

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

Cotas para o número máximo de  
retas duas a duas disjuntas em uma  
família  $\mathcal{S}$

Mariana de Lima Ferreira

JOÃO PESSOA – PB  
JULHO DE 2018

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Cotas para o número máximo de retas duas a duas disjuntas em uma família $S$

por

Mariana de Lima Ferreira

sob a orientação da

Profa. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB  
Julho de 2018

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

F383c Ferreira, Mariana de Lima.

Cotas para o número máximo de retas duas a duas disjuntas em uma família  $S$  / Mariana de Lima Ferreira.

- João Pessoa, 2018.

97 f. : il.

Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Retas duas a duas disjuntas. 2. Cota de Miyaoka. 3. Cota de Boissére-Sarti. 4. Subgrupos finitos em  $Aut(P^1)$ . I. Arancibia, Jacqueline Fabiola Rojas. II. Título.

UFPB/CCEN

# Cotas para o número máximo de retas duas a duas disjuntas na família $\mathcal{S}$

por

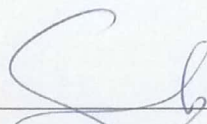
Mariana de Lima Ferreira <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

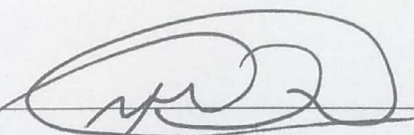
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 20 de julho de 2018.

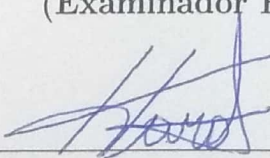
Banca Examinadora:



\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB  
(Orientadora)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves – UFRPE  
(Examinador Externo)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta – UFPB  
(Examinador Interno)

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

*Dedico este trabalho a minha avó D. Elvira, in memoriam, que apesar de sua partida repentina, tem intercedido por mim e me dado forças nos momentos difíceis. A ela devo muitas coisas, seus ensinamentos, valores passados, todo seu amor, o cuidado e zelo incondicional. Saudades eternas!*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por Ele ter me guiado até aqui. Sem a sua força e o seu amor eu não teria conseguido.

Aos meus pais, Adrina e João, e ao meu padrasto Geojio, por estarem incondicionalmente ao meu lado, principalmente a minha mãe, que para mim é exemplo de força, garra, determinação e a mulher a qual eu desejo ser metade do que ela é.

A minha irmã, Luana, pela sua companhia, amor e preocupação.

A minha Orientadora Professora Dra. Jacqueline, que se dispôs a me orientar, pela sua atenção e paciência para tirar todas as minhas dúvidas, pelos conhecimentos transmitidos, pelo incentivo e confiança depositada em mim, quando eu não acreditava que conseguiria vencer os desafios.

Aos professores Dr. Rodrigo José Gondim Neves e Dr. Napoleón Caro Tuesta, por terem aceito o convite de participar da banca examinadora.

Aos professores do DM, pelos momentos compartilhados, por todo conhecimento transmitido e disponibilidade em ajudar, em especial Prof. Dra. Miriam, Prof. Dr. Flank, Prof. Dr. Adriano e Prof. Dr. Lenimar.

Aos colegas da Pós-Graduação, que me ajudaram de alguma forma. Em especial, Marcos, Janiely, Lindinês, Allan, Fernando, Claudeilton, Castelo, Hector, Lorena, Douglas Queiroz, Dayane, Djair.

Aos colegas do Laboratório Milênio, pelo companherismo nesses anos de convivência em especial: Cássio, Marcelo, Raoni, Douglas, Aline, João Henrique, Leon, Victor, Ribeiro, Esaú, Zecas, Suelena e Thiago Luiz.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Resumo

Sejam  $r(S)$  a quantidade máxima de retas duas a duas disjuntas que a superfície não singular  $S \subset \mathbb{P}^3$  pode conter e  $r_d = \max\{r(S) \mid \text{grau}(S) = d\}$ . Verifica-se que  $r(S) = 6$  para toda superfície cúbica não singular  $S$ , logo  $r_3 = 6$ . Para  $d = 4$ ,  $r_4 = 16$ , conforme foi demonstrado pelo matemático russo Viacheslav Nikulin em [9]. Salientamos que Rojas-Santos em [7], mostraram que  $r(\mathcal{F}) = 16$  se  $\mathcal{F}$  for a quártica de Schur. No momento  $r_d$  é desconhecido se  $d \geq 5$ . Neste trabalho, objetivamos apresentar cotas para o número máximo de retas duas a duas disjuntas na família  $\mathcal{S}$ , sendo  $\mathcal{S}$  formada pelas superfícies não singulares  $\mathcal{S}_d \subseteq \mathbb{P}^3$  de grau  $d$ , definidas por  $\phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3)$  sendo  $\phi(u, v) = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$  e  $d \geq 5$ . De fato, no caso  $d$  ímpar mostramos que  $r(\mathcal{S}_d) = d(d-2) + 4$  sendo que Boissére-Sarti mostraram que  $r(\mathcal{S}_d) \geq d(d-2) + 4$  se  $d$  é ímpar e  $d \geq 7$  em [3]. E no caso  $d$  par, mostramos que  $d(d-2) + 4 \leq r(\mathcal{S}_d) \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$  se  $d \neq 6$  e  $r(\mathcal{S}_6) = 48$ . Tendo em consideração a cota do matemático japonês Miyaoka em [8] tem-se  $r_d \leq 2d(d-2)$  para todo  $d \geq 4$ , concluimos assim que  $r_6 = 48$ .

**Palavras-chave:** Retas duas a duas disjuntas, Cota de Miyaoka, Cota de Boissére-Sarti, Subgrupos finitos em  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ .

# Abstract

Let  $r(S)$  be the maximum number of pairwise disjoint lines that a non-singular surface  $S \subset \mathbb{P}^3$  contains and  $r_d = \max \{r(S) \mid \text{degree}(S) = d\}$ . Ensure that  $r(S) = 6$  for all non-singular cubic surface  $S$ , therefore  $r_3 = 6$ . For  $d = 4$ ,  $r_4 = 16$ , it was showed by the Russian mathematician Viacheslav Nikulin in [9]. We quote that Rojas-Santos in [7], obtained that  $r(\mathcal{F}) = 16$  if  $\mathcal{F}$  is the Schur's quartic. At the moment  $r_d$  is unknown for  $d \geq 5$ . In this work we aim to present bounds for the maximum number of two-by-two disjoint straight lines in the family  $\mathcal{S}$  whose members are the degree  $d$  non-singular surfaces  $\mathcal{S}_d \subset P^3$  defined by  $\phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3)$  being  $\phi(u, v) = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$  and  $d \geq 5$ . In fact, for  $d$  odd we show that  $r(\mathcal{S}_d) = d(d-2) + 4$ , however Boissère-Sarti proved that  $r(\mathcal{S}_d) \geq d(d-2) + 4$  when  $d$  is odd and  $d \geq 7$  in [3]. For the even case, we obtain  $d(d-2) + 4 \leq r(\mathcal{S}_d) \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$  if  $d \neq 6$  and  $r(\mathcal{S}_6) = 48$ . Considering the bound  $r_d \leq d(d-2)$  for all  $d \geq 4$  given by the Japanese mathematician Miyaoka in [8], we conclude as soon as  $r_6 = 48$ .

**Keywords:** Two-by-two disjoint straight lines, Miyaoka's bound, Boissère-Sarti's bound, Finite subgroups in  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Breve revisão das cotas para <math>r_d</math></b>	<b>3</b>
1.1 Retas num Plano em $\mathbb{P}^3$	3
1.2 Retas em superfícies quádricas não singulares em $\mathbb{P}^3$	5
1.3 Retas em superfícies cúbicas não singulares em $\mathbb{P}^3$	10
1.4 Retas em superfícies quárticas não singulares em $\mathbb{P}^3$	15
1.5 Cotas para $r_d$ se $d \geq 5$	18
<b>2 Determinação das retas em <math>S_\phi</math></b>	<b>19</b>
2.1 Os subgrupos $\Gamma_C$ de $Aut(\mathbb{P}^1)$	27
<b>3 Cotas para <math>r(\mathcal{S}_d)</math> se <math>d \neq 6</math></b>	<b>31</b>
3.1 Construindo as retas determinadas por $\Gamma_\phi$	31
3.1.1 Estudando a intersecção entre as retas de $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$	39
<b>4 Estimativas para <math>r(\mathcal{S}_6)</math></b>	<b>49</b>
4.1 Descrevendo os elementos de $\mathcal{L}_\Phi$	49
4.2 Descrição dos elementos do grupo $\Gamma_C$	50
4.3 Descrição das retas determinadas pelos automorfismos em $\Gamma_C$	50
4.4 Estudando as intersecções	55
4.4.1 Tabelas: intersecção das retas de $\mathcal{L}_\Phi$ , $\mathcal{L}^0$ , $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$	67
<b>A Geometria Algébrica</b>	<b>72</b>
A.1 Grasmaniana	72
A.2 Projetivização de $V$	72
A.2.1 Polinômios Homogêneos	73
A.3 Zeros de um polinômio homogêneo em $\mathbb{P}^n$	74
A.4 Conjuntos Algébricos	75
A.5 Mudanças de Coordenadas Projetivas em $\mathbb{P}^n$	80
A.6 Retas em $\mathbb{P}^3$	83



# Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\Upsilon(S) = \{l \mid l \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^3 \text{ contida em } S\}$ ;
- $r(S) = \max\{\#C \mid C \subset \Upsilon(S) \text{ sendo } C \text{ formado por retas duas a duas disjuntas}\}$ ;
- $r(X) = \max\{\#C \mid C \subset X \text{ sendo } C \text{ formado por retas duas a duas disjuntas}\}$   
se  $X \subset \Upsilon(S)$ ;
- $r_d = \sup\{r(S) \mid S \text{ é uma superfície não singular em } \mathbb{P}^3 \text{ de grau } d\}$ ;
- $\Upsilon_L(S) = \{l \in \Upsilon(S) \mid l \cap L \neq \emptyset \text{ e } l \neq L\}$  sendo  $L$  uma reta fixa em  $\mathbb{P}^3$ ;
- $\Omega_L = \{H \mid H \text{ é um plano em } \mathbb{P}^3 \text{ contendo } L\}$  sendo  $L$  uma reta fixa em  $\mathbb{P}^3$ .

# Introdução

Na literatura matemática vários trabalhos tratam a respeito da quantidade máxima de retas em superfícies não singulares em  $\mathbb{P}^3$ . Sabe-se que superfícies de grau 1 e 2 possuem infinitas retas. Para superfícies de grau 3, em 1849 o matemático britânico Arthur Cayley em [4] verificou que tais superfícies contém exatamente 27 retas. Para superfícies de grau 4, em 1882, o matemático alemão Friedrich Schur em [12] exibiu uma superfície que contém exatamente 64 retas, tal superfície é dada por:

$$Z(x_0(x_0^3 - x_1^3) - x_2(x_2^3 - x_3^3)).$$

Por volta de 1943, o matemático italiano Beniamino Segre em [13] provou que qualquer superfície não singular de grau 4 contém no máximo 64 retas. Para superfícies de grau maior que 4 este número ainda vem sendo estudado em diversas pesquisas, em 2007 os matemáticos Samuel Boissière e Alessandra Sarti em [3] conseguiram uma cota inferior.

Também na literatura, há trabalhos que tratam a respeito do número máximo de retas duas a duas disjuntas que uma superfície não singular de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$  pode conter, que denotaremos por  $r_d$ .

Para  $d = 3$  temos que  $r_3 = 6$ . No caso  $d = 4$  em 1975 o matemático russo Viacheslav Nikulin em [9], mostrou que  $r_4 = 16$ . Salientamos que o número máximo de retas 2 a 2 disjuntas na quártica de Schur é 16, este resultado é obtido por Rojas-Santos em [7]. Destacamos que  $r_d$  é desconhecido para  $d \geq 5$  e  $r_d \leq 2d(d - 2)$ . Essa última cota foi obtida em 1984, pelo matemático japonês Yoichi Miyaoka em [8] para todo  $d \geq 4$ .

