

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JONAS PETRÚCCIO TEIXEIRA DE ARAÚJO

FUNÇÃO AFIM E APLICAÇÕES

JOÃO PESSOA - PB

2018

JONAS PETRÚCCIO TEIXEIRA DE ARAÚJO

FUNÇÃO AFIM E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática, como um dos requisitos para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

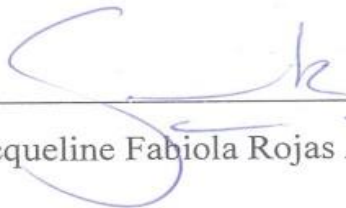
JOÃO PESSOA - PB

2018

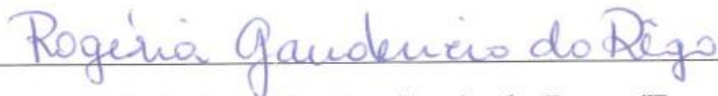
JONAS PETRÚCCIO TEIXEIRA DE ARAÚJO

FUNÇÃO AFIM E APLICAÇÕES

Aprovado em 05 / 11 / 2018 pela banca examinadora.



Prof.^ª Dr.^ª Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (Orientadora)



Prof.^ª Dr.^ª Rogéria Gaudêncio do Rego (Examinadora)



Prof.^º Me. João Batista Alves Parente (Examinador)

AGRADECIMENTOS

À Deus, por nos dar forças diariamente para a caminhada.

Aos meus pais, pelo amor, carinho e apoio ao longo de toda minha vida.

Ao meu irmão, Pedro Vinícius, pelo apoio na realização deste trabalho.

À professora Jacqueline, pela paciência, dedicação e orientação na elaboração deste trabalho.

Aos amigos Nivaldo Alves, Maelson Arnaldo, Genildo Muniz, Rilderson Pedroza, que me apoiaram, me encorajaram em muitos momentos com uma palavra amiga, com seus exemplos de vida, me dando apoio para que eu chegasse até aqui.

À minha tia, Maria do Socorro, pelo exemplo que é, pelo apoio, afeto e atenção.

À professora Rogéria Gaudêncio, e ao professor João Batista A. Parente, pelos conhecimentos passados ao longo da graduação e pela participação na banca.

RESUMO

O conhecimento acerca do surgimento e desenvolvimento dos conceitos matemáticos é uma ferramenta de essencial importância para o professor na elaboração de uma linguagem matemática que proporcione uma maior compreensão por parte dos alunos. Existe uma notória dificuldade dos alunos em relação ao conceito de função, seja pelo rigor do formalismo, seja pela gama de definições acerca do tema. Neste trabalho, foram exploradas as aplicações da função afim, estabelecendo conexões com outros temas, visando tornar o conteúdo compreensível e significativo para o aluno. O Livro didático utilizado apresenta o conteúdo de maneira dinâmica e ilustrada, trazendo aplicações da teoria, exercícios de variados níveis de dificuldade. A Metodologia que sugerimos ao professor é trabalhar as aplicações através de algumas ferramentas, como o projetor ou computador. Este trabalho faz uma breve retrospectiva acerca da evolução deste conceito, assim como análise de anotações de conteúdo em tela.

Palavras-chave: Função afim, Função linear e Aplicações de funções.

ABSTRACT

The knowledge about the emergence and development of mathematical concepts is a tool of essential importance for the teacher in the elaboration of a mathematical language that provides a greater understanding on the part of the students. There is a notorious difficulty of the students in relation to the concept of function, either by the rigor of formalism or by the range of definitions about the theme. In this work, the applications of the related function were explored, establishing connections with other themes, aiming to make the content understandable and meaningful for the student. The textbook used presents the content in a dynamic and illustrated way, bringing applications of theory, exercises of varying levels of difficulty. The methodology we suggest to the teacher is to work the applications through some tools, such as the projector or computer. This work gives a brief retrospective about the evolution of this concept, as well as analysis of annotations of content on screen.

Keywords: Affine function, Linear function and Applications of functions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Ptolomeu.....	12
Figura 2a . Semicircunferência.....	13
Figura 2b. Tabela de cordas de Ptolomeu.....	13
Figura 3. René Descartes.....	17
Figura 4. Isaac Newton.....	17
Figura 5. Gottfried Leibniz.....	18
Figura 6. Johann Bernoulli.....	19
Figura 7. Leonhard Euler.....	19
Figura 8. Joseph Lagrange.....	20
Figura 9. Johann Dirichlet.....	20
Figura 10. Sistema Cartesiano Ortogonal.....	22
Figura 11. Representação do ponto P.....	23
Figura 12. Representação de pontos.....	24
Figura 13. Gráfico da Função Afim.....	30
Figura 14a. Função Identidade.....	32
Figura 14b. Função $y = -x$	32
Figura 15. Gráfico da Função Constante.....	33
Figura 16. Função Constante $f(x) = 1$	34
Figura 17. Gráfico da Função $f(x) = 2x + 1$	35
Figura 18. Gráfico da Função $f(x) = 2x$	35
Figura 19. Retas paralelas.....	36
Figura 20. Gráfico da Função linear $f(x) = 4x$	38
Figura 21. Livro didático utilizado na pesquisa.....	39
Figura 22. Exercícios do Livro didático.....	41
Figura 23. Anotações realizadas pelos estudantes.....	43

Figura 24. Revisão da prova de Matemática.....	44
Figura 25. Revisão da prova de Matemática.....	45
Figura 26. Revisão da prova de Matemática.....	46

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	Apresentação do tema da pesquisa.....	11
1.2	Objetivos.....	11
1.2.1	Objetivo geral.....	11
1.2.2	Objetivos específicos.....	12
1.3	Metodologia.....	12
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	13
2.1	Quando apareceram as funções.....	13
2.2	Fases do desenvolvimento do conceito de função.....	14
2.3	Principais contribuições.....	17
2.4	O Sistema Cartesiano Ortogonal.....	22
2.5	Função Afim.....	25
2.5.1	Problemas de Aplicação.....	25
2.5.2	Alguns exemplos importantes.....	30
2.5.3	Definição.....	32
2.6	Função Constante.....	33
2.6.1	Exemplo de Aplicação.....	33
2.6.2	Definição de função constante.....	34
2.7	Outras funções afins e seus gráficos.....	35
2.8	Função Linear.....	37
2.8.1	Problemas de Aplicação.....	37
2.8.2	Definição.....	39
3.	A FUNÇÃO AFIM EM SALA DE AULA.....	40
3.1	Análise do livro didático.....	40
3.2	Observações das anotações das atividades em sala pelos	

alunos.....	49
4. CONCLUSÃO.....	50
5. REFERÊNCIAS.....	51

1. INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema da pesquisa

Durante muito tempo, quis fazer uma pesquisa, investigação à respeito do aprendizado de alunos no quesito funções no Ensino Médio. Pois tive dificuldade com o tema no passado, e encontrei neste trabalho a oportunidade de reparar “erros” cometidos por alunos e professores, no sentido de melhorar minha postura no âmbito profissional, contribuindo para a sociedade com um ensino melhor.

O presente trabalho contém uma breve análise acerca dos aspectos ligados ao desenvolvimento histórico do conceito de função. A partir destas definições, fez-se uma análise dos modos como essas ideias são desenvolvidas em sala de aula.

Parece não existir um consenso a respeito da origem do conceito de função. Alguns autores consideram que os babilônios já possuíam uma ideia inicial de funcionalidade. Baseava-se em cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas. Entre os gregos, as tabelas que faziam a conexão entre Matemática e Astronomia mostravam evidências de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, através da interpolação linear (YOUSCHKEVITCH, 1976).

Desde o século III a.C., os matemáticos gregos descreviam pontos no plano utilizando suas coordenadas. O mesmo recurso era utilizado em mapas nas representações leste-oeste, e atualmente em cálculos de latitude e longitude, e na tecnologia do sistema de posicionamento global (GPS).

Foi com os trabalhos de Descartes que começou-se a relacionar Geometria à Álgebra. Como à época estas eram consideradas áreas distintas da matemática, Descartes dedicou-se a uní-las, dando início ao estudo da Geometria Analítica, que atualmente é base de grandes campos de estudos matemáticos como a Geometria Algébrica, Geometria Diferencial, e Engenharia.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Apresentar um breve recorte histórico do desenvolvimento do conceito de função e discutir elementos do ensino da função afim.

