

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Fases Geométricas de Estados Coerentes e Deslocados para Análogos dos Níveis de Landau

Jilvan Lemos de Melo

João Pessoa, Julho de 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Fases Geométricas de Estados Coerentes e Deslocados para Análogos dos Níveis de Landau

Jilvan Lemos de Melo

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, julho de 2014

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M528f Melo, Jilvan Lemos de.

Fases Geométricas de Estados Coerentes e Deslocados
para Análogos dos Níveis de Landau / Jilvan Lemos de
Melo. - João Pessoa, 2014.

94 f. : il.

Orientação: Claudio Benedito da Silva Furtado.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

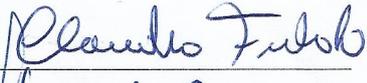
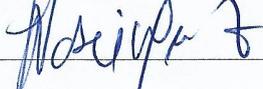
1. Análogos de Landau, Estados Coerente e Deslocados.
I. Furtado, Claudio Benedito da Silva. II. Título.

UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Jilvan Lemos de Melo**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

1 Aos trinta e um dias do mês de julho do ano de dois mil e quatorze, às 10h00, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da
5 Matéria Condensada, **Jilvan Lemos de Melo**. A comissão examinadora foi composta
6 pelos professores doutores: *Cláudio Furtado* (UFPB), orientador e presidente da banca
7 examinadora, *José Roberto Soares Nascimento* (UFPB), *Edvaldo Nogueira* (UFPB),
8 *Carlos Chesman Feitosa* (UFRN) e *Francisco Brito* (UFCG). Dando início aos trabalhos,
9 o Prof. *Cláudio Furtado* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir,
10 passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do
11 trabalho de tese intitulado “*Fases geométricas, estados coerentes e deslocados para*
12 *análogos dos níveis de randau*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela
13 Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado com distinção**”. Assim
14 sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor
15 em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo
16 de Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da
17 Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **31 de julho de 2014**.

18

Prof. Dr. Cláudio Furtado	
<i>Orientador - UFPB</i>	
Prof. Dr. José Roberto Soares Nascimento	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Edvaldo Nogueira	
<i>UFPB</i>	
Prof. Dr. Carlos Chesman Feitosa	
<i>UFRN</i>	
Prof. Dr. Francisco Brito	
<i>UFCG</i>	
Danilo Wilson Lemos Menezes	
<i>Secretário</i>	

19

Aos meus pais, irmãos, esposa e futuros filhos.

"Bons detetives sabem que toda tarefa, toda interação, por mais banal que ela pareça, tem o potencial de conter mil informações. Vivo minha vida alerta a essa possibilidade. Espero que os meus colegas façam o mesmo que eu. "

Sherlock Homes, Elementary.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Níveis de Landau e Análogos	5
1.1 Níveis de Landau	5
1.2 Análogos dos níveis de Landau para partículas neutras	7
1.2.1 Níveis de Landau-Aharonov-Casher	8
1.2.2 Níveis de Landau-He-McKellar-Wilkens	10
1.2.3 Níveis de Landau-Hei-Han-Wei	12
2 Estados Coerentes para Níveis Análogos de Landau	15
2.1 Estado Coerente do Oscilador Harmônico	15
2.2 Estado Coerente para Níveis de Landau-Aharonov-Casher	17
2.2.1 Estado Coerente para Níveis de Landau-Aharonov-Casher: I	18
2.2.2 Estados Coerentes para os Níveis Landau-Aharonov-Casher:II	21
2.3 Estados Coerentes dos Níveis Landau-He-McKellar-Wilkens	27
2.4 Estados Coerentes dos Níveis Landau-Wei-Han-Wei	32
3 Estados Deslocados para Níveis Análogos de Landau	37
3.1 Estado Deslocado do Oscilador Harmônico	37
3.2 Estados Deslocados para os Níveis Landau-Aharonov-Casher	40
3.3 Estados Deslocados para os Níveis Landau-He-McKellar-Wilkens	43
3.4 Estados Deslocados para os Níveis Landau-Wei-Han-Wei	46
4 Fase de Berry de Estados Deslocados dos Análogos de Landau	50
4.1 Fase de Berry	50

4.2	Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau Análogos	52
4.2.1	Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau-Aharonov-Casher	52
4.2.2	Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau-Hellmann-Wilken	56
4.2.3	Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau-Wei-Han-Wei	60
4.3	Proposta de Computação Quântica Holonômica	64
4.3.1	Computação Quântica Holonômica	64
4.3.2	Computação Quântica para Estados Deslocados de Níveis Análogos de Landau	66
	Conclusões	69
	Referências Bibliográficas	73

Lista de Figuras

4.1	Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle E_x e E_y no plano $E_x - E_y$	55
4.2	Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle E_y e λ no plano $E_y - \lambda^{-1/2}$	56
4.3	Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle B_x e B_y no plano $B_x - B_y$	59
4.4	Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle B_y e Φ no plano $B_y - \Phi^{-1/2}$	59
4.5	Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle E_x e E_y no plano $E_x - E_y$	63
4.6	Caminhos possíveis da evolução adiabática no espaço tridimensional de parâmetros.	64

Agradecimentos

De início agradeço ao meu Deus pai todo poderoso e aos meus irmãos de luz que me acompanharam em toda a minha jornada. Minha família, que nessa há sempre uma certeza de segurança, força e amor para os momentos bons, ruins e para os confusos também. Minha esposa, Laiz, por toda dedicação, compreensão, parceria e amor os quais são disponibilizados para mim todos os dias e também pessoa que me ensina sobre amor em todas as oportunidades em que estamos juntos. Minha mãe, Alvacélia, que sempre procura por notícias minhas e não deixa de mostrar preocupação e a torcida para que o sucesso chegue junto com todo o seu amor. Meu pai, Jose Valdo, que pensa, se preocupa, torce e ama do seu jeito. Meus irmãos, Júnior e Kleyton, esses que são os outros dois integrantes de um time de três que quando juntos sinto que podemos "dominar o mundo", com o direito de todo o exagero. Esses sempre tem palavras de otimismo, força, ânimo e amor para mim. Aos familiares da minha esposa, dos meus irmãos e dos meus pais que sempre me desejaram votos de vitórias e conquistas. Agradeço também aos irmãos que não são de sangue, mas são tão irmãos quanto. São eles os que emprestam os ouvidos para que eu desabafe, e que tentam no momento certo aconselhar, procuram sempre que possível ajudar em problemas acadêmicos, financeiros, pessoais ou até ajudam tomar aquela cerveja que não pode ser tomada sozinho nas praças, apartamentos ou bares da vida e também no jogo de bola, na corrida, no treino de jiu-jitsu, no jogo de xadrez e etc. Por haver tantos nomes que não caberiam aqui, prefiro não citar-los mas pedir que lembrem em quais momentos citados acima estavam presentes e então saberão a importância que tiveram na minha caminhada. Houveram pessoas também que mesmo só as vendo na universidade tiveram papel importante nessa historia: Sr. Mariano, que sempre tinha uma conversa boa, muita experiência para contar e nos ensinar, e aquele cafezinho feito com muito carinho e dedicação; Dona Nazaré, que é sempre uma presença de graça, gentileza e bondade no departamento; Danilo, o cara sempre disposto a discutir as questões quase filosóficas, morais e sociais das atitudes humanas enquanto prontamente me atendia na secretaria; O pessoal da limpeza e da segurança que procuravam deixar o nosso departamento o mais limpo, seguro e agradável possível, e até faziam como o José, que diversas vezes me emprestou a bicicleta para problemas inesperados. Por fim, aos professores do departamento que sempre se mostraram dispostos a me ouvir e me

aconselhar em questões acadêmicas. Para esses tenho alguns nomes: Cláudio Furtado, meu orientador que terei suas lições sempre no meu caderno de tarefas do dia; Inácio Pedrosa, professor amigo que mostra como pode ser bom tanto na vida acadêmica quanto no convívio com as pessoas; Sérgio Azevedo, meu considerado orientador, na área de nanoestruturas, o qual me permitiu ampliar meu conhecimento e que por isso possui minha gratidão; Carlos Pires e Paulo Sérgio os quais sempre me permitiram ser um intruso das suas reuniões de grupo; e aos professores que representam para mim tudo de bom que a experiência pode trazer, Carlos Romero, Eugênio Melo, Edvaldo Nogueira, Fernando Moraes, Jason Gallas e outros.

Por fim, digo a todos os nomes citados acima e os que não foram citados, mas percebem a sua colaboração na minha caminhada, "que fique registrado o meu mais profundo e justo agradecimento, Muito Obrigado!!!".

Resumo

Nesta tese, fazemos uma revisão dos níveis de Landau, estados coerentes e estados deslocados para o oscilador harmônico, e fase de Berry. Obtemos os auto estados para os níveis análogos de Landau para partículas neutras, através do formalismo de operadores que facilitam muito a construção de estados coerentes e deslocados dos sistemas citados. Os níveis de Landau análogos estudados são os chamados i) Landau-Aharonov-Casher, partícula neutra com dipolo magnético permanente, ii) Landau-He-McKellar-Wilkins, partícula neutra com dipolo elétrico permanente e iii) Landau-Wei-Han-Wei, partícula neutra com dipolo elétrico induzido. Para tais sistemas é construído os estados coerentes e também é feita uma comparação de tais estados com os estados padrões dos sistemas. Por fim, discute-se as diferenças entre os próprios estados coerentes dos sistemas análogos de Landau. Além disso, obtêm-se os estados deslocados dos mesmos três sistemas, os quais rendem comparações e discussões relativo ao estado deslocado padrão. Análises também são feitas sobre as diferentes propriedades dos estado deslocados dos níveis análogos relativo aos seus estados coerentes e auto estados. Por fim, são calculadas as fases de Berry para os estados deslocados usando como parâmetros de controle, os campos externos ou suas especificações. Com isso, foi obtido holonomias com características importantes para aplicação em computação quântica. É discutido a obtenção de fases de Berry abelianas e não abelianas.

Palavras Chaves: Níveis de Landau, Landau-Aharonov-Casher, Landau-Hr-McKellar-Wilkins, Landau-Wei-Han-Wei, Estados Coerentes, Estados Deslocados e Fases de Berry.

Abstract

In this thesis, we review the Landau levels, the coherent and displaced states for the harmonic oscillator, and Berry phase. We obtain the eigenstates for analogous Landau levels of neutral particles through the formalism of operators that become easier the construction of coherent states and displaced the mentioned systems. The analogous Landau levels shown here are the called i) Landau-Aharonov-Casher, neutral particle with permanent magnetic dipole, ii) Landau-He-McKellar-Wilkens, neutral particle with permanent electric dipole and iii) Landau-Wei-Han-Wei, neutral particle with induced electric dipole. For such systems was constructed coherent states and it was also made a comparison of such states with the standard states of the systems. And the differences between the coherent states of the analogous Landau levels was discussed. Displaced states for the three analogous systems was also obtained, which yield comparisons and discussions relative the standard displaced state. Analyses were also made about the properties of the displaced state of the analogous levels and both their coherent and number states. Finally are calculated Berry phases of the displaced states of the study systems using as control parameters, external fields and others specifications of the systems. No abelian and abelian Berry phases are obtained and discussed too.

Keywords: Landau levels, Landau-Aharonov-Casher levels, Landau-He-McKellar-Wilkens levels, Landau-Wei-Han-Wei levels, Coherent states, Displaced states and Berry Phase.

Introdução

No estudo de sistemas quânticos a obtenção dos estados e espectros de energia dos sistemas é, na maioria das vezes, o mais importante e desejado. Quando isso é obtido de forma a deixar claro propriedades relevantes do sistemas, se torna muito mais fácil analisar as possíveis aplicações desses sistemas. Por esse motivo algumas descrições são muito úteis em especial no contexto de sistemas quânticos. Em 1963, buscando discutir as estatísticas de fótons de campos arbitrários em termos totalmente mecânicos-quânticos e manter claramente o limite clássico da eletrodinâmica quântica foi introduzido e usado o conceito de estados coerentes com base na simples propriedade de que tais estados fossem auto estados do operador aniquilação [1]. Tais estados já tinham sido estudados anos antes por Schroedinger pensando-os como estados com propriedades de conexão entre a mecânica clássica e quântica, apenas ganhando nome e notoriedade com os outros trabalhos [1–3]. No trabalho de Glauber, [1], um estado coerente é definido como: i) é um estado que minimiza a relação de incerteza; ii) é um auto estado de um operador aniquilação; iii) decorre do estado de vácuo por meio da ação do operador de deslocamento. Hoje, os estados coerentes já são estudados em sistemas mesoscópicos [4], sistemas de matéria condensada [5] e também em sistemas com dependência temporal [6–8], além de ainda se manterem muito presentes em sistemas ópticos [1–3,9], área que os fez conhecidos por descreverem tão bem o *LASER*. *LASER*, abreviação de "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" que significa Amplificação da Luz por Emissão Estimulada de Radiação, é um dispositivo que cria e amplifica um intenso feixe de luz monocromático (contém exatamente uma cor ou comprimento de onda), coerente (a luz liberada é organizada e bem definida) e colimado (propaga-se como um feixe), o que faz a luz emitida por um laser ser bastante intensa. Os estados coerentes são tão usados devido à diferentes e importantes propriedades que se tornam ótimas ferramentas para descrição de vários sistemas [10]. Dentre tantas propriedades podemos destacar a sua não ortogonalidade e a forte conexão com o comportamento clássico do sistema.

Em trabalhos da década de 1950 foi investigado a existência de estados quânticos que, como os estados coerentes, também conectavam-se com o comportamento clássico e assim foi descoberto que os chamados estados número deslocados seguem possuem essa mesma característica e mantém a forma do seu pacote de onda [11–15]. Tais estados são

estados mais gerais que o estado coerente, o qual é um caso particular. No entanto, só em 1985 no qual fez-se uma descrição teórica do chamaram de estados altamente não-clássicos do oscilador harmônico através da ação do operador de deslocamento no estados de Fock [16], tais estados ganharam a atenção da comunidade científica. Esses estados foram denominados de estados de Fock deslocados ou apenas estados deslocados [17–19]. Nos últimos anos, uma grande quantidade de aplicações dos estados deslocados têm sido investigados em diferentes sistemas físicos [18, 20–26]. Com exemplo, temos as investigações experimentais das correlações Einstein-Podolski-Rosen feitas em [27, 28] baseado em representação de função de Wigner em estados deslocados, e também a descrição de circuitos mesoscópicos [29]. Recentemente, os estados deslocados também têm sido utilizados para quantização de Landau [30, 31], fazendo análise das novas propriedades que tais estados possuem em diferença ao sistema original [32] e onde também são obtidas as fases quânticas geométricas [33]. Também tem-se trabalhos onde os estados coerentes são estudados para quantização de Landau [34–36], em especial no contexto da formulação matemática e suas generalizações [37].

A quantização de Landau deriva da interação entre partículas carregadas sob ação de um campo magnético uniforme, perpendicular ao plano que as partículas de movem. A quantização de Landau, consiste assim em um conjunto de níveis de energia discretos caracterizados pela degenerescência infinita de cada nível de energia. Nos dias atuais, a quantização de Landau tem um papel importante em estudos sobre o efeito Hall quântico [38], anyons excitações em uma rotação de Bose-Einstein [39, 40] e homogêneo espaço curvo [41–43]. Recentemente, iniciou-se um interesse por análogos da quantização de Landau, em especial, para sistemas com partículas neutras. Um primeiro exemplo foi o trabalho de Ericsson e Sjöqvist o qual, com base no efeito Aharonov-Casher [44], considerou um sistema de uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético permanente e propôs as condições para que a quantização de Landau análoga existisse [45]. Tal quantização é chamada de quantização Landau-Aharonov-Casher. Tem-se também outra quantização de Landau análoga, na qual foi considerada uma partícula neutra com um momento de dipolo elétrico permanente e, com base no efeito He-McKellar-Wilkens [46, 47], mostrou as considerações necessárias para que se obtenha tal quantização, que é chamada quantização Landau-He-McKellar-Wilkens [48]. Além disso, um outro sistema baseado em uma efeito similar ao He-McKellar-Wilkens, mas agora elaborado para dipolo elétrico induzido [49], proporcionou um outra quantização de Landau análoga [50], que é denominada quantização de Landau-Wei-Han-Wei. Outros análogos da quantização de Landau envolvendo momentos de dipolo elétrico e quadruplo elétrico também têm sido investigados [51–54].

Além da quantização de Landau existem outros efeitos quânticos que vem chamando a atenção da comunidade científica a algum tempo. Um desses efeitos é o aparecimento de fases quânticas em sistemas diversos. Como no efeito Aharonov-Bohm [55], no qual

uma partícula carregada ao se mover ao redor de um fluxo magnético adquire uma fase em sua função de onda. Efeitos análogos também ocorrem para partículas neutras, para os efeitos Aharonov-Casher [44], He-McKellar-Wilkens [46, 47], Wei-Han-Wei [49] e até análogos gravitacionais [56]. Foi mostrado que as fases adquiridas em tais efeitos podem ser consideradas casos especiais de uma fase mais geral, chamada Fase de Berry [57, 58], que consiste em uma fase adquirida pela função de onda de uma partícula quântica em uma evolução cíclica adiabática. Porém, até mesmo a fase de Berry é um caso específico de uma fase mais geral chamada fase geométrica [59]. A fase de Berry é uma fase geométrica adquirida quando se considera a aproximação adiabática. Nas últimas décadas, a fase de Berry foi generalizada para o caso de uma evolução não-adiabática [60] e as fases não-abelianas [61]. Em ambos os casos, a fase depende apenas da natureza geométrica do percurso ao longo do qual o sistema evolui. Várias experiências têm relatado o aparecimento de fases geométricas adiabáticas e não-adiabáticas, por exemplo, em sistemas com fótons [62, 63], nêutrons [64] e spins nucleares [65]. A computação quântica [66–68] é uma das frentes de pesquisa atuais que foram fortemente influenciadas pela aplicação das fases geométricas. Foi criado uma subárea da computação quântica chamada de computação quântica holonômica [69–73], a qual faz uso das fases geométricas para obter portas lógicas quânticas e assim tornar possível a manipulação das informação quântica presente nos sistemas quânticos.

Shen em 2004, investigou, de um ponto de vista teórico, o surgimento da fase de Berry em uma série de problemas no espaço curvo [74, 75] e em 2013, Bakke e Furtado, estudaram o surgimento de uma fase geométrica abeliana na dinâmica quântica relativística e não-relativística de uma partícula neutra devido à presença de uma deslocação [76]. Em 2007, foram calculadas fases de Berry abelianas e não-abelianas para estados deslocados dos níveis de Landau [33].

Com isso, propomos nesse trabalho obter os estados coerentes para os sistemas de partículas neutras, análogos ao sistema de Landau. Seguidos da construção dos estados deslocados de tais sistemas. Os sistemas de partículas neutras analisados são os que as partículas possuem dipolo magnético permanente, dipolo elétrico permanente e dipolo elétrico induzido, os denominados sistemas de Landau-Aharonov-Casher, Landau-He-McKellar-Wilkens e Landau-Wei-Han-Wei, respectivamente, como já dito anteriormente. E depois de obtidos os tais estados coerentes e deslocados também foi analisado as suas propriedades e particularidades visando possíveis aplicações.

A aplicação de foco desse trabalho é feita depois do cálculo das fases de Berry para os estados deslocados dos análogos de Landau. É analisado também características geométricas das fases de cada sistema, junto com os principais fatores que determinam as diferenças entre tais fases. E assim uma possível aplicação da fase de Berry é feita no contexto da computação quântica holonômica.

Nesta tese, apresentamos brevemente o sistema de Landau e seus análogos no primeiro

capítulo através do formalismo analítico para obtenção de função de onda e espectro de energia. No segundo capítulo, é feita uma breve revisão dos estados coerentes para o oscilador harmônico. E depois é obtido os auto estados e auto valores dos sistemas análogos de Landau por formalismos de operadores para facilitar a obtenção dos estados coerentes para tais sistemas, objetivo também cumprido no segundo capítulo junto com a demonstração das propriedades de tais estados. Estados deslocados de oscilador harmônico tem uma discussão sucinta no início do terceiro capítulo, o qual segue reforçando a obtenção dos auto estado e auto valores dos sistemas análogos de Landau pelo formalismo de operadores, para que a construção dos estados deslocados de tais sistemas seja facilitada e as propriedades de tais estados sejam discutidas. Por fim, é mostrado no quarto capítulo, uma descrição curta das fases de Berry de sistemas quânticos seguida da obtenção das fases de Berry abelianas e não abelianas para os estados deslocados dos sistemas de Landau análogos. Em conjunto é feita uma análise nas diferenças de tais fases para cada sistema. No que segue, faz-se uma possível aplicação de tais fases, em especial a fase de Berry para o estado deslocado Landau-Aharonov-Casher, no contexto da computação quântica holonômica. Por fim é apresentado o capítulo de conclusão.

Capítulo 1

Níveis de Landau e Análogos

Neste capítulo faremos uma revisão da quantização do sistema de Landau, o qual consiste em uma partícula carregada em meio a campo magnético uniforme e constante [30, 31, 34, 77, 78]. Para o sistema de Landau são encontradas as auto funções e os auto valores através da resolução da equação de Schroedinger. Esses resultados descrevem os chamados Níveis de Landau que possuem características específicas que serão apresentadas e discutidas a seguir. Apesar, do fato de tal sistema ser um dos mais simples de serem estudado no âmbito da Mecânica Quântica, a sua quantização foi de fundamental importância para a Física do Estado Sólido, pois com sua descrição foi possível descrever outros efeitos quânticos muito utilizados hoje em dia em experimentos e laboratórios por todo o mundo, por exemplo, o efeito Hall quântico [38].

Será feito também uma revisão dos chamados níveis de Landau-Aharonov-Casher [45], Landau-He-McKellar-Wilkins [48] e Landau-Wei-Han-Wei [50], que são níveis análogos de Landau, como será mostrado, para sistemas de átomos neutros com momentos de dipolos interagindo com campos eletromagnéticos. Para essa tese a revisão dos três últimos sistemas é de extrema importância devido às aplicações aqui presentes terem sido feitas em tais sistemas.

1.1 Níveis de Landau

Nesta seção, apesar da quantização de Landau [30, 34] ser um problema já muito conhecido e estar presente em vários livros textos [31, 77–79], o revisaremos pois ele será base para os estudos dos outros sistemas. O sistema de Landau consiste em um elétron interagindo com um campo magnético constante e uniforme. Faremos tal estudo considerando o campo magnético na direção de z , $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. O hamiltoniano desse sistema é

dado por

$$H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m}, \quad \text{onde } \vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad (1.1)$$

obtido através do acoplamento mínimo, $\vec{p} \rightarrow \vec{\pi}$, onde m é a massa do elétron, \vec{A} é o potencial vetor do campo magnético, e é a carga da elementar e c a velocidade da luz. Devido a liberdade de gauge, pode-se usar várias formas funcionais de \vec{A} para obter o campo magnético presente no sistema. Os gauges mais comuns na literatura [30,31,77,78] são, $\vec{A} = -B_0y\hat{i}$ ou $\vec{A} = -B_0x\hat{j}$, chamados gauge de Landau e $\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y\hat{i}+x\hat{j})$, chamado gauge simétrico. Apesar de que para qualquer escolha do gauge o campo magnético ser o mesmo é percebido uma maior simetria na escolha do gauge simétrico [34]. Assim, o usaremos para a nossa revisão e em toda a tese.

Devido a simetria cilíndrica presente no gauge simétrico normalmente ele é apresentado em coordenadas cilíndricas, $\vec{A} = \frac{B_0}{2}\rho\hat{\phi}$. Na representação de coordenadas, onde $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, o hamiltoniano em coordenadas cilíndricas é dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i e B_0}{\hbar 2c} \rho \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (1.2)$$

Como podemos perceber o Hamiltoniano acima não apresenta dependências em t , z ou ϕ . Tal fato tem como consequência a conservação da energia, E , do momento linear em z , p_z , e da componente do momento angular na direção de z , $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}$. Com isso a auto função do Hamiltoniano possui a forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp \left[i \left(\ell\phi + k_z z - \frac{E}{\hbar} t \right) \right] \psi(\rho) \quad (1.3)$$

com $\hbar\ell$ e $\hbar k_z$ sendo os auto valores de L_z e p_z , respectivamente. Devido a simetria angular apresentada pelo sistema, ℓ deve apresentar apenas valores inteiros, ou seja, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Enquanto isso, k_z pode apresentar qualquer valor real. Por ser de interesse desse estudo apenas as dinâmicas bi-dimensões, podemos considerar os casos em que $k_z = 0$, consideração essa que usaremos em todos os outros sistemas também.

Com as considerações apresentadas até aqui, a equação de Schroedinger dependente do tempo, $H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$, pode ser escrita da forma que segue

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \left(\frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2} \rho^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{m\omega\ell}{\hbar} - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

onde $\omega = \frac{eB_0}{mc}$, a qual é a frequência de oscilação de movimento clássico correspondente ao sistema, chamada também de frequência ciclotrônica.