Em 2005, Slawomir Rams em [10] mostrou que a família de superfícies definidas por:

$$x_0^{d-1}x_1 + x_1^{d-1}x_2 + x_2^{d-1}x_3 + x_3^{d-1}x_0 \text{ se } d \geq 6$$

contém  $d(d - 2) + 2$  retas duas a duas disjuntas. Assim,  $r_d \geq 2d(d - 2) + 2$  para todo  $d \geq 6$ .

Em 2007, Samuel Boissiere e Alessandra Sarti em [3] mostraram que  $r_d \geq d(d - 2) + 4$  para  $d$  ímpar e  $d \geq 7$ . Neste trabalho, objetivamos apresentar cotas para o número máximo de retas duas a duas disjuntas na família  $\mathcal{S}$ , sendo  $\mathcal{S}$  formada pelas superfícies

---

não singulares  $\mathcal{S}_d \subseteq \mathbb{P}^3$ , de grau  $d$  definidas por

$$\phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3)$$

com  $\phi(u, v) = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$  e  $d \geq 5$ . No decorrer do nosso trabalho denotaremos o número máximo de retas duas a duas disjuntas em  $\mathcal{S}_d$  por  $r(\mathcal{S}_d)$ .

Neste trabalho mostramos que  $r(\mathcal{S}_d) = d(d-2)+4$  se  $d$  é ímpar ( $d \geq 5$ ). Salientamos que em [3] os autores mostram que  $r(\mathcal{S}_d) \leq d(d-2) + 4$  se  $d \geq 7$  e ímpar. No caso  $d$  par, mostramos que  $d(d-2) + 4 \leq r(\mathcal{S}_d) \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$  se  $d \neq 6$  e  $r(\mathcal{S}_6) = 48$ . Assim, tendo em consideração a cota de Miyaoka concluimos que  $r_6 = 48$ .

Nosso trabalho encontra-se dividido em *quatro Capítulos* e *um Apêndice*, distribuídos da seguinte forma:

No *Capítulo 1* apresentamos uma breve revisão das cotas conhecidas na literatura para os graus 1, 2, 3 e 4. Salientamos que este estudo foi feito através da seguinte bibliografia: [7], [10] e [3].

No *Capítulo 2* trabalhamos com o grupo dos automorfismos de  $\mathbb{P}^1$ , denotado por  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ , bem como estudamos os subgrupos finitos  $\Gamma_C$  de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ , sendo este um dos ingredientes fundamentais para obter as retas em  $\mathcal{S}_d$ .

No *Capítulo 3* determinamos  $r(\mathcal{S}_d)$  no caso  $d$  ímpar e  $d \geq 5$  e apresentamos as cotas para  $r(\mathcal{S}_d)$  se  $d \geq 8$  e par. Para fazer isto, utilizamos as ferramentas estudadas no capítulo anterior para contruirmos as retas determinadas por  $\Gamma_\phi$  e conseqüentemente obter os resultados que são apresentados no decorrer do capítulo.

No *Capítulo 4* mostramos que  $r(\mathcal{S}_6) = 48$ . De fato, concluimos que  $r_6 = 48$ . Salientamos que nesse capítulo utilizamos os Softwares Matemáticos Maxima e Wolfram Alpha para estudar as intersecções, e concluir os resultados que são apresentados no decorrer do texto.

No *Apêndice A* são apresentados alguns resultados necessários para uma melhor compreensão do trabalho. Vale salientar que este, é dedicado aos leitores que não possuem um conhecimento prévio de conceitos e resultados da Geometria Algébrica como por exemplo: superfícies, retas, espaço projetivo, propriedades de retas, dentre outros.

Finalmente, notamos que estudar o número máximo de retas que não se interceptam em uma superfície é uma importante ferramenta para classificar superfícies no espaço projetivo.

# Capítulo 1

## Breve revisão das cotas para $r_d$

No que segue, faremos uma breve descrição do valor de  $r_d$  para  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$  e das cotas conhecidas para  $r_d$  se  $d \geq 5$ . Esses resultados podem ser encontrados em: [7], [3] e [10].

### 1.1 Retas num Plano em $\mathbb{P}^3$

Temos que  $H \subset \mathbb{P}^3$  é um plano se e somente se  $H = Z(L)$  com  $L$  polinômio homogêneo de grau 1 em  $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ . Lembremos que:

$$\Upsilon(H) = \{l \mid l \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^3 \text{ contida em } H\}.$$

**Proposição 1.1.** Considere o plano  $H = Z(L) \subset \mathbb{P}^3$  e  $l$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$ . São válidas as seguintes afirmações:

1.  $l \subset H \Leftrightarrow \mathcal{I}(l) = \langle L, M \rangle$  onde  $L, M \in R_1$ .
2. Seja  $\{L, M_0, M_1, M_2\}$  uma base de  $R_1$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \Upsilon(H) \\ [a_0 : a_1 : a_2] &\longmapsto Z(L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2) \end{aligned}$$

é uma bijeção.

*Demonstração.* 1. Seja  $l \subset \mathbb{P}^3$  uma reta e  $H = Z(L) \subset \mathbb{P}^3$ . Assuma que  $l = Z(L_1, L_2)$  com  $L_1$  e  $L_2$  polinômios homogêneos de grau 1 e linearmente independentes. Segue da Proposição A.3 que:

$$l \subset H \Leftrightarrow L \in \mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle \Leftrightarrow L = AL_1 + BL_2$$

1. Breve revisão das cotas para  $r_d$

---

com  $A$  e  $B \in \mathbb{C}$  não ambos nulos. Deste modo, se  $A \neq 0$  então  $\mathcal{I}(l) = \langle L, L_2 \rangle$ , caso contrário ( $B \neq 0$ )  $\mathcal{I}(l) = \langle L, L_1 \rangle$ . De fato, se  $A \neq 0$ , segue que:

$$\frac{L}{A} = L_1 + \frac{B}{A}L_2 \Rightarrow L_1 = \frac{1}{A} \cdot L - \frac{B}{A}L_2.$$

Assim,

$$\mathcal{I}(l) = \langle L_1, L_2 \rangle = \langle \frac{1}{A} \cdot L - \frac{B}{A}L_2, L_2 \rangle = \langle \frac{1}{A} \cdot L, L_2 \rangle = \langle L, L_2 \rangle$$

com  $L$  e  $L_2$  homogêneos de grau 1 e linearmente independentes. Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{I}(l) = \langle L, M \rangle$  temos que  $p \in l$  se e somente se  $L(p) = M(p) = 0$ , segue que  $p \in Z(L) = H$  e portanto  $l \subset H$ .

2. Considere  $a = [a_0 : a_1 : a_2]$  e  $b = [b_0 : b_1 : b_2]$  pontos em  $\mathbb{P}^2$ . Vamos mostrar que:

- $\phi$  está bem definida.

Note que  $Z(L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2)$  é uma reta em  $H$ . Como  $\{L, M_0, M_1, M_2\}$  é uma base de  $R_1$  temos que  $a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2$  com  $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$  e  $L$  são linearmente independentes. De fato, dados  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{C}$  tais que  $\alpha L + \beta(a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2) = 0$  tem-se que  $\alpha = 0$  e  $\beta a_i = 0$  com  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Como  $a_i \neq 0$  para algum  $i$ , segue que  $\alpha = \beta = 0$ . Deste modo,  $Z(L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2)$  é uma reta contida em  $H$ . Agora suponhamos  $a = b$ , logo para algum  $\lambda \neq 0$  em  $\mathbb{C}$  temos que  $a_i = \lambda b_i$ . Assim  $Z(L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2) = Z(L, \lambda b_0M_0 + \lambda b_1M_1 + \lambda b_2M_2) = Z(L, \lambda(b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2)) = Z(L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2)$ .

- $\phi$  é injetiva.

Assuma que  $\phi(a) = \phi(b)$ . Assim  $Z(L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2) = Z(L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2)$ . Segue que:  $\mathcal{I}(Z(\langle L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2 \rangle)) = \mathcal{I}(Z(\langle L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2 \rangle))$ . A partir do Teorema dos Zeros de Hilbert (Teorema A.2) temos que:

$$\sqrt{\langle L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2 \rangle} = \sqrt{\langle L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2 \rangle}.$$

Assim:

$$\langle L, a_0M_0 + a_1M_1 + a_2M_2 \rangle = \langle L, b_0M_0 + b_1M_1 + b_2M_2 \rangle.$$

Da última igualdade segue que:

$$\sum_{i=0}^2 a_i M_i = \alpha L + \beta \sum_{i=0}^2 b_i M_i \implies \alpha L + \sum_{i=0}^2 (\beta b_i - a_i) M_i = 0$$

Como  $\{L, M_1, M_2, M_3\}$  é uma base, concluímos que  $\alpha = 0$  e  $\beta b_i = a_i$  se  $i \in \{0, 1, 2\}$ , segue que  $a = [a_0 : a_1 : a_2] = [\beta b_0 : \beta b_1 : \beta b_2] = [b_0 : b_1 : b_2] = b$ . Portanto  $\phi$  é injetiva.

- $\phi$  é sobrejetora.

Dada  $l \in \Upsilon(H)$ , pelo item 1 dessa proposição temos que  $\mathcal{I}(l) = \langle L, M \rangle$  com  $\{L, M\}$  linearmente independente. Assim,  $M = \alpha L + a_0 M_0 + a_1 M_1 + a_2 M_2$  com algum  $a_i$  não nulo, de onde concluímos que:

$$\mathcal{I}(l) = \langle L, \sum_{i=0}^2 a_i M_i \rangle \implies l = Z(L, \sum_{i=0}^2 a_i M_i) = \phi([a_0 : a_1 : a_2]).$$

Logo  $\phi$  é sobrejetiva. □

**Corolário 1.2.** Todo plano contém infinitas retas sendo estas parametrizadas por  $\mathbb{P}^2$ .

Segue do Fato A.4 no Apêndice A que duas retas quaisquer em um plano são concorrentes. Assim,  $r_1 = 0$ , ou seja planos em  $\mathbb{P}^3$  não contém retas duas a duas disjuntas.

## 1.2 Retas em superfícies quádricas não singulares em $\mathbb{P}^3$

**Teorema 1.3.** (*Classificação das hipersuperfícies quádricas em  $\mathbb{P}^n$* ) Se  $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  é um polinômio homogêneo não nulo de grau 2, então existe  $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$  tal que  $T \bullet F$  é igual a exatamente um dos seguintes polinômios:

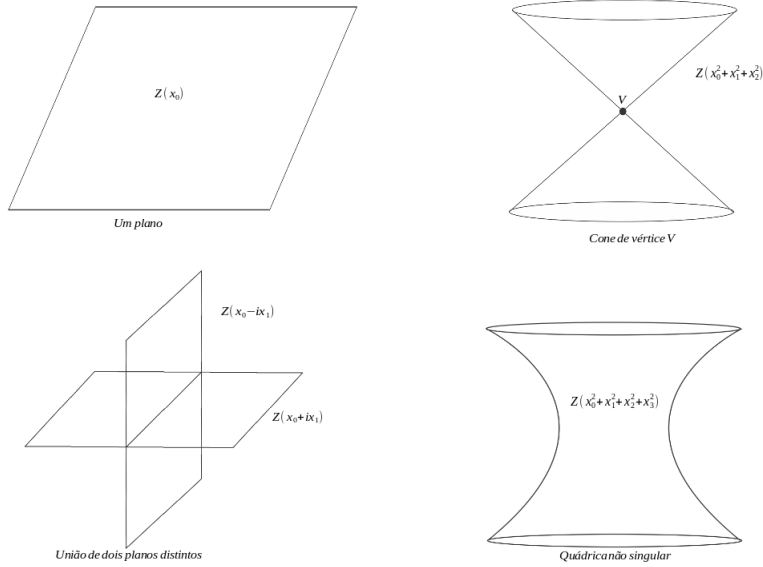
$$\begin{cases} x_0^2, \\ x_0^2 + x_1^2, \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2, \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \end{cases}$$

*Demonstração.* Ver demonstração em [6], Teorema 4 p. 411. □

**Corolário 1.4.** As superfícies quádricas em  $\mathbb{P}^3$  são projetivamente equivalentes a exatamente uma das seguintes quádricas a seguir:

$$\begin{cases} Q_1 = Z(x_0^2) \\ Q_2 = Z(x_0^2 + x_1^2) \\ Q_3 = Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ Q_4 = Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{cases}$$