1.2.2 Objetivos Específicos

Levantar elementos do desenvolvimento do conceito de função em textos de história da Matemática;

Apresentar definição, representações e aplicações da função afim;

Discutir elementos do ensino de função afim, com base no livro didático de Matemática e em anotações de estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

1.3 Metodologia

O Presente trabalho foi realizado tendo como metodologia a pesquisa bibliográfica e como instrumentos de investigação livros de história da Matemática; livro didático de Matemática para o Ensino Médio e cadernos de estudantes desse nível de escolaridade, regularmente matriculados em uma escola pública da cidade de João Pessoa.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Quando apareceram as funções

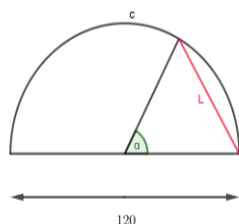
O conceito de função aparece, de forma intuitiva, desde a antiguidade. De fato, qualquer tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis é uma função. Um dos melhores exemplos de uma função no período antigo deve-se a Cláudio Ptolomeu (figura 2) cientista do século II a.C. que viveu em Alexandria durante o período romano. Ptolomeu elaborou a famosa tabela de cordas (figura 2b), mostrada abaixo, que foi um instrumento fundamental para cálculos de astronomia e de navegação.

Figura 1. Ptolomeu.



Fonte: Infoescola.

Figura 2a. Semicircunferência. Figura 2b. Tabela de Cordas de Ptolomeu.



α (graus)	L (unidades)
18,5	19,27
.....
70	68,8
.....
114	102

Fonte: Autor.

- A tabela da figura 2b. foi construída considerando uma semicircunferência com diâmetro de 120 unidades e que, para cada ângulo central α , associava o comprimento L da corda correspondente.
- Na tabela de cordas de Ptolomeu, os ângulos são expressos em graus, com variação de meio grau de um valor para o seguinte, e o comprimento da corda é determinado na semicircunferência em função de um ângulo entre 0° e 180° como vemos na tabela citada.

Atualmente, existe uma fórmula que permite calcular para cada valor de α , o comprimento L da corda, mas naquele tempo não estava bem definido o conceito de “regra geral”. Os valores eram calculados para valores específicos de α , em geral associados à problemas de natureza prática.

2.2 Fases do desenvolvimento do conceito de função

Para Youschkevitch, existem 3 etapas principais do desenvolvimento da noção de função ([42], p. 9):

- (1) A Antiguidade: etapa no curso da qual o estudo dos diferentes

casos de dependência entre duas quantidades ainda não isolou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.

(2) A Idade Média: Nesta etapa, estas noções são pela primeira vez, e de maneira precisa, expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas durante a qual, como na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, de preferência a uma fórmula.

(3) O Período Moderno: no curso do qual, a partir do fim do século XVI, e especialmente durante o século XVII, as expressões analíticas de funções começam a prevalecer; a classe das funções analíticas geralmente são expressas por meio de soma de séries infinitas, tornando-se logo a principal classe utilizada.

No período moderno, destacaram-se matemáticos como: Galileu Galilei (1564-1642), que incorporou a escala em representações gráficas, François Viète (1540-1603), que usou vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmetros, Descartes (1596-1650) que estudou a relação entre as variáveis por meio de equações, Isaac Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que desenvolveram estudos principalmente quanto à noção de curvas e às taxas de variação de seus valores, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) através do estudo de funções de várias variáveis.

Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783) também contribuíram significativamente na ampliação e evolução do conceito de função ao longo da história, principalmente na linguagem e notações matemáticas atuais, Dirichlet sugeriu uma definição de função, próxima da adotada atualmente, em que uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que para um dado valor x existe um determinado e único valor y .

Ao longo dos anos alguns matemáticos contribuíram significativamente para a compreensão e evolução do conceito de função. Dentre os quais destacam-se:

Euler:

Leonard Euler (1707-1783) definiu função da seguinte maneira:

Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade

e números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z , contém também quantidades constantes, é uma função de z . Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b/aa - zz$; cz , etc; são funções de z (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Bernoulli:

Para o matemático suíço Jean Bernoulli (1667-1748):

Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Lagrange:

Segundo Jean-Louis Lagrange (1736-1813):

Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se veem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que se consideram variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Cauchy:

Segundo Augustin Cauchy (1789 - 1857):

Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Dirichlet:

Para Peter Gustav Dirichlet (1805-1859):

Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x , existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x (SIERPINSKA, 1992, p. 46).

No fim do século XIX, com a disseminação da linguagem dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal de função por meio de conjuntos:

Dados dois conjuntos não vazios A e B , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B .

2.3 Principais contribuições

Segundo Zuffi (2001), a definição de função que é abordada pelos professores dos diferentes níveis de ensino, demorou um longo período de tempo para ser elaborada. Alguns autores consideram os babilônios como pioneiros deste estudo, pois em 2000 a.C. já trabalhavam em problemas relacionados a tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas.

Vários estudiosos contribuíram para o conceito atual de função. Estes elaboraram diferentes conceitos de função, que atualmente convergem para um conceito comum. Entre os principais pensadores destacam-se:

Figura 3. René Descartes.



Fonte: Infoescola.

René Descartes (1596-1650) foi um filósofo, físico e matemático francês. Relacionou a Álgebra com a Geometria, surgindo assim a geometria analítica e o sistema de coordenadas, conhecido hoje como “Plano Cartesiano”. Este é utilizado como base de referência no funcionamento de aparelhos de alta precisão como radares, GPS, etc.

Figura 4: Isaac Newton.



Fonte: Infoescola.

Na teoria de Newton sobre “fluentes” – esse era o termo que ele usava para descrever as suas ideias de funções – estas encontravam-se bastante ligadas à noção de curva e às “taxas de mudança” de quantidades variando continuamente. E mais ainda, restringiam-se a “imagens geométricas de uma função real, de variável real” (CARAÇA, 1952). Newton desenvolveu também uma grande habilidade em expressar estes “fluentes” em termos de séries infinitas, relacionadas a taxas de variação, para o cálculo de comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas, enfim, grandezas variando continuamente.

Figura 5. Leibniz.



Fonte: Infoescola.

Foi Leibniz, na década de 1670, quem usou o termo “função” para se referir a “certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas”. Logo depois, o termo foi usado para se referir a quantidades dependentes ou expressões (ITÔ, 1987).

Figura 6. Johann Bernoulli.



Fonte: Infoescola.

Johann Bernoulli estava interessado em funções que fossem bem-comportadas, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu, como o aprimoramento da utilização da regra de L'Hopital para formas indeterminadas de limite, que envolviam funções diferenciáveis. Este matemático também deu grandes contribuições à Geometria Diferencial, com seus estudos sobre geodésicas em uma superfície.

Figura 7. Leonhard Euler.

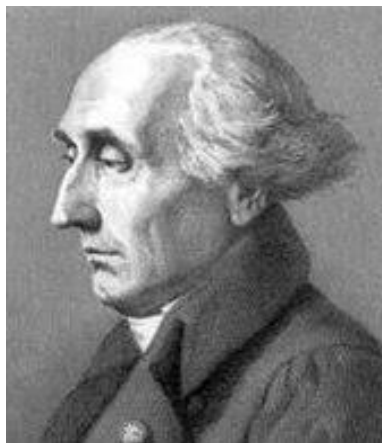


Fonte: Infoescola.

Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço. Ele contribuiu aperfeiçoando o conceito de função e, particularmente, para a de funções logarítmicas e exponenciais – foi Euler que esclareceu que os logaritmos de números negativos não são números reais. Organizou o cálculo diferencial ampliando a ideia de “fluentes” (funções) de Newton para

outro ramo, a análise. Também contribuiu para a linguagem simbólica e as notações matemáticas que temos hoje.

Figura 8. Joseph Louis Lagrange.



Fonte: Infoescola.

Dentre várias contribuições de Lagrange estão estudos sobre o cálculo de variações, à época ramo novo da matemática, cujo nome era originado de notações usadas pelo próprio Lagrange por volta de 1760. Em linguagem simples, o cálculo de variações trata de encontrar uma relação funcional ($y = f(x)$), de maneira que uma integral $\int g(x,y)dx$ seja máxima ou mínima.

Figura 9. Johann Dirichlet.



Fonte: E-Cálculo-USP.

Johann Dirichlet (1805-1859) foi um matemático alemão, conhecido pelo Princípio de

Dirichlet e pela Série de Dirichlet. Embora tenha aperfeiçoado a definição de função para a ideia mais próxima da atual, àquela época, os conceitos de “conjunto” e de “número real” ainda não haviam sido precisamente estabelecidos. Mas a “regra” proposta por este matemático poderia ser bastante arbitrária.

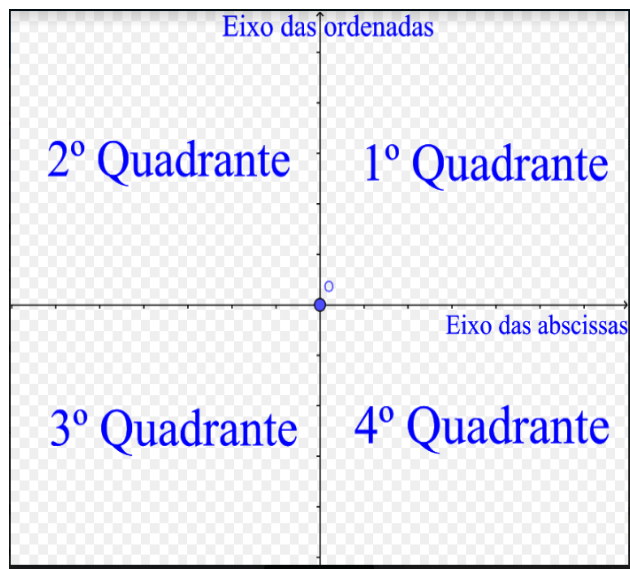
2.4. O sistema cartesiano ortogonal

A ideia de plano cartesiano surgiu em 1637, desenvolvida pelo matemático francês René Descartes, consistindo em um sistema de eixos, com origem, uma direção e um sentido, permitindo uma observação mais clara e objetiva de pontos e formas geométricas.

