



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

Priscila Mayana Torres Barboza

Efeito Aharonov-Casher em potenciais centrais.

João Pessoa - PB

2018

Priscila Mayana Torres Barboza

Efeito Aharonov-Casher em potenciais centrais.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Física, área de concentração Física da Matéria Condensada.

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Orientador: Knut Bakke Filho

João Pessoa - PB

2018

B239e Priscila Mayana Torres Barboza

Efeito Aharonov-Casher em potenciais centrais./ Priscila Mayana Torres Barboza. – João Pessoa - PB, 2018-

85 p. : il.

Orientador: Knut Bakke Filho

Tese – Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física, 2018.

1. Efeito Aharonov-Casher. 2. Partícula neutra. I. Filho, Knut Bakke. II. Universidade Federal da Paraíba. III. Departamento de Física. IV. Efeito Aharonov-Casher em potenciais centrais.

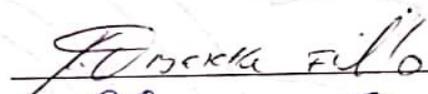
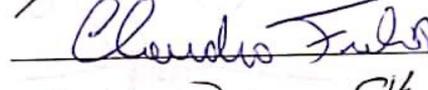
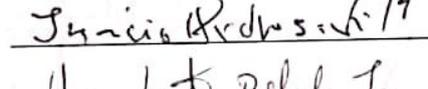
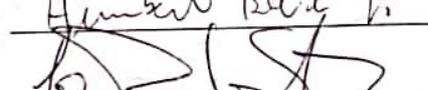
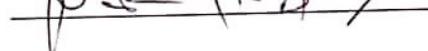
UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** da aluna **Priscila Mayana Torres Barboza**, candidata ao Título de Doutora em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos vinte e três dias do mês de novembro do ano de dois mil e dezoito, às 10:00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar a candidata ao grau de Doutora em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **Priscila Mayana Torres Barboza**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Knut Bakke Filho* (UFPB), orientador e presidente
7 da banca examinadora, *Cláudio Benedito da Silva Furtado* (UFPB), *Inácio de Almeida*
8 *Pedrosa* (UFPB), *Humberto Belich Júnior* (UFES) e *João Rafael Lúcio dos Santos*
9 (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes
10 a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que a candidata fizesse,
11 oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Efeito Aharonov-Casher em*
12 *potenciais centrais*”. Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca
13 Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: “**aprovada**”. Assim sendo, deve a
14 Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutora em Física na
15 forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai
16 assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **23 de**
17 **novembro de 2018**.

18

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Orientador – PPGF/UFPB
Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Humberto Belich Júnior
UFES
Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
UFCG

Dedicatória

À meu esposo Abinael e ao meu filho Arthur.

Agradecimentos

Ao meu orientador Dr. Knut Bakke, pela paciência e pela significativa orientação no meu trabalho;

Ao departamento de física da UFPB, pelo acolhimento e recursos estruturais;

À CAPES, pelo apoio financeiro para a execução deste trabalho;

À minha família: meu esposo Abinael, meus pais e irmã, e meu filho Arthur;

Aos amigos de graduação e pós-graduação que sempre me ajudaram: Itallo Costa, João Carlos, Antônio Carlos, Ricardo Luís e Clarissa Siqueira.

*...“Acredite, pense e faça,
use sua intuição,
transforme sonho em suor,
pensamento em ação.
Enfrente cada batalha
sabendo que a gente falha
e que isso é natural,
cair pra se levantar,
aprender pra ensinar
que o bem é maior que o mal.”*

Bráulio Bessa

Resumo

Neste trabalho, investigamos o sistema no qual uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente interage com um campo elétrico externo sujeito à potenciais centrais, tais como potenciais escalares, sendo um deles proporcional à distância radial e outro do tipo-Coulomb. Além disso, analisamos o mesmo sistema quando confinado em um anel quântico bidimensional e em um ponto quântico. Na busca de soluções analíticas para a equação de Schrödinger-Pauli mostramos que os estados de energia para esse sistema de uma partícula neutra sujeita a potenciais centrais dependem da fase geométrica quântica ϕ_{AC} e dos números quânticos associados com os modos radiais, momento angular e momento de spin $\{n, l, s\}$ do sistema. Em um segundo momento, apresentamos a quantização de Landau para uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético permanente na presença de campos externos sob a influência de um potencial tipo-Coulomb. Utilizamos a ideia de Ericsson e Sjöqvist que consiste em usar o sistema proposto por Aharonov e Casher para gerar um análogo à quantização de Landau em sistemas de átomos neutros. Mais ainda, observamos que no sistema análogo a quantização de Landau sujeito a um potencial tipo-Coulomb a frequência cíclotron é modificada em relação a referência e discutimos um efeito quântico caracterizado pela dependência da frequência angular nos números quânticos do sistema.

Palavras-chaves: Efeito Aharonov-Casher. Partícula neutra. Momento de dipolo magnético. Fase geométrica quântica. Anel quântico.

Abstract

In this work, we investigate the system in which a neutral particle with magnetic dipole momentum interacts with an external electric field subject to the central potentials, such as scalar potentials proportional to the radial distance and Coulomb like potential. In addition, we analyse the same system when it is confined to a two-dimensional quantum ring and to a quantum dot. In the search for analytical solutions for the Schrödinger-Pauli equation we show that the energy states for this system of a neutral particle subject to the central potentials depend on the quantum geometric phase ϕ_{AC} and the quantum numbers associated with the radial modes, angular momentum, and spin of the system $\{n, l, s\}$. Furthermore, we present the quantization of Landau for a neutral particle with a permanent magnetic dipole moment in the presence of external fields and under the influence of a Coulomb like potential. We use the idea of Ericsson e Sjöqvist which consists in using the system proposed by Aharonov and Casher to generate an analogue of the quantization of Landau for neutral atom systems. Moreover, we observe that when the analogue of the Landau quantization is subject to a Coulomb like potential its cyclotron frequency is modified in contrast with the behavior found by of reference. Finally, we discuss the quantum effect characterized by the dependence of quantum numbers with the angular frequency.

Key-words: Aharonov-Casher effect. Neutral particle. Magnetic dipole moment. Geometric quantum phases. Quantum ring.

Publicações

- BARBOZA, P.; BAKKE, K. An angular frequency dependence on the aharonov–casher geometric phase. *Annals of Physics, Elsevier*, v. 361, p. 259–265, 2015. ([BARBOZA; BAKKE, 2015](#))
- BARBOZA, P.; BAKKE, K. On the aharonov-casher system subject to a coulomb-type potential. *The European Physical Journal Plus, Springer*, v. 131, n. 2, p. 32, 2016. ([BARBOZA; BAKKE, 2016b](#))
- BARBOZA, P.; BAKKE, K. On a relation of the angular frequency to the aharonov–casher geometric phase in a quantum dot. *Annals of Physics, Elsevier*, v. 372, p. 457–467, 2016. ([BARBOZA; BAKKE, 2016a](#))

Lista de ilustrações

Figura 1 – Transporte paralelo de um vetor ao longo de uma superfície esférica (Wikipédia, 2005).	18
Figura 2 – Caminho arbitrário na superfície de uma esfera. O desvio angular é dado pelo ângulo sólido Ω (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).	18
Figura 3 – Caminho de um pêndulo de Foucault quando se move ao redor de uma latitude ao longo do dia (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).	19
Figura 4 – Ilustração do efeito Aharonov-Bohm. Um feixe de elétrons se divide e segue dois caminhos percorrendo regiões do espaço $\vec{B} = 0$, em seguida, o feixe se recombina no alvo formando um padrão de interferência (FERREIRA, 2004).	25
Figura 5 – Partícula carregada confinada em uma caixa através de um potencial $V(\vec{r} - \vec{R})$ (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).	27
Figura 6 – Partícula carregada confinada em um anel circular onde passa um solenóide longo transportando um campo magnético \vec{B} (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).	28
Figura 7 – Ilustração do efeito Aharonov-Casher. Partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente $\vec{\mu}$ interagindo com o campo elétrico radial criado por uma distribuição linear infinita de cargas elétricas ao longo do eixo z	31

Sumário

	Publicações	9
	Lista de ilustrações	10
	Introdução	13
1	EFEITO AHARONOV-BOHM PARA ESTADOS LIGADOS	17
1.1	Fase de Berry	19
1.2	Fase de Aharonov-Anandan	22
1.3	O Efeito Aharonov-Bohm	24
1.4	O Efeito Aharonov-Casher	30
1.5	O sistema Aharonov-Casher confinado em um anel quântico bidi- mensional	35
2	O SISTEMA AHARONOV-CASHER SUJEITO A UM POTENCIAL TIPO-COULOMB	41
2.1	Sistema Aharonov-Casher sujeito a um potencial tipo-Coulomb . . .	41
3	O SISTEMA AHARONOV-CASHER CONFINADO EM UM ANEL BIDIMENSIONAL SUJEITO A UM POTENCIAL TIPO-COULOMB	45
3.1	Efeitos associados ao Análogo do Potencial de Coulomb	45
4	O SISTEMA AHARONOV-CASHER CONFINADO EM UM PONTO QUÂNTICO	51
4.1	Influência de um potencial escalar linear	51
4.2	Influência dos potenciais linear e tipo-Coulomb	56
5	ANÁLOGO À QUANTIZAÇÃO DE LANDAU PARA PARTÍCULAS NEUTRAS	61
5.1	Quantização de Landau	61
5.2	Análogo à quantização de Landau para partículas neutras	64
5.3	Sistema Landau-Aharonov-Casher sujeito a um potencial tipo-Coulomb	67
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	74

APÊNDICES	82
APÊNDICE A – FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA CONFLUENTE .	83
APÊNDICE B – EQUAÇÃO BICONFLUENTE DE HEUN	84

Introdução

Na eletrodinâmica clássica, os campos são quantidades mensuráveis e o conceito de força é fundamental, entretanto, os potenciais são meras construções matemáticas sujeitas a transformações de calibre. Porém, no contexto da mecânica quântica, os potenciais podem dar origem a efeitos quânticos mensuráveis, mesmo na ausência de campos. Ehrenberg e Siday ([EHRENBERG; SIDAY, 1949](#)), em 1949, previram a existência de fenômenos de interferência quântica ligadas a fluxos magnéticos estacionários, no entanto, os primeiros a descreverem completamente efeitos eletromagnéticos na ausência de forças foram Y. Aharonov e D. Bohm, em 1959 ([AHARONOV; BOHM, 1959](#)).

Em seu artigo, Aharonov e Bohm investigaram a influência dos potenciais eletromagnéticos em regiões livres de campos ao analisar um padrão de interferência de partículas carregadas na presença de um solenóide muito longo e demonstraram que a função de onda das partículas adquire um fator de fase. Essa mudança de fase na função de onda ficou conhecida como efeito Aharonov-Bohm (AB). O efeito Aharonov-Bohm é de interesse em áreas atuantes em linhas de fluxo em materiais magnéticos, e sua observação experimental foi descrita de forma independente por Chambers ([CHAMBERS, 1960](#)), Peshkin e Tonomura ([PESHKIN; TONOMURA, 1991](#))

O termo fase geométrica quântica foi inserido na literatura, em 1984, por M. V. Berry ([BERRY, 1984](#)), onde mostrou-se que uma função de onda de uma partícula que evolui adiabaticamente adquire um fator de fase adicional que tem origem geométrica. Esse fator de fase geométrico ficou intitulado posteriormente como *fase de Berry*. Esse estudo da fase de Berry mostrou que o efeito Aharonov-Bohm corresponde a uma fase geométrica quântica. Em 1987, Aharonov e Anandan ([AHARONOV; ANANDAN, 1987](#)) propuseram uma forma mais geral para a fase geométrica quântica. Esta fase ficou conhecida como a fase de Aharonov-Anandan, removendo a condição adiabática de qualquer evolução cíclica de um sistema quântico. Entretanto, o primeiro trabalho que tratou diretamente sobre o surgimento de fases geométricas quânticas foi feito por Pancharatnam, em 1956, no estudo das fases clássicas adquiridas pelas mudanças de polarização da luz ([PANCHARATNAM, 1956](#)).

A partir da influência do efeito Aharonov-Bohm, outras fases geométricas quânticas foram evidenciadas também em sistemas mesoscópicos, como por exemplo, o efeito Aharonov-Casher ([AHARONOV; CASHER, 1984](#)). Aharonov e Casher, em 1984, desenvolveram um trabalho onde discutiam sobre a existência de alguma fenômeno que geraria um efeito Aharonov-Bohm para uma partícula neutra. Assim, eles investigaram a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente na

presença de uma densidade linear de cargas elétricas. Mesmo em uma configuração onde não atuam forças clássicas sobre a partícula, surge um efeito mensurável que novamente é atribuído a um fator de fase geométrica quântica em sua função de onda. Esse efeito de surgimento de fase geométrica quântica na função de onda da partícula neutra é chamado de efeito Aharonov-Casher (AC) ou efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm. Esse efeito foi observado experimentalmente em um interferômetro de partículas neutras (CIMMINO et al., 1989) e em um interferômetro atômico Ramsey (SANGSTER et al., 1995).

Em particular, o efeito Aharonov-Casher tem atraído grande atenção em diversos contextos da Física quântica. Nesse sentido, discussões sobre esse efeito vêm se multiplicando no cenário da mecânica quântica não-comutativa (PASSOS et al., 2007), (MIRZA; ZAREI, 2004), no contexto da quebra de simetria de Lorentz (BELICH et al., 2005), (RIBEIRO et al., 2015), no campo da computação quântica geométrica (ERICSSON et al., 2003), em supersimetria (BRUCE et al., 2005), em referenciais não inerciais (BAKKE; FURTADO, 2009), (CHOWDHURY; BASU, 2013), em estados ligados (BAKKE; FURTADO, 2011), (SILVA et al., 2013), em sistemas atômicos (SANGSTER et al., 1995) e na quantização de Landau (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001), (RIBEIRO et al., 2008). Além disso, existem várias discussões sobre o efeito Aharonov-Casher no que diz respeito a natureza topológica (ZEILINGER et al., 1991), não-dispersividade e não-localidade (CASELLA, 1990), (BADUREK et al., 1993) e sua relação com a fase de Berry (MIGNANI, 1991).

O comportamento de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente também tem sido estudado em sistemas mesoscópicos (OH; RYU, 1995), (MATHUR; STONE, 1991), (BALATSKY; ALTSHULER, 1993), (BAKKE; FURTADO, 2011), (BAKKE; FURTADO, 2013), onde o fluxo dos níveis de energia depende da fase geométrica quântica e do surgimento de correntes persistentes de spin, além disso, suas características já foram previstas como consequência direta do efeito Aharonov-Bohm.

Os efeitos relacionados a fase topológica dependem da topologia do espaço, assim, a fase geométrica quântica obtida no sistema Aharonov-Casher é considerada topológica por não depender de um ponto do espaço para ser definida. Isso quer dizer que ela terá o mesmo valor para qualquer trajetória fechada que a partícula neutra percorrer. Dessa forma, pode-se construir efeitos similares aos já conhecidos, levando em consideração transformações que preservem a topologia do espaço. O efeito He-Mckellar-Wilkens (HE; MCKELLAR, 1993), (WILKENS, 1994) é descrito como o efeito dual ao efeito Aharonov-Casher, o qual trata-se de um sistema onde uma partícula neutra que possui momento de dipolo elétrico permanente move-se em um campo magnético produzido por monopolos magnéticos. Semelhantemente ao que foi feito por Aharonov e Casher, He e Mckellar, em 1993, e Wilkens, em 1994, mostraram que se o momento de dipolo elétrico estiver alinhado inicialmente com uma distribuição linear de monopolos magnéticos, a função de

onda da partícula neutra adquire uma fase geométrica quântica. O aparecimento dessa fase geométrica quântica ficou conhecido como efeito He-McKellar-Wilkins (HMW).

Outros estudos com a dinâmica quântica de partículas, carregadas ou neutras, na presença de campos eletromagnéticos podem ser descritos por meio da quantização de Landau (LANDAU, 1930). A quantização de Landau é a quantização das órbitas ciclotrônicas de partículas carregadas na presença de campos eletromagnéticos. Assim, as partículas carregadas podem ocupar apenas órbitas com valores discretos de energia, denominados níveis de Landau. Os níveis de Landau são degenerados, com o número de elétrons por nível diretamente proporcional a intensidade do campo magnético aplicado no sistema. Entre as várias áreas da Física, o efeito Hall quântico (PRANGE; GIRVIN, 1987) apresenta destaque pelo notável interesse nos níveis de Landau. Além disso, outros fenômenos físicos são descritos pela quantização de Landau, como, por exemplo, superfícies bi-dimensionais (COMTET, 1986), excitações anyônicas em condensados de Bose-Einstein (PAREDES *et al.*, 2001), entre outros efeitos.

Motivados pelos resultados de Paredes *et al.* (PAREDES *et al.*, 2001), o qual estudou a possibilidade de um análogo ao efeito Hall em condensados de Bose-Einstein, Ericsson e Sjöqvist (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001), construíram um modelo onde partículas neutras, com momento de dipolo magnético permanente, na presença de um campo elétrico externo, sob certas condições para a configuração de campo-dipolo, apresentam espectro de energia quantizado em níveis de Landau. Essa ideia consistia em utilizar o modelo Aharonov-Casher para gerar um análogo à quantização de Landau em sistemas de átomos neutros. Os níveis de energia desenvolvidos por Ericsson e Sjöqvist são conhecidos como quantização Landau-Aharonov-Casher.

Este trabalho tem o objetivo de investigar o sistema no qual uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente interage com um campo elétrico externo sujeito à potenciais centrais, tais como potenciais escalares proporcional à distância radial e do tipo-Coulomb. Além disso, iremos analisar o mesmo sistema quando confinado em um anel quântico bidimensional e em um ponto quântico bidimensional. Com isso, determinamos o surgimento de soluções para estados ligados da equação de Schrödinger-Pauli devido à presença desses potenciais.

A organização dessa tese é a seguinte: No capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre fases geométricas; em seguida, fazemos uma breve descrição do sistema Aharonov-Bohm e o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, logo após, apresentamos uma descrição sobre o sistema Aharonov-Casher e como motivação mostramos a descrição do trabalho (BAKKE; FURTADO, 2012) que trata sobre o sistema Aharonov-Casher confinado em um anel quântico bidimensional.

No capítulo 2, discutimos a dinâmica quântica de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente sujeita a um potencial tipo-Coulomb. Nesse

contexto, mostramos que os níveis de energia dependem da fase geométrica quântica Aharonov-Casher e uma dependência dos níveis de energia com os números quânticos do sistema $\{n, l, s\}$.

No capítulo 3, estudamos alguns efeitos quânticos associados ao sistema Aharonov-Casher quando este é confinado em um anel quântico bidimensional na presença de um potencial tipo-Coulomb. Tais efeitos podem ser descritos como uma dependência da fase Aharonov-Casher no espectro de energia e na frequência angular do sistema.

No capítulo 4, analisamos efeitos quânticos associados ao nosso sistema agora confinado em um ponto quântico bidimensional sob a influência do potencial tipo-Coulomb e, em seguida, sob a influência do potencial escalar linear mais o potencial tipo-Coulomb. Em particular, possíveis valores da frequência angular associados ao estado de menor energia são investigados nos dois casos diferentes.

No capítulo 5, será feita uma revisão sobre a quantização de Landau para uma partícula carregada, em seguida apresentamos a quantização de Landau para uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético permanente na presença de campos externos sob a influência de um potencial tipo-Coulomb e mostramos que soluções para estados ligados para a equação de Schrödinger-Pauli podem ser obtidas. Utilizamos a ideia de Ericsson e Sjöqvist ([ERICSSON; SJÖQVIST, 2001](#)) que consiste em usar o sistema proposto por Aharonov e Casher ([AHARONOV; CASHER, 1984](#)) para gerar um análogo à quantização de Landau em sistemas de átomos neutros.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais.

1 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados

A existência de fases geométricas foi descoberta por S. Pancharatnam ([PANCHARATNAM, 1956](#)), em 1956, através de estudos experimentais em Óptica, em que foi observada uma mudança de fase em um feixe de luz polarizado ao atravessar uma sequência de polarizadores tal que sua direção de polarização foi a mesma que a inicial.

