



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

O Problema na Medida da Massa do Próton no Contexto de Dimensões Extras

Victor Rodrigues Gonçalves

Dissertação de Mestrado

JOÃO PESSOA

- 2018 -



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

O Problema na Medida da Massa do Próton no Contexto de Dimensões Extras

Victor Rodrigues Gonçalves

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

JOÃO PESSOA

- 2018 -

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G635p Gonçalves, Victor Rodrigues.

O Problema na Medida da Massa do Próton no Contexto de Dimensões Extras / Victor Rodrigues Gonçalves. - João Pessoa, 2018.

69 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. dimensões extras. 2. brana. 3. espectroscopia. 4. problema da massa do próton. I. Dahia, Fábio Leal de Melo. II. Título.

UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Victor
Rodrigues Gonçalves**, candidato ao Título de
Mestre em Física na Área de Concentração
Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e sete dias do mês de julho do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Victor Rodrigues Gonçalves**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Fábio Leal de Melo Dahia (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB) e Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Leal de Melo Dahia comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*O problema da medida da massa do próton no contexto de dimensões extras*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **27 de julho de 2018**.

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG



Dedico à minha família.

Agradecimentos

A Deus, por sempre me dar forças para continuar minha jornada e sempre proteger minha família.

À Universidade Federal da Paraíba e a CAPES, por tornarem possível a realização do meu curso de Mestrado, através da estrutura oferecida e o financiamento das bolsas.

Ao meu orientador Fábio Dahia, pela orientação e por toda a atenção que me deu sempre que o procurei.

À minha família por sempre me apoiar em tudo que quis fazer, especialmente a minha mãe Iracema Lisboa Rodrigues, que nunca mediu esforços para não me faltar nada.

À minha namorada Wislhyane Moniky Lopes de Oliveira, por todo apoio, torcida e compreensão que me deu durante o curso.

A todos os meus amigos e colegas, que sempre me ajudaram durante o curso e na realização deste trabalho, direta ou indiretamente. Especialmente ao Adiel Lêmos, que me ajudou a utilizar os programas para a realização deste trabalho.

Por fim, a todos que possam ter contribuído para minha formação de alguma maneira.

Resumo

Em um experimento recente, para medir a massa do próton, foi obtido um valor três vezes mais preciso do que o valor recomendado pelo CODATA. Porém, os valores são incompatíveis, sendo a diferença entre eles três vezes maior do que o desvio padrão da medida mais recente. Observamos que esta diferença não tem nenhuma explicação na física convencional. Nesta dissertação, então, investigamos a discrepância entre esses dois valores da massa do próton no contexto das teorias de dimensões extras. Para isso, fizemos uma breve revisão sobre a teoria de Kaluza-Klein e do modelo ADD de dimensões extras, proposto por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali, comentando acerca de como o potencial gravitacional é alterado pela possível existência de um universo com dimensões suplementares e como isso afetaria a espectroscopia de sistemas atômicos. Em seguida, falamos sobre os experimentos que medem a massa das partículas, através da armadilha de Penning, e discutimos a possibilidade de que correções da energia potencial gravitacional associadas a dimensões extras propiciem um melhor entendimento para o problema da massa do próton.

Palavras-chave: dimensões extras, brana, espectroscopia, problema da massa do próton.

Abstract

In a recent experiment to measure the mass of the proton, it was obtained a value three times more accurate than the value recommended by CODATA. However, the values are incompatible, with the difference between them being three times greater than the standard deviation of the most recent measure. This difference has no explanation in the standard physics. In this work, we investigate the discrepancy between these two values of proton mass in the context of the extra dimensional theories. With this goal, we did a brief review of the Kaluza-Klein theory and the ADD model of extra dimensions, proposed by Arkani-Hamed, Dimopoulos and Dvali and study the modifications on the gravitational potential caused by the existence of additional dimensions. We also discuss the effects of the extra dimensions on the spectroscopy of atomic systems. We then describe the experiments that measure the mass of the particles through Penning's trap and discuss the possibility that corrections of gravitational potential energy associated with extra dimensions provide a better understanding for the proton mass problem.

Keywords: extra dimensions, braneworld, spectroscopy, proton mass problem.

Lista de Figuras

2.1	Esquema da dimensão extra compactada. As quatro dimensões espaciais formariam um hipercilindro, sendo as três dimensões usuais (x^1, x^2, x^3) infinitas, e a dimensão extra (z) um círculo de raio R	8
2.2	Linhas do campo gravitacional tendo acesso ao espaço suplementar, enquanto os demais campos estão confinados à brana. (Adaptado de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali, 2000)	12
2.3	Forma do potencial escalar, dado pela equação 2.20.	13
2.4	Forma da solução do tipo parede de domínio.	13
2.5	Distribuição da densidade de energia da brana.	14
3.1	Esquema das linhas do campo gravitacional, gerado pela partícula m , que chegam ao ponto de observação P_{obs} , o qual está a uma distância r . Do lado esquerdo de uma perspectiva compacta, e do lado direito de uma perspectiva não compacta.	19
3.2	Hipersuperfície Gaussiana envolvendo a linha contínua de massas imagens.	23
4.1	Desenho da estrutura de uma armadilha de Penning (Gabrielse e Dehmelt, 1985).	32
4.2	Representação das linhas do campo elétrico e magnéticos no interior da armadilha de Penning (Brown e Gabrielse, 1986).	32
4.3	Órbita de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning. A pequena circunferência indica o movimento ciclotron, enquanto a linha tracejada indica o deslocamento magnetron e a linha restante, mais espessa, é a oscilação axial (Brown e Gabrielse, 1986).	33

Conteúdo

Lista de Figuras

1	Introdução	1
2	Revisão dos Modelos de Kaluza-Klein e ADD	6
2.1	Teoria de Kaluza-Klein	6
2.1.1	Teoria sem Compactação	6
2.1.2	Compactação de Klein	8
2.2	Modelo ADD	11
2.2.1	Confinamento da Matéria	12
2.2.2	Confinamento de Férmions	15
3	Potencial Gravitacional e Espectroscopia em Dimensões Extras	18
3.1	O Potencial Gravitacional	18
3.1.1	Distâncias Muito Menores que R	19
3.1.2	Distâncias Muito Maiores que R	22
3.1.3	Correção da Lei do Inverso do Quadrado para Longas Distâncias .	25
3.2	Espectroscopia	26
3.2.1	Energia para Estados S de Átomos Tipo Hidrogênio	28
4	Experimentos para Medir a Massa do Próton	30
4.1	Armadilha de Penning	31

4.1.1	Teorema da Invariância	33
4.2	Artigos que Medem a Massa do Próton	35
4.2.1	Medida de m_{p1}	36
4.2.2	Medida de m_{p2}	37
5	Contribuição Gravitacional Devido as Dimensões Extras	41
5.1	Primeira Forma de Inserir os Termos de Correção	43
5.2	Segunda Forma de Inserir os Termos de Correção	47
6	Conclusão	50
	Apêndice A	52
	Contribuição dos Termos de Correção de Segunda Ordem	52

1 *Introdução*

Segundo Overduin e Wesson (1997) [1], os primeiros modelos que adicionam uma nova dimensão espacial ao universo surgem com Nordström [2] em 1914, e, independentemente, com Kaluza [3] em 1921, que tentaram unir a gravitação com o eletromagnetismo em uma teoria penta-dimensional. Tanto um modelo quanto outro tiveram problemas pra justificar fisicamente a existência de uma nova coordenada espacial, já que não se tinha nenhuma indicação de alguma manifestação física desta dimensão na natureza. Para explicar este último fato citado, Kaluza, inicialmente, apenas impôs de maneira artificial a condição de que qualquer derivada com relação a essa dimensão fosse nula, o que ficou conhecida como condição cilíndrica de Kaluza.

Já Klein [4], em 1926, introduziu um mecanismo de compactação da quinta coordenada, o qual pressupõe que a dimensão possuiria uma topologia de um círculo e teria um tamanho da ordem do comprimento de Planck. Isso foi capaz de trazer um significado físico razoável à esta dimensão, pois, com isso, deixou de ser necessário impor a condição cilíndrica, e, conseqüentemente, à teoria, que hoje em dia é a conhecida teoria de Kaluza-Klein. No entanto, devido a ordem do comprimento da dimensão extra ser tão pequeno, não é possível a detecção dos efeitos diretos previstos pela teoria na escala de energia que temos disponível atualmente [4].

A partir dos modelos pioneiros de Nordström e Kaluza, surgiram outras teorias que discutem a dimensionalidade da natureza. No entanto, para o propósito desta dissertação apenas apresentaremos e comentaremos um pouco mais sobre a teoria de Kaluza-Klein, devido principalmente à sua importância histórica para os demais modelos, e em seguida focamos a atenção no modelo de branas proposto por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (modelo ADD) [5], o qual é a principal motivação para a realização da pesquisa feita neste trabalho, pois nele, como veremos, a energia potencial gravitacional é aumentada para curtas distância e isso terá um papel chave no estudo do problema da massa do próton.

O modelo ADD foi proposto como forma de resolver o problema da hierarquia, o qual diz respeito ao fato da interação gravitacional ser tão fraca quando comparada as demais forças da natureza. A característica fundamental do modelo ADD é a de que toda a matéria está confinada em uma hipersuperfície quadridimensional, chamada de brana, imersa em um espaço com dimensões extras, compactas e de larga escala. Os campos do modelo padrão também estão confinados à brana e, juntamente com a matéria, são presos por meio de certos mecanismos de confinamento. No entanto, o modelo ADD tem como hipótese principal que o campo gravitacional é o único campo que tem acesso as dimensões extras. Essa premissa é que vai justificar o fato da interação gravitacional ser mais fraca que as demais interações para longas distâncias (distâncias maiores que o raio de compactação). Contudo, como veremos, o potencial gravitacional pode ser amplificado para distâncias muito pequenas. Esta circunstância possibilita que o modelo possa ser mais acessível a testes experimentais, como por exemplo, através de testes de desvios da lei do inverso do quadrado para curtas distâncias [13].

Também, é importante destacar que, diferentemente da teoria de Kaluza-Klein, no modelo ADD as dimensões extras não são da ordem do comprimento de Planck. Quando se fixa, por exemplo, um comprimento de Planck do espaço com dimensões suplementares, na ordem da escala eletrofraca (10^{-20}m), obtém-se que, para duas dimensões extras, elas tem comprimento da ordem de micrometros. Onde se usa a ordem da escala eletrofraca, justamente, para resolver o problema da hierarquia.

Notamos que em nosso cotidiano, e na vasta maioria dos fenômenos que a física tradicional consegue explicar, não detectamos qualquer vestígio da existência de dimensões extras. Consequentemente, se quisermos encontrar indícios de tais dimensões, devemos investigar problemas em aberto da física. Assim como desvios inesperados de resultados experimentais, obtidos quando se aumenta a precisão das medidas.

Podemos citar, como problemas em aberto, o enigma do raio do próton. Este problema se refere à incompatibilidade entre valores obtidos na medida do tamanho do raio do próton. Um valor é obtido quando usa-se o átomo de hidrogênio como sis-

tema atômico para realizar o experimento de medida, e o outro quando o sistema usado é o hidrogênio muônico (o elétron no átomo de hidrogênio é substituído por um múon) [33]. Um outro problema recente, é o problema da massa do próton. Em um experimento recente [6], a massa do próton foi medida mais precisamente, porém o valor encontrado é incompatível com o valor recomendado pelo CODATA [6]. Nesta dissertação, investigaremos como um possível universo dotado de dimensões extras, descrito pelo modelo ADD, poderia entender melhor o problema da massa do próton.

No experimento recente, executado por F. Heibe, *et al* em 2017 [6], para medir a massa do próton, foi obtido um valor três vezes mais preciso do que o valor fornecido pelo CODATA. No entanto, difere do valor recomendado por três vezes o seu desvio padrão. O valor sugerido pelo CODATA, para a massa do próton, é uma média de valores obtidos em diferentes experimentos, entre eles destacamos o experimento realizado por Solders, *et al* em 2008 [7].

Para investigar o problema da massa do próton no cenário de branas, vamos inicialmente estudar os métodos empregados na medição da massa do próton nos dois experimentos destacados: o realizado por F. Heibe, *et al* (2017) [6] e o do Solders, *et al* (2008) [7].

No trabalho de F. Heibe, *et al* (2017) [6], a massa do próton é medida comparando-se a frequência cíclotron de um próton com um íon de carbono totalmente ionizado. A massa do próton é, então, determinada em termos da massa do íon de carbono totalmente ionizado, que por sua vez é determinada a partir da massa do átomo de carbono neutro (que é a massa padrão em unidades atômicas), da massa dos elétrons ionizados e da energia de ionização de cada elétron. As energias de ionização dos elétrons são todas dados experimentais, exceto a energia de ionização do último elétron ionizado que é um resultado teórico. É importante destacar aqui que a energia de ionização do último elétron pode ser determinada por meio de um cálculo teórico. Será, portanto, através da correção desse termo que investigaremos os efeitos das dimensões extras sobre a medida da massa do próton.

No artigo de Solders, *et al* (2008) [7], a massa do próton é obtida a partir da massa medida de uma molécula de hidrogênio ionizada, H_2^+ , a qual é medida comparando-se sua frequência cíclotron com a frequência cíclotron do deutério ionizado. A massa do deutério ionizado, por sua vez, foi medida por S. L. Zafonte e R. S. Van Dick Jr, em¹ 2015 [28], comparando a frequência cíclotron do deutério ionizado com um íon de carbono totalmente ionizado, analogamente ao trabalho de F. Heibe, *et al* (2014) [6]. De posse do valor medido da massa de H_2^+ , a massa do próton é determinada em termos da massa de H_2^+ , da massa do elétron, da energia de ionização de um dos elétrons da molécula de hidrogênio, da energia de ligação da molécula de hidrogênio e da energia de ionização do átomo de hidrogênio. Aqui também destacamos que a energia de ionização do átomo de hidrogênio pode ser extraído de uma predição teórica, e portanto, podemos considerar, através desse termo, os efeitos das dimensões extras, como discutiremos mais adiante.

Nos dois trabalhos específicos [6, 7], que medem a massa do próton, os resultados teóricos mencionados são valores calculados da energia de ionização de elétrons do estado $1S$: referentes ao último elétron a ser ionizado do carbono e também a remoção do elétron do átomo de hidrogênio. Os cálculos não levam em consideração contribuições gravitacionais da interação entre o elétron e o núcleo. A razão, obviamente, é que a força gravitacional quadridimensional usual é totalmente desprezível neste sistema. Mas, como veremos, em um universo com dimensões extras ela pode se tornar significativa em curtas distâncias. Desta maneira a nossa proposta foi a de colocar termos de correção, nesta energia de ionização, de tal forma a tornar os valores medidos da massa agora compatíveis. Estes termos de correção estão, justamente, associados à um aumento do potencial gravitacional em curtas distâncias devido a existência de um espaço com dimensões extras.