Para determinar a localização de um ponto no plano, utilizamos o chamado sistema cartesiano ortogonal, é ele que nos auxilia nos dias atuais no funcionamento de um aparelho de GPS, por exemplo, na localização de pontos via satélite, em sonares de embarcações marítimas, etc.

Os eixos são identificados pelas letras x e y . O eixo x é denominado eixo das abcissas. O eixo y é denominado eixo das ordenadas. Esses eixos perpendiculares entre si, dividindo o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes.

Figura 10. Sistema Cartesiano Ortogonal.



Fonte: Autor.

Dado um ponto P no plano, usamos a notação $P = (a,b)$ sendo “a” denominada abscissa do ponto P , e “b” a ordenada deste ponto.

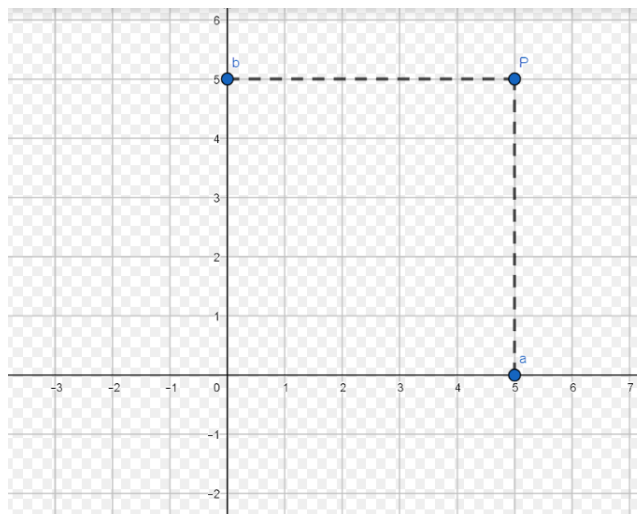
De fato, se P_1 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo x , e P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo y , então as coordenadas a e b de P são determinadas por:

$$|a| = d(P, P_1) \text{ e } |b| = d(P, P_2).$$

Aqui, $|c|$ denota o valor absoluto do número real c . Por exemplo, se P está posicionado no primeiro quadrante, então $P = (a,b)$ com $a > 0$ e $b > 0$.

O Ponto $P = (5,5)$ é ilustrado na Figura 11.

Figura 11. Representação do ponto P.



Fonte: Autor.

- Os números reais a e b entre parênteses formam o que chamamos par ordenado e representam as coordenadas do ponto P ;

- Para localizar um ponto no plano, é preciso localizar suas coordenadas em cada eixo;

➤ à direita da origem

➤ à esquerda da origem

$a \rightarrow$ positivo

$a \rightarrow$ negativo

➤ acima da origem

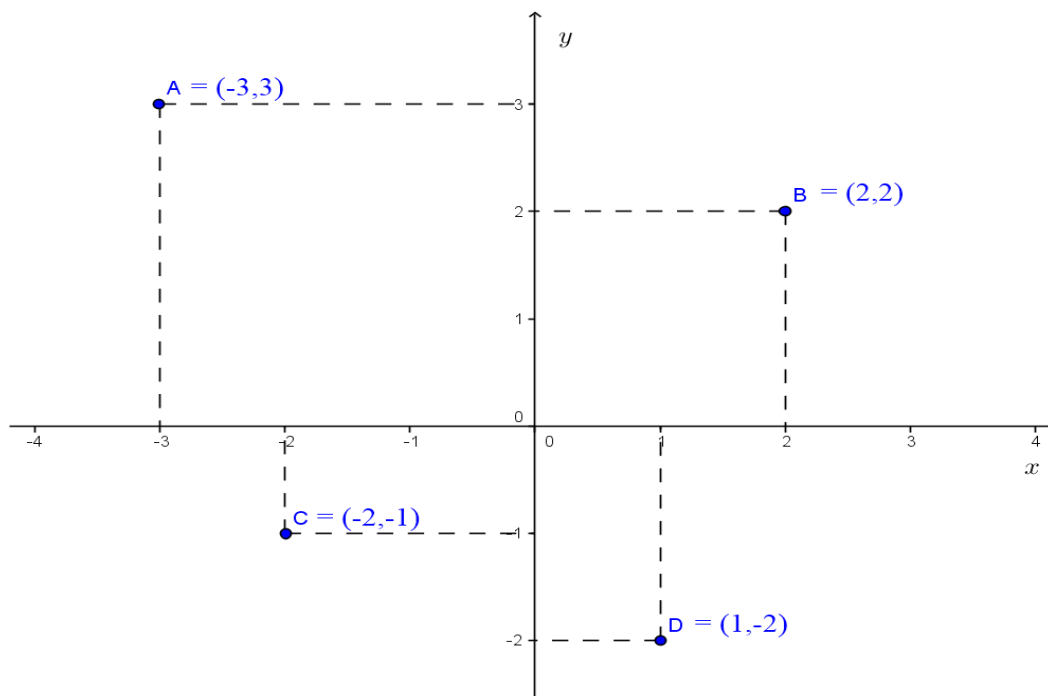
➤ abaixo da origem

$b \rightarrow$ positivo

$b \rightarrow$ negativo

No gráfico da Figura 12, tem-se o esboço dos pontos $A = (-3,3)$, $B = (2,2)$, $C = (-2,-1)$ e $D = (1,-2)$ no plano cartesiano.

Figura 12. Representação de pontos



Fonte: Autor.

No presente trabalho, consideramos que o leitor tenha familiaridade com o conceito de função, e começamos a tratar de funções afim, especificamente.

2.5 Função Afim

2.5.1 Problemas de Aplicação

A maneira tradicional como a função afim é abordada no ambiente escolar é geralmente através da apresentação de sua definição, seguida de alguns exercícios, em que normalmente se exige apenas uma prática “mecanizada” por parte do aluno, pedindo-se, por exemplo, que calcule o zero da função, calcule $f(3)$, dada a representação analítica de $f(x)$. Entretanto, funções afins podem ser introduzidas apresentando o seguinte tipo de problema para o aluno:

1) Alunos do curso de Química da UFPB estudam uma reação química, onde observam o tempo gasto para descolorar certa quantidade de água. Foi obtida a tabela abaixo, com o tempo para evaporação de cloro na água e sua massa, em gramas, evaporada. Mantendo a relação entre massa e tempo, e sabendo que havia 100 gramas da substância, quanto tempo levou para o término?

Massa (gramas)	Tempo (horas)
30	3
40	4
50	5
60	6
70	7

As Respostas das questões seriam assim obtidas como indicado em seguida:

Tem-se aqui um caso que envolve uma proporção, pois a cada hora evapora-se 10 gramas de cloro, daí:

10 gramas _____ 1 hora

30 gramas _____ x

x equivale a $30 \cdot 1 / 10$

que resulta em $x = 3$ horas.

Ou ainda:

Como evaporam-se 10 gramas de cloro a cada hora, a lei da função será dada pela expressão $y = 10x$, em que x é o tempo gasto, em horas, para evaporar y gramas de cloro. Então, se restam 30 gramas, pode-se calcular utilizando a sua lei de formação.

$$y = 10x$$

$$30 = 10x \quad \text{logo} \quad x = 3 \text{ horas}$$

Um outro exemplo de questão poderia ser a seguinte:

O salário mensal de um vendedor numa agência de veículos é composto de duas parcelas: uma parte fixa no valor de R\$ 1500,00 e outra que depende do número de veículos vendidos, recebendo uma comissão de R\$ 200,00 por veículo. Calcule:

- a) Qual será seu salário num mês que vender 5 veículos?
- b) Se num determinado mês ele obteve um salário de R\$ 2900,00. Quantos veículos foram vendidos por ele?
- c) Indicando por n o número de veículos vendidos e por S o salário obtido pelo vendedor, determine a expressão que relaciona S com n .

As Respostas das questões seriam obtidas como indicado em seguida:

a) Observa-se que:

$$\text{Salário} = \text{valor fixo recebido} + 200 * (\text{n}^\circ \text{ de veículos vendidos})$$

$$\text{ou seja, Salário} = 1500 + 200 * 5. \quad \text{Portanto, Salário} = \text{R\$ } 2500.$$

b) Neste caso, temos o salário final obtido por ele, daí sabemos que:

$$\text{Salário} = \text{valor fixo} + 200 * n.$$

$$\text{Logo } 2900 = 1500 + 200 * n, \text{ o que nos dá:}$$

$$200 n = 2900 - 1500 \Rightarrow 200 n = 1400.$$

Portanto, $n = 7$.