Todavia, na concepção da mecânica quântica, M.V. Berry ([BERRY, 1984](#)), em 1984, descobriu que se a evolução de um dado operador Hamiltoniano é determinado por um conjunto de parâmetros dependentes do tempo, então, a mudança de fase da função de onda, na evolução cíclica do sistema, isto é, sob condições periódicas, possui propriedades geométricas, e a mudança de fase não depende da evolução do sistema (que é admitido ser suficientemente longo para ser considerado adiabático), mas é determinada pelas propriedades geométricas do espaço dos parâmetros. Assim, a fase total adquirida por um estado após uma evolução cíclica é a soma das fases geométrica e dinâmica, onde a fase geométrica ficou conhecida como *Fase de Berry*. Todavia, em 1987, Aharonov e Anandan ([AHARONOV; ANANDAN, 1987](#)) mostraram que a função de onda de uma partícula adquire um fator de fase durante uma evolução cíclica sem a necessidade da aproximação adiabática.

As fases geométricas podem ser entendidas quando consideramos um objeto vetorial que é transportado paralelamente ¹ ao longo de um caminho que o faz sair e voltar ao seu ponto inicial podendo adquirir um ângulo em relação a sua direção inicial antes do seu movimento. Esse ângulo ou essa fase é uma propriedade geométrica, isto é, ela depende do espaço no qual é escrito essa curva, esse caminho ou esse transporte. Quando o transporte paralelo de um vetor ao longo de um circuito fechado qualquer é escrito em uma superfície plana, o vetor voltará ao ponto inicial com direções e sentidos iguais aos do início da trajetória. Isso ocorre devido ao fato da superfície em que o vetor foi transportado não ter curvatura.

Entretanto, se o transporte paralelo for realizado ao longo de um circuito fechado escrito em uma superfície com curvatura, por exemplo, em uma esfera, o ângulo de rotação, ou a fase adquirida, após completar o caminho fechado, tem relação com a integral da curvatura da superfície que delimita o circuito, isto é, o desvio angular é dado pelo ângulo sólido Ω (ver figuras 1 e 2). Outro exemplo interessante é o Pêndulo de Foucault. O pêndulo

¹ Significa que o objeto foi transportado de um ponto a outro por uma curva mantendo o ângulo formado entre ele e o vetor tangente constante.

de Foucault (FOUCAULT, 1851),(BERGMANN; BERGMANN, 2007) é um exemplo da mecânica clássica muito utilizado para ilustrações de fases geométricas e consiste em um pêndulo que sofre uma variação no seu plano de oscilação devido ao movimento do suporte do pêndulo em uma trajetória fechada sobre uma esfera (ver figura 3). A explicação para tal fato se deve a força de Coriolis ², mas pode também ser descrito como uma fase geométrica.

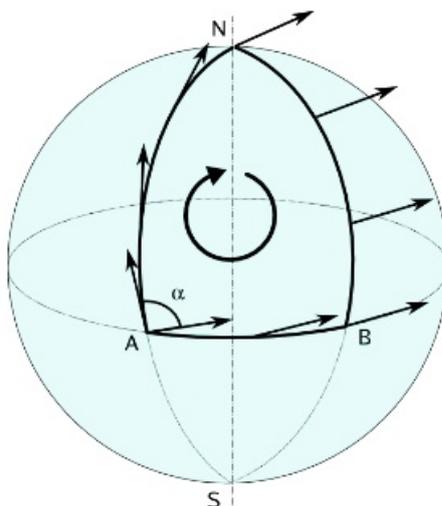


Figura 1 – Transporte paralelo de um vetor ao longo de uma superfície esférica (Wikipédia, 2005).

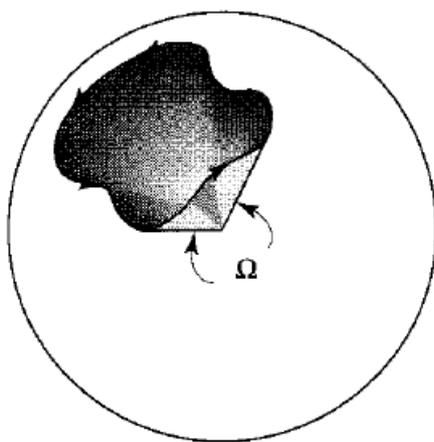


Figura 2 – Caminho arbitrário na superfície de uma esfera. O desvio angular é dado pelo ângulo sólido Ω (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

A fase adquirida pelo plano de oscilação depende do caminho traçado, dessa forma, dependerá do ângulo sólido no qual é determinado pela latitude $\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$, que identifica o caminho que o suporte do pêndulo realizou. A fase é dada por

² Força fictícia causada pela rotação da Terra e pelo movimento do corpo sobre a superfície da Terra

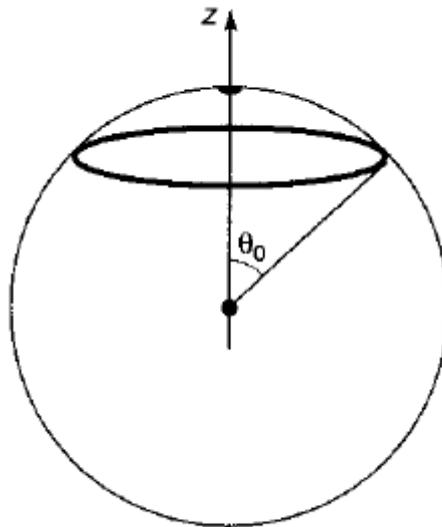


Figura 3 – Caminho de um pêndulo de Foucault quando se move ao redor de uma latitude ao longo do dia (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

$$\Omega = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \text{sen}\theta d\theta d\varphi = 2\pi(1 - \cos\theta_0). \quad (1.1)$$

Este análogo mecânico da fase geométrica é conhecido como ângulo Hannay (HANNAY, 1985). Além disso, um sistema como este, que não retorna ao seu estado original quando transportado em torno de um circuito fechado, é chamado *não-holonômico*.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 1.1, apresentamos uma breve introdução sobre a Fase de Berry; na seção 1.2, falamos sobre Fase de Aharonov-Anadan; na seção 1.3, apresentamos uma breve revisão do efeito quântico Aharonov-Bohm e o efeito AB para estados ligados; na seção 1.4, mostramos uma breve descrição teórica associada ao efeito quântico Aharonov-Casher e por fim, na seção 1.5, apresentamos o efeito Aharonov-Casher para estados ligados.

1.1 Fase de Berry

A fase de Berry foi proposta inicialmente por Michel V. Berry, em 1984, através do seu trabalho (BERRY, 1984). Neste artigo, Berry mostrou que após uma evolução cíclica adiabática, um sistema quântico em um espaço de parâmetros retornará ao seu estado original acompanhado por um fator de fase de origem puramente geométrica formada por duas partes: uma contribuição dinâmica referente a energia do sistema e a outra parte associada a uma contribuição geométrica referente ao caminho traçado no espaço de

parâmetros, dessa forma a dinâmica quântica dada pela equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.2)$$

onde H é o operador hamiltoniano do sistema e ψ a função de onda que representa o estado quântico do sistema dependente do tempo e da posição cuja representação na forma expandida é $\psi = \sum_n c_n \psi_n$. Para cada instante, o operador Hamiltoniano revela um espectro de energia (não degenerado), tal como pode ser verificado por meio da equação de autovalor

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t). \quad (1.3)$$

Daqui em diante, escreveremos $\psi(t) \equiv \psi$ para a representação do estado quântico. A solução geral da equação de Schrödinger dependente do tempo pode então ser expressa através da seguinte combinação linear:

$$\psi = \sum_n c_n \psi'_n = \sum_n c_n \psi_n e^{i\theta_n}, \quad (1.4)$$

em que c_n são os coeficientes da combinação linear e

$$\theta_n \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (1.5)$$

é o fator de fase dinâmico que está associado as energias possíveis do sistema e dependente do tempo.

Para encontrar os coeficientes c_n , vamos realizar a substituição da equação (1.4) em (1.2), assim:

$$H \sum_n c_n \psi_n e^{i\theta_n} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_n c_n \psi_n e^{i\theta_n} \right]. \quad (1.6)$$

Aplicando o hamiltoniano no lado esquerdo, fazendo a derivação do lado direito na equação (1.6) e as simplificações necessárias, teremos:

$$\sum_n \dot{c}_n(t) e^{i\theta_n(t)} \psi_n = - \sum_n c_n(t) \frac{\partial \psi}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} \quad (1.7)$$

Agora, vamos proceder com a retirada do termo que possui a derivada do coeficiente e realizar o produto interno pela esquerda dos dois lados da equação (1.7) com ψ_m , e então, vamos utilizar a propriedade de ortonormalidade das funções

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -c_m \langle \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \rangle - \sum_{n \neq m} c_n \langle \psi_m | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \rangle e^{i(\theta_n - \theta_m)}, \quad (1.8)$$

onde $\psi(x) \equiv \langle x | \psi \rangle$.

Portanto, os coeficientes $\langle \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \rangle$ do lado direito da equação (1.8) serão reescritos em termos da taxa de variação temporal do operador Hamiltoniano. Essa relação é encontrada tomando a derivada temporal da equação de autovalor (1.3),

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\psi_n) = \frac{\partial}{\partial t}(E_n\psi_n), \quad (1.9)$$

levando a

$$\left[\dot{H}\psi_n + H \frac{\partial}{\partial t}(\psi_n) \right] = \left[\dot{E}_n\psi_n + E_n \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi_n \right) \right] \quad (1.10)$$

Realizando o produto com o estado ψ_m , em ambos os lados da equação (1.10), verificamos que

$$\langle \psi_m | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \rangle = \frac{\langle \psi_m | \frac{\partial H}{\partial t} | \psi_n \rangle}{(E_n - E_m)}, \quad (n \neq m) \quad (1.11)$$

utilizando o Teorema Adiabático³, o qual assume a variação do Hamiltoniano com o tempo sendo pequena ou desprezível, para o caso $n \neq m$, obtemos:

$$\langle \psi_m | \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \rangle \approx 0. \quad (1.12)$$

Dessa forma, a equação (1.8) fica:

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -c_m \langle \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \rangle \quad (1.13)$$

cuja solução será:

³ Teorema Adiabático afirma que um Hamiltoniano H pode ser alterado gradualmente de modo que ele possa ser tratado como constante em cada instante de tempo.

$$c_m = c_m(0)e^{i\gamma_m} \quad (1.14)$$

onde

$$\gamma_m \equiv i \int_0^t \langle \psi_m | \frac{\partial \psi_m}{\partial t'} \rangle dt' \quad (1.15)$$

e designado por fase geométrica adiabática.

Assim, a função de onda do sistema será dada por

$$\psi = \sum_n c_n(0) e^{i\gamma_m} e^{i\theta_n} \psi_n. \quad (1.16)$$

A fim de encontrar um resultado generalizado, consideraremos N parâmetros: $R_1(t), R_2(t), \dots, R_m(t)$, onde $R_m(t)$ são parâmetros que variam com o tempo. Dessa forma, obtemos

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t'} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial t'} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_m} \frac{\partial R_m}{\partial t'} = \nabla_R \psi_n \cdot \frac{\partial R}{\partial t'}, \quad (1.17)$$

onde ∇_R é o gradiente com relação a esses parâmetros.

Fazendo a substituição da equação (1.17) em (1.15), obtemos

$$\gamma_m = i \int_{R(0)}^{R(t)} \langle \psi_m | \nabla_R \psi_n \rangle dR. \quad (1.18)$$

Se o operador Hamiltoniano retorna à sua forma original após um tempo T , a variação da fase geométrica, será

$$\gamma_m = i \oint \langle \psi_m | \nabla_R \psi_n \rangle dR \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é uma integral ao longo de um circuito fechado, e em geral, não será nula se o espaço de parâmetros for não trivial topologicamente e é conhecida como *Fase de Berry*.

1.2 Fase de Aharonov-Anandan

As fases de Berry foram generalizadas por Aharonov e Anandan para o caso de uma evolução cíclica não-adiabática. Tais fases são conhecidas como Fases de Aharonov-Anandan (AHARONOV; ANANDAN, 1987). Aharonov e Anandan mostraram que há

uma fase associada com a evolução cíclica, que é universal no sentido de que é a mesma para um número infinito de possíveis movimentos ao longo de curvas no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Esta fase se projeta para uma dada curva fechada $\hat{\mathcal{C}}$ no espaço projetivo de Hilbert \mathcal{P} de vetores \mathcal{H} .

Nessa situação, temos um estado quântico arbitrário em evolução cíclica no espaço projetivo \mathcal{P} de vetores de \mathcal{H} , o qual é definido através de um mapa $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$. Em outras palavras, vetores de estado em \mathcal{H} equivalentes a menos de uma fase constituem o mesmo elemento em \mathcal{P} .

Suponha que o estado normalizado $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ evolua de acordo com a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle, \quad (1.20)$$

tal que $|\psi(\tau)\rangle = e^{i\phi}|\psi(t)\rangle$, onde ϕ é real e fornece a fase total adquirida por $|\psi(t)\rangle$ durante a evolução cíclica em \mathcal{P} de período τ . Definimos

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-if(t)}|\psi(t)\rangle, \quad (1.21)$$

onde

$$f(\tau) - f(0) = \phi. \quad (1.22)$$

Substituindo $|\psi(\tau)\rangle$ na equação (1.21) temos que $|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle$. Assim, a equação (1.22) representa um ajuste para definirmos uma evolução cíclica no espaço projetivo \mathcal{P} .

Substituindo a equação (1.21) na equação (1.20) e projetando o resultado em $|\psi(t)\rangle$, obtemos:

$$-\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\hbar} \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle - \langle \tilde{\psi}(t) | i \frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle. \quad (1.23)$$

A fase Aharonov-Anandan, representada por β , é definida removendo-se a contribuição dinâmica da fase total ϕ , isto é,

$$\beta \equiv \phi + \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle dt. \quad (1.24)$$

Sendo assim, substituindo a equação (1.23) na equação (1.24), temos:

$$\beta = \phi - [f(\tau) - f(0)] + i \int_0^\tau \langle \tilde{\psi}(t) | \frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle dt. \quad (1.25)$$

Uma vez que, $\phi = f(\tau) - f(0)$, então

$$\beta = i \int_0^\tau \langle \tilde{\psi}(t) | \frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle dt. \quad (1.26)$$

Observe que podemos escolher diferentes $f(t)$ tais que $\phi = f(\tau) - f(0)$. Entretanto, visto que a integral é cíclica no espaço projetivo, podemos escrever

$$\beta = i \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{P}}} \langle \tilde{\psi}(t) | \frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle, \quad (1.27)$$

onde β é independente do parâmetro t de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$, e é definido exclusivamente até $2\pi n$ ($n =$ inteiro).

Logo, transformações locais de fase em $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, ou seja,

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle \longrightarrow |\tilde{\psi}'(t)\rangle = e^{-if'(t)} |\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad (1.28)$$

não modificam β , visto que a integral é realizada sobre um caminho fechado.

Portanto, a fase Aharonov-Anandan é invariante sob diferentes escolhas de $f(t)$, ou seja, tal como a fase de Berry, β é invariante de calibre.

1.3 O Efeito Aharonov-Bohm

Na mecânica quântica, os primeiros a discutirem fases topológicas foram Aharonov e Bohm, em 1959 (AHARONOV; BOHM, 1959). O efeito Aharonov-Bohm foi observado através da experiência que consiste de um feixe coerente de elétrons que se divide em duas partes em torno de um solenóide muito longo pelo qual passa um campo magnético \vec{B} , no entanto, esse feixe transita em uma região na ausência de campo. Nessa região não há presença de campo magnético, mas a região possui potencial vetor não-nulo. No final, nota-se que os elétrons irão adquirir fases diferentes ao serem detectados em um alvo, como mostra a figura (4).

Aharonov e Bohm apresentaram uma descrição quântica para uma partícula sensível à presença de um potencial vetor \vec{A} não-nulo em regiões onde o campo magnético $\vec{B} = 0$.

Dessa forma, o experimento proposto por Aharonov e Bohm evidenciou que o potencial vetor pode ter efeito real em um cenário quântico, ao invés de um mero artifício matemático, como descrito no cenário clássico.

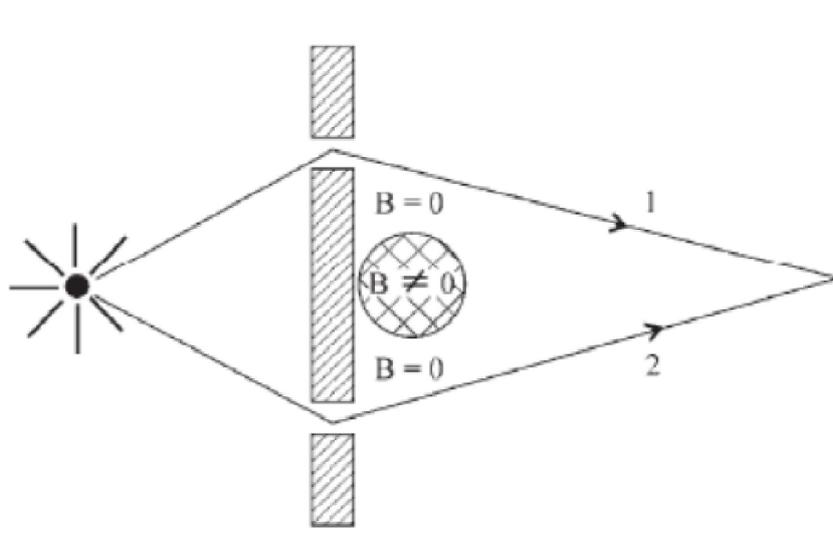


Figura 4 – Ilustração do efeito Aharonov-Bohm. Um feixe de elétrons se divide e segue dois caminhos percorrendo regiões do espaço $\vec{B} = 0$, em seguida, o feixe se recombina no alvo formando um padrão de interferência (FERREIRA, 2004).

O hamiltoniano de interação com o campo eletromagnético é dado por (o chamado acoplamento mínimo que tem relação com o fato do momento linear de uma partícula de carga q na presença do campo eletromagnético ser $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$),

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + V(\vec{r}, t), \quad (1.29)$$

onde m é a massa da partícula, q é a carga, \vec{A} é o potencial vetor magnético e $V(\vec{r}, t)$ o potencial escalar.

A partir do hamiltoniano escrito em (1.29), a equação de Schrödinger para uma partícula carregada na presença de campos elétricos e magnéticos é dada por

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + V(\vec{r}, t) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.30)$$

A solução para a equação de Schrödinger (1.30) é dada por:

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i\Delta S} \psi'(\vec{r}, t) \quad (1.31)$$

onde o termo ΔS representa a diferença de fase acumulada pela função de onda da partícula, de modo que

$$S = \frac{q}{\hbar c} \int \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (1.32)$$

A diferença de fase acumulada na função de onda da partícula é calculada levando em conta as trajetórias 1 e 2 como mostra a figura (4) assim:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{q}{\hbar c} \left(\int_{C_2} \vec{A}(r) \cdot d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{A}(r) \cdot d\vec{r} \right) = \frac{q}{\hbar c} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (1.33)$$

Em outras palavras, o potencial vetor realiza uma influência sobre uma partícula carregada em uma região onde não há a presença de campos eletromagnéticos, através do surgimento de uma fase quântica na função de onda da partícula que é dada por (AHARONOV; BOHM, 1959):

$$\Delta S = \frac{1}{\hbar c} \oint q\vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\hbar c} \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\hbar c} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{q\Phi}{\hbar c}, \quad (1.34)$$

onde q é a carga da partícula, Φ é o fluxo quântico Aharonov-Bohm. Assim, a equação (1.34) descreve a diferença de fase entre as partículas que viajam pelos lados distintos do solenóide.

Embora o campo magnético \vec{B} exista apenas na região interna do solenóide, o potencial vetor \vec{A} que satisfaz a expressão (1.34), deve existir não só na região interna como também na região externa do solenóide, para qualquer calibre escolhido, pois o fluxo Φ é invariante de calibre. Dessa forma, a partícula carregada se encontra em uma região livre de forças e é afetada localmente apenas pela influência do potencial vetor. Por esta razão, o efeito Aharonov-Bohm é considerado como um efeito não-local.