Uma superfície quádrica em  $\mathbb{P}^3$  assume uma das seguintes formas geométricas:



**Observações 1.1.** 1. Segue da descrição do corolário acima que  $Q_4$  é a única superfície não singular nessa lista.

2.  $Q_4 = Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \subset \mathbb{P}^3$  e  $Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2)$  são projetivamente equivalentes. Note que podemos escrever:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \overbrace{(x_0 + ix_1)}^{L_1} \overbrace{(x_0 - ix_1)}^{L_2} - \overbrace{(x_2 + ix_3)}^{L_3} \overbrace{(-x_2 + ix_3)}^{L_4}$$

Observemos que  $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$  é uma base de  $R_1$ . Escrevendo a combinação linear:

$$a(x_0 + ix_1) + b(x_0 - ix_1) + c(x_2 + ix_3) + d(-x_2 + ix_3) = 0.$$

Distribuindo e agrupando os termos semelhantes obtemos:

$$x_0(a + b) + x_1(ai - bi) + x_2(c - d) + x_3(ci + di) = 0.$$

1. Breve revisão das cotas para  $r_d$

---

De onde obtemos o seguinte sistema de equações:

$$a + b = 0, \quad ai - bi = 0, \quad c - d = 0 \text{ e } ci + di = 0$$

cuja única solução é:  $a = b = c = d = 0$ . Logo existe  $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$  tal que:

$$T_{\bullet}L_1 = x_0, \quad T_{\bullet}L_2 = x_3, \quad T_{\bullet}L_3 = x_1 \quad \text{e} \quad T_{\bullet}L_4 = x_2.$$

Considere  $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  Mudança de Coordenadas Projetivas determinada por  $T$ . Temos que:

$$\varphi(Q_4) = Z(T_{\bullet}(L_1L_2 - L_3L_4)) = Z(T_{\bullet}L_1T_{\bullet}L_2 - T_{\bullet}L_3T_{\bullet}L_4) = Z(x_0x_3 - x_1x_2) = Q.$$

Logo,  $Q_4$  e  $Q$  são projetivamente equivalentes.

Por conta do Lema A.4 e da Observação A.7 (no Apêndice) é suficiente estudar as retas em  $Q$  para determinar  $r(S)$  sendo  $S$  uma superfície quádrlica não singular qualquer em  $\mathbb{P}^3$ .

**Lema 1.5.** Considere

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ ([a_0 : a_1], [b_0, b_1]) &\longmapsto [a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1]. \end{aligned}$$

Verifica-se que  $\varphi$  é uma bijeção.

*Demonstração.* Observe que  $\varphi$  está bem definida. Além disso:

- $\varphi$  é injetiva.

Considere  $a = [a_0 : a_1]$ ,  $b = [b_0 : b_1]$ ,  $c = [c_0 : c_1]$  e  $d = [d_0 : d_1]$  pontos em  $\mathbb{P}^1$ .

Assuma que  $\varphi(a, b) = \varphi(c, d)$ . Segue que:

$$[a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1] = [c_0d_0 : c_0d_1 : c_1d_0 : c_1d_1].$$

Logo existe  $\lambda \neq 0$  em  $\mathbb{C}$  tal que:

$$(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1) = \lambda(c_0d_0, c_0d_1, c_1d_0, c_1d_1).$$

## 1. Breve revisão das cotas para $r_d$

---

Obtemos da equação acima o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = \lambda c_0 d_0 \\ a_0 b_1 = \lambda c_0 d_1 \\ a_1 b_0 = \lambda c_1 d_0 \\ a_1 b_1 = \lambda c_1 d_1 \end{cases}$$

Caso 1:  $a_0 = 0$

Como  $a_0 = 0$  temos que  $a_1 \neq 0$  assim podemos escrever  $a = [a_0 : a_1] = [0 : 1]$ . Deste modo temos que  $\lambda c_0 d_0 = 0$  e  $\lambda c_0 d_1 = 0$ , como  $\lambda \neq 0$  e  $d \in \mathbb{P}^1$  segue que  $c_0 = 0$ , assim  $c = [c_0 : c_1] = [0 : 1] = a$ . Agora note que, como  $a_1 \neq 0$  segue que:  $b_0 = \lambda \frac{c_1}{a_1} d_0$  e  $b_1 = \lambda \frac{c_1}{a_1} d_1$ . Portanto  $b = d$ .

Caso 2:  $a_0 \neq 0$

Como  $a_0 \neq 0$  temos que  $b_0 = \lambda \frac{c_0}{a_0} d_0$  e  $b_1 = \lambda \frac{c_0}{a_0} d_1$ . Assim,  $c_0 \neq 0$  e portanto  $b = d$ . Além disso, substituindo as expressões de  $b_0$  e  $b_1$  na 3ª e 4ª equação no sistema temos:  $a_1 \lambda \frac{c_0}{a_0} d_0 = \lambda c_1 d_0$  e  $a_1 \lambda \frac{c_0}{a_0} d_1 = \lambda c_1 d_1$ , logo  $(a_1 \frac{c_0}{a_0} - c_1) d_0 = 0$  e  $(a_1 \frac{c_0}{a_0} - c_1) d_1 = 0$ . De onde concluímos que  $a_1 \frac{c_0}{a_0} = c_1$  e  $a_0 \frac{c_0}{a_0} = c_0$ . Logo  $a = c$ .

- $\varphi$  é sobrejetora.

Dado  $p = [a_0 b_0 : a_0 b_1 : a_1 b_0 : a_1 b_1] \in \text{Im} \varphi$  temos que  $a_0 b_0 a_1 b_0 - a_0 b_1 a_1 b_1 = 0$ , portanto  $\text{Im} \varphi \subset Q = Z(x_0 x_3 - x_1 x_2)$ . A seguir vamos mostrar que  $Q \subset \text{Im}(\varphi)$ .

Seja  $q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3] \in Q$ , assim  $q_0 q_3 = q_1 q_2$ .

Caso 1:  $q_0 = 0$

Neste caso temos que  $q_1 q_2 = 0$ .

Se  $q_1 = 0$  temos que  $q = [0 : 0 : q_2 : q_3] = \varphi([0 : 1], [q_2 : q_3])$ .

Se  $q_2 = 0$  temos que  $q = [0 : q_1 : 0 : q_3] = \varphi([q_1 : q_3], [0 : 1])$ .

Caso 2:  $q_0 \neq 0$

Note que:  $q = [q_0^2 : q_1 q_0 : q_2 q_0 : q_3 q_0] = [q_0^2 : q_1 q_0 : q_2 q_0 : q_1 q_2]$ . Deste modo temos:  $q = \varphi([q_0 : q_2] : [q_0 : q_1])$ . Segue que  $\varphi$  é sobrejetora.

□

**Teorema 1.6.** *Existem duas famílias de retas  $\mathcal{L} = \{L_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$  e  $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q \in \mathbb{P}^1}$  parametrizadas por  $\mathbb{P}^1$  na superfície quádrlica não singular  $Q = Z(x_0 x_3 - x_1 x_2)$  satisfazendo:*

1.  $L_p \cap L_q = \emptyset$ ,  $M_p \cap M_q = \emptyset$ , para quaisquer que sejam  $L_p, L_q \in \mathcal{L}$ ,  $M_p, M_q \in \mathcal{M}$  sendo  $p, q \in \mathbb{P}^1$  com  $p \neq q$ .

1. Breve revisão das cotas para  $r_d$

---

2.  $L_p \cap M_q \neq \emptyset$ , para quaisquer  $p, q \in \mathbb{P}^1$ . De fato, dita interseção consiste de um único ponto.
3. Para qualquer  $x \in Q$  existem únicas retas  $L \in \mathcal{L}$  e  $M \in \mathcal{M}$  tais que  $L \cap M = \{x\}$ .
4.  $\Upsilon(Q) = \mathcal{L} \dot{\cup} \mathcal{M}$ .

*Demonstração.* Defina para cada  $a = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$ . As famílias de retas  $\mathcal{L} = \{L_a\}_{a \in \mathbb{P}^1}$  e  $\mathcal{M}_a = \{M_{a \in \mathbb{P}^1}\}$  sendo:

$$L_a = \mathbb{P}(W_a) \text{ e } W_a = [(a_0, 0, a_1, 0), (0, a_0, 0, a_1)]. \quad (1.1)$$

$$M_a = \mathbb{P}(U_a) \text{ e } U_a = [(0, 0, a_0, a_1), (a_0, a_1, 0, 0)]. \quad (1.2)$$

Observemos ainda que:

$$L_a = Z(a_1x_0 - a_0x_2, a_1x_1 - a_0x_3) \text{ e } M_a = Z(a_1x_0 - a_0x_1, a_1x_2 - a_0x_3).$$

Não é difícil constatar que  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  são famílias de retas em  $Q$ .

1. Considere  $a = [a_0 : a_1]$  e  $b = [b_0 : b_1]$  distintos em  $\mathbb{P}^1$ , consideremos  $L_a$  e  $L_b$  definidas em (1.1). Pela Proposição A.8 temos que:

$$L_a \cap L_b = \emptyset \Leftrightarrow W_a \oplus W_b = \mathbb{C}^4 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ b_0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 \end{vmatrix} = (a_0b_1 - a_1b_0)^2 \neq 0.$$

Analogamente mostra-se que  $M_a \cap M_b = \emptyset \Leftrightarrow a \neq b$ .

2. Observemos que o ponto  $[a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1] \in L_a \cap M_b$  e este ponto é único pois  $L_a \neq M_b$ .
3. Dado  $x \in Q$  segue do Lema 15 que existem únicos  $a = [a_0 : a_1]$  e  $b = [b_0 : b_1] \in \mathbb{P}^1$  tais que  $x = [a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1]$ . A partir de (1.1) e (1.2) verifica-se que  $x \in L_a \cap M_b$ . Além disso temos  $L_a \cap M_b = \{x\}$ , pois estas retas são distintas.
4. Sabemos que  $\mathcal{L} \cup \mathcal{M} \subseteq \Upsilon(Q)$ . Além disso, temos que  $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$ . Seja  $l \subset Q$  uma reta. Considere  $x \in l$  daí  $x = [a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1]$  com  $a = [a_0 : a_1]$  e  $b = [b_0 : b_1] \in \mathbb{P}^1$ . Considere o plano  $T_xQ = Z(a_1b_1x_0 - a_1b_0x_1 - a_0b_1x_2 + a_0b_0x_3)$ .

A seguir vamos mostrar que:

$$T_x Q \cap Q = Z(a_1 b_1 x_0 - a_1 b_0 x_1 - a_0 b_1 x_2 + a_0 b_0 x_3, x_0 x_3 - x_1 x_2) = L_a \cup M_b.$$

Seja  $p = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in T_x Q \cap Q$ . Isso nos diz que:

$$\begin{cases} a_1 b_1 x_0 - a_1 b_0 x_1 - a_0 b_1 x_2 + a_0 b_0 x_3 = 0 \\ x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

Pelo menos um dos coeficientes da 1ª equação é não nulo. Suponhamos que  $a_0 b_0 \neq 0$ . Neste caso  $p \in T_x Q \cap Q$  se e somente se  $\alpha \beta x_0 - \alpha x_1 - \beta x_2 + x_3 = 0$  onde  $\alpha = \frac{a_1}{a_0}$  e  $\beta = \frac{b_1}{b_0}$  e  $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ . Após alguns cálculos concluímos que  $p$  pertence a  $L_{[1:\alpha]} \cup L_{[1:\beta]}$ , sendo:

$$L_{[1:\alpha]} = L_a = Z(\alpha x_1 - x_3, \alpha x_0 - x_2) \text{ e } M_{[1:\beta]} = L_b = Z(\beta x_2 - x_3, x_1 - \beta x_0).$$

Portanto  $T_x Q \cap Q \subset L_a \cup M_b$ . Observe que  $L_a \subset T_x Q$  e  $M_b \subset T_x Q$ , logo  $T_x Q \cap Q = L_a \cup M_b$ . Sabe-se que se  $x \in l \subset Q$  então  $l \subset T_x Q$ . Assim,  $l \subset T_x Q \cap Q = L_a \cup M_b$ , de onde podemos concluir que  $l = L_a$  ou  $l = L_b$ . □

**Corolário 1.7.** A quantidade de retas duas a duas disjuntas nas superfícies quádricas não singulares é infinito. Portanto  $r_2 = \infty$ .