A equação diferencial acima é facilmente resolvida depois de feita a mudança de va-

riável $\xi = \frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2$ e o "envelopamento" $\psi(\xi) = \xi^{|\ell|/2}e^{-\xi/2}F(\xi)$. Tal "envelopamento" é encontrado ao estudar o comportamento assintótico da equação e sua solução. $F(\xi)$ possui como solução as funções hipergeométricas confluentes, ${}_1F_1(a, c; \xi)$, com

$$a = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \left(\ell - \frac{2E}{\hbar\omega} \right) \quad \text{e} \quad c = |\ell| + 1 \quad (1.4)$$

A função hipergeométrica confluyente possui solução assintótica dada por

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} {}_1F_1(a, c; \xi) \approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \xi^{a-c} e^{\xi}, \quad (1.5)$$

o que faz com que $\psi(\xi)$ apenas seja quadrado integrável para valores específicos de a , os quais são $a = -\eta$ com $\eta = 0, 1, 2, \dots$. Aqui fica explícito a quantização da energia desse sistema, pois com essa condição, $\eta \in \mathbb{N}$, e (1.4) obtemos a energia dada por

$$E_{\eta, \ell} = \hbar\omega \left(\eta + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.6)$$

Observa-se um comportamento interessante nos níveis de energia para diferentes intervalos de ℓ . A energia é dada por

$$E_{\eta, \ell} = \begin{cases} \hbar\omega \left(\eta + \frac{1}{2} \right), & \text{para } \ell \leq 0, \\ \hbar\omega \left(\eta + |\ell| + \frac{1}{2} \right), & \text{para } \ell > 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

A equação acima mostra que para um específico valor de energia $E_{\eta, \ell}$, pode-se ter um valor de η como infinitos valores de $\ell \leq 0$ ou uma combinação de $\eta + |\ell|$, $\ell > 0$, que gere a mesma energia. Tal característica deixa explícita a degenerescência infinita nos níveis de Landau.

As auto funções do Hamiltoniano são

$$\Psi_{\eta, \ell}(\phi, \xi, t) = C_{\eta, \ell} \exp \left[i \left(\ell\phi - \frac{E_{\eta, \ell} t}{\hbar} \right) \right] \xi^{|\ell|/2} e^{-\xi/2} {}_1F_1(-\eta, |\ell| + 1; \xi)$$

onde $C_{\eta, \ell}$ é a constante de normalização.

1.2 Análogos dos níveis de Landau para partículas neutras

Nesta seção apresentamos quantização de Landau para partículas neutras com momentos de dipolos magnético e elétrico permanentes e também com momento de dipolo elétrico induzido.

1.2.1 Níveis de Landau-Aharonov-Casher

Baseado na interação presente no efeito Aharonov-Casher [44], foi apresentado em [45] a descrição quântica de uma partícula neutra que interage com um campo elétrico via momento de dipolo magnético. A proposta de tal trabalho era criar a possibilidade de obter e estudar o efeito Hall quântico atômico.

Para o estudo de tal sistemas consideremos uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente, que se move na presença de um campo elétrico. Para obter uma quantização análoga aos níveis de Landau, chamados níveis de Landau-Aharonov-Casher, deve-se encontrar níveis de energia, explicitar suas degenerescências e escrever as funções de onda, para que possa observar a semelhança com os níveis de Landau. Condições precisas na configuração de campo e dipolo devem ser obedecidas para o objetivo ser alcançado [45].

Esse sistema é descrito, no limite não-relativístico [80], pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{(\vec{\mu} \times \vec{E})}{c^2} \right]^2 + \frac{\mu \hbar}{2mc^2} \nabla \cdot \vec{E} \quad (1.8)$$

com $\vec{\mu} = \mu \hat{n}$ sendo o momento de dipolo magnético, onde μ é componente do momento de dipolo magnético na direção do versor \hat{n} . Pode-se observar em (1.8) uma certa analogia ao acoplamento mínimo de uma partícula carregada na presença de um campo magnético. Assim, pode-se definir um potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{AC} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (1.9)$$

Tal potencial vetor efetivo quando escolhido $\hat{\mu} = \hat{k}$ e o campo elétrico dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2} \rho \hat{\rho}, \quad (1.10)$$

onde λ é uma densidade volumétrica de cargas elétricas, obtemos o gauge simétrico

$$\vec{A}_{AC} = \frac{\lambda}{2c^2} \rho \hat{\phi} \quad (1.11)$$

Seguindo a analogia definimos também o campo magnético associado, dado por

$$\vec{B}_{AC} = \frac{\lambda}{c^2} \hat{k}. \quad (1.12)$$

O campo magnético associado é constante e uniforme como no caso do campo magnético do sistema de Landau.

Essa configuração de campo, com o movimento da partícula restrito ao plano x-y, satis-

faz as condições para que ocorra um análogo dos níveis de Landau. Tais condições foram demonstradas em [45] e são: i) B_{AC} uniforme, ii) ausência de torque sobre a partícula e iii) regime eletrostático.

Usando a configuração de campo (1.11) e (1.10), escrevemos o Hamiltoniano do sistema, em coordenadas cilíndricas, na forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i \mu \lambda}{\hbar 2c^2} \rho \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \quad (1.13)$$

onde definimos a frequência ciclotrônica, dada por

$$\omega_{AC} = \frac{\mu \lambda}{mc^2} = \sigma \frac{|\mu \lambda|}{mc^2} \quad (1.14)$$

com $\sigma = \text{sin}(\mu \lambda) = \pm 1$ rotulando o sentido do movimento clássico de rotação da partícula. O Hamiltoniano (1.13) tem características similares à Hamiltoniana (1.2), por exemplo a não dependência explícita de ϕ , z e t . Tal característica resulta em uma conservação dos momentos linear e angular na direção de z e da energia. Com isso a função de onda pode ser escrita por $\Psi(\vec{r}, t) = \exp[i(\ell\phi - \frac{E}{\hbar}t)] \psi(\rho)$ podendo então a equação de Schroedinger obter a forma

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \left(\frac{m^2\omega_{AC}^2}{4\hbar^2} \rho^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{m\omega_{AC}\ell}{\hbar} - \frac{2m\tilde{E}}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.15)$$

onde $\tilde{E} = E - \frac{\hbar\omega_{AC}}{2}$. Visto que a equação (1.15) é muito parecida com a equação (1.4), percebendo as presenças de ω_{AC} e \tilde{E} no lugar de ω e E respectivamente, temos que a sua solução é

$$\Psi_{\eta,\ell}(\phi, \xi, t) = C_{\eta,\ell} \exp \left[i \left(\ell\phi - \frac{E_{\eta,\ell}t}{\hbar} \right) \right] \xi^{|\ell|/2} e^{-\xi/2} {}_1F_1(-\eta, |\ell| + 1; \xi), \quad (1.16)$$

onde $\xi = (m|\omega_{AC}|/2\hbar)\rho^2$, e os autovalores de energia são

$$E_{\eta,\ell} = \hbar|\omega_{AC}| \left[\eta + \frac{|\ell| - \sigma\ell}{2} + \frac{(\sigma + 1)}{2} \right] \quad (1.17)$$

onde $\eta = 0, 1, 2, \dots$ e os valores de ℓ explicitam a degenerescência dos níveis de Landau.

Igual aos níveis de Landau, os níveis de Landau-Aharonov-Casher também são infinitamente degenerados e independem do centro das órbitas, mas é observado uma dependência dos autovalores de energia em relação ao sentido de rotação do sistema clássico correspondente representado por σ . Ou seja, para $\sigma = -1$ temos

$$E_{\eta,\ell} = \begin{cases} \hbar|\omega_{AC}|\eta, & \text{para } \ell \leq 0, \\ \hbar|\omega_{AC}|(\eta + |\ell|), & \text{para } \ell > 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

e para $\sigma = +1$ temos

$$E_{\eta,\ell} = \begin{cases} \hbar|\omega_{AC}|(\eta + |\ell| + 1), & \text{para } \ell \leq 0, \\ \hbar|\omega_{AC}|(\eta + 1), & \text{para } \ell > 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Isso mostra um comportamento bem diferente dependendo dos sentidos do dipolo magnético e do campo elétrico.

1.2.2 Níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins

Nessa seção voltamos nossa atenção para a dinâmica quântica de um dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo. O estudo é similar a procedimento feito na seção anterior, para os níveis de Landau-Aharonov-Casher [45], via equação de Schroedinger. Vamos usar a interação descrita pelo efeito He-McKellar-Wilkins [46, 47], onde um dipolo elétrico interage com um campo magnético, e descrevemos outro nível análogo dos níveis de Landau, que denominaremos os níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins. Vamos considerar um sistema formado por uma partícula neutra que possui momento de dipolo elétrico, $\vec{d} = d\hat{n}$, não nulo. Essa partícula se move na presença de um campo magnético externo \vec{B} . De mesma maneira que o caso do dipolo magnético, sob algumas condições para a configuração campo-dipolo temos uma quantização similar a dos níveis de Landau. Usemos então um campo magnético não usual

$$\vec{B} = \frac{\Phi}{2}\rho\hat{\rho} \quad (1.20)$$

onde Φ é uma densidade de cargas magnéticas. Tal configuração de campo com um campo magnético cilíndricamente radial é muito difícil de realizar experimentalmente, pois assim seria necessário, a priori, uma distribuição de cargas magnéticas relacionada a Φ . Entretanto, alguns autores afirmam que esse tipo de configuração pode ser obtido experimentalmente em arranjos especiais [81–84].

O Hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica do dipolo elétrico, na presença de um campo elétrico externo é dada por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - d(\hat{n} \times \vec{B}) \right]^2 + \frac{d\hbar}{2m} \nabla \cdot \vec{B} H_{deHMW} \quad (1.21)$$

onde d é a componente do dipolo elétrico na direção de \hat{d} , que por conveniência escolhemos paralela ao eixo z . Como para o sistema Aharonov-Casher, podemos definir o potencial vetor por

$$\vec{A}_{HMW} = \hat{n} \times \vec{B}. \quad (1.22)$$

Com a configuração de campo (1.20), obtem-se o gauge simétrico

$$\vec{A}_{\text{HMW}} = \frac{\Phi}{2} \rho \hat{\phi} \quad (1.23)$$

Como na seção anterior obtemos um campo magnético associado ao potencial vetor (1.22) dado por

$$\vec{B}_{\text{HMW}} = \Phi \hat{k} \quad (1.24)$$

Nota-se que d para esse sistema tem o papel de uma constante de acoplamento [85]. Deve-se estabelecer as mesmas condições, definidas em [45], para existência dos níveis de Landau. Na configuração de campo estabelecida acima, a condição para ausência de torque sobre o dipolo é satisfeita desde que o movimento da partícula seja no plano $x - y$. As condições para \vec{B}_{HMW} uniforme e constante já foram satisfeitas pela escolha do gauge. Então escrevemos a equação de Schroedinger

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \left(\frac{m^2\omega_{\text{HMW}}^2}{4\hbar^2} \rho^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{m\omega_{\text{HMW}}\ell}{\hbar} - \frac{2m\tilde{E}}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.25)$$

onde

$$\tilde{E} = E - \frac{\hbar\omega_{\text{HMW}}}{2} \quad (1.26)$$

e

$$\omega_{\text{HMW}} = -\frac{\Phi d}{m} = \sigma \frac{|\Phi d|}{m}. \quad (1.27)$$

onde $\sigma = \text{sinal}(-\Phi d)$ que indica o sentido de rotação do movimento clássico.

Vemos para esse caso também que a equação (1.25) é muito similar a equação (1.4), a menos das presenças de ω_{HMW} e \tilde{E} nos respectivos lugares de ω e E . Dessa forma temos que a solução da equação (1.25)

$$\Psi_{n,\ell}(\phi, \xi, t) = C_{n,\ell} \exp \left[i \left(\ell\phi - \frac{E_{n,\ell}t}{\hbar} \right) \right] \xi^{|\ell|/2} e^{-\xi/2} {}_1F_1(-\eta, |\ell| + 1; \xi), \quad (1.28)$$

onde $\xi = (m|\omega_{\text{HMW}}|/2\hbar)\rho^2$, e os autovalores de energia são

$$E_{n,\ell} = \hbar|\omega_{\text{HMW}}| \left[\eta + \frac{|\ell| - \sigma\ell}{2} + \frac{(\sigma + 1)}{2} \right] \quad (1.29)$$

onde $\eta = 0, 1, 2, \dots$ e os valores de ℓ explicitam as degenerescências dos níveis de Landau.

Como para os níveis de Landau-Aharonov-Casher, os níveis de Landau-He-McKellar-Wilkens também são infinitamente degenerados e independem do centro das órbitas, igual aos níveis de Landau, mas observamos a dependência dos autovalores de energia em relação ao sentido de rotação do sistema clássico correspondente, σ , de maneira análoga ao que ocorre no caso do dipolo magnético porém em sentido oposto.

A semelhança matemática encontrada para os sistemas Landau-Aharonov-Casher e Landau-He-McKellar-Wilkins é uma propriedade conhecida dos sistemas de dipolos, conhecida como dualidade eletromagnética de Maxwell [86]. Tal propriedade já foi discutida nos efeitos Aharonov-Casher [44] e He-McKellar-Wilkins [46, 47] e mais fenômenos envolvendo geração de fases quânticas em estudo da dinâmica de dipolos elétricos em diferentes configurações dipolo-campos já foram feitos [49, 87–89].

1.2.3 Níveis de Landau-Hei-Han-Wei

Aqui, apresentamos a construção de um análogo dos níveis de Landau para dipolos elétricos induzidos, sistema que foi proposto para contornar o inconveniente da necessidade de uma configuração de campo magnético gerado por uma densidade de cargas magnéticas como ocorreu para o sistema de dipolos elétricos permanentes. Esses sistemas é baseado na ideia apresentada em [49] onde uma partícula neutra tem um momento de dipolo elétrico induzido por uma configuração de campos magnético e elétrico cruzados. Em sistemas de átomos frios na presença de campos eletromagnéticos externos esses arranjos são interessantes.

Considerando a interação descrita em [49], temos que uma partícula neutra com momento de dipolo induzido por uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados apresenta um efeito de fase topológica similar ao efeito Aharonov-Bohm [55]. Essa configuração possui uma vantagem em relação ao efeito He-McKellar-Wilkins, é a possibilidade de sua menor dificuldade de realização experimental.

Aqui consideramos um sistema de átomos frios tratados como dipolos elétricos induzidos. Esse sistema é submetido ao seguinte campo elétrico externo

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2} \rho \hat{\rho}, \quad (1.30)$$

onde λ é uma densidade de cargas elétrica. O sistema também é submetido a um campo magnético externo

$$\vec{B} = B \hat{k} \quad (1.31)$$

O dipolo elétrico induzido na partícula pelos campos é dado por

$$\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.32)$$

onde α é a polarizabilidade dielétrica da partícula e \vec{v} é a sua velocidade. A interação de um dipolo elétrico com os campos é descrito pela Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\vec{d} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.33)$$

Considerando que o momento de dipolo em questão seja o induzido dado por (1.32), reescrevemos a Lagrangiana do sistema na forma

$$L = \frac{1}{2}(m + \alpha B^2)v^2 + \frac{1}{2}\alpha E^2 + \alpha[\vec{v} \cdot (\vec{B} \times \vec{E})]. \quad (1.34)$$

A partir dessa Lagrangiana podemos obter a Hamiltoniana do sistema agora dado por

$$H = \frac{1}{2M} \left[\vec{p} + \alpha(\vec{E} \times \vec{B}) \right]^2 - \frac{1}{2}\alpha E^2, \quad (1.35)$$

onde redefinimos a massa da partícula $M = m + \alpha B^2$. Com base em discussões apresentadas em [49, 90, 91] e se for considerado o uso apenas de átomos de polarizabilidade alta, $\alpha \sim 10^{-39} \text{ Fm}^2$, e com campo magnético $B \leq 10 \text{ T}$, podemos ter $\alpha B^2 \leq 10^{-37} \text{ kg}$ o que corresponde a somente 10^{-10} da massa de um núcleo, assim $M \rightarrow m$. Além disso, por considerar campo elétrico cuja intensidade seja $E \approx 10^7 \text{ V/m}$, teremos o termo $\alpha E^2 = 10^{-25} \text{ J}$ resultado suficientemente pequeno comparado com a parte cinética do Hamiltoniano dos átomos. Assim, tal termo pode ser desprezado do Hamiltoniano em (1.35). Com isso, podemos escrever o Hamiltoniano na forma

$$H = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} + \alpha(\vec{E} \times \vec{B}) \right]^2 \quad (1.36)$$

Nota-se a semelhança de (1.36) com o Hamiltoniano de uma partícula carregada minimamente acoplada com um campo magnético externo, (1.1). Usando esse fato, o potencial vetor efetivo é definido como

$$\vec{A}_{\text{WHW}} = \vec{E} \times \vec{B} \quad (1.37)$$

Fazendo uso da configuração de campo apresentada anteriormente (1.30) e (1.31), obtemos o seguinte potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{\text{WHW}} = \frac{B\lambda}{2} \rho \hat{\phi} \quad (1.38)$$

Então definimos o campo magnético efetivo associado ao potencial vetor efetivo

$$\vec{B}_{\text{WHW}} = B\lambda \hat{k} \quad (1.39)$$

Para construir os níveis de Landau para o nosso sistema, seguimos as condições usadas e discutidas em [45] para o surgimento de níveis de Landau.

Na configuração de campo escolhida, as condições para torque nulo, campos estáticos e campo magnético efetivo uniforme são plenamente satisfeitas se restringirmos o movimento da partícula ao plano $x - y$. Agora o problema se reduz à resolução da equação de Schroedinger associada à (1.36). Então, escrevemos a equação de Schroedinger para o

sistema, em coordenadas cilíndricas, na forma que segue

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \left(\frac{m^2\omega_{\text{WHW}}^2}{4\hbar^2} \rho^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2} + \frac{m\omega_{\text{WHW}}\ell}{\hbar} - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.40)$$

onde

$$\omega_{\text{WHW}} = -\frac{\alpha B\lambda}{m} = \sigma\alpha \frac{|B\lambda|}{m}. \quad (1.41)$$

com $\sigma = \text{sinal}(-B\lambda)$.

A equação (1.40) é semelhante as equação (1.4), com diferentes que no lugar de ω é apresentado ω_{WHW} . Assim a função de onda é dada como em (1.8) e os auto valores de energia são dado como em (1.6), respectivamente

$$\Psi_{\eta,\ell}(\phi, \xi, t) = C_{\eta,\ell} \exp \left[i \left(\ell\phi - \frac{E_{\eta,\ell}}{\hbar} t \right) \right] \xi^{|\ell|/2} e^{-\xi/2} {}_1F_1(-\eta, |\ell| + 1; \xi),$$

onde $\xi = (m|\omega_{\text{WHW}}|/2\hbar)\rho^2$, e

$$E_{\eta,\ell} = \hbar|\omega_{\text{WHW}}| \left(\eta + \frac{|\ell| - \sigma\ell}{2} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.42)$$

Apesar do Hamiltoniano (1.36) ser parecida com o Hamiltoniano do sistema de Landau apresentada em (1.2), como nos outros sistemas, ainda temos uma dependência dos auto valores de energia com o σ .

Capítulo 2

Estados Coerentes para Níveis Análogos de Landau

Neste capítulo será feita uma revisão mostrando como se obter os estados coerentes para o oscilador harmônico unidimensional [10,92], e depois será mostrado como construir tais estados para os sistemas análogos de Landau, Landau-Aharonov-Casher [45], Landau-He-McKellar-Wilkens [48] e Landau-Wei-Han-Wei [50]. Outros estudos sobre os estados coerentes para os níveis de Landau podem ser encontrado na literatura [37,93].

2.1 Estado Coerente do Oscilador Harmônico

O oscilador harmônico simples possui Hamiltoniana dada por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad (2.1)$$

onde x e p são a posição e o seu momento conjugado no eixo de x . Usando os operadores escada,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip) \quad \text{e} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip), \quad (2.2)$$

os quais possuem relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$, podemos expressar tal Hamiltoniana por

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.3)$$

Com isso os auto estados de H , são expressos como auto estados também de $a^\dagger a$, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, pois $[a^\dagger a, H] = 0$. E com a relação de comutação que o Hamiltoniano tem

com os operadores escada,

$$[H, a] = -\hbar\omega a \quad \text{e} \quad [H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger, \quad (2.4)$$

podemos obter os auto estados $|n\rangle$ por aplicações de a^\dagger como segue

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.5)$$

Tal estado recebe o nome estado número ou estado de Fock.

A relação de incerteza de Heisenberg para o oscilador harmônico pode ser obtido pelo seguinte procedimento. Escreve-se o operador coordenada x e o operador momento p em termos dos operadores escada,

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \quad \text{e} \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a). \quad (2.6)$$

Calcula-se os valores esperados de x e p e seus quadrados. O resultado é dado por

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad \langle p^2 \rangle = m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.7)$$

Por fim usa a relação $(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$ para obter a incerteza para x e p . O resultado é $\Delta x \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Tal resultado satisfaz a relação de incerteza de Heisenberg, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, e nos mostra que somente para o estado fundamental, $|0\rangle$, temos incerteza mínima.

Pode-se criar uma classe de estados, a partir do estado fundamental $|0\rangle$, de mínima incerteza caracterizados por um número complexo ν , tal que

$$a|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle. \quad (2.8)$$

Esses estados normalizados são chamados de Estado Coerentes.

O estado coerente possui três definições: i) estado de relação de incerteza mínima, ii) auto estado do operador a e iii) estado criado pela aplicação do operador deslocamento no estado fundamental,

$$|\nu\rangle = D(\nu)|0\rangle, \quad \text{onde} \quad D(\nu) = \exp(\nu a^\dagger - \nu^* a). \quad (2.9)$$

onde $D(\nu)$ é um operador unitário chamado operador deslocamento e para $\nu = 0$ o estado coerente é o próprio estado fundamental. As duas primeiras definições já forma discutidas, mas a última é que nos permite calcular mais facilmente algumas propriedades do estado coerente.

Pode-se calcular o valor esperado de x , p e seus quadrados para o estado coerente $|\nu\rangle$

usando as relações de comutação de a e a^\dagger com $D(\nu)$,

$$[a, D(\nu)] = \nu D(\nu) \quad \text{e} \quad [a^\dagger, D(\nu)] = \nu^* D(\nu). \quad (2.10)$$

Obtém-se que para $|\nu\rangle$

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \text{Re}(\nu) \quad \text{e} \quad \langle p \rangle = \sqrt{2m\hbar\omega} \text{Im}(\nu), \quad (2.11)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} \left[[\text{Re}(\nu)]^2 + \frac{1}{4} \right] \quad \text{e} \quad \langle p^2 \rangle = 2m\hbar\omega \left[[\text{Im}(\nu)]^2 + \frac{1}{4} \right]. \quad (2.12)$$

Assim, a relação de incerteza é dada por

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.13)$$

a qual é a mínima para qualquer valor de ν .

Outras propriedades do estado coerente são visto quando estudado sua evolução temporal através da equação de Heisenberg,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{1}{m} \langle p \rangle. \quad (2.14)$$

Essas propriedades estão relacionados a proximidade do comportamento do estado coerente com o comportamento clássico do oscilador harmônico. Para tal sistema temos que

$$\langle x(t) \rangle = x_{\text{class}}(t) = x_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (2.15)$$

com $x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\nu|$.

Os estados coerentes também tem como propriedade interessante a não ortogonalidade, ou seja, $\langle \nu' | \nu \rangle \neq 0$,

$$\langle \nu' | \nu \rangle = \exp [\nu \nu'^* - (|\nu|^2 + |\nu'|^2)/2]. \quad (2.16)$$

Essas características dos estados coerentes os tornam ótimas ferramentas para descrever sistemas da ótica quântica [1] e outros [4, 5]. Para mais informações sobre outras aplicações e definições generalizadas dos estados coerentes podem ser obtidas na literatura [10].

2.2 Estado Coerente para Níveis de Landau-Aharonov-Casher

Agora apresentaremos duas formas de construir os estados coerentes dos níveis Landau-

Aharonov-Casher [45]. O primeiro usando um formalismo mais próximo ao utilizado para o estado coerente do oscilador harmônico, que se mostra não tão geral. A segunda forma é mais geral pois usa um formalismo mais rico para descrição dos níveis de Landau-Aharonov-Casher, formalismo baseado no trabalho de 1970 de Feldman e Kahn [35], que permite construir estados coerentes mais gerais com dois parâmetros. Com isso, investigamos as propriedades dos estados coerentes e encontramos as funções de onda como também o produto incerteza. Detalhes sobre estados coerentes de níveis de Landau podem ser encontrados na literatura [34–37, 93].

2.2.1 Estado Coerente para Níveis de Landau-Aharonov-Casher: I

Para obter os estados coerentes para níveis de Landau-Aharonov-Casher, usamos o formalismo desenvolvido por Yang e Chen [33], os quais se propuseram a analisar efeitos geométricos nos estados coerentes dos níveis de Landau.

O Hamiltoniano do sistema Landau-Aharonov-Casher(1.13), mostrado no capítulo anterior, pode ser escrito da forma

$$H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \frac{\hbar\mu\lambda}{4mc^2}, \quad (2.17)$$

onde $\vec{\pi} = \vec{p} - \mu\vec{A}_{AC}$, com $\vec{A}_{AC} = \frac{\lambda}{2c^2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$, que é o gauge simétrico escrito em coordenadas cartesianas. Usar as coordenadas cartesianas, é parte importante do formalismo que está a ser utilizado.

No que segue, defini-se os operadores levantamento e abaixamento para o sistema

$$a^\dagger = \frac{\pi_x + i\sigma\pi_y}{\sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|}} \quad \text{e} \quad a = \frac{\pi_x - i\sigma\pi_y}{\sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|}}, \quad (2.18)$$

onde $\omega_{AC} = \sigma|\mu\lambda_E|/mc^2$ é a frequência ciclotrônica e, π_x e π_y são as componentes de $\vec{\pi}$. Assim, o Hamiltoniano do sistema pode ser escrita na forma

$$H = \hbar|\omega_{AC}| \left[a^\dagger a + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right]. \quad (2.19)$$

Os auto valores do Hamiltoniano são

$$E_n = \hbar|\omega_{AC}| \left[n + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right], \quad (2.20)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e seus auto estados podem ser apresentados com estados de Fock

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (2.21)$$

os quais são degenerados, como analisado no capítulo anterior. Ao comparar os auto valores de energia para o sistema Landau-Aharonov-Casher obtidos aqui, (2.20) usando operadores escada, com os encontrados no capítulo anterior, (1.17) usando o método analítico, obtemos que

$$\begin{aligned} \eta + |\ell| &= n, & \text{para } \ell > 0 \\ \eta &= n, & \text{para } \ell \leq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

tal fato auxilia a conexão dos dois métodos e será muito útil para definição de uma base quântica lógica para possíveis aplicações em computação quântica holonômica no último capítulo.