Em face do que foi apresentado até aqui, vamos agora mostrar que o efeito Aharonov-Bohm pode ser interpretado como uma fase geométrica de Berry. Dessa forma, vamos considerar uma partícula carregada confinada em uma caixa por um potencial $V(\vec{r} - \vec{R})$, onde \vec{R} e \vec{r} são os vetores posição da caixa e da partícula, respectivamente, relativo à origem do referencial, localizado em um solenóide (ver figura 5).

Baseado na equação (1.30), a equação de Schrödinger será dada por:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + V(\vec{r} - \vec{R}) \right] \psi_n = E_n \psi_n. \quad (1.35)$$

A solução dessa equação será dada por:

$$\psi_n = e^{iq}\psi'_n, \quad (1.36)$$

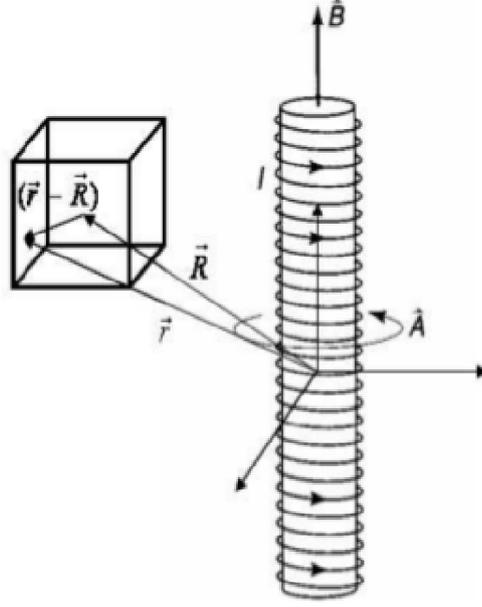


Figura 5 – Partícula carregada confinada em uma caixa através de um potencial $V(\vec{r} - \vec{R})$ (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

onde $g \equiv \frac{q}{\hbar} \int_R^r \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$, e ψ' satisfaz a mesma equação de autovalor, apenas com $\vec{A} \rightarrow 0$, assim

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r} - \vec{R}) \right] \psi'_n = E_n \psi'_n. \quad (1.37)$$

A expressão anterior trata-se da equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula sujeita ao potencial $V(\vec{r} - \vec{R})$, assim teremos $\psi'_n = \psi'_n(\vec{r} - \vec{R})$, podemos assim escrever

$$\nabla_R \psi_n = \nabla_R (e^{ig} \psi'_n) = -i \frac{q}{\hbar c} \vec{A} e^{ig} \psi'_n + e^{ig} \nabla_R \psi'_n. \quad (1.38)$$

Realizando o produto interno de ψ_n na equação (1.38), obtemos

$$\langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}, \quad (1.39)$$

substituindo a equação (1.39) em (1.19), obtemos a fase de Berry, como segue

$$i \oint -i \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar c} \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\hbar c} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{q\Phi}{\hbar c}. \quad (1.40)$$

Assim, a equação (1.40) é a fase que a partícula adquire quando realiza uma evolução adiabática e cíclica no parâmetro \vec{R} . Podemos notar que esta fase é igual à fase adquirida pela partícula carregada no efeito Aharonov-Bohm.

Vamos agora, mostrar o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Nesse caso, vamos considerar uma partícula carregada restrita a um anel de raio b (raio fixo) sujeita ao efeito Aharonov-Bohm (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018). O arranjo experimental consiste de um solenóide longo de raio $a < b$, transportando um campo magnético \vec{B} , como mostra a figura (6). Este campo magnético no interior do solenóide é uniforme, e o campo no exterior do solenóide é zero. Por outro lado, o potencial vetor fora do solenóide é não-nulo e dado por:

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\varphi}, \quad (r > a), \quad (1.41)$$

onde $\Phi = \pi a^2 B$ é o fluxo magnético no interior do solenóide.

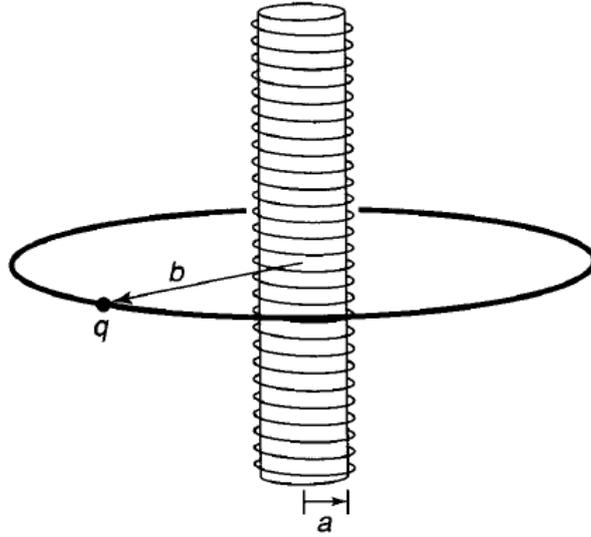


Figura 6 – Partícula carregada confinada em um anel circular onde passa um solenóide longo transportando um campo magnético \vec{B} (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018).

Uma vez que, o solenóide está sem carga, então o potencial escalar $V(\vec{r}, t)$ é zero. Neste caso, o operador hamiltoniano dado na equação (1.29), será

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar q \vec{A} \cdot \nabla \right). \quad (1.42)$$

A função de onda depende apenas do ângulo azimutal φ , ($\varphi = \pi/2$ e $r = b$), assim, $\nabla \rightarrow (\hat{\varphi}/b)(d/d\varphi)$, então a equação de Schrödinger torna-se

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i \frac{\hbar q\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\varphi} \right] \psi(\varphi) = E\psi(\varphi). \quad (1.43)$$

Podemos reescrever a equação acima como uma equação diferencial linear com coeficientes constantes:

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - 2i\alpha \frac{d}{d\varphi} + \epsilon \right) \psi(\varphi) = 0, \quad (1.44)$$

com as definições

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}; \\ \epsilon &\equiv \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \alpha^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Assim, as soluções da equação (1.44), são da forma

$$\psi(\varphi) = Ae^{i\Lambda\varphi}, \quad (1.46)$$

onde A é a constante de normalização. Ao substituir na equação (1.44), encontramos a seguinte equação característica

$$\Lambda^2 + 2\alpha\Lambda - \epsilon = 0, \quad (1.47)$$

da qual obtém-se as raízes

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \epsilon}; \\ &= -\alpha \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Para que $\psi(\varphi)$ possa de fato representar a solução da equação (1.44), a condição de contorno do problema $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$ requer que Λ seja um número inteiro, isto nos leva a:

$$l = -\alpha \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad (1.49)$$

então, as energias permitidas do sistema são:

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.50)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ são os autovalores do operador momento angular \hat{L}_z , q a carga da partícula e Φ é o fluxo quântico de AB.

Podemos observar que os níveis de energia são influenciados pelo fluxo quântico Φ , isto é, as energias permitidas dependem do fluxo magnético que se encontra no interior do solenóide, mesmo que o campo no local da partícula seja zero. Além disso, os valores positivos de l indicam que a partícula move-se na mesma direção do potencial vetor, e valores negativos descrevem que a partícula move-se em direção oposta.

1.4 O Efeito Aharonov-Casher

Em 1984, Aharonov e Casher estudaram a dinâmica de uma partícula neutra dotada de momento de dipolo magnético permanente em meio a um campo elétrico (AHARONOV; CASHER, 1984). O efeito Aharonov-Casher prevê que se uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente descrever um caminho fechado em torno de uma linha de cargas elétricas, a sua função de onda irá adquirir uma fase geométrica quântica (ver figura 7). A fase que a partícula adquire ocorre devido ao acoplamento do dipolo magnético da partícula neutra com o campo elétrico produzido por uma linha infinita de cargas elétricas. Esse efeito chamado Efeito Aharonov-Casher (AC) é considerado o efeito análogo ao Efeito Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959) e a comprovação experimental do efeito Aharonov-Casher foi dada por Cimmino *et al.* (CIMMINO *et al.*, 1989) e descrita em sistemas atômicos por Sangster *et al.* (SANGSTER *et al.*, 1995).

Para o estudo dessa dinâmica, Aharonov e Casher partiram da lagrangeana que descreve a interação entre uma partícula carregada e um campo magnético, e assim predisseram o aparecimento de uma fase quântica na descrição quântica de uma partícula neutra. Dessa maneira, vamos considerar que a posição da partícula carregada seja descrita pelo vetor \vec{r} e a posição do dipolo descrita por \vec{R} . A lagrangeana de uma partícula carregada se movendo na presença de um campo magnético externo, é escrita como:

$$\mathcal{L}_{part} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}^2 + e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (1.51)$$

onde e é a carga, $\dot{\vec{r}}$ é a velocidade da partícula e M a massa da partícula. O termo $A = \vec{A}(\vec{r} - \vec{R})$ é o potencial vetor associado ao campo magnético produzido pelo dipolo, dado por:

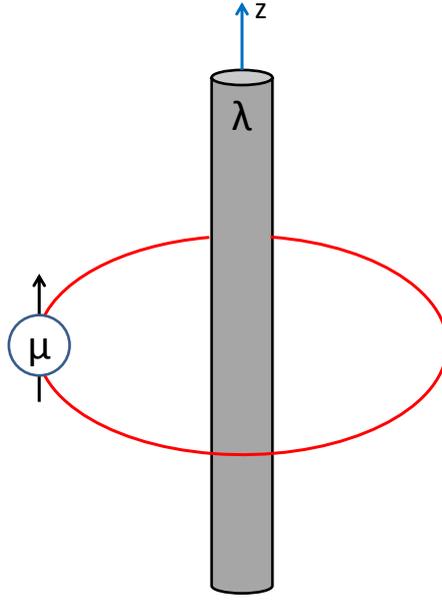


Figura 7 – Ilustração do efeito Aharonov-Casher. Partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente $\vec{\mu}$ interagindo com o campo elétrico radial criado por uma distribuição linear infinita de cargas elétricas ao longo do eixo z .

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}. \quad (1.52)$$

Além disso, para uma partícula neutra com momento de dipolo $\vec{\mu}$ que interage com um campo elétrico produzido por uma linha de carga e , tem-se que:

$$\mathcal{L}_{dip} = \frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2} - qV, \quad (1.53)$$

onde $\dot{\vec{R}}$ é a velocidade do dipolo e V é o potencial elétrico associado à carga e .

A presença da carga q na equação representa uma densidade de carga gerada a partir do movimento do dipolo magnético a qual é dada por (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$\rho = \dot{\vec{R}} \cdot \vec{j} \quad (1.54)$$

onde $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}}$ é a densidade volumétrica de corrente de magnetização, com $\vec{\mathcal{M}}$ sendo a magnetização.

O movimento do dipolo magnético é o motivo da possibilidade de interação entre o campo elétrico externo e o dipolo magnético.

Dessa forma, levando em conta a integração volumétrica da densidade de carga, a equação (1.53), é reescrita como:

$$\mathcal{L}_{dip} = \frac{M\dot{R}^2}{2} - \int \rho V d\tau. \quad (1.55)$$

onde $d\tau$ é o elemento de volume.

Substituindo a equação (1.54) na equação (1.55), temos:

$$\mathcal{L}_{dip} = \frac{M\dot{R}^2}{2} - \int (V\dot{\vec{R}}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}}) d\tau. \quad (1.56)$$

Com o auxílio de identidades matemáticas podemos reescrever a equação (1.56), como:

$$\mathcal{L}_{dip} = \frac{M\dot{R}^2}{2} - \int V\vec{\mathcal{M}} \cdot (\nabla \times \dot{\vec{R}}) d\tau - \int \vec{\mathcal{M}} \cdot \dot{\vec{R}} \times \vec{E} d\tau + \int \nabla \cdot \left((V\dot{\vec{R}}) \times \vec{\mathcal{M}} \right) d\tau. \quad (1.57)$$

Lembrando que o momento de dipolo magnético é dado por $\vec{\mu} = \int \vec{\mathcal{M}} d\tau$, considerando que a partícula encontra-se restrita ao plano $x - y$ e que

$$\vec{\nabla} \times \dot{\vec{R}} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\dot{R}_\varphi) - \frac{\partial \dot{R}_r}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad (1.58)$$

a primeira integral da equação (1.57) torna-se nula. Através da utilização do Teorema da divergência, a última integral também torna-se nula, sendo assim, a lagrangeana para o dipolo magnético, fica (AHARONOV; CASHER, 1984):

$$\mathcal{L}_{dip} = \frac{M\dot{R}^2}{2} - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{E} \times \vec{\mu}. \quad (1.59)$$

Sabendo que o campo elétrico coulombiano \vec{E} em \vec{R} devido a partícula carregada situada no ponto \vec{r} é dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{R} - \vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^3}, \quad (1.60)$$

e ainda, que o potencial vetor \vec{A} em \vec{r} , produzido pelo dipolo magnético situado em \vec{R} , é

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}, \quad (1.61)$$

podemos encontrar:

$$\vec{E} \times \vec{\mu} = \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \times \vec{\mu} = e \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} = e\vec{A}. \quad (1.62)$$

Observa-se na equação anterior que o potencial vetor é constituído em termos referentes ao acoplamento do momento de dipolo da partícula neutra com o campo elétrico gerado pela partícula carregada. Em vista disso, a lagrangeana para o dipolo pode ser reescrita dessa forma:

$$\mathcal{L}_{dip} = \frac{M\dot{R}^2}{2} - e\vec{A} \cdot \dot{\vec{R}}. \quad (1.63)$$

Por fim, fazendo a soma dos termos da langrangeana total (1.51) e (1.63), obtemos a interação entre a partícula carregada e o dipolo magnético, introduzida por Aharonov e Casher, é (AHARONOV; CASHER, 1984), cuja forma explícita:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M\dot{R}^2}{2} + e\vec{A} \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}) \quad (1.64)$$

onde $\dot{\vec{r}}$ e $\dot{\vec{R}}$ são as velocidades da partícula carregada e do momento de dipolo, respectivamente.

Como podemos notar, temos na equação (1.64), além dos termos cinéticos da partícula e do dipolo, uma dependência com a velocidade relativa entre elas, sendo este o detalhe que garante que a partícula neutra esteja em uma região livre de forças. O termo extra $e\dot{\vec{R}} \cdot \vec{A}$ da equação anterior é de fundamental importância, pois de outra forma a partícula carregada experimentaria uma força dependente do calibre na região onde o campo magnético é nulo. Em outras palavras, só conseguiremos obter um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm se a partícula estiver inserida em uma região livre de forças.

Até agora, obtivemos a lagrangeana que descreve a interação entre duas partículas, sendo uma neutra e outra carregada. Entretanto, no efeito Aharonov-Casher a partícula neutra interage com o campo elétrico produzido por uma distribuição linear de cargas, dessa forma iremos fazer a seguinte generalização da equação (1.64):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_j M_j \dot{R}_j^2 + e \sum_{i,j} \vec{A} \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}_j) \quad (1.65)$$

onde os somatórios em i são efetuados sobre as partículas carregadas e somatórios em j são efetuados sobre as partículas neutras.

Podemos observar que o termo potencial vetor $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}_i - \vec{R}_j)$ da equação (1.65) depende apenas da posição relativa entre as partículas. Isso significa que o efeito independe do movimento ser realizado pela partícula carregada em torno do dipolo magnético ou vice-versa. Conseqüentemente, devemos esperar um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm se considerarmos cargas estacionárias. A partir disso, vamos considerar agora que o dipolo magnético move-se nas proximidades de uma distribuição linear de cargas estáticas (*i.e.* $\dot{\vec{r}} = 0$), desta forma, a lagrangeana que descreve essa interação é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{R}^2}{2} - e\vec{A} \cdot \dot{\vec{R}} \quad (1.66)$$

onde $e\vec{A} = \vec{E} \times \vec{\mu}$ e o campo elétrico \vec{E} é o campo gerado por uma distribuição linear de cargas λ .

A partir da lagrangeana (1.66), podemos obter o momento canônico deste sistema, cuja forma é

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}} - e\vec{A}. \quad (1.67)$$

Seguindo o formalismo hamiltoniano, utilizando a Transformada de Legendre ($H = \dot{\vec{R}} \cdot \vec{p} - \mathcal{L}$) obtemos:

$$H = \frac{1}{2M} [\vec{p} - \vec{E} \times \vec{\mu}]^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2M} + \frac{\mu}{2M} (\nabla \cdot \vec{E}), \quad (1.68)$$

onde o segundo termo é uma correção devido ao surgimento de um momento de dipolo elétrico induzido que pode ser desprezado quando tomamos $\mu E \ll M\dot{R}$.

Consideramos também que o campo elétrico \vec{E} é gerado por uma distribuição de linear de carga ao longo do eixo z , dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{\rho} \hat{\rho}, \quad (1.69)$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\hat{\rho}$ é um vetor unitário na direção radial e λ é a constante associada a uma distribuição linear de cargas elétricas.

Dessa forma, seguindo os procedimentos de Aharonov e Casher mostramos que a fase geométrica quântica que a partícula neutra com momento de dipolo magnético adquire ao circular uma linha de cargas elétricas perpendicular ao plano de movimento do dipolo é dada por (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$)

$$\Delta S = \phi_{AC} = -e \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r} = \pm 2\pi\mu\lambda, \quad (1.70)$$

onde $e\vec{A} = \vec{E} \times \vec{\mu}$, λ é a constante associada a uma distribuição linear de cargas elétricas, μ é o momento de dipolo magnético da partícula neutra e o sinal \pm corresponde às projeções do momento de dipolo magnético no eixo z . Note que o efeito é máximo se o feixe de dipolos estiver com sua polarização orientada ao longo da linha de cargas.

Devemos notar que momento de dipolo magnético tem que ser paralelo a linha de cargas e ter seu movimento restrito ao plano do campo elétrico, sendo assim, o dipolo não sofre a ação de qualquer força e o efeito é dito topológico no sentido de que depende apenas do número de voltas do caminho ao redor da linha de cargas.

No efeito Aharonov-Casher o campo elétrico produzido pela linha de cargas interage localmente com o dipolo magnético da partícula e a fase que o dipolo magnético adquire ao circular a linha de cargas elétricas é uma fase geométrica. Diz-se que uma é fase geométrica se ela é um efeito local. No caso do efeito Aharonov-Bohm a partícula está em uma região livre de campos, ou seja, a interação não ocorre no local onde a partícula se encontra.

1.5 O sistema Aharonov-Casher confinado em um anel quântico bidimensional

Nesta seção, iremos estudar o sistema Aharonov-Casher sob a influência de um potencial escalar. Para esta finalidade, abordaremos uma descrição de um trabalho publicado no artigo (BAKKE; FURTADO, 2012), em 2012, que trata sobre a dinâmica quântica de uma partícula neutra no sistema Aharonov-Casher confinada em um anel quântico bidimensional descrito pelo modelo de Tan-Inkson (TAN, 1996). Como ponto de partida, iremos abordar o potencial externo que descreve o modelo de Tan-Inkson para um anel quântico bidimensional e em seguida, descrevemos a dinâmica quântica da partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente interagindo com campo elétrico externo.

O anel quântico bidimensional é um sistema mesoscópico o qual foi descrito pelo modelo Tan-Inkson (TAN, 1996), (TAN; INKSON, 1996), (TAN; INKSON, 1999) cujo potencial é representado como:

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 + V_0, \quad (1.71)$$

onde $V_0 = \sqrt{a_1 a_2}$, os parâmetros a_1 e a_2 são parâmetros constantes.

Neste modelo, ao adotar o parâmetro $a_1 = 0$, a expressão (1.71) representa o modelo de Tan-Inkson para um ponto quântico em duas dimensões. Quando tomamos $a_2 = 0$, a equação (1.71) representa o modelo para um anti-ponto quântico bidimensional (TAN, 1996). Recentemente, este modelo foi estudado na presença do fluxo quântico Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959) e na presença de um defeito topológico linear (FURTADO et al., 2007).

A partir da expressão para o hamiltoniano que descreve a interação entre uma partícula neutra de massa com momento de dipolo magnético permanente e um campo elétrico externo dado na equação (1.68), a dinâmica quântica desta partícula pode ser descrita pela seguinte equação de Schrödinger-Pauli (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} [\vec{p} + \vec{\Xi}]^2 \psi - \frac{\mu^2 E^2}{2m} \psi + \frac{\mu}{2m} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \psi + \mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \psi + V(\rho) \psi, \quad (1.72)$$

onde μ é o momento de dipolo magnético da partícula. Adotaremos aqui m para massa da partícula neutra e σ^i como as matrizes de Pauli que satisfazem a relação $(\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i) = 2\eta^{ij}$, onde $\eta^{ab} = \text{diag}(+, +, +)$ e $V(\rho)$ representa o potencial escalar.