### 1.3 Retas em superfícies cúbicas não singulares em $\mathbb{P}^3$

Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície cúbica não singular. Verifica-se que  $\Upsilon(S) \neq \emptyset$ , o leitor interessado pode conferir em [1]. Lembremos que para cada reta  $L$  em  $\mathbb{P}^3$  temos:  $\Upsilon_L(S) = \{l \in \Upsilon(S) \mid l \cap L \neq \emptyset \text{ e } l \neq L\}$  e  $\Omega_L = \{H \mid H \text{ é um plano em } \mathbb{P}^3 \text{ contendo } L\}$ .

**Teorema 1.8.** *Considere  $l \in \Upsilon(S)$  sendo  $S \subset \mathbb{P}^3$  superfície cúbica não singular. Então existem exatamente 5 planos em  $\Omega_L$ , digamos  $H_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  tais que  $H_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$  sendo  $l, l_i$  e  $l'_i$  retas duas a duas distintas.*

*Demonstração.* Veja p. 12 em [7]. □

**Lema 1.9.** Com as notações do Teorema 1.8 para todo  $i \neq j$  com  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  são válidas as seguintes afirmações:

$$l_i \cap l_j = \emptyset, l'_i \cap l'_j = \emptyset \text{ e } l_i \cap l'_j = \emptyset.$$

*Demonstração.* Veja p. 13 em [7]. □

**Corolário 1.10.** Com as mesmas condições do Teorema 1.8, verifica-se que:

1.  $\#\Upsilon(S) \geq 11$ .
2.  $r_3 \geq 5$ .

*Demonstração.* 1. Sabemos que existem 5 planos distintos em  $\mathbb{P}^3$  contendo a reta  $l$  tais que  $H_i \cap S = l \cup l_i \cup l'_i$  com  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Assim podemos considerar  $\Lambda = \{l, l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3, l_4, l'_4, l_5, l'_5\} \subset \Upsilon(S)$ . Como  $\Lambda$  é formado por retas duas a duas distintas, segue que  $\#\Upsilon(S) \geq 11$ .

2. Temos que  $\Gamma = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$  é formado por retas duas a duas disjuntas. Assim  $r(S) \geq 5$ , como  $S$  é uma superfície cúbica não singular qualquer temos que  $r_3 \geq 5$ . □

**Lema 1.11.** Sejam  $l$  e  $m$  retas distintas em  $S$ . Verifica-se que:

1.  $\#\Upsilon_l(S) = 10$ .
2.  $\#(\Upsilon_l(S) \cap \Upsilon_m(S)) = \begin{cases} 1 & \text{se } l \cap m \neq \emptyset \\ 5 & \text{se } l \cap m = \emptyset \end{cases}$ .

*Demonstração.* Veja p. 14 em [7]. □

Consideremos  $L_1$  e  $L_2$  retas disjuntas em  $S$ . Assim levando em consideração o Lema 1.11 podemos assumir que:

$$\Upsilon_{L_1}(S) = \{a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4, c_4, a_5, c_5\}$$

e

$$\Upsilon_{L_2}(S) = \{b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, b_4, c_4, b_5, c_5\}$$

sendo  $H_i = \langle a_i, c_i \rangle$  e  $\widehat{H}_i = \langle b_i, c_i \rangle$  para  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , os planos determinados pelo Teorema 1.8. A seguir descreveremos as interseções entre as retas de  $\Upsilon_{L_1}(S) \cup \Upsilon_{L_2}(S)$ .

**Lema 1.12.** Com as notações acima. Verifica-se que:

1.  $a_i \cap a_j = \emptyset$ ,  $b_i \cap b_j = \emptyset$  e  $c_i \cap c_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  com  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
2.  $a_i \cap c_j = \emptyset$  e  $b_i \cap c_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  com  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
3.  $L_1 \cap b_i = \emptyset$  e  $L_2 \cap a_i = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

*Demonstração.* Veja p. 15 em [7]. □

A partir do Lema 1.12 pode-se chegar no seguinte resultado:

**Corolário 1.13.** Com as notações acima, consideremos as retas  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 = L_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 = L_1$ . Verifica-se que:

1.  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  são retas na superfície  $S$  duas a duas disjuntas.
2.  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$  são retas na superfície  $S$  duas a duas disjuntas.
3.  $r_3 \geq 6$ .
4.  $a_i \cap b_i = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
5.  $a_i \cap b_j \neq \emptyset$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  com  $i \neq j$ .

*Demonstração.* Veja p. 15 em [7]. □

A seguir para cada  $i < j$  com  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  consideremos o plano  $H_{ij} = \langle a_i, b_j \rangle$ , o único plano em  $\mathbb{P}^3$  contendo as retas  $a_i$  e  $b_j$ . Assim temos que  $H_{ij} \cap S = a_i \cup b_j \cup l_{ij}$  sendo  $l_{ij}$  uma reta distinta de  $a_i$  e  $b_j$ , chamada de *reta residual* à cônica  $a_i \cup b_j$ . Assim obtemos as retas:

$$l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{23}, l_{24}, l_{25}, l_{26}, l_{34}, l_{35}, l_{36}, l_{45}, l_{46}, l_{56}.$$

No que segue, introduzimos um Lema que nos auxiliará no cálculo de  $r(S)$  no caso em que  $S$  é uma superfície cúbica não singular em  $\mathbb{P}^3$ .

**Lema 1.14.** Considerando as notações acima e sendo  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ,  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$  e  $\Delta = \{l_{ij} \mid i < j \text{ e } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ . Verifica-se que:

1.  $\Delta \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \emptyset$ .
2.  $l_{ij} \cap a_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in \{i, j\}$ .
3.  $l_{ij} \cap b_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in \{i, j\}$ .
4.  $l_{ij} = l_{kt} \Leftrightarrow i = k \text{ e } j = t$ , sendo  $i < j$  e  $k < t$ .
5. Se  $l_{ij} \neq l_{kt}$  então  $l_{ij} \cap l_{kt} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{i, j\} \cap \{k, t\} = \emptyset$ .

*Demonstração.* Veja p. 16 em [7]. □

**Teorema 1.15.**  $\Upsilon(S) = \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B} \dot{\cup} \Delta$ . Em particular temos que  $\#\Upsilon(S) = 27$ .

*Demonstração.* Veja p. 18 em [7]. □

No que segue usaremos a seguinte notação:

$$l_{\{i,j\}} = \begin{cases} l_{ij} & \text{se } i < j \\ l_{ji} & \text{se } j < i \end{cases}$$

**Lema 1.16.** Sejam  $L_1, \dots, L_5$  retas em  $\Delta$ . Verifica-se que  $\{L_1, \dots, L_5\}$  é formado por retas duas a duas disjuntas se e somente se  $L_i = l_{\{\alpha, \alpha_i\}}$  com  $i \in \{1, \dots, 5\}$  tais que:  $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_5\} = I_6$  sendo  $I_6 = \{1, 2, \dots, 6\}$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sendo  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  segue do Lema 1.14 que  $L_1 = l_{\{\alpha, \alpha_1\}}$  e  $L_2 = l_{\{\alpha, \alpha_2\}}$  com  $\alpha \neq \alpha_i$  para  $i \in \{1, 2\}$  e  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Considere  $L_3 \in \Delta$  tal que  $L_3 = l_{\{\beta, \gamma\}}$  com  $\beta \neq \gamma$  tal que  $L_3 \cap L_1 = \emptyset$  e  $L_3 \cap L_2 = \emptyset$ . Temos duas possibilidades:

Caso 1: Se  $\alpha \in \{\beta, \gamma\}$  então  $L_3 = l_{\{\alpha, \alpha_3\}}$ ,  $L_1 = l_{\{\alpha, \alpha_1\}}$  e  $L_2 = l_{\{\alpha, \alpha_2\}}$ . Segue que:  $\#\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 4$ .

Caso 2: Se  $\alpha \notin \{\beta, \gamma\}$  então  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 \in \{\beta, \gamma\}$ , segue que  $\{\beta, \gamma\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , então  $L_3 = l_{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$ ,  $L_1 = l_{\{\alpha, \alpha_1\}}$  e  $L_2 = l_{\{\alpha, \alpha_2\}}$ .

A seguir, considere  $L_4 \in \Delta$ ,  $L_4 = l_{\{\beta, \gamma\}}$  tal que  $L_4 \cap L_i = \emptyset$  com  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Temos duas possibilidades:

Caso 1: Se  $L_i = l_{\{\alpha, \alpha_i\}}$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$  com  $\#\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 4$ . Temos que:

$$L_4 \cap L_i = \emptyset \forall i \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow \{\beta, \gamma\} \cap \{\alpha, \alpha_i\} \neq \emptyset \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Deste modo, se  $\alpha \in \{\beta, \gamma\}$  então temos que  $L_4 = l_{\{\alpha, \alpha_4\}}$  com  $\#\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 5$ . Caso contrário temos que  $\{\alpha, \gamma\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , logo  $L_4 = l_{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$  então  $L_4 \cap L_3 \neq \emptyset$ , o que é um absurdo já que as retas  $L_i$  são duas a duas disjuntas.

Caso 2: Se  $L_1 = l_{\{\alpha, \alpha_1\}}$ ,  $L_2 = l_{\{\alpha, \alpha_2\}}$  e  $L_3 = l_{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$  com  $\#\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2\} = 3$ . Temos que:

$$L_4 \cap L_i = \emptyset \forall i \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow \{\beta, \gamma\} \cap \{\alpha, \alpha_i\} \neq \emptyset \text{ se } i = 1, 2 \text{ e } \{\beta, \gamma\} \cap \{\alpha_1, \alpha_2\} \neq \emptyset.$$

Se  $\alpha \in \{\beta, \gamma\}$  e  $\alpha_i \in \{\beta, \alpha\}$  para exatamente um  $i \in \{1, 2\}$  então  $\{\beta, \gamma\} = \{\alpha, \alpha_i\}$ . Logo  $L_4 = L_1$  ou  $L_4 = L_2$ , o que é um absurdo já que as retas  $L_i$  são duas a duas disjuntas. Caso contrário temos que  $\{\beta, \gamma\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , logo  $L_4 = L_3$ .

Finalmente consideremos as retas  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$  duas a duas disjuntas temos necessariamente que  $L_i = l_{\{\alpha, \alpha_i\}}$  com  $\#\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 5$ . Seja  $L_5 = l_{\{\alpha, \beta\}}$ . Usando as ideias acima concluímos que  $\{\beta, \alpha\} = \{\alpha, \alpha_5\}$ , logo  $L_5 = l_{\{\alpha, \alpha_5\}}$  com  $I_6 = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Temos que  $L_i = l_{\{\alpha, \alpha_i\}}$  com  $I_6 = \{\alpha, \dots, \alpha_5\}$ . Segue mais uma vez do Lema 1.14 que  $\{L_i\}_{i=1}^5$  é formado por retas duas a duas disjuntas.  $\square$

**Corolário 1.17.** A quantidade máxima  $r(\Delta)$  de retas duas a duas disjuntas em  $\Delta$  é igual a 5.

*Demonstração.* Sabemos que  $r(\Delta) \geq 5$  pois  $l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{15}, l_{16}$  são 5 retas duas a duas disjuntas. Suponha que  $r(\Delta) > 5$ . Assim podemos considerar  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$  retas em  $\Delta$  duas a duas disjuntas. Segue do Lema 1.16 que  $L_i = l_{\{\alpha, \alpha_i\}}$  com  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Seja  $L_6 = l_{\{\beta, \gamma\}}$ . Se  $\alpha \in \{\beta, \gamma\}$  então  $\gamma \in I_6 - \{\alpha\}$ . Assim  $L_6 = L_i$  para algum  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  o que é um absurdo. Caso contrário,  $\alpha_i \in \{\beta, \gamma\} \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  o que é um absurdo.  $\square$

**Teorema 1.18.** Se  $S \subset \mathbb{P}^3$  é uma superfície cúbica não singular então  $r(S) = 6$ . Em particular  $r_3 = 6$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $r(S) \geq 6$ . Considere  $C \subseteq \Upsilon(S)$  formado por retas duas a duas disjuntas. Segue do Teorema 1.15 que:  $C = C \cap \mathcal{A} \dot{\cup} C \cap \mathcal{B} \dot{\cup} C \cap \Delta$ . Temos três casos para analisar nessa partição de  $C$ . A saber:

1. Dois conjuntos na partição são vazios. Nesse caso temos as seguintes possibilidades:

- $C \cap \mathcal{A} = C \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow C = C \cap \Delta \Rightarrow \#C \leq 5$ .
- $C \cap \mathcal{A} = C \cap \Delta = \emptyset \Rightarrow C = C \cap \mathcal{B} \Rightarrow \#C \leq 6$ .
- $C \cap \mathcal{B} = C \cap \Delta = \emptyset \Rightarrow C = C \cap \mathcal{A} \Rightarrow \#C \leq 6$ .