A dissertação seguirá, então, com o segundo capítulo, onde faremos uma revisão sobre o modelo de Kaluza-Klein e do modelo ADD. No capítulo 3 falaremos um pouco

¹S. L. Zafonte e R. S. Van Dick Jr forneceram seu resultado do valor da massa do deutério ionizado para Solders, *et al*, antes da publicação deste trabalho.

sobre o potencial gravitacional no contexto das dimensões extras compactas de larga escala, além dos seus efeitos na espectroscopia levando em consideração a modificação do potencial gravitacional. Em seguida, no capítulo 4, comentaremos sobre os experimentos que medem a massa do próton, os quais nos baseamos para a realização deste trabalho. Logo depois, no capítulo 5, estudamos as correções associadas ao aumento do potencial gravitacional, referente as dimensões extras, e discutimos como os efeitos das dimensões extras poderiam interferir na obtenção da massa do próton. Como veremos, a magnitude do efeito das dimensões extras depende de alguns parâmetros como a constante gravitacional do espaço total (G_n). Supondo que as medidas da massa do próton realizadas pelos dois experimentos podem ser explicadas pelas dimensões extras, obteremos certos vínculos experimentais para os parâmetros extradimensionais que podem resolver o problema da massa do próton. E, por fim, no último capítulo chegamos as nossas conclusões do presente trabalho.

2 Revisão dos Modelos de Kaluza-Klein e ADD

2.1 Teoria de Kaluza-Klein

2.1.1 Teoria sem Compactação

Em sua teoria, Kaluza conseguiu unificar a relatividade geral e o eletromagnetismo, introduzindo uma quinta dimensão às quatro dimensões usuais (três espaciais e uma temporal). Para isso, Kaluza [8] admitiu que a dimensão extra era uma dimensão espacial z . Assim, nosso universo passaria a ser descrito por um espaço-tempo 5-dimensional com coordenadas $x^A = (x^\alpha, x^4 = z)^1$. Kaluza, então, essencialmente estende a teoria da relatividade geral para cinco dimensões, mantendo toda estrutura e propriedades da sua equação, e a aplica considerando que o universo nas dimensões extras é vazio. Desta forma, temos que as equações de Einstein são dadas por:

$$\hat{G}_{AB} = 0. \quad (2.1)$$

Ou, equivalentemente

$$\hat{R}_{AB} = 0, \quad (2.2)$$

onde $\hat{R}_{AB}$ é o tensor de Ricci no espaço-tempo 5-dimensional, o qual em termos dos símbolos de Christoffel, analogamente em quatro dimensões, pode ser escrito como²:

$$\hat{R}_{AB} = \partial_C \hat{\Gamma}_{AB}^C - \partial_B \hat{\Gamma}_{AC}^C + \hat{\Gamma}_{AB}^C \hat{\Gamma}_{CD}^D - \hat{\Gamma}_{AD}^C \hat{\Gamma}_{BC}^D ; \text{ com } \hat{\Gamma}_{AB}^C = \frac{1}{2} \hat{g}^{CD} (\partial_A \hat{g}_{DB} + \partial_B \hat{g}_{DA} - \partial_D \hat{g}_{AB}). \quad (2.3)$$

¹Usaremos os índices latinos maiúsculos indo de 0 à 4, os índices gregos indo de 0 à 3, e as quantidades 5-dimensionais denotados com chapéus.

²Adotaremos sempre a convenção da soma de Einstein.

$\hat{\Gamma}_{AB}^C$ e $\hat{g}_{AB}$ são o símbolo de Christoffel de segunda espécie e o tensor métrico 5-dimensionais, respectivamente.

Para unificar as teorias de Einstein, 4-dimensional, e a de Maxwell, Kaluza [3] propôs que a métrica no espaço-tempo 5-dimensional fosse dada por:

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2 \phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa \phi^2 A_\alpha \\ \kappa \phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Sendo $g_{\alpha\beta}$ o tensor métrico 4-dimensional de costume, A_α o 4-potencial eletromagnético, ϕ um campo escalar e κ uma constante que dimensiona o potencial eletromagnético. Kaluza também precisou impor que a derivada de qualquer quantidade em relação a coordenada extra, z , fosse nula, a chamada condição cilíndrica. Isso também era uma maneira de implementar a não manifestação, ou observação, da direção adicional. Desse modo, usando a métrica dada pela equação (2.4), juntamente com a condição cilíndrica, na equação (2.2) escrita na forma de (2.3), teremos, para o caso de ϕ constante ao longo de todo espaço-tempo, as seguintes equações dadas em quatro dimensões [1]:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G \phi^2 T_{\alpha\beta}^{EM}; \quad (2.5)$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0; \quad (2.6)$$

que são justamente as equações de Einstein e Maxwell respectivamente, sendo $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - Rg_{\alpha\beta}/2$, o tensor de Einstein, $T_{\alpha\beta}^{EM} \equiv g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} - F_\alpha^\gamma F_{\beta\gamma}$ o tensor energia-momento eletromagnético, com $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, e G é a constante gravitacional, que foi identificada com $\kappa \equiv 4\sqrt{\pi G}$.

2.1.2 Compactação de Klein

Devido a condição cilíndrica ser um tanto artificial, sem base física, em 1926 Klein tentou fundamentar o porque da aparente 4-dimensionalidade do universo [8]. Para isso, Klein [4] propôs que a dimensão extra fosse compacta (com comprimento pequeno) e tivesse uma topologia circular, como ilustrado na figura (2.1).

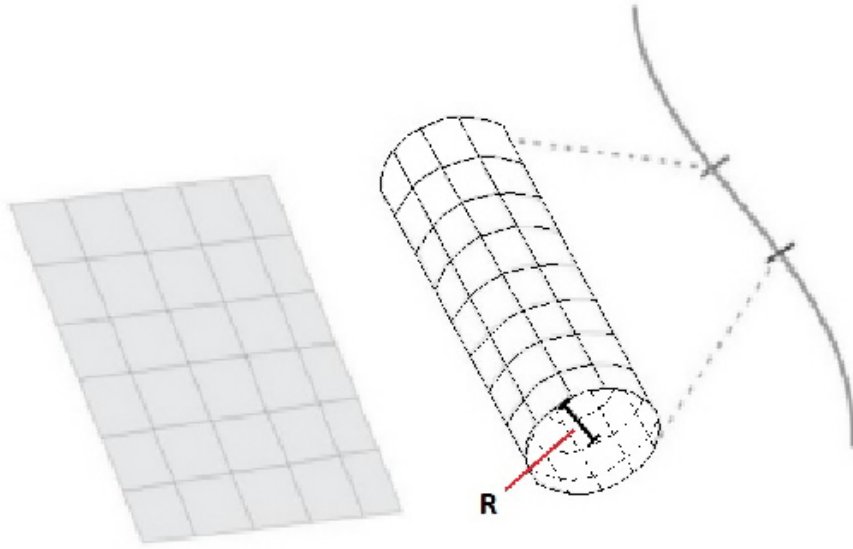


Figura 2.1: Esquema da dimensão extra compactada. As quatro dimensões espaciais formariam um hipercilindro, sendo as três dimensões usuais (x^1, x^2, x^3) infinitas, e a dimensão extra (z) um círculo de raio R .

Devido a topologia do círculo, a coordenada extra deveria obedecer a condição:

$$z \rightarrow z + 2\pi R, \quad (2.7)$$

onde R é o raio da dimensão extra. Desta forma, como consequência da topologia circular, todos os campos serão periódicos com relação a nova dimensão, e portanto, podem ser expressos em modos de Fourier [1], como segue:

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\alpha\beta}^{(n)}(x^\alpha) e^{inz/R} \quad (2.8)$$

$$\phi(x^\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\alpha) e^{inz/R} \quad (2.9)$$

$$A_\alpha(x^\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\alpha^{(n)}(x^\alpha) e^{inz/R} \quad (2.10)$$

com o índice (n) referindo-se ao n -ésimo modo de Fourier.

Para entendermos o comportamento dos modos de Fourier, também chamados de modos KK, vamos considerar um campo escalar definido em um hipercilindro homogêneo, com métrica plana. Vamos admitir que ele satisfaz, em cinco dimensões, a equação de Klein-Gordon sem massa,

$$\square_{(5)}\phi = 0, \quad (2.11)$$

sendo $\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ a definição do operador D’Lambertiano no espaço penta-dimensional.

Podemos resolver (2.11) usando o método de separação de variáveis, juntamente com a condição de contorno $\phi(x^\alpha, z) = \phi(x^\alpha, z + 2\pi R)$ (devido a topologia da dimensão extra).

Então podemos escrever

$$\phi(x^\alpha, z) = X(x^\alpha)\varphi(z). \quad (2.12)$$

Substituindo, então, (2.12) em (2.11), obtemos

$$\frac{1}{X(x^\alpha)}\square X(x^\alpha) + \frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (2.13)$$

Como os termos somados desta equação são funções de variáveis diferentes, a única maneira dela ser satisfeita é que o primeiro termo seja uma constante, C , e o segundo termo seja menos o valor desta contante, ou seja, $-C$. O que nos leva a

$$\frac{1}{X(x^\alpha)}\square X(x^\alpha) = C \quad (2.14)$$

e

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} = -C. \quad (2.15)$$

Notamos que a equação (2.14) é a equação de Klein-Gordon quadridimensional

$$\square X(x^\alpha) - CX(x^\alpha) = 0. \quad (2.16)$$

Logo, C representa o quadrado da massa do campo em quatro dimensões. E da equação (2.15) obtemos

$$\varphi(z) = Ae^{i\sqrt{C}z} + Be^{-i\sqrt{C}z}, \quad (2.17)$$

cuja aplicação da condição de contorno, $\varphi(0) = \varphi(2\pi R)$, nos fornece

$$C = \frac{n^2}{R^2}, \quad (2.18)$$

sendo n um número inteiro.

Assim, a massa do campo escalar pode ser escrita como $m_{(n)} = \frac{|n|}{R}$, que são os modos KK. Notemos que os modos KK possuem diferentes valores de massa, com o modo zero tendo massa nula. Justifica-se, então, que não detectamos manifestações de um espaço com dimensões superiores porque, na realidade, nunca atingimos uma energia suficiente capaz de excitar o primeiro modo KK. Claro que para isso admitimos que o raio, R , da dimensão extra é muito pequeno. Geralmente, especula-se que o raio de compactação é da ordem do comprimento de Planck ($10^{-35}m$). Isso justificaria o porque de nunca ter sido encontrado sinais da dimensão extra, já que os estados excitados teriam energia da ordem da massa de Planck ($10^{19}GeV$), enquanto as energias que aceleradores de partículas atingem atualmente são da ordem de TeV 's [9].

Portanto, não é preciso impor a condição cilíndrica de forma ad hoc como Kaluza sugeriu inicialmente. Ela aparece de forma natural (mais aceitável) a partir de uma hipótese sobre a topologia da dimensão extra.

2.2 Modelo ADD

O modelo ADD³ [5], que foi proposto em 1998, traz um panorama alternativo para se resolver o problema da hierarquia⁴. Para isto, ele postula que o nosso universo quadridimensional é uma hipersuperfície, a qual é chamada de brana, imersa em um universo com δ dimensões extras de larga escala, que como veremos, podem até ser da ordem de alguns micrômetros [5]. O modelo sugere que a matéria e todos os campos do Modelo Padrão⁵ estão presos à brana por meio de mecanismos de confinamento. No entanto, a gravidade é a única interação que tem acesso às dimensões extras. Como o campo se espalha por todo o espaço, isso justificaria a sua baixa intensidade em relação aos demais campos, ver figura (2.2).

Uma característica notável desse modelo é que, diferentemente do modelo de Kaluza-Klein, ele pode ser sujeito a futuros testes experimentais, uma vez que o raio de compactação pode ser muitas ordens de grandeza maior do que o comprimento de Planck. Uma das maneiras de testar o modelo seria por meio de colisões de altas energias. Se a escala de TeV fosse suficiente para excitar partículas do modelo padrão, de forma que estas tenham acesso a dimensões extras (ou equivalentemente a dizer que saíssem da brana), isso se evidenciaria no experimento como uma energia faltante (não conservação da energia) [9].

Outra maneira de procurar por efeitos fenomenológicos da teoria é através do teste da lei gravitacional do inverso do quadrado em curtas distâncias ([13]).

³Assim chamado devido a inicial dos sobrenomes de seus autores: Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali.

⁴Se refere à enigmática constatação da interação gravitacional ser tão fraca em relação as interações do Modelo Padrão.

⁵Teoria que descreve e classifica as partículas elementares e especifica suas interações fundamentais, exceto a interação gravitacional.

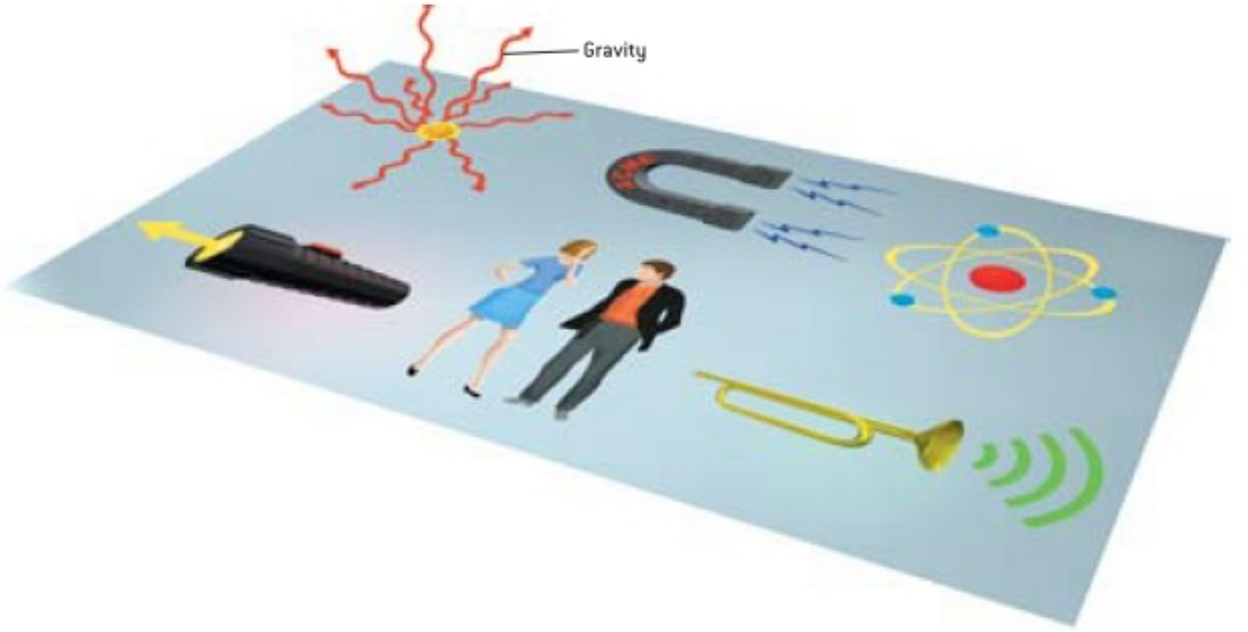


Figura 2.2: Linhas do campo gravitacional tendo acesso ao espaço suplementar, enquanto os demais campos estão confinados à brana. (Adaptado de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali, 2000)

2.2.1 Confinamento da Matéria

Para ter ideia de como a matéria é confinada, vamos estudar um modelo de localização de férmions, no qual o modo zero destes férmions está preso a brana (os estados excitados conseguiriam sair da brana). Para isso, vamos considerar apenas uma dimensão extra z e um campo escalar real $\phi = \phi(x^\alpha, z)$, sendo a ação deste campo dada por [11]:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.19)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial escalar e $A = 0, 1, 2, 3$ ou 4 .