O vetor $\vec{\Xi}$ é definido de tal maneira que suas componentes são dadas no referencial local por $\Xi_k = \mu(\vec{\sigma} \times \vec{E})_k + \frac{1}{2\rho} \sigma^3 \delta_k^\varphi$, onde o termo $\frac{1}{2\rho} \sigma^3 \delta_k^\varphi$ a contribuição que provém do sistema de coordenadas curvilíneas adotado (coordenadas cilíndricas). Em teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo, este termo é a contribuição proveniente da conexão spinorial (BIRRELL et al., 1984), (BAKKE; FURTADO, 2010).

Vale salientar que no sistema Aharonov-Casher, o termo $\mu \vec{A}_{AC} = \mu(\vec{\sigma} \times \vec{E}) = \pm \frac{\phi_{AC}}{2\pi\rho} \hat{\varphi}$ (onde $\hat{\varphi}$ é um vetor unitário na direção azimutal) representa um vetor potencial efetivo, e produz o aparecimento de uma mudança de fase na função de onda da partícula dada na equação (1.70), tratando-se do efeito Aharonov-Casher.

O movimento da partícula neutra está restrito a um anel quântico bidimensional em uma região onde $\rho \neq 0$, assim, o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ é nulo, pois assumimos que a função de onda da partícula neutra é bem comportada na origem. Considerando o momento de dipolo magnético da partícula neutra paralelo ao eixo z , podemos escrever a equação de Schrödinger-Pauli (1.72), em coordenadas cilíndricas, como (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial\psi}{\partial t} = & \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i}{2m} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{2m\rho^2} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \psi \\
 & - \frac{i}{m} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 \psi + \frac{1}{8m\rho^2} \psi + \frac{a_1}{\rho^2} \psi + a_2\rho^2\psi + V_0\psi.
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

Observe que o momento angular total $\hat{j}_z = -i\partial_\varphi$ (SCHLUTER et al., 1983) e o operador $\hat{p}_z = -i\partial_z$ comutam com o operador hamiltoniano do lado direito da equação (1.73), e ψ é uma autofunção de σ^3 cujos autovalores são $s = \pm 1$. Portanto, uma solução particular da equação de Schrödinger-Pauli pode ser escrita em termos das autofunções dos operadores \hat{J}_z e \hat{p}_z como

$$\psi(t, \rho, \varphi, z) = e^{-i\varepsilon t} e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi} e^{ikz} R(\rho), \tag{1.74}$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o número quântico associado a componente z do momento angular, k é uma constante associada à componente z do momento linear e $R(\rho)$ é a função da coordenada radial. Dessa forma, usando a equação (1.74), podemos reescrever a equação (1.73) da seguinte maneira:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^2} - 2ma_2\rho^2 + \beta \right] R(\rho) = 0, \tag{1.75}$$

onde trabalhamos com os parâmetros:

$$\begin{aligned}
 \tau^2 &= \gamma^2 + 2ma_1; \\
 \gamma &= l + \frac{1}{2}(1-s) + s\frac{\phi_{AC}}{2\pi}; \\
 \beta &= 2m \left(\varepsilon - V_0 - \frac{k^2}{2m} \right).
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Vamos realizar a seguinte mudança de variáveis:

$$\zeta = \sqrt{2ma_2}\rho^2, \tag{1.77}$$

resultando em

$$\zeta \frac{d^2 R}{d\zeta^2} + \frac{dR}{d\zeta} - \frac{\tau^2}{4\zeta} R + \frac{\beta}{4\sqrt{2ma_2}} R = 0. \tag{1.78}$$

O comportamento assintótico das soluções possíveis para equação (1.78) é determinado para $\zeta \rightarrow 0$ e $\zeta \rightarrow \infty$, portanto, isto nos permite escrever a função $R(\zeta)$ em termos de uma função desconhecida $F(\zeta)$ como

$$R(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{2}} \zeta^{\frac{|\tau|}{2}} F(\zeta). \quad (1.79)$$

Dessa maneira, substituindo a solução (1.79) na equação diferencial de segunda ordem (1.78), obtemos

$$\zeta F'' + [|\tau| + 1 - \zeta] F' + \left[\frac{\beta}{4\sqrt{2ma_2}} - \frac{|\tau|}{2} - \frac{1}{2} \right] F = 0 \quad (1.80)$$

A equação (1.80) é conhecida na literatura como equação de Kummer ou equação hipergeométrica confluyente (ARFKEN; WEBER, 2005), (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964). A função $F(\zeta)$ corresponde a função hipergeométrica confluyente, que é definida como

$$F(\zeta) = \left[\frac{|\tau|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4\sqrt{2ma_2}}, \tau + 1, \zeta \right]. \quad (1.81)$$

Uma função radial finita pode ser obtida ao impormos a condição na qual a série hipergeométrica confluyente torna-se um polinômio de grau n (onde $n = 0, 1, 2, \dots$). Para isso, vamos utilizar o método de Frobenius (ARFKEN; WEBER, 2005), e escrever a solução para equação (1.80) como uma expansão em série de potências em torno da origem:

$$F(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \zeta^j. \quad (1.82)$$

Substituindo a série (1.82) e suas primeira e segunda derivadas: $F'(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \zeta^{j-1}$ e $F''(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) c_j \zeta^{j-2}$ na equação (1.80), obtemos uma relação de recorrência dada por:

$$c_{j+1} = \frac{j - \left[\frac{\beta}{4\sqrt{2ma_2}} - \frac{|\tau|}{2} - \frac{1}{2} \right]}{j(j+1)(|\tau|+1)(j+1)} c_j. \quad (1.83)$$

Note que podemos encontrar soluções para os estados estacionários impondo que a série hipergeométrica confluyente torna-se um polinômio de grau n . Isso ocorre quando

$$\frac{|\tau|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4\sqrt{2ma_2}} = -n \quad (1.84)$$

para $j = n$, na relação de recorrência (1.83).

Dessa forma, substituindo as expressões definidas em (1.77) na condição (1.84), obtemos os níveis de energia correspondentes aos estados ligados, como

$$\varepsilon_{n,l} = \omega \left[n + \frac{|\tau|}{2} + \frac{1}{2} \right] + \frac{k^2}{2m} + V_0. \quad (1.85)$$

onde a frequência angular ω do sistema é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{8a_2}{m}}. \quad (1.86)$$

O resultado (1.85) corresponde ao espectro discreto de energia de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente confinada em um anel quântico bidimensional. Note que os níveis de energia para estados ligados dependem do fluxo quântico Aharonov-Casher com periodicidade $\phi_0 = \pm 2\pi$, ou seja, $\varepsilon_{n,l,s}(\phi_{AC} + \phi_0) = \varepsilon_{n,l+1,s}(\phi_{AC})$. Esta dependência dos níveis de energia na fase quântica geométrica corresponde ao efeito análogo Aharonov-Bohm para estados ligados ou efeito Aharonov-Casher para estados ligados (BAKKE; FURTADO, 2011). Uma vez que não existem forças clássicas agindo no sistema, este efeito pode ser considerado de natureza geométrica corroborando com as características do efeito Aharonov-Casher (AHARONOV; CASHER, 1984).

Um caso interessante para se discutir baseia-se em considerarmos $a_1 = 0$ em (1.71). Tal consideração resulta em um potencial correspondente a um ponto quântico bidimensional. Para este caso, prosseguindo com todas as etapas anteriores da equação (1.72) à equação (1.84), obtemos os níveis de energia para estados ligados de uma partícula neutra confinada a um ponto quântico bidimensional como sendo

$$\varepsilon_{n,l} = \sqrt{\frac{8a_2}{m}} \left[n + \frac{\left| l + \frac{1}{2}(1-s) + s\frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right|}{2} + \frac{1}{2} \right] + \frac{k^2}{2m} \quad (1.87)$$

onde podemos notar que os níveis de energia (1.87) também dependem do fluxo quântico com periodicidade $\phi_0 = \pm 2\pi$.

Ao considerarmos $a_2 = 0$ em (1.71), obteremos o modelo para um anti-ponto quântico bidimensional. Neste caso, nenhum estado ligado pode ser obtido, entretanto, pode-se obter soluções de estados ligados ao considerar o movimento da partícula neutra

restrito em uma região específica, por exemplo, entre dois cilindros coaxiais com paredes impenetráveis, como mostrado em (BAKKE; FURTADO, 2011). No capítulo 3 e 4 desta tese, apresentaremos soluções de estado ligado associado ao sistema Aharonov-Casher confinado em um anel quântico bidimensional, e em um ponto quântico bidimensional, sob a influência de potenciais centrais.

Diante disso, nos capítulos seguintes iremos explorar alguns efeitos quânticos de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético na presença de potenciais centrais e que interagem com campo elétrico externo.

2 O sistema Aharonov-Casher sujeito a um potencial tipo-Coulomb

Neste capítulo, vamos analisar efeitos quânticos sobre uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente na presença de um campo elétrico externo. Discutiremos o surgimento de estados ligados da equação de Schrödinger-Pauli (1.72) devido a presença de um potencial tipo-Coulomb. Potenciais tipo-Coulomb têm sido estudado em diversos campos da física da matéria condensada, como por exemplo, moléculas (IKHDAIR et al., 2015; GUSEINOV; MAMEDOV, 2004; GUSEINOV, 2004), estudos que trabalham com sistemas unidimensionais (GRIBI; SIGMUND, 1991; GESZTESY; THALLER, 1981; REYES; CASTILLO-MUSSOT, 1999; RAN et al., 2000; CHARGUI et al., 2014), sistemas de massa dependente s da posição (ALHAIDARI, 2002; ALHAIDARI, 2004; YU; DONG, 2004), interações pseudo-harmônicas (IKHDAIR; HAMZAVI, 2012), o potencial Kratzer (KRATZER, 1922) e defeitos topológicos em sólidos (FURTADO et al., 1994; MIL'SHTEIN, 1979; KITTLER et al., 2007; RAN et al., 2009). Podemos mencionar também, estudos que abordam o potencial tipo Coulomb em propagação de ondas gravitacionais (ASADA; FUTAMASE, 1997), modelos de quarks (CRITCHFIELD, 1976), átomos com momento de quadrupolo elétrico (BAKKE, 2014a; BAKKE, 2014b; BAKKE, 2015) e momento de quadrupolo magnético (FONSECA; BAKKE, 2015), momento de dipolo elétrico induzido (OLIVEIRA; BAKKE, 2016) e mecânica quântica relativística (CRATER et al., 2009; MEDEIROS; MELLO, 2012; BAKKE; FURTADO, 2015; KHALILOV, 2005).

2.1 Sistema Aharonov-Casher sujeito a um potencial tipo-Coulomb

No decorrer deste capítulo, vamos discutir o confinamento de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente em um potencial tipo-Coulomb e investigar os efeitos quânticos associados a este sistema. Para essa finalidade, vamos introduzir o seguinte potencial escalar na equação de Schrödinger-Pauli (1.72)

$$V(\rho) = \frac{\eta}{\rho}, \quad (2.1)$$

onde η é um parâmetro constante relativa a intensidade do potencial tipo-Coulomb (MEDEIROS; MELLO, 2012), (BAKKE; MORAES, 2012).

Portanto, substituindo a equação (2.1) na equação de Schrödinger-Pauli, em coordenadas cilíndricas, obtemos (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial\psi}{\partial t} = & \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i}{2m} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{2m\rho^2} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \psi \\
 & - \frac{i}{m} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 \psi + \frac{1}{8m\rho^2} \psi + \frac{\eta}{\rho} \psi.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observe que o momento angular total $\hat{j}_z = -i\partial_\varphi$ e o operador $\hat{p}_z = -i\partial_z$ comutam com o operador Hamiltoniano do lado direito da equação (2.2), e ψ é uma autofunção de σ^3 cujos autovalores são $s = \pm 1$. Assim, uma solução particular para a equação (2.2) pode ser escrita em termos dos autovalores dos operadores \hat{J}_z e \hat{p}_z como

$$\psi(t, \rho, \varphi, z) = e^{-i\varepsilon t} e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi} e^{ikz} \bar{R}(\rho), \tag{2.3}$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, k é uma constante associada à componente z do momento linear e $\bar{R}(\rho)$ é a função da coordenada radial. Assim, substituindo (2.3) na equação (2.2), obtemos a seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^2} - \frac{2m\eta}{\rho} + \beta^2 \right] \bar{R}(\rho) = 0, \tag{2.4}$$

onde temos definidos os parâmetros:

$$\begin{aligned}
 \tau &= l + \frac{1}{2}(1-s) + s \frac{\phi_{AC}}{2\pi}; \\
 \beta^2 &= 2m \left(\varepsilon - \frac{k^2}{2m} \right).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Vamos discutir o comportamento assintótico das possíveis soluções da equação (2.4). Conforme mencionado anteriormente, nosso foco é encontrar soluções de estado ligado, para isto, vamos considerar $\beta^2 = -\nu^2$ na equação (2.4). Substituindo β^2 por $-\nu^2$ na equação (2.4), iremos também realizar uma mudança de variáveis dada por: $\varsigma = 2\nu\rho$; dessa forma, obtemos

$$\bar{R}'' + \frac{1}{\varsigma} \bar{R}' - \frac{\tau^2}{\varsigma^2} \bar{R} - \frac{m\eta}{\nu\varsigma} \bar{R} - \frac{1}{4} \bar{R} = 0. \tag{2.6}$$

Tomando o limite $\varsigma \rightarrow 0$ na equação (2.6), o termo dominante neste limite é aproximadamente

$$\bar{R}'' \approx \frac{\tau^2}{\varsigma^2} \bar{R} \tag{2.7}$$

que tem como solução:

$$\bar{R}(\varsigma \rightarrow 0) = \varsigma^{|\tau|} \bar{r}(\varsigma), \quad (2.8)$$

onde $\bar{r}(\varsigma)$ é uma função desconhecida. Dessa maneira, substituindo a equação (2.8) na equação (2.6), obtemos:

$$\bar{r}'' + \left(\frac{2\tau + 1}{\varsigma} \right) \bar{r}' - \frac{m\eta}{\gamma\varsigma} \bar{r} - \frac{1}{4} \bar{r} = 0 \quad (2.9)$$

Agora, tomando o limite $\varsigma \rightarrow \infty$, a equação (2.9), o termo dominante para este limite é aproximadamente

$$\bar{r}'' \approx \frac{1}{4} \bar{r} \quad (2.10)$$

Tendo como solução:

$$\bar{r}(\varsigma \rightarrow \infty) = e^{\frac{-\varsigma}{2}} F(\varsigma), \quad (2.11)$$

onde $F(\varsigma)$ é uma função desconhecida.

Portanto, substituindo a equação (2.11) na equação (2.9), obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\varsigma F'' + [2|\tau| + 1 - \varsigma] F' + \left(-|\tau| - \frac{1}{2} - \frac{m\eta}{\nu} \right) F = 0. \quad (2.12)$$

Podemos observar que a equação (2.12) corresponde à equação de Kummer ou a equação hipergeométrica confluyente (ARFKEN; WEBER, 2005), (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964). A função $F(\varsigma)$ é uma função hipergeométrica confluyente, dada por:

$$F(\varsigma) = F\left(|\tau| + \frac{1}{2} + \frac{m\eta}{\nu}, 2|\tau| + 1, \varsigma\right). \quad (2.13)$$

Além disso, analisando o comportamento assintótico para $\varsigma \rightarrow \infty$, temos que a função hipergeométrica confluyente diverge para grandes valores de ς .

Com objetivo de obter uma função de onda bem comportada na origem, vamos impor a condição onde a série hipergeométrica confluyente torna-se um polinômio de grau

n ($n = 0, 1, 2, \dots$), de acordo com o procedimento já realizado no capítulo anterior, como mostra a equação (1.84). Ou seja,

$$|\tau| + \frac{1}{2} + \frac{m\eta}{\nu} = -n \quad (2.14)$$

Desta maneira, da equação (2.6) podemos escrever $-\nu^2 = 2m \left(\varepsilon - \frac{k^2}{2m} \right)$, então, obtemos da condição (2.14) que

$$\varepsilon_{n,l,s} = -\frac{m\eta^2}{2 \left[n + |l + \frac{1}{2}(1-s) + s \frac{\phi_{AC}}{2\pi}| + \frac{1}{2} \right]^2} + \frac{k^2}{2m}. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) é o espectro de energia associado ao sistema Aharonov-Casher sujeito ao potencial tipo-Coulomb. Podemos notar que existe uma dependência dos níveis de energia com os números quânticos do sistema $\{n, l, s\}$. Observe que os níveis de energia dependem da fase geométrica Aharonov-Casher ϕ_{AC} e tem uma periodicidade $\phi_0 = \pm 2\pi$, então, $\varepsilon_{n,l,s}(\phi_{AC} + \phi_0) = \varepsilon_{n,l+1,s}(\phi_{AC})$.

3 O sistema Aharonov-Casher confinado em um anel bidimensional sujeito a um potencial tipo-Coulomb

Neste capítulo, iremos investigar os efeitos quânticos associados a interação entre o momento de dipolo magnético da partícula neutra confinada em um anel quântico bidimensional sob a influência de um potencial central tipo-Coulomb. Discutiremos o surgimento de soluções de estados ligados na equação de Schrödinger-Pauli (1.71) devido à presença desse potencial. A abordagem do potencial associado ao anel quântico bidimensional escolhida é o modelo de Tan-Inkson (TAN, 1996), (TAN; INKSON, 1996), (TAN; INKSON, 1999), já apresentado no capítulo 1. Tal modelo foi utilizado por ter uma alto potencial de aplicabilidade como é possível constatar em diversos estudos envolvendo anéis com dimensões mesoscópicas. Além disso, investigações com anéis quânticos sujeitos a campos externos apresentam uma série de fenômenos físicos muito interessantes, como, por exemplo, o efeito Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959), (KEYSER et al., 2002), o efeito Hall quântico (HALPERIN, 1982), a fase quântica de Berry (CHANDRASEKHAR et al., 1991), (BERRY; KEATING, 1994), a interação spin-órbita (MEIR et al., 1990), correntes persistentes (TAN; INKSON, 1999), (AVISHAI et al., 1993), (AVISHAI; KOHMOTO, 1993) e densidade de estados em anel quântico (KIM et al., 2017)

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção abaixo, investigamos a influência de um potencial tipo-Coulomb sobre um sistema no qual uma partícula neutra de momento de dipolo magnético está confinada em um anel quântico bidimensional; e apresentamos as nossas considerações finais a respeito do tema.

3.1 Efeitos associados ao Análogo do Potencial de Coulomb

Nesta seção, iremos investigar o comportamento de uma partícula neutra que interage com um campo elétrico radial confinado em um anel quântico bidimensional assumindo que esse sistema está sujeito a um potencial do tipo-Coulomb. Dessa forma, além do potencial referente ao anel bidimensional, incluiremos a presença de um potencial tipo-Coulomb $\frac{\eta}{\rho}$, assim, o potencial escalar $V(\rho)$ na equação (1.71) fica escrito na forma:

$$V(\rho) = \frac{\eta}{\rho} + \frac{a_1}{\rho^2} + a_2 \rho^2 + V_0, \quad (3.1)$$

onde η é um parâmetro constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb. Note que, tomando o parâmetro $\eta = 0$, a expressão (3.1) representa o modelo de Tan-Inkson para um anel quântico bidimensional, descrito na equação (1.71).

Através dessas considerações, escrevemos a equação de Schrödinger-Pauli (1.72), em coordenadas cilíndricas, da seguinte forma (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i}{2m} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2m\rho^2} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \psi \\ & - \frac{i}{m} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 \psi + \frac{1}{8m\rho^2} \psi + \frac{\eta}{\rho} \psi + \frac{a_1}{\rho^2} \psi + a_2 \rho^2 + V_0 \psi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilizando os mesmos argumentos usados nos capítulos anteriores, a solução para a equação (3.2) pode ser escrita como:

$$\psi = e^{-i\mathcal{E}t} e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi} e^{ikz} f_s(\rho), \quad (3.3)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, k é uma constante associada à componente z do momento linear e f_s é uma função desconhecida da coordenada radial.