Os estados coerentes dos níveis Landau-Aharonov-Casher são construídos com a aplicação do operador unitário $D(\nu)$ sobre o estado fundamental do sistema. O operador $D(\nu)$, também chamado de operador deslocamento é dado por

$$D(\nu) = \exp[\nu a^\dagger - \nu^* a], \quad (2.23)$$

como para oscilador harmônico unidimensional, mas agora fazendo o uso dos operadores levantamento e abaixamento definidos em (2.18). Com isso, os estados coerentes são

$$|\nu\rangle = D(\nu)|0\rangle = e^{-|\nu|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.24)$$

onde ν é um número complexo que, por conveniência, o definimos igual a

$$\nu = \nu_x + i\nu_y, \quad (2.25)$$

com ν_x e ν_y sendo números reais. Tal escolha ajuda melhor identificar como os campos externos estão relacionados com os estados coerentes posteriormente.

Com o estado coerente dos níveis de Landau-Aharonov-Casher definidos dessa maneira é fácil mostrar que tais estados são auto estados do operador abaixamento,

$$a|\nu\rangle = aD(\nu)|0\rangle = [a, D(\nu)]|0\rangle = \nu[a, a^\dagger]D(\nu)|0\rangle = \nu|\nu\rangle. \quad (2.26)$$

A função de onda para tais estados é obtida por

$$\psi^\nu(x, y) = \langle x, y | \nu \rangle = e^{-|\nu|^2/2} \exp \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|}} \left[\begin{array}{l} \frac{m\omega_{AC}}{2} (x + i\sigma y) \\ -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{array} \right] \right\} \psi_0(x, y) \quad (2.27)$$

onde $\psi_0(x, y) = \langle x, y | 0 \rangle$ é a função de onda do estado fundamental dos níveis Landau-Aharonov-Casher. Ao usar a identidade

$$\left[\exp \left(c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] f(x) = f(x + c), \quad (2.28)$$

temos

$$\psi^\nu(x, y) = \exp \left(-\frac{|\nu|^2}{2} \right) \exp \left\{ \nu \sqrt{\frac{m|\omega_{AC}|}{8\hbar}} (x + i\sigma y) \right\} \psi_0(x + X, y + Y) \quad (2.29)$$

com $Y = iX = \nu \sqrt{\frac{\hbar}{2m|\omega_{AC}|}}$. A parte imaginária de X e Y adiciona uma fase na função de onda do sistema, enquanto a parte real desloca a posição da partícula. Tais deslocamentos são melhores entendidos quando analisamos o Hamiltoniano dos estados coerentes do sistema.

O Hamiltoniano do sistema para os estados coerentes é dada por

$$H_\nu = D(\nu) H D^\dagger(\nu) = \frac{\vec{\Pi}^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_{AC}}{2},$$

onde

$$\Pi_x = \pi_x - \frac{\mu}{c^2} \sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|} \nu_x \quad \text{e} \quad \Pi_y = \pi_y + \frac{\mu}{c^2} \sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|} \nu_y. \quad (2.30)$$

Agora, podemos ver que os termos novos devido ao surgimento dos estados coerentes são facilmente comparados com um potencial vetor constante extra. Assim, se faz necessário um potencial vetor efetivo constante, expressado por $\vec{\mathcal{A}}_{AC}$, que pode ser obtido através da introdução de um campo elétrico constante planar, $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{i} + \mathcal{E}_y \hat{j}$. Tal potencial vetor é dado por

$$\vec{\mathcal{A}}_{AC} = c^{-2} \hat{\mu} \times (\vec{E} + \vec{\mathcal{E}}) = c^{-2} \hat{\mu} \times \vec{E} + \vec{\mathcal{A}}_{AC} \quad (2.31)$$

e vale lembrar que a introdução de $\vec{\mathcal{E}}$ no sistema não influencia nos níveis de Landau-Aharonov-Casher devido a ele ser planar, satisfazer assim as condições de torque nulo, campos estáticos e campo magnético associado constante.

Dessa forma podemos ver que o estado coerente $|\nu\rangle$, gerado agora como solução da equação de Schroedinger para o novo Hamiltoniano possui auto funções $\psi^\nu(x, y) = \langle \nu | x, y \rangle = \psi(x + \delta x, y + \delta y)$ onde

$$\delta x = \frac{2\mathcal{E}_x}{\lambda} \quad \text{e} \quad \delta y = \frac{2\mathcal{E}_y}{\lambda}. \quad (2.32)$$

Como no caso do estado coerente do oscilador harmônico unidimensional, esses estados tem também mínima relação de incerteza, isto é, eles satisfazem a relação $\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \hbar/2$, onde

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2. \quad (2.33)$$

Para as coordenadas da posição no sistema Landau-Aharonov-Casher, temos

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{AC}}}(\nu + \nu^*) \quad \text{and} \quad \langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + \frac{\hbar}{2m\omega_{AC}}. \quad (2.34)$$

Por esse caminho conseguiu-se

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{AC}}}. \quad (2.35)$$

Para o momento conjugado, obtemos

$$\langle p_x \rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega_{AC}}{2}}(\nu - \nu^*) \quad \text{and} \quad \langle p_x^2 \rangle = \langle p_x \rangle^2 + \frac{m\hbar\omega_{AC}}{2}, \quad (2.36)$$

o que nos leva à

$$\Delta p_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega_{AC}}{2}}. \quad (2.37)$$

Além disso, ao substituir em (2.33) a expressão (2.35) e (2.37), obtemos a relação de incerteza para as componentes x , dada por

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.38)$$

Para a coordenada y e seu momento temos o processo de obtenção da relação de incerteza muito similar.

2.2.2 Estados Coerentes para os Níveis Landau-Aharonov-Casher:II

Pode-se também obter estados coerente para os níveis de Landau-Aharonov-Casher mais gerais, quando descrevemos os auto estados de Landau-Aharonov-Casher em estados

tipo Fock levando também em consideração o número quântico de momento angular. Procedimento similar pode ser visto em [35] onde foi feito para o sistema de Landau. Nessa seção trazemos tal método e descrição para o sistema de Landau-Aharonov-Casher.

A partir do Hamiltoniano (2.17), podemos escrever

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\sigma \hbar}{2l_m^2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{\sigma \hbar}{2l_m^2} x \right)^2 \right] + \frac{\hbar \omega_{AC}}{2} \quad (2.39)$$

onde $l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m|\omega_{AC}|}}$ é o comprimento magnético. O comprimento magnético representa o raio da órbita clássica da partícula do estado fundamental do sistema, o qual será usado pois concentra a maioria das informações sobre o acoplamento da partícula com os campos e torna as equações mais sucintas.

Se introduzirmos os operadores

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2\hbar}} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right], \quad (2.40)$$

os quais são parecidos com o a e a^\dagger da equação (2.18), mas são agora escritos de outra forma por ser mais conveniente, como será visto. Tais operadores possuem relação de comutação seguinte,

$$[a_-, a_+] = 1. \quad (2.41)$$

Assim, o Hamiltoniano pode ser agora escrita por

$$H = \hbar|\omega_{AC}| \left[a_+ a_- + \frac{1}{2} (1 + \sigma) \right] \quad (2.42)$$

Ao adicionar ao nosso estudo, a análise da componente z do momento angular,

$$L_z = xp_y - yp_x, \quad (2.43)$$

o qual tem auto valores inteiros (em unidade de \hbar). Sendo assim pode-se mostrar que L_z comuta com H ($[L_z, H] = 0$), resultado que possui como consequência a existência de uma base que é auto estado tanto de H como também de L_z . Tal auto estado expresso como $|n, \ell\rangle$, possui equações de auto estados dadas por

$$H|n, \ell\rangle = \hbar|\omega_{AC}| \left[n + \frac{1}{2} (1 + \sigma) \right] |n, \ell\rangle \quad (2.44)$$

e

$$L_z|n, \ell\rangle = \ell\hbar|n, \ell\rangle. \quad (2.45)$$

A partir das relações de comutação de a_{\pm} com H e L_z , obtemos

$$[H, a_{\pm}] = \pm \hbar |\omega_{AC}| a_{\pm} \quad (2.46)$$

e

$$[L_z, a_{\pm}] = \mp \sigma \hbar a_{\pm}. \quad (2.47)$$

As relações (2.46) e (2.47) mostram que para $\sigma = -1$ os operadores a_+ e a_- são, respectivamente, operadores levantamento e abaixamento para energia e momento angular simultaneamente. Já para $\sigma = +1$ os mesmos se mantem, respectivamente, operadores levantamento e abaixamento para energia, enquanto que em relação ao momento angular eles invertem suas funções, agindo agora a_+ como operador abaixamento e a_- como operador levantamento. Isto é

$$a_+ |n, \ell\rangle = \sqrt{(n+1)} |n+1, \ell - \sigma\rangle \quad e \quad a_- |n, \ell\rangle = \sqrt{n} |n-1, \ell + \sigma\rangle \quad (2.48)$$

Lembrando que por σ depender do sentido do momento de dipolo e do sinal das cargas elétricas de geram o campo, informação contida no λ , tal sistema apresenta essas duas possibilidades, fenômeno que não aparece no sistema de Landau para elétron e campo magnético apontado para o sentido positivo do eixo de z , pois já são definidos os sinal de tais grandezas.

Para gerar todos os estados a partir de um estado particular deve-se também ter operadores que com sua aplicação alterem somente os auto valores do momento angular. Operadores com essa propriedade podem ser escritos da forma que segue

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right]. \quad (2.49)$$

Tais operadores são operadores escada somente do momento angular e não da energia, como é mostrado por suas relações de comutação

$$[L_z, b_{\pm}] = \mp \sigma \hbar b_{\pm} \quad (2.50)$$

e

$$[H, b_{\pm}] = 0. \quad (2.51)$$

Além de também comutarem com a_{\pm} . Portanto, podemos mostrar que

$$b_+ |n, \ell\rangle = \sqrt{(n + \sigma \ell)} |n, \ell - \sigma\rangle \quad e \quad b_- |n, \ell\rangle = \sqrt{(n + \sigma \ell + 1)} |n, \ell + \sigma\rangle \quad (2.52)$$

Ao analisar (2.52) pode-se deduzir que para uma dada energia $\hbar |\omega_{AC}| [n + \frac{1}{2}(1 + \sigma)]$, ℓ

pode assumir valores no intervalo

$$-\infty, \dots, \ell, \dots, -1, 0, n, \quad (2.53)$$

para $\sigma = -1$ ou

$$-n, -n+1, \dots, \ell, \dots, 0, 1, \dots, \infty \quad (2.54)$$

para $\sigma = +1$. O que causa tal limitação nos valores de ℓ é o fato da aplicação de b_+ sobre o estado $|n, -\sigma n\rangle$ resultar em zero, como também para os níveis de Landau [35].

Agora, pode-se gerar todos os auto estados de energia a partir do estado fundamental $|0, 0\rangle$ por sucessivas aplicações de a_+ e b_- , como mostrado abaixo

$$|n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell} a_+^n}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle \quad (2.55)$$

O função de onda do estado fundamental de momento angular zero, na representação de coordenadas, é obtido a partir de duas condições estado fundamental

$$\langle x, y | b_+ | 0, 0 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}(x - i\sigma y) + l_m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \psi_{00} = 0 \quad (2.56)$$

$$\langle x, y | a_- | 0, 0 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\hbar \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2l_m^2}(x + i\sigma y) \right] \psi_{00} = 0 \quad (2.57)$$

As quais possuem a solução

$$\psi_{00} = \langle x, y | 0, 0 \rangle = \frac{1}{2l_m^2 \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{4l_m^2} \right], \quad (2.58)$$

a qual é uma função de onda normalizada no plano xy .

Agora, o estado coerente para os níveis de Landau-Aharonov-Casher será construído para essa descrição mais geral usando também o momento angular e seus operadores escada. Procedimento parecido foi feito no trabalho do Feldman e Kahn [35]. Foi-se definido o estado $|\alpha, \beta\rangle$ como auto estado simultaneamente dos dois operadores não hermitianos a_- e b_+ , isto é

$$a_- |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle, \quad (2.59)$$

$$b_+ |\alpha, \beta\rangle = i\beta |\alpha, \beta\rangle, \quad (2.60)$$

Os auto valores complexos α e β são adimensionais e a condição de normalização $\langle \alpha, \beta | \alpha, \beta \rangle = 1$ é satisfeita. A significado físico e as propriedades de coerência dos auto valores complexa são discutidos a seguir.

Foi-se construído o estado coerente por ação de dois operadores unitários $D_a(\alpha)$ e

$D_b(\beta)$ sobre o estado fundamental $|0, 0\rangle$. Estes operadores unitários são dados por

$$D_a(\alpha) = \exp(\alpha a_+ - \alpha^* a_-) = e^{-|\alpha|^2/2} \exp(\alpha a_+) \exp(-\alpha^* a_-) \quad (2.61)$$

e

$$D_b(\beta) = \exp[i(\beta^* b_- + \beta b_+)] = e^{-|\beta|^2/2} \exp(i\beta^* b_-) \exp(i\beta b_+). \quad (2.62)$$

onde foi usado a formula de Zassenhaus,

$$\exp(A + B) = e^A e^B e^{-[A,B]/2} e^{-(2[[A,B],B]+[[A,B],A])/6} \dots \quad (2.63)$$

Pode-se notar que os operadores deslocamento definidos em (2.61) e (2.62) são semelhantes ao operador mostrado em (2.23), pois desenvolve a mesma função, mesmo que em auto valores diferentes.

O estado coerente é então dado por

$$|\alpha, \beta\rangle = D_a(\alpha) D_b(\beta) |0, 0\rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \exp(\alpha a_+) \exp(i\beta b_+) |0, 0\rangle. \quad (2.64)$$

Sabendo que $[a_-, D_a(\alpha)] = \alpha D_a(\alpha)$, $[b_+, D_b(\beta)] = i\beta D_b(\beta)$ e $[a_-, D_b(\beta)] = [b_+, D_a(\alpha)] = 0$, e usando as equações (2.56) e (2.57), pode-se mostrar as definições (2.59) e (2.60). Expandindo o estado coerente em um grupo de auto estados de energia temos

$$|\alpha, \beta\rangle = \sum \langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle |n, \ell\rangle. \quad (2.65)$$

Pode-se obter os coeficientes da expansão, $\langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle$, em termos de coeficiente $\langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle$ por uso do hermitiano de (2.55) e de (2.59) e (2.60). Assim,

$$\langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha)^n (i\beta)^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} \langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle \quad (2.66)$$

com $\langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle = \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2]$.

Por um uso adicional de (2.61) e (2.62) com as condições (2.57) e (2.56), os estados coerentes podem ser expressos na forma

$$|\alpha, \beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha a_+ + i\beta^* b_-\right) |0, 0\rangle \quad (2.67)$$

A dependência temporal do estado coerente é obtido através da dependência temporal de b_+ e a_- no cenário de Heisenberg. b_+ é constante de movimento por comutar com o Hamiltoniano, H . Por outro lado,

$$a_-(t) = e^{-i|\omega_{AC}|t} a_-(0) \quad (2.68)$$

o qual segue a partir da equação de movimento

$$\frac{da_-(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_-, H] = -i|\omega_{AC}|a_-. \quad (2.69)$$

Daqui

$$a_-(t)|\alpha, \beta\rangle = e^{-i|\omega_{AC}|t}a_-(0)|\alpha, \beta\rangle = \alpha e^{-i|\omega_{AC}|t}|\alpha, \beta\rangle. \quad (2.70)$$

Transformando para o cenário de Schroedinger, o estado coerente dependente do tempo torna-se $|\alpha e^{-i|\omega_{AC}|t}, \beta\rangle$.

A representação de Schroedinger do estado coerente $\psi^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ pode ser obtido de algumas formas. Um método é solucionar (2.59) e (2.60) na representação de coordenadas. Quando seguido tal método obtemos as equações diferenciais

$$-i\hbar \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2l_m^2}(x + i\sigma y) \right] \psi^{(\alpha, \beta)} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m} \alpha \psi^{(\alpha, \beta)}, \quad (2.71)$$

$$\left[\frac{1}{2}(x - i\sigma y) + l_m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \psi^{(\alpha, \beta)} = i\sqrt{2}l_m \beta \psi^{(\alpha, \beta)}. \quad (2.72)$$

Observa-se que a solução para $\alpha = \beta = 0$ é $\psi^{(\alpha, \beta)} = \psi_{00}$. Desta maneira, a função de onda é

$$\psi^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2l_m\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{4l_m^2} \left[\left(x - i\sqrt{2}l_m(\alpha - \beta) \right)^2 + \left(y + \sigma\sqrt{2}l_m(\alpha + \beta) \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.73)$$

A (2.73) pode ser encontrada diretamente fazendo uso de (2.67) com os operadores na representação de coordenada e as identidades

$$\exp(x + icp_x) = \exp(x) \exp(icp_x) \exp\left(\frac{\hbar c}{2}\right) \quad \text{e} \quad [\exp(icp_x)] f(x) = f(x + \hbar c).$$

Os valores esperados de x , y , p_x e p_y , $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle p_x \rangle$ e $\langle p_y \rangle$ respectivamente, no estado (2.73) são dados por

$$\langle x \rangle = -\sqrt{2}l_m(\alpha_y + \beta_y) \quad (2.74)$$

$$\langle y \rangle = \sigma\sqrt{2}l_m(\alpha_x - \beta_x) \quad (2.75)$$

$$\langle p_x \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_m}(\alpha_x + \beta_x) \quad (2.76)$$

$$\langle p_y \rangle = \frac{\sigma\hbar}{\sqrt{2}l_m}(\alpha_y - \beta_y) \quad (2.77)$$

onde $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$, $\beta = \beta_x + i\beta_y$, sendo α_x , α_y , β_x e β_y números reais. Ao mesmo tempo,

o valor esperado de seus valores quadrados são

$$\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + l_m^2 \quad (2.78)$$

$$\langle y^2 \rangle = \langle y \rangle^2 + l_m^2 \quad (2.79)$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle p_x \rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4l_m^2} \quad (2.80)$$

$$\langle p_y^2 \rangle = \langle p_y \rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4l_m^2}. \quad (2.81)$$

Como no caso do oscilador harmônico, esse estado coerente é estado de mínima incerteza, assim satisfaz a relação

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.82)$$

com $(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$.

A densidade de probabilidade do estado coerente é

$$|\psi_{(\alpha,\beta)}|^2 = \frac{1}{4\pi l_m^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\ell^2} \left[\left(x + \sqrt{2}l_m(\alpha_y + \beta_y) \right)^2 + \left(y + \sigma\sqrt{2}l_m(\alpha_x - \beta_x) \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.83)$$

O pacote de onda coerente tem forma do estado fundamental, mas é deslocado no espaço para um centro do movimento. As coordenadas médias são

$$\bar{x}(t) = \sqrt{2}l_m [\beta_y + |\alpha| \sin(|\omega_{AC}|t - \phi)], \quad (2.84)$$

$$\bar{y}(t) = \sqrt{2}l_m [\beta_x + |\alpha| \cos(|\omega_{AC}|t - \phi)], \quad (2.85)$$

onde $\tan \phi = \alpha_y/\alpha_x$. O centroide do pacote de onda segue uma orbita clássica de raio $\sqrt{2}l_m|\alpha|$ ao redor de um centro em $(\sqrt{2}l_m\beta_y, \sqrt{2}l_m\beta_x)$. A forma do pacote é independente do tempo.

2.3 Estados Coerentes dos Níveis Landau-He-McKellar-Wilkens

O sistema que denominamos Landau-He-McKellar-Wilkens [48] é o sistema composto por uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente, \vec{d} , interagindo com um campo magnético, \vec{B} , tal qual a configuração de dipolo e campo

$$\vec{d} = d\hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \frac{\Phi}{2}(x\hat{i} + y\hat{j}), \quad (2.86)$$

gera níveis de energia análogos aos níveis de Landau. Tal sistema foi mostrado no capítulo anterior fazendo uso do método analítico para solucioná-lo. Como para os níveis

Landau-Aharonov-Casher, iremos reescreve-lo em um novo formato, usando um formalismo parecido com o apresentado por Feldman e Kahn [35], para que possamos obter os estados coerente de tal sistema de forma mais fácil e mais geral.

Para isso, vamos considerar o Hamiltoniano do sistema Landau-He-McKellar-Wilkins, (1.21) como no capítulo anterior, rescrita da forma que segue

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega_{\text{HMW}}}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega_{\text{HMW}}}{2} x \right)^2 \right] + \frac{\hbar\omega_{\text{HMW}}}{2} \quad (2.87)$$

onde $\omega_{\text{HMW}} = -\frac{\Phi d}{m} = \sigma|\omega_{\text{HMW}}|$, com $\sigma = \text{sin}(-\Phi d) = \text{sign}(\omega_{\text{HMW}})$. O que nos permite ainda expressa-lo por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\sigma\hbar}{2l_m^2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{\sigma\hbar}{2l_m^2} x \right)^2 \right] + \frac{\hbar\omega_{\text{HMW}}}{2} \quad (2.88)$$

onde $l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m|\omega_{\text{HMW}}|}}$. Deve-se perceber que o Hamiltoniano é bem similar o Hamiltoniano (2.39), que é do sistema Landau-Aharonov-Casher, a menos de uma substituição da frequência angular ω_{AC} por ω_{HMW} . Esse fato deixa explícito a dualidade de tais sistemas, assunto bem discutido no trabalho de Dowlin e colaboradores [86] e nos trabalhos sobre aparecimento de fase quântica nos sistemas Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkins [44, 46, 47]. Isso auxiliará a encontrar mais rápido as auto energias e os auto estados do sistema.

Podemos então introduzir os operadores

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2\hbar}} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right] \quad (2.89)$$

e

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right], \quad (2.90)$$

nos quais também se observa a similaridade com os operadores definidos em (2.40) e (2.49) apresentados na seção anterior para o sistema Landau-Aharonov-Casher. Vale notar que a diferença do operadores definidos em (2.89) e (2.90), para os definidos em (2.40) e (2.62) é a definição do comprimento magnético, l_m , para cada sistema.

Os operadores a_{\pm} e b_{\pm} obedecem as seguintes relações de comutação

$$[a_-, a_+] = [b_+, b_-] = 1 \quad \text{e} \quad [a_{\pm}, b_{\pm}] = 0. \quad (2.91)$$

Assim, o Hamiltoniano e o momento angular do sistemas ficam escritos em função desses

operadores da forma que segue

$$H = \hbar|\omega_{\text{HMW}}| \left[a_+a_- + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right] \quad (2.92)$$

e

$$L_z = xp_y - yp_x = \sigma\hbar(b_-b_+ - a_+a_-). \quad (2.93)$$

Pode-se escolher uma base, $|n, \ell\rangle$, para representar, simultaneamente, os auto estados de H e L_z , pois eles comutam entre si. As equações de auto valores são

$$H|n, \ell\rangle = \hbar|\omega_{\text{HMW}}| \left[n + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right] |n, \ell\rangle \quad (2.94)$$

e

$$L_z|n, \ell\rangle = \ell\hbar|n, \ell\rangle. \quad (2.95)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e ℓ tem possíveis valores vinculados a escolha de σ .

A partir das relações de comutação de a_{\pm} e b_{\pm} com H e L_z , dadas por

$$[H, a_{\pm}] = \pm\hbar|\omega_{\text{HMW}}|a_{\pm} \quad \text{e} \quad [H, b_{\pm}] = 0, \quad (2.96)$$

e

$$[L_z, a_{\pm}] = \mp\sigma\hbar a_{\pm} \quad \text{e} \quad [L_z, b_{\pm}] = \mp\sigma\hbar b_{\pm}, \quad (2.97)$$

podemos ver que para $\Phi d > 0 \Rightarrow \sigma = -1$ os operadores a_+ e a_- são operadores levamento e abaixamento, respectivamente, tanto para energia quanto para o momento angular. Enquanto que os operadores b_+ e b_- são operadores levamento e abaixamento, respectivamente, apenas para o momento angular e não alteram os estados relativo a energia, ou seja, o número quântico n .

No entanto, para $\Phi d < 0 \Rightarrow \sigma = +1$ os operadores a_+ e a_- mantem o comportamento relativo a energia, mas invertem os seus papeis relativo a o momento angular. Já os operadores b_+ e b_- também invertem seus papeis relativo ao número quântico de momento angular ℓ , ou seja, eles são operadores levantamento e abaixamento, respectivamente, para o momento angular. Assim,

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1, \ell-\sigma\rangle, \quad (2.98)$$

$$a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (2.99)$$

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+\sigma\ell)}|n, \ell-\sigma\rangle, \quad (2.100)$$

$$b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+\sigma\ell+1)}|n, \ell+\sigma\rangle. \quad (2.101)$$

Temos então que para um determinado valor energia, determinado por um específico valor de n , tenhamos ℓ podendo assumir valores $-\sigma n, -\sigma(n-1), \dots, 0, \sigma, 2\sigma, \dots, \sigma\infty$, como

no caso para o Landau-Aharonov-Casher, devido à $b_+|n, -\sigma n\rangle = 0$. Assim, todos os auto estados podem ser gerados a partir do estado fundamental de energia com momento angular nulo, $|0, 0\rangle$, por sucessivas aplicações de a_+ e b_- , como segue

$$|n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell} a_+^n}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle. \quad (2.102)$$

O estado (2.102) possui forma igual a (2.55), pois o comportamento físico dos portadores são muito parecidos nos dois casos, para partículas neutras com dipolo elétrico e com dipolo magnético, devido a dualidade já mencionada [86]. Vale lembrar que a diferença esta no comprimento magnético presente na definição de cada operador utilizado.