Para obtermos uma solução do tipo parede de domínio vamos usar o potencial descrito como:

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2, \quad (2.20)$$

o qual tem comportamento mostrado na figura (2.3).

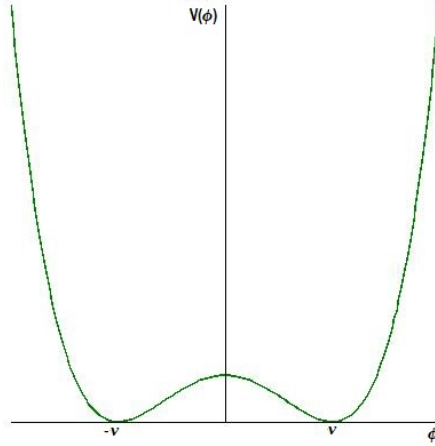


Figura 2.3: Forma do potencial escalar, dado pela equação 2.20.

A dinâmica do campo será obtida por meio das equações de *Euler-Langrange*

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_A \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_A \phi)} \right] = 0. \quad (2.21)$$

Uma solução importante pode ser obtida, admitindo um regime estacionário em que o campo tenha só dependência com a coordenada extra. Nesta situação, encontramos [11]:

$$\phi_0(z) = \nu \tanh\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right). \quad (2.22)$$

Esta solução é conhecida como parede de domínio (ou kink), pois teremos que $\phi_0(z \rightarrow -\infty) = -\nu$ e $\phi_0(z \rightarrow +\infty) = \nu$ (ver figura (2.4)) e, desta forma, os dois vácuos do potencial estão separados.

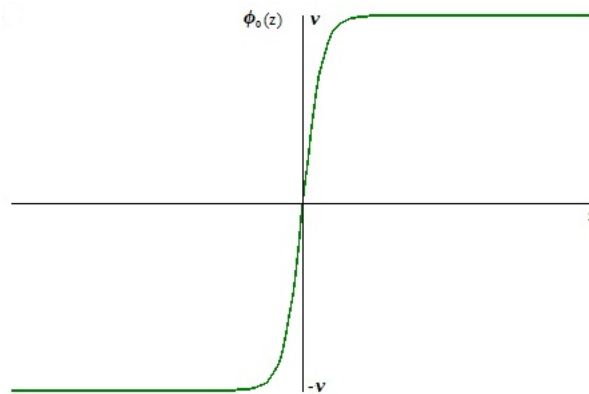


Figura 2.4: Forma da solução do tipo parede de domínio.

A densidade de energia da brana será dada pela densidade de energia correspondente a parede de domínio. Assim, usando a densidade Hamiltoniana, $H_0 = \Pi \dot{\phi} - L$ (com $\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ sendo o momento canonicamente conjugado), do campo escalar ϕ , temos que

$$H_0 = \frac{\lambda^2 \nu^4}{4} \sec^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right), \quad (2.23)$$

onde H_0 ficou dessa forma pois pegamos ϕ dado pela equação (2.22). Podemos observar que H_0 tem um máximo em torno de $z = 0$ (ver figura (2.5))

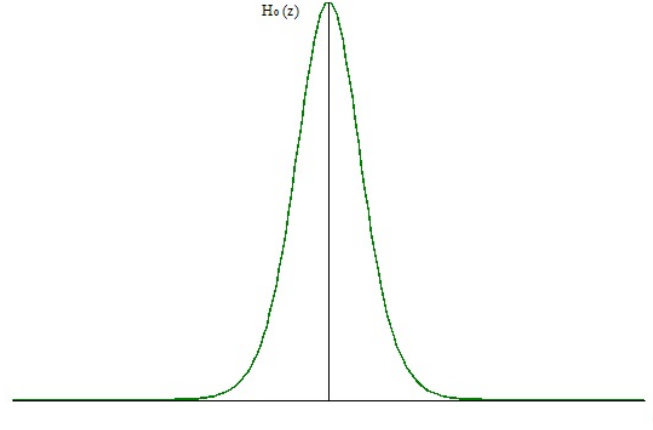


Figura 2.5: Distribuição da densidade de energia da brana.

Integramos com respeito à coordenada extra z , considerando $\int_{-\infty}^{+\infty} H_0 dz$, obtemos a energia por unidade de 3-volume (volume das dimensões espaciais usuais) da brana, Σ , denominada de tensão da parede, dada por

$$\Sigma \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} H_0 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \nu^4}{4} \sec^4\left(\frac{\lambda \nu z}{2}\right) dz, \quad (2.24)$$

que nos fornecerá

$$\Sigma = \frac{2}{3} \lambda \nu^3. \quad (2.25)$$

O parâmetro λ tem unidades de inverso de comprimento, sendo interpretado, desta forma, como a espessura da brana.

2.2.2 Confinamento de Férmions

Para termos uma noção de como acontece o confinamento dos férmions, na parede de domínio, devemos considerar a equação de Dirac, já que esta dá a dinâmica dos férmions, que, como sabemos, são descritos por espinores, ψ . A equação de Dirac em um espaço-tempo plano quadridimensional é [8]

$$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - m\psi = 0, \quad (2.26)$$

onde consideramos $\hbar = c = 1$, com γ^α sendo as matrizes de Dirac, que satisfazem

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta} \mathbf{1}, \quad (2.27)$$

além de $(\gamma^\alpha)^\dagger = (\gamma^\alpha)^{-1}$ e $(\gamma^\alpha)^\dagger = -\gamma^\alpha$. A equação de Dirac pode ser obtida a partir da seguinte ação:

$$S_{4d} = \int d^4x (i\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - m\bar{\psi} \psi), \quad (2.28)$$

que nos dá a Lagrangeana:

$$L = i\bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi - m\bar{\psi} \psi. \quad (2.29)$$

Manteremos, então, essa mesma estrutura para um espaço-tempo em cinco dimensões, empregando as seguintes identificações:

$$\Gamma^\alpha = \gamma^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3), \Gamma^z = -i\gamma^5 \quad (\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$$

Logo, em cinco dimensões, a Lagrangeana do campo de Dirac será

$$L = i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - m\bar{\Psi} \Psi, \quad (2.30)$$

com $A = 0, \dots, 4$ e Ψ o espinor no espaço maior, sendo sua ação dada por

$$S_{\frac{1}{2}} = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - m\bar{\Psi} \Psi), \quad (2.31)$$

forneendo, desta forma, a seguinte equação de campo de Dirac em cinco dimensões:

$$(i\Gamma^A \partial_A - m)\Psi = 0. \quad (2.32)$$

O aprisionamento dos férmions pode ser explicado quando supomos que o campo escalar ϕ interage com o férmion através de uma interação do tipo Yukawa, onde a ação desta interação é dada por

$$S_{int} = -h \int d^4x dz \phi \bar{\Psi} \Psi, \quad (2.33)$$

em que h é uma constante de acoplamento. Teremos assim que a ação total é descrita pela soma da ação do campo de Dirac e da ação de interação, com ϕ dado pela equação (2.22). Logo temos

$$S = S_{\frac{1}{2}} + S_{int} = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi). \quad (2.34)$$

Por simplicidade vamos admitir o caso em que os férmions não têm massa ($m = 0$). Logo, teremos:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi + h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi) \quad (2.35)$$

que nos fornecerá a equação de movimento

$$i\Gamma^A \partial_A \Psi + h\phi_0 \Psi = 0, \quad (2.36)$$

a qual pode ser escrita como:

$$i\Gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi + i\Gamma^z \partial_z \Psi - h\phi_0 \Psi = 0. \quad (2.37)$$

Usando o método de separação de variáveis (com $\Psi = \psi(x^\alpha) \chi(z)$), obteremos, após algumas manipulações, a seguinte equação [12]:

$$i\Gamma^\alpha \partial_\alpha \psi + \gamma^5 \psi \frac{1}{\chi} \partial_z \chi - h\phi_0 \psi = 0. \quad (2.38)$$

Se admitirmos $\gamma^5\psi = -\psi$ na equação (2.38) (tal condição está relacionada a quiralidade, e não trará nenhuma restrição física, já que partículas de massa zero têm quiralidade bem definida [12]), teremos:

$$i\Gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - \tilde{m}\psi = 0, \quad (2.39)$$

com $\tilde{m} = \frac{1}{\chi}\partial_z\chi + h\phi_0$ sendo a massa do espinor nas dimensões usuais. Para o caso de férmions sem massa, teremos $\tilde{m} = 0$, levando a seguinte condição:

$$\partial_z\chi = -h\phi_0\chi, \quad (2.40)$$

cujas solução é dada por:

$$\chi = e^{-h\phi_0 z}. \quad (2.41)$$

Portanto, teremos que a o espinor é dado por

$$\Psi = \exp(-h \int_0^z \phi_0(z')dz')\psi(x^\alpha) \quad (2.42)$$

onde $\psi(x)$ é o espinor de *Dirac* e obedece a equação de *Dirac* no espaço-tempo quadridimensional. Podemos notar da equação (2.42) que, quando z é grande, a função de onda vai pra zero de forma exponencial, garantindo assim o confinamento do modo zero dos férmions sobre à brana (devem estar no entorno de $z = 0$) e, conseqüentemente, a descrição física quadrimensional usual.

Se considerassemos férmions com $\tilde{m} \neq 0$ em (2.39), teríamos o termo da massa quadrimensional presente, e poderíamos, assim, determinar os possíveis valores de $\tilde{m}$. Isso levaria a um estabelecimento de modos KK (como visto na teoria de *Kaluza-Klein*), onde os primeiros modos excitados representariam férmions que teriam acesso à dimensão extra. No entanto, se $\tilde{m} > 10TeV$ estes modos ainda estariam escondidos [11].

3 *Potencial Gravitacional e Espectroscopia em Dimensões Extras*

3.1 O Potencial Gravitacional

Como vimos, no Modelo ADD, o campo gravitacional é o único que tem acesso ao espaço extradimensional, o que justifica o porquê de sua baixa intensidade em relação à outros campos no espaço-tempo quadridimensional, já que suas linhas de campo, ao se espalharem por todas as direções, se tornam mais "diluídas". Mas para curtas distâncias¹, quando levamos em consideração as dimensões extras, o potencial gravitacional é aumentado, e, como não poderia deixar de ser, recai no potencial habitual, Newtoniano, pra longas distâncias.

Para exemplificarmos como isso ocorre, vamos considerar, por simplicidade, apenas uma dimensão extra. Sendo ela compacta, de larga escala e com topologia circular. Analisando, neste contexto, o campo gravitacional gerado por uma partícula pontual de massa m sobre um ponto de observação P_{obs} à uma distância r (ver figura (3.1)), vamos considerar duas situações: distâncias muito menores que o raio R da dimensão extra, $r \ll R$, e distâncias muito maiores que R , $r \gg R$. Em seguida, prescreveremos a correção da lei do inverso do quadrado para longas distâncias, com inúmeras dimensões extras².

No lado esquerdo da ilustração da figura (3.1), temos que a massa m e o ponto de observação P_{obs} estão sobre a mesma reta, a qual está contida na brana. O cilindro formado pela dimensão extra não está, obviamente, contido na brana, a reta gerada por m e P_{obs} apenas toca sua lateral. As linhas de campo geradas por m que chegam em P_{obs} são dadas pela linha que segue a reta passando por m e P_{obs} , e pelas demais linhas que dão uma ou mais voltas completas, no cilindro, atingindo P_{obs} . Poderíamos pensar,

¹Distâncias da ordem do comprimento das dimensões extras ou menor.

²Todas compactas, de larga escala e com topologia circular

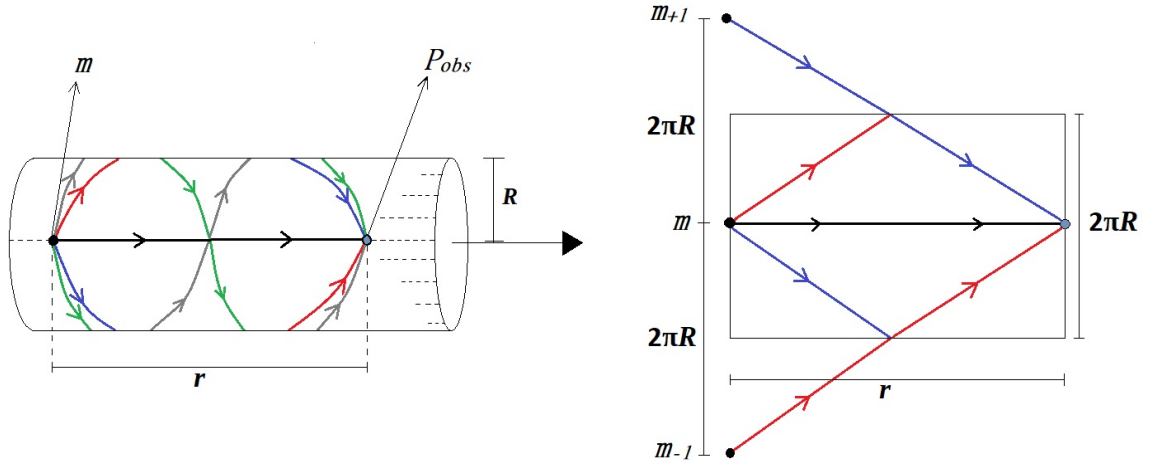


Figura 3.1: Esquema das linhas do campo gravitacional, gerado pela partícula m , que chegam ao ponto de observação P_{obs} , o qual está a uma distância r . Do lado esquerdo de uma perspectiva compacta, e do lado direito de uma perspectiva não compacta.

também, a partir de uma perspectiva não-compacta. Vamos desenrolar o cilindro em um plano, como posto no lado direito da figura (3.1), e identificar a coordenada extra de acordo com a regra $z \rightarrow z + 2\pi R$. Sob esta perspectiva, notamos, conforme a figura (3.1), que as linhas que dão voltas atingindo P_{obs} podem ser interpretadas como vindas de outras partículas de massa m , as chamadas "imagens topológicas" ou "massas imagens". Na figura (3.1), vemos apenas m_{+1} e m_{-1} , mas são infinitas imagens topológicas (uma para cada linha de campo), cada uma separada de m por algum múltiplo de $2\pi R$.