Assim, substituindo a solução (3.3) na equação (3.2), obtemos a seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^2} - 2m a_2 \rho^2 - \frac{2m\eta}{\rho} + \beta \right] f_s(\rho) = 0, \quad (3.4)$$

onde definimos os parâmetros:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \gamma^2 + 2m a_1; \\ \gamma &= l + \frac{1}{2} (1 - s) + s \frac{\phi_{AC}}{2\pi}; \\ \beta &= 2m \left(\mathcal{E} - V_0 - \frac{k^2}{2m} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora, vamos simplificar nosso sistema fazendo $k = 0$, a fim de reduzir o sistema para um sistema planar e realizar uma mudança de variáveis dada por: $\xi = (2ma_2)^{1/4} \rho$; deste modo, obtemos

$$f_s'' + \frac{1}{\xi} f_s' - \frac{\tau^2}{\xi^2} f_s - \frac{\delta}{\xi} f_s - \xi^2 f_s + \frac{\beta}{\sqrt{2ma_2}} f_s = 0, \quad (3.6)$$

onde $\delta = \frac{2m\eta}{(2ma_2)^{1/4}}$.

Procedendo com a análise assintótica da equação (3.6), para os limites $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$, podemos escrever a função $f_s(\xi)$ em termos de uma função desconhecida $H_s(\xi)$ como:

$$f_s(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^{|\tau|} H_s(\xi). \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (3.6), obtemos

$$H_s'' + \left[\frac{2|\tau| + 1}{\xi} - 2\xi \right] H_s' + \left[g - \frac{\delta}{\xi} \right] H_s = 0, \quad (3.8)$$

onde $g = \frac{\beta}{\sqrt{2ma_2}} - 2 - 2|\tau|$. A função $H_s(\xi)$ é uma solução para equação diferencial de segunda ordem (3.8) e é conhecida como função biconfluyente de Heun (ARSCOTT, 1995):

$$H_s(\xi) = H \left(2|\tau|, 0, \frac{\beta}{\sqrt{2ma_2}}, 2\delta, \xi \right). \quad (3.9)$$

Conforme mencionado anteriormente, nosso foco é encontrar solução de estado ligado para a equação de Schrödinger, portanto prosseguimos com o método de Frobenius (ARFKEN; WEBER, 2005) a fim de escrever a solução para equação (3.8) como uma expansão em série de potências em torno da origem: $H_s(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \xi^j$. Substituindo esta série na equação (3.8), obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$d_{j+2} = \frac{\delta}{(j+2)(j+1+\theta)} d_{j+1} - \frac{(g-2j)}{(j+2)(j+1+\theta)} d_j, \quad (3.10)$$

onde $\theta = 2|\tau| + 1$. Iniciando com $d_0 = 1$ e usando a relação (3.10), podemos calcular outros coeficientes da expansão em série de potências $H_s(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \xi^j$. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\delta}{\theta}; \\ d_2 &= \frac{\delta^2}{2\theta(1+\theta)} - \frac{g}{2(1+\theta)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observe que podemos obter soluções de estados ligados, impondo que a expansão em série de potência $H_s(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \xi^j$ torna-se um polinômio de grau \bar{n} .

Através da relação de recorrência (3.10), esta expansão em série de potências torna-se um polinômio de grau \bar{n} impondo as seguintes condições:

$$g = 2\bar{n} \quad \text{e} \quad d_{\bar{n}+1} = 0, \quad (3.12)$$

onde $\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$, e $g = \frac{\beta}{\sqrt{2ma_2}} - 2|\tau| - 2$. Analisando a condição $g = 2\bar{n}$, obtemos os níveis de energia para estados ligados (BARBOZA; BAKKE, 2015):

$$\mathcal{E}_{\bar{n},l,s} = \omega [\bar{n} + |\tau| + 1] + V_0, \quad (3.13)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{2a_2}{m}}$ corresponde a frequência angular do sistema.

Os níveis de energia (3.13) correspondem ao espectro de energia de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente confinado em um anel quântico bidimensional na presença de um potencial tipo-Coulomb. Note que, ao contrário de estudos de confinamento de partículas em um anel quântico (FURTADO et al., 2007), (BAKKE; FURTADO, 2012) e (TAN, 1996), a presença do potencial do tipo-Coulomb modifica o espectro de energia do confinamento de uma partícula em um anel quântico bidimensional. Podemos constatar isso, quando comparamos os níveis de energia (3.13) com o espectro de energia para o caso de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente confinada em um anel bidimensional (1.85), descrito no capítulo 1. Além disso, a frequência angular do modelo de Tan-Inkson $\omega_0 = \sqrt{\frac{8a_2}{m}}$ (TAN, 1996) é modificado pela influência do potencial tipo-Coulomb, onde a frequência angular do sistema torna-se $\omega = \sqrt{\frac{2a_2}{m}}$.

Agora, vamos analisar a condição $d_{\bar{n}+1} = 0$ dada na Equação (3.12). Recentemente, a análise da condição $d_{\bar{n}+1} = 0$ feita em alguns estudos na mecânica quântica origina uma relação entre a frequência angular e os números quânticos do sistema (MEDEIROS; MELLO, 2012), (BAKKE; MORAES, 2012). Do ponto de vista matemático, a relação em que envolve a frequência angular e os números quânticos $\{n, l, s\}$ resulta do fato de que as soluções exatas para equação (3.8) são alcançadas para alguns valores da frequência angular.

No que se segue, vamos discutir a relação entre a frequência angular $\omega = \sqrt{\frac{2a_2}{m}}$ e os números quânticos do sistema. Primeiramente, vamos assumir que o parâmetro a_2 do modelo Tan-Inkson pode ser ajustado de tal forma que a condição $d_{\bar{n}+1} = 0$ é satisfeita. O significado do pressuposto é que alguns valores específicos do parâmetro a_2 são permitidos a fim de obter soluções de estados ligados. Além disso, os valores permitidos de a_2 dependem dos números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$; assim, chamamos $a_2 = a_2^{\bar{n},l,s}$ e a frequência angular é escrita como $\omega = \omega_{\bar{n},l,s}$. Portanto, as duas condições estabelecidas na equação (3.12) são satisfeitas e uma expressão polinomial para a função $H_s(\xi)$ é obtida. Vamos exemplificar

esta discussão considerando o estado de menor energia, que é determinado por $\bar{n} = 1$. Neste caso, a condição $d_{\bar{n}+1} = 0$ leva a $d_2 = 0$, então, usando a relação (3.11), a correspondente frequência angular associada ao estado de menor energia é dada por

$$\omega_{1,l,s} = \frac{2m\eta}{(2|\tau| + 1)}. \quad (3.14)$$

Dessa forma, a expressão geral para os níveis de energia (3.13) deve ser escrita como:

$$\mathcal{E}_{\bar{n},l,s} = \omega_{\bar{n},l,s} [\bar{n} + |\tau| + 1] + \sqrt{a_1 \cdot a_2^{\bar{n},ls}}. \quad (3.15)$$

Portanto, das equações (3.14) e (3.15) podemos ver que os efeitos do potencial tipo-Coulomb no espectro de energia da partícula neutra confinada em um anel quântico bidimensional correspondem a uma mudança dos níveis de energia, cujo estado de menor energia é definido pelo número quântico $\bar{n} = 1$ e a frequência angular depende dos números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$. Esta dependência da frequência angular com os números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$ significa que nem todos valores da frequência angular são permitidos, mas alguns valores específicos do parâmetro a_2 que são definidos de tal maneira que as condições estabelecidas na equação (3.12) são satisfeitas e uma solução polinomial para a função $H_s(\xi)$ é obtida. Note que, embora exista a presença de um potencial tipo-Coulomb, este sistema continua sendo um sistema mesoscópico e, portanto, podemos esperar a mesma escala de energia daquela discutida na referência (TAN, 1996).

Além disso, devido ao parâmetro $\tau^2 = \left[l + \frac{1}{2}(1-s) + s\frac{\phi_{AC}}{2\pi}\right]^2 + 2ma_1$, podemos observar nas equações (3.14) e (3.15) a dependência de ambos níveis de energia e a frequência angular com a fase geométrica Aharonov-Casher (AHARONOV; CASHER, 1984).

Considerando o estado de menor energia ($\bar{n} = 1$), obtemos o seguinte nível de energia

$$\mathcal{E}_{1,l,s} = \frac{2m\eta}{(2|\tau| + 1)} [|\tau| + 2] + \frac{\sqrt{2m^3\eta^2 a_1}}{(2|\tau| + 1)}, \quad (3.16)$$

onde substituímos a frequência angular (3.14) na equação (3.15). Note que o nível de energia do estado de menor energia (3.16) depende da fase quântica geométrica Aharonov-Casher com periodicidade $\phi_0 = \pm 2\pi$, então, temos que $\mathcal{E}_{1,l,s}(\phi_{AC} + \phi_0) = \mathcal{E}_{1,l+1,s}(\phi_{AC})$.

Em particular, observamos uma dependência da frequência angular com a fase quântica de Aharonov-Casher (3.14) e que a expressão para a frequência angular muda para outros valores do número quântico \bar{n} , isto é, para outros níveis de energia.

Ao longo desse desenvolvimento, investigamos os efeitos do potencial tipo-Coulomb no confinamento do sistema Aharonov-Casher em um anel quântico bidimensional. Alguns efeitos quânticos puderam ser observados neste sistema: uma dependência dos níveis de energia na fase geométrica Aharonov-Casher e uma dependência da frequência angular nos números quânticos do sistema e também a fase quântica geométrica. Como um caso particular, obtivemos a frequência angular do estado fundamental. No capítulo seguinte, iremos investigar o mesmo sistema agora confinado em um ponto quântico sob a influência dos potenciais linear e tipo-Coulomb.

4 O sistema Aharonov-Casher confinado em um ponto quântico

A partir de agora vamos analisar efeitos quânticos associados ao nosso sistema agora confinado em um ponto quântico bidimensional sob a influência dos potenciais centrais tipo-Coulomb e linear. Como já mencionado anteriormente, o potencial tipo-Coulomb tem sido estudado em diversos cenários da física da matéria condensada e o interesse em incluir um potencial confinante linear vem dos estudos da física atômica e molecular (AUSTIN, 1980), (VRSCAY, 1985), (CASTRO; MARTÍN, 2000), estudos que abordam o confinamento de quarks (CRITCHFIELD, 1975);(CRITCHFIELD, 1976), e onde dados experimentais mostram que o comportamento do confinamento é proporcional a distância entre quarks (KAUSHAL, 1975), (EICHTEN et al., 1980). O potencial tipo-Coulomb também foi explorado em estudos da interação entre quark-antiquark, onde o termo de massa adquire uma contribuição dada pelo potencial de interação, que consiste em um potencial linear e um potencial de confinamento harmônico mais um termo do potencial de Coulomb (BAHAR; YASUK, 2013). Além disso, estudos de sistemas quânticos relativísticos também têm mostrado um grande interesse no potencial escalar linear (PLANTE; ANTIPPA, 2005), (NOBLE; JENTSCHURA, 2015),(GLASSER; SHAWAGFEH, 1984).

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 4.1, mostraremos a influência de um potencial linear sob o sistema Aharonov-Casher confinado em um ponto quântico e na seção 4.2, investigamos a influência dos potenciais linear mais o tipo-Coulomb sob o sistema Aharonov-Casher confinado em um ponto quântico e por fim, nossas considerações finais.

4.1 Influência de um potencial escalar linear

Vamos discutir agora a influência de um potencial escalar linear sobre uma partícula neutra confinada em um ponto quântico bidimensional (BAYER et al., 2000) quando o momento de dipolo magnético da partícula interage com um campo elétrico externo. O potencial de Tan-Inkson (1.71) pode ser utilizado para descrever várias estruturas quânticas por ser um modelo bastante versátil. Com isso, podemos descrever um ponto quântico que é modelado por um confinamento parabólico (TAN, 1996),(TAN; INKSON, 1996), (TAN; INKSON, 1999). Sendo assim, fazendo $a_1 = 0$ na equação (1.71), obtemos

$$V(\rho) = a_2\rho^2 \tag{4.1}$$

isto é, a equação (4.1) descreve o potencial de confinamento para um ponto quântico.

O confinamento de uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético em um ponto quântico sujeito a efeitos de um potencial linear central pode ser descrito introduzindo o seguinte potencial escalar na equação de Schrödinger:

$$V(\rho) = \alpha\rho + a_2\rho^2 \quad (4.2)$$

onde α é uma constante que caracteriza o potencial escalar linear.

Podemos observar que na equação (4.2), tomando o parâmetro $\alpha = 0$, o potencial escalar representa o modelo de Tan-Inkson para um ponto quântico bidimensional, como visto em (4.1). O parâmetro a_2 é uma constante que caracteriza o modelo de Tan-Inkson para um ponto quântico. Seguindo os mesmos passos do capítulo anterior, temos a seguinte equação de Schrödinger-Pauli (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} = & -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i}{2m} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{2m\rho^2} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \psi \\ & - \frac{i}{m} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 \psi + \frac{1}{8m\rho^2} \psi + \alpha\rho\psi + a_2\rho^2\psi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Novamente, observamos na equação de Schrödinger (4.3), que ψ é uma autofunção de σ^3 , onde os autovalores são $s = \pm 1$ e que os operadores $\hat{J}_z = -i\partial_\varphi$ e $\hat{p}_z = -i\partial_z$ comutam com o operador Hamiltoniano dado no lado direito da Equação (4.3). Por isso, uma solução particular para a equação de Schrödinger-Pauli (4.3) pode ser escrita em termos dos autovalores dos operadores \hat{J}_z e \hat{p}_z ,

$$\psi_s = e^{-i\varepsilon t} e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi} e^{ikz} G(\rho), \quad (4.4)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, k é uma constante associada à componente z do momento linear e $G(\rho)$ é a função desconhecida da coordenada radial.

Assim, substituindo a equação (4.4) na equação (4.3) e considerando $k = 0$ a fim de termos um sistema planar, obtemos a seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^2} - 2m\alpha\rho - 2ma_2\rho^2 + 2m\varepsilon \right] G(\rho) = 0, \quad (4.5)$$

onde τ é definido na equação como:

$$\tau = l + \frac{1}{2}(1 - s) + s \frac{\phi_{AC}}{2\pi}. \quad (4.6)$$

Realizando uma mudança de variáveis dada por: $\xi = (2ma_2)^{\frac{1}{4}}\rho$, a equação (4.5) torna-se:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dG}{d\xi} - \frac{\tau^2}{\xi^2}G - \tilde{\mu}\xi G - \xi^2G + \beta G = 0, \quad (4.7)$$

onde definimos os parâmetros

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{2m\alpha}{(2ma_2)^{3/4}}; \\ \beta &= \frac{2m\varepsilon}{(2ma_2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

O comportamento das possíveis soluções para a equação (4.7), que são determinadas pelos limites $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$ permite escrever a função $G(\xi)$ em termos de uma função desconhecida $H(\xi)$ de tal forma que:

$$G(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\tilde{\mu}\xi}{2}} \xi^{|\tau|} H(\xi). \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.7), obtemos

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} + \left[\frac{2|\tau|+1}{\xi} - \tilde{\mu} - 2\xi \right] \frac{dH}{d\xi} + \left[g - \frac{h}{\xi} \right] H = 0, \quad (4.10)$$

onde os parâmetros g e h são definidos como

$$\begin{aligned} g &= \beta + \frac{\tilde{\mu}^2}{4} - 2 - 2|\tau|; \\ h &= \frac{\tilde{\mu}}{2}(2|\tau| + 1). \end{aligned} \quad (4.11)$$

A equação (4.10) é conhecida como equação biconfluyente de Heun e a função $H(\xi)$ é conhecida como a função biconfluyente de Heun (ARSCOTT, 1995):

$$H(\xi) = H_B \left(2|\tau|, \tilde{\mu}, \beta + \frac{\tilde{\mu}^2}{4}, 0, \xi \right). \quad (4.12)$$

A fim de proceder com nossa discussão sobre soluções de estado ligado, vamos usar o método de Frobenius como usado em discussões anteriores. Portanto, a solução para a

equação (4.10) pode ser escrita como uma expansão em série de potências em torno da origem, ou seja,

$$H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{d}_j \xi^j. \quad (4.13)$$

Substituindo a série (4.13) na equação (4.10), obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$\bar{d}_{j+2} = \frac{\tilde{\mu}(j+1) + h}{(j+2)(j+2+2|\tau|)} \bar{d}_{j+1} - \frac{g-2j}{(j+2)(j+2+2|\tau|)} \bar{d}_j. \quad (4.14)$$

Vamos assumir $\bar{d}_0 = 1$ e, em seguida, usando a relação (4.14), podemos calcular outros coeficientes da expansão em série de potências (4.13), como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 &= \frac{\tilde{\mu}}{2}; \\ \bar{d}_2 &= \frac{\tilde{\mu}(\tilde{\mu} + h)}{4(2 + 2|\tau|)} - \frac{g}{2(2 + 2|\tau|)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A fim de obtermos soluções de estado ligado, vamos impor que a expansão em série de potência (4.13) ou a série biconfluente de Heun torne-se um polinômio de grau \bar{n} . Através da relação de recorrência (4.14), esta expansão em série de potências torna-se um polinômio de grau \bar{n} impondo as seguintes condições:

$$g = 2\bar{n} \quad \text{e} \quad \bar{d}_{\bar{n}+1} = 0, \quad (4.16)$$

onde $\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$. A partir da condição $g = 2\bar{n}$, podemos obter a expressão para os níveis de energia para estados ligados (BARBOZA; BAKKE, 2016a):

$$\varepsilon_{\bar{n},l,s} = \omega[\bar{n} + |\tau| + 1] - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}, \quad (4.17)$$

onde $\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico associado aos modos radiais, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o número quântico do momento angular, $s = \pm 1$ é o número quântico de spin e a frequência angular do sistema ω é dado por

$$\omega = \sqrt{\frac{2a_2}{m}}. \quad (4.18)$$

Podemos notar que a frequência angular do modelo de Tan-Inkson para um ponto quântico (TAN; INKSON, 1999), (TAN, 1996) é dada por $\omega = \sqrt{\frac{8a_2}{m}}$, ou seja, a influência do potencial escalar linear no confinamento da partícula neutra a um ponto quântico modifica a frequência angular do modelo de Tan-Inkson como observamos no resultado dado na equação (4.18). A equação (4.17) corresponde ao espectro de energia de uma partícula neutra confinada em um ponto quântico bidimensional sob a influência de um potencial linear. Observamos que esses níveis de energia dependem da fase geométrica quântica Aharonov-Casher ϕ_{AC} devido a presença do parâmetro τ .

Na sequência, vamos analisar a condição $\bar{d}_{\bar{n}+1} = 0$ presente em (4.16). Para este propósito, vamos assumir que a frequência angular ω pode ser ajustada de tal maneira que a condição $\bar{d}_{\bar{n}+1} = 0$ seja satisfeita. Essa condição é possível pois podemos ajustar o parâmetro a_2 do modelo de Tan-Inkson. Com esse pressuposto, temos que ambas as condições impostas na equação (4.16) são satisfeitas e obtemos uma solução polinomial para a função $H(\xi)$ analisada. Como consequência desta análise é que obtemos uma frequência angular ω que dependerá dos números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$ do sistema. Isto significa que apenas alguns valores específicos do parâmetro a_2 serão permitidos para que possamos obter soluções de estados ligados.

Como um exemplo, vamos considerar $\bar{n} = 1$, que corresponde ao estado de menor energia, e ao tomarmos $\bar{d}_{\bar{n}+1} = 0$, teremos $\bar{d}_2 = 0$. A condição $\bar{d}_2 = 0$ impõe que a frequência $\omega_{1,l,s}$ seja da seguinte forma:

$$\omega_{1,l,s} = \left[\frac{\alpha^2}{2m} (2|\tau| + 3) \right]^{1/3}. \quad (4.19)$$

A frequência (4.19) mostra que somente valores específicos de ω são permitidos e dependem dos números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$. Por esta razão, renomeamos a frequência como:

$$\omega_{\bar{n},l,s} = \sqrt{\frac{2a_2^{\bar{n},l,s}}{m}} \quad (4.20)$$

Através do estudo feito acima, podemos notar que as equações (4.19) e (4.20) estão associadas a um efeito quântico caracterizado pela dependência da frequência angular com os números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$ do sistema e com a fase Aharonov-Casher ϕ_{AC} através do parâmetro τ definido na equação (4.6). Essa dependência da frequência angular com a fase geométrica Aharonov-Casher e com os números quânticos do sistema é gerada a partir da influência do potencial escalar linear no confinamento de uma partícula neutra em um anel quântico. Nos últimos anos, efeitos análogos desta dependência da frequência angular com os números quânticos e com a fase Aharonov-Casher têm sido investigados

em diferentes contextos da mecânica quântica (MEDEIROS; MELLO, 2012), (BAKKE, 2014a),(BAKKE; BELICH, 2015).