A função de onda do estado fundamental com momento angular nulo é dado por

$$\psi_{00} = \langle x, y | 0, 0 \rangle = \frac{1}{2l_m^2 \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{4l_m^2} \right]. \quad (2.103)$$

Os estado coerentes para o sistema de Landau-He-McKellar-Wilkens representado por $|\alpha, \beta\rangle$ pode ser definido como auto estado dos operadores a_- e b_+ simultaneamente como segue

$$a_- |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle, \quad (2.104)$$

$$b_+ |\alpha, \beta\rangle = i\beta |\alpha, \beta\rangle, \quad (2.105)$$

como no caso do sistema Landau-Aharonov-Casher. Os auto valores complexos $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$ e $\beta = \beta_x + i\beta_y$ são adimensionais e $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x$ e β_y são números reais.

Os estados $|\alpha, \beta\rangle$ podem ser construídos da forma que segue

$$|\alpha, \beta\rangle = D_a(\alpha) D_b(\beta) |0, 0\rangle \quad (2.106)$$

onde $D_a(\alpha)$ e $D_b(\beta)$ são operadores unitários dados por

$$D_a(\alpha) = \exp[(\alpha a_+ - \alpha^* a_-)] = e^{-|\alpha|^2/2} \exp(\alpha a_+) \exp(-\alpha^* a_-) \quad (2.107)$$

e

$$D_b(\beta) = \exp[i(\beta^* b_+ + \beta b_-)] = e^{-|\beta|^2/2} \exp(i\beta b_-) \exp(i\beta^* b_+), \quad (2.108)$$

bem como para os estados coerente de Landau-Aharonov-Casher.

Expandido o estado $|\alpha, \beta\rangle$ na base $|n, \ell\rangle$

$$|\alpha, \beta\rangle = \sum \langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle |n, \ell\rangle. \quad (2.109)$$

com coeficientes $\langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle$ dados por

$$\langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle = \frac{\alpha^n (i\beta)^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} \langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle \quad (2.110)$$

com $\langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle = \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2]$. Com tanto, podemos escrever (2.106) na forma

$$|\alpha, \beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha a_+ + i\beta b_-\right) |0, 0\rangle. \quad (2.111)$$

A dependência temporal é introduzida no estado coerente pelos operadores b_+ e a_- . Sendo, no cenário de Heisenberg,

$$a_-(t) = e^{-i|\omega_{\text{HMW}}|t} a_-(0). \quad (2.112)$$

Enquanto que b_+ comuta com H o que o torna uma constante de movimento. Assim,

$$a_-(t)|\alpha, \beta\rangle = e^{-i|\omega_{\text{HMW}}|t} a_-(0)|\alpha, \beta\rangle = \alpha e^{-i|\omega_{\text{HMW}}|t} |\alpha, \beta\rangle. \quad (2.113)$$

No cenário de Schroedinger, o estado coerente dependente do tempo é dado por $|\alpha e^{-i|\omega_{\text{HMW}}|t}, \beta\rangle$.

A função de onda para o estado coerente é dado por

$$\psi_{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2l_m \sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4l_m^2} \left[\left(x - i\sqrt{2}l_m(\alpha + \beta)\right)^2 + \left(y + \sigma\sqrt{2}l_m(\alpha - \beta)\right)^2 \right]\right\}. \quad (2.114)$$

O valor esperado das componente da posição e do momento conjugado para o estado coerente são dados por

$$\langle x \rangle = -\sqrt{2}l_m \text{Im}(\alpha - \beta) \quad (2.115)$$

$$\langle y \rangle = \sigma\sqrt{2}l_m \text{Re}(\alpha + \beta) \quad (2.116)$$

$$\langle p_x \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_m} \text{Re}(\alpha - \beta) \quad (2.117)$$

$$\langle p_y \rangle = \frac{\sigma\hbar}{\sqrt{2}l_m} \text{Im}(\alpha + \beta). \quad (2.118)$$

Os valor esperados de suas quadraturas são

$$\langle q_i^2 \rangle = \langle q_i \rangle^2 + l_m^2 \quad (2.119)$$

$$\langle p_i^2 \rangle = \langle p_i \rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4l_m^2} \quad (2.120)$$

onde para $i = 1(2)$ $q_i = x(y)$ e $p_i = p_x(p_y)$. Portanto, esses estados satisfazem a condição de mínima incerteza

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.121)$$

como tem que ser para os estados coerentes.

A densidade de probabilidade no espaço é

$$|\psi_{(\alpha,\beta)}|^2 = \frac{1}{4\pi l_m^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\ell^2} \left[\left(x + \sqrt{2}l_m \text{Im}(\alpha + \beta_y) \right)^2 + \left(y + \sigma\sqrt{2}l_m \text{Re}(\alpha - \beta) \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.122)$$

O valor médio das componentes da posição são

$$\bar{x}(t) = \sqrt{2}l_m [\text{Im}(\beta) + |\alpha| \sin(|\omega_{\text{HMW}}|t - \phi)], \quad (2.123)$$

$$\bar{y}(t) = \sqrt{2}l_m [\text{Re}(\beta) + |\alpha| \cos(|\omega_{\text{HMW}}|t - \phi)], \quad (2.124)$$

onde ϕ é o argumento de α . Portanto o centro do pacote de onda segue um órbita clássica de raio $\sqrt{2}l_m|\alpha|$ ao redor de uma centro localizado em $(\sqrt{2}l_m \text{Im}(\beta), \sqrt{2}l_m \text{Re}(\beta))$. A forma do pacote de onda não depende do tempo.

2.4 Estados Coerentes dos Níveis Landau-Wei-Han-Wei

O sistema que denominamos Landau-Wei-Han-Wei é o sistema composto por uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido, $\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, interagindo com um campo magnético, $\vec{B} = B\hat{k}$ e campo elétrico $\vec{E} = \frac{\lambda}{2}(x\hat{i} + y\hat{j})$, onde α é a polarizabilidade, λ é a densidade de cargas elétricas e B é constante [50]. Os campos possuem essa configuração para que possamos obter níveis de energia, auto estados e auto funções para esse sistema análogos ao obtido para o sistema de Landau. Tal sistema foi mostrado no capítulo anterior fazendo uso do método analítico para solucioná-lo. Como para os outros sistemas análogos de Landau utilizaremos novamente o formalismo similar ao apresentado por Feldman e Kahn [35], para que possamos obter os estados coerente de tal sistema de forma mais fácil e mais geral.

Para isso, vamos considerar o Hamiltoniano do sistema Landau-Wei-Han-Wei, (1.36), como no capítulo anterior, rescrita da forma que segue

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega_{\text{WHW}}}{2}y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega_{\text{WHW}}}{2}x \right)^2 \right] \quad (2.125)$$

onde $\omega_{\text{WHW}} = -\frac{\alpha B \lambda}{m} = \sigma|\omega_{\text{WHW}}|$, com $\sigma = \text{sign}(-\alpha B \lambda) = \text{sign}(\omega_{\text{WHW}})$. Vale a pena ressaltar que o Hamiltoniano desse sistema é escrita dessa forma para determinados intervalos dos valores de α , λ e B . Para casos diferentes teríamos resultados significativamente diferentes dos resultados obtidos no sistema de Landau. Assim, podemos expressar (2.125)

por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\sigma \hbar}{2l_m^2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{\sigma \hbar}{2l_m^2} x \right)^2 \right] \quad (2.126)$$

onde $l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m|\omega_{\text{WHW}}|}}$. Deve-se perceber que o Hamiltoniano é bem similar as Hamiltonianas (2.39) e (2.88), que são dos sistemas de Landau-Aharonov-Casher e Landau-He-McKellar-Wilkens respectivamente, a menos de uma substituição da frequência angular ω_{AC} e ω_{HMW} por ω_{WHW} , e uma diferença na energia do estado fundamental do sistema.

Agora, podemos então introduzir os operadores

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2\hbar}} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right] \quad (2.127)$$

e

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right], \quad (2.128)$$

nos quais também se observa a similaridade com os operadores escada apresentados nas seções anteriores. É importante perceber que apesar da forma funcional dos operadores serem iguais para os três sistemas, ainda assim estamos tratando de sistemas diferentes que podem ser diferenciados pelo comprimento magnético, l_m , que para cada sistema é escrito em termos dos parâmetros relacionados aos campos externos e características dos portadores de momentos.

Os operadores a_{\pm} e b_{\pm} obedecem as seguintes relações de comutação

$$[a_-, a_+] = [b_+, b_-] = 1 \quad \text{e} \quad [a_{\pm}, b_{\pm}] = 0. \quad (2.129)$$

Assim, o Hamiltoniano e o momento angular do sistemas ficam escritos em função desses operadores da forma que segue

$$H = \hbar|\omega_{\text{WHW}}| \left[a_+ a_- + \frac{1}{2} (1 + \sigma) \right] \quad (2.130)$$

e

$$L_z = xp_y - yp_x = \sigma \hbar (b_- b_+ - a_+ a_-). \quad (2.131)$$

Pode-se escolher uma base, $|n, \ell\rangle$, para representar, simultaneamente, os auto estados de H e L_z , pois eles comutam entre si. As equações de auto valores são

$$H|n, \ell\rangle = \hbar|\omega_{\text{WHW}}| \left[n + \frac{1}{2} (1 + \sigma) \right] |n, \ell\rangle \quad (2.132)$$

e

$$L_z|n, \ell\rangle = \ell \hbar |n, \ell\rangle. \quad (2.133)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e ℓ tem possíveis valores vinculados a escolha de σ .

A partir das relações de comutação de a_{\pm} e b_{\pm} com H e L_z , dadas por

$$[H, a_{\pm}] = \pm \hbar |\omega_{\text{WHW}}| a_{\pm} \quad \text{e} \quad [H, b_{\pm}] = 0, \quad (2.134)$$

e

$$[L_z, a_{\pm}] = \mp \sigma \hbar a_{\pm} \quad \text{e} \quad [L_z, b_{\pm}] = \mp \sigma \hbar b_{\pm}, \quad (2.135)$$

podemos ver que para $\sigma = 1 \Rightarrow B\lambda > 0$ os operadores a_+ e a_- são operadores levamento e abaixamento, respectivamente, tanto para energia quanto para o momento angular. Enquanto que os operadores b_+ e b_- são operadores levamento e abaixamento, respectivamente, apenas para o momento angular e não alteram os estados relativo a energia.

No entanto, para $\sigma = +1 \Rightarrow B\lambda < 0$ os operadores a_+ e a_- mantem o comportamento relativo a energia, mas invertem os seus papeis relativo a o momento angular. Já os operadores b_+ e b_- também invertem seus papeis relativo ao número quântico de momento angular ℓ . Assim,

$$a_+ |n, \ell\rangle = \sqrt{(n+1)} |n+1, \ell - \sigma\rangle, \quad (2.136)$$

$$a_- |n, \ell\rangle = \sqrt{n} |n-1, \ell + \sigma\rangle, \quad (2.137)$$

$$b_+ |n, \ell\rangle = \sqrt{(n + \sigma\ell)} |n, \ell - \sigma\rangle, \quad (2.138)$$

$$b_- |n, \ell\rangle = \sqrt{(n + \sigma\ell + 1)} |n, \ell + \sigma\rangle. \quad (2.139)$$

Temos então que para um determinado valor energia, determinado por um específico valor de n , tenhamos ℓ podendo assumir valores $-\sigma n, -\sigma(n-1), \dots, 0, \sigma, 2\sigma, \dots, \sigma\infty$, como no caso para o Landau-Aharonov-Casher, devido à $b_+ |n, -\sigma n\rangle = 0$. Assim, todos os auto estados podem ser gerados a partir do estado fundamental de energia com momento angular nulo, $|0, 0\rangle$, por sucessivas aplicações de a_+ e b_- , como segue

$$|n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell} a_+^n}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle. \quad (2.140)$$

O estado (2.140) possui forma igual aos autos estados dos sistemas das seções anteriores, pois o comportamento físico dos portadores são muito parecidos nos dois casos como já mencionada. Vale lembrar que a diferença esta no comprimento magnético presente na definição de cada operador utilizado.

A função de onda do estado fundamental com momento angular nulo é dado por

$$\psi_{00} = \langle x, y | 0, 0 \rangle = \frac{1}{2l_m^2 \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{4l_m^2} \right]. \quad (2.141)$$

Os estado coerentes para o sistema de Landau-Wei-Han-Wei representado por $|\alpha, \beta\rangle$

pode ser definido como auto estado dos operadores a_- e b_+ , como segue.

$$a_-|\alpha, \beta\rangle = \alpha|\alpha, \beta\rangle, \quad (2.142)$$

$$b_+|\alpha, \beta\rangle = i\beta|\alpha, \beta\rangle, \quad (2.143)$$

como no caso do sistema Landau-Aharonov-Casher. Os auto valores complexos $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$ e $\beta = \beta_x + i\beta_y$, com $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x$ e β_y sendo números reais, são grandezas adimensionais.

Os estados $|\alpha, \beta\rangle$ podem ser construídos da forma que segue

$$|\alpha, \beta\rangle = D_a(\alpha)D_b(\beta)|0, 0\rangle \quad (2.144)$$

onde $D_a(\alpha)$ e $D_b(\beta)$ são operadores unitários dados por

$$D_a(\alpha) = \exp[(\alpha a_+ - \alpha^* a_-)] = e^{-|\alpha|^2/2} \exp(\alpha a_+) \exp(-\alpha^* a_-) \quad (2.145)$$

e

$$D_b(\beta) = \exp[i(\beta^* b_+ + \beta b_-)] = e^{-|\beta|^2/2} \exp(i\beta b_-) \exp(i\beta^* b_+), \quad (2.146)$$

bem como para os sistemas anteriores.

Expandido o estado $|\alpha, \beta\rangle$ na base $|n, \ell\rangle$

$$|\alpha, \beta\rangle = \sum \langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle |n, \ell\rangle. \quad (2.147)$$

com coeficientes $\langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle$ dados por

$$\langle n, \ell | \alpha, \beta \rangle = \frac{\alpha^n (i\beta)^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} \langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle \quad (2.148)$$

com $\langle 0, 0 | \alpha, \beta \rangle = \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2]$. Com tanto, podemos escrever (2.144) na forma

$$|\alpha, \beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha a_+ + i\beta b_-\right) |0, 0\rangle. \quad (2.149)$$

A dependência temporal é introduzida no estado coerente pelos operadores b_+ e a_- . Sendo, no cenário de Heisenberg,

$$a_-(t) = e^{-i|\omega_{\text{WHW}}|t} a_-(0) \quad (2.150)$$

Enquanto que b_+ comuta com H o que o torna uma constante de movimento. Assim,

$$a_-(t)|\alpha, \beta\rangle = e^{-i|\omega_{\text{WHW}}|t} a_-(0)|\alpha, \beta\rangle = \alpha e^{-i|\omega_{\text{WHW}}|t} |\alpha, \beta\rangle. \quad (2.151)$$

No cenário de Schroedinger, o estado coerente dependente do tempo é dado por $|\alpha e^{-i|\omega_{\text{WHW}}|t}, \beta\rangle$.

A função de onda para o estado coerente é dada por

$$\psi_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2l_m\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{4l_m^2} \left[\left(x - i\sqrt{2}l_m(\alpha + \beta) \right)^2 + \left(y + \sigma\sqrt{2}l_m(\alpha - \beta) \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.152)$$

O valor esperado das componente da posição e do momento conjugado para o estado coerente são dados por

$$\langle x \rangle = -\sqrt{2}l_m \text{Im}(\alpha - \beta) \quad (2.153)$$

$$\langle y \rangle = \sigma\sqrt{2}l_m \text{Re}(\alpha + \beta) \quad (2.154)$$

$$\langle p_x \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_m} \text{Re}(\alpha - \beta) \quad (2.155)$$

$$\langle p_y \rangle = \frac{\sigma\hbar}{\sqrt{2}l_m} \text{Im}(\alpha + \beta). \quad (2.156)$$

Os valor esperados de suas quadraturas são

$$\langle q_i^2 \rangle = \langle q_i \rangle^2 + l_m^2 \quad (2.157)$$

$$\langle p_i^2 \rangle = \langle p_i \rangle^2 + \frac{\hbar^2}{4l_m^2} \quad (2.158)$$

onde para $i = 1(2)$ $q_i = x(y)$ e $p_i = p_x(p_y)$. Portanto, esses estados satisfazem a condição de mínima incerteza

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.159)$$

como tem que ser para os estados coerentes.

A densidade de probabilidade no espaço é

$$|\psi_{(\alpha,\beta)}|^2 = \frac{1}{4\pi l_m^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2l_m^2} \left[\left(x + \sqrt{2}l_m \text{Im}(\alpha + \beta) \right)^2 + \left(y + \sigma\sqrt{2}l_m \text{Re}(\alpha - \beta) \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.160)$$

O valor médio das componentes da posição são

$$\bar{x}(t) = \sqrt{2}l_m [\text{Im}(\beta) + |\alpha| \sin(|\omega_{\text{WHW}}|t - \phi)], \quad (2.161)$$

$$\bar{y}(t) = \sqrt{2}l_m [\text{Re}(\beta) + |\alpha| \cos(|\omega_{\text{WHW}}|t - \phi)], \quad (2.162)$$

onde ϕ é o argumento de α . Portanto o centro do pacote de onda segue um órbita clássica de raio $\sqrt{2}l_m|\alpha|$ ao redor de uma centro localizado em $(\sqrt{2}l_m \text{Im}(\beta), \sqrt{2}l_m \text{Re}(\beta))$. A forma do pacote de onda não depende do tempo.

Capítulo 3

Estados Deslocados para Níveis Análogos de Landau

Neste capítulo faz-se uma breve revisão da definição e das propriedades dos chamados estados deslocados para o oscilador harmônico unidimensional [17–19, 94]. Depois será mostrado como se obter estados deslocados para os sistemas análogos de Landau já estudados até aqui: Landau-Aharonov-Casher [45], Landau-He-McKellar-Wilkens [48] e Landau-Wei-Han-Wei [50]. Serão discutidas as propriedades importantes para a aplicação dos estados deslocados dos sistemas citados, essa aplicação será apresentada no último capítulo, o que faz-se considerar necessário apresentar, de forma rápida, todo o formalismo para descrever. Dessa forma o capítulo se apresenta o mais completo possível e com menos informações que já foram apresentadas nos capítulos anteriores.

Trabalhos sobre estados deslocados para os níveis de Landau estão presentes na lista de referencia [32].

3.1 Estado Deslocado do Oscilador Harmônico

O oscilador harmônico simples possui Hamiltoniana dada por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (3.1)$$

Usando os operadores escada,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip) \quad \text{e} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip), \quad (3.2)$$

os quais possuem relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$, podemos expressar tal Hamiltoniana

por

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.3)$$

Com isso os auto estados de H , são expressos como auto estados também de $a^\dagger a$, $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$, pois $[a^\dagger a, H] = 0$. E com a relação de comutação que o Hamiltoniano tem com os operadores escada,

$$[H, a] = -\hbar\omega a \quad \text{e} \quad [H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger, \quad (3.4)$$

podemos obter os auto estados $|n\rangle$ por aplicações de a^\dagger como segue

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.5)$$

Tal estado recebe o nome estado de número ou estado de Fock.

Podemos criar uma classe de estados, a partir do estado número $|n\rangle$, chamados estados deslocados ou estados número deslocados ou até estados quase-coerentes [19], caracterizados por um número complexo ν , através da aplicação do operador deslocamento como segue

$$|\nu, n\rangle = D(\nu) |n\rangle, \quad \text{onde} \quad D(\nu) = \exp(\nu a^\dagger - \nu^* a). \quad (3.6)$$

onde $D(\nu)$ é um operador unitário, $D^\dagger(\nu)D(\nu) = D(\nu)D^\dagger(\nu) = 1$ e para $\nu = 0$ o estado $|\nu, n\rangle$ é o próprio estado número e para $n = 0$ o estado $|\nu, n\rangle$ é o estado coerente, já apresentado no capítulo anterior.

As relações de comutação de a e a^\dagger com $D(\nu)$ são

$$[a, D(\nu)] = \nu D(\nu) \quad \text{e} \quad [a^\dagger, D(\nu)] = \nu^* D(\nu). \quad (3.7)$$

Com tais relações podemos escrever o estado por

$$|\nu, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[(a^\dagger)^n - n\nu^* (a^\dagger)^{n-1} \right] D(\nu) |0\rangle, \quad (3.8)$$

expressão que deixa claro a generalização que o estado deslocado é relativo ao estado coerente e o estado número, pois

$$|\nu, n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = |n\rangle, \quad \text{para} \quad \nu = 0, \quad (3.9)$$

$$|\nu, n\rangle = D(\nu) |0\rangle = |\nu\rangle, \quad \text{para} \quad n = 0. \quad (3.10)$$

Outra forma de escrever o estado deslocado em termos dos estados números

$$|\nu, n\rangle = e^{-|\nu|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \sum_{j=0}^n \frac{(-\nu^*)^j}{j!(n-j)!} \sqrt{n!(n-j+k)!} |n-j+k\rangle \quad (3.11)$$

Para tal estado a aplicação operador abaixamento, a , é dado por

$$a|\nu, n\rangle = (D(\nu)a + [a, D(\nu)])|n\rangle = \sqrt{n}D(\nu)|n-1\rangle + \nu D(\nu)|n\rangle, \quad (3.12)$$

resultado que indica a não existência de vínculo de auto valor e auto estado para o estado $|\nu, n\rangle$ e o operador a de forma geral. No entanto para o caso em que $n = 0$ temos $a|\nu, n\rangle = a|\nu, 0\rangle = \nu|\nu\rangle$ como para o estado coerente e para $\nu = 0$ temos $a|\nu, n\rangle = a|0, n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ como para o estado número.

Pode-se calcular o valor esperado de x , p e seus quadrados para o estado deslocado $|\nu, n\rangle$ usando

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \quad \text{e} \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger - a) \quad (3.13)$$

Obtém-se que para $|\nu\rangle$, temos

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\text{Re}(\nu) \quad \text{e} \quad \langle p \rangle = \sqrt{2m\hbar\omega}\text{Im}(\nu) \quad (3.14)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} \left[[\text{Re}(\nu)]^2 + \frac{1}{4} \right] \quad \text{e} \quad \langle p^2 \rangle = 2m\hbar\omega \left[[\text{Im}(\nu)]^2 + \frac{1}{4} \right], \quad (3.15)$$

da mesma forma que o estado coerente. Assim, a relação de incerteza é dada por

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad (3.16)$$

a qual é mínima para qualquer valor de ν .

Os estados deslocados também tem como propriedade interessante a não ortogonalidade, ou seja, $\langle \nu', n' | \nu, n \rangle \neq 0$,

$$\langle \nu', n' | \nu, n \rangle = \langle \nu' | \nu \rangle \sqrt{m!n!} \sum_{j=0}^{\{m,n\}} \frac{(\nu - \nu')^{n'-j} (\nu'^* - \nu^*)^{n-j}}{j!(m-j)!(n-j)!}, \quad (3.17)$$

onde $\{n', n\}$ é o mínimo múltiplo comum de n' e n , e

$$\langle \nu' | \nu \rangle = \exp \left[\nu \nu'^* - (|\nu|^2 + |\nu'|^2)/2 \right]. \quad (3.18)$$

As características mostradas dos estados deslocados o tornam uma boa ferramenta para descrever sistemas que apresentam uma propriedade chamada quaseprobabilidade [94] e outras [18]. Para mais informações sobre outras aplicações e outras propriedades dos estados deslocados vejam as referências [18, 95, 96].

3.2 Estados Deslocados para os Níveis Landau-Aharonov-Casher

Estado deslocados dos níveis de Landau-Aharonov-Casher são obtidos a partir do sistema de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente, $\vec{\mu} = \mu\hat{k}$, sujeito a campo elétrico radial planar, $\vec{E} = \frac{\lambda}{2}(x\hat{i} + y\hat{j})$ onde λ é a densidade volumétrica de cargas.

O Hamiltoniano para tal sistema, já apresentado nos capítulos anteriores, é dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega_{AC}}{2}y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega_{AC}}{2}x \right)^2 \right] + \frac{\hbar\omega_{AC}}{2} \quad (3.19)$$

onde $\omega_{AC} = \mu\lambda/mc^2$ é a frequência ciclotrônica do sistema.