3.1.1 Distâncias Muito Menores que R

Em um espaço-tempo sem dimensões extras, o campo gravitacional $\vec{g}$ produzido por uma partícula de massa m é dado pela equação

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G_4 \rho, \quad (3.1)$$

onde G_4 é a constante gravitacional newtoniana usual, e ρ é a densidade de massa da partícula. Neste caso, usando a simetria esférica do problema e considerando que a

partícula está na origem do nosso sistema de coordenadas, teremos:

$$\int_{B^3} (\nabla \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G_4 \int_{B^3} \rho dV \quad (3.2)$$

em que B^3 , no limite inferior da integral, indica integração em todo volume da esfera tridimensional (três coordenadas espaciais usuais) centrada na origem. Usando o teorema da divergência, obtemos:

$$\int_{S^2} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_4 m, \quad (3.3)$$

onde S^2 indica que a integração é feita sobre toda a área da superfície esférica bidimensional que envolve B^3 . Usando o fato que a interação gravitacional é sempre atrativa e que a intensidade de $\vec{g}$ só depende da distância³, obteremos:

$$g(r) = \frac{G_4 m}{r^2} \quad (3.4)$$

onde usamos que a área da superfície esférica é $4\pi r^2$. Logo,

$$\vec{g} = -\frac{G_4 m}{r^2} \hat{r}, \quad (3.5)$$

em que $\hat{r}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{r}$. Assim, o potencial gravitacional φ , sendo $\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\varphi$, será

$$\varphi(r) = -\frac{mG_4}{r}. \quad (3.6)$$

Considerando agora uma dimensão extra, como discutido anteriormente. Para o caso em que $r \ll R$, podemos desconsiderar a contribuição das imagens topológicas, já que estarão muito distantes e a única massa relevante é a massa m original da partícula. Desta maneira, admitindo que a forma da equação (3.1) é a mesma, podemos seguir praticamente os mesmos passos anteriores, mas contabilizando a existência da

³Logo será constante em toda a superfície de S^2 .

dimensão extra. Em cinco dimensões teremos

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G_5 \rho, \quad (3.7)$$

onde, agora, G_5 é a constante gravitacional no espaço-tempo pentadimensional. Considerando que o problema ainda tem simetria esférica, mas agora de uma hipersfera quadridimensional (com quatro coordenadas espaciais), com a partícula localizada na origem do sistema de coordenadas, temos

$$\int_{B^4} (\nabla \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G_5 \int_{B^4} \rho dV, \quad (3.8)$$

onde B^4 identifica a região de integração relativa ao volume interior da esfera quadridimensional. Usando novamente o teorema da divergência, obteremos

$$\int_{S^3} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 m, \quad (3.9)$$

onde S^3 indica a região de integração correspondente a área da hipersuperfície esférica tridimensional que envolve B^4 . Resolvendo essa equação para g , chegamos em

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \frac{G_5 m}{r^3} \quad (3.10)$$

onde usamos que o valor da área da hipersuperfície é de $2\pi^2 r^3$ [8]. Obtemos, então, a seguinte expressão para o campo gravitacional

$$\vec{g} = -\frac{2}{\pi} \frac{G_5 m}{r^3} \hat{r}, \quad (3.11)$$

que não corresponde à lei do inverso do quadrado. O potencial gravitacional será dado por

$$\varphi(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{m G_5}{r^2} \quad (3.12)$$

Notamos, portanto, clarametne⁴ que o potencial gravitacional é aumentado para curtas distância, como havíamos anunciado, já que para $r \rightarrow 0$ o valor absoluto de φ , na equação (3.12), aumenta mais rapidamente do que na equação (3.6).

Poderíamos, também, fazer mais uma vez os mesmos cálculos para n dimensões, ou seja, em um espaço-tempo n -dimensional. Analogamente ao que já foi feito, considerando G_n a constante gravitacional deste espaço, obteríamos o potencial gravitacional dado por [8]:

$$\varphi(r) = \frac{2\Gamma(\frac{n-1}{2})mG_n}{(-n+3)\pi^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}} \frac{1}{r^{n-3}}, \quad (3.13)$$

onde Γ está representando a função gama. Notamos assim, que quanto maior o número de dimensões extras espaciais, maior será o valor do campo gravitacional para curtas distâncias.

3.1.2 Distâncias Muito Maiores que R

Quando o ponto de observação está muito longe da fonte gravitacional, a separação das imagens topológicas, tomando como referência a perspectiva não-compacta, se torna desprezível, já que $r \gg 2\pi R$. Neste caso, admitimos que temos uma linha contínua infinita de massas imagens, e podemos utilizar novamente a equação (3.7) adaptada a esta situação. Empregando, agora, uma superfície gaussiana cilíndrica quadridimensional (quatro dimensões espaciais) envolta da linha de imagens topológicas, conforme a figura (3.2).

Assim, teremos:

$$\int_{B^3 \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} (\nabla \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G_5 \int_{B^3 \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} \rho dV, \quad (3.14)$$

onde $B^3 \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ está indicando uma integração em todo volume do hipercilindro de comprimento L . Aplicando o teorema da divergência do lado esquerdo, e usando que a integral do lado direito nos dá a massa da linha de imagens topológicas delimitada pelo

⁴A menos de valor de G_5 , que será comentado na seção 3.1.2.

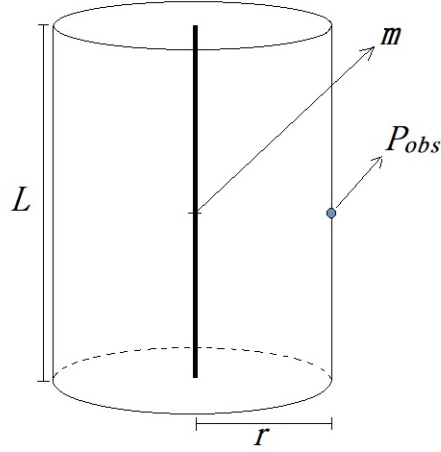


Figura 3.2: Hipersuperfície Gaussiana envolvendo a linha contínua de massas imagens.

hipercilindro, temos que

$$\int_{S^2 \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 m_{int} \quad (3.15)$$

onde $S^2 \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, agora, está indicando uma integração em toda área da hipersuperfície gaussiana cilíndrica. Usando, agora, o fato de que cada imagem topológica está separada por $2\pi R$ uma da outra, podemos concluir que $m_{int} = \frac{L}{2\pi R} m$. Assim, obtemos

$$g(r) 4\pi r^2 L = 4\pi G_5 \frac{L}{2\pi R} m. \quad (3.16)$$

Aqui usamos o fato de que a base do cilindro é uma superfície esférica tridimensional. Portanto, a "área" da lateral do hipercilindro é dada pela área da esfera da base de raio r vezes o seu comprimento L . Além disso, os demais elementos de área $d\vec{A}$, da esfera na face superior e inferior, são todos perpendiculares a $\vec{g}$. Logo,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G_5}{2\pi R} \frac{m}{r^2} \hat{r}. \quad (3.17)$$

E portanto, temos que o potencial gravitacional para $r \gg R$ é dado por:

$$\varphi(r) = -\frac{G_5}{2\pi R} \frac{m}{r}. \quad (3.18)$$

Notamos, então, que se identificarmos $G_4 = \frac{G_5}{2\pi R}$, recuperaremos exatamente o potencial gravitacional newtoniano, como era de se esperar. Logo, dependendo do valor de G_5 e do comprimento da dimensão extra, l (sendo $l = 2\pi R$), a teoria é totalmente consistente com o regime usual da gravitação, para longas distâncias. Essa relação entre G_4 e a constante gravitacional G_n também nos permite vincular o comprimento da dimensão extra, ou das dimensões extras, à algum valor do comprimento de Planck do espaço superior, com n dimensões, l_{pn} . Admitindo que os potenciais gravitacionais, de espaços com dimensões diferentes, tem a mesma unidade, independente do número de dimensões, e fazendo uma análise dimensional em termos da definição do comprimento de Planck usual, l_{p4} , podemos mostrar que [8]:

$$(l_{pn})^{n-2} = (l_{p4})^2 \frac{G_n}{G_4}, \quad (3.19)$$

onde o comprimento de Planck habitual é definido como:

$$l_{p4} = \sqrt{\frac{G_4 \hbar}{c^3}}, \quad (3.20)$$

sendo $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π e c a velocidade da luz no vácuo. Considerando que todas as dimensões extras tem o mesmo comprimento, l , teremos que [8]

$$\frac{G_n}{G_4} = l^{n-4}. \quad (3.21)$$

Assim, é possível escrever o comprimento das dimensões extras l em função do número total de dimensões n e do comprimento de Planck do espaço superior l_{pn} como

$$l = l_{pn} \left(\frac{l_{pn}}{l_{p4}} \right)^{\frac{2}{n-4}}. \quad (3.22)$$

Admitindo que o comprimento de Planck no espaço n -dimensional é da ordem da escala eletrofraca, $l_{pn} \approx 10^{-20}\text{m}$, o problema da Hierarquia seria resolvido [5]. Usando o valor do comprimento de Planck do espaço-tempo quadridimensional usual, obtemos

a expressão que relaciona o comprimento das dimensões extras ao número total de dimensões do espaço-tempo dada por

$$l = 10^{-20} (10^{15})^{\frac{2}{n-4}} \text{m}. \quad (3.23)$$

Através da equação (3.23) podemos ver rapidamente que para $n = 5$, uma dimensão extra, teríamos $l \approx 10^{10} \text{m}$. Logo, nesse modelo não podemos ter apenas uma dimensão extra, pois ela já deveria ter sido percebida na natureza, uma vez que seus efeitos seriam perceptíveis na dinâmica do sistema solar, por exemplo. No entanto, para $n = 6$, duas dimensões extras, teríamos $l \approx 10^{-5} \text{m} = 0,01 \text{mm}$ o que já é aceitável, pois está próximo dos limites em que a Lei do Inverso do quadrado da gravitação está sendo testada [13]. Notamos, assim, que quanto maior o número de dimensões do espaço-tempo menor será o comprimento das dimensões.

3.1.3 Correção da Lei do Inverso do Quadrado para Longas Distâncias

Para qualquer distância em relação a massa da fonte, podemos calcular o potencial gravitacional exatamente. Teríamos, que cada massa imagem m_i contribuiria separadamente para o potencial gravitacional total φ_T gerado pela partícula de massa m , ou seja,

$$\varphi_T = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i. \quad (3.24)$$

E definindo, agora, a quantidade total de dimensões extras por δ , onde cada dimensão extra é identificada por z_i , sendo $i = 1, 2, \dots, \delta$, podemos escrever de forma geral que [14]:

$$\varphi_T = - \sum_{m_1, m_2, \dots, m_\delta = -\infty}^{+\infty} \frac{G_n m}{(r^2 + \sum_{i=1}^{\delta} (z_i - 2\pi R_i m_i)^2)^{\frac{\delta+1}{2}}}, \quad (3.25)$$

lembrando que R_i corresponde ao raio da dimensão extra na direção i , onde todas as dimensões extras tem o mesmo raio, e que para cada direção extra existe uma linha de

massas imagens. A partir de (3.25), pode-se chegar a correção de primeira ordem de desvio da gravidade newtoniana, dada por [14]

$$\varphi_4 = -\frac{G_4 m}{r} \sum_{\mathbf{m}=-\infty}^{+\infty} e^{-r|\tilde{\mathbf{m}}|}, \quad (3.26)$$

sendo $|\tilde{\mathbf{m}}| = \left(\frac{m_1^2}{R_1^2} + \frac{m_2^2}{R_2^2} + \dots + \frac{m_\delta^2}{R_\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_\delta)$. Então, em primeira aproximação, admitindo que todos os raios são iguais a R_0 , teríamos [14]

$$\varphi_4 = -\frac{G_4 m}{r} (1 + 2\delta e^{-\frac{r}{R_0}}), \quad (3.27)$$

A equação (3.27) tem a forma de uma parametrização do tipo Yukawa, utilizada para testar experimentalmente desvios da lei do inverso do quadrado newtoniana. De modo geral ela é escrita como [13]

$$\varphi_4 = -\frac{G_4 m}{r} (1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}}), \quad (3.28)$$

onde α é um parâmetro que mede a intensidade da interação, estando relacionado com o número de dimensões extras, e λ é o intervalo de interação, que no nosso caso (equação (3.27)) se refere a escala de compactação da dimensão extra.

Experimentos recentes foram realizados para testar possíveis desvios da lei do inverso do quadrado, em curtas distâncias. Estes testes estabelecem vínculos para R_0 [13]. Por exemplo, o grupo 'Eöt-Wash' da universidade de Washington, em 2007, estabeleceu que para $\delta = 1$ (uma dimensão extra) devemos ter $R_0 < 44\mu\text{m}$ [34].

3.2 Espectroscopia

A espectroscopia tem um papel essencial no mundo da física e continua contribuindo imensamente, para avanços em várias áreas da física [15]. No cenário de modelos de dimensões extras também tem demonstrado certa relevância, sendo objeto de es-

tudo em vários trabalhos [16, 17, 19, 20, 21, 22, 18]. Neste trabalho, a espectroscopia tem uma função importante. Sabemos que em um universo quadridimensional, convencional, a contribuição gravitacional para os níveis de energias dos átomos é totalmente desprezível. Por exemplo, a contribuição da energia potencial gravitacional média para o primeiro nível do átomo de Hidrogênio é da ordem de: $\frac{G_4 m_p m_e}{a_0} \approx 10^{-38} eV$, onde a_0 o raio de Bohr. Com esta magnitude, a energia potencial gravitacional é totalmente irrelevante frente a energia do átomo da ordem de $13,6 eV$ predominantemente devida à interação eletromagnética, entre o próton e o elétron. No entanto, como vimos anteriormente, se considerarmos que vivemos em uma brana, imersa num espaço ambiente com δ dimensões extra, o potencial gravitacional pode ser amplificado em curtas distâncias e em consequência a contribuição gravitacional pode se tornar mensurável.