Resposta: Nesse mês ele vendeu 7 veículos.

c) Chamando $S(n)$ o salário obtido pelo vendedor em função do número de vendas, temos que:

$$S(n) = 1500 + 200 \cdot n.$$

Um outro exemplo de questão envolvendo função afim poderia ser a seguinte:

A prefeitura de um município explicou em nota à população como se calcula o preço pago numa conta residencial de água: paga-se uma taxa fixa de R\$ 30,00 para um consumo de até 10 m^3 . E para cada metro cúbico excedido, adiciona-se uma taxa de R\$ 3,00. Responda:

a) Quanto pagará pela conta numa residência que consumiu 14 m^3 ?

b) Qual o número máximo de metros cúbicos consumidos para que o valor pago não ultrapasse R\$ 50,00?

c) Chame por P o preço pago e x , o consumo, dê a relação de P com x .

Respostas:

a) Observa-se que:

$$\text{Valor} = \text{Taxa fixa} + 3 \cdot (\text{n}^\circ \text{ de } \text{m}^3 \text{ excedidos})$$

$$\text{Ou seja, } \quad \text{Valor} = 30 + 3 \cdot 4.$$

Portanto, Valor = R\$ 42,00.

b) Neste caso temos um valor para o consumo, lembrando que:

$$\text{Valor} = \text{Taxa fixa} + 3 \cdot (\text{n}^\circ \text{ de } \text{m}^3 \text{ excedidos}).$$

Note que, se $n = 6$ o valor pago será de R\$ 48,00 (menos que R\$ 50,00), porém se $n = 7$, o valor pago será de R\$ 51,00 (maior que R\$ 50,00).

De fato, se o consumidor paga exatamente R\$ 50,00 temos que: $50,00 = 30,00 + 3 \cdot n$, logo:

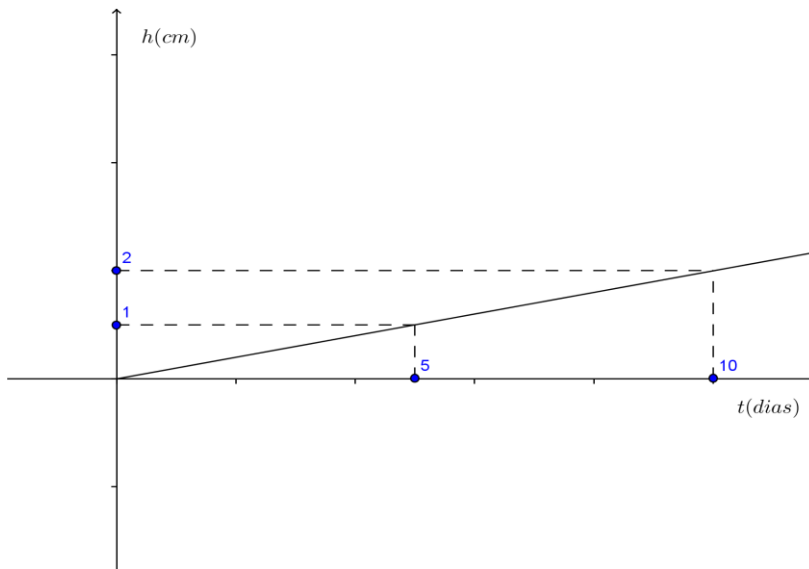
$$3 \cdot n = 50,00 - 30,00 \Rightarrow 3 \cdot n = 20 \Rightarrow n = 6.66666666 \dots \text{m}^3$$

Resposta. O número máximo é $16m^3$.

c) Sabemos que: Preço = Taxa fixa + $3 \cdot x$. Assim, $P(x) = 30 + 3x$.

Um quarto exemplo de questão envolvendo a função afim é:

Um botânico, estudando as condições naturais às quais uma planta vive, mede seu crescimento todos os dias. A partir dos resultados, obteve o gráfico a seguir. Se mantida, sempre, a relação entre tempo e altura, que altura a planta terá no trigésimo dia?



Observamos aqui um caso de proporção, pois notamos que a cada 5 dias, a planta aumenta sua altura em 1 centímetro, daí, fazemos

1 cm _____ 5 dias

x _____ 30 dias

Assim: $30 \cdot 1 = 5x \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 1}{5} \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$.

Ou ainda, observando a lei de formação desta função, cujo gráfico é representado pela reta acima, cuja inclinação corresponde ao coeficiente angular que podemos calcular.

A inclinação da reta corresponde ao coeficiente angular, que podemos calcular “pela tangente” do ângulo formado com o eixo das abscissas: de fato, se a reta for dada pela equação $y = ax + b$ temos que $a = \frac{1}{5}$ e $b = 0$ (pois a reta passa pela origem).

Logo, sua equação é dada por $y = \frac{x}{5}$, em que x é o tempo, em dias, y a altura da planta em centímetros.

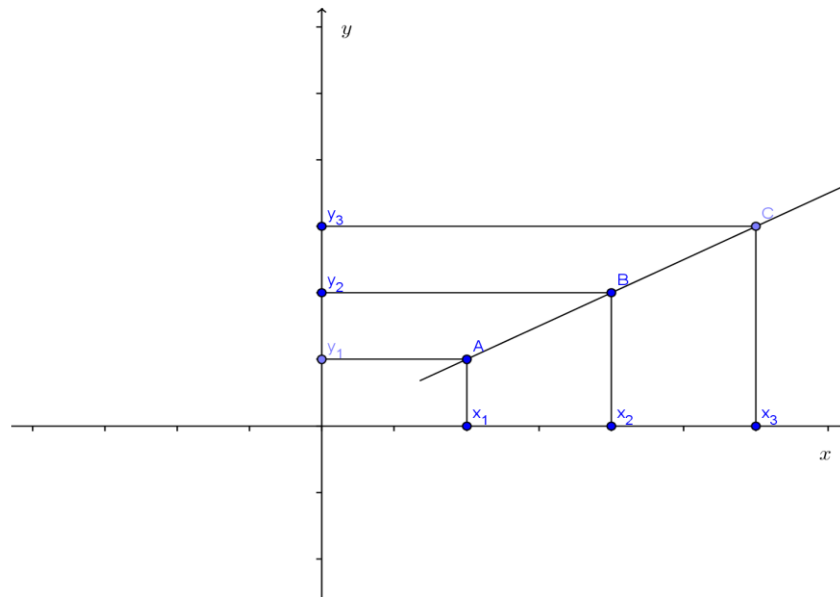
Ao colocarmos $x = 30$ (dias) na expressão $y = \frac{x}{5}$, obtemos $y = \frac{30}{5}$. Daí conclui-se que:

$$y = 6 \text{ cm.}$$

2.5.2 O Gráfico da Função Afim

O gráfico de uma função afim é uma reta. Provaremos isto mostrando que três pontos quaisquer do gráfico são sempre colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

Figura 13. Gráfico da função afim.



Fonte: Autor.

Como ilustrado na figura acima, considere $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ tais que:

$x_1 < x_2 < x_3$ são pontos do gráfico da função afim cuja lei é dada por $y = ax + b$.

A, B, e C são colineares se mostrarmos que $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$. Sabendo que: $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$ e $y_3 = ax_3 + b$, temos:

$$D(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2}$$

$$D(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 - ax_1))^2}$$

$$D(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$$

$$D(A,B) = \sqrt{(1 + a^2) * (x_2 - x_1)^2}$$

$$D(A,B) = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Analogamente, concluímos que:

$$D(B, C) = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} \quad \text{e} \quad D(A, C) = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Portanto:

$$D(A, B) + D(B, C) = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$D(A, B) + D(B, C) = D(A, C)$$

Assim, três pontos quaisquer pertencentes ao gráfico de uma função afim serão sempre colineares, logo esse gráfico será uma reta.

2.5.3 Definição da Função Afim

Função afim ou função de 1º grau, é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo Domínio e Contradomínio é o conjunto dos Reais, definida pela expressão $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais. O coeficiente a é denominado coeficiente angular e determina o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas. O coeficiente b é chamado de coeficiente linear e determina o ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.

Como uma função afim é definida pela lei matemática $f(x) = ax + b$, com a, b reais, para encontrar o zero da função afim é necessário que o coeficiente a seja distinto de zero ($a \neq 0$).

Entendemos como “zero da função” o valor de x para o qual temos $y = 0$, ou $f(x) = 0$. E temos uma função do tipo $f(x) = ax + b$, então fazemos:

$$0 = ax + b \qquad ax = -b \qquad x = -b/a \text{ sempre que } a \neq 0.$$

2.5.4 Alguns exemplos importantes:

Figura 14a. Função identidade.