Para obter os estados deslocados para tal sistema usamos o formalismo similar ao presente em [35]. Esse formalismo tem por base definir os operadores

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2}\hbar} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2}(x \mp i\sigma y) \right] \quad (3.20)$$

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2}(x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar}(p_x \mp i\sigma p_y) \right]. \quad (3.21)$$

onde $l_m = \sqrt{\hbar/m|\omega_{AC}|}$ é o comprimento magnético e $\sigma = \text{sinal}(\mu\lambda)$. Os operadores definidos em (3.20) e (3.21), já também apresentados no capítulo anterior, são chamados operadores escada pelo efeito de sua aplicação nos auto estados do sistema e possuem relações de comutação dadas por

$$[a_-, a_+] = [b_+, b_-] = 1 \quad \text{e} \quad [a_{\pm}, b_{\pm}] = 0. \quad (3.22)$$

Com os operadores (3.20) e (3.21) pode-se escrever o Hamiltoniano do sistema por

$$H = \hbar|\omega_{AC}| \left[a_+a_- + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right] \quad (3.23)$$

e o momento angular, $L_z = xp_y - yp_x$, por

$$L_z = \sigma\hbar(b_-b_+ - a_+a_-). \quad (3.24)$$

H e L_z comutam entre si, o que tem por consequência a existência de uma base, $|n, \ell\rangle$, de auto estados comum a ambos, ou seja,

$$H|n, \ell\rangle = \hbar|\omega_{AC}| \left[n + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right] |n, \ell\rangle \quad (3.25)$$

e

$$L_z|n, \ell\rangle = \ell\hbar|n, \ell\rangle. \quad (3.26)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

A relação de comutação de H e L_z com os operadores escada é dada por

$$[H, a_{\pm}] = \pm\hbar|\omega_{AC}|a_{\pm} \quad \text{e} \quad [H, b_{\pm}] = 0 \quad (3.27)$$

e

$$[L_z, a_{\pm}] = \mp\sigma\hbar a_{\pm} \quad \text{e} \quad [L_z, b_{\pm}] = \mp\sigma\hbar b_{\pm}. \quad (3.28)$$

As relações (3.27) e (3.28) indicam que

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell+\sigma\rangle \quad (3.29)$$

e

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+\sigma\ell)}|n, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+\sigma\ell+1)}|n, \ell+\sigma\rangle, \quad (3.30)$$

o que permite que criemos os estado $|n, \ell\rangle$ a partir do estado fundamental de momento angular nulo, $|0, 0\rangle$ através da seguinte expressão

$$|n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell} a_+^n}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}}|0, 0\rangle. \quad (3.31)$$

Com o objetivo de construir o estado deslocado dos níveis de Landau-Aharonov-Casher, definidos por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle, \quad (3.32)$$

defimos o nosso o operador deslocamento dado por

$$D(\nu) = \exp(\nu a_+ - \nu^* a_-), \quad (3.33)$$

similar o apresentado no capítulo anterior. O operador deslocamento é um operador unitário, $D^\dagger(\nu)D(\nu) = D(\nu)D^\dagger(\nu) = 1$, e possui relação de comutação com os operadores escada dadas por

$$[a_-, D(\nu)] = \nu D(\nu), \quad [a_+, D(\nu)] = \nu^* D(\nu) \quad \text{e} \quad [b_{\pm}, D(\nu)] = 0. \quad (3.34)$$

A partir de (3.32) usando (3.33), (3.31) e (3.34) podemos escrever o estados deslocado dos níveis de Landau-Aharonov-Casher por

$$|\nu, n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} (a_+^n - n\nu^* a_+^{n-1}) D(\nu)|0, 0\rangle, \quad (3.35)$$

onde $D(\nu)|0,0\rangle$ é o estado coerente do estado de Landau-Aharonov-Casher para $\beta = 0$, apresentado no capítulo anterior. Ou seja, i) para $n = \ell = 0$ temos que $|\nu, n, \ell\rangle$ é um estado coerente e ii) para $\nu = 0$ temos o $|\nu, n, \ell\rangle$ como o auto estado dos níveis Landau-Aharonov-Casher. Isso pode ser visto também ao analisar a relação do estado $|\nu, n, \ell\rangle$ com o operador a_- , pois para o estado coerente existe uma relação de auto estado e auto valor, já para $|\nu, n, \ell\rangle$ nos temos

$$a_-|\nu, n, \ell\rangle = \nu|\nu, n, \ell\rangle + \sqrt{n}|\nu, n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (3.36)$$

o que mostra que para $n = 0$ temos estado coerente e para $\nu = 0$ temos estado número.

O estado deslocado dos níveis de Landau-Aharonov-Casher (3.32) não é auto estado do Hamiltoniano (3.27) mesmo ainda sendo auto estado do momento angular (3.28), devido ao operador deslocamento comutar com os operadores b_{\pm} . O Hamiltoniano que possui $|\nu, n, \ell\rangle$ como seu auto estado é obtida a partir da transformação de similaridade feita no Hamiltoniano do sistema Landau-Aharonov-Casher, (3.27), feita com o operador deslocamento, (3.33), da forma que segue

$$H_{\nu} = D(\nu)HD^{\dagger}(\nu) = \hbar|\omega_{AC}| \left[(a_+ - \nu^*)(a_- - \nu) + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right]. \quad (3.37)$$

Usando as definições (3.20) e (3.21) em (3.37) podemos apresentar H_{ν} como segue

$$H_{\nu} = \frac{\Pi_x^2}{2m} + \frac{\Pi_y^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_{AC}}{2},$$

onde

$$\Pi_x = p_x + \frac{m\omega_{AC}}{2}y - \frac{\mu}{c^2}\sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|}\nu_x \quad \text{e} \quad \Pi_y = p_y - \frac{m\omega_{AC}}{2}x + \frac{\mu}{c^2}\sqrt{2m\hbar|\omega_{AC}|}\nu_y, \quad (3.38)$$

como já apresentado no capítulo anterior. Pode-se relacionar facilmente os termos constantes adicionais do acoplamento mínimo com um potencial vetor efetivo constante adicional, expressado por $\vec{\mathcal{A}}_{AC}$, que pode ser obtido através da introdução de um campo elétrico constante planar, $\vec{\mathcal{E}} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$. O potencial vetor constante adicional é dado por

$$\vec{\mathcal{A}}_{AC} = c^{-2}\hat{\mu} \times \vec{\mathcal{E}} = c^{-2}(-E_y, E_x, 0). \quad (3.39)$$

Dessa forma podemos ver que o estado deslocados dos níveis Landau-He-McKellar-Wilkens, $|\nu, n, \ell\rangle$, gerado agora como solução da equação de Schroedinger para o Hamiltoniano, H_{ν} , possui auto funções $\psi^{\nu}(x, y) = \langle \nu, n, \ell | x, y \rangle = \psi(x + \delta x, y + \delta y)$ onde $\psi(x, y)$

é a função de onda para os níveis de Landau-Aharonov-Casher e

$$\delta x = \frac{2E_x}{\lambda} \quad \text{e} \quad \delta y = \frac{2E_y}{\lambda}. \quad (3.40)$$

Tais resultados são similares ao encontrados para o estados coerentes dos níveis de Landau-Aharonov-Casher no que discutimos relativo o Hamiltoniano do sistema. Mas relativo ao auto estado da Hamiltonian, H_ν , temos algumas diferenças, diferenças essas que mostram como o estado deslocado dos níveis Landau-Aharonov-Casher é uma generalização dos auto estados e do estado coerente do mesmo sistema. Como já citado anteriormente.

3.3 Estados Deslocados para os Níveis Landau-He-McKellar-Wilkins

Estado deslocados dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins são obtidos a partir do sistema de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente, $\vec{d} = d\hat{k}$, sujeito a campo magnético radial planar, $\vec{B} = \frac{\Phi}{2}(x\hat{i} + y\hat{j})$ onde Φ é um parâmetro relacionado com a produção do campo magnético. Em [46,47], Φ é citado como densidade de carga magnética. Em [84], é mostrado como se consegue um campo magnético radial com um par de bobinas em configuração anti-Helmholtz, deixando então o parâmetro Φ ser uma relação da corrente elétrica que atravessa as bobinas e também das dimensões delas.

O Hamiltoniano para tal sistema, já apresentado nos capítulos anteriores, é dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega_{\text{HMW}}}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega_{\text{HMW}}}{2} x \right)^2 \right] + \frac{\hbar\omega_{\text{HMW}}}{2} \quad (3.41)$$

onde $\omega_{\text{HMW}} = -\Phi d/m$ é a frequência ciclotrônica do sistema.

Obteremos os estados deslocados dos sistema Landau-He-McKellar-Wilkins usando um formalismo baseado no presente em [35]. Tal formalismo inicia-se ao definir os operadores

$$a_\pm = \frac{l_m}{\sqrt{2}\hbar} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right] \quad (3.42)$$

$$b_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right]. \quad (3.43)$$

onde $l_m = \sqrt{\hbar/m|\omega_{\text{HMW}}|}$ é o comprimento magnético e $\sigma = \text{sinal}(-\Phi d)$. Em (3.20) e (3.21) são definidos operadores já apresentados no capítulo anterior, tais operadores são chamados operadores escada pelo efeito de sua aplicação nos auto estados do sistema e

possuem relações de comutação dadas por

$$[a_-, a_+] = [b_+, b_-] = 1 \quad \text{e} \quad [a_{\pm}, b_{\pm}] = 0. \quad (3.44)$$

O Hamiltoniano do sistema, (3.41), e o momento angular, $L_z = xp_y - yp_x$, podem ser rescritos agora em termos dos operadores (3.20) e (3.21), ficando então da forma que segue

$$H = \hbar|\omega_{\text{HMW}}| \left[a_+ a_- + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right] \quad (3.45)$$

e

$$L_z = \sigma \hbar (b_- b_+ - a_+ a_-). \quad (3.46)$$

O fato de H e L_z comutarem entre si, tem por consequência a existência de uma base, $|n, \ell\rangle$, de auto estados comum a ambos, ou seja,

$$H|n, \ell\rangle = \hbar|\omega_{\text{HMW}}| \left[n + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right] |n, \ell\rangle \quad (3.47)$$

e

$$L_z|n, \ell\rangle = \ell \hbar |n, \ell\rangle. \quad (3.48)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\ell \in \mathbb{Z}$.

A partir das relações de comutação de H e L_z com os operadores escada é dada por

$$[H, a_{\pm}] = \pm \hbar|\omega_{\text{AC}}| a_{\pm} \quad \text{e} \quad [H, b_{\pm}] = 0 \quad (3.49)$$

e

$$[L_z, a_{\pm}] = \mp \sigma \hbar a_{\pm} \quad \text{e} \quad [L_z, b_{\pm}] = \mp \sigma \hbar b_{\pm}, \quad (3.50)$$

pode-se ver que a aplicação dos operadores a_{\pm} e b_{\pm} no estado $|n, \ell\rangle$ são dadas da seguinte forma

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1, \ell - \sigma\rangle \quad \text{e} \quad a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell + \sigma\rangle \quad (3.51)$$

e

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n + \sigma\ell)}|n, \ell - \sigma\rangle \quad \text{e} \quad b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{(n + \sigma\ell + 1)}|n, \ell + \sigma\rangle. \quad (3.52)$$

(3.51) e (3.52) permitem que criemos os estado $|n, \ell\rangle$ a partir do estado fundamental de momento angular nulo, $|0, 0\rangle$ através da seguinte expressão

$$|n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell} a_+^n}{\sqrt{n!(n + \sigma\ell)!}} |0, 0\rangle. \quad (3.53)$$

Para construir o estado deslocado dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins, defini-

dos por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle, \quad (3.54)$$

devemos definir também o nosso operador deslocamento dado por

$$D(\nu) = \exp(\nu a_+ - \nu^* a_-), \quad (3.55)$$

similar o apresentado no capítulo anterior. O operador deslocamento, (3.55), é um operador unitário, ou seja $D^\dagger(\nu)D(\nu) = D(\nu)D^\dagger(\nu) = 1$, e possui relação de comutação com os operadores escada dadas por

$$[a_-, D(\nu)] = \nu D(\nu), \quad [a_+, D(\nu)] = \nu^* D(\nu) \quad \text{e} \quad [b_\pm, D(\nu)] = 0. \quad (3.56)$$

Ao usar (3.55), (3.53) e (3.56), em (3.54) podemos escrever o estados deslocado dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins por

$$|\nu, n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} (a_+^n - n\nu^* a_+^{n-1}) D(\nu)|0, 0\rangle, \quad (3.57)$$

onde $D(\nu)|0, 0\rangle$ é o estado coerente do estado de Landau-He-McKellar-Wilkins, apresentado no capítulo anterior, para $\beta = 0$. Em (3.57), podemos ver que i) para $n = \ell = 0$ temos que $|\nu, n, \ell\rangle$ é um estado coerente e ii) para $\nu = 0$ temos o $|\nu, n, \ell\rangle$ como o auto estado dos níveis Landau-He-McKellar-Wilkins. Ao analisar a relação do estado $|\nu, n, \ell\rangle$ com o operador a_- , pode-se observar também que os estados deslocados dos níveis Landau-He-McKellar-Wilkins tem a caracterização dos estados coerentes e número. Para o estado coerente existe uma relação de auto estado e auto valor, já para $|\nu, n, \ell\rangle$ nos temos

$$a_-|\nu, n, \ell\rangle = \nu|\nu, n, \ell\rangle + \sqrt{n}|\nu, n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (3.58)$$

o que mostra que para $n = 0$ temos estado coerente e para $\nu = 0$ temos estado número.

O estado deslocado dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins (3.54) não é auto estado do Hamiltoniano (3.49) mesmo ainda sendo auto estado do momento angular (3.50), devido ao operador deslocamento comutar com os operadores b_\pm . O Hamiltoniano que possui $|\nu, n, \ell\rangle$ como seu auto estado é obtida a partir da transformação de similaridade feita no Hamiltoniano do sistema Landau-He-McKellar-Wilkins, (3.49), feita com o operador deslocamento, (3.55), dado por

$$H_\nu = D(\nu)HD^\dagger(\nu) = \hbar|\omega_{\text{HMW}}| \left[(a_+ - \nu^*)(a_- - \nu) + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right]. \quad (3.59)$$

Usando as definições (3.20) e (3.21) em (3.59) podemos apresentar H_ν como segue

$$H_\nu = \frac{\Pi_x^2}{2m} + \frac{\Pi_y^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_{\text{HMW}}}{2},$$

onde

$$\Pi_x = p_x + \frac{m\omega_{\text{HMW}}}{2}y - \frac{\mu}{c^2}\sqrt{2m\hbar|\omega_{\text{HMW}}|}\nu_x \quad \text{e} \quad \Pi_y = p_y - \frac{m\omega_{\text{HMW}}}{2}x + \frac{\mu}{c^2}\sqrt{2m\hbar|\omega_{\text{HMW}}|}\nu_y, \quad (3.60)$$

como já apresentado no capítulo anterior. Relaciona-se facilmente os termos constantes adicionais do acoplamento mínimo com um potencial vetor efetivo constante adicional, expressado por $\vec{\mathcal{A}}_{\text{HMW}}$, que pode ser obtido através da introdução de um campo magnético constante planar, $\vec{\mathcal{B}} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$. O potencial vetor constante adicional é dado por

$$\vec{\mathcal{A}}_{\text{HMW}} = \hat{d} \times \vec{\mathcal{B}} = (-B_y, B_x, 0). \quad (3.61)$$

Assim, podemos ver que o estado deslocados dos níveis Landau-Aharonov-Casher, $|\nu, n, \ell\rangle$, gerado agora como solução da equação de Schroedinger para o Hamiltoniano, H_ν , possui auto funções $\psi^\nu(x, y) = \langle \nu, n, \ell | x, y \rangle = \psi(x + \delta x, y + \delta y)$ onde $\psi(x, y)$ é a função de onda para os níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins e

$$\delta x = \frac{2B_x}{\Phi} \quad \text{e} \quad \delta y = \frac{2B_y}{\Phi}. \quad (3.62)$$

Tais resultados são similares ao encontrados para o estados coerentes dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins relativo o Hamiltoniano do sistema. Enquanto que relativo ao auto estado do Hamiltoniano, H_ν , temos algumas diferenças. Diferenças essas que mostram como o estado deslocado dos níveis Landau-He-McKellar-Wilkins é uma generalização dos auto estados e do estado coerente do mesmo sistema, como já citado anteriormente.

3.4 Estados Deslocados para os Níveis Landau-Wei-Han-Wei

Os estados deslocados dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei são obtidos a partir do sistema de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido permanente, $\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, onde α é a polarizabilidade elétrica, $\vec{B} = B\hat{k}$ e $\vec{E} = \frac{\lambda}{2}(x\hat{i} + y\hat{j})$ com λ sendo a densidade volumétrica de cargas elétricas.

Para os valores de campos e polarizabilidade elétrica constadas nas referências [49,90, 91], o Hamiltoniano para o sistema Landau-Wei-Han-Wei, já apresentado nos capítulos

anteriores, é dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega_{\text{WHW}}}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega_{\text{WHW}}}{2} x \right)^2 \right] \quad (3.63)$$

onde $\omega_{\text{WHW}} = -\alpha B\lambda/m$ é a frequência ciclotrônica do sistema.

Os estados deslocados para tal sistema podem ser obtidos ao usar o formalismo similar ao apresentado em [35], formalismo esse que tem como princípio definir os operadores escada para o sistema. Os operadores escada do sistema são definidos por

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2}\hbar} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right] \quad (3.64)$$

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right]. \quad (3.65)$$

onde $l_m = \sqrt{\hbar/m|\omega_{\text{WHW}}|}$ é o comprimento magnético e $\sigma = \text{sign}(-B\lambda)$. Os operadores escada definidos em (3.20) e (3.21), já também apresentados no capítulo anterior, são chamados assim devido ao efeito de sua aplicação nos auto estados do sistema. As relações de comutação entre a_{\pm} e b_{\pm} são dadas por

$$[a_-, a_+] = [b_+, b_-] = 1 \quad \text{e} \quad [a_{\pm}, b_{\pm}] = 0. \quad (3.66)$$

Ao usar os operadores escada, a_{\pm} e b_{\pm} , podemos rescrever o Hamiltoniano, (3.63) e o momento angular, $L_z = xp_y - yp_x$, do sistema como segue

$$H = \hbar|\omega_{\text{WHW}}| \left[a_+ a_- + \frac{1}{2} \right] \quad \text{e} \quad L_z = \sigma\hbar (b_- b_+ - a_+ a_-). \quad (3.67)$$

Podemos para esse sistema definir uma base, $|n, \ell\rangle$, como base de auto estados simultaneamente de H e L_z , devido ao fato de eles comutam entre si. Ou seja,

$$H|n, \ell\rangle = \hbar|\omega_{\text{WHW}}| \left[n + \frac{1}{2} (1 + \sigma) \right] |n, \ell\rangle \quad (3.68)$$

e

$$L_z|n, \ell\rangle = \ell\hbar|n, \ell\rangle. \quad (3.69)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

A relação de comutação de H e L_z com os operadores escada é dada por

$$[H, a_{\pm}] = \pm\hbar|\omega_{\text{AC}}|a_{\pm} \quad \text{e} \quad [H, b_{\pm}] = 0 \quad (3.70)$$

e

$$[L_z, a_{\pm}] = \mp\sigma\hbar a_{\pm} \quad \text{e} \quad [L_z, b_{\pm}] = \mp\sigma\hbar b_{\pm}. \quad (3.71)$$

Com as relações (3.27) e (3.28) podemos deduzir que

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell+\sigma\rangle \quad (3.72)$$

e

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+\sigma\ell)}|n, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{(n+\sigma\ell+1)}|n, \ell+\sigma\rangle. \quad (3.73)$$

As relações (3.72) e (3.73) nos permite criarmos o estado $|n, \ell\rangle$ a partir do estado fundamental de momento angular nulo, $|0, 0\rangle$ através de aplicações consecutivas de a_+ e b_- dada pela seguinte expressão

$$|n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell} a_+^n}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle. \quad (3.74)$$

Com isso, para construir o estado deslocado dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei, definidos por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle, \quad (3.75)$$

agora precisamos definir o operador deslocamento. Tal operador é unitário, ou seja $D^\dagger(\nu)D(\nu) = D(\nu)D^\dagger(\nu) = 1$, e é definido por

$$D(\nu) = \exp(\nu a_+ - \nu^* a_-), \quad (3.76)$$

similar aos já apresentados nesse capítulo. As relações de comutação entre $D(\nu)$ e os operadores escada são

$$[a_-, D(\nu)] = \nu D(\nu), \quad [a_+, D(\nu)] = \nu^* D(\nu) \quad \text{e} \quad [b_\pm, D(\nu)] = 0. \quad (3.77)$$

Usando (3.76), (3.74) e (3.77) em (3.75) podemos escrever o estados deslocado dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei por

$$|\nu, n, \ell\rangle = \frac{b_-^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} (a_+^n - n\nu^* a_+^{n-1}) D(\nu)|0, 0\rangle, \quad (3.78)$$

onde $D(\nu)|0, 0\rangle$ é o estado coerente do estado de Landau-Wei-Han-Wei para $\beta = 0$, apresentado no capítulo anterior. Isso é, i) para $n = \ell = 0$ temos que $|\nu, n, \ell\rangle$ é um estado coerente dos níveis Landau-Wei-Han-Wei e ii) para $\nu = 0$ temos o $|\nu, n, \ell\rangle$ como o auto estado dos níveis Landau-Wei-Han-Wei.

Pode-se analisar a relação do estado $|\nu, n, \ell\rangle$ com o operador a_- , com o intenção de reforçar a relação do estado deslocado com os estados coerente e número, o que obtém é

$$a_-|\nu, n, \ell\rangle = \nu|\nu, n, \ell\rangle + \sqrt{n}|\nu, n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (3.79)$$

mostrando então que para $n = 0$ temos estado coerente e para $\nu = 0$ temos estado número.

O estado deslocado dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei (3.75) não é auto estado do Hamiltoniano (3.70) mesmo ainda sendo auto estado do momento angular (3.71), devido ao operador deslocamento comutar com os operadores b_{\pm} . O Hamiltoniano que possui $|\nu, n, \ell\rangle$ como seu auto estado é obtida a partir da transformação de similaridade feita no Hamiltoniano do sistema Landau-Wei-Han-Wei, (3.70), feita com o operador deslocamento, (3.76), da forma que segue

$$H_{\nu} = D(\nu)HD^{\dagger}(\nu) = \hbar|\omega_{\text{WHW}}| \left[(a_{+} - \nu^{*})(a_{-} - \nu) + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \right]. \quad (3.80)$$

Usando as definições (3.64) e (3.65) em (3.80) podemos apresentar H_{ν} como segue

$$H_{\nu} = \frac{\Pi_x^2}{2m} + \frac{\Pi_y^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_{\text{WHW}}}{2},$$

onde

$$\Pi_x = p_x + \frac{m\omega_{\text{WHW}}}{2}y - \frac{\mu}{c^2}\sqrt{2m\hbar|\omega_{\text{WHW}}|}\nu_x \quad \text{e} \quad \Pi_y = p_y - \frac{m\omega_{\text{WHW}}}{2}x + \frac{\mu}{c^2}\sqrt{2m\hbar|\omega_{\text{WHW}}|}\nu_y, \quad (3.81)$$

como já apresentado no capítulo anterior. Pode-se relacionar facilmente os termos constantes adicionais do acoplamento mínimo com um potencial vetor efetivo constante adicional, expressado por $\vec{\mathcal{A}}_{\text{WHW}}$, que pode ser obtido através da introdução de um campo elétrico constante planar, $\vec{\mathcal{E}} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$. O potencial vetor constante adicional é dado por

$$\vec{\mathcal{A}}_{\text{WHW}} = \vec{B} \times \vec{\mathcal{E}} = B(-E_y, E_x, 0). \quad (3.82)$$

Dessa forma podemos ver que o estado deslocados dos níveis Landau-Wei-Han-Wei, $|\nu, n, \ell\rangle$, gerado agora como solução da equação de Schroedinger para o Hamiltoniano, H_{ν} , possui auto funções $\psi^{\nu}(x, y) = \langle \nu, n, \ell | x, y \rangle = \psi(x + \delta x, y + \delta y)$ onde $\psi(x, y)$ é a função de onda para os níveis de Landau-Wei-Han-Wei e

$$\delta x = \frac{2E_x}{B\lambda} \quad \text{e} \quad \delta y = \frac{2E_y}{B\lambda}. \quad (3.83)$$

Tais resultados são similares ao encontrados para o estados coerentes dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei no que discutimos relativo o Hamiltoniano do sistema. Mas relativo ao auto estado do Hamiltoniano, H_{ν} , temos algumas diferenças, diferenças essas que mostram como o estado deslocado dos níveis Landau-Wei-Han-Wei é uma generalização dos auto estados e do estado coerente do mesmo sistema.

Capítulo 4

Fase de Berry de Estados Deslocados dos Análogos de Landau

Esse capítulo se dispõe a fazer um estudo de fases geométricas iniciando com uma breve descrição da definição de fase de Berry [57–61, 97–103]. Logo depois é discutido como obter fases de Berry para estados deslocados dos sistemas de análogos de Landau, já apresentados nos capítulos anteriores: Landau-Aharonov-Casher [45], Landau-He-McKellar-Wilkens [48] e Landau-Wei-Hai-Wei [50]. A descrição desses estados é brevemente apresentada com o propósito de torna o capítulo o mais completo possível. Na última seção é apresentado uma provável aplicação das fases de Berry para tais sistemas no contexto de Computação Quântica Holonômica [69, 70, 72, 73].

4.1 Fase de Berry

Ao considerar um sistema com Hamiltoniano H , que pode ser alterado por uma variação de um conjunto de parâmetros $\vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)$, do qual H depende, podemos evoluir tal sistema no tempo e estudá-lo através da mudança do parâmetro \vec{R} . O conjunto de N parâmetros indicado por \vec{R} é um vetor no chamado espaço de parâmetros. No entanto, a evolução do sistema entre os tempos $t = 0$ e $t = T$ pode ser obtida com o transporte ao redor de um caminho fechado $\vec{R}(t)$ no espaço de parâmetros, com o Hamiltoniano dado por $H(\vec{R}(t))$ de onde temos que $\vec{R}(T) = \vec{R}(0)$. Esse caminho vai ser chamado de agora em diante de circuito e denotado por \mathcal{C} .

Ao considerar que T é grande o suficiente, quando comparado com o tempo da perturbação do sistema, de modo que a cada instante o sistema satisfaça a equação de Schroedinger. Nessa consideração que consiste a chamada aproximação adiabática [79].