Vamos agora substituir a equação (4.19) na equação (4.17) para obtermos a expressão associada aos níveis de energia correspondentes ao estado de menor energia do sistema. Podemos notar que o espectro dessa configuração é tal que

$$\varepsilon_{1,l,s} = \left[\frac{\alpha^2}{2m} (2|\tau| + 3) \right]^{1/3} \times [|\tau| + 2] - \frac{\alpha^2}{m} \left(\frac{2m}{\alpha^2 [2|\tau| + 3]} \right)^{2/3}. \quad (4.21)$$

Na expressão acima observamos a presença do parâmetro τ , isto significa que os níveis de energia associados ao estado de menor energia do sistema dependem da fase quântica geométrica Aharonov-Casher, onde há condição de uma periodicidade $\phi_0 = \pm 2\pi$; assim: $\varepsilon_{1,l,s}(\phi_{AC} + \phi_0) = \varepsilon_{1,l+1,s}(\phi_{AC})$.

Observe que $\bar{n} = 1$, recai em um caso simples da função $H(\xi)$ que corresponde a um polinômio de primeiro grau. Portanto, a função de onda radial associada com o estado fundamental é

$$G_{1,l,s}(r) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\tilde{\mu}\xi}{2}} \xi^{|\tau|} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}}{2} \xi \right). \quad (4.22)$$

Dessa maneira, podemos escrever de uma forma geral os níveis de energia dos estados ligados da seguinte forma (BARBOZA; BAKKE, 2016a):

$$\varepsilon_{\bar{n},l,s} = \omega_{\bar{n},l,s} [\bar{n} + |\tau| + 1] - \frac{\alpha^2}{2m\omega_{\bar{n},l,s}^2}. \quad (4.23)$$

O espectro de energia (4.23) corresponde aos níveis de energia de uma partícula neutra confinada em um ponto quântico (TAN; INKSON, 1996), (TAN; INKSON, 1999),(TAN, 1996) sob a influência de um potencial linear na presença de um campo elétrico $\vec{E} = \frac{\lambda}{\rho} \hat{\rho}$. Esta expressão geral mostra que os níveis de energia dependem da fase geométrica Aharonov-Casher e a frequência angular do sistema depende do números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$ e também da fase geométrica Aharonov-Casher.

4.2 Influência dos potenciais linear e tipo-Coulomb

Nesta seção, nosso foco é investigar os efeitos quânticos associados com a fase geométrica quântica Aharonov-Casher quando uma partícula neutra está confinada em um ponto quântico sob a influência de um potencial escalar linear e um potencial tipo-Coulomb.

Para esta análise, vamos descrever o confinamento da partícula neutra sob a influência desses potenciais da seguinte maneira:

$$V(\rho) = \frac{\eta}{\rho} + \alpha\rho + a_2\rho^2, \quad (4.24)$$

onde η e α são constantes que caracterizam o potencial tipo-Coulomb e o potencial escalar linear, respectivamente. Observe que, tomando os parâmetros $\alpha = \eta = 0$, significa que o potencial descrito na equação (4.24) refere-se ao modelo de Tan-Inkson para um ponto quântico em duas dimensões como descrito na equação (4.1) (TAN, 1996). Conforme já dito anteriormente, vamos considerar que a partícula neutra está inserida numa região onde $\rho \neq 0$, assim, o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ é nulo, onde assumimos que a função de onda da partícula neutra é bem comportada na origem. Assumimos também que o momento de dipolo magnético da partícula neutra está alinhado na direção z como já foi mencionado nas seções anteriores, logo a equação de Schrödinger-Pauli torna-se (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i}{2m} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{2m\rho^2} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \psi \\ & - \frac{i}{m} \frac{\phi_{AC}}{2\pi} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\phi_{AC}}{2\pi} \right)^2 \psi + \frac{1}{8m\rho^2} \psi + \frac{\eta}{\rho} \psi + \alpha\rho\psi + a_2\rho^2\psi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Seguindo os mesmos passos realizados da equação (4.3) a equação (4.6), obtemos a seguinte equação radial:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^2} - \frac{2m\eta}{\rho} - 2m\alpha\rho - 2ma_2\rho^2 + 2m\varepsilon \right] \bar{G} = 0, \quad (4.26)$$

onde τ está definido na equação (4.6) e a função $G(\rho)$ foi substituída por $\bar{G}(\rho)$. Vamos realizar a mesma mudança de variáveis utilizada na seção anterior, que é, $\xi = (2ma_2)^{1/4}\rho$ que resulta em

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \bar{G} + \frac{1}{\xi} \frac{d\bar{G}}{d\xi} - \frac{\tau^2}{\xi^2} \bar{G} - \frac{\theta}{\xi} \bar{G} - \tilde{\mu}\xi \bar{G} - \xi^2 \bar{G} + \beta \bar{G} = 0, \quad (4.27)$$

onde os parâmetros $\tilde{\mu}$ e β estão definidos na equação (4.8) e o novo parâmetro θ é definido como

$$\theta = \frac{2m\eta}{(2ma_2)^{1/4}}. \quad (4.28)$$

A partir da discussão acerca do comportamento assintótico da função de onda realizada da equação (4.9) a equação (4.12), podemos escrever a função $\bar{G}(\xi)$ em termos de uma função desconhecida $\bar{H}(\xi)$ como na equação (4.12), que é,

$$\bar{G}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\tilde{\mu}\xi}{2}} \xi^{|\tau|} \bar{H}(\xi). \quad (4.29)$$

Substituindo a equação (4.29) na equação (4.27), obtemos

$$\frac{d^2 \bar{H}}{d\xi^2} + \left[\frac{2|\tau| + 1}{\xi} - \tilde{\mu} - 2\xi \right] \frac{d\bar{H}}{d\xi} + \left[g - \frac{f}{\xi} \right] \bar{H} = 0, \quad (4.30)$$

onde o parâmetro g está definido na equação (4.11) e o parâmetro f é definido como:

$$f = \frac{\tilde{\mu}}{2}(2|\tau| + 1) + \theta. \quad (4.31)$$

A função $\bar{H}(\xi)$, que é solução da equação diferencial (4.30), é conhecida como a função biconfluente de Heun (ARSCOTT, 1995), cuja forma é:

$$\bar{H}(\xi) = H_B \left(2|\tau|, \tilde{\mu}, \beta + \frac{\tilde{\mu}^2}{4}, 2\theta, \xi \right). \quad (4.32)$$

A fim de proceder com nossa discussão sobre estado ligado, vamos seguir os passos realizados da equação (4.13) a equação (4.16). Nesse caso, a relação de recorrência será

$$\bar{c}_{j+2} = \frac{\tilde{\mu}(j+1) + f}{(j+2)(j+2+2|\tau|)} \bar{c}_{j+1} - \frac{(g-2j)}{(j+2)(j+2+2|\tau|)} \bar{c}_j, \quad (4.33)$$

aqui, vamos assumir que $\bar{c}_0 = 1$ e, em seguida, usando a relação (4.33), podemos calcular outros coeficientes da série biconfluente de Heun (4.13), como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \frac{f}{(1+2|\tau|)}; \\ \bar{c}_2 &= \frac{f(f+\tilde{\mu})}{2(2+2|\tau|)(1+2|\tau|)} - \frac{g}{2(2+2|\tau|)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Através das condições estabelecidas na equação (4.16) temos que a série biconfluente de Heun torna-se um polinômio de grau \bar{n} . A partir da condição $g = 2\bar{n}$, obtemos a mesma

expressão para os níveis de energia para estados ligados obtida na equação (4.17) e a mesma frequência angular ω obtida na equação (4.18), que são, respectivamente

$$\varepsilon_{\bar{n},l,s} = \omega[\bar{n} + |\tau| + 1] - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}, \quad (4.35)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2a_2}{m}} \quad (4.36)$$

onde $\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$

Novamente, podemos notar que a frequência angular se difere da que é apresentada no modelo de Tan-Inkson (TAN; INKSON, 1996) e o estado de mínima energia é determinado pelo número quântico $\bar{n} = 1$. Os níveis de energia (4.35) apresentam uma dependência com a fase geométrica Aharonov-Casher através do parâmetro τ , entretanto, não dependem do parâmetro η associado com o potencial tipo-Coulomb. Por esta razão, vamos analisar a condição $\bar{c}_{\bar{n}+1} = 0$. Para esse objetivo, vamos assumir que o parâmetro a_2 do modelo de Tan-Inkson pode ser ajustado de tal maneira que a condição $\bar{c}_{\bar{n}+1} = 0$ seja satisfeita.

Como um exemplo, vamos considerar o estado de menor energia do sistema ($\bar{n} = 1$), nesse caso, temos que $\bar{c}_2 = 0$ da condição $\bar{c}_{\bar{n}+1} = 0$. A condição $\bar{c}_2 = 0$ impõe que os possíveis valores da frequência angular $\omega_{1,l,s}$ satisfaçam uma equação algébrica de terceiro grau na forma a seguir (BARBOZA; BAKKE, 2016a):

$$\omega_{1,l,s}^3 - \frac{2m\eta^2}{(1+2|\tau|)}\omega_{1,l,s}^2 - 2\alpha\eta\frac{(2+2|\tau|)}{(1+2|\tau|)}\omega_{1,l,s} - \frac{\alpha^2}{2m}(3+2|\tau|) = 0. \quad (4.37)$$

Veja que a equação (4.37) tem pelo menos uma solução real, mas não apresentaremos aqui pois sua expressão é muito longa. Observe que, a solução da equação (4.37) depende do parâmetro τ , expressando que a frequência angular associada ao estado de mínima energia do sistema depende da fase quântica geométrica Aharonov-Casher ϕ_{AC} . Existe também uma dependência com os parâmetros η que caracteriza o potencial tipo-Coulomb e α associado ao potencial linear. Além disso, para $\bar{n} = 1$, teremos o caso mais simples da função $\bar{H}(\xi)$ que corresponde a um polinômio de primeiro grau do tipo:

$$\bar{G}_{1,l,s}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\tilde{\mu}\xi}{2}} \xi^{|\tau|} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}(2|\tau| + 1) + 2\theta}{2(1+2|\tau|)} \xi \right). \quad (4.38)$$

Assim, uma expressão geral para os níveis de energia (4.35) é dada por (BARBOZA; BAKKE, 2016a):

$$\varepsilon_{\bar{n},l,s} = \omega_{\bar{n},l,s}[\bar{n} + |\tau| + 1] - \frac{\alpha^2}{2m\omega_{\bar{n},l,s}^2}. \quad (4.39)$$

Através do estudo feito acima, foi possível obter soluções de estado ligado para o movimento de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente que interage com um campo elétrico radial confinada em um ponto quântico sob a influência de potenciais tipo-Coulomb e linear escalar. Podemos observar que existe uma dependência dos níveis de energia (4.39) com a fase geométrica Aharonov-Casher ϕ_{AC} .

5 Análogo à quantização de Landau para partículas neutras

Mostraremos neste capítulo que é possível obter um análogo à quantização de Landau para partículas neutras, através de uma configuração adequada de campos que permite calcularmos os níveis de energia e as funções de onda deste sistema, resolvendo a equação de Schrödinger. Inicialmente realizamos uma revisão sobre a quantização de Landau para uma partícula carregada, em seguida apresentamos a quantização de Landau para uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético permanente na presença de campos externos sob a influência de um potencial tipo-Coulomb (BARBOZA; BAKKE, 2016b). Para isto, vamos utilizar a ideia de Ericsson e Sjöqvist (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001) que consiste em usar o sistema proposto por Aharonov e Casher (AHARONOV; CASHER, 1984) para gerar um análogo à quantização de Landau em sistemas de átomos neutros.

5.1 Quantização de Landau

Nesta seção vamos introduzir a quantização de Landau para uma partícula carregada na presença de um campo magnético uniforme (LANDAU; LIFSHITZ, 1977). De acordo com a mecânica quântica, quando uma partícula carregada está uma região onde existe um campo magnético uniforme perpendicular ao plano de movimento da mesma, ela adquire órbitas discretas com níveis de energia quantizados, conhecidos como níveis de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1977).

Os níveis de Landau apresentam uma quantização de energia similar a do oscilador harmônico, entretanto, cada nível de Landau é infinitamente degenerado. O estudo sobre os níveis de Landau é bastante importante, uma vez que, serve como base para estudos sobre efeito Hall quântico (COSTATO, 1994), como também para explicações sobre dependência das propriedades eletrônicas de alguns tipos de material que interage com o campo magnético aplicado (HOLSTEIN et al., 1973).

Como ponto de partida, vamos considerar uma partícula carregada com carga q e de massa m que se move no plano $x - y$ na presença de um campo magnético uniforme e constante perpendicular a este plano. O hamiltoniano que descreve a dinâmica de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético é dado por:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV, \quad (5.1)$$

onde $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ é o operador momento, \vec{A} é o potencial vetor e V é o potencial escalar.

A fim de obtermos um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$, vamos considerar o potencial da seguinte forma:

$$\vec{A} = -By\hat{x}, \quad (5.2)$$

onde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Dessa forma, podemos escrever a equação de Schrödinger da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2m}[(\hat{p}_x + eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2]\psi = \varepsilon\psi, \quad (5.3)$$

A equação (5.3) não depende explicitamente de x , dessa forma, o operador \hat{p}_x comuta com o Hamiltoniano. Esse fato nos leva a escrever a solução para a equação (5.3) da seguinte forma:

$$\psi = e^{i(xp_x + zp_z)}\chi(y). \quad (5.4)$$

Substituindo a solução (5.4) na equação (5.3), obtemos a seguinte equação para $\chi(y)$:

$$\chi'' + 2m \left[\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} \right) - \frac{1}{2}m\omega_B^2(y - y_0)^2 \right] \chi = 0, \quad (5.5)$$

onde $y_0 = -\frac{p_x}{eB}$ e $\omega_B = \frac{|e|B}{m}$.

Realizando a seguinte mudança de variáveis $\varrho = \sqrt{m\omega_B}(y - y_0)$, a equação (5.5) torna-se

$$\chi'' + \left[\left(\frac{2\varepsilon}{\omega_B} - \frac{p_z^2}{\omega_B m} \right) - \varrho^2 \right] \chi = 0. \quad (5.6)$$

O comportamento assintótico das soluções possíveis para a equação (5.6) é determinado quando $\varrho \rightarrow \infty$. Quando tomamos $\varrho \rightarrow \infty$, os termos dominantes são: $\chi'' \approx \varrho^2\chi$ cuja solução é $\chi = e^{-\frac{\varrho^2}{2}}$, pois a solução tem que ser finita no limite $\varrho \rightarrow \pm\infty$. Assim, podemos escrever uma possível solução para a equação anterior como:

$$\chi = e^{-\frac{\varrho^2}{2}}V(\varrho). \quad (5.7)$$

Substituindo a equação (5.7) na equação (5.6), obtemos a seguinte equação para $V(\varrho)$:

$$V'' - 2\varrho V' + 2nV = 0, \quad (5.8)$$

onde

$$2n = \frac{2\varepsilon}{\omega_B} - \frac{p_z^2}{\omega_B m} - 1. \quad (5.9)$$

A equação (5.6) tem como solução os polinômios de Hermite $H_n(\varrho)$. Dessa forma, a equação (5.7) torna-se

$$\chi(\varrho) = e^{-\frac{\varrho^2}{2}} H_n(\varrho). \quad (5.10)$$

Por fim, usando as equações (5.4) e (5.10), obtemos as funções de onda normalizadas da partícula carregada, cuja relação explícita é:

$$\psi_{n,p_x}(x, y) = \frac{1}{\pi^{1/4} \lambda_B^{1/2} (2^n n!)^{1/2}} e^{ixp_x} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\lambda_B^2}} H_n\left(\frac{y-y_0}{\lambda_B}\right), \quad (5.11)$$

onde

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{1}{m\omega_B}} \quad (5.12)$$

é o comprimento de onda magnético que fornece as dimensões típicas do sistema.

A quantização da energia vem da condição de que a equação (5.8) possui soluções para inteiros positivos n . Assim, solucionando a equação (5.9) para ε temos (LANDAU; LIFSHITZ, 1977)

$$\varepsilon_n = \omega_B \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

Note que o espectro de energia da partícula (5.13) é análogo ao do oscilador harmônico com a frequência de oscilação igual a frequência do ciclotron ω_B correspondente ao caso clássico. Entretanto, observamos que para qualquer valor de n , temos uma degenerescência infinita.

Além disso, a equação (5.13) não depende do momento p_x , significa que a partícula não é quantizada na direção de x , logo, p_x pode variar continuamente de $-\infty$ a $+\infty$. Existem infinitas possibilidades de p_x para um determinado valor de n , isto é, em cada nível de Landau existe infinita degenerescência.

5.2 Análogo à quantização de Landau para partículas neutras

A quantização de Landau para partículas neutras foi proposta por Ericsson e Sjöqvist (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001), em 2001, com o objetivo de construir um sistema quântico onde o efeito Hall quântico para partículas neutras pudesse ser observado. Dessa forma, Ericsson e Sjöqvist se basearam na interação do efeito Aharonov-Casher e mostraram a existência de um análogo à quantização de Landau para um dipolo magnético.

Para alcançar esse sistema, os autores estabeleceram um modelo onde o campo elétrico externo interage com o momento de dipolo magnético permanente da partícula neutra em movimento, de modo a satisfazer as seguintes condições específicas:

1. Ausência de torque no momento de dipolo magnético da partícula neutra;
2. O campo elétrico deve satisfazer as condições eletrostáticas, ou seja, $\partial_t \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = 0$;
3. Existir a presença de um campo magnético efetivo uniforme dado por $\vec{B}_{ef} = \nabla \times \vec{A}_{ef}$.

O termo $\vec{A}_{ef} = \vec{\sigma} \times \vec{E}$ corresponde a um potencial vetor efetivo, que é conhecido como o potencial vetor Aharonov-Casher, onde \vec{E} é o campo elétrico e $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli.

O Hamiltoniano que descreve a interação entre um átomo com momento de dipolo magnético e um campo elétrico é dado pela equação (1.68), como

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \mu \vec{\sigma} \times \vec{E})^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2m} + \frac{\mu}{2m} \nabla \cdot \vec{E}, \quad (5.14)$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e μ é o módulo do momento de dipolo magnético. Considerando que o momento de dipolo esteja orientado na direção z e adotando a seguinte configuração para o campo elétrico

$$\vec{E} = \frac{\bar{\lambda} \rho}{2} \hat{\rho} \quad (5.15)$$

onde $\bar{\lambda}$ é uma constante associada a densidade volumétrica de carga elétrica, e assim, as condições exigidas por Ericsson e Sjöqvist são satisfeitas.

Portanto, escolhendo um campo elétrico que satisfaz as condições acima, foi mostrado em (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001) que o movimento da partícula neutra adquire órbitas discretas, onde os níveis de energia correspondem ao análogo à quantização de Landau. Este análogo à quantização de Landau corresponde à quantização Landau-Aharonov-Casher (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001). Aplicando a equação de Schrödinger-Pauli (1.72) (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$), e usando o *ansatz* $\Psi = e^{-i\varepsilon t}\psi$, temos

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i\omega_{AC}}{2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{m\omega_{AC}^2}{8} \rho^2\psi + \frac{\omega_{AC}}{2} \psi, \quad (5.16)$$

onde definimos a frequência do ciclotron, dada por

$$\omega_{AC} = \frac{\mu\bar{\lambda}}{m}. \quad (5.17)$$

A solução para a equação (5.16) é dada pelo seguinte *Ansatz*:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = e^{il\varphi} e^{ikz} R(\rho), \quad (5.18)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, k é uma constante associada à componente z do momento linear e $R(\rho)$ é uma função desconhecida da coordenada radial.