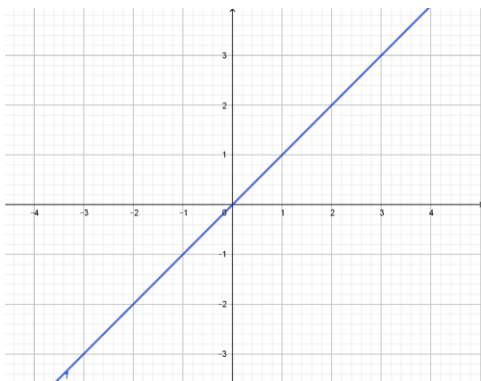
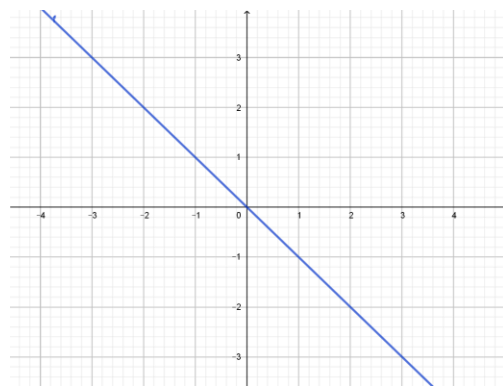


Figura 14b. Função $y = -x$.



Fonte: Autor.

► Temos no primeiro caso, (figura 14a) a função conhecida por Identidade, pois esta associa a qualquer valor do Domínio o mesmo valor no Contradomínio. Denota-se por $y = x$ ou ainda, $f(x) = x$.

► Temos no segundo caso, (figura 14b) a função que associa ou transforma cada valor dado no seu valor oposto, ou simétrico.

Denota-se por $y = -x$ ou ainda, $f(x) = -x$.

2.6 Função constante

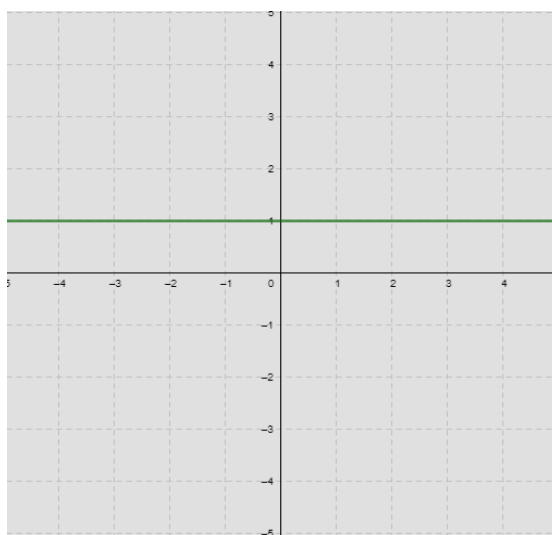
2.6.1 Um exemplo de aplicação da função constante

Num restaurante há uma política de prêmios, onde o cliente mais assíduo é premiado. A cada almoço, o cliente ganha 1 cupom, que é convertido em pontos, e a cada 10 pontos um almoço grátis.

Sendo que ele só ganha um cupom independentemente do quanto gaste: se almoçar e ainda pedir bebidas, sobremesas, só ganha 1 cupom. Esboce o gráfico que representa o número de cupons em função do valor pago.

A solução está presente na Figura 15.

Figura 15. Gráfico da função constante.



Fonte: Autor.

Temos que, independentemente do valor pago, o cliente ganha um cupom em cada ida ao restaurante, por isso o problema resulta no gráfico da Figura 15.

2.6.2 Definição de função constante

Uma função polinomial cuja lei é do tipo $f(x) = k$, em que k é um valor constante, $k \in \mathbb{R}$, é chamada função constante, pois para qualquer valor real atribuído à variável x , sua imagem será sempre a mesma, k .

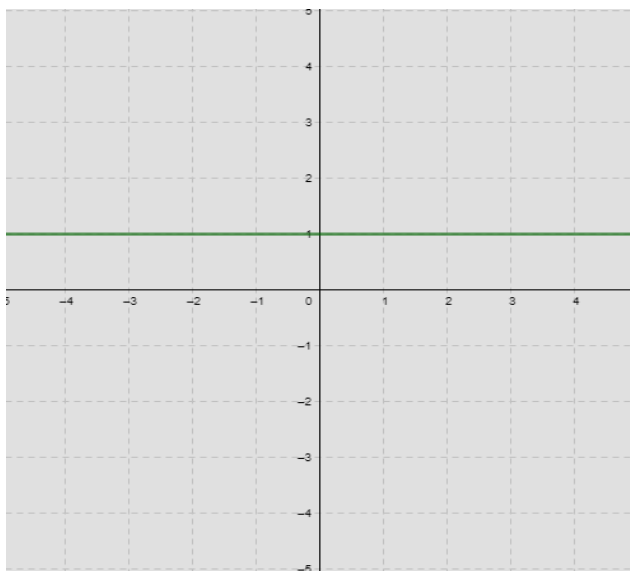
Temos ao lado o exemplo da função $f(x) = 1$.

➤ Esta função tem Domínio $D = \mathbb{R}$, porém, para qualquer valor de x , a imagem será igual a 1.

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 1$
- $f(10) = 1$

$f(x) = 1$, para qualquer valor de x .

Figura 16. Função constante e igual a 1.

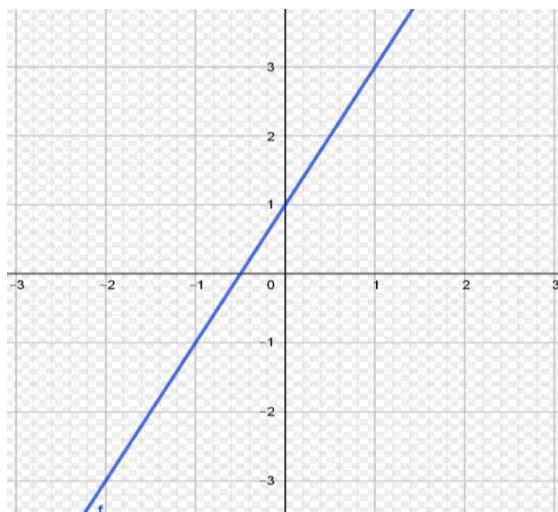


Fonte: Autor.

2.7 Outras Funções afins e seus gráficos

- A função $f(x) = 2x + 1$ possui o seguinte gráfico (Figura 17):

Figura 17. Gráfico da Função $f(x) = 2x + 1$.

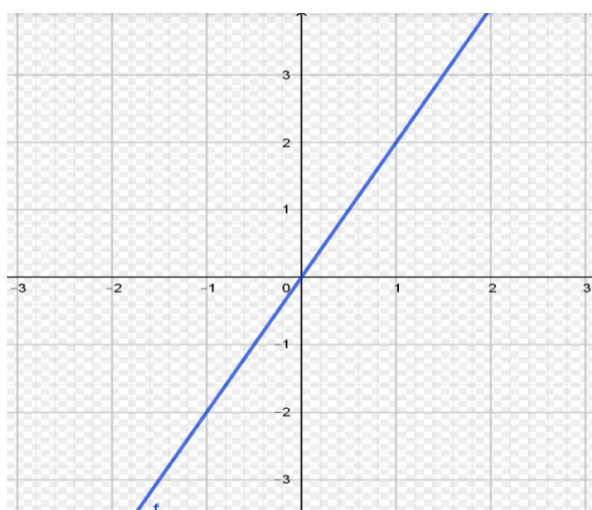


Fonte: Autor.

Vale fazer uma importante Observação: Tem-se um gráfico semelhante ao da função identidade na Figura 17, porém, com maior inclinação e passando no ponto (0,1).

A função $f(x) = 2x$, por exemplo, tem o gráfico apresentado na Figura 18.

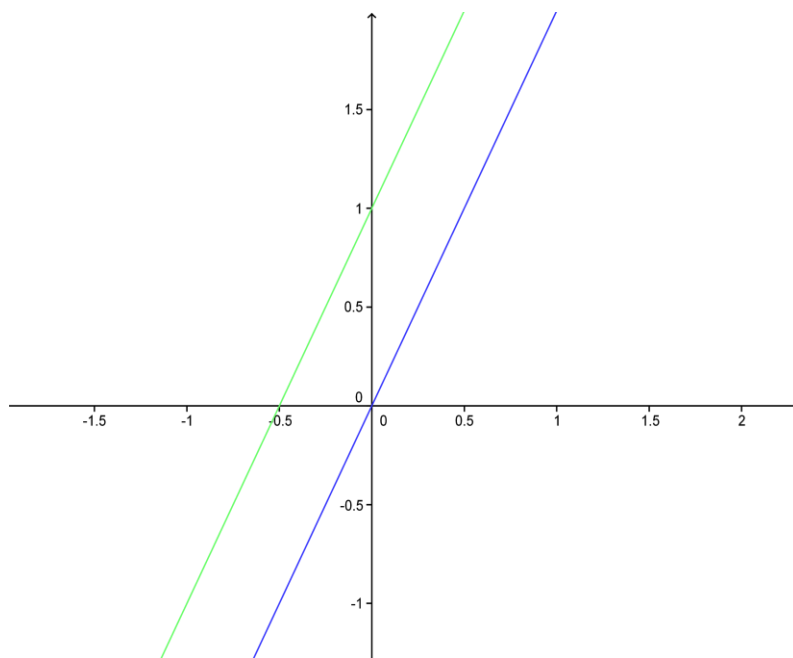
Figura 18. Gráfico da Função $f(x) = 2x$.