2. Só um dos conjuntos da partição é vazio. Nesse caso temos três possibilidades:

- $C \cap \Delta = \emptyset, C \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$  e  $C \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ . Neste caso necessariamente  $C \cap \mathcal{A} = \{a_k\}$  e  $C \cap \mathcal{B} = \{b_k\}$  para algum  $k \in I_6$ . Logo  $\#C = 2 \leq 6$ .
- $C \cap \mathcal{B} = \emptyset, C \cap \mathcal{A} \neq C \cap \Delta \neq \emptyset$ . Considere  $a_k \in C \cap \mathcal{A}$ . Lembremos que  $r(\Delta) = 5$  ou seja  $\#C \cap \Delta$  é no máximo 5. De fato,  $C \cap \Delta \neq \emptyset \subseteq \{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}, \dots, l_{\{\alpha, \alpha_5\}}\}$  sendo que  $I_6 = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Note que  $k \in I_6$ . Temos duas possibilidades,  $k = \alpha$  ou  $k = \alpha_i$  para algum  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Se  $k = \alpha$  temos que  $a_k \cap l_{\{\alpha, \alpha_i\}} \neq \emptyset \forall i$ , o que é um absurdo. Assim,  $k = \alpha_i$  para algum  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $\alpha = \alpha_5$ . Logo temos necessariamente que  $C \cap \Delta \subseteq \{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}, \dots, l_{\{\alpha, \alpha_4\}}\}$ . Note que se  $C \cap \mathcal{A} = \{a_k\}$  então concluímos que  $\#C = 1 + \#C \cap \Delta$  segue que  $\#C \leq 5 \leq 6$ . Observemos que se tivermos duas retas no conjunto  $C \cap \mathcal{A}$  então duas retas devem ser retiradas do conjunto  $\{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}, \dots, l_{\{\alpha, \alpha_5\}}\}$ .

Como este conjunto é não vazio deve conter apenas uma reta. Deste modo a quantidade de retas de  $C \cap \mathcal{A}$  é no máximo quatro e neste caso  $C \cap \Delta = \{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}\}$ , logo  $\#C \leq 5$ .

- $C \cap \mathcal{A} = \emptyset$ ,  $C \cap \mathcal{B} \neq C \cap \Delta \neq \emptyset$ . É análogo ao caso anterior.

3. Os três conjuntos da partição são não vazios. Neste caso, necessariamente  $C \cap \mathcal{A} = \{a_k\}$  e  $C \cap \mathcal{B} = \{b_k\}$  para algum  $k \in I_6$  (pois  $a_i \cap b_j \neq \emptyset$  se  $i \neq j$ ). Temos que  $r(\Delta) = 5$  e  $C \cap \Delta \neq \emptyset$  assim  $C \cap \Delta \subseteq \{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}, \dots, l_{\{\alpha, \alpha_5\}}\}$  com  $I_6 = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ . Como  $C \cap \mathcal{A} = \{a_k\}$  e  $C \cap \mathcal{B} = \{b_k\}$  com  $k \in I_6$  e  $C \cap \Delta \neq \emptyset \subseteq \{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}, \dots, l_{\{\alpha, \alpha_5\}}\}$ , então necessariamente  $k = \alpha_i$  para algum  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e sem perda de generalidade podemos assumir que  $k = \alpha_5$ . Assim  $C \cap \mathcal{A} = \{a_k\}$  e  $C \cap \mathcal{B} = \{b_k\}$  e  $C \cap \Delta \subseteq \{l_{\{\alpha, \alpha_1\}}, \dots, l_{\{\alpha, \alpha_4\}}\}$ . Assim,  $\#C \leq 2 + 4 = 6$ .

□

## 1.4 Retas em superfícies quárticas não singulares em $\mathbb{P}^3$

Usando métodos de Geometria Algébrica moderna em 1975, V. V. Nikulin mostrou em seu artigo “*On Kummer surfaces*” ([9]) que o número máximo de retas duas a duas disjuntas que uma superfície quártica não singular pode conter é 16. Na literatura existem vários exemplos de superfícies quárticas não singulares contendo 16 retas duas a duas disjuntas, veja por exemplo : [14], [5] e [2]. Entretanto, a seguir mostraremos que a famosa *Quártica de Schur*  $\mathbf{S} = Z(f)$  definida por:

$$f = x_0(x_0^3 - x_1^3) - x_2(x_2^3 - x_3^3)$$

que possui exatamente 64 retas, este número foi calculado em 1882 pelo matemático alemão Friedrich Schur no artigo “*Ueber eine besondere Class von Flächen vierter Ordnung*” ([12]).

Considere  $\phi(u, v) = u(u^3 - v^3) \in \mathbb{C}[u, v]$  podemos reescrever a equação da quártica como

$$f = \phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3).$$

Temos que:  $\phi(u, v) = u(u^3 - v^3) = u(u - v)(u - \xi)v(u - \xi^2v)$  onde  $\xi = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  é uma raiz cúbica da unidade em  $\mathbb{C}$ .

Sejam  $L = Z(x_0, x_1)$  e  $M = Z(x_2, x_3)$  retas em  $\mathbb{P}^3$ . Temos que:

$$\mathbf{S} \cap L = Z(f) \cap Z(x_0, x_1) = Z(f, x_0, x_1) = Z(x_2(x_2^3 - x_3^3), x_0, x_1).$$

$$\mathbf{S} \cap M = Z(f) \cap Z(x_2, x_3) = Z(f, x_2, x_3) = Z(x_0(x_0^3 - x_1^3), x_2, x_3).$$

Assim,

$$\mathbf{S} \cap L = \{p_1 = [0 : 0 : 0 : 1], p_2 = [0 : 0 : 1 : 1], p_3 = [0 : 0 : \xi : 1], p_4 = [0 : 0 : \xi^2 : 1]\}.$$

$$\mathbf{S} \cap M = \{q_1 = [0 : 1 : 0 : 0], q_2 = [1 : 1 : 0 : 0], q_3 = [\xi : 1 : 0 : 0], q_4 = [\xi^2 : 1 : 0 : 0]\}.$$

Deste modo, segue da Proposição A.7 que por cada ponto  $p_i$  fixo em  $\mathbf{S} \cap L$  e  $q_j \in \mathbf{S} \cap M$  passam exatamente 4 retas, conforme ilustra a figura a seguir.

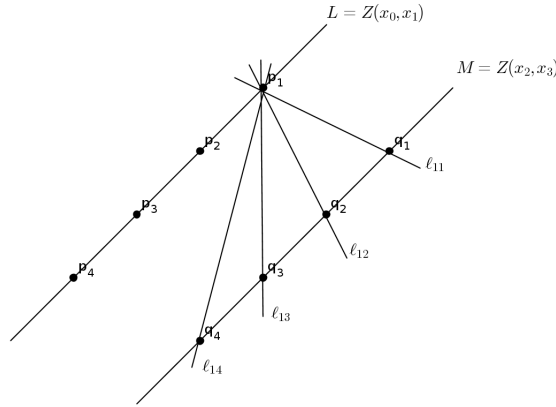


Figura 1.1: Quatro retas passando por  $p_1$ .

A reta que passa por  $p_i$  e  $q_j$  será denotada por  $l_{ij}$ . Definimos  $\mathcal{L}_\phi = \{l_{ij} \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ . Verifica-se que  $\mathcal{L}_\phi \subset \Upsilon(\mathbf{S})$  e  $\#\mathcal{L}_\phi = 16$  (veja Proposição 2.5 p. 30 em [7]). Além disso, o número máximo de retas duas a duas disjuntas em  $\mathcal{L}$  é igual a 4 (veja Lema 2.7 p. 32 em [7]).

Sejam,

$$\Omega_i = \{H \mid H \text{ é um plano contendo a reta } l_{1i}\} \text{ com } i \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ e}$$

$$\Sigma_i = \{H \mid H \cap \mathbf{S} = l_{1i} \cup C_i \text{ sendo } C_i \text{ união de 3 retas distintas}\}.$$

Provou-se que  $\#\Sigma_i = 6 \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (Veja Teorema 2.9 p. 33 em [7]). De fato na tabela a seguir citamos os planos encontrados em cada  $\Sigma_j$  com  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

1. Breve revisão das cotas para  $r_d$

Reta	$\Sigma_j = \{H_{p_1}, H_{q_j}, H_j(1), H_j(-1), H_j(i) \text{ e } H_j(-i)\}$
$\ell_{11}$	$H_{p_1} = Z(x_2), H_{q_1} = Z(x_0) \text{ e } H_1(a) = Z(x_2 - ax_0) \text{ com } a \in \mathcal{U}_4$
$\ell_{12}$	$H_{p_1} = Z(x_2), H_{q_2} = Z(x_0 - x_1) \text{ e } H_2(a) = Z(x_2 - \frac{a}{\sqrt{3}}(x_0 - x_1)) \text{ com } a \in \mathcal{U}_4$
$\ell_{13}$	$H_{p_1} = Z(x_2), H_{q_3} = Z(x_0 - \xi x_1) \text{ e } H_3(a) = Z(x_2 - \frac{a}{\sqrt{3}}(x_0 - \xi x_1)) \text{ com } a \in \mathcal{U}_4$
$\ell_{14}$	$H_{p_1} = Z(x_2), H_{q_4} = Z(x_0 - \xi^2 x_1) \text{ e } H_4(a) = Z(x_2 - \frac{a}{\sqrt{3}}(x_0 - \xi^2 x_1)) \text{ com } a \in \mathcal{U}_4$

sendo  $\mathcal{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ .

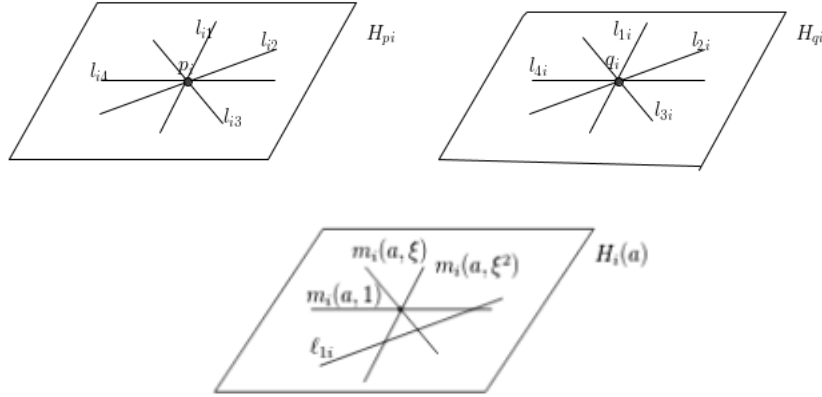


Figura 1.2: Ilustração dos planos encontrados em cada  $\Sigma_j$

Para cada  $a \in \mathcal{U}_4$  e  $b \in \mathcal{U}_3 = \{1, \xi, \xi^2\}$  tem-se que:

$$\begin{aligned}
 m_1(a, b) &= \mathbb{P}([(1, 0, a, 0), (0, a^3 b, 0, 1)]), \\
 m_2(a, b) &= \mathbb{P}([\sqrt{3}a^3 b, 0, b, -2], [0, \sqrt{3}a^3 b, -b, -1]), \\
 m_3(a, b) &= \mathbb{P}([\sqrt{3}a^3 b, 0, b, -2\xi^2], [0, \sqrt{3}a^3 b, -\xi b, -1]), \\
 m_4(a, b) &= \mathbb{P}([\sqrt{3}a^3 b, 0, b, -2\xi], [0, \sqrt{3}a^3 b, -\xi^2 b, -1]).
 \end{aligned}$$

**Teorema 1.19.**  $\Upsilon(\mathbf{S}) = \mathcal{M}_1 \dot{\cup} \mathcal{M}_2 \dot{\cup} \mathcal{M}_3 \dot{\cup} \mathcal{L}_\Phi$  sendo  $\mathcal{M}_i = \{m_i(a, b) \mid (a, b) \in \mathcal{U}_4 \times \mathcal{U}_3\}$ .  
Em particular, temos que:  $\#\Upsilon(\mathbf{S}) = 64$ .