Então, no cenário de dimensões extras, a interação gravitacional pode se tornar significativa em um sistema atômico. No nosso caso, os sistemas de interesse são átomos tipo hidrogênio. Assim, supondo um aumento do potencial gravitacional devido as dimensões extras, consideramos a possibilidade deste potencial gravitacional ser capaz de causar uma perturbação detectável na energia do sistema. Portanto, com este pensamento, devemos adicionar à hamiltoniana do átomo um termo associado à interação gravitacional. O problema será tratado por meio da teoria de perturbação independente do tempo.

Fazemos isso em uma abordagem de branas espessas, a qual tem uma espessura ε , definida por $\varepsilon = \lambda^{-1}$, sendo este o λ comentado da equação (2.25). De acordo com limites experimentais recentes, a espessura da brana deve ser inferior a $10^{-19}m$ [35,36]. As partículas localizadas sobre a brana tem uma certa largura σ , definido mais adiante, na direção das dimensões suplementares. Desta forma, a perturbação na energia do sistema será sempre finita, independente do número de dimensões extras δ , e dependerá de σ [12]. Caso considerássemos a brana como uma hipersuperfície quadridimensional infinitamente fina teríamos problemas, pois a perturbação na energia divergiria para os estados S se $\delta \geq 2$ [12]. Logo, no cenário de branas espessas estamos livres deste problema.

3.2.1 Energia para Estados S de Átomos Tipo Hidrogênio

Uma análise mais detalhada e abrangente da espectroscopia em dimensões extras de branas espessas é feita na Ref. [12], a qual estamos seguindo nesta seção. Teremos que, o potencial gravitacional produzido pelo núcleo do átomo é

$$\varphi(\mathbf{R}) = -G_n \int \frac{\rho_M(\mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^{\delta+1}} d^{3+\delta}\mathbf{R}', \quad (3.29)$$

onde $\rho_M = |\Psi_N|^2 m_N$ é a densidade de massa do núcleo, $\Psi_N(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \chi_N(\mathbf{z})\psi_N(\mathbf{r})$ é a função de onda do núcleo, com $\chi_N(\mathbf{z})$ descrevendo o confinamento do núcleo sobre a brana e $\psi_N(\mathbf{r})$ representando a distribuição no espaço ordinário, e $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{z}$, e $\mathbf{R}' = \mathbf{r}' + \mathbf{z}'$. A hamiltoniana que fornece a interação gravitacional do sistema núcleo-elétron, é $H_G = m_e \varphi$. Esta Hamiltoniana será o nosso termo de perturbação e modificará os níveis de energia do átomo. De acordo com a teoria de perturbação, a correção da energia devido à H_G , em primeira ordem, para algum estado Ψ , é dado pelo valor médio $\langle m_e \varphi \rangle_\Psi$. Assim, usando a equação (3.29), o desvio da energia pode ser escrito como:

$$\delta E_\Psi^g = -G_n m_N m_e \int \frac{|\Psi_N|^2 |\Psi_e|^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^{\delta+1}} d^{3+\delta}\mathbf{R} d^{3+\delta}\mathbf{R}', \quad (3.30)$$

sendo a função de onda do elétron dada por $\Psi_e = \chi_e(\mathbf{z})\psi_e(\mathbf{r})$, onde $\chi_e(\mathbf{z})$ representa o perfil da função de onda nas dimensões extras e $\psi_e(\mathbf{r})$ corresponde a solução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio. A partir da equação (3.30) é possível mostrar que [12]:

$$\delta E_S^g = -\gamma_\delta \frac{G_n m_N m_e}{\sigma^{\delta-2}} |\psi_S(0)|^2 \left(1 - \frac{3r_N}{2a_0} + O\left(\frac{r_N^2}{a_0^2}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{\sigma}{r_N}\right)\right), \quad (3.31)$$

onde γ_δ é um fator numérico que depende do número de dimensões, a_0 é o raio de Bohr do átomo, $\psi_S(0)$ é a função de onda tridimensional do elétron no estado S avaliada na

origem e σ é definido por:

$$\frac{1}{\sigma^m} \equiv \frac{\Gamma(\delta/2)}{\Gamma(\frac{\delta-m}{2})} \int \frac{|\chi_N(z_1)|^2 |\chi_e(z_2)|^2}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^m} d^n z_1 d^n z_2, \quad (3.32)$$

onde m é um número inteiro, que deve satisfazer a condição $m \leq (\delta - 1)$, Γ é a função gama e $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ são vetores nas coordenadas extradimensionais. Assim, a equação (3.31) é válida independentemente do perfil da parte extradimensional da função de onda, $\chi(z)$, desde que a mesma satisfaça (3.32) [12]. Quando assumimos que a parte extradimensional é uma gaussiana localizada em torno do centro da brana σ representa o desvio padrão:

$$\chi(z) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{\delta/4} \exp\left(-\sum_{i=1}^{\delta} \frac{z_i^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.33)$$

Como veremos nos capítulos seguintes, a medida da massa do próton é feita com base na medida da massa de um íon, por exemplo, o carbono totalmente ionizado ($^{12}\text{C}^{6+}$). Por sua vez, a massa do íon é determinada em função da massa do carbono neutro e das energias de ionização dos elétrons. Neste nosso trabalho, pretendemos adicionar a energia gravitacional, dada pela equação (3.31), à energia de ionização dos elétrons do estado S , para poder explicar o problema da massa do próton.

4 Experimentos para Medir a Massa do Próton

Neste capítulo vamos discutir os dois experimentos distintos que mediram a massa do próton, que obtiveram valores incompatíveis. A medida da massa do próton é feita com base na medida da frequência ciclotron de algum íon desejado. A frequência ciclotron, ν_c , correspondente ao número de voltas por segundo de uma partícula carregada que atravessa um campo magnético, $\vec{B}$, uniforme e perpendicular à sua velocidade, $\vec{v}$, gerando assim uma trajetória circular. E é dada por

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{|q| B}{m_{ion}}, \quad (4.1)$$

onde q e m_{ion} são a carga e a massa do íon, respectivamente. Logo, em princípio, medindo ν_c bastaria que soubéssemos o valor da carga deste íon e do campo magnético, para se ter sua massa. Na realidade o que se faz é medir a razão das frequências ciclotrons de dois íons submetidos ao mesmo campo magnético, de tal forma que podemos cancelar este campo para aumentar a precisão do valor medido. Chamamos um dos íons de íon de referência, o qual conhecemos sua carga e a massa, e o outro, de íon de interesse, que também conhecemos sua carga, mas queremos determinar sua massa.

O grande desafio experimental, então, torna-se justamente o de gerar um movimento ciclotron de uma partícula carregada e ainda medir a frequência deste movimento. Isto é possível graças ao advento da armadilha de Penning (ou armadilha de íons), em 1936, que é um dispositivo capaz de armazenar partículas carregadas em seu interior [23]. O confinamento das partículas em seu interior é feito por meio de uma combinação de campos elétricos e magnéticos, que vão levar a partícula aprisionada a ter uma série de movimentos compostos, discutidos mais adiante. E assim, com a partícula devidamente aprisionada no interior da armadilha, é possível a coleta de

dados experimentais através de sensores, os quais também remetem a inúmeras adversidades técnicas (além daquelas voltadas para a produção dos campos).

A intenção deste capítulo é dar apenas uma noção sobre o funcionamento da armadilha de Penning, sem nos atermos muito em detalhes técnicos de sua construção. E, também, comentar resumidamente sobre cada artigo que mediu a massa do próton. Diante disso, falaremos sobre os três movimentos que uma partícula carregada adquire quando aprisionada numa armadilha de Penning ideal, cada um com uma frequência associada, sendo eles os movimentos magnetron, ciclotron e axial. E comentaremos como estes movimentos se comportam numa armadilha real, a qual está sujeita à imprecisões, mas mesmo assim capazes de nos fornecer, através do teorema da invariância, um valor correto de frequência ciclotron, que é dada por (4.1).

4.1 Armadilha de Penning

A armadilha de Penning, ou armadilha de íons, consiste em uma espécie de recipiente onde alguma partícula carregada permanece presa em seu interior, por meio de campos elétricos e magnéticos. Uma representação esquemática de um corte transversal de uma armadilha está representado na figura (4.1), que foi retirada do artigo de revisão de L. S. Brown e G. Gabrielse, em 1986.

A descrição feita por L. S. Brown e G. Gabrielse, 1986, usa o elétron como partícula carregada, mas tal descrição é totalmente válida para um íon qualquer [23]. Na armadilha, então, temos que elétrons são inicialmente introduzidos na região na qual devem ser aprisionados para medidas, por meio da aplicação de uma alta voltagem para o ponto do campo de emissão. Isso faz com que haja a produção de feixe de elétrons muito energéticos, mas que colidem com alguns átomos de gás residuais, em seu interior, deixando os elétrons mais lentos, os quais são capturados pela armadilha. Isso ocorre devido a existência um campo de quadrupolo elétrico, produzido por eletrodos da armadilha que têm a forma de hipérboles de revolução, e um campo magnético

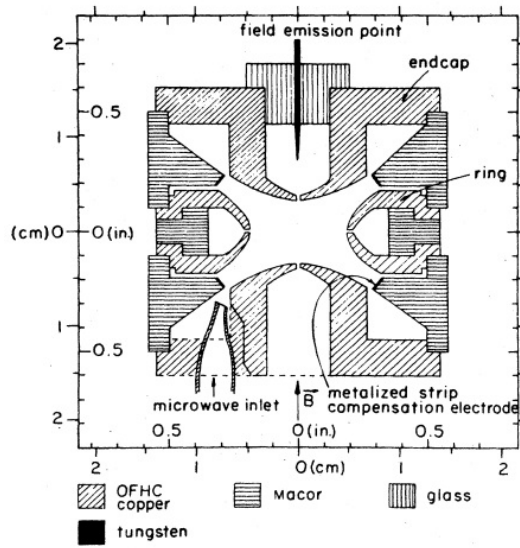


Figura 4.1: Desenho da estrutura de uma armadilha de Penning (Gabrielse e Dehmelt, 1985).

uniforme intenso sobreposto ao longo do eixo da armadilha como mostrado na figura (4.2).

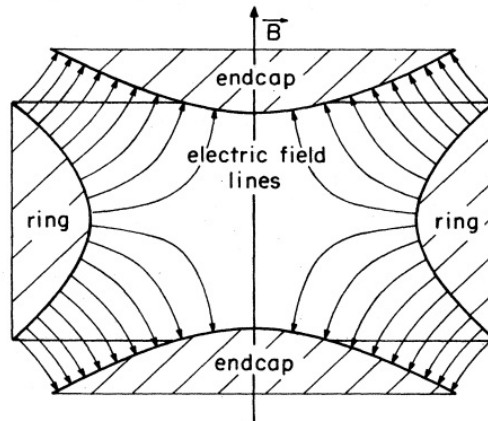


Figura 4.2: Representação das linhas do campo elétrico e magnéticos no interior da armadilha de Penning (Brown e Gabrielse, 1986).

O movimento decorrente da sobreposição dos campos leva o elétron (ou o íon), quando capturado, a descrever uma trajetória resultante que pode ser decomposta em três movimentos básicos. O movimento cíclotron circular é muito rápido¹, com um raio pequeno em relação ao raio do movimento de magnetron. Sendo este último uma órbita

¹Para um elétron num campo magnético de $6T$ sua frequência cíclotron é da ordem de $164GHz$, enquanto que para um próton, no mesmo campo, sua frequência é da ordem de $89MHz$ [23].

circular de deriva, maior e muito mais lenta, da partícula, que está indicado pela linha tracejada na figura (4.3). E o último movimento que compõe o movimento composto total é uma oscilação axial, a qual em direções paralelas ao campo magnético, como também indicado na figura (4.3).

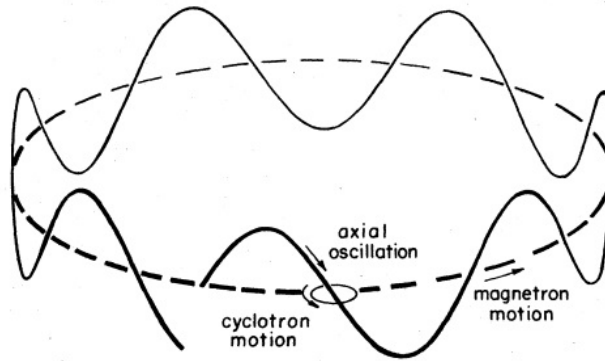


Figura 4.3: Órbita de uma partícula carregada em uma armadilha de Penning. A pequena circunferência indica o movimento cíclotron, enquanto a linha tracejada indica o deslocamento magnetron e a linha restante, mais espessa, é a oscilação axial (Brown e Gabrielse, 1986).

O movimento da partícula capturada no interior da armadilha induz cargas imagens alternantes nos eletrodos dos envoltórios ("endcap") e dos anéis ("rings"), que por sua vez gera uma corrente oscilante, a qual flui para um detector, tornando possível, com mais algumas sutilezas não especificadas aqui, as medidas das três frequências (cíclotron $\bar{\omega}_c$, magnetron $\bar{\omega}_m$ e axial $\bar{\omega}_z$)² [23].

4.1.1 Teorema da Invariância

Para uma armadilha de Penning ideal, com os quadrupolos elétricos perfeitos e campo magnético completamente uniforme - totalmente alinhados, pode-se descrever o movimento composto integralmente de forma analítica. No entanto, uma armadilha real tem, inevitavelmente, inúmeras imperfeições, tais como: campo magnético inhomogêneo; campos desalinhados; imperfeições nos eletrodos da armadilha, como desvios

²Aqui usamos a definição $\omega = 2\pi\nu$, e usamos a barra em cada uma para indicar que é o valor obtido no laboratório.

de sua geometria ideal para produção do campo elétrico; etc. Sendo, talvez, a principal fonte de imperfeição o desalinhamento entre o campo magnético e o eixo de simetria dos eletrodos da armadilha [24]. Isso leva a modificações nos valores das frequências medidas nos sensores, ou seja, por exemplo, quando mede-se diretamente o valor da frequência cíclotron, não podemos usar este valor para substituir na equação (4.1) e determinar assim a massa da partícula, pois essa frequência cíclotron, modificada devido as imperfeições da armadilha, não é condizente com as hipóteses idealizadas que levam à (4.1), logo essas duas frequências cíclotrons não devem ter o mesmo valor. Felizmente, existe um teorema, o chamado teorema da invariância, que torna possível determinar a frequência cíclotron real ($\omega_c = 2\pi\nu_c$) em função da frequência cíclotron modifica $\bar{\omega}_c$, da frequência magnetron $\bar{\omega}_m$ e da frequência axial $\bar{\omega}_z$, que são medidas diretamente no laboratório. Tal teorema é válido para alterações dos termos quadráticos do potencial eletrostático, causadas por imperfeições inevitáveis da armadilha, tais como as supracitadas.