Fonte: Autor.

► Observa-se que o Gráfico da Figura 18 pode ser obtido do gráfico da Figura 17 apenas deslocando para a direita cada ponto do gráfico da Figura 17 em uma unidade, como ilustrado na Figura 19.

Figura 19 - Retas paralelas.



Fonte: Autor.

As retas dos dois gráficos são paralelas, pois possuem o mesmo coeficiente angular, $a = 2$.

2.8 Função Linear

A seguir abordaremos outros exemplos no qual o conceito de função afim aparece, especificamente $f(x) = ax + b$, com $b = 0$.

2.8.1 Problemas de Aplicação

O Valor de um carro, em certo período de tempo, depreciou de acordo com a função $V(x) = -500x$, onde x é o tempo, em anos, contados a partir da data de compra, e $V(x)$ o valor do veículo após x anos. Qual o valor de um veículo que tenha quatro anos e meio de uso e que foi comprado por R\$15000?

Ora, temos de calcular $V(x)$ para $x=4,5$. Vejamos:

$$V(4,5) = -500.(4,5)$$

$$V(4,5) = - 2250$$

Este é o valor depreciado

O veículo valerá $15000 - 2250$, logo R\$ 12750.

O Volume de água que um reservatório recebe pelas chuvas, num certo período, é dado pela função linear $V(x) = 5x$, onde V é o volume armazenado, em m^3 , x é o tempo em dias, medido a partir do momento que chove. Calcule o volume de chuva armazenado numa semana que choveu por três dias e oito horas.

Vejamos: se um dia tem 24 horas, logo 8 horas representa um terço de dia.

Daí fazemos assim, $3 + 1/3$ nos dá $10/3$

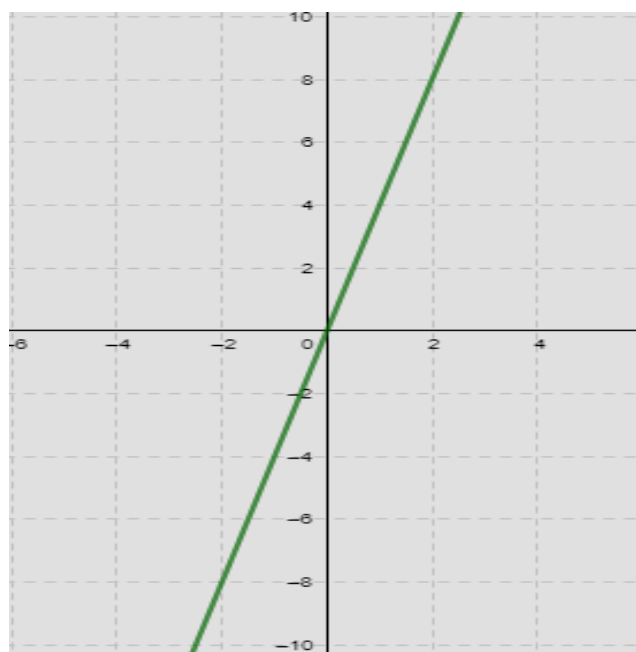
$$V(10/3) = 5. 10/3, \text{ logo } V(10/3) = 50/3 = 16,666m^3$$

2.8.2 Definição de função linear

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita linear quando é da forma $f(x) = ax$, ou seja, $b = 0$. Seu gráfico será sempre uma reta não paralela ao eixo x , que intercepta a origem do sistema cartesiano.

Um exemplo de função linear é $f(x) = 4x$, sua representação gráfica será:

Figura 20. Função Linear $f(x) = 4x$.



Fonte: autor.

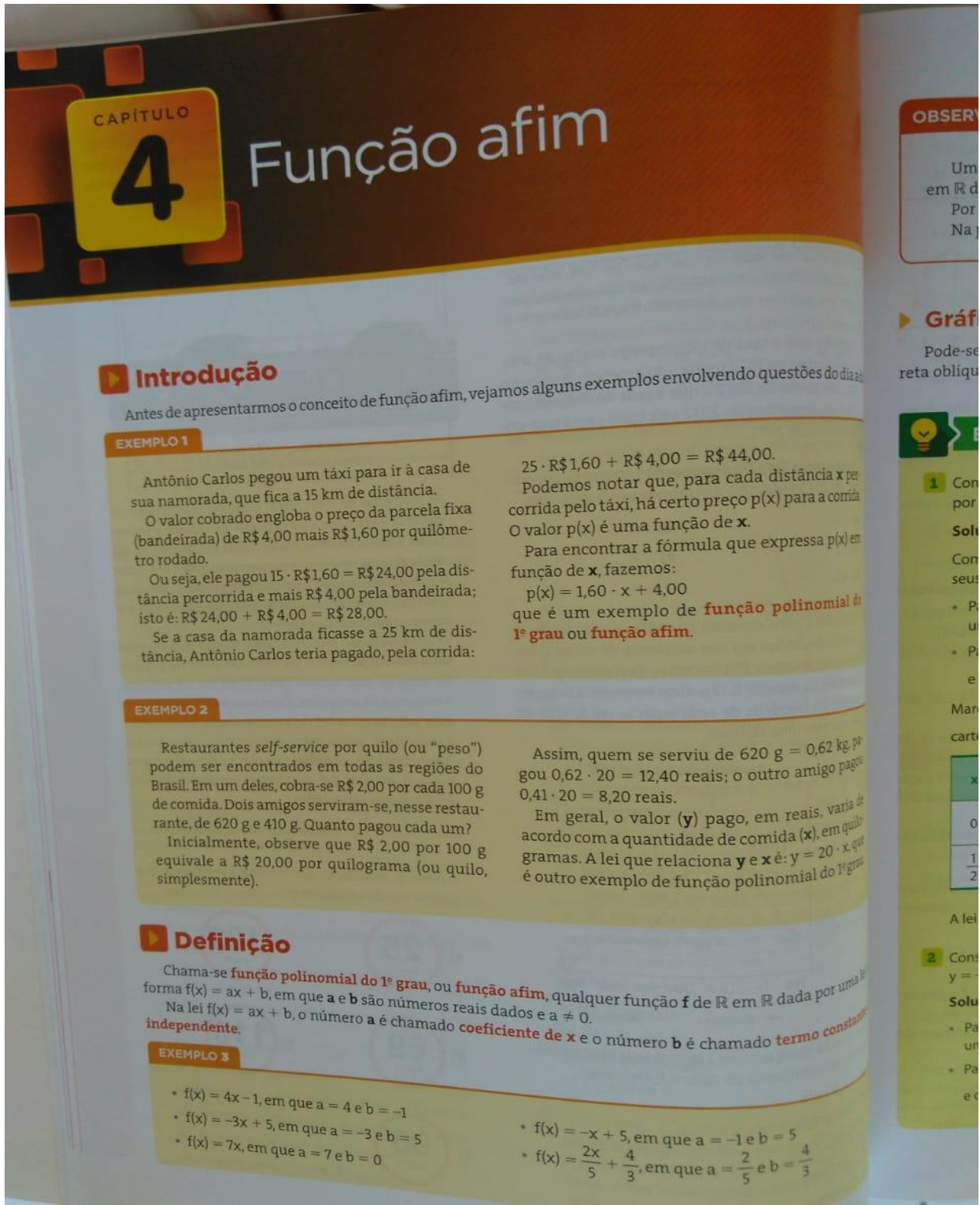
3. A FUNÇÃO AFIM EM SALA DE AULA

3.1 Análise de livro didático

Vejamos como é abordado o tema Função afim na 1ª série do ensino médio num livro de uma escola pública de João Pessoa- PB. Mostraremos, em seguida, a forma como são trabalhados estes conceitos pelo professor em sala de aula.

Na Figura 21, temos a imagem da página inicial do livro didático em que é abordado o conteúdo de Função Afim.

Figura 21. Livro Didático utilizado na pesquisa.



Podemos ver que o autor começa o tema função afim dando exemplos contextualizados, o que entendemos ser uma maneira adequada de começar, pois há autores que introduzem antes a definição formal, o que nos leva a crer, que estes prezam mais pelo rigor do formalismo.

Na medida em que apresenta os exemplos, o autor faz a discussão matemática dos dois problemas, indicando uma fórmula ou lei que relaciona as variáveis de cada caso. Em seguida, traz a definição de função afim, considerando o Domínio e Contradomínio sendo o conjunto dos números Reais. Aqui, é importante ressaltar que o exemplo da corrida do táxi está inadequado, pois a quantidade de quilômetros rodados é um número natural, e é variável discreta, o que geraria “saltos” no gráfico da distância percorrida versus valor pago.