*Demonstração.* Veja Corolário 2.11, p. 35 em [7]. □

**Proposição 1.20.** Com as notações das famílias  $\mathcal{M}_i$ , com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Verifica-se que:  $\mathcal{I} = \{m_1(1, 1), m_1(-1, 1), m_1(i, \xi), m_1(-i, \xi), m_k(1, \xi), m_k(-1, \xi), m_k(i, 1), m_k(-i, 1)\}$  com  $k \in \{2, 3, 4\}$  é constituído por 16 retas duas a duas disjuntas.

Com isso, concluímos que  $r(\mathbf{S}) = 16$ , essa verificação foi feita através do software Maxima.

## 1.5 Cotas para $r_d$ se $d \geq 5$

Em 1984, Yoichi Miyaoka no artigo “*The Maximal Number of Quotient Singularities on Surfaces with given Numerical Invariants*” ([8]) mostrou que se  $S \subseteq \mathbb{P}^3$  for uma superfície não singular de grau  $d \geq 4$  então  $r_d \leq 2d(d - 2)$ .

Em 2005, Slawomir Rams no artigo “*Projective surfaces with many skew lines*” ([10]) mostrou que a família de superfícies definidas por :

$$x_0^{d-1}x_1 + x_1^{d-1}x_2 + x_2^{d-1}x_3 + x_3^{d-1}x_0 \text{ com } d \geq 6$$

contém  $d(d - 2) + 2$  retas duas a duas disjuntas (note que tal superfície é não singular para todo  $d \neq 2$ ). Assim,  $r_d \geq d(d - 2) + 2$  para todo  $d \geq 6$ .

Em 2007, Samuel Boissiere e Alessandra Sarti no artigo “*Counting Lines on surfaces*” ([3]) mostraram que a família de superfícies definidas por:

$$x_0x_1(x_0^{d-2} + x_1^{d-2}) + x_2x_3(x_2^{d-2} + x_3^{d-2})$$

contém  $d(d - 2) + 4$  retas duas a duas disjuntas se  $d$  é ímpar e  $d \geq 7$ , note que tal superfície é não singular para todo  $d \neq 2$ . Assim, neste caso concluímos que  $d(d - 2) + 4 \leq r_d$ , se  $d$  for ímpar e  $d \geq 7$ .

## Capítulo 2

### Determinação das retas em $S_\phi$

Para cada  $\phi \in \mathbb{C}[u, v]$  homogêneo de grau  $d$  considere  $S_\phi = Z(f_\phi) \subseteq \mathbb{P}^3$  com  $f_\phi$  definida por:

$$f_\phi = \phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3].$$

Assuma que  $\phi = \prod_{i=1}^d L_i$  sendo  $L_i$  homogêneo de grau 1 para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$  tais que  $\{L_i, L_j\}$  é LI  $\forall i \neq j$ .

**Lema 2.1.** Com as notações acima verifica-se que  $Z_{\mathbb{P}^1}(\phi_u, \phi_v) = \emptyset$  sendo  $\phi_u = \frac{\partial \phi}{\partial u}$  e  $\phi_v = \frac{\partial \phi}{\partial v}$ .

*Demonstração.* Faremos indução no grau de  $\phi$ .

- Se  $\text{grau}(\phi) = 1$ , neste caso temos que  $\phi = au + bv$  e  $Z_{\mathbb{P}^1}(\phi_u, \phi_v) = Z_{\mathbb{P}^1}(a, b) = \emptyset$ .
- Assuma o resultado para formas de grau  $d - 1$ , sendo seus fatores dois a dois LI. Vamos mostrar o resultado para  $\phi = \prod_{i=1}^d L_i$  com  $\{L_i, L_j\}$  LI para todo  $i \neq j$ .

Escreva  $\phi = \tilde{\phi}L_d$  onde  $\tilde{\phi} = \prod_{i=1}^{d-1} L_i$  e  $L_d = \alpha u - \beta v$ . Assim,  $\phi_u = \tilde{\phi}_u L_d + \tilde{\phi} \alpha = 0$  e  $\phi_v = \tilde{\phi}_v L_d + \tilde{\phi} \beta = 0$ . Seja  $p = (a, b) \in \mathbb{C}^2$  tal que  $\phi_u(p) = 0$  e  $\phi_v(p) = 0$ . Segue que:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_u(p)L_d(p) + \tilde{\phi}(p)\alpha = 0 \\ \tilde{\phi}_v(p)L_d(p) + \tilde{\phi}(p)\beta = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Como  $\phi = u.\phi_u + v.\phi_v$  (relação de Euler) concluímos que  $\phi(p) = 0$ , assim temos duas possibilidades, a saber:  $\tilde{\phi}(p) = 0$  ou  $L_d(p) = 0$ .

1. Assuma que  $L_d(p) \neq 0$  e  $\tilde{\phi}(p) = 0$  então segue de (2.1) que  $\tilde{\phi}_u(p) = \tilde{\phi}_v(p) = 0$ . Como  $L_d(p) \neq 0$ , então  $p \neq (0, 0)$  e segue que  $[p] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\tilde{\phi}_u, \tilde{\phi}_v) = \emptyset$ ,

absurdo.

2. Se  $L_d(p) = 0$  então segue de (2.1) que  $\tilde{\phi}(p) = 0$ . Se  $p \neq (0, 0)$  concluímos que existe  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  tal que  $L_d$  e  $L_i$  são LD.

Segue que, a única solução do sistema  $\phi_u = 0$  e  $\phi_v = 0$  é  $(0, 0)$ . Portanto,  $Z_{\mathbb{P}^1}(\phi_u, \phi_v) = \emptyset$ .

□

**Lema 2.2.** Com as notações acima, considerando  $\phi = \prod_{i=1}^d L_i$  sendo  $\{L_i, L_j\}$  LI  $\forall i \neq j$ . Verifica-se que  $S_\phi$  é não singular.

*Demonstração.* Seja  $p = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^3$ . Temos que  $p \in \text{Sing}(S_\phi)$  se e somente se  $\frac{\partial f_\phi}{\partial x_i} = 0$  para todo  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Segue que:  $\phi_{x_0}(a_0, a_1) = 0$ ,  $\phi_{x_1}(a_0, a_1) = 0$ ,  $\phi_{x_2}(a_2, a_3) = 0$ ,  $\phi_{x_3}(a_2, a_3) = 0$  pelo Lema 2.1, concluímos que  $\text{Sing}(S_\phi) = \emptyset$ . □

Considere novamente  $L = Z(x_2, x_3)$  e  $M = Z(x_0, x_1)$ . Note que:

$$L \cap S_\phi = Z(x_2, x_3, \phi(x_0, x_1)) = Z(x_2, x_3, \prod_{i=1}^d L_i(x_0, x_1)) = \bigcup_{i=1}^d Z(x_2, x_3, L_i(x_0, x_1)).$$

$$M \cap S_\phi = Z(x_0, x_1, \phi(x_2, x_3)) = Z(x_0, x_1, \prod_{i=1}^d L_i(x_2, x_3)) = \bigcup_{i=1}^d Z(x_0, x_1, L_i(x_2, x_3)).$$

De fato, para  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  temos que  $Z(x_2, x_3, L_i(x_0, x_1)) = \{p_i\}$  onde  $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$  se  $L_i = b_i x_0 - a_i x_1$ . Analogamente, para  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  temos que  $Z(x_0, x_1, L_i(x_2, x_3)) = \{q_i\}$  onde  $q_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$  se  $L_i(x_2, x_3) = b_i x_2 - a_i x_3$ .

**Lema 2.3.** Para  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  seja  $l_{ij}$  a única reta em  $\mathbb{P}^3$  passando por  $p_i$  e  $q_j$ . Verifica-se que:

1.  $l_{ij} \subset S_\phi, \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ .
2.  $l_{ij} = Z(L_i(x_0, x_1), L_j(x_2, x_3))$ .
3.  $\#\Upsilon(S_\phi) \geq d^2$ .

*Demonstração.* 1. Consideremos  $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0] \in L \cap S_\phi$  e  $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j] \in M \cap S_\phi$ . Temos que  $l_{ij} = \{[ua_i : ub_i : va_j : vb_j] \in \mathbb{P}^3 \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1\}$ , segue que  $f_\phi = (ua_i, ub_i, va_j, vb_j) = \phi(ua_i, ub_i) - \phi(va_j, vb_j) = u^d \phi(a_i, b_i) - v^d \phi(a_j, b_j) = 0$  para todo  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$ . Assim,  $l_{ij} \subset S_\phi$ .

2. Note que  $Z(L_i(x_0, x_1), L_j(x_2, x_3))$  define uma reta em  $\mathbb{P}^3$  pois  $L_i(x_0, x_1)$  e  $L_j(x_2, x_3)$  são LI  $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ . Note que  $p_i$  e  $q_j \in Z(L_i(x_0, x_1), L_j(x_2, x_3))$ , assim pela unicidade das retas temos que  $l_{ij} = Z(L_i(x_0, x_1), L_j(x_2, x_3))$ .

3. Como  $\phi = \prod_{i=1}^d L_i$  tal que  $\{L_i, L_j\}$  é LI  $\forall i \neq j$ , temos que  $L \cap S_\phi = \{p_1, \dots, p_d\}$  e  $M \cap S_\phi = \{q_1, \dots, q_d\}$  são formados por  $d$  pontos distintos nas retas disjuntas  $L$  e  $M$ , respetivamente, como ilustra a figura abaixo:

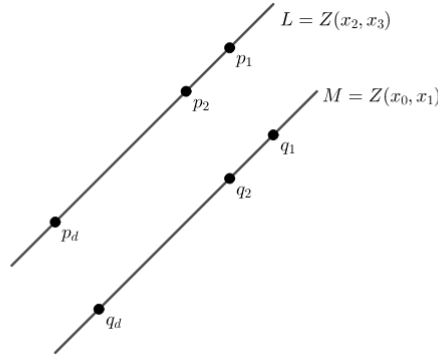


Figura 2.1:  $L \cap S_\phi$  e  $M \cap S_\phi$

Deste modo, concluímos que esses pontos determinam  $d^2$  retas distintas contidas em  $S_\phi$ . Segue que  $\#\Upsilon(S_\phi) \geq d^2$ .

□

**Lema 2.4.** Com as notações acima. Assuma que  $d \geq 2$  e considere  $l \subset S_\phi$  uma reta. Verifica-se que  $L \cap l \neq \emptyset \Leftrightarrow M \cap l \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Note que  $L \not\subset S_\phi$ , assim  $L \neq l$ . Logo  $l \cap L$  consiste de um único ponto. Como  $l \subset S_\phi$  então  $l \cap L \subset S_\phi \cap L = \{p_1, \dots, p_d\}$ . Assim,  $l \cap L = \{p_{i_0}\}$  para algum  $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ . Temos que  $p_{i_0} = [a_{i_0} : b_{i_0} : 0 : 0]$ . Considere o ideal  $\mathcal{I}(p_{i_0}) = \langle x_2, x_3, L_{i_0}(x_0, x_1) \rangle$ , onde  $L_{i_0} = b_{i_0}x_0 - a_{i_0}x_1$ , temos que  $\mathcal{I}(l) = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathcal{I}(p_{i_0})$ , com  $f_1$  e  $f_2$  homogêneos de grau 1 e LI. Deste modo, segue que:  $f_1 = \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_0L_{i_0}(x_0, x_1)$  e  $f_2 = \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_0L_{i_0}(x_0, x_1)$ , onde  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ . Para simplificar a notação vamos escrever  $m = \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3$  e  $n = \beta_2x_2 + \beta_3x_3$ . Observemos que:

- $m$  e  $n$  não podem ser ambos nulos, pois caso contrário obteríamos que  $f_1$  e  $f_2$  são LD o que não ocorre.
- $\alpha_0$  e  $\beta_0$  não podem ser ambos nulos, caso contrário a reta  $l$  coincide com a reta  $L$  o que não ocorre como já vimos acima.