Observamos que um potencial eletrostático quadrático, V , pode ser expresso como [23]:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 A_{kl} x_k x_l, \quad (4.2)$$

onde A_{kl} é uma matriz simétrica, a qual a equação de Laplace exige que tenha traço nulo, e $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Uma rotação do eixo de coordenadas produz uma transformação $A \rightarrow RAR^{-1}$, onde R é uma matriz ortogonal. Nós realizamos, então, uma rotação para trabalhar no sistema de coordenadas do eixo principal, onde RAR^{-1} é diagonal, mas ainda sim com traço nulo, já que uma transformação de similaridade não modifica o traço. Neste sistema de coordenada a energia potencial U tem a forma [23]

$$U = \frac{1}{2} m \omega_z^2 [z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\varepsilon(x^2 - y^2)] \quad (4.3)$$

onde ε é um parâmetro de assimetria que representa as imperfeições harmônicas, de maneira geral. E a constante multiplicativa global ($\frac{1}{2} m \omega_z^2$) foi escolhida de tal forma que ω_z seja a frequência de oscilação harmônica axial, no limite de quando o campo

magnético $\vec{B}$ é alinhado perfeitamente ao longo do eixo z, positivo ou negativo, tornando o movimento ao longo desse eixo desacoplado do plano xy . É tratado o caso geral, de quando o campo magnético desalinhado é dado por

$$B_x = B \cos \varphi \sin \theta, \quad (4.4)$$

$$B_y = B \sin \varphi \sin \theta, \quad (4.5)$$

$$B_z = B \cos \theta, \quad (4.6)$$

no sistema de coordenadas dos eixos principais.

Calculando a força de Lorentz e usando a segunda lei de Newton é possível obter três equações diferenciais de segunda ordem, lineares e acopladas. Sendo que este conjunto de equações tem uma solução apenas se a frequência é uma autofrequência $\bar{\omega}$ determinada pela equação característica deste sistema. Assim, a equação característica fornecerá que [23]

$$\omega_c = \sqrt{\bar{\omega}_c^2 + \bar{\omega}_m^2 + \bar{\omega}_z^2}, \quad (4.7)$$

ou seja, a frequência cíclotron é determinada em termos das autofrequências, que são medidas no laboratório, independentemente das imperfeições da armadilha de Penning, já que não é especificada a forma do desajuste (foi tratada de maneira completamente geral através do parâmetro ε). A equação (4.7) é o teorema da invariância, das armadilhas de Penning.

4.2 Artigos que Medem a Massa do Próton

Os dois valores da massa do próton, cuja discrepância tentaremos justificar aqui, são de $m_{p1} = 1,007276466583(33)\text{u}$ e $m_{p2} = 1,00727646695(18)\text{u}$, estando esses valores em unidades de massa atômica. Os números entre parênteses indicam a incerteza do

valor, se referindo sempre aos últimos algarismos³. O primeiro valor, m_{p1} , foi medido no trabalho de F. Heibe, *et al*, em Julho de 2017 [6], onde eles medem a massa do próton com uma precisão de 32 partes por trilhão, que é mais preciso que o valor atual recomendado pelo CODATA [25] por um fator 3, no entanto desvia do valor referido com cerca de 3 desvios padrões. O segundo valor, m_{p2} , foi medido no trabalho de A. Solders, *et al*, publicado em Julho de 2008 [7].

4.2.1 Medida de m_{p1}

O valor de m_{p1} , medido no primeiro artigo, é alcançado através da comparação da frequência cíclotron do próton com a do íon de carbono completamente ionizado (que é usado como íon de referência), $^{12}C^{6+}$, em um mesmo campo magnético de uma armadilha de Penning. Para isso, observa-se que a massa de $^{12}C^{6+}$ pode ser escrita como

$$m(^{12}C^{6+}) = m(^{12}C) - 6m(e^-) + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2}, \quad (4.8)$$

Sendo que $E_{i,j}$ indica a energia de ionização dos 6 elétrons removidos do átomo de carbono, c a velocidade da luz no vácuo, $m(e^-)$ a massa dos elétrons, e $m(^{12}C)$ a massa do átomo de carbono-12 com todos os seus elétrons. Sendo $m(^{12}C)$ a definição da massa atômica, onde $m(^{12}C) = 12u$. A equação (4.8) pode ser expressa, convenientemente, em unidades de massa atômica, usando os devidos fatores de conversão entre unidades. O valor de $m(e^-)$, usado neste artigo, é medida por S. Sturm, *et al*, em 2014 [26], e as energias de ionização dos elétrons são fornecidas pelo NIST(National Institute of Standards and Technology) [27].

Realizando os cálculos, utilizando-se dos valores mencionados e tomando cuidado com a propagação das incertezas, a equação (4.8) fornece que [6]

$$m(^{12}C^{6+}) = 11,996709626513(10)u. \quad (4.9)$$

³Isso é feito para termos uma representação compacta dos valores e suas incertezas. Como, por exemplo, temos que m_{p1} escrito explicitamente seria: $m_{p1} = (1.007276466583 \pm 0.000000000033)u$.

Assim, só é preciso determinar o valor das frequências cíclotrons medidas, já que podemos usar a equação (4.1) para se chegar em uma expressão referente à massa do próton. Isso é feito escrevendo a frequência cíclotron para o íon de carbono e para o próton, dadas pela equação (4.1), e tomando a razão entre elas. resultando em

$$m_{p1} = \frac{\nu_c(^{12}C^{6+})}{\nu_c(p)} \frac{m(^{12}C^{6+})}{6}, \quad (4.10)$$

onde $\nu_c(^{12}C^{6+})$ e $\nu_c(p)$ são as frequências cíclotrons do íon de carbono e do próton, respectivamente, e o 6 que aparece no denominador é devido a carga do íon de carbono. Na realidade, como comentado anteriormente, na armadilha de Penning o que se mede é a frequência cíclotron modificada, de magnetron e a axial, usando o teorema da invariância para se chegar ao valor correto da frequência cíclotron. Chamando a razão das frequências cíclotrons de R_1 , reescrevemos (4.10) como

$$m_{p1} = R_1 \frac{m(^{12}C^{6+})}{6}. \quad (4.11)$$

O valor medido de R_1 , por meio de várias técnicas experimentais e detalhes técnicos não mencionados aqui, também com o auxílio do teorema da invariância, é de 0,5037763676431(165) [6]. Nesta incerteza de R_1 , já estão computadas as incertezas estatísticas e sistemáticas das medidas, que são associadas a, por exemplo, correções de efeitos relativísticos, e outros mais [6, 23]. Logo, usando o valor de R_1 em (4.11) e calculando a propagação de incertezas, obtem-se que [6]

$$m_{p1} = 1,007276466583(33). \quad (4.12)$$

4.2.2 Medida de m_{p2}

Por outro lado, a massa do próton, medida no segundo artigo [7], é obtida de forma não tão direta. Nele se compara a frequência cíclotron de uma molécula de hidrogênio ionizada (que é o íon de interesse), H_2^+ , à de um íon de de deutério (que é o íon de

referência), D^+ . Ambas são medidas no mesmo campo magnético de uma armadilha de Penning, de tal forma que a massa da molécula de hidrôgênio ionizada é dada por [7]

$$m(H_2^+) = \frac{\nu_c(D^+)}{\nu_c(H_2^+)} m(D^+) \quad (4.13)$$

sendo $\nu_c(D^+)$ e $\nu_c(H_2^+)$ as frequências cíclotrons do deutério ionizado e da molécula de hidrogênio ionizada, respectivamente. O valor da massa do D^+ , $m(D^+)$, é extraído da medida realizada por S. L. Zafonte e R. S. Van Dick Jr, em março de 2015 [28], e tem o valor de 2,01355321273(4)u. Definindo, então, a razão da frequência cíclotron medida como $R_2 = \nu_c(H_2^+)/\nu_c(D^+)$, teremos que

$$m(H_2^+) = \frac{m(D^+)}{R_2}. \quad (4.14)$$

O valor de R_2 medido no trabalho de A. Solders, *et al*, é de 0,99923165933(17). Neste valor da incerteza já estão inclusos todos os possíveis erros relevantes. Portanto, substituindo este valor de R_2 em (4.14), obtemos que [7]

$$m(H_2^+) = 2,01510149716(34)\text{u}. \quad (4.15)$$

O valor de m_{p2} é obtido de (4.15). Para isto, observamos que a massa da molécula de hidrogênio neutra, $m(H_2)$, pode ser escrita como

$$m(H_2) = m(H_2^+) + m(e^-) - E_i(H_2)/c^2, \quad (4.16)$$

onde $m(e^-)$ é a massa do elétron e $E_i(H_2)$ é a energia de ionização de um elétron da molécula de hidrogênio, bem como

$$m(H_2) = 2m(H) - E_l(H_2)/c^2, \quad (4.17)$$

sendo $m(H)$ a massa do átomo de hidrogênio e $E_l(H_2)$ a energia de ligação entre os

átomos da molécula de hidrogênio. A massa do átomo de hidrogênio é dada por

$$m(H) = m_{p2} + m(e^-) - E_i(H)/c^2, \quad (4.18)$$

onde $E_i(H)$ é a energia de ionização do átomo de hidrogênio (para um elétron no estado $1S$). Assim, substituindo $m(H)$ dada pela equação (4.18) na equação (4.17), e combinando (4.17) com (4.16), o valor da massa do próton é

$$m_{p2} = \frac{1}{2} [m(H_2^+) - m(e^-) - E_i(H_2)/c^2 + 2E_i(H)/c^2 + E_l(H_2)/c^2]. \quad (4.19)$$

Os valores de $m(e^-)$ e $E_i(H)$ são importados do CODATA [7,29]. Já os valores de $E_i(H_2)$ e $E_l(H_2)$ são retirados dos cálculos e medições feitas por G. Herzberg, em 1970 [7,30]. Finalmente, usando todos esses valores na equação (4.19) e executando os cálculos, com os devidos cuidados nas conversões de unidades e propagação de erros, obtém-se que

$$m_{p2} = 1,00727646695(18)\text{u}. \quad (4.20)$$

Um aspecto a ser considerado, na descrição sucinta realizada deste segundo artigo, é como o valor da massa do deutério, o qual utilizamos, foi medido por S. L. Zafonte e R. S. Van Dick Jr., através da comparação da frequência cíclotron do deutério ionizado (agora como íon de interesse), D^+ , e o carbono totalmente ionizado (íon de referência), $^{12}C^{6+}$, em um mesmo campo magnético de uma armadilha de Penning. Sendo a massa de $^{12}C^{6+}$, $m(^{12}C^{6+})$, medida da mesma forma como feito na equação (4.8), onde agora o valor da massa do elétron, além do valor das energias de ionização dos seis elétrons do carbono, é o recomendado pelo CODATA [31]. Desta forma, recorrentemente, temos que a massa do deutério ionizado, $m(D^+)$, é dada por

$$m(D^+) = \frac{\nu_c(^{12}C^{6+})}{\nu_c(D^+)} \frac{m(^{12}C^{6+})}{6}, \quad (4.21)$$

onde $\nu_c(^{12}C^{6+})$ e $\nu_c(D^+)$ são as frequências cíclotrons do íon do carbono e do deutério,

respectivamente. Definindo $\nu_c(D^+)/\nu_c(^{12}C^{6+}) = R_3$, a equação 4.21 fica escrita como

$$m(D^+) = \frac{1}{6} \frac{m(^{12}C^{6+})}{R_3}, \quad (4.22)$$

e o valor de R_3 encontrado no experimento de S. L. Zafonte e R. S. Van Dick Jr (2015) é de 0,9929966547425(199) [28], com todas as incertezas já computadas, como mencionado anteriormente. Então, usando este valor em 4.22 encontra-se que [28]

$$m(D^+) = 2,01355321273(4)\text{u}. \quad (4.23)$$

5 *Contribuição Gravitacional Devido as Dimensões Extras*

No capítulo anterior, vimos que os valores de m_{p1} e m_{p2} diferem entre si, e seus intervalos de incerteza não se interceptam. Algo a ser destacado aqui, é que, tanto no artigo que mede m_{p1} quanto no artigo que mede m_{p2} , as energias de ionização utilizadas para se obter o valor dessas massas são medidas experimentalmente [27, 30], exceto os valores das energias de ionização dos elétrons que estão no estado $1S$. Como, por exemplo, para retirar o último elétron do carbono, $^{12}C^{5+}$, e transformá-lo em $^{12}C^{6+}$, totalmente ionizado (tanto no artigo de F. Heibe, *et al* [6], quanto no artigo de S. L. Zafonte e R. S. Van Dick Jr [28]), bem como, a energia de ionização do hidrogênio, no artigo do A. Solders, *et al*.

Dessa forma, considerando que a energia de ionização referente ao último elétron é obtido por meio de um cálculo teórico, podemos propor efeitos extradimensionais nestas situações, já que em relação as demais, caso existissem, eles estariam escondidos nos valores experimentais medidos. Por isso, o que propomos neste trabalho é a inclusão de um termo associado a energia potencial gravitacional, aumentada devido as dimensões extras, entre o núcleo e o último elétron do estado $1S$, que justifique a diferença entre as massas medidas do próton. Ou seja, na verdade, queremos dizer que só obteve-se valores de massas diferentes porque não foi computado, no resultado teórico para a energia de ionização, a energia potencial gravitacional da interação entre os núcleos e o elétron do estado $1S$.

Na secção (3.2.1), damos a contribuição da energia potencial gravitacional sobre os níveis de energia do estado S de um átomo ou íon do tipo hidrogênio. Assim, a energia de ionização faltante, devido a interação gravitacional, será dada pela equação (3.31) com sinal trocado, onde usaremos apenas a primeira aproximação. Portanto, o termo

de correção dessa energia de ionização, para o estado $1S$ será:

$$\delta E_{1S}^{gI} = \gamma_\delta \frac{G_n m_N m_e}{\sigma^{\delta-2}} |\psi_{1S}(0)|^2, \quad (5.1)$$

sendo

$$|\psi_{1S}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_B^3}, \quad (5.2)$$

onde $|\psi_{1S}(0)|^2$ é a densidade de probabilidade do estado $1S$ avaliada na origem e a_B o raio de Bohr do átomo.

Nos nossos cálculos que serão feitos adiante, essa correção deve ser levada em conta sempre que considerarmos a energia de ionização do último elétron, no estado $1S$. Nossa ideia é a de que essa correção, advinda das dimensões extras, permitirá impor que m_{p1} seja igual a m_{p2} . Desta forma, podemos determinar para quais valores dos parâmetros extradimensionais esta igualdade é satisfeita. Temos assim, uma maneira de chegar a um valor para a constante gravitacional extradimensional, G_n , em função do número de dimensões extras e do parâmetro σ , que está associado a espessura da função de onda na direção das dimensões extras.