O estado $\psi(t)$ tem sua evolução dada pela equação de Schroedinger

$$H(\vec{R}(t))|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle. \quad (4.1)$$

Em qualquer instante, a base natural consiste dos auto estados $|n(\vec{R})\rangle$, o qual consideraremos discretos, de $H(\vec{R})$ para $\vec{R} = \vec{R}(t)$, que satisfazem

$$H(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle = E_n(\vec{R})|n(\vec{R})\rangle, \quad (4.2)$$

com energia $E_n(\vec{R})$. Essa equação de auto valores não dá nenhuma relação entre as fase de auto estados $|n(\vec{R})\rangle$ em diferentes \vec{R} . Adiabaticamente, um sistema preparado em um desses estados $|n[\vec{R}(0)]\rangle$, que está relacionado a H , estará no estado $|n(\vec{R}(t))\rangle$ no tempo t .

Podemos escrever $|\psi(t)\rangle$ como sendo

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_n(\vec{R}(t'))\right] \exp[i\gamma_n(t)] |n(\vec{R}(t))\rangle. \quad (4.3)$$

O primeiro termo exponencial é fator de fase dinâmico. O ponto crucial está na fase $\gamma_n(t)$ que é não integrável; $\gamma_n(t)$ não pode ser escrito como uma função de \vec{R} e, em particular, não tem valor único para uma evolução geral do sistema, portanto $\gamma_n(T) \neq \gamma_n(0)$.

A função $\gamma_n(t)$ é determinada usando a exigência que $|\psi(t)\rangle$ satisfaça a equação de Schroedinger. Substituindo $|\psi(t)\rangle$ em (4.1), obtemos

$$\frac{d\gamma_n(t)}{dt} = i\langle n[\vec{R}(t)]|\nabla_{\vec{R}}|n[\vec{R}(t)]\rangle \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad (4.4)$$

onde $\nabla_{\vec{R}} = \frac{\partial}{\partial R_1}\hat{R}_1 + \frac{\partial}{\partial R_2}\hat{R}_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial R_N}\hat{R}_N$, um gradiente para o espaço dos N parâmetros. Assim, a fase geométrica é dada por:

$$\gamma_n(C) = \oint_C \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R} \quad (4.5)$$

onde $\gamma_n(C)$ é dado por uma integral de caminho no espaço de parâmetros, é independente de como o circuito é feito e $\vec{A}_n(\vec{R})$, conhecido como o potencial vetor de Mead-Berry, é dado por

$$\vec{A}_n(\vec{R}) = i\langle n(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}}|n(\vec{R})\rangle. \quad (4.6)$$

Para sistemas degenerados $|n(\vec{R}), s\rangle$, onde s é número quântico do espaço degenerado as conexões de Berry são escritas de forma parecida,

$$\vec{A}_n^{s',s}(\vec{R}) = i\langle n(\vec{R}), s'|\nabla_{\vec{R}}|n(\vec{R}), s\rangle, \quad (4.7)$$

com tudo, levando em conta as possibilidades de os estados inicial e final do sistema serem diferentes não só por uma fase, mas também pelo número quântico s , que pode ser qualquer outra grandeza física do sistema além da energia, por exemplo, o spin ou o momento angular orbital.

Pode-se desenvolver uma discussão sobre fases quânticas através da não consideração da adiabaticidade ou/e utilizando formas diferenciadas para tornar a formação de tais conceitos e definições mais rigorosas e gerais [104–108]. Os estudos de fases de quânticas para sistemas de partículas carregadas e partículas neutras com ênfase no surgimento de tais fases devido a presença de defeitos topológicos e propriedades geométricas do espaço em que tais sistemas se encontram podem ser visto na literatura [109–111].

4.2 Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau Análogos

Nas três partes que seguem mostraremos as fases de Berry construídas para os sistemas análogos de Landau ressaltando as diferenças e a riqueza de possibilidades para a fase de Berry de Landau-Wei-Han-Wei.

4.2.1 Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau-Aharonov-Casher

Para o sistema de Landau-Aharonov-Casher, partícula neutra com dipolo magnético $\vec{\mu} = \mu\hat{k}$ em meio a campo elétrico planar-radial, temos o Hamiltoniano dada por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right)^2 \right], \quad (4.8)$$

onde $\omega = \omega_{AC} = \frac{\mu\lambda}{mc^2} = \sigma|\omega|$, λ é a densidade de carga elétrica e $\sigma = \text{sign}(\mu\lambda)$ o qual indica o sentido da rotação do movimento clássico.

O auto estado do Hamiltoniano e do momento angular é dado por

$$|n, \ell\rangle = \frac{a_+^n b_-^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle \quad (4.9)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$, $|0, 0\rangle$ é o estado fundamental de momento angular zero e os operadores escada a_{\pm} e b_{\pm} são dados por

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2}\hbar} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right], \quad (4.10)$$

e

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right], \quad (4.11)$$

onde $l_m^2 = \frac{\hbar}{m|\omega_{AC}|}$.

Os operadores escada se relacionam com o auto estado $|n, \ell\rangle$ como segue

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (4.12)$$

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{n+\sigma\ell}|n, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n+\sigma\ell+1}|n, \ell+\sigma\rangle. \quad (4.13)$$

O estado deslocado dos níveis de Landau-Aharonov-Casher é definido por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle \quad (4.14)$$

onde

$$D(\nu) = \exp(\nu a_+ - \nu^* a_-) = e^{-|\nu|^2/2} e^{\nu a_+} e^{-\nu^* a_-}, \quad (4.15)$$

onde $\nu = \nu_x + i\nu_y$. A evolução temporal do estado deslocado dos estado deslocados de Landau-Aharonov-Casher é governado pelo Hamiltoniano dado por

$$H_{\nu} = D(\nu)HD^{\dagger}(\nu) = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\hbar}{2l_m^2}y - \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m}\nu_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{\hbar}{2l_m^2}x + \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m}\nu_y \right)^2 \right] \quad (4.16)$$

onde os dois novos termos que aparecem no Hamiltoniano são vistos como novas contribuições do potencial vetor $\vec{A}_{AC} = \hat{k} \times \vec{E}$ já mostrado nos outros capítulos. Essa nova contribuição do potencial vetor é encontrada por adição de uma campo elétrico planar e constante. Assim, incluindo um o campo elétrico $\vec{E}' = (E_x, E_y, 0)$, os parâmetros ν_x e ν_y dado em (4.16) são

$$\nu_x = -\frac{\mu l_m}{\sqrt{2}c^2\hbar} E_y \quad \text{and} \quad \nu_y = -\frac{\mu l_m}{\sqrt{2}c^2\hbar} E_x. \quad (4.17)$$

Note que a modificação do Hamiltoniano dado em (4.16) indicado pelos termos com os parâmetros definidos em (4.17) correspondem a transformação $(x, y) \rightarrow (x + \delta x, y + \delta y)$ na função de onda onde

$$\delta x = \frac{2\mu l_m^2}{c^2\hbar} E_x \quad \text{and} \quad \delta y = \frac{2\mu l_m^2}{c^2\hbar} E_y. \quad (4.18)$$

Com isso, o campo \vec{E}' causa um pequeno deslocamento nos estados de Landau-Aharonov-

Casher.

Agora, discutiremos a surgimento de fases de Berry para os estados deslocados dos níveis de Landau-Aharonov-Casher os quais tem sido construído no capítulo anterior. Então, vamos considerar uma evolução cíclica em um espaço degenerado que a função de onda de uma partícula quântica adquire uma fase de Berry não Abelianas a partir de uma evolução adiabática [61, 103]. O potencial vetor de Berry é dada por

$$A_n^{\ell',\ell}(\xi) = i \left\langle \nu, n, \ell' \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \right| \nu, n, \ell \right\rangle. \quad (4.19)$$

onde ξ é o parâmetro de controle do sistema. No caso do sistema Landau-Aharonov-Casher deslocado, os parâmetros de controle são três: as componentes E_x e E_y do campo elétrico \vec{E}' e a densidade de carga elétrica λ . Como nos outros casos iremos considerar os parâmetros de controles todos positivos, o que resulta em $\sigma = +1$. Assim, para um nível n de energia, as componentes não nulas do potencial vetor de Berry (4.19) são

$$A_n^{\ell',\ell}(\xi) = - \left(\nu_x \frac{\partial \nu_y}{\partial \xi} - \nu_y \frac{\partial \nu_x}{\partial \xi} \right) \delta_{\ell',\ell} - \frac{1}{l_m} \frac{\partial l_m}{\partial \xi} \left(\nu^* \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + \nu \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right) \quad (4.20)$$

Para o sistema Landau-Aharonov-Casher há um espaço tridimensional de parâmetros com os componentes E_x , E_y e λ . As componentes do potencial de Berry são

$$A_n^{\ell',\ell}(E_x) = -\frac{E_y}{16u^2\lambda} \delta_{\ell',\ell} \quad \text{e} \quad A_n^{\ell',\ell}(E_y) = -\frac{E_x}{16u^2\lambda} \delta_{\ell',\ell}. \quad (4.21)$$

$$A_n^{\ell',\ell}(\lambda) = -\frac{u}{\lambda^{3/2}} \left[(E_y - iE_x) \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + (E_y + iE_x) \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] \quad (4.22)$$

onde $u = \sqrt{\frac{\hbar c^2}{8\mu}}$. Podemos observar, a partir de (4.21), que as componentes $A_n^{\ell',\ell}(E_x)$ e $A_n^{\ell',\ell}(E_y)$ dão origem a um fase de Berry Abelianas pois tais conexões são proporcionais a matriz identidade. Por considerar $\ell' = \ell$ e manter o parâmetro de controle λ constante, a fase de Berry correspondente é

$$\gamma_n^{(1)} = \oint_{C_1} [A_n^{\ell,\ell}(E_x) dE_x + A_n^{\ell,\ell}(E_y) dE_y] = -\frac{1}{16u^2\lambda} S_1, \quad (4.23)$$

onde C_1 é o caminho da evolução adiabática no plano $E_x - E_y$ e S_1 é a área circundada por tal caminho como mostrar a Figura 4.2.1. A fase de Berry obtida em (4.23) corresponde a um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm [55], pois a fase é não abeliano.

Por outro lado, a componente $A_n^{\ell',\ell}(\lambda)$ mostrada em (4.22) dá origem a fase de Berry

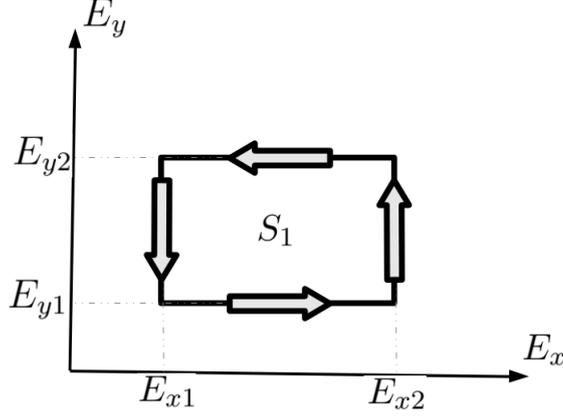


Figura 4.1: Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle E_x e E_y no plano $E_x - E_y$.

não abelianas pois ela possui termos não diagonais para cada nível n de energia com $\ell' \neq \ell$. Observe que esses termos não diagonais aparecem devido aos parâmetros de deslocamentos apresentados em (4.17). Vamos considerar, a partir de agora, um caso particular no qual $E_x = 0$. A fase de Berry não abeliana para uma evolução adiabática de λ e E_y é

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(2)} &= \oint_{C_2} \left[A_n^{\ell',\ell}(E_y) dE_y + A_n^{\ell',\ell}(\lambda) d\lambda \right] \\ &= 2u \left[\sqrt{n + \sigma\ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + \sqrt{n + \sigma\ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] S_2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde S_2 é a área interna do caminho fechado mostrado na Figura 4.2.1. A fase de Berry obtida em (4.24) é uma fase de Berry não abeliana. S_2 é dado por

$$S_2 = (E_{y2} - E_{y1}) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right). \quad (4.25)$$

Para que a fase de Berry não abeliana mostrada em (4.24) seja não nula as variações dos parâmetros de controle E_y e λ são fundamentais, mesmo só existindo termos não diagonais. Para $\Delta E_y = 0$ ou $\Delta(\lambda^{-1/2}) = 0$ podemos ver que a fase de Berry não abeliana (4.24) se anula.

Outros casos a considerar são os casos nos quais a componente E_x não é nulo. Para esses casos deve-se lidar com os três parâmetros de controle E_x , E_y e λ , o que torna tais análises mais difíceis. Para os casos com campo elétrico adicional nulo, $\vec{E}' = \vec{0}$, as componentes do potencial vetor de Berry $A_n^{\ell',\ell}(E_x)$, $A_n^{\ell',\ell}(E_y)$ e $A_n^{\ell',\ell}(\lambda)$ são todas nulas, e conseqüentemente as fase de Berry correspondentes também o são. Com isso, temos que os estados de Landau-Aharonov-Casher não deslocados (com $\vec{E}' = \vec{0}$) possuem fases de Berry nulas para variação do campo elétrico [112].

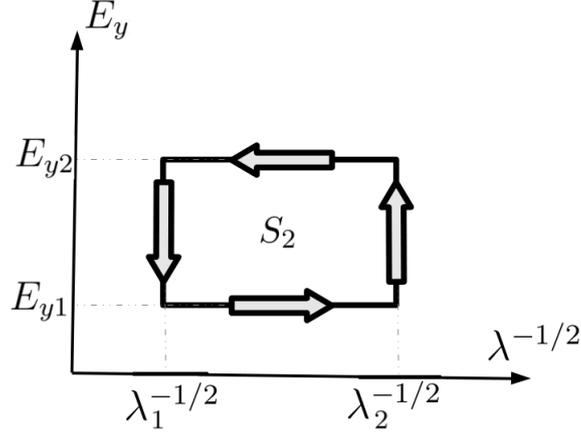


Figura 4.2: Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle E_y e λ no plano $E_y - \lambda^{-1/2}$.

4.2.2 Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins

Para o sistema de Landau-He-McKellar-Wilkins, partícula neutra com dipolo elétrico $\vec{d} = d\hat{k}$ em meio a campo magnético planar-radial, temos o Hamiltoniano dada por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right)^2 \right], \quad (4.26)$$

onde $\omega = \omega_{\text{HMW}} = -\frac{\Phi d}{m} = \sigma|\omega|$, Φ é a densidade de carga magnética efetiva e $\sigma = \text{sign}(-\Phi d)$ o qual indica o sentido da rotação do movimento clássico.

O auto estado do Hamiltoniano e do momento angular é dado por

$$|n, \ell\rangle = \frac{a_+^n b_-^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle \quad (4.27)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$, $|0, 0\rangle$ é o estado fundamental de momento angular zero e os operadores escada a_{\pm} e b_{\pm} são dados por

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2}\hbar} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right], \quad (4.28)$$

e

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right], \quad (4.29)$$

onde $l_m^2 = \frac{\hbar}{m|\omega_{\text{HMW}}|}$.

Os operadores escada se relacionam com o auto estado $|n, \ell\rangle$ como segue

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (4.30)$$

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{n+\sigma\ell}|n, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n+\sigma\ell+1}|n, \ell+\sigma\rangle. \quad (4.31)$$

O estado deslocado dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins é definido por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle \quad (4.32)$$

onde

$$D(\nu) = \exp(\nu a_+ - \nu^* a_-) = e^{-|\nu|^2/2} e^{\nu a_+} e^{-\nu^* a_-}, \quad (4.33)$$

onde $\nu = \nu_x + i\nu_y$. A evolução temporal do estado deslocado dos estado deslocados de Landau-He-McKellar-Wilkins é governado pelo Hamiltoniano dado por

$$\begin{aligned} H_\nu &= D(\nu)HD^\dagger(\nu) \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\hbar}{2l_m^2}y - \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m}\nu_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{\hbar}{2l_m^2}x + \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m}\nu_y \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde os dois novos termos que aparecem no Hamiltoniano são vistos como novas contribuições do potencial vetor $\vec{A}_{\text{HWM}} = \hat{k} \times \vec{B}$ já mostrado nos outros capítulos. Essa nova contribuição do potencial vetor é encontrada por adição de uma campo magnético planar e constante. Assim, incluindo um o campo magnético $\vec{B}' = (B_x, B_y, 0)$, os parâmetros ν_x e ν_y dado em (4.34) são

$$\nu_x = -\frac{l_m d}{\sqrt{2}\hbar} B_y \quad \text{and} \quad \nu_y = -\frac{l_m d}{\sqrt{2}\hbar} B_x. \quad (4.35)$$

Note que a modificação do Hamiltoniano dado em (4.34) indicado pelos termos com os parâmetros definidos em (4.35) correspondem a transformação $(x, y) \rightarrow (x + \delta x, y + \delta y)$ na função de onda onde

$$\delta x = \frac{2l_m^2 d}{\hbar} B_x \quad \text{and} \quad \delta y = \frac{2l_m^2 d}{\hbar} B_y. \quad (4.36)$$

Com isso, o campo \vec{B}' causa um pequeno deslocamento nos estados de Landau-He-McKellar-Wilkins.

Agora, discutiremos a surgimento de fases de Berry para os estados deslocados dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins os quais tem sido construído no capítulo anterior.

Então, vamos considerar uma evolução cíclica em um espaço degenerado. Com isso, a função de onda de uma partícula quântica adquire uma fase de Berry não Abelianas a partir de uma evolução adiabática [61, 103]. O potencial vetor de Berry é dada por

$$A_n^{\ell',\ell}(\xi) = i \left\langle \nu, n, \ell' \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \right| \nu, n, \ell \right\rangle. \quad (4.37)$$

onde ξ é o parâmetro de controle do sistema. No caso do sistema Landau-He-McKellar-Wilkins deslocado, os parâmetros de controle são três: as componentes B_x e B_y do campo magnético \vec{B}' e a densidade de carga magnética efetiva Φ . Como nos outros casos iremos considerar os parâmetros de controles todos positivos, o que resulta em $\sigma = -1$. Assim, para um nível n de energia, as componentes não nulas do potencial vetor de Berry (4.37) são

$$A_n^{\ell',\ell}(\xi) = - \left(\nu_x \frac{\partial \nu_y}{\partial \xi} - \nu_y \frac{\partial \nu_x}{\partial \xi} \right) \delta_{\ell',\ell} - \frac{1}{l_m} \frac{\partial l_m}{\partial \xi} \left(\nu^* \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + \nu \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right) \quad (4.38)$$

Para o sistema Landau-He-McKellar-Wilkins há um espaço tridimensional de parâmetros com os componentes B_x , B_y e Φ . As componentes do potencial de Berry são

$$A_n^{\ell',\ell}(E_x) = -\frac{E_y}{16u^2\Phi} \delta_{\ell',\ell} \quad \text{e} \quad A_n^{\ell',\ell}(E_y) = -\frac{E_x}{16u^2\Phi} \delta_{\ell',\ell}. \quad (4.39)$$

$$A_n^{\ell',\ell}(\Phi) = -\frac{u}{\lambda^{3/2}} \left[(B_y - iB_x) \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + (B_y + iB_x) \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] \quad (4.40)$$

onde $u = \sqrt{\frac{\hbar}{8d}}$. Podemos observar, a partir de (4.39), que as componentes $A_n^{\ell',\ell}(E_x)$ e $A_n^{\ell',\ell}(E_y)$ dão origem a um fase de Berry Abelianas pois tais conexões são proporcionais a matriz identidade. Por considerar $\ell' = \ell$ e manter o parâmetro de controle Φ constante, a fase de Berry correspondente é

$$\gamma_n^{(1)} = \oint_{C_1} [A_n^{\ell,\ell}(B_x) dB_x + A_n^{\ell,\ell}(B_y) dB_y] = -\frac{1}{16u^2\Phi} S_1, \quad (4.41)$$

onde C_1 é o caminho da evolução adiabática no plano $B_x - B_y$ e S_1 é a área circundada por tal caminho como mostra a Figura 4.2.2. A fase de Berry obtida em (4.23) corresponde a um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm [55], pois a fase obtida é não abelianas.

Por outro lado, a componente $A_n^{\ell',\ell}(\Phi)$ mostrada em (4.40) dá origem a fase de Berry não abelianas pois ela possui termos não diagonais para cada nível n de energia com $\ell' \neq \ell$. Observe que esses termos não diagonais aparecem devido aos parâmetros de deslocamentos apresentados em (4.35). Vamos considerar, a partir de agora, um caso particular no qual

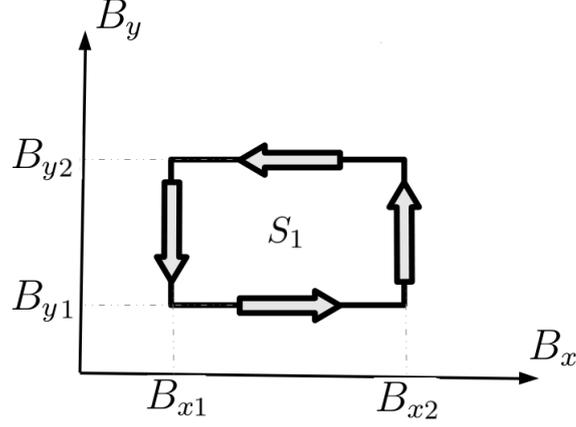


Figura 4.3: Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle B_x e B_y no plano $B_x - B_y$.

$B_x = 0$. A fase de Berry não abeliana para uma evolução adiabática de Φ e B_y é

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(i)} &= \oint_{C_2} \left[A_n^{\ell', \ell}(B_y) dB_y + A_n^{\ell', \ell}(\Phi) d\Phi \right] \\ &= 2u \left[\sqrt{n + \sigma\ell + 1} \delta_{\ell', \ell + \sigma} + \sqrt{n + \sigma\ell} \delta_{\ell', \ell - \sigma} \right] S_2, \end{aligned}$$

onde S_2 é a área interna do caminho fechado mostrado na Figura 4.2.2. A fase de Berry obtida em (4.42) é uma fase de Berry não abeliana. S_2 é dado por

$$S_2 = (B_{y2} - B_{y1}) \left(\frac{1}{\sqrt{\Phi_2}} - \frac{1}{\sqrt{\Phi_1}} \right). \quad (4.42)$$

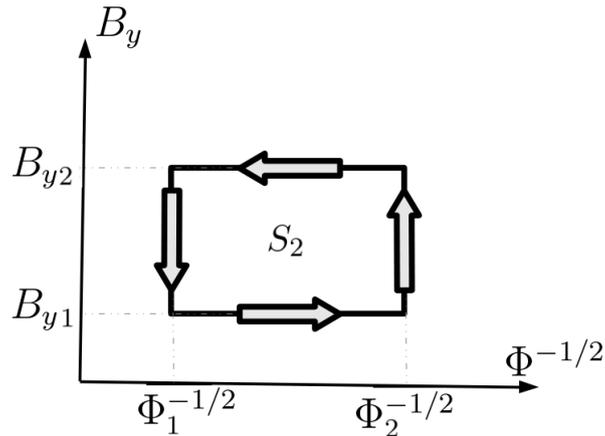


Figura 4.4: Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle B_y e Φ no plano $B_y - \Phi^{-1/2}$.

Para que a fase de Berry não abeliana mostrada em (4.42) seja não nula as variações

dos parâmetros de controle B_y e Φ são fundamentais, mesmo só existindo termos não diagonais. Para $\Delta B_y = 0$ ou $\Delta(\Phi^{-1/2}) = 0$ podemos ver que a fase de Berry não abeliana (4.42) se anula.

Outros casos a considerar são os casos nos quais a componente B_x não é nulo. Para esses casos deve-se lidar com os três parâmetros de controle B_x , B_y e Φ , o que torna tais análises mais difíceis. Para os casos com campo magnético adicional nulo, $\vec{B}' = \vec{0}$, as componentes do potencial vetor de Berry $A_n^{\ell',\ell}(B_x)$, $A_n^{\ell',\ell}(B_y)$ e $A_n^{\ell',\ell}(\Phi)$ são todas nulas, e conseqüentemente as fase de Berry correspondentes também o são, com isso temos os estados de Landau-He-McKellar-Wilkins não deslocados ($\vec{B}' = \vec{0}$) possuem fases de Berry nulas para variação do campo elétrico [113].

4.2.3 Fase de Berry de Estados Deslocados de Níveis de Landau-Wei-Han-Wei

Para o sistema de Landau-Wei-Han-Wei, partícula neutra com dipolo elétrico induzido $\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ em meio a campo elétrico planar-radial e campo magnético constante uniforme na direção de z, temos o Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{m\omega}{2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{m\omega}{2} x \right)^2 \right], \quad (4.43)$$

onde $\omega = \omega_{\text{WHW}} = \frac{\alpha\lambda B}{m} = \sigma|\omega|$, com α sendo a polarizabilidade elétrica, λ é a densidade de carga elétrica, B é a componente z do campo magnético e $\sigma = \text{sinal}(\lambda B)$ o qual indica o sentido da rotação do movimento clássico.

O auto estado do Hamiltoniano e no momento angular é dado por

$$|n, \ell\rangle = \frac{a_+^n b_-^{n+\sigma\ell}}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle \quad (4.44)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$, $|0, 0\rangle$ é o estado fundamental de momento angular zero e os operadores escada a_{\pm} e b_{\pm} são dados por

$$a_{\pm} = \frac{l_m}{\sqrt{2}\hbar} \left[p_x \mp i\sigma p_y \pm \frac{i\hbar}{2l_m^2} (x \mp i\sigma y) \right], \quad (4.45)$$

e

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}l_m} \left[\frac{1}{2} (x \mp i\sigma y) \pm \frac{il_m^2}{\hbar} (p_x \mp i\sigma p_y) \right], \quad (4.46)$$

onde $l_m^2 = \frac{\hbar}{m|\omega_{\text{WHW}}|}$.