Deste modo, temos alguns casos para analisar:

Caso 1:  $m = 0$ . Neste caso  $\alpha_0 \neq 0$  e  $l = Z(\alpha_0L_{i_0}(x_0, x_1), n + \beta_0L_{i_0}(x_0, x_1)) = Z(L_{i_0}(x_0, x_1), n)$ .

## 2. Determinação das retas em $S_\phi$

Como  $l \subset S_\phi$  segue que  $f_\phi \in \langle L_{i_0}(x_0, x_1), n \rangle$ , isto é:

$$\prod_{i=1}^d L_i(x_0, x_1) - \prod_{i=1}^d L_i(x_2, x_3) = AL_{i_0}(x_0, x_1) + Bn \text{ para algum } A, B \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3],$$

assim ao substituírmos  $x_0 = x_1 = 0$  obtemos  $-\prod_{i=1}^d L_i(x_2, x_3) = \tilde{B}n$  em  $\mathbb{C}[x_2, x_3]$ , de onde concluímos que  $n = uL_{j_0}(x_2, x_3)$  para algum  $u \neq 0$  em  $\mathbb{C}$  e  $j_0 \in \{1, \dots, d\}$ . Assim,  $l = Z(L_{i_0}(x_0, x_1), L_{j_0}(x_2, x_3)) = L_{i_0 j_0}$ . Segue que  $l \cap M \neq \emptyset$ .

Caso 2:  $n = 0$ . Análogo ao caso anterior.

Caso 3:  $mn \neq 0$  e  $\{m, n\}$  é LD. Neste caso, assumamos que  $n = um$  com  $u \neq 0$  em  $\mathbb{C}$ . Desse modo, temos que  $l = Z(m + \alpha_0 L_{i_0}(x_0, x_1), um + \beta_0 L_{i_0}(x_0, x_1)) = Z(m, L_{i_0}(x_0, x_1))$ , que corresponde ao caso 2.

Caso 4:  $\{m, n\}$  é LI então existem  $u, v \in \mathbb{C}$  não nulos tais que  $\mathcal{I}(l) = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x_2 - uL_{i_0}, x_3 - vL_{i_0} \rangle$ . Assim, dado  $p = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in l$  temos que  $x_2 = uL_{i_0}(x_0, x_1)$  e  $x_3 = vL_{i_0}(x_0, x_1)$ , ou seja  $p = [x_0 : x_1 : uL_{i_0}(x_0, x_1) : vL_{i_0}(x_0, x_1)]$  com  $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ . Como  $l \subset S_\phi$  então  $f_\phi(p) = 0 \quad \forall [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ , segue que  $\phi(x_0, x_1) - (L_{i_0}(x_0, x_1))^d \phi(u, v) = 0 \quad \forall [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ . Se  $\lambda = \phi(u, v) = 0$  concluímos que  $\phi = 0$ , o que é um absurdo. Do contrário  $\phi = \lambda L_{i_0}^d$  o que também nos leva a um absurdo se  $d \geq 2$ , desde que  $\phi$  é produto de fatores LI.

( $\Leftarrow$ ) Análoga ao que fizemos acima. □

**Corolário 2.5.** Seja  $\mathcal{L}_L = \{l \in \Upsilon(S_\phi) \mid l \cap L = \emptyset\}$ . Verifica-se que  $\mathcal{L}_\phi = \{l \in \Upsilon(S_\phi) \mid l \cap L \neq \emptyset\}$  e  $\Upsilon(S_\phi) = \mathcal{L}_\phi \dot{\cup} \mathcal{L}_L$ .

*Demonstração.* Como cada reta em  $\mathcal{L}_\phi$  encontra L e M, concluímos que  $\mathcal{L}_\phi \subset \{l \in \Upsilon(S_\phi) \mid l \cap L \neq \emptyset\}$ . Agora, segue da proposição acima que toda reta da superfície  $S_\phi$  que encontra L necessariamente encontra M, assim a primeira parte da afirmação é satisfeita. Seja  $l \in \Upsilon(S_\phi)$ . Temos dois casos para analisar:

1.  $l \cap L \neq \emptyset$ . Neste caso, pelo que provamos acima  $l \in \mathcal{L}_\phi$ .
2.  $l \cap L = \emptyset$ . Neste caso, por definição temos que  $l \in \mathcal{L}_L$ .

□

**Proposição 2.6.** Se  $l \in \mathcal{L}_L$  então  $l$  determina  $T_l \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  tal que:  $T_l(Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)) = Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

## 2. Determinação das retas em $S_\phi$

*Demonstração.* Temos  $l \in \mathcal{L}_L$ . Assim  $l \subset S_\phi$  e  $l \cap L = \emptyset$ . Assuma que  $l = Z(f_1, f_2)$  sendo  $f_1$  e  $f_2$  polinômios homogêneos de grau 1 LI dados por:  $f_1 = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$  e  $f_2 = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ . Note que:

$$l \cap L = Z(a_0x_0 + a_1x_1, b_0x_0 + b_1x_1, x_2, x_3) = \emptyset \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim podemos escolher geradores para  $\mathcal{I}(l)$  da forma:  $g_1 = x_0 - \alpha x_2 - \beta x_3$  e  $g_2 = x_1 - \gamma x_2 - \delta x_3$  com  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . A seguir defina  $T_l : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  por  $T_l([x_2 : x_3]) = [\alpha x_2 + \beta x_3 : \gamma x_2 + \delta x_3]$ . Como  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  concluímos que  $T_l \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . A seguir vamos verificar que  $T_l(Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)) = Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Considere  $[u : v] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Note que  $T_l([u : v]) = [\alpha u + \beta v : \gamma u + \delta v]$  e  $p = [\alpha u + \beta v : \gamma u + \delta v : u : v] \in l \subset S_\phi$ . Então  $f_\phi(p) = \phi(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) - \phi(u, v) = 0$ . Segue que  $T_l([u : v]) \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Assim,  $T_l(Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)) \subset Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Como  $T_l$  é uma bijeção e  $\#Z_{\mathbb{P}^1}(\phi) = d$ , concluímos que a igualdade é válida.  $\square$

**Teorema 2.7.** *Seja  $\Gamma_\phi = \{T \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid T_l(Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)) = Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)\}$ . Se  $T \in \Gamma_\phi$  então existe  $Q_T \subset \mathbb{P}^3$  superfície quádrlica não singular tal que:*

$$S_\phi \cap Q_T = l_1 \cup \dots \cup l_d \cup m_1 \cup \dots \cup m_d$$

sendo  $l_1, \dots, l_d$  retas duas a duas disjuntas da família  $\mathcal{L}_\phi$  e  $m_1, \dots, m_d$  retas duas a duas disjuntas da família  $\mathcal{L}_L$ .

*Demonstração.* Considere  $T \in \Gamma_\phi$  dado por:  $T([x_2 : x_3]) = [\alpha x_2 + \beta x_3 : \gamma x_2 + \delta x_3]$ , com  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . A seguir considere  $Q_T = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$  com  $F = x_0(\gamma x_2 + \delta x_3) - x_1(\alpha x_2 + \beta x_3)$ .

**Afirmção 1:**  $Q_T$  é não singular. Calculando as derivadas parciais concluímos que  $\text{Sing}(Q_T) = \emptyset$ .

Lembremos que toda superfície quádrlica não singular possui exatamente duas famílias de retas (Ver Teorema 1.6). Neste caso temos as famílias  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  dadas por:

$$\mathcal{L}_{[c:d]} = Z((\gamma c + \delta d)x_0 - (\alpha c + \beta d)x_1, cx_3 - dx_2) \text{ com } [c : d] \in \mathbb{P}^1 \quad (2.2)$$

$$\mathcal{M}_{[a:b]} = Z(ax_0 - b(\alpha x_2 + \beta x_3), ax_1 - b(\alpha x_2 + \delta x_3)) \text{ com } [a : b] \in \mathbb{P}^1. \quad (2.3)$$

Note que  $\mathcal{M}_{[1:0]} = Z(x_0, x_1) = M$  e  $\mathcal{M}_{[0:1]} = Z(x_2, x_3) = L$ .

**Afirmção 2:** Se  $\mathcal{L}_{[c:d]} \in \mathcal{L}$  então verifica-se que  $\mathcal{L}_{[c:d]} \subset S_\phi \Leftrightarrow [c : d] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .  
 $(\Rightarrow)$  Note que  $p = [0 : 0 : c : d] \in \mathcal{L}_{[c:d]} \subset S_\phi$  então  $f_\phi(p) = 0$ , segue que  $\phi(c, d) = 0$ , logo  $[c : d] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

$(\Leftarrow)$  Considere  $[c : d] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Assim,  $T([c : d]) = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .

## 2. Determinação das retas em $S_\phi$

Agora note que  $p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0] \in L \cap S_\phi$  e  $q = [0 : 0 : c : d] \in M \cap S_\phi$ . Além disso,  $p = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : 0 : 0]$ ,  $q = [0 : 0 : c : d] \in \mathcal{L}_{[c:d]}$ . Como  $\mathcal{L}_{[c:d]} = l_{pq}$ . Segue que  $\mathcal{L}_{[c:d]} \in \mathcal{L}_\phi$ .

**Afirmção 3:** Existe  $m \in \mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$ .

Seja  $[c : d] \in \mathbb{P}^1$  tal que  $[c : d] \notin Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Assim,  $[a : b] = T([c : d]) \notin Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$  (pois  $\Gamma_\phi$  é subgrupo de  $Aut(\mathbb{P}^1)$ ). Escolha  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\lambda^d \phi(a, b) = \phi(c, d)$ . Observe que  $x = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in S_\phi \cap Q_T$ . De fato,  $f_\phi(x) = \lambda^d \phi(a, b) - \phi(c, d) = 0$  e  $[a : b] = [\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d] \Rightarrow \begin{cases} a = \mu(\alpha c + \beta d) \\ b = \mu(\gamma c + \delta d) \end{cases}$  para algum  $\mu \neq 0$  em  $\mathbb{C}$ . Como  $Q_T = Z(x_0(\gamma x_2 + \delta x_3) - x_1(\alpha x_2 + \beta x_3))$  e temos que:  $F(x) = \lambda a(\gamma c + \delta d) - \lambda b(\alpha c + \beta d) = \lambda \mu(\alpha c + \beta d)(\gamma c + \delta d) - \mu(\gamma c + \delta d)(\alpha c + \beta d) = 0$ . Concluimos que  $x = [\lambda a : \lambda b : c : d] \in Q_T$  e  $\mathcal{L}_{[c:d]} \in \mathcal{L}$  é uma reta em  $Q_T$  contendo  $x$ . Como  $\phi(c, d) \neq 0$  temos que  $\mathcal{L}_{[c:d]} \neq \mathcal{L}_{p_i}$  para todo  $p_i \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ , segue que  $\mathcal{L}_{[c:d]} \cap \mathcal{L}_{p_i} = \emptyset$  para todo  $i$ . Sabemos que existe uma única reta da família  $\mathcal{M}$  passando por  $x$ . Seja  $m \in \mathcal{M}$  tal reta. Assim,  $m \cap \mathcal{L}_{p_i} = \{y_i\}$  com  $i = 1, \dots, d$ . Como é representada na figura abaixo:

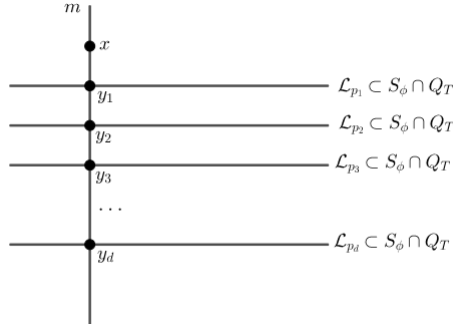


Figura 2.2: Reta  $m$  passando por  $x$

Assim temos que  $\{x, y_1, \dots, y_d\} \subset m \cap S_\phi$ . Logo  $\#m \cap S_\phi > d$ . Assim,  $m \subset S_\phi$  (Veja Proposição A.9 no apêndice).