Figura 22. Exercícios do Livro Didático

Gráfico

Pode-se mostrar que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy .

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Construir o gráfico da função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $y = 2x - 1$.

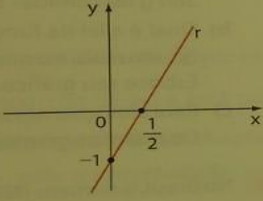
Solução:

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

- Para $x = 0$, temos $y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 2x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{2}$ e outro ponto é $(\frac{1}{2}, 0)$.

Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta (reta r).

x	y
0	-1
$\frac{1}{2}$	0



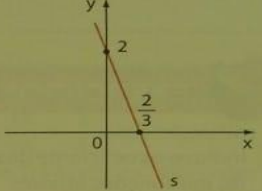
A lei $y = 2x - 1$ é a **equação da reta r**.

2 Construir o gráfico da função de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por $y = -3x + 2$.

Solução:

- Para $x = 0$, temos $y = -3 \cdot 0 + 2 = 2$; portanto, um ponto é $(0, 2)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = -3x + 2$; portanto, $x = \frac{2}{3}$ e outro ponto é $(\frac{2}{3}, 0)$.

x	y
0	2
$\frac{2}{3}$	0



A lei $y = -3x + 2$ é a **equação da reta s**.

3 Obter a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.

Solução:

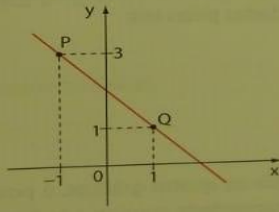
A reta \overline{PQ} tem equação $y = ax + b$. Precisamos determinar **a** e **b**.

Como $(-1, 3)$ pertence à reta, temos:
 $3 = a(-1) + b$, ou seja, $-a + b = 3$

Como $(1, 1)$ pertence à reta, temos:
 $1 = a \cdot 1 + b$, ou seja, $a + b = 1$

Assim, **a** e **b** satisfazem o sistema:
$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.



Ao tratar do gráfico da função afim, o autor aborda outro tema importante, a equação da reta, porém, sem antes dar algum argumento ou prova para o fato de que o gráfico da função afim é uma reta. Para esta demonstração, poderia ser trazido algo como semelhança de triângulos, pois é uma forma simples, de fácil aceitação, para obter esse resultado importante. São feitos cálculos usando o coeficiente angular sem antes ter falado de sua importância e significado ou aplicabilidade na Física ou Química, por exemplo.

Figura 23. Anotações realizadas pelos estudantes.

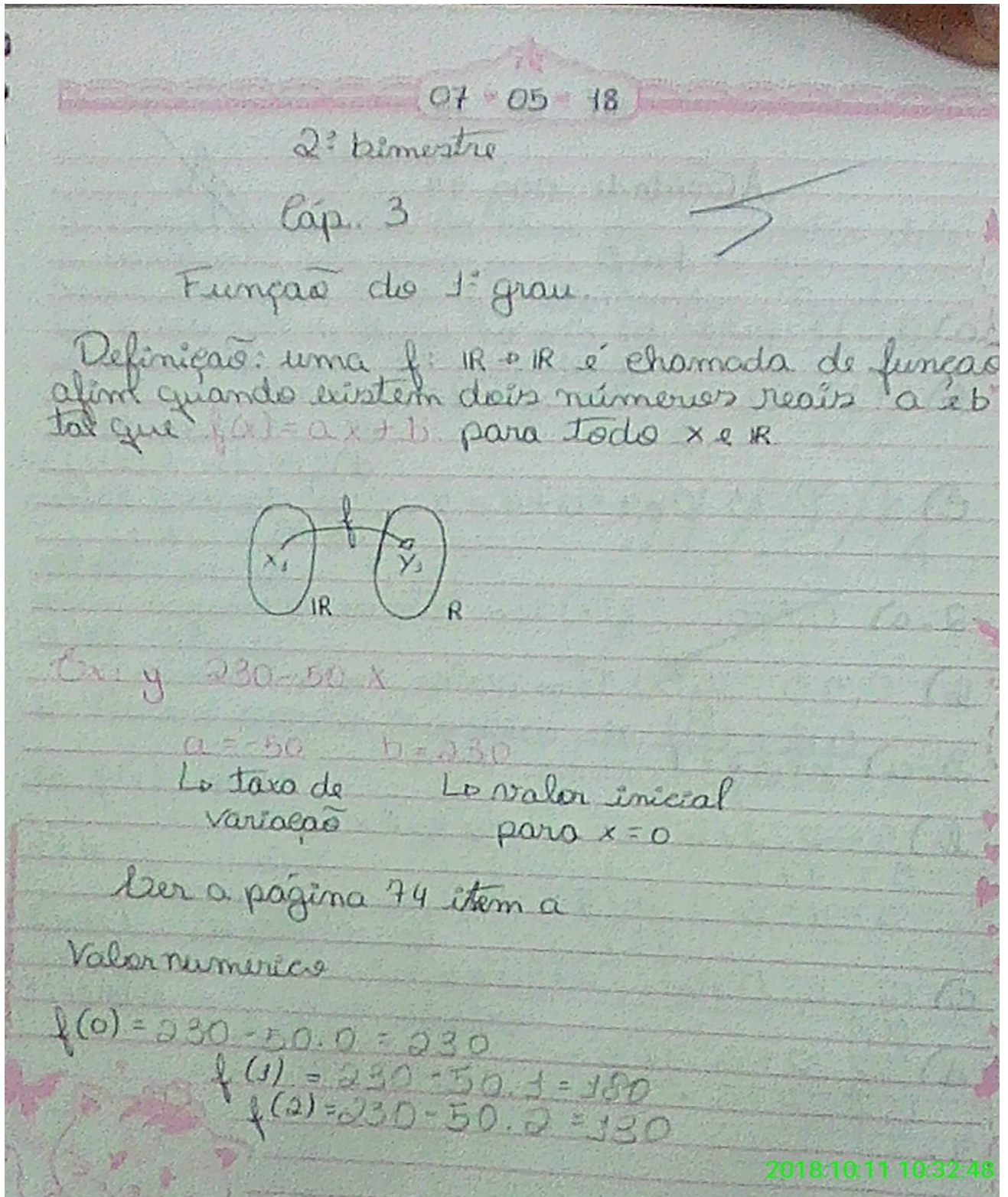
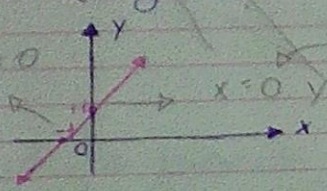


Figura 24. Revisão de prova de Matemática.