Nos artigos que medem m_{p1} e m_{p2} são usados valores diferentes para a massa do elétron. Além disso, elas são medidas de maneira conceitualmente diferente [26, 32], como será melhor colocado mais adiante. Por isso, para que tudo fique consistente e não haja equívocos, uma vez que iremos relacionar m_{p1} com m_{p2} , iremos fazer uma adaptação nas medidas de m_{p1} e m_{p2} . Para isso, devemos refazer os cálculos de m_{p1} e m_{p2} usando o mesmo valor de massa do elétron e de massa do carbono totalmente ionizado, em ambos¹. Faremos isso de duas maneiras. Na primeira utilizaremos a massa do elétron medida por Dean L. Farnham, *et al* em 1995 [32], e o valor de $m(^{12}C^{6+})$ que ele usa. Já na segunda, usaremos estes dados do artigo S. Sturm, *et al* em 2014 [26], para a massa do elétron e do F. Heibe, *et al* em 2014, [6] para $m(^{12}C^{6+})$.

Efetuamos os cálculos de m_{p1} e m_{p2} de duas formas, porque cada forma terá uma

¹Isso não terá nenhum problema significativo, pois estamos utilizando dados experimentais.

diferença fundamental em relação à outra, que é como a massa do elétron é medida. Na primeira, a massa do elétron é medida comparando sua frequência cíclotron à do carbono totalmente ionizado, numa armadilha de Penning [32] e portanto, de acordo com nossa proposta, aparecerá mais um termo de correção devido as dimensões extras. E na segunda, a massa do elétron é medida usando uma nova abordagem, em que se compara a sua frequência de precessão do spin em relação a frequência cíclotron do íon ao qual o elétron está ligado fortemente, que no caso é o $^{12}\text{C}^{5+}$, e sendo assim, agora, não aparecerá termo de correção devido as dimensões extras, já que este último elétron não é removido.

5.1 Primeira Forma de Inserir os Termos de Correção

A massa do elétron no trabalho de Dean L. Farnham, *et al* em 1995, é medida por um método análogo aquele empregado na medida da massa do próton, que já foi discutido no capítulo anterior. De forma pragmática, temos que a massa do elétron é obtida da expressão [32]

$$m(e^-) = \frac{\nu_c(^{12}\text{C}^{6+})}{\nu_c(e^-)} \frac{m(^{12}\text{C}^{6+})}{6}. \quad (5.3)$$

Por sua vez, sabemos que $m(^{12}\text{C}^{6+})$ é dado em termos da massa do elétron. Usando a equação (4.8) teremos que

$$m(e^-) = \frac{\nu_c(^{12}\text{C}^{6+})}{\nu_c(e^-)} \frac{1}{6} [m(^{12}\text{C}) - 6m(e^-) + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2}], \quad (5.4)$$

logo, isolando $m(e^-)$ e chamando $\nu_c(^{12}\text{C}^{6+})/\nu_c(e^-) = R_4$, obtemos

$$m(e^-) = \frac{R_4}{(1 + R_4)6} [m(^{12}\text{C}) + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2}]. \quad (5.5)$$

O que se mede no laboratório é o valor de R_4 , que é de 0,00027436518589(28) de acordo com [32]. No cálculo de $m(e^-)$ o valor total da energia de ionização do carbono usado é de 1105,864(4)nu, dada em unidade de massa atômica (u). A partir desses valores,

realizando os cálculos, juntamente com os devidos fatores de conversão e propagação de erros, obtém-se que $m(e^-) = 0,0005485799111(12)\text{u}$ [32]. Aqui é importante lembrar que nesse cálculo da massa do elétron é necessário usar novamente o valor teórico da energia de ionização do último elétron do carbono. Portanto, seguindo o nosso procedimento, no contexto de dimensões extras, também colocaremos um termo de correção associado as dimensões extras, como veremos mais adiante.

Usando, então, os valores de $m(e^-) = 0,0005485799111(12)\text{u}$ e de $m(^{12}\text{C}^{6+})^2$ retirados de [32], obtemos $m_{p1} = 1,007276466581(33)\text{u}$ e $m_{p2} = 1,00727646695(18)\text{u}$. Ou seja, não observamos nenhuma mudança relevante nos valores dos artigos originais [6, 7], isso se deve porque o principal fator limitante de precisão para se obter essas medidas é associado ao valor da razão das frequências cíclotrons. A partir de agora, usaremos o subíndice w apenas para apontar que estamos usando esses novos valores, e não criar confusão com valores do capítulo anterior.

Assim, já incluindo os termos de correção, devido à contribuição gravitacional, teremos da equação (4.10) que:

$$m_{wp1} = \alpha m_w(^{12}\text{C}^{6+}) = \alpha [m(^{12}\text{C}) - 6m_w(e^-) + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2} + \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}] \quad (5.6)$$

sendo $\alpha = \frac{1}{6} \frac{\nu_c(^{12}\text{C}^{6+})}{\nu_c(p)}$ e δE_{S-C}^{gI} a energia adicional necessária para íonizar o último elétron de estado $1S$ do núcleo de carbono, devido a interação gravitacional entre o núcleo e o último elétron, modificada pelas dimensões extras. Mas devemos lembrar que $m_w(e^-)$ é dado pela equação (5.5), onde deve aparecer outro termo de correção. Portanto

$$m_{wp1} = \alpha \{ m(^{12}\text{C}) - 6 \left[\frac{R_4}{(1 + R_4)6} [m(^{12}\text{C}) + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2} + \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}] + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2} + \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2} \right] \}, \quad (5.7)$$

e reorganizando esta expressão ficamos com

$$m_{wp1} = \alpha [m(^{12}\text{C}) - 6m_w^*(e^-) + \sum_{j=1}^6 \frac{E_{i,j}}{c^2} - 5 \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}], \quad (5.8)$$

² $m(^{12}\text{C}^{6+}) = 11,9967096263974(83)\text{u}$.

onde o asterisco aqui, a partir de agora usados, indicarão as quantidades sem os termos de correção da energia, tendo assim os mesmos valores de anteriormente. Logo

$$m_{wp1} = \alpha m_w^*(^{12}C^{6+}) - 5\alpha \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2} = m_{wp1}^* - 5\alpha \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}. \quad (5.9)$$

Agora, antes de colocarmos os termos de correção da energia para m_{wp2} , devemos combinar as equações (4.13), (4.19) e (4.21), de tal forma à escrever

$$m_{wp2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\nu_c(D^+)}{\nu_c(H_2^+)} \frac{\nu_c(^{12}C^{6+})}{\nu_c(D^+)} \frac{m_w(^{12}C^{6+})}{6} - m_w(e^-) - E_i(H_2)/c^2 + 2E_i(H)/c^2 + E_l(H_2)/c^2 \right]. \quad (5.10)$$

Inserindo, então, os termos de correção em (5.10), para $m_w(^{12}C^{6+})$, $m_w(e^-)$ e $E_i(H)$, analogamente ao que foi feito para m_{wp1} , e procedendo de forma mais direta, teremos que

$$m_{wp2} = \frac{1}{2} \left\{ \beta [m_w^*(^{12}C^{6+}) - 5 \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}] - m_w^*(e^-) - \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2} - \frac{E_i(H_2)}{c^2} + 2 \left[\frac{E_i^*(H)}{c^2} + \frac{\delta E_{S-H}^{gI}}{c^2} \right] + \frac{E_l(H_2)}{c^2} \right\}, \quad (5.11)$$

onde $\beta = \frac{1}{6} \frac{\nu_c(D^+)}{\nu_c(H_2^+)} \frac{\nu_c(^{12}C^{6+})}{\nu_c(D^+)}$ e δE_{S-H}^{gI} é o termo de energia adicional, necessária para íonizar o elétron do estado $1S$, do átomo de hidrogênio. Manipulando (5.11), podemos reescrevê-la como

$$m_{wp2} = m_{wp2}^* - \frac{1}{2} (5\beta + 1) \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2} + \frac{\delta E_{S-H}^{gI}}{c^2}. \quad (5.12)$$

Aqui, finalmente, podemos testar a nossa ideia. Como já mencionado, esperamos que as correções dos cálculos para m_{wp1} e m_{wp2} , devido as dimensões extras, permitam resolver a incompatibilidade das medidas na massa do próton. Para verificarmos isso, vamos impor que $m_{wp1} = m_{wp2}$. A partir de (5.9) e (5.12), encontramos

$$\Gamma_w \delta E_{S-C}^{gI} - \delta E_{S-H}^{gI} = [m_{wp2}^* - m_{wp1}^*] c^2, \quad (5.13)$$

sendo $\Gamma_w = \frac{5}{2}(\beta - 2\alpha) + \frac{1}{2}$. Substituindo δE_{S-C}^{gI} e δE_{S-H}^{gI} por suas respectivas expressões

dadas pela equação (5.1), obtemos

$$\Gamma_w \gamma_\delta \frac{G_n m_w ({}^{12}C^{6+}) m_w(e^-)}{\sigma_C^{\delta-2}} |\psi_{1S}^C(0)|^2 - \gamma_\delta \frac{G_n m_{wp1} m_w(e^-)}{\sigma_H^{\delta-2}} |\psi_{1S}^H(0)|^2 = [m_{wp2}^* - m_{wp1}^*] c^2. \quad (5.14)$$

Em $m_w({}^{12}C^{6+})$, $m_w(e^-)$ e m_{wp1} aparecerão termos de correção recorrentes, em cada um, mas vamos desprezá-los, partindo da hipótese que contibuições de segunda ordem são muito pequenas, a qual realmente é constatada (ver apêndice A). Observamos, também, que para a energia de correção do hidrogênio na equação (5.14) poderíamos ter usado tanto m_{wp1} quanto m_{wp2} , utilizamos m_{wp1} por simplicidade. Supondo que $\sigma_C = x\sigma_H$, isto é, se o confinamento do carbono e do hidrogênio pudessem ser diferentes por um fator x , obtemos

$$\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}} = \frac{[m_{wp2}^* - m_{wp1}^*] c^2}{m_w^*(e^-) m_w^*({}^{12}C^{6+}) [\frac{\Gamma_w}{x^{\delta-2}} |\psi_{1S}^C(0)|^2 - \alpha |\psi_{1S}^H(0)|^2]}. \quad (5.15)$$

A densidade de probabilidade do estado $1S$, avaliada na origem, para o núcleo de carbono com um elétron e o átomo de hidrogênio é dada, respectivamente, por $\frac{1}{\pi a_{BC}^3}$ e $\frac{1}{\pi a_{BH}^3}$. Onde a_B é o raio de Bohr, que pode ser escrito como

$$a_B = \frac{\hbar}{Z m_r c f}, \quad (5.16)$$

em que Z é carga do núcleo, c a velocidade da luz, f a constante de estrutura fina e m_r a massa reduzida do sistema, que é dada por

$$m_r = \frac{m_N m(e^-)}{m_N + m(e^-)}, \quad (5.17)$$

o subíndice N se refere ao núcleo do átomo (no nosso caso ${}^{12}C^{6+}$ ou o próton). Notamos, assim, que na massa reduzida, mais uma vez teríamos termos de correção, mas iriam produzir correções de segunda ordem. Assim, em primeira aproximação, temos

$$m_r = \frac{m_N^* m_w^*(e^-)}{m_N^* + m_w^*(e^-)}. \quad (5.18)$$

Então, combinando as equações (5.18) e (5.16) na equação (5.15), e fazendo $\sigma_C = \sigma_H$ ($x = 1$) e realizando todos os cálculos, com os devidos cuidados na propagação de incertezas, encontramos, em unidades (S.I.), que:

$$\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}} = 1,309(650)10^4 \frac{\text{J m}^3}{\text{kg}^2}. \quad (5.19)$$

Este valor da razão dos parâmetros extradimensionais, considerando $\sigma_C = \sigma_H$, é maior do que o valor encontrado por Lemos, A. S., em 2018 [12], para resolver o problema do raio do próton [33], por um fator de 10^8 . Contudo, se fixarmos o valor encontrado por Lemos, A. S. ($\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}} = 5,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{J m}^3}{\text{kg}^2}$), supondo $\sigma_C = x\sigma_H$, encontramos um valor para x em função do número de dimensões extras, o qual compatibiliza os nossos resultados, que será:

$$x^{\delta-2} = 3,98(1,98)10^{-8}. \quad (5.20)$$

Assim, para $\delta = 6$ (seis dimensões extras), por exemplo, se o confinamento do carbono for cem vezes mais forte do que o do hidrogênio, o problema da massa e o problema do raio do próton seriam explicados simultaneamente pelas dimensões extras usando-se o mesmo valor $\frac{G_n}{\sigma_H^{\delta-2}}$.

5.2 Segunda Forma de Inserir os Termos de Correção

Como mencionado anteriormente, na massa do elétron, medida por S. Sturm, *et al*, não haverá termos de correção devido às dimensões extras. Isso ocorre porque a massa do elétron é medida comparando-se a sua frequência de precessão, dada por [26]

$$\nu_p = \frac{g}{4\pi} \frac{q_e}{m(e^-)} B, \quad (5.21)$$

onde g é o conhecido *fator-g* do elétron e q_e indica a carga do elétron, com a frequência cíclotron do núcleo de carbono, $^{12}\text{C}^{5+}$, ao qual está ligado, no mesmo campo magnético

B , dada por

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{q_C}{m(^{12}C^{5+})} B, \quad (5.22)$$

sendo q_C a carga do íon de carbono ($^{12}C^{5+}$). Tomando a razão entre as equações (5.22) e (5.21), vemos que a massa do elétron é obtida de [26]

$$m(e^-) = \frac{g}{2} \frac{q_e}{q_C} \frac{1}{R_5} m(^{12}C^{5+}), \quad (5.23)$$

onde $R_5 = \nu_p/\nu_c$. Experimentalmente $R_5 = 4376,21050089(13)$, de acordo com [26]. Por sua vez, $m(^{12}C^{5+})$ é obtido, também, de forma totalmente análoga à equação (4.8), exceto que agora não contabilizamos a energia de ionização do último elétron. O fator- g é calculado usando a teoria da Eletrodinâmica Quântica (QED) [26]. Assim, realizando a conta, o valor obtido é $m(e^-) = 0,000548579909067(168)$ [26].