Dessa forma, substituindo a equação (5.18) em (5.16), obtemos a seguinte expressão

$$R'' + \frac{R'}{\rho} + \left[2m\varepsilon - \frac{m^2\omega_{AC}^2}{4} \rho^2 + (l-1)m\omega_{AC} - \frac{l^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (5.19)$$

Vamos agora realizar a seguinte mudança de variáveis $\bar{\delta} = \frac{m\omega_{AC}}{2} \rho^2$, assim a equação anterior fica:

$$\bar{\delta}R'' + R' + \left[-\frac{\bar{\delta}}{4} + \beta - \frac{l^2}{4\bar{\delta}} \right] R = 0, \quad (5.20)$$

onde definimos

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\omega_{AC}} + \frac{(l-1)}{2}. \quad (5.21)$$

Fazendo os limites assintóticos, determinados quando $\bar{\delta} \rightarrow 0$ e $\bar{\delta} \rightarrow \infty$ das soluções da equação (5.20), obtemos a seguinte solução geral

$$R(\bar{\delta}) = e^{-\frac{\bar{\delta}}{2}} \bar{\delta}^{\frac{|l|}{2}} F(\bar{\delta}), \quad (5.22)$$

onde $F(\bar{\delta})$ é uma função desconhecida a determinar.

Substituindo a equação (5.22) em (5.20), chegamos à seguinte equação diferencial:

$$\bar{\delta} F'' + (|l| + 1 - \bar{\delta}) F' - \left[\frac{|l| + 1}{2} - \beta \right] F = 0. \quad (5.23)$$

Podemos notar que a equação (5.23) condiz com a equação de Kummer ou equação hipergeométrica confluyente (ARFKEN; WEBER, 2005). A função hipergeométrica confluyente $F(\bar{\delta})$ é dada por:

$$F(\bar{\delta}) = F \left[- \left(\beta - \frac{|l| + 1}{2} \right); |l| + 1; \bar{\delta} \right]. \quad (5.24)$$

Para que a solução radial (5.22) seja bem definida, a função hipergeométrica deve se reduzir a um polinômio de grau n . Seguindo o mesmo procedimento da equação (1.82) à equação (1.83), devemos ter o primeiro parâmetro da função hipergeométrica correspondente a um número inteiro nulo ou negativo, ou seja:

$$- \left(\beta - \frac{|l| + 1}{2} \right) = -n, \quad (5.25)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$

Fazendo a substituição da equação (5.21) na equação (5.25), chegamos ao seguinte espectro de energia:

$$\varepsilon_{n,l} = \omega_{AC} \left(n + \frac{|l|}{2} - \frac{l}{2} + 1 \right). \quad (5.26)$$

onde $\omega_{AC} = \frac{\mu \bar{\lambda}}{m}$ é a frequência de cíclotron do sistema.

Como podemos notar, o espectro de energia dado em (5.26) é infinitamente degenerado e independe do centro das órbitas, pois para um dado n, l pode assumir infinitos valores, uma vez que, não existem vínculos entre esses dois números quânticos.

5.3 Sistema Landau-Aharonov-Casher sujeito a um potencial tipo-Coulomb

Nesta seção, investigamos a influência de um potencial tipo-Coulomb dado em (2.1) na quantização Landau-Aharonov-Casher. Para este propósito, vamos considerar o campo elétrico proposto por Ericsson e Sjöqvist, escrito na equação (5.15), e dado por:

$$\vec{E} = \frac{\bar{\lambda}\rho}{2}\hat{\rho}, \quad (5.27)$$

onde $\bar{\lambda}$ é uma constante associada com densidade volumétrica de carga uniforme. Note que esta configuração de campo satisfaz as condições estabelecidas para encontrar a quantização Landau-Aharonov-Casher.

Assumindo que o momento de dipolo magnético da partícula neutra é inicialmente alinhado com o eixo z , então, a equação de Schrödinger-Pauli torna-se (com unidades naturais $c = 1$ e $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} = & -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] + \frac{i}{2m} \frac{\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{8m\rho^2} \psi \\ & + \frac{\mu\bar{\lambda}}{4m} \psi - i\frac{\mu\bar{\lambda}}{2m} \sigma^3 \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\mu^2\bar{\lambda}^2}{8m} \rho^2 \psi + \frac{\eta}{\rho} \psi. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aqui, podemos utilizar o mesmo argumento realizado no capítulo 2 no sentido de que os operadores $\hat{j}_z = -i\partial_\varphi$ e $\hat{p}_z = -i\partial_z$ comutam com o Hamiltoniano do lado direito da equação (5.28). Assim, podemos escrever uma solução particular para as equação (5.28) como fizemos em (2.3), então substituindo a equação (2.3) na equação (5.28), obtemos uma equação radial dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\gamma^2}{\rho^2} - \frac{2m\eta}{\rho} - \frac{\mu^2\bar{\lambda}\rho^2}{4} + \kappa \right] R(\rho) = 0 \quad (5.29)$$

onde definimos os parâmetros:

$$\begin{aligned} \gamma &= l + \frac{1}{2}(1-s); \\ \kappa &= 2m \left[\varepsilon - s\frac{\mu\bar{\lambda}}{2m}\gamma - \frac{\mu\bar{\lambda}}{2m} - \frac{k^2}{2m} \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

De agora em diante, vamos considerar $k = 0$ e trabalharemos no sistema plano. Agora, vamos realizar a seguinte mudança de variáveis $r = \sqrt{\frac{\mu\bar{\lambda}}{2}}\rho$; assim, obtemos

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{\gamma^2}{r^2}R - \frac{\alpha}{r}R - r^2R + \frac{2\kappa}{\mu\lambda}R = 0, \quad (5.31)$$

onde definimos o parâmetro $\alpha = \frac{2m\eta}{\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}}}$.

Procedendo com a análise assintótica da equação (5.31), que é determinada para os limites $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, podemos escrever a função $R(r)$ em termos de uma função desconhecida $G(r)$ como segue:

$$R(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} r^{|\gamma|} G(r). \quad (5.32)$$

Desta maneira, substituindo a equação (5.32) em (5.31), obtemos a seguinte equação para a função $G(r)$:

$$G''' + \left[\frac{2|\lambda| + 1 - 2r}{r} \right] G' + \left[g - \frac{\alpha}{r} \right] G = 0, \quad (5.33)$$

onde o parâmetro g na equação (5.33) é definido como $g = \frac{2\kappa}{\mu\lambda} - 2|\gamma| - 2$.

Observe que a função $G(r)$ é a função biconflente de Heun (ARSCOTT, 1995), cuja forma explícita é: $G(r) = G\left(2|\gamma|, 0, \frac{2\kappa}{\mu\lambda}, 2\alpha, r\right)$.

Vamos proceder com a utilização do método de Frobenius (ARFKEN; WEBER, 2005) a fim de obtermos uma solução polinomial; então, escrevemos solução para (5.33) como uma expansão em série de potências em torno da origem, ou seja, $G(r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j$. Substituindo essa série em (5.33), obtemos a relação de recorrência

$$c_{j+2} = \frac{\alpha}{(j+2)(j+1+\theta)} c_{j+1} - \frac{g-2j}{(j+2)(j+1+\theta)} c_j, \quad (5.34)$$

onde $\theta = 2|\gamma| + 1$.

Vamos iniciar a análise dessa relação com $c_0 = 1$, então, partindo da equação (5.34), podemos obter outros coeficientes da expansão em série de potências, por exemplo, os coeficientes c_1 e c_2 , cujos valores são:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha}{\theta} = \frac{1}{(2|\gamma| + 1)} \frac{2m\eta}{\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}}}, \\ c_2 &= \frac{\alpha^2}{2\theta(1+\theta)} \frac{g}{2(1+\theta)} = \frac{4m^2\eta^2}{\mu\lambda(2|\gamma| + 1)(2|\gamma| + 2)} - \frac{g}{(2|\gamma| + 2)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Além disso, vamos nos focar na obtenção de soluções de estados ligados, para isto, precisaremos impor que a série biconfluente de Heun se torne um polinômio de grau \bar{n} . A partir da relação de recorrência (5.34), a função $G(r) = G\left(2|\gamma|, 0, \frac{2\kappa}{\mu\bar{\lambda}}, 2\alpha, r\right)$ se tornará um polinômio de grau \bar{n} se as seguintes condições abaixo forem satisfeitas:

$$g = 2\bar{n} \quad \text{e} \quad c_{\bar{n}+1} = 0, \quad (5.36)$$

onde $\bar{n} = 1, 2, 3, \dots$. A partir da condição $g = 2\bar{n}$, obtemos uma expressão para os níveis de energia dos estados ligados, cuja relação é:

$$\varepsilon_{\bar{n},l,s} = \omega[\bar{n} + |\gamma| + s\gamma + 2] \quad (5.37)$$

onde $\omega = \mu\bar{\lambda}/2m$ é a frequência de ciclotron do sistema. O espectro de energia (5.37) corresponde aos níveis de energia do sistema Landau-Aharonov-Casher sujeito a um potencial tipo-Coulomb.

Note que o espectro de energia continua infinitamente degenerado como esperado para o sistema Landau-Aharonov-Casher (LANDAU; LIFSHITZ, 2013), no entanto, a influência do potencial tipo-Coulomb modifica o espectro de energia da quantização Landau-Aharonov-Casher obtidas nas referências (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001), (BAKKE et al., 2009).

Devido à presença do potencial tipo-Coulomb, o estado de menor energia é determinado pelo número quântico $\bar{n} = 1$ ao invés do número quântico $\bar{n} = 0$. Além disso, a frequência do ciclotron $\omega = \mu\bar{\lambda}/2m$ difere da frequência do ciclotron da quantização Landau-Aharonov-Casher $\omega_{AC} = \mu\bar{\lambda}/m$.

Agora, considerando a segunda condição de (5.36), vamos assumir que a frequência angular ω pode ser ajustada de tal maneira que a condição $c_{\bar{n}+1} = 0$ seja satisfeita. Isso é possível porque podemos ajustar a intensidade do campo elétrico através do parâmetro $\bar{\lambda}$ associado com densidade de carga volumétrica uniforme. Com essa suposição, temos que ambas condições impostas na equação (5.36) são satisfeitas e uma solução polinomial para a função $G(r)$ é obtida.

Como uma consequência, obtemos uma expressão envolvendo a frequência angular e os números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$ do sistema, cujo significado é que somente valores específicos da frequência angular ω são permitidos e dependem dos números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$. Por essa razão, renomeamos:

$$\omega = \omega_{\bar{n},l,s}. \quad (5.38)$$

Do ponto de vista da mecânica quântica, esse é um efeito caracterizado por uma dependência da frequência angular com os números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$ do sistema, que surge da influência do potencial tipo-Coulomb na quantização Landau-Aharonov-Casher. Do ponto de vista matemático, esta relação que envolve a frequência angular com os números quânticos $\{\bar{n}, l, s\}$, é consequência das soluções exatas da equação (5.33) serem encontradas para valores específicos da frequência angular ω .

Como exemplo, vamos considerar $\bar{n} = 1$ que corresponde ao estado de menor energia, e analisar a condição $c_{\bar{n}+1} = 0$. Para $\bar{n} = 1$, recaímos no caso $c_2 = 0$. Dessa forma, os valores possíveis da frequência angular ω associada com o estado fundamental do sistema são dados por (BARBOZA; BAKKE, 2016b)

$$\omega_{1,l,s} = \frac{2m\eta^2}{(2|\gamma| + 1)}. \quad (5.39)$$

revelando que somente alguns valores específicos da frequência angular são permitidos neste sistema de modo que, as soluções de estado ligado podem ser obtidas. Podemos também notar que a frequência angular (5.39) apresenta uma dependência com o parâmetro η associado a interação tipo-Coulomb.

Além disso, para $\bar{n} = 1$ temos o caso simples da função $G(r)$ que corresponde ao polinômio de primeiro grau:

$$G_{1,l,s}(r) = 1 + \frac{\alpha}{\theta}r. \quad (5.40)$$

Portanto, vamos reescrever os níveis de energia (5.37) na forma geral como (BARBOZA; BAKKE, 2016b)

$$\varepsilon_{\bar{n},l,s} = \omega_{\bar{n},l,s}[\bar{n} + |\gamma| + s\gamma + 2]. \quad (5.41)$$

Analisamos o comportamento do sistema Landau-Aharonov-Casher sujeito ao potencial do tipo-Coulomb, mostrando que as soluções de estados ligados para a equação de Schrödinger-Pauli podem ser obtidas. Mostramos também que a frequência do ciclotron Landau-Aharonov-Casher é modificada e discutimos um efeito quântico caracterizado pela dependência da frequência angular nos números quânticos do sistema. Como um caso particular, calculamos os valores possíveis da frequência do ciclotron associada ao estado fundamental.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, investigamos efeitos quânticos associados a interação do momento de dipolo magnético permanente de uma partícula neutra com um campo elétrico externo. Nessa análise, discutimos alguns resultados obtidos quando o sistema Aharonov-Casher interage com diferentes potenciais centrais, tais como potenciais escalares linear e tipo-Coulomb. Em todos os casos, foi possível determinar analiticamente soluções da equação de Schrödinger-Pauli de estados ligados para tais sistemas.

No capítulo 1, apresentamos uma breve revisão sobre fases geométricas, em especial o efeito Aharonov-Bohm (AHARONOV; BOHM, 1959), onde a partícula carregada acumula uma fase em sua função de onda devido ao movimento que realiza em uma região livre de campos ao redor de uma linha de fluxo magnético isolada. Em seguida, apresentamos o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, através de um exemplo que trata de uma partícula carregada restrita a um anel e sujeita ao efeito AB.

Diante disso, apresentamos o efeito Aharonov-Casher (AHARONOV; CASHER, 1984), onde uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente adquire uma fase, semelhante a do efeito Aharonov-Bohm, ao circular uma linha de cargas elétricas. Como motivação, mostramos resultados associados à referência (BAKKE; FURTADO, 2012) que trata sobre a dinâmica quântica de uma partícula neutra no sistema Aharonov-Casher, confinada em um anel quântico bidimensional descrito pelo modelo de Tan-Inkson (TAN, 1996).

No capítulo 2, investigamos o sistema Aharonov-Casher sob à influência de um potencial tipo-Coulomb. Mostramos que os níveis de energia dependem da fase quântica geométrica ϕ_{AC} e apresentam uma periodicidade igual a $\phi_0 = \pm 2\pi$. A partir dessa dependência dos níveis de energia da fase geométrica, obtivemos um efeito análogo Aharonov-Casher para estados ligados (BAKKE; FURTADO, 2011), uma vez que, não há forças clássicas atuando no sistema.

No capítulo 3, analisamos o comportamento de uma partícula neutra que interage com um campo elétrico radial confinado em um anel quântico bidimensional, assumindo que este sistema está sujeito a um potencial do tipo-Coulomb. A abordagem do potencial associado ao anel quântico bidimensional escolhida é o modelo de Tan-Inkson (TAN, 1996), (TAN; INKSON, 1996), (TAN; INKSON, 1999). Através desta análise, observamos efeitos quânticos neste sistema: um efeito caracterizado pela dependência dos níveis de energia na fase geométrica Aharonov-Casher; um efeito relacionado a dependência da frequência angular com os números quânticos $\{n, l, s\}$ do sistema e também com a fase quântica geométrica. Como um caso particular, obtemos a frequência angular associada ao

estado de menor energia do sistema e comparamos com o resultado obtido para o mesmo sistema sem a presença do potencial central tipo-Coulomb, dado na referência (BAKKE; FURTADO, 2012), e descrito no capítulo 1.

No capítulo 4, discutimos acerca sistema Aharonov-Casher confinado em um ponto quântico bidimensional (TAN, 1996),(TAN; INKSON, 1996), (TAN; INKSON, 1999), sob a influência de um potencial escalar linear e sob a presença simultânea dos potenciais tipo-Coulomb e linear. Em ambos os casos, observamos que os níveis de energia para estados ligados dependem da fase geométrica Aharonov-Casher, assim como vimos em casos anteriores. Mostramos que a frequência angular para um ponto quântico no modelo de Tan-Inkson é modificada pela influência dos potenciais linear e tipo-Coulomb. Além disso, vimos que há restrições quanto aos valores da frequência angular do sistema para que soluções de estados ligados sejam encontradas. Semelhantemente aos casos anteriores, verificamos que a frequência angular do sistema apresenta uma dependência com os números quânticos $\{n, l, s\}$ do sistema e com a fase geométrica Aharonov-Casher.

No primeiro caso, onde a partícula neutra é confinada a um ponto quântico na presença de um potencial linear, obtivemos a expressão analítica relacionada a possíveis valores da frequência angular do sistema. Por outro lado, quando confinamos a partícula neutra em um ponto quântico na presença simultânea dos potenciais linear e tipo-Coulomb, observamos que somente alguns valores possíveis da frequência angular do sistema são determinados por uma equação algébrica de terceiro-grau.

Por fim, no capítulo 5, descrevemos o análogo à quantização de Landau para partículas neutras a partir da ideia de Ericsson e Sjöqvist (ERICSSON; SJÖQVIST, 2001), na qual estabeleceu-se algumas condições que devem ser satisfeitas para que o movimento da partícula neutra adquira órbitas discretas, onde os níveis de energia correspondam ao análogo aos níveis de Landau.

Após isso, investigamos a influência de um potencial tipo-Coulomb na quantização Landau-Aharonov-Casher. Discutimos as condições que devem ser impostas aos campos a fim de obtermos um análogo da quantização de Landau para partículas neutras. Nesse contexto, verificamos que o espectro de energia é infinitamente degenerado como observado para sistemas tipo-Landau, entretanto, os níveis de energia Landau-Aharonov-Casher são modificados. Devido à presença do potencial tipo-Coulomb, o estado de menor energia é determinado pelo número quântico $n = 1$ ao invés do número $n = 0$, significando que o polinômio de menor grau que satisfaz a equação biconfluente de Heun (ARSCOTT, 1995),(MEDEIROS; MELLO, 2012) é um polinômio de grau 1 e a frequência do cíclotron é encontrada. Outro efeito quântico, deve-se ao fato de a frequência angular depender dos números quânticos $\{n, l, s\}$ do sistema, significando é que somente valores específicos da frequência angular ω são permitidos. Como um exemplo, calculamos a frequência angular associada ao estado de menor energia.

Vale ressaltar que em todos os casos analisados, observamos que além da dependência com os números quânticos $\{n, l, s\}$ do sistema, os espectros de energia e frequência angular dos sistemas, apresentam também, uma dependência com os parâmetros que caracterizam as interações referentes aos potenciais centrais, evidenciando assim, a influência dos mesmos sobre os sistemas.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1964. v. 55. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 43.
- AHARONOV, Y.; ANANDAN, J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, APS, v. 58, n. 16, p. 1593, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 13, 17 e 22.
- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 3, p. 485, 1959. Citado 7 vezes nas páginas 13, 24, 26, 30, 36, 45 e 71.
- AHARONOV, Y.; CASHER, A. *Topological quantum effects for neutral particles*. *Physical Review Letters*, APS, v. 53, n. 4, p. 319, 1984. Citado 9 vezes nas páginas 13, 16, 30, 32, 33, 39, 49, 61 e 71.
- ALHAIDARI, A. Solutions of the nonrelativistic wave equation with position-dependent effective mass. *Physical Review A*, APS, v. 66, n. 4, p. 042116, 2002. Citado na página 41.
- ALHAIDARI, A. Solution of the dirac equation with position-dependent mass in the coulomb field. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 322, n. 1, p. 72–77, 2004. Citado na página 41.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists international student edition*. [S.l.]: Academic press, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 38, 43, 47, 66, 68 e 83.
- ARSCOTT, F. *Heun's differential equations*. [S.l.]: Clarendon Press, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 47, 53, 58, 68, 72 e 84.
- ASADA, H.; FUTAMASE, T. Propagation of gravitational waves from slow motion sources in a coulomb-type potential. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 10, p. R6062, 1997. Citado na página 41.
- AUSTIN, E. Perturbation theory and padé approximants for a hydrogen atom in an electric field. *Molecular Physics*, Taylor & Francis, v. 40, n. 4, p. 893–900, 1980. Citado na página 51.
- AVISHAI, Y.; HATSUGAI, Y.; KOHMOTO, M. Persistent currents and edge states in a magnetic field. *Physical Review B*, APS, v. 47, n. 15, p. 9501, 1993. Citado na página 45.
- AVISHAI, Y.; KOHMOTO, M. Quantized persistent currents in quantum dot at strong magnetic field. *Physical review letters*, APS, v. 71, n. 2, p. 279, 1993. Citado na página 45.
- BADUREK, G. et al. Nondispersive phase of the aharonov-bohm effect. *Physical review letters*, APS, v. 71, n. 3, p. 307, 1993. Citado na página 14.