Os operadores escada se relacionam com o auto estado $|n, \ell\rangle$ como segue

$$a_+|n, \ell\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad a_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n}|n-1, \ell+\sigma\rangle, \quad (4.47)$$

$$b_+|n, \ell\rangle = \sqrt{n+\sigma\ell}|n, \ell-\sigma\rangle \quad \text{e} \quad b_-|n, \ell\rangle = \sqrt{n+\sigma\ell+1}|n, \ell+\sigma\rangle. \quad (4.48)$$

O estado deslocado dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei é definido por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle \quad (4.49)$$

onde

$$D(\nu) = \exp(\nu a_+ - \nu^* a_-) = e^{-|\nu|^2/2} e^{\nu a_+} e^{-\nu^* a_-}, \quad (4.50)$$

onde $\nu = \nu_x + i\nu_y$. A evolução temporal do estado deslocado dos estado deslocados de Landau-Wei-Han-Wei é governado pelo Hamiltoniano dado por

$$H_\nu = D(\nu)HD^\dagger(\nu) = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\hbar}{2l_m^2}y - \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m}\nu_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{\hbar}{2l_m^2}x + \frac{\sqrt{2}\hbar}{l_m}\nu_y \right)^2 \right] \quad (4.51)$$

onde os dois novos termos que aparecem no Hamiltoniano são vistos como novas contribuições do potencial vetor $\vec{A}_{\text{WHW}} = \vec{E} \times \vec{B}$ já mostrado nos outros capítulos. Essa nova contribuição do potencial vetor é encontrada por adição de uma campo elétrico planar e constante. Assim, incluindo um o campo elétrico $\vec{E}' = (E_x, E_y, 0)$, os parâmetros ν_x e ν_y dado em (4.51) são

$$\nu_x = -\frac{\alpha l_m}{\sqrt{2}\hbar} E_y \quad \text{and} \quad \nu_y = -\frac{\alpha l_m}{\sqrt{2}\hbar} E_x. \quad (4.52)$$

Note que a modificação do Hamiltoniano dado em (4.51) indicado pelos termos com os parâmetros definidos em (4.52) correspondem a transformação $(x, y) \rightarrow (x + \delta x, y + \delta y)$ na função de onda onde

$$\delta x = \frac{2\alpha l_m^2}{\hbar} E_x \quad \text{and} \quad \delta y = \frac{2\alpha l_m^2}{\hbar} E_y. \quad (4.53)$$

Com isso, o campo \vec{E}' causa um pequeno deslocamento nos estados de Landau-Wei-Han-Wei.

Agora, discutiremos a surgimento de fases de Berry para os estados deslocados dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei os quais tem sido construído no capítulo anterior. Então, vamos considerar uma evolução cíclica em um espaço degenerado. Com isso, a função de onda de uma partícula quântica adquire uma fase de Berry não Abelianas a partir de uma

evolução adiabática [61, 103]. O potencial vetor de Berry é dada por

$$A_n^{\ell',\ell}(\xi) = \left\langle \nu, n, \ell' \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \right| \nu, n, \ell \right\rangle. \quad (4.54)$$

onde ξ é o parâmetro de controle do sistema. No caso do sistema Landau-Wei-Han-Wei deslocado, os parâmetros de controle são quatro: as componentes E_x e E_y do campo elétrico \vec{E}' , a densidade de carga elétrica λ e B a componente z do campo magnético \vec{B} . A existência de quatro parâmetros de controle é a principal novidade desse sistema, pois os outros sistema apresentavam apenas três parâmetros. Como nos outros casos iremos considerar os parâmetros de controles todos positivos, o que resulta em $\sigma = -1$. Assim, para um nível n de energia, as componentes não nulas do potencial vetor de Berry (4.54) são encontradas a partir de

$$\begin{aligned} A_n^{\ell',\ell}(\xi) = & - \left(\nu_x \frac{\partial \nu_y}{\partial \xi} - \nu_y \frac{\partial \nu_x}{\partial \xi} \right) \delta_{\ell',\ell} \\ & - \frac{1}{l_m} \frac{\partial l_m}{\partial \xi} \left(\nu^* \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + \nu \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para o sistema Landau-Wei-Han-Wei há um espaço quadridimensional de parâmetros com os componentes E_x , E_y , λ e B . As componentes são

$$A_n^{\ell',\ell}(E_x) = -\frac{E_y}{16u^2\lambda B} \delta_{\ell',\ell} \quad \text{e} \quad A_n^{\ell',\ell}(E_y) = -\frac{E_x}{16u^2\lambda B} \delta_{\ell',\ell}. \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} A_n^{\ell',\ell}(\lambda) = & -\frac{u}{\lambda^{3/2}B^{1/2}} \left[(E_y - iE_x) \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} \right. \\ & \left. + (E_y + iE_x) \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} A_n^{\ell',\ell}(B) = & -\frac{u}{\lambda^{1/2}B^{3/2}} \left[(E_y - iE_x) \sqrt{n + \sigma \ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} \right. \\ & \left. + (E_y + iE_x) \sqrt{n + \sigma \ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde $u = \sqrt{\frac{\hbar}{8\alpha}}$. Podemos observar, a partir de (4.56), que as conexões 1-forma $A_n^{\ell',\ell}(E_x)$ e $A_n^{\ell',\ell}(E_y)$ dão origem a um fase de Berry Abelianas pois tais conexões são proporcionais a matriz identidade. Por considerar $\ell' = \ell$ e manter os parâmetros de controle λ e B constantes, a fase de Berry correspondente é

$$\gamma_n^{(1)} = \oint_{C_1} [A_n^{\ell,\ell}(E_x) dE_x + A_n^{\ell,\ell}(E_y) dE_y] = -\frac{1}{16u^2\lambda B} S_1, \quad (4.59)$$

onde C_1 é o caminho da evolução adiabática no plano $E_x - E_y$ e S_1 é a área circundada por tal caminho como mostrar a Figura 4.2.3. A fase de Berry obtida em (4.59) corresponde a um efeito análogo ao efeito Aharonov-Bohm [55], pois a fase é não abeliano.

Por outro lado, as componentes $A_n^{\ell',\ell}(\lambda)$ e $A_n^{\ell',\ell}(B)$ mostradas em (4.58) dão origem

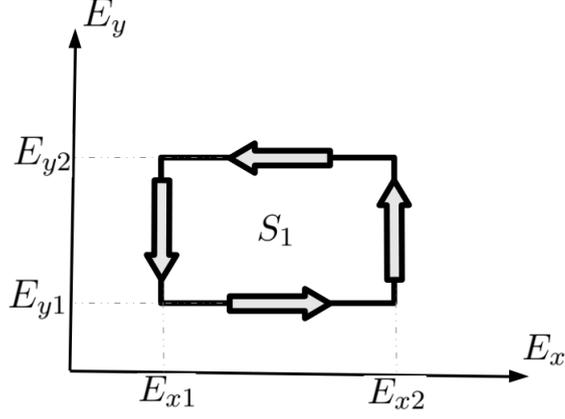


Figura 4.5: Caminho fechado da evolução dos parâmetros de controle E_x e E_y no plano $E_x - E_y$.

a fase de Berry não abelianas pois as tais conexões possuem termos não diagonais para cada nível n de energia com $\ell' \neq \ell$. Observe que esses termos não diagonais aparecem devido aos parâmetros de deslocamentos apresentados em (4.52). Vamos considerar, a partir de agora, um caso particular no qual $E_x = 0$. A fase de Berry não abeliana para uma evolução adiabática de λ , B e E_y é

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(i)} &= \oint_{C_2} \left[A_n^{\ell',\ell}(E_y) dE_y + A_n^{\ell',\ell}(\lambda) d\lambda + A_n^{\ell',\ell}(B) dB \right] \\ &= 2u \left[\sqrt{n + \sigma\ell + 1} \delta_{\ell',\ell+\sigma} + \sqrt{n + \sigma\ell} \delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] S_i, \end{aligned}$$

onde S_i esta relacionado com um dos caminhos fechados destacados na Figura 4.2.3. A fase de Berry obtida em (4.60) é uma fase de Berry não abeliana. Como exemplo, três escolhas de caminhos possíveis são mostrados na Figura 4.2.3: $S_2 = S_{ABCHEFA}$, $S_3 = S_{ABCHGFA}$ e $S_4 = S_{ADCHEFA}$. Esses caminhos são dados por

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(\frac{E_{y2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{E_{y1}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{B_2}} - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right) - \left(\frac{E_{y1}}{\sqrt{B_2}} - \frac{E_{y2}}{\sqrt{B_1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right), \\ S_3 &= \left(\frac{E_{y2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{E_{y1}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{B_2}} - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right) - E_{y2} \left(\frac{1}{\sqrt{B_2}} - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \\ S_4 &= \left(\frac{E_{y1}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{E_{y2}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{B_2}} - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right) - E_{y1} \left(\frac{1}{\sqrt{B_2}} - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Observe que, através da fase de Berry não abeliana mostrada em (4.60) é determinado pelo parâmetro de controle λ e B , a existência de tais fases dependem da variação do parâmetro de controle E_y . Se $E_{y1} = E_{y2}$, podemos ver que a fase de Berry não abeliana (4.60) se anula. Além disso, podemos obter outras fase de Berry com a mesma forma funcional apresentada em (4.60) apenas por escolher um outro caminho do espaço de

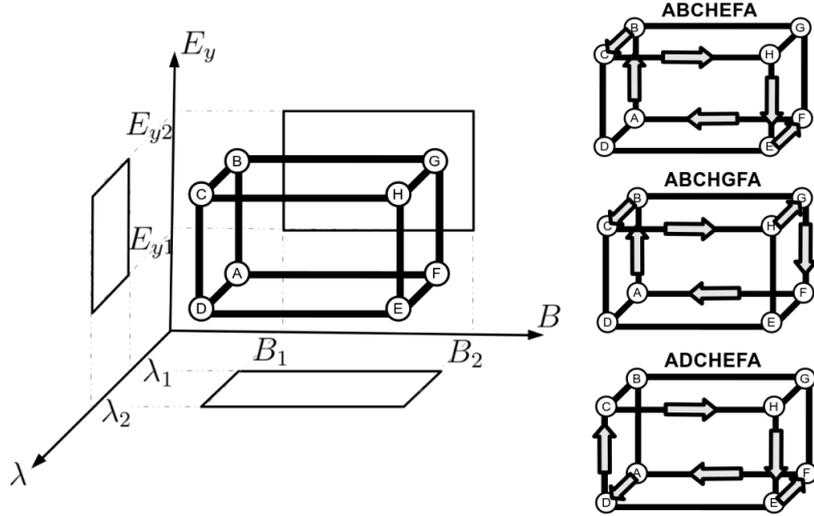


Figura 4.6: Caminhos possíveis da evolução adiabática no espaço tridimensional de parâmetros.

parâmetros.

Outros casos a considerar são os casos nos quais a componente E_x não é nulo. Para esses casos deve-se lidar com os quatro parâmetros de controle E_x , E_y , λ e B , o que torna tais análises mais difíceis. Para os casos com campo elétrico adicional nulo, $\vec{E}' = \vec{0}$, as conexões de 1-forma $A_n^{\ell',\ell}(E_x)$, $A_n^{\ell',\ell}(E_y)$, $A_n^{\ell',\ell}(\lambda)$ e $A_n^{\ell',\ell}(B)$ são todas nulas, e consequentemente as fase de Berry correspondentes também o são.

4.3 Proposta de Computação Quântica Holonômica

4.3.1 Computação Quântica Holonômica

Nas últimas décadas um dos assuntos que vem sendo de grande interesse para comunidade acadêmica, tanto de Física, Matemática, Ciência da Computação e outros, é a computação quântica. A ideia de existir a possibilidade de se construir um computador quântico foi discutida na comunidade científica em 1995 [67, 68, 114–116] e em 1998 [117]. Em 2000, os aspectos mais gerais sobre a computação quântica foram reunidos em livros [66, 118] e como também em 2006 [119].

A chamada computação quântica holonômica, um dos ramos da computação quântica, foi proposta em 1999 [69], sendo discutida ainda mais no mesmo ano [70] e aprimorada matematicamente em 2001 [71] usando fases geométricas não abelianas [61]. Sua proposta estava baseada em realizar a computação quântica através de fases de Berry generaliza-

das, isto é, através de holonomias não-abelianas, as quais são transformações unitárias que quando aplicadas em um vetor fornecem toda informação geométrica referente ao transporte paralelo deste vetor ao longo de uma curva fechada.

O fundamento da computação quântica holonômica é codificar a informação quântica em um espaço de n -degenerados auto estados de um Hamiltoniano, H_0 , com um auto valor E_0 . O Hamiltoniano H_0 pertence a uma família de Hamiltonianos $\{H(\zeta)\}$, $H_0 = H(\zeta_0)$, na qual não há cruzamento de níveis de energia para qualquer valor de ζ , onde ζ é um parâmetro de controle relacionado com o sistema que o Hamiltoniano descreve. Ao alterar ζ podemos manipular os auto estados do Hamiltoniano. Podemos simplificar, considerando apenas os Hamiltonianos isoespectrais escritas da forma $H(\zeta) = U(\zeta)H_0U^\dagger(\zeta)$, onde $U(\zeta)$ é um operador unitário.

De forma generalizada cada valor ζ , do ponto de vista físico, podem ser pensados como campos externos, tais como os campos elétricos e magnéticos, ou de ligações entre subsistemas. Seja C um caminho fechado feito do espaço dos parâmetros ao variar ζ , com ponto no valor ζ_0 rumo a outros valores de ζ e voltando ao ponto ζ_0 , lentamente com respeito ao intervalo de tempo mais longo desenvolvido. No presente caso a evolução é adiabática, ou seja, sem transições entre diferentes níveis de energia. Se $|\psi\rangle_{\text{in}}$ é o estado inicial, no final deste processo de evolução dos parâmetro de controle ele se torna

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = e^{-iE_0T/\hbar}\Gamma(C)|\psi\rangle_{\text{in}} \quad (4.61)$$

O primeiro fator aqui é apenas uma fase dinâmica global e será omitida nas discussões que faremos, pois o segundo fator é o que possui as propriedades pertinentes a nossa discussão. A segunda contribuição, a holonomia $\Gamma(C)$, tem uma origem puramente geométrica e suas características estão relacionadas com propriedades do espaço dos parâmetros. Podemos escrever

$$\Gamma(C) = P \exp \left(i \int_C A_\zeta d\zeta \right) \quad (4.62)$$

onde P denota o sentido do caminho, $\vec{\zeta}$ e

$$A_\zeta = A_\zeta^{(s',s)} = i \langle \psi_{s'} | \frac{\partial}{\partial \zeta} | \psi_s \rangle \quad (4.63)$$

com s e s' indicando o número quântico relacionado com a degenerescência dos auto estados que foram usados para codificar a informação quântica.

Diversas aplicações da computação quântica holonômica pode ser encontrada facilmente na literatura [120–132].

4.3.2 Computação Quântica para Estados Deslocados de Níveis Análogos de Landau

Será apresentado agora a nossa proposta para uma computação quântica holonômica para os estados deslocados dos níveis de Landau. Usaremos os estados deslocados dos níveis Landau-Aharonov-Casher para fazer tal apresentação, mas tal procedimento pode ser feito com os estados deslocados dos níveis Landau-He-McKellar-Wilkins e Landau-Wei-Han-Wei que será obtido resultados muito similares.

Os estados deslocados dos níveis de Landau-Aharonov-Casher são dados por

$$|\nu, n, \ell\rangle = D(\nu)|n, \ell\rangle = \frac{(b_-)^{n+\sigma\ell} D(\nu) (a_+)^n}{\sqrt{n!(n+\sigma\ell)!}} |0, 0\rangle \quad (4.64)$$

como já apresentado nas seções anteriores. Como feito para a obtenção da fase de Berry desse sistema, consideraremos a partir daqui $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ o que implica em $\sigma = +1$. Assim, com base na correspondência $n = \eta + \frac{|\ell| - \sigma\ell}{2}$ discutida no primeiro capítulo, temos que os estados deslocados do nível fundamental Landau-Aharonov-Casher, isto é $n = 0$ e $\ell \geq 0$, o valor possível de η é zero. Já para os estados deslocados do primeiro nível excitado ($n = 1$), temos que os valores possíveis de ℓ são $\ell = -1$, que corresponde à $\eta = 0$, e $\ell \geq 0$, que corresponde à $\eta = 1$. Assim, temos que os estados definidos por $\eta = 0$ e $\ell = -1$, e $\eta = 1$ e $\ell \geq 0$ são degeneradas, cujo correspondente nível de energia é de $n = 1$.

Com isso, podemos definir uma possível base lógica usando os estados $|\nu, n, \ell\rangle$. Tal base é definida por

$$|\bar{1}\rangle = |\nu, 1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\bar{0}\rangle = \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} |\nu, 1, \ell\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Desde que os estados com $l = 0, 1, 2, \dots$ estão agora colapsados em uma único estado, não há como distingui-los entre si relativo o nível de energia, portanto, podemos considerá-los como um único estado, sem perda de generalidade. Assim, mesmo que existe a superposição de estados dadas em (4.65), podemos considerar $n = 1$ o nível de energia que possuem dois estados degenerados.

Assim, podemos construir holonomias quânticas envolvendo os estados deslocados usando a base lógica (4.65), pois isso a representação matricial dos estados. Para isso, usamos o potencial vetor de Mead-Berry para os estados deslocados desse sistema já calculado, mas para o nível de energia $n = 1$ que é dado por

$$A_1^{\ell', \ell}(\zeta) = - \left(\nu_x \frac{\partial \nu_y}{\partial \zeta} - \nu_y \frac{\partial \nu_x}{\partial \zeta} \right) \delta_{\ell', \ell} - \frac{1}{l_m} \frac{\partial l_m}{\partial \zeta} \left(\nu^* \sqrt{\ell+2} \delta_{\ell', \ell+\sigma} + \nu \sqrt{\ell+1} \delta_{\ell', \ell-\sigma} \right) \quad (4.66)$$

Que para o sistema Landau-Aharonov-Casher onde o espaço de parâmetros é tridimensional(E_x, E_y, ℓ), os componentes do potencial de Mead-Berry são

$$A_1^{\ell',\ell}(E_x) = -\frac{E_y}{16u^2\lambda}\delta_{\ell',\ell} \quad \text{e} \quad A_1^{\ell',\ell}(E_y) = -\frac{E_x}{16u^2\lambda}\delta_{\ell',\ell}. \quad (4.67)$$

$$A_1^{\ell',\ell}(\lambda) = -\frac{u}{\lambda^{3/2}} \left[(E_y - iE_x)\sqrt{\ell+2}\delta_{\ell',\ell+\sigma} + (E_y + iE_x)\sqrt{\ell+1}\delta_{\ell',\ell-\sigma} \right] \quad (4.68)$$

onde $u = \sqrt{\frac{\hbar c^2}{8\mu}}$.

Como pode ser visto em (4.23) a fase de Berry encontrada para a evolução dos parâmetros E_x e E_y , apenas é uma fase global, possui holonomia $\Gamma(C_1) = \exp(i\gamma_1^{(1)})$ dada por

$$\Gamma(C_1) = \exp\left(-i\frac{S_1}{16u^2\lambda}\right) \mathbb{I} \quad (4.69)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade 2×2 , a qual possui essas dimensões devido à nossa base lógica possuir 2 estados. Com isso,

$$\Gamma(C_1)|\bar{0}\rangle = \exp\left(-i\frac{S_1}{16u^2\lambda}\right)|\bar{0}\rangle \quad \text{e} \quad \Gamma(C_1)|\bar{1}\rangle = \exp\left(-i\frac{S_1}{16u^2\lambda}\right)|\bar{1}\rangle, \quad (4.70)$$

o que nos mostra que para a evolução dos parâmetros seguindo o caminho no plano $E_x - E_y$, Figura (4.2.1), a porta lógica produzida pela holonomia é apenas uma porta lógica de fase global que para valores específicos de parâmetros, $S_1 = 16u^2\lambda$, pode até ser considerada uma porta identidade.

Agora fazendo outra análise, quando fazemos a evolução dos parâmetros agora no plano $(E_y - \lambda^{-1/2})$, obtemos a fase de Berry apresentado em (4.24), o que nos mostra significativa diferença devido a presença dos $\delta_{\ell',\ell-\sigma}$ e $\delta_{\ell',\ell+\sigma}$, lembrando que $\sigma = +1$ para nossa discussão. A Holonomia para tal fase é

$$\Gamma(C_2) = \exp(i\gamma_1^{(2)}) = e^{2iuS_2(\tau_+\sigma_x+i\tau_-\sigma_y)} \quad (4.71)$$

onde $\tau_{\pm} = (\sqrt{\ell+2} \pm \sqrt{\ell+1})/2$, e σ_x e σ_y são as matrizes de Pauli.

Vemos então que quando aplicado no estado $|\bar{1}\rangle$, ou seja, $\ell = -1$, o resultado é o que segue

$$\Gamma(C_2)|\bar{1}\rangle = e^{2iuS_2(\tau_+\sigma_x+i\tau_-\sigma_y)}|\bar{1}\rangle = e^{iuS_2(\sigma_x+i\sigma_y)}|\bar{1}\rangle, \quad (4.72)$$

pois para $\ell = -1$, $\tau_+ = \tau_- = 1/2$. Devido às matrizes de Pauli na fase da holonomia, podemos encontrar como resultado da aplicação de $\Gamma(C_2)$ uma combinação linear de estados de diversos valores de ℓ , mas todos no intervalo $0 \leq \ell < \infty$, o que define o estado $|\bar{0}\rangle$. Já para aplicação no estado $|\bar{0}\rangle$ torna-se mais difícil pois as definições de τ_+ e τ_-

dependem do valor de ℓ o que para o estado $|\bar{0}\rangle$ é uma sobreposição de muitos estados de ℓ 's diferentes.

Conclusões

Nesta tese, apresentamos de início a obtenção dos níveis de Landau análogos utilizando o formalismo analítico já conhecido na literatura. Foi mostrado a extensão de tal formalismo para alguns sistemas de partícula neutra que possuem quantização análoga ao sistema de Landau.

No segundo capítulo obteve-se os níveis análogos de Landau para partículas neutras usando dois formalismos. O primeiro foi usado apenas para o sistema de Landau-Aharonov-Casher, partícula neutra com dipolo magnético, para que ele pudesse ser apresentado e também mostrado que o uso do formalismo de operadores focado apenas nos auto estados de energia tem resultados que podem ser melhorados quando comparados ao outro formalismo que leve em consideração também outros números quânticos do sistema. O último formalismo utilizado se apresentou mais geral do que o segundo pois permite analisar os auto estados não só de energia como também de momento angular com a dependência explícita dos auto estados em relação σ , sinal da frequência ciclotrônica, explícita. A partir daí, foi usado e discutido os auto estados dos sistemas análogos da Landau, não só o Landau-Aharonov-Casher mas também de Landau-He-McKellar-Wilkens e Landau-Wei-Han-Wei, nos quais foi utilizado apenas o último formalismo pois, para o desenvolvimento desta tese, se mostrou muito útil perante as aplicações propostas.

No segundo capítulo, foi apresentado o estado coerentes padrão, ou seja, o estado coerentes do oscilador harmônico. Aproveitou-se para apresentar e discutir as propriedades dos estados coerentes: relação de incerteza mínima e relação com o comportamento clássico do oscilador. Junto com o formalismo utilizado na maior parte da tese, o discussão sobre o estado coerente padrão foi a base para construirmos os estados coerentes para os sistemas análogos de Landau. Para Landau-Aharonov-Casher se apresentou os estados coerentes para os auto estados nos dois formalismos usados, e para os Landau-He-McKellar-Wilkens e Landau-Wei-Han-Wei foi construído os estados coerentes utilizando apenas o formalismo de auto estado de energia e momento angular. Os estados coerentes construídos com tal formalismo se mostraram mais gerais pois apresentaram dois parâmetros novos para definir o estado coerente, diferente do estado coerentes ordinário que apresenta apenas um parâmetro. Além disso, discutiu-se também as propriedades de relação mínima incerteza e conexão com comportamento clássico dos sistemas análogos.

No terceiro capítulo, de início apresentamos o estado deslocado padrão, ou melhor, o estado deslocado do oscilador harmônico simples. Foi mostrado que os auto estados do oscilador harmônico e seus estados coerentes são casos particulares dos estados deslocados, estados esses que possuem características próprias e diferentes dos estados número e coerente. Algumas características dos estados deslocados foram mostradas e discutidas, como a relação de mínima incerteza para os estados deslocados existente como para os estados coerentes, mas a relação de auto estado e auto valor como o operador abaixamento os estados deslocados não mantem.

Em seguida, foi novamente mostrado os auto estados dos sistemas análogos de Landau para partículas neutras segundo o formalismo que mostrou-se mais adequado para o que desejávamos. A rerepresentação dos auto estados dos sistemas análogos de Landau fazem-se necessários para que pudéssemos construir os estados deslocados de tais sistemas. Assim iniciou-se o processo de construção dos estados deslocados para os sistemas análogos de Landau, os quais tem com principal diferença em relação aos estados deslocados do oscilador harmônico a existência de uma segundo número quântico na descrição do estado deslocado.

O estado deslocado de Landau-Aharonov-Casher foi o primeiro a ser construído, para isso foi definido o operador deslocamento com base nos operadores escada da energia e momento angular, usados para os estados do sistema. Através de uma transformação de similaridade foi-se obtido o Hamiltoniano, o qual os estados deslocados são auto estados e ao compara-lo como o Hamiltoniano do sistema, vimos que as tais são diferentes por um campo elétrico planar constante. Ou seja, podíamos construir os estados deslocados de Landau-Aharonov-Casher incluindo um campo elétrico planar e constante ao sistemas. Foi-se verificado as propriedades de tais estados em comparação aos auto estados e os estados coerentes do sistema e certificou-se a existência das mesmas analogias presentes para o sistema do oscilador harmônico sobre os estados número e coerente serem casos específicos dos estados deslocados.