21 - 05 - 18

Revisão da Prova de Matemática

1. De acordo com o gráfico abaixo qual é a imagem do zero?



a) -1 c) 1

b) 0 d) 2

2. De acordo com a tabela abaixo quanto custa 10 cadernos.

Quantidade	Valor
1	R\$ 15,00
2	R\$ 30,00
3	R\$ 45,00
4	R\$ 60,00

a) 100 reais c) 150 reais

b) 200 reais d) 130 reais

3. Qual é o valor numérico de $f(0) + f(1)$ para $f(x) = 2x + 1$.

2018/10/11 10:34:52

Figura 25. Revisão de prova de Matemática

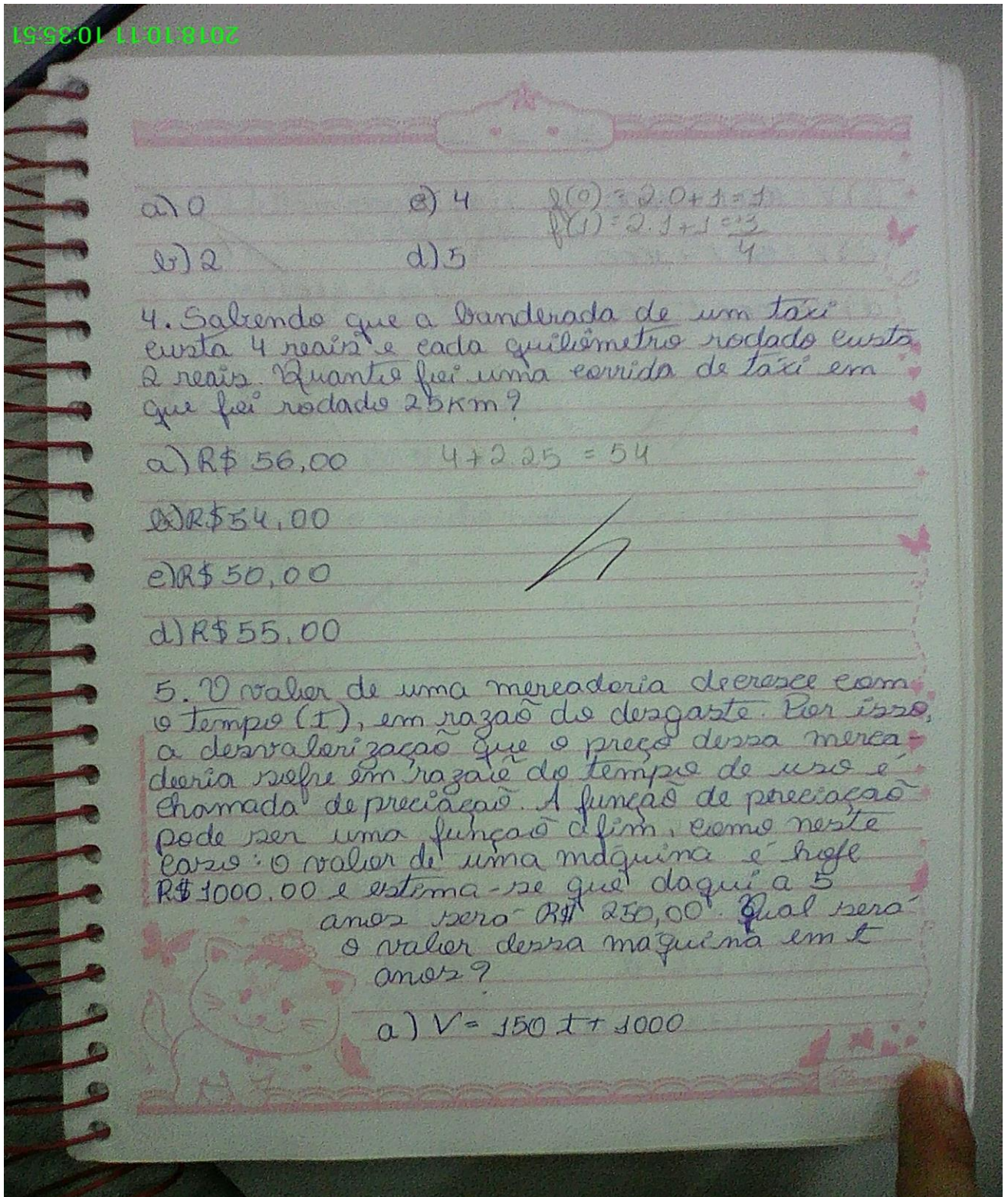
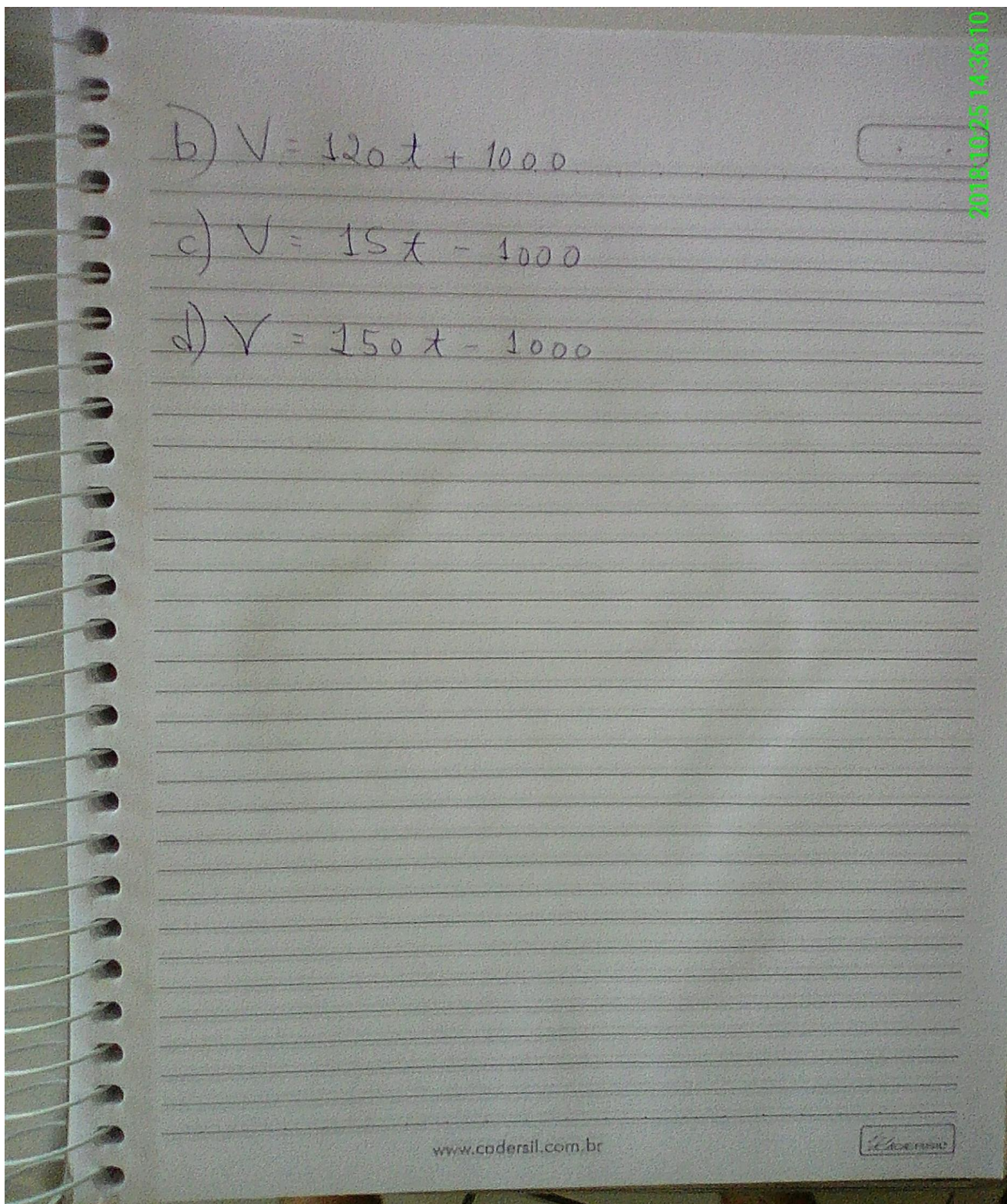


Figura 26. Anotações de estudante do 1º ano do Ensino Médio.



3.2 Observações das anotações das atividades realizadas em sala pelos alunos

Nas figuras 23 a 26 trazemos as imagens das anotações de estudantes do 1º ano do Ensino Médio, das aulas sobre função afim. Pode-se observar que o professor iniciou o conteúdo apresentando a definição (Figura 23), abordou alguns termos, os coeficientes, porém deveria ter optado por exemplos ilustrativos. Seus exercícios tratam a realidade, por exemplo, na questão 2 (Figura 24) que traz à tona uma tabela, que é uma forma de registro do conceito de função. O valor do preço de uma mercadoria em função do tempo de uso é apresentado na questão 5, cuja opção de resposta correta não foi encontrada, suposto erro de escrita pelo aluno ou professor, mas as opções encontram-se nas Figuras 25 e 26.

4. CONCLUSÃO

O Trabalho de conclusão de curso é uma atividade importante, fundamental, na vida de um acadêmico e de uma grande relevância no processo de formação profissional, pois ele nos possibilita repensarmos nossas atitudes em sala de aula, na maneira com a qual tratamos os temas trabalhados em matemática, como elaboramos uma metodologia para certa aula, momento. Por meio deste, pude aperfeiçoar conhecimentos adquiridos, como também obtive um aprendizado significativo, ao elaborar conceitos, aplicações, planejar situações que irão ser vividas em sala de aula, relativas ao conceito de função e, particularmente, ao conceito de função afim.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHAVES, M. I. A.; CARVALHO, H. C. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. **Formalização do conceito de função no ensino médio: Uma sequência de ensino-aprendizagem.** Recife, Julho 2004.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações.** Vol. 1. São Paulo. Editora Ática. 2000.

IEZZI, G. Et al. **Matemática Volume Único Primeira Parte.** 1ª Ed. São Paulo. Editora Saraiva, 2015.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** São Paulo. 1997.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.** Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

SILVA, J. P. A. **Funções afim e quadrática com auxílio do multiplano e blocos cúbicos.** João Pessoa. 2014.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of Exact Sciences.** vol. 16, n. 1, p. 37-85. 1976.

ZUFFI, E. M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função.** Educação Matemática em Revista. Ano 8, n° 9, 2011.

Sites utilizados

<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcao.htm>. Acesso em 14/08/2018.

<http://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/descartes-como-o-grego-chegou-ao-plano-cartesiano.htm>. Acesso em 16/08/2018.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu_Galilei. Acesso em 24/08/2018.

[http://pt.wikipedia.org/wiki/René_Descartes](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes). Acesso em 24/08/2018.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Acesso em 24/08/2018.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton. Acesso em 24/08/2018.

<http://www.infoescola.com/biografias/isaac-newton>. Acesso em 24/08/2018.

<http://www.infoescola.com/matematica/funcao-afim/>. Acesso em 25/08/2018.

[http://pt.wikipedia.org/wiki/François_Viète](http://pt.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te). Acesso em 06/09/2018.