P.; PIECHOCKI, W. A simple model of big-crunch/big-bang transition. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 23, n. 9, p. 2963, 2006.
- 90 MAŁKIEWICZ, P.; PIECHOCKI, W. Probing the cosmological singularity with a particle. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 23, n. 23, p. 7045, 2006.
- 91 BAULIEU, L.; BOER, J. de; PIOLINE, B.; RABINOVICI, E. **Proceedings of the NATO Advanced Institute on String Theory: from Gauge Interactions to Cosmology**. Dordrecht, Holanda: Springer Science & Business Media, 2006. v. 208.
- 92 LAWRENCE, J. D. **A Catalog of Special Plane Curves**. Nova Iorque: Dover Publications, 2014.
- 93 KOWALSKI, K.; REMBIELIŃSKI, J. On the dynamics of a particle on a cone. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 329, p. 146–157, 2013.
- 94 MAŁKIEWICZ, P.; PIECHOCKI, W. A toy model of the cosmic singularity. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific Publishing Company, v. 4, n. 2, p. 305, 2007.
- 95 SCHWARTZ, C. Tachyons in general relativity. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 52, n. 5, p. 052501, 2011.
- 96 FIGUEIREDO, D.; MORAES, F.; FUMERON, S.; BERCHE, B. Cosmology in the laboratory: An analogy between hyperbolic metamaterials and the milne universe. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 96, n. 10, p. 105012, 2017.
- 97 FUMERON, S.; BERCHE, B.; SANTOS, F.; PEREIRA, E.; MORAES, F. Optics near a hyperbolic defect. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 92, n. 6, p. 063806, 2015.
- 98 PRATAP, D.; RAMAKRISHNA, S. A.; POLLOCK, J. G.; IYER, A. K. Anisotropic metamaterial optical fibers. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 23, n. 7, p. 9074, 2015.
- 99 DUNSTER, T. Bessel functions of purely imaginary order, with an application to second-order linear differential equations having a large parameter. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 21, n. 4, p. 995, 1990.
- 100 OLVER, F. W.; LOZIER, D. W.; BOISVERT, R. F.; CLARK, C. W. **NIST Handbook of Mathematical Functions**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2010.
- 101 PRUGOVECKI, E. **Quantum Mechanics in Hilbert Space**. Nova Iorque: Academic Press, 1982. v. 92.

- 102 TOLLEY, A. J.; TUROK, N. Quantum fields in a big-crunch–big-bang spacetime. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 66, n. 10, p. 106005–106020, 2002.
- 103 HAWKING, S. W. **The Universe in a Nutshell**. Nova Iorque: Bantam, 2001.
- 104 HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave function of the universe. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 28, n. 12, p. 2960, 1983.
- 105 SAKHAROV, A. D. Cosmological transitions with changes in the signature of the metric. **Soviet Physics Uspekhi**, IOP Publishing, v. 34, n. 5, p. 409, 1991.
- 106 DRAGOMAN, D.; DRAGOMAN, M. Metamaterials for ballistic electrons. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 101, n. 10, p. 104316, 2007.
- 107 FLEURY, R.; ALÛ, A. Manipulation of electron flow using near-zero index semiconductor metamaterials. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 90, n. 3, p. 035138, 2014.
- 108 EGUSQUIZA, I. Self-adjoint extensions and signature change. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 12, n. 9, p. L89, 1995.
- 109 ALTY, L.; FEWSTER, C. J. Initial-value problems and signature change. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 13, n. 5, p. 1129, 1996.
- 110 KITTEL, C. **Introduction to Solid State Physics**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2004.
- 111 LEVY-LEBLOND, J.-M. Position-dependent effective mass and galilean invariance. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 52, n. 3, p. 1845, 1995.
- 112 LIMA, J. R.; VIEIRA, M.; FURTADO, C.; MORAES, F.; FILGUEIRAS, C. Yet another position-dependent mass quantum model. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 53, n. 7, p. 072101, 2012.
- 113 DEGIORGIO, V. Phase shift between the transmitted and the reflected optical fields of a semireflecting lossless mirror is $\pi/2$. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 48, n. 1, p. 81, 1980.
- 114 BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. Dubuque, Iowa: McGraw-Hill, 1965.