Procedimento similar ao feito para construção dos estados deslocados de Landau-Aharonov-Casher foi feito para os estados de Landau-He-McKellar-Wilkens e Landau-Wei-Han-Wei. Os operadores deslocamentos foram criados com os respectivos operadores escadas, as respectivas Hamiltonianas foram obtidas com as transformações de similaridade e ao compararmos os Hamiltonianas originais e as dos estados deslocados percebemos que as tais diferiam entre si por um campo magnético planar e constante para o Landau-He-McKellar-Wilkens e um campo elétrico planar e constante, como para o primeiro sistema, para o Landau-Wei-Han-Wei. Assim, foi deduzido a possibilidade de construção de tais estados fazendo apenas a inclusão de tais campos para os respectivos sistemas.

Tais campos adicionais possuem uma grande importância, pois os seus componentes estão profundamente relacionados com os parâmetros de deslocamento do sistemas. Assim como para os parâmetros do estado coerentes, pois os estados coerentes nada mais são do

que estados deslocados do estado fundamental.

No último capítulo, foi feita uma rápida revisão sobre fases geométricas adquiridas em evoluções adiabáticas, as chamadas fases de Berry. A revisão foi feita apresentado apenas o procedimento que seria usado no capítulo para calcular as fases de Berry para os sistemas análogos de Landau. Ou seja, detalhes, extensões e generalizações das fases não foram discutidas apenas comentadas e indicadas respectivas referências.

Como nos capítulos anteriores, o sistema Landau-Aharonov-Casher foi o primeiro dos sistemas análogos a ser estudado. Primeiro foi obtido os estados deslocados dos níveis de Landau-Aharonov-Casher, mas dessa vez mais breve devido ao fato de tal procedimento já ter sido feito com mais detalhes no capítulo anterior. Após discutido quais seriam os parâmetros de controle a serem usados em tais sistemas para se calcular as fases de Berry. Viu-se que o espaço dos parâmetros seria tridimensional e o sistema teria como parâmetros de controle as componentes do campo elétrico planar adicional e a densidade de cargas elétricas que produzem o campo elétrico que origina os níveis de Landau. Foi criado o potencial vetor de Mead-Berry para o sistema, o qual possui três componentes uma para cada parâmetro de controle.

A fase de Berry é calculada depois de escolhida a forma como os parâmetros serão alterados, tal escolha revela qual o caminho será feito no espaço dos parâmetros. A primeira escolha feita foi um caminho retangular no plano das componentes do campo elétrico adicional, ou seja, foi escolhido manter a densidade de cargas com valor constante e variar só as componentes do campo elétrico adicional. O resultado foi uma fase de Berry proporcional à área do retângulo feito no plano das componentes, do campo extra do espaço dos parâmetros, e a identidades. Tais características deixaram claro que essa fase era similar a fase adquirida no efeito Aharonov-Bohm, ou seja, resultara no aparecimento de uma fase global no estado do sistema depois de uma evolução cíclica. A segunda escolha feita foi anular a componente x do campo extra, varia a componente y dele e a densidade de carga elétrica. Tal escolha rendeu uma fase de Berry proporcional a variações da componente do campo extra e a variação de uma função da densidade de carga. No entanto, a característica mais interessante dessas fases foi a não existência de holonomia de identidade, ou seja, depois de uma evolução cíclica o estado não só adquirirá uma fase, mas também terá o seu momento angular alterado fazendo o sistema transitar para um outro estado. Tais fases são ditas não abelianas e tal propriedade só ocorre pois o nosso sistema é degenerado. Mostrou-se que tal comportamento só existe se o campo adicional não for nulo, o que deixa claro o fato que tais fases não existem para os níveis de Landau-Aharonov-Casher não deslocados.

A fase de Berry para os estados deslocados dos níveis de Landau-He-McKellar-Wilkins também foi obtida usando como parâmetros a densidade de carga magnética efetiva e as componentes do campo magnético planar adicional incluído para a construção dos estados deslocados do sistema. Foram feitas duas escolhas também de caminhos para a evolução

dos estados, uma só com as componentes do campo magnético planar extra variando e mantendo a densidade de cargas magnética efetiva constante, e a outra variando a componente y do campo magnético planar extra e a densidade de cargas magnética efetiva enquanto a componente x do campo extra é nula. As fases de Berry's calculadas tiveram comportamentos bem similares aos encontrados para os estados deslocados de Landau-Aharonov-Casher, pois tais sistemas possuem uma simetria de dualidade eletromagnética.

Novidade surgiu na construção das fases de Berry dos estados deslocados dos níveis de Landau-Wei-Han-Wei. A significativa diferença desse sistema para os dois anteriores é que o espaço de parâmetros que para esse último é quadridimensional com os parâmetros de controle sendo a magnitude do campo magnético, a densidade de carga elétrica e as componentes do campo elétrico planar adicional, usado para criar o estado deslocado. Com a dimensão do espaço de parâmetros maior podemos anular a componente x do campo elétrico adicional que ainda ficaremos com três parâmetros de controle para variarmos. Dessa forma foi mostrado algumas possibilidades de evolução do sistema para se obter fases de Berry, os caminhos escolhidos foram caminhos tais que havia variação de todos os parâmetros no circuito. As fases de Berry para os caminho escolhidos, foram apresentadas e discutidas principalmente a característica não abeliana da fase e a necessidade da existência da variação do campo externo para as fases não abelianas.

Com isso, resume-se ao afirmar que nessa tese foi apresentado a construção e discussão dos estados coerentes e dos deslocados dos níveis análogos de Landau para partícula neutra. E também calculou-se as fases de Berry para cada sistemas análogo, explicitando as diferenças presentes em cada um e ressaltando as características importantes dessas diferenças, nesse caso as fases de Berry não abelianas. Com tais resultados esperasse aplicar tais discussões no contexto da computação quântica holonômica aproveitando principalmente as fases de Berry não abelianas pois essas que possibilitaram a criação de portas lógicas mais elaboradas. E pensa-se também na análise e investigação de possíveis mudanças em características de sistemas de muitos corpos compostos por partículas neutras como nos sistemas análogos de Landau estudados.

Referências Bibliográficas

- [1] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field,” *Phys. Rev.*, vol. 131, pp. 2766–2788, Sep 1963.
- [2] R. J. Glauber, “The quantum theory of optical coherence,” *Phys. Rev.*, vol. 130, pp. 2529–2539, Jun 1963.
- [3] R. J. Glauber, “Photon correlations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, pp. 84–86, Feb 1963.
- [4] E. Zipper and M. Lisowski, “Coherent phenomena in mesoscopic systems,” *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 13, pp. 1191–1196, (2000).
- [5] Y. Joglekar, M. Kellogg, M. Milovanovic, and E. Tutuc, *Coherent States in Double Quantum Well Systems*. Advances in Condensed Matter Physics, (2011).
- [6] H. Moya-Cessa and M. F. Guasti, “Coherent states for the time dependent harmonic oscillator: the step function,” *Physics Letters A*, vol. 311, pp. 1–5, (2003).
- [7] I. A. Pedrosa, “Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator-comment.,” *Physical Review D*, vol. 36, pp. 1279–1280, (1987).
- [8] I. A. Pedrosa and B. Baseia, “Coherent states and dissipative systems,” *Physical Review D*, vol. 30, pp. 765–769, (1984).
- [9] W.-M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore, “Coherent states: Theory and some applications,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 62, p. 867, (1990).
- [10] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*. Berlin: Springer, (1986).
- [11] I. R. Senitzky, “Harmonic oscillator wave functions,” *Phys. Rev.*, vol. 95, p. 1115, Sep 1954.
- [12] J. Plebanski, “Wave functions of a harmonic oscillator,” *Phys. Rev.*, vol. 101, p. 1825, Mar 1956.
- [13] J. Plebanski, “Classical properties of oscillator wave packets,” *Bull. Acad. Polon.*, vol. 11, p. 213, (1954).

- [14] K. Husimi, “Miscellanea in elementary quantum mechanics, ii,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 9, p. 381, (1953).
- [15] S. Epstein, “Harmonic oscillator wave packets,” *Am. J. Phys.*, vol. 27, p. 291, 1959.
- [16] M. V. Satyanarayana, “Generalized coherent states and generalized squeezed coherent states,” *Phys. Rev. D*, vol. 32, p. 400, (1985).
- [17] M. M. Nieto, “Displaced and squeezed number states,” *Physics Letters A*, vol. 229, pp. 135–143, (1997).
- [18] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight, and V. Buek, “Properties of displaced number states,” *Phys. Rev. A*, vol. 41, pp. 2645–2652, Mar 1990.
- [19] M. Boiteux and A. Levelut, “Semicoherent states,” *J. Phys. A : Math., Nucl. Gen.*, vol. 6, (1973).
- [20] P. Kral, “Displaced and squeezed fock states,” *J. Mod. Opt.*, vol. 37, p. 889, (1990).
- [21] H. Moya-Cessa, “Generation and properties of superpositions of displaced fock states,” *J. Mod. Opt.*, vol. 42, p. 1741, (1995).
- [22] A.-S. F. Obada and G. M. A. Al-Kader, “Superpositions of squeezed displaced fock states: properties and generation,” *J. of Mod. Opt.*, vol. 46, p. 263, (1999).
- [23] R. Keil, A. Perez-Leija, F. Dreisow, M. Heinrich, H. Moya-Cessa, S. Nolte, D. N. Christodoulides, and A. Szameit, “Classical analogue of displaced fock states and quantum correlations in glauber-fock photonic lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 103601, Aug 2011.
- [24] A. I. Lvovsky and S. A. Babichev, “Synthesis and tomographic characterization of the displaced fock state of light,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 011801, Jul 2002.
- [25] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, “Measurement of the wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, p. 1244, Mar 1993.
- [26] K. Banaszek and K. Wódkiewicz, “Nonlocality of the einstein-podolsky-rosen state in the wigner representation,” *Phys. Rev. A*, vol. 58, p. 4345, Dec 1998.
- [27] A. Kuzmich, I. A. Walmsley, and L. Mandel, “Violation of bell’s inequality by a generalized einstein-podolsky-rosen state using homodyne detection,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 1349, (2000).

- [28] A. Kuzmich, I. A. Walmsley, and L. Mandel, "Violation of a bell-type inequality in the homodyne measurement of light in an einstein-podolsky-rosen state," *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 063804, (2001).
- [29] W. Xiao-Guang and P. Shao-Hua, "Quantum fluctuations of a mesoscopic rlc circuit in a displaced squeezed fock state," *Chin. Phys. Lett.*, vol. 17, p. 3, 2000.
- [30] L. D. Landau, "Diamagnetismus der metalle," *Z. Phys.*, vol. 64, p. 629, (1930).
- [31] L. D. Landau and E. D. Lifshitz, *Quantum mechanics*. Perfamon Press, Oxford, (1991).
- [32] A. Dehghani and B. Mojaveri, "New physics in landau levels," *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 46, p. 385303 (14pp), (2013).
- [33] W. Yang and J. Chen, "Berry phase for coherent states of landau levels," *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 024101, (2007).
- [34] M. K. Fung and Y. F. Wang, "Landau problem revisited," *Chinese Journal of Physics*, vol. 37, p. 5, (1999).
- [35] A. Feldman and A. H. Kahn, "Landau diamagnetism from the coherent states of an electron in a uniform magnetic field," *Phys. Rev. B*, vol. 1, p. 4584, (1970).
- [36] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, "Coherent states of a charged particle in a magnetic field," *J. Exp. Theor. Phys.*, vol. 28, p. 527, (1969).
- [37] M. R. Setare and A. Fallahpour, "Generalized coherent states for charged particle in uniform and variable magnetic field," *Acta Physica Polonica B*, vol. 40, p. 2, (2009).
- [38] R. E. Prange and S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*. Springer-Verlag, New York, (1990).
- [39] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, and P. Zoller, "1/2 - anyons in small atomic bose-einstein condensates," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 010402, Jun 2001.
- [40] B. Paredes, P. Zoller, and J. I. Cirac, "Fractional quantum hall regime of a gas of ultracold atoms," *Solid State Commun.*, vol. 127, p. 155, (2003).
- [41] A. Comtet, "On the landau levels on the hiperbolic plane," *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. 173, p. 185, (1987).
- [42] C. Grosche, "The path integral on the poincaré upper half-plane with a magnetic field and for the morse potential," *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. 187, p. 110, (1988).

- [43] G. V. Dunne, “Hilbert space for charged particles in perpendicular magnetic fields,” *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. 215, p. 233, (1992).
- [44] Y. Aharonov and A. Casher, “Topological quantum effects for neutral particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, p. 319, (1984).
- [45] M. Ericsson and E. Sjöqvist, “Towards a quantum hall effect for atoms using electric fields,” *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 013607, (2001).
- [46] X.-G. He and B. H. J. McKellar, “Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction,” *Phys. Rev. A*, vol. 47, p. 3424, (1993).
- [47] M. Wilkens, “Quantum phase of a moving dipole,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, p. 5, (1994).
- [48] C. Furtado, J. R. Nascimento, and L. Ribeiro, “Landau quantization of neutral particles in an external field,” *Physics Letters A*, vol. 358, pp. 336–338, (2006).
- [49] H. Wei, R. Han, and X. Wei, “Quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, p. 2071, (1995).
- [50] C. L.R. Ribeiro, Furtado and J. R. Nascimento, “Landau levels analog to electric dipole,” *Physics Letters A*, vol. 348, pp. 135–140, (2006).
- [51] C. Furtado, J. R. Nascimento, and L. R. Ribeiro, “Landau quantization of neutral particles in an external field,” *Phys. Lett. A*, vol. 358, p. 336, (2006).
- [52] K. Bakke and C. Furtado, “Relativistic landau quantization for a neutral particle,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 032106, Sep 2009.
- [53] K. Bakke, “Analog landau-he-mckellar-wilkens quantization due to noninertial effects of the fermi-walker reference frame,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 052117, May 2010.
- [54] J. Lemos de Melo, K. Bakke, and C. Furtado, “Landau quantization for an electric quadrupole moment,” *Physica Scripta*, vol. 84, p. 045023, (2011).
- [55] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” *Phys. Rev.*, vol. 115, p. 485, (1959).
- [56] V. B. Bezerra, G. A. Marques, and S. G. Fernandes, “Gravitational aharonov-bohm effect due to weak fields,” *Journal of Mathematical Physics, Estados Unidos*, vol. 47, p. 072504, (2006).
- [57] M. V. Berry, “Exact aharonov-bohm wavefunction obtained by applying dirac’s magnetic phase factor,” *Eur. J. Phys.*, vol. 1, p. 240, (1980).

- [58] M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,” *Proc. R. Lond. A*, vol. 392, p. 45, (1984).
- [59] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*. World Scientific, (1989).
- [60] Y. Aharonov and Anandan, “Phase change during a cyclic quantum evolution,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 1593, (1987).
- [61] F. Wilczek and A. Zee, “Appearance of gauge structure in simple dynamical system,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, p. 2111, (1984).
- [62] A. Tomita and R. Y. Chiao, “Observation of berry’s topological phase by use of an optical fiber,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, p. 937, Aug 1986.
- [63] R. Simon, H. J. Kimble, and E. C. G. Sudarshan, “Evolving geometric phase and its dynamical manifestation as a frequency shift: An optical experiment,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, p. 19, Jul 1988.
- [64] T. Bitter and D. Dubbers, “Manifestation of berry’s topological phase in neutron spin rotation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, p. 251, Jul 1987.
- [65] R. Tycko, “Adiabatic rotational splittings and berry’s phase in nuclear quadrupole resonance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, p. 2281, Jun 1987.
- [66] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2000).
- [67] D. P. DiVincenzo, “Quantum computation,” *Science*, vol. 270, p. 255, (1995).
- [68] T. Sleator and H. Weinfurter, “Realizable universal quantum computation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 4087, (1995).
- [69] P. Zanardi and M. Rasetti, “Holonomic quantum computation,” *Phys. Lett. A*, vol. 264, p. 94, (1999).
- [70] J. Pachos, P. Zanardi, and M. Rasetti, “Non-abelian berry connections for quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 010305, (1999).
- [71] J. Pachos and P. Zanardi, “Quantum holonomies for quantum computing,” *Int. J. Mod. Phys. B*, vol. 15, p. 1257, (2001).
- [72] A. E. Margolin, V. I. Strazhev, and A. Y. Tregubovich, “Geometric phases and quantum computations,” *Phys. Lett. A*, vol. 303, p. 131, (2002).
- [73] V. I. Kuvshinov and A. V. Kuzmin, “Stability of holonomic quantum computations,” *Phys. Lett. A*, vol. 316, p. 391, (2003).

- [74] J. Q. Shen, “Quantum-vacuum geometric phases in the noncoplanarly curved fiber system,” *Eur. Phys. J. D*, vol. 30, p. 259, (2004).
- [75] J. Q. Shen, “A scheme of measurement of quantum-vacuum geometric phases in a noncoplanar fibre system,” *J. Opt. B*, vol. 6, p. L13, (2004).
- [76] K. Bakke and C. Furtado, “Abelian geometric phase due to the presence of an edge dislocation,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 012130, Jan 2013.
- [77] Cohen-tannoudji, *Quantum Mechanics*. John Wiley, (1977).
- [78] J. L. Powell, *Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, (1961).
- [79] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Person - Prentice Hall, (1995).
- [80] J. Anandan, “Classical and quantum interaction of the dipole,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 1354, (2000).
- [81] W. H. Heiser and J. A. Shercliff, “A simple demonstration of the hartmann layer,” *J. Fluid Mech.*, vol. 22, p. 701, (1965).
- [82] S. Y. Molokov and J. E. Allen, “On the theory of the heiser and shercliff experiment. i. mhd flow in an open channel in a strong uniform magnetic field,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 25, p. 393, (1992).
- [83] S. Y. Molokov and J. E. Allen, “On the theory of the heiser and shercliff experiment. ii. mhd flow between two cylinders in a strong radial magnetic field,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 25, p. 933, (1992).
- [84] R. M. Oliveira, J. A. Miranda, and E. S. G. Leandro, “Ferrofluid patterns in a radial magnetic field: Linear stability, nonlinear dynamics, and exact solutions,” *Physical Review E*, vol. 77, p. 016304, (2008).
- [85] T.-Y. Lee, “Quantum phases of electric and magnetic dipoles as special cases of the aharonov-bohm phase,” *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 032107, (2001).
- [86] J. P. Dowling, C. P. Williams, and F. J. D., “Maxwell duality, lorentz invariance, and topological phase,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, p. 2486, (1999).
- [87] J. K. Pachos, “Quantum phases of electric dipole ensembles in atom chips,” *Phys. Lett. A*, vol. 344, p. 441, (2005).
- [88] C. A. Lima Ribeiro, C. Furtado, and F. Moraes, “Solid-state analog for the he-mckellar-wilkens quantum phase,” *Europhys. Lett.*, vol. 62, p. 306, (2003).

- [89] G. Spavieri, "Quantum effect of the aharonov-bohm type for particles with an electric dipole moment," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, p. 3932, (1999).
- [90] C. R. Hagen, "Comment on "quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field",," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, p. 1656, (1996).
- [91] H. Wei, R. Han, and X. Wei, "Wei et al. reply: Comment on "quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field",," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, p. 1657, (1996).
- [92] B. C. Sanders, "Review of entangled coherent states," *J. Phys. A Math. Theor.*, vol. 22, p. 244002, (2012).
- [93] K. Kowalski and J. Rembielinski, "Coherent states of a charged particle in a uniform magnetic field," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, pp. 8247–8258, (2005).
- [94] W. Alfred, "Displaced fock states and their connection to quasiprobabilities," *Quantum Opt.*, vol. 3, pp. 359–383, (1991).
- [95] L. M. A. Aguilar and H. Moya-Cessa, "Quantum bits and superposition of displaced fock states of the cavity field," *Revista Mexicana de Física*, vol. 48, pp. 423–426, (2002).
- [96] W. X. Guang, "Properties of superposition of displaced number states and their interaction with two-level atoms," *Commun. Theor. Phys.*, vol. 33, pp. 643–648, (2000).
- [97] B. Simon, "Holonomies, the quantum adiabatic theorem and berry's phase," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, p. 2167, (1983).
- [98] J. Samuel and Bhandari, "General setting for berry's phase," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 2339, (1988).
- [99] J. Anandan, "Some geometrical considerations of berry's phase," *Phys. Rev. D*, vol. 35, p. 2597, (1987).
- [100] D. N. Page, "Geometrical description of berry's phase," *Phys. Rev. A*, vol. 36, p. 3479, (1987).
- [101] J. Anandan and Y. Aharonov, "Geometric quantum phases and angles," *Phys. Rev. D*, vol. 38, p. 1863, (1988).
- [102] J. Anandan and Y. Aharonov, "Geometry of quantum evolution," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, p. 1697, (1990).

- [103] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, and J. Zwanziger, *The geometric phase in quantum systems: foundations, mathematical concepts and applications in molecular and condensed matter physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2003).
- [104] K. Bakke and C. Furtado, “Abelian geometric phase due to the presence of an edge dislocation,” *Physical Review. A, Atomic, Molecular, and Optical Physics (Online)*, vol. 87, p. 0121130, (2013).
- [105] K. Bakke and C. Furtado, “Scalar aharonov-bohm effect in the presence of a topological defect.,” *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 522, pp. 447–455, (2010).
- [106] K. Bakke and C. Furtado, “Anandan quantum phase for a neutral particle with fermi walker reference frame in the cosmic string background.,” *European Physical Journal C*, vol. 69, pp. 531–539, (2010).
- [107] K. Bakke and C. Furtado, “Geometric phase for a neutral particle in rotating frames in a cosmic string spacetime.,” *Physical Review D, Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 80, p. 024033, (2009).
- [108] K. Bakke, J. R. Nascimento, and C. Furtado, “Geometric phase for a neutral particle in the presence of a topological defect.,” *Physical Review D, Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 78, p. 064012, (2008).
- [109] A. G. de Lima, H. Belich, and K. Bakke, “Anandan quantum phase and quantum holonomies induced by the effects of the lorentz symmetry violation background in the cpt-even gauge sector of the standard model extension.,” *European Physical Journal Plus*, vol. 128, p. 154, (2013).
- [110] K. Bakke, H. Belich, and E. Silva, “Relativistic anandan quantum phase in the lorentz violation background,” *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 523, p. 910, (2011).
- [111] K. Bakke, I. A. Pedrosa, and C. Furtado, “Geometric phases and squeezed quantum states of relic gravitons.,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 50, p. 113521, (2009).
- [112] K. Bakke and C. Furtado, “The analogue of the aharonov-bohm effect for bound states for neutral particles,” *Modern Physics Letters A*, vol. 26, pp. 1331–1341, (2011).
- [113] K. Bakke, E. O. Silva, and H. Belich, “He-mckellar-wilkens effect and scalar aharonov-bohm effect for a neutral particle based on the lorentz symmetry violation.,” *Journal of Physics. G, Nuclear and Particle Physics*, vol. 39, p. 055004, (2012).

- [114] D. P. DiVincenzo, “Two-bit gates are universal for quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 51, p. 1015, (1995).
- [115] S. Lloyd, “Almost any quantum logic gate is universal,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, p. 346, (1995).
- [116] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, “Elementary gates for quantum computing,” *Phys. Lett. A*, vol. 52, p. 3457, (1995).
- [117] A. Steane, “Quantum computing,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 61, p. 117, (1998).
- [118] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, *The physics of quantum information: quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computation*. (Springer-Verlag, Berlin, 2000), (2000).
- [119] V. Vedral, *Introduction to Quantum Information*. Science Oxford University Press, Oxford, UK, (2006).
- [120] J. Pachos and S. Chountasis, “Optical holonomic quantum computer,” *Phys. Rev. A*, vol. 62, p. 052318, (2000).
- [121] A. Recati, T. Calarco, P. Zanardi, J. I. Cirac, and P. Zoller, “Holonomic quantum computation with neutral atoms,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 032309, (2002).
- [122] J. Pachos, “Topological features in ion-trap holonomic computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 042318, (2002).
- [123] A. O. Niskanen, M. Nakahara, and M. M. Salomaa, “Realization of arbitrary gates in holonomic quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 67, p. 012319, (2003).
- [124] M. Chlascinski, “Quantum holonomies with josephson-junction devices,” *Phys. Rev. B*, vol. 69, p. 134516, (2004).
- [125] P. Zhang, Z. D. Wang, J. D. Sun, and C. P. Sun, “Holonomic quantum computation using rf superconducting quantum interference devices coupled through a microwave cavity,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 042301, (2005).
- [126] Z.-B. Feng and X.-D. Zhang, “Holonomic quantum computation with superconducting charge-phase qubits in a cavity,” *Phys. Lett. A*, vol. 372, p. 1589, (2008).
- [127] K. Bakke and C. Furtado, “One-qubit quantum gates associated with topological defects in solids,” *Quantum Information Processing*, vol. 12, p. 119, (2013).

- [128] K. Bakke and H. Belich, “Quantum holonomies based on the lorentz-violating tensor background,” *Journal of Physics. G, Nuclear and Particle Physics*, vol. 40, p. 065002, (2013).
- [129] K. Bakke and C. Furtado, “Holonomic quantum computation based on the scalar aharonov bohm effect for neutral particles and linear topological defects,” *Annals of Physics*, vol. 327, pp. 376–385, (2012).
- [130] K. Bakke and C. Furtado, “Holonomic quantum computation with the aharonov-casher setup associated with topological defects,” *Quantum Information & Computation*, vol. 11, p. 0444, (2011).
- [131] K. Bakke and C. Furtado, “Quantum holonomies for an electric dipole moment,” *Physics Letters. A*, vol. 375, pp. 3956–3959, (2011).
- [132] K. Bakke, C. Furtado, and S. Sergeenkov, “Holonomic quantum computation associated with a defect structure of conical graphene,” *Europhysics Letters*, vol. 87, p. 30002, (2009).