Como, neste experimento [26], o último elétron do carbono não é removido não há termos de correção provenientes das dimensões extras associados a medida da massa do elétron, como feito na seção anterior. Isto fará muita diferença, como veremos a seguir. Empregamos o subíndice h para indicar que estamos usando os novos valores: $m_{p1} = 1,007276466583(33)$ e $m_{p2} = 1,00727646695(18)$ baseados nos valores de $m(e^-)$, dado por S. Sturm, *et al*, e $m(^{12}C^{6+})$ dado por F. Heibe, *et al*. Logo, incluindo os termos de correção, analogamente ao que já foi feito na seção anterior, obtemos de (4.10) e (4.8) que

$$m_{hp1} = m_{hp1}^* + \alpha \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}. \quad (5.24)$$

E da combinação das equações (4.13), (4.19) e (4.21), como feito anteriormente, teremos

$$m_{hp2} = m_{hp2}^* + \frac{\beta}{2} \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2} + \frac{\delta E_{S-H}^{gI}}{c^2}. \quad (5.25)$$

Assim, impondo $m_{hp1} = m_{hp2}$, e fazendo as devidas substituições (seguindo os mesmos passos feitos na seção anterior), verificamos que

$$\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}} = - \frac{2[m_{hp2}^* - m_{hp1}^*]c^2}{m_h(e^-)m_h(^{12}C^{6+})[\frac{\Gamma_h}{x^{\delta-2}} |\psi_{1S}^C(0)|^2 + 2\alpha |\psi_{1S}^H(0)|^2]}, \quad (5.26)$$

sendo $\Gamma_h = \beta - 2\alpha$ e, novamente, usando $\sigma_C = x\sigma_H$. Então, fazendo $x = 1$ e executando o cálculo dos valores numéricos de cada grandeza, obtemos em unidades (S.I.) (já que $m_{hp2}^* > m_{hp1}^*$)

$$\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}} = -1,583(790)10^7 \frac{\text{J m}^3}{\text{kg}^2}, \quad (5.27)$$

onde também substituímos $|\Psi_{1S}^C(0)|^2$ e $|\Psi_{1S}^H(0)|^2$ com auxílio de (5.16) e (5.18). Aqui, notamos que, independentemente do valor de x , teríamos uma constante gravitacional negativa. Portanto, para esta segunda forma de computar a massa do elétron, os efeitos das dimensões extras não poderiam explicar o problema na medida da massa do próton.

6 Conclusão

O propósito desta dissertação foi de tentar entender o problema na medida da massa do próton através do cenário de teorias com dimensões extras, mais especificamente no cenário do modelo ADD. Tal problema é devido a discrepância entre o valor medido da massa do próton por F. Heibe, *et al* (2014) [6], que melhora a precisão das medidas, e o valor recomendado pelo CODATA. Apesar do novo valor medido ser mais preciso, ele é diferente do valor sugerido pelo CODATA por três vezes o seu desvio padrão.

Vimos que, considerando nosso universo dotado de dimensões extras, o potencial gravitacional de uma partícula pode ser aumentado para curtas distâncias no modelo adotado. Usamos, então, este quadro para investigar possíveis efeitos das dimensões extras sobre sistemas atômicos. Expomos, no capítulo 3, uma fórmula que nos permite calcular a energia potencial gravitacional de um átomo tipo hidrogênio no estado S , no contexto das dimensões extras.

Utilizamos, então, a ideia de que a energia do estado $1S$ dos átomos tipo hidrogênio é alterada, pela existência de dimensões extras, para tentar explicar o problema da massa do próton. Para isto, consideramos o artigo de Solders, *et al* (2008) [7], que também mede a massa do próton. Como já mencionamos, o valor extraído é incompatível com o valor apresentado no artigo mais recente de F. Heibe, *et al* (2014) [6]. Ambos os artigos, como visto, usam previsões teóricas para a energia de ionização de elétrons do estado $1S$. Assim para poder explicar a discrepância entre os valores das massas por meio de efeitos de dimensões extras, supomos que seus efeitos podem influenciar a energia dos níveis $1S$. Portanto, consideramos termos de correção da energia potencial gravitacional para átomos no estado $1S$. Especificamente, calculamos a energia potencial gravitacional do carbono com um único elétron e do átomo de hidrogênio.

Como vimos na seção (4.2), a determinação da massa do próton depende da massa do elétron, de acordo com o procedimento de medida adotado nos experimentos [6] e [7]. Por sua vez, dependendo de como a massa do elétron é medida, poderemos ter

ou não que considerar os efeitos das dimensões extras.

Considerando essa duas possibilidades, sendo a primeira descrita na seção (5.1), na qual aparecem termos de correção na medida da massa do elétron, uma vez que a medida da massa do elétron também dependerá do valor teórico da energia de ionização do elétron do estado $1S$ do átomo de carbono, concluimos que o problema da massa do próton pode ser explicado no contexto do modelo ADD. O valor obtido da razão dos parâmetros do espaço com dimensões superiores, visto na seção (5.1) quando $x = 1$, foi de $\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}} = 1,309(650)10^4 \frac{\text{J m}^3}{\text{kg}^2}$. Lembrando que x é o fator que diz o quanto os parâmetros de confinamento do carbono, σ_C , e do hidrogênio, σ_H , diferem, sendo que $\sigma_C = x\sigma_H$, é possível mostrar que, ajustando o valor de x , podemos tornar o valor da razão dos parâmetros, $\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}}$, compatível com o valor encontrado por Lemos, A.S., em 2018 [12], para solucionar o problema do raio do próton. Neste caso, o valor de x que torna os valores compatíveis é de $x^{\delta-2} = 3,98(1,98)10^{-8}$.

Na segunda possibilidade, descrita na seção (5.2), não aparecem termos de correção na medida da massa do elétron, pois a massa do elétron é medida com base no comportamento do spin do último elétron do carbono. Assim, não ocorre a ionização deste último elétron e, portanto, não se coloca o termo de acréscimo à energia de ionização associado as dimensões extras. Neste caso, vimos que a discrepância entre os valores da massa do próton só poderia ser explicada se a constante gravitacional nas dimensões extras fosse negativa. Consequentemente, para esta segunda forma, os efeitos das dimensões extras não poderiam explicar o problema na medida da massa do próton.

Apêndice A

Contribuição dos Termos de Correção de Segunda Ordem

Para constatar a hipótese de que os termos de correção de segunda ordem são desprezíveis vamos averiguar a hipótese utilizada, considerando apenas a contribuição do termo de primeira ordem, em um exemplo para $m_h(^{12}C^{6+})^1$, com o valor da razão extradimensional, $\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}}$, a qual foi encontrada. Isso se dará de forma semelhante para as demais situações em que aparecerem termos recorrentes. Observando, então, que

$$m_h(^{12}C^{6+}) = m_h^*(^{12}C^{6+}) + \frac{\delta E_{S-C}^{gI}}{c^2}, \quad (A-1)$$

com δE_{S-C}^{gI} dada pela equação (5.1), ou seja,

$$m_h(^{12}C^{6+}) = m_h^*(^{12}C^{6+}) + \frac{1}{c^2} \gamma_\delta \frac{G_n m_h(^{12}C^{6+}) m_h(e^-)}{\sigma^{\delta-2}} \frac{1}{\pi a_{BC}^3}, \quad (A-2)$$

onde já usamos $|\psi_{1S}(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_{BC}^3}$ na equação (A-2), pode ser escrito como

$$m_h(^{12}C^{6+}) \left[1 - \frac{1}{c^2} \gamma_\delta \frac{G_n m_h(e^-)}{\sigma^{\delta-2}} \frac{1}{\pi a_{BC}^3} \right] = m_h^*(^{12}C^{6+}). \quad (A-3)$$

Logo, a hipótese será válida se $y \ll 1$, sendo $y = \frac{1}{c^2} \gamma_\delta \frac{G_n m_h(e^-)}{\sigma^{\delta-2}} \frac{1}{\pi a_{BC}^3}$, quando usarmos a aproximação que $m_h(^{12}C^{6+}) \approx m_h^*(^{12}C^{6+})$. Assim, usando o valor de $\frac{\gamma_\delta G_n}{\sigma_H^{\delta-2}}$ encontrado para este caso, juntamente com $a_{BC} = \frac{\hbar}{Z m_r c f}$, sendo $m_r = \frac{m_h(^{12}C^{6+}) m_h(e^-)}{m_h(^{12}C^{6+}) + m_h(e^-)}$, verificamos que:

$$y = 7,66(3,67)10^{-8}. \quad (A-4)$$

Portanto, podemos considerar $y \ll 1$. Por isso a hipótese é consistente e os termos de correção de segunda ordem realmente são desprezíveis. O y será menor ainda para os demais casos, visto que a razão extradimensional será menor. Os demais casos se

¹Massa do carbono totalmente ionizada considerada na segunda forma de inserir os termos de correção, a qual a massa do elétron não tem correção.

referem a massa do elétron e a massa do carbono totalmente ionizado, utilizados na primeira forma de introduzir os termos de correção.

Bibliografia

- [1] OVERDUIN, James Martin; WESSON, Paul S. Kaluza-klein gravity. *Physics Reports*, 1997, 283.5-6: 303-378.
- [2] G. Nordstrijm, ijber die MGglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen, *Phys. Zeitschr.* 15 (1914) 504
- [3] KALUZA, T. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- [4] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926. ISSN 0044-3328. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01397481>.
- [5] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys.Lett.*, B429, p. 263–272, 1998.
- [6] HEIßE, Fabian, et al. High-precision measurement of the proton's atomic mass. *Physical review letters*, 2017, 119.3: 033001.
- [7] SOLDERS, Andreas, et al. Determination of the proton mass from a measurement of the cyclotron frequencies of D^+ and H^{2+} in a Penning trap. *Physical Review A*, 2008, 78.1: 012514.
- [8] SILVA, A. A. Um Estudo Sobre Dimensões Extras. 101 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Física, Universidade Federal de Campina Grande, 2009.
- [9] AAD, G. et al. Search for dark matter candidates and large extra dimensions in events with a photon and missing transverse momentum in pp collision data at $p s = 7\text{TeV}$ with the ATLAS detector. *Phys. Rev. Lett.*, v. 110, n. 1, p. 011802, 92013; CMS COLLABORATION et al. Search for new phenomena in monophoton final states in proton–proton collisions at $p s = 8\text{ TeV}$. *Physics letters B*, v. 755, p.102-124, 2016.

- [10] ARKANI-HAMED, Nima; DIMOPOULOS, Savas; DVALI, Georgi. The universe's un-seen dimensions. *Scientific American*, 2000, 283.2: 62-69.
- [11] RUBAKOV, V.; SHAPOSHNIKOV, M. Do We Live Inside a Domain Wall? *Phys.Lett.*, B125, p. 136–138, 1983.
- [12] LEMOS, A. S. Efeitos das Dimensões Extras em Sistemas Atômicos e o Problema do Raio do Próton. 94 p. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 2018.
- [13] MURATA, Jiro; TANAKA, Saki. A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Classical and Quantum Gravity*, 2015, 32.3: 033001.
- [14] KEHAGIAS, A.; SFETSOS, K. Deviations from the $1/r^2$ Newton law due to extra dimensions. *Physics Letters B*, 2000, 472.1-2: 39-44.
- [15] CAVALCANTE, Marisa Almeida; TAVOLARO, Cristiane Rodrigues Caetano; HAAG, Rafael. Experiências em física moderna. *Física na Escola*, São Paulo, 2005, 6.1: 75-82.
- [16] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. Constraints on extra dimensions from atomic spectroscopy. *Physical Review D*, v. 94, n. 8, p. 084033, 2016.
- [17] LI, Zhigang; CHEN, Xuelei. Can Large Extra Dimensions Solve the Proton Radius Puzzle?. *arXiv preprint arXiv:1303.5146*, 2013.
- [18] WANG, Li-Bang; NI, Wei-Tou. Proton radius puzzle and large extra dimensions. *Modern Physics Letters A*, v. 28, n. 20, p. 1350094, 2013.
- [19] WAN-PING, Zhou; PENG, Zhou; HAO-XUE, Qiao. Detecting extra dimensions by Hydrogen-like atoms. *Open Physics*, v. 13, n. 1, 2015.
- [20] SALUMBIDES, E. J. et al. Constraints on extra dimensions from precision molecular spectroscopy. *New Journal of Physics*, v. 17, n. 3, p. 033015, 2015.

- [21] FENG, Luo; HONG-YA, Liu. Exploring extra dimensions in spectroscopy experiments. *Chinese Physics Letters*, v. 23, n. 11, p. 2903, 2006. LUO, Feng; LIU, Hongya. Using Muonic Hydrogen in Optical Spectroscopy Experiment to Detect Extra Dimensions. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 46, n. 3, p. 606-613, 2007.
- [22] ZHI-GANG, Li; WEI-TOU, Ni; PATÓN, Antonio Pulido. Extra dimensions and atomic transition frequencies. *Chinese Physics B*, v. 17, n. 1, p. 70, 2008.
- [23] BROWN, Lowell S.; GABRIELSE, Gerald. Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap. *Reviews of Modern Physics*, 1986, 58.1: 233.
- [24] BROWN, Lowell S.; GABRIELSE, Gerald. Precision spectroscopy of a charged particle in an imperfect Penning trap. *Physical Review A*, 1982, 25.4: 2423.
- [25] MOHR, Peter J. PJ Mohr, DB Newell, and BN Taylor, *Rev. Mod. Phys.* 88, 035009 (2016).
- [26] STURM, Sven, et al. High-precision measurement of the atomic mass of the electron. *Nature*, 2014, 506.7489: 467.
- [27] A. Kramida and Y. Ralchenko, J. Reader and the NIST ASD Team, <http://physics.nist.gov/asd> [accessed May 17, 2017].
- [28] ZAFONTE, Steven L.; VAN DYCK JR, Robert S. Ultra-precise single-ion atomic mass measurements on deuterium and helium-3. *Metrologia*, 2015, 52.2: 280.
- [29] MOHR, P. J. PJ Mohr and BN Taylor, *Rev. Mod. Phys.* 77, 1 (2005).
- [30] HERZBERG, G. The dissociation energy of the hydrogen molecule. *Journal of Molecular Spectroscopy*, 1970, 33.1: 147-168.
- [31] Mohr P J, Taylor B N and Newell D B 2012 *Rev. Mod. Phys.* 84 1527–605
- [32] FARNHAM, Dean L.; VAN DYCK JR, Robert S.; SCHWINBERG, Paul B. Determination of the electron's atomic mass and the proton/electron mass ratio via Penning trap mass spectroscopy. *Physical review letters*, 1995, 75.20: 3598.

- [33] POHL, Randolph et al. The size of the proton. *Nature*, v. 466, n. 7303, p. 213-216, 2010.
- [34] KAPNER, D. et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark energy length scale. *Phys.Rev.Lett.*, v. 98, p. 021101, 2007.
- [35] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys.Rev.Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- [36] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to compactification. *Phys.Rev.Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999.