- BAHAR, M.; YASUK, F. Exact solutions of the mass-dependent klein-gordon equation with the vector quark-antiquark interaction and harmonic oscillator potential. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi, v. 2013, 2013. Citado na página 51.
- BAKKE, K. Bound states for a coulomb-type potential induced by the interaction between a moving electric quadrupole moment and a magnetic field. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 341, p. 86–93, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 56.
- BAKKE, K. Some quantum aspects of a particle with electric quadrupole moment interacting with an electric field subject to confining potentials. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 29, n. 23, p. 1450117, 2014. Citado na página 41.
- BAKKE, K. On a particle with electric quadrupole moment interacting with a magnetic field subject to a harmonic and a linear confining potentials. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 130, n. 7, p. 129, 2015. Citado na página 41.
- BAKKE, K.; BELICH, H. On a relativistic scalar particle subject to a coulomb-type potential given by lorentz symmetry breaking effects. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 360, p. 596–604, 2015. Citado na página 56.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. Geometric phase for a neutral particle in rotating frames in a cosmic string spacetime. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 2, p. 024033, 2009. Citado na página 14.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. Bound states for neutral particles in a rotating frame in the cosmic string spacetime. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 8, p. 084025, 2010. Citado na página 36.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. The analogue of the aharonov–bohm effect for bound states for neutral particles. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 26, n. 18, p. 1331–1341, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 14, 39, 40 e 71.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. On the aharonov-casher system and the landau-aharonov-casher system confined to a two-dimensional quantum ring. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 53, n. 2, p. 023514, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 15, 35, 48, 71 e 72.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. Persistent spin currents in an elastic landau system. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 86, n. 7, p. 315, 2013. Citado na página 14.
- BAKKE, K.; FURTADO, C. On the klein–gordon oscillator subject to a coulomb-type potential. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 355, p. 48–54, 2015. Citado na página 41.
- BAKKE, K.; MORAES, F. Threading dislocation densities in semiconductor crystals: A geometric approach. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 376, n. 45, p. 2838–2841, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 48.
- BAKKE, K. et al. Landau quantization for a neutral particle in the presence of topological defects. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 2, p. 024008, 2009. Citado na página 69.
- BALATSKY, A.; ALTSHULER, B. Persistent spin and mass currents and aharonov-casher effect. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 11, p. 1678, 1993. Citado na página 14.

BARBOZA, P.; BAKKE, K. An angular frequency dependence on the aharonov–casher geometric phase. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 361, p. 259–265, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 48.

BARBOZA, P.; BAKKE, K. On a relation of the angular frequency to the aharonov–casher geometric phase in a quantum dot. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 372, p. 457–467, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 9, 54, 56 e 59.

BARBOZA, P.; BAKKE, K. On the aharonov-casher system subject to a coulomb-type potential. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 131, n. 2, p. 32, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 9, 61 e 70.

BAYER, M. et al. Hidden symmetries in the energy levels of excitonic ‘artificial atoms’. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 405, n. 6789, p. 923, 2000. Citado na página 51.

BELICH, H. et al. Non-minimal coupling to a lorentz-violating background and topological implications. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 41, n. 3, p. 421–426, 2005. Citado na página 14.

BERGMANN, J. von; BERGMANN, H. von. Foucault pendulum through basic geometry. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 75, n. 10, p. 888–892, 2007. Citado na página 18.

BERRY, M.; KEATING, J. Persistent current flux correlations calculated by quantum chaology. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 27, n. 18, p. 6167, 1994. Citado na página 45.

BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 13, 17 e 19.

BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. *Quantum fields in curved space*. [S.l.]: Cambridge university press, 1984. Citado na página 36.

BRUCE, S. E. et al. Influence of psychiatric comorbidity on recovery and recurrence in generalized anxiety disorder, social phobia, and panic disorder: a 12-year prospective study. *American Journal of psychiatry*, Am Psychiatric Assoc, v. 162, n. 6, p. 1179–1187, 2005. Citado na página 14.

CASELLA, R. Nonlocal phase shifts induced by static electric fields in neutron interferometers when the path-enclosed charge vanishes. *Physical review letters*, APS, v. 65, n. 18, p. 2217, 1990. Citado na página 14.

CASTRO, E.; MARTÍN, P. Eigenvalues of the schrödinger equation with coulomb potentials plus linear and harmonic radial terms. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 33, n. 30, p. 5321, 2000. Citado na página 51.

CHAMBERS, R. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, APS, v. 5, n. 1, p. 3, 1960. Citado na página 13.

CHANDRASEKHAR, V. et al. Magnetic response of a single, isolated gold loop. *Physical review letters*, APS, v. 67, n. 25, p. 3578, 1991. Citado na página 45.

- CHARGUI, Y.; DHAHBI, A.; TRABELSI, A. Exact analytical treatment of the asymmetrical spinless salpeter equation with a coulomb-type potential. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 90, n. 1, p. 015201, 2014. Citado na página 41.
- CHOWDHURY, D.; BASU, B. The effect of inertia on the dirac electron, the spin hall current and the momentum space berry curvature. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 329, p. 166–178, 2013. Citado na página 14.
- CIMMINO, A. et al. Observation of the topological aharonov-casher phase shift by neutron interferometry. *Physical review letters*, APS, v. 63, n. 4, p. 380, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 30.
- COMTET, A. *On the Landau levels on the hyperbolic plane*. [S.l.], 1986. Citado na página 15.
- COSTATO, M. Re prange and sm girvin—the quantum hall effect. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 109, n. 2, p. 211–212, 1994. Citado na página 61.
- CRATER, H. W.; YOON, J.-H.; WONG, C.-Y. Singularity structures in coulomb-type potentials in two-body dirac equations of constraint dynamics. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 3, p. 034011, 2009. Citado na página 41.
- CRITCHFIELD, C. Scalar binding of quarks. *Physical Review D*, APS, v. 12, n. 3, p. 923, 1975. Citado na página 51.
- CRITCHFIELD, C. L. Scalar potentials in the dirac equation. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 17, n. 2, p. 261–266, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 51.
- EHRENBERG, W.; SIDAY, R. The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, IOP Publishing, v. 62, n. 1, p. 8, 1949. Citado na página 13.
- EICHTEN, E. et al. Charmonium: comparison with experiment. *Physical Review D*, APS, v. 21, n. 1, p. 203, 1980. Citado na página 51.
- ERICSSON, M. et al. Mixed state geometric phases, entangled systems, and local unitary transformations. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 9, p. 090405, 2003. Citado na página 14.
- ERICSSON, M.; SJÖQVIST, E. Towards a quantum hall effect for atoms using electric fields. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 1, p. 013607, 2001. Citado 8 vezes nas páginas 14, 15, 16, 61, 64, 65, 69 e 72.
- FERREIRA, G. L. Argumentando sobre a realidade dos potenciais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 26, n. 1, p. 27–31, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 25.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. Quantum aspects of a moving magnetic quadrupole moment interacting with an electric field. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 56, n. 6, p. 062107, 2015. Citado na página 41.

- FOUCAULT, M. Physical demonstration of the rotation of the earth by means of the pendulum. *Journal of the Franklin Institute, of the State of Pennsylvania, for the Promotion of the Mechanic Arts; Devoted to Mechanical and Physical Science, Civil Engineering, the Arts and Manufactures, and the Recording of American and Other Patent Inventions (1828-1851)*, American Periodicals Series II, v. 21, n. 5, p. 350, 1851. Citado na página 18.
- FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 195, n. 1, p. 90–94, 1994. Citado na página 41.
- FURTADO, C.; ROSAS, A.; AZEVEDO, S. Landau quantization and curvature effects in a two-dimensional quantum dot. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 79, n. 5, p. 57001, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 48.
- GESZTESY, F.; THALLER, B. Born expansions for coulomb-type interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 14, n. 3, p. 639, 1981. Citado na página 41.
- GLASSER, M.; SHAWAGFEH, N. Dirac equation for a linear potential. *Journal of mathematical physics*, AIP, v. 25, n. 8, p. 2533–2537, 1984. Citado na página 51.
- GRIBI, P.; SIGMUND, E. Exact solutions for a quasi-one-dimensional coulomb-type potential. *Physical Review B*, APS, v. 44, n. 8, p. 3537, 1991. Citado na página 41.
- GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 10, 18, 19, 27 e 28.
- GUSEINOV, I. Unified treatment of multicenter integrals of integer and noninteger u yukawa-type screened coulomb type potentials and their derivatives over slater orbitals. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 120, n. 20, p. 9454–9457, 2004. Citado na página 41.
- GUSEINOV, I.; MAMEDOV, B. Evaluation of multicenter one-electron integrals of noninteger u screened coulomb type potentials and their derivatives over noninteger n slater orbitals. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 121, n. 4, p. 1649–1654, 2004. Citado na página 41.
- HALPERIN, B. I. Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Physical Review B*, APS, v. 25, n. 4, p. 2185, 1982. Citado na página 45.
- HANNAY, J. H. Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable hamiltonian. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 18, n. 2, p. 221, 1985. Citado na página 19.
- HE, X.-G.; MCKELLAR, B. H. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Physical Review A*, APS, v. 47, n. 4, p. 3424, 1993. Citado na página 14.
- HOLSTEIN, T.; NORTON, R.; PINCUS, P. de haas-van alphen effect and the specific heat of an electron gas. *Physical Review B*, APS, v. 8, n. 6, p. 2649, 1973. Citado na página 61.

- IKHDAIR, S. M.; FALAYE, B. J.; HAMZAVI, M. Nonrelativistic molecular models under external magnetic and ab flux fields. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 353, p. 282–298, 2015. Citado na página 41.
- IKHDAIR, S. M.; HAMZAVI, M. Spectral properties of quantum dots influenced by a confining potential model. *Physica B: Condensed Matter*, Elsevier, v. 407, n. 24, p. 4797–4803, 2012. Citado na página 41.
- KAUSHAL, R. Pion form factor and the quark model for the spectrum of heavy mesons. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 57, n. 4, p. 354–356, 1975. Citado na página 51.
- KEYSER, U. et al. Aharonov–bohm oscillations of a tuneable quantum ring. *Semiconductor Science and Technology*, IOP Publishing, v. 17, n. 5, p. L22, 2002. Citado na página 45.
- KHALILOV, V. Relativistic aharonov-bohm effect in the presence of planar coulomb potentials. *Physical Review A*, APS, v. 71, n. 1, p. 012105, 2005. Citado na página 41.
- KIM, H. et al. Quasi-one-dimensional density of states in a single quantum ring. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 7, p. 40026, 2017. Citado na página 45.
- KITTLER, M. et al. Regular dislocation networks in silicon as a tool for nanostructure devices used in optics, biology, and electronics. *Small*, Wiley Online Library, v. 3, n. 6, p. 964–973, 2007. Citado na página 41.
- KRATZER, A. Z. physik 3 (1920) 289. *Ann. Phys*, v. 67, p. 127, 1922. Citado na página 41.
- LANDAU, L. Diamagnetismus der metalle. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 64, n. 9-10, p. 629–637, 1930. Citado na página 15.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. Quantum mechanics, vol. 3. *Course of theoretical physics*, v. 3, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 63.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 3. Citado na página 69.
- MATHUR, H.; STONE, A. D. Persistent-current paramagnetism and spin-orbit interaction in mesoscopic rings. *Physical Review B*, APS, v. 44, n. 19, p. 10957, 1991. Citado na página 14.
- MEDEIROS, E. F.; MELLO, E. B. de. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 72, n. 6, p. 2051, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 41, 48, 56, 72 e 84.
- MEIR, Y.; ENTIN-WOHLMAN, O.; GEFEN, Y. Magnetic-field and spin-orbit interaction in restricted geometries: Solvable models. *Physical Review B*, APS, v. 42, n. 13, p. 8351, 1990. Citado na página 45.
- MIGNANI, R. Aharonov-casher effect and geometrical phases. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 24, n. 8, p. L421, 1991. Citado na página 14.

- MIL'SHTEIN, S. Application of dislocation-induced electric potentials in si and ge. *Le Journal de Physique Colloques*, EDP Sciences, v. 40, n. C6, p. C6–207, 1979. Citado na página 41.
- MIRZA, B.; ZAREI, M. Non-commutative quantum mechanics and the aharonov-casher effect. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 32, n. 4, p. 583–586, 2004. Citado na página 14.
- NOBLE, J.; JENTSCHURA, U. D. Dirac equations with confining potentials. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 30, n. 01, p. 1550002, 2015. Citado na página 51.
- OH, S.; RYU, C.-M. Persistent spin currents induced by the aharonov-casher effect in mesoscopic rings. *Physical Review B*, APS, v. 51, n. 19, p. 13441, 1995. Citado na página 14.
- OLIVEIRA, A. B.; BAKKE, K. On the landau system for an atom with no permanent electric dipole moment subject to a linear confining potential. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 31, n. 06, p. 1650019, 2016. Citado na página 41.
- PANCHARATNAM, S. Generalized theory of interference and its applications. In: SPRINGER. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*. [S.l.], 1956. v. 44, n. 6, p. 398–417. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 17.
- PAREDES, B. et al. 1 2-anyons in small atomic bose-einstein condensates. *Physical review letters*, APS, v. 87, n. 1, p. 010402, 2001. Citado na página 15.
- PASSOS, E. et al. Noncommutative anandan quantum phase. *Physical Review A*, APS, v. 76, n. 1, p. 012113, 2007. Citado na página 14.
- PESHKIN, M.; TONOMURA, A. The aharonov-bohm effect. Indian Association for the Cultivation of Science, 1991. Citado na página 13.
- PLANTE, G.; ANTIPPA, A. F. Analytic solution of the schrödinger equation for the coulomb-plus-linear potential. i. the wave functions. *Journal of mathematical physics*, AIP, v. 46, n. 6, p. 062108, 2005. Citado na página 51.
- PRANGE, R.; GIRVIN, S. The quantum hall effect. *Spl 'iilgm '^\/'oi '1ag 1990*, 1987. Citado na página 15.
- RAN, Y. et al. On the coulomb-type potential of the one-dimensional schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 33, n. 50, p. 9265, 2000. Citado na página 41.
- RAN, Y.; ZHANG, Y.; VISHWANATH, A. One-dimensional topologically protected modes in topological insulators with lattice dislocations. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 4, p. 298–303, 2009. Citado na página 41.
- REYES, J.; CASTILLO-MUSSOT, M. del. 1d schrödinger equations with coulomb-type potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 32, n. 10, p. 2017, 1999. Citado na página 41.

- RIBEIRO, L. et al. Landau analog levels for dipoles in non-commutative space and phase space. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 56, n. 4, p. 597–606, 2008. Citado na página 14.
- RIBEIRO, L. et al. Geometric phases modified by a lorentz-symmetry violation background. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 30, n. 14, p. 1550072, 2015. Citado na página 14.
- SANGSTER, K. et al. Aharonov-casher phase in an atomic system. *Physical Review A*, APS, v. 51, n. 3, p. 1776, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 30.
- SCHLUTER, P.; WIETSCHORKE, K.-H.; GREINER, W. The dirac equation in orthogonal coordinate systems. i. the local representation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 16, n. 9, p. 1999, 1983. Citado na página 37.
- SILVA, E. et al. On aharonov–casher bound states. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 73, n. 4, p. 2402, 2013. Citado na página 14.
- TAN, W. W.-c. tan and jc inkson, *semicond. sci. technol.* 11, 1635 (1996). *Semicond. Sci. Technol.*, v. 11, p. 1635, 1996. Citado 11 vezes nas páginas 35, 36, 45, 48, 49, 51, 55, 56, 57, 71 e 72.
- TAN, W.-C.; INKSON, J. Landau quantization and the aharonov-bohm effect in a two-dimensional ring. *Physical Review B*, APS, v. 53, n. 11, p. 6947, 1996. Citado 7 vezes nas páginas 35, 45, 51, 56, 59, 71 e 72.
- TAN, W.-C.; INKSON, J. Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots. *Physical Review B*, APS, v. 60, n. 8, p. 5626, 1999. Citado 7 vezes nas páginas 35, 45, 51, 55, 56, 71 e 72.
- VRSCAY, E. Algebraic methods, bender-wu formulas, and continued fractions at large order for charmonium. *Physical Review A*, APS, v. 31, n. 4, p. 2054, 1985. Citado na página 51.
- Wikipédia. *Transporte paralelo*. 2005. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Transporte_paralelo>. Acesso em: 14 agosto 2018. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 18.
- WILKENS, M. Quantum phase of a moving dipole. *Physical review letters*, APS, v. 72, n. 1, p. 5, 1994. Citado na página 14.
- YU, J.; DONG, S.-H. Exactly solvable potentials for the schrödinger equation with spatially dependent mass. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 325, n. 3, p. 194–198, 2004. Citado na página 41.
- ZEILINGER, A.; GÄHLER, R.; HORNE, M. A. On the topological nature of the aharonov-casher effect. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 154, n. 3-4, p. 93–95, 1991. Citado na página 14.

Apêndices

APÊNDICE A – Função Hipergeométrica Confluente

A seguinte equação diferencial

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0 \quad (\text{A.1})$$

com a e c constantes, é denominada *equação hipergeométrica confluyente* ou *equação de Kummer*.

Ela tem como solução a função hipergeométrica confluyente ([ARFKEN; WEBER, 2005](#)), onde a mesma é definida pela série

$$F(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad (\text{A.2})$$

podendo ser escrita de uma forma mais compacta, a seguir:

$$F(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (\text{A.3})$$

onde $(a)_n$ e $(c)_n$ são símbolos de Pochhammer, os quais são definidos assim:

$$\begin{aligned} (a)_n &= \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}; \\ (a)_0 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Temos que $F(a; c; x)$ converge para todo x finito; o parâmetro a é arbitrário, enquanto o parâmetro c deve ser diferente de zero ou de um inteiro negativo. Se a for um inteiro negativo (ou zero), a série se reduz a um polinômio de grau $|a|$.

APÊNDICE B – Equação Biconfluente de Heun

A forma canônica da equação biconfluente de Heun (ARSCOTT, 1995),(MEDEIROS; MELLO, 2012) é expressa da seguinte forma

$$xy'' + (1 + \alpha - \beta x - 2x^2)y' + \left[(\gamma - \alpha - 2)x - \frac{1}{2}[\delta + \beta(1 + \alpha)] \right] y = 0. \quad (\text{B.1})$$

A expressão (B.1) é uma equação diferencial homogênea, linear e de segunda ordem definida no plano complexo. No espaço bidimensional de suas soluções específicas, pode-se escolher uma solução que seja finita em $x = 0$. Dessa forma, a segunda solução linearmente independente comporta-se em $x = 0$ como $x^{-\alpha}$. Em $x = 0$, a solução finita é comumente expressa por $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ e conhecida como equação biconfluente de Heun. A forma usual da equação biconfluente de Heun é descrita da seguinte forma

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) x^m}{(1 + \alpha)_m m!}, \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_1 &= \frac{1}{2}[\delta + \beta(1 + \alpha)]; \\ A_{m+2} &= \left[(m + 1)\beta + \frac{1}{2}[\delta + \beta(1 + \alpha)] \right] A_{m+1} - (m + 1)(m + 1 + \alpha)(\gamma - 2 - \alpha - 2m)A_m. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como uma aplicação vamos tomar agora a equação diferencial (4.32) e realizar a seguinte substituição

$$\begin{aligned} x &= \xi; \\ \alpha &= 2|\tau|; \\ \beta &= \mu; \\ \gamma &= \beta + \frac{\mu^2}{4}; \\ \delta &= 2\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

sendo todos os parâmetros reais.

Restringindo o domínio da equação ao semi-eixo real, temos que a equação (B.1) se transforma na forma da equação (4.30). No semi-eixo real podemos definir

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; \xi) = H\left(2|\tau|, \mu, \beta + \frac{\mu^2}{4}, 2\theta; \xi\right), \quad (\text{B.5})$$

onde $H\left(2|\tau|, \mu, \beta + \frac{\mu^2}{4}, 2\theta; \xi\right)$ é a solução formal para a equação (4.30) que deve ser expressa em termos de (4.32) e (B.2).