**Afirmção 4:** Existem exatamente  $d$  retas duas a duas disjuntas da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $S_\phi$ .

Considere  $\mathcal{U}_d$  o grupo cíclico formado pelas raízes  $d$ -ésimas da unidade e  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d \times \mathcal{U}_d$  dado pelo produto direto de  $\mathcal{U}_d$  com  $\mathcal{U}_d$ .

A seguir considere uma ação pela esquerda do grupo  $\mathcal{U}$  em  $\mathbb{P}^3$  dada por:

$$\begin{aligned} A : \mathcal{U} \times \mathbb{P}^3 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p = [\eta a_0 : \eta a_1 : \xi a_2 : \xi a_3] \end{aligned}$$

se  $g = (\eta, \xi)$  e  $p = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ . Note que, para cada  $g \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} A_g : \mathbb{P}^3 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ p &\longmapsto g.p \end{aligned}$$

pertence a  $Aut(\mathbb{P}^3)$ . Além disso, verificam-se as seguintes propriedades:

- $A_g(S_\phi) = S_\phi$ . No que segue considere  $x = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$ . Note que  $x \in S_\phi \Leftrightarrow \phi(a, b) = \phi(c, d)$ , daí  $A_g(x) = [\eta a : \eta b : \xi c : \xi d] \in S_\phi$  para todo  $g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}$ , segue que  $A_g(S_\phi) \subseteq S_\phi$ . Agora, se  $x \in S_\phi$ , podemos escrever  $x = A_g([\eta^{-1}a : \eta^{-1}b : \xi^{-1}c : \xi^{-1}d])$ , logo  $S_\phi \subseteq A_g(S_\phi)$ .

- $A_g(Q_T) = Q_T$

A prova é análoga. Deixamos a cargo do leitor.

- $A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$  se  $g = (\eta, \xi) \in \mathcal{U}$ .

Lembremos que as equações que definem as retas  $\mathcal{M}_{[a:b]}$  e  $\mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$  são dadas por:

$$\mathcal{M}_{[a:b]} = \begin{cases} ax_0 = b(\alpha x_2 + \beta x_3) \\ ax_1 = b(\gamma x_2 + \delta x_3) \end{cases}$$

e

$$\mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]} = \begin{cases} \eta^{-1}ax_0 = \xi^{-1}b(\alpha x_2 + \beta x_3) \\ \eta^{-1}ax_1 = \xi^{-1}b(\gamma x_2 + \delta x_3) \end{cases}$$

Seja  $x = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathcal{M}_{[a:b]}$  segue que  $A_g(x) = [\eta x_0 : \eta x_1 : \xi x_2 : \xi x_3] \in \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$  conforme as equações que definem a reta  $\mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$ , temos que  $A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) \subset \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$ , concluimos que  $A_g(\mathcal{M}_{[a:b]}) = \mathcal{M}_{[\eta^{-1}a:\xi^{-1}b]}$ . pois  $A_g \in Aut(\mathbb{P}^3)$ .

Assim,  $A_g(S_\phi \cap Q_T) = S_\phi \cap Q_T$ .

Se  $m_0 = \mathcal{M}_{[1:u]}$  for uma reta contida em  $S_\phi \cap Q_T$  temos que  $A_g(m_0) \subset A_g(S_\phi \cap Q_T) = S_\phi \cap Q_T$  para todo  $g \in \mathcal{U}$ . Em particular para  $g_i = (1, \xi^{-i})$  com  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ , onde  $\xi \in \mathcal{U}_d$  é raiz primitiva. Temos que  $m_i = A_{g_i}(m_0) = \mathcal{M}_{[1:\xi^i u]}$  com  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ . Como  $\mathcal{U}_d = \{1, \dots, \xi^{d-1}\}$  concluimos que  $m_0, m_1, \dots, m_{d-1}$  são retas contidas em  $S_\phi \cap Q_T$  duas a duas disjuntas.

A seguir vamos verificar que  $m_0, m_1, \dots, m_{d-1}$  são as únicas retas da família  $\mathcal{M}$  contidas em  $S_\phi$ . De fato considere  $\mathcal{M}_{[a:b]} \in \mathcal{M}$  contida em  $S_\phi$  (neste caso  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ). Temos as seguintes equações para  $\mathcal{M}_{[a:b]}$ :

## 2. Determinação das retas em $S_\phi$

$$\begin{aligned} ax_0 &= b(\alpha x_2 + \beta x_3) & \Leftrightarrow & & x_0 &= \nu(\alpha x_2 + \beta x_3) & \text{com } \nu &= \frac{b}{a}. \\ ax_1 &= b(\gamma x_2 + \delta x_3) & & & x_1 &= \nu(\gamma x_2 + \delta x_3) & & \end{aligned}$$

Logo todo ponto da reta  $\mathcal{M}_{[a:b]}$  se escreve da forma:  
 $q = [\nu(\alpha x_2 + \beta x_3) : \nu(\gamma x_2 + \delta x_3) : x_2 : x_3]$  segue que:

$$\nu^d \phi(\alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3) = \phi(x_2, x_3) \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1.$$

Como  $m_0 \subset S_\phi$ , segue que:

$$\nu^d \phi(\alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3) = \mu^d \phi(\alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3) \text{ para todo } [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1.$$

Desse modo,  $\nu^d = \mu^d$ , assim  $(\frac{\nu}{\mu})^d = 1$ . De onde concluímos que  $\frac{\nu}{\mu} = \xi^i$  para algum  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  assim  $\nu = \mu \xi^i$ .

**Afirmiação 5:**  $S_\phi \cap Q_T = \mathcal{L}_{p_1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{p_d} \cup m_0 \cup \dots \cup m_{d-1}$ , onde  $\{p_1, \dots, p_d\} = Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ ,  $m_i = \mathcal{M}_{[1:\mu \xi^i]}$  e  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ .

Seja  $x = [a : b : c : d] \in S_\phi \cap Q_T$ . Assuma que  $x \notin m_0 \cup \dots \cup m_{d-1}$ . Note que  $x \in \mathcal{L}_{[c:d]} \in \mathcal{L}$ . Usando o argumento usado na Afirmiação 3, concluímos a partir do fato que  $\mathcal{L}_{[c:d]} \subset S_\phi$  que  $[c : d] \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ .  $\square$

**Proposição 2.8.** Verifica-se que  $\#\mathcal{L}_L = d|\Gamma_\phi|$ .

*Demonstração.* Defina  $\Omega : \mathcal{L}_L \longrightarrow \Gamma_\phi$  por  $\Omega(l) = T_l$ . Sendo  $T_l$  definido na Proposição 2.6. Verifica-se que:

- $\Omega$  é sobrejetiva.

De fato, considere  $T_1 \in \Gamma_\phi$  dada por  $T_1([x_2 : x_3]) = [\alpha_1 x_2 + \beta_1 x_3, \gamma_1 x_2 + \delta_1 x_3]$ . Vamos mostrar que existe  $m \in \mathcal{L}_L$  tal que  $\Omega(m) = T_1$ . Como  $T_1 \in \Gamma_\phi$  segue do teorema acima que existe  $Q_{T_1}$  superfície quádrlica não singular em  $\mathbb{P}^3$  tal que  $Q_{T_1} \cap S_\phi = l_1^{T_1} \cup \dots \cup l_d^{T_1} \cup m_0^{T_1} \cup \dots \cup m_{d-1}^{T_1}$ , onde  $l_i^{T_1} = \mathcal{L}_{p_i} \in \mathcal{L}$  com  $p_i \in Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Sendo  $m_0^{T_1}$  determinada da seguinte forma, existe  $\mu \in \mathbb{C}$  de modo que  $m_0^{T_1} = \mathcal{M}_{[1:\mu]} \subset S_\phi$  com  $\mu \neq 0$ , de fato  $m_0^{T_1} \in \mathcal{M}$  sendo  $\mathcal{M}$  a família de retas de  $Q_{T_1}$  definida em (2.2). Assim,  $m_0^{T_1} \in \mathcal{L}_L$ .

**Afirmiação:**  $\Omega(m) = T_1$  se  $m = m_0^{T_1} \in \mathcal{L}_L$ .

De fato, temos que  $\Omega(m) = T_m : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ , é dada por:  $[x_2 : x_3] \longmapsto [\mu(\alpha_1 x_2 + \beta_1 x_3) : \mu(\gamma_1 x_2 + \delta_1 x_3)]$ , donde concluímos que  $T_m = T_1$ .

- $\#\Omega^{-1}(T) = d$  para todo  $T \in \Gamma_\phi$ .

Considere  $T \in \Gamma_\phi$  dada por  $T([x_2 : x_3]) = [\alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3]$ . Sabemos que existem  $m_0^T, \dots, m_{d-1}^T$  retas em  $S_\phi \cap Q_T$  cujas equações são dadas por:

$m_i^T = \begin{cases} x_0 &= \mu\xi^i(\alpha x_2 + \beta x_3) \\ x_1 &= \mu\xi^i(\gamma x_2 + \delta x_3) \end{cases}$  sendo que  $\xi$  é uma raiz primitiva  $d$ -ésima da unidade e  $\mu \in \mathbb{C} - \{0\}$  é escolhido de modo que  $m_0^T \subset S_\phi$  (Veja Demonstração do Teorema anterior). Note que  $m_i^T \in \mathcal{L}_L \ \forall i \in \{0, \dots, d-1\}$ .

**Afirmiação:**  $\Omega^{-1}(T) = \{m_0^T, \dots, m_{d-1}^T\}$ .

$\subseteq$  Considere  $m \in \Omega^{-1}(T) \subset \mathcal{L}_L$ . Segue que  $\Omega(m) = T$ , assim  $T_m = T$ . Se  $m$  admite equações como na Proposição (2.6), segue que  $T_m([x_2 : x_3]) = [\alpha_1 x_2 + \beta_1 x_3, \gamma_1 x_2 + \delta_1 x_3]$ . Assim  $\alpha_1 = \mu\alpha$ ,  $\beta_1 = \mu\beta$ ,  $\gamma = \mu\gamma$  e  $\delta_1 = \mu\delta$ . Logo as equações de  $m$  são escritas como na Proposição (2.6). Deste modo,  $m = \mathcal{M}_{[1, \mu\xi^i]} \in \mathcal{M}$  (onde  $\mathcal{M}$  é uma família de retas da quádriga  $Q_T$ ), com  $m = m_i^T$  para algum  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ .

$\supseteq$  Temos que cada uma dessas retas determina o automorfismo  $\Omega(m_i^T) = T_i : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dado por:  $T_i([x_2 : x_3]) = [u\xi^i(\alpha_i x_2 + \beta_i x_3) : u\xi^i(\gamma_i x_2 + \delta_i x_3)] = [\alpha_i x_2 + \beta_i x_3 : \gamma_i x_2 + \delta_i x_3] = T([x_2 : x_3])$ . Logo  $\Omega(m_i^T) = T$ , segue que  $m_i^T \in \Omega^{-1}(T)$ , para todo  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ . De onde concluímos que  $\#\Omega^{-1}(T) = d$  para todo  $T \in \Gamma_\phi$ .

Finalmente, como  $\Omega : \mathcal{L}_L \rightarrow \Gamma_\phi$  é sobrejetivo temos que  $\mathcal{L}_L = \bigcup_{T \in \Gamma_\phi} \Omega^{-1}(T)$ . Assim,  $\#\mathcal{L}_L = \sum_{T \in \Gamma_\phi} \#\Omega^{-1}(T) = d|\Gamma_\phi|$  pois  $\#\Omega^{-1}(T) = d$  para todo  $T \in \Gamma_\phi$ .  $\square$

**Corolário 2.9.**  $\#\Upsilon(S_\phi) = d^2 + d|\Gamma_\phi|$ .

*Demonstração.* Lembremos que  $\Upsilon(S_\phi) = \mathcal{L}_\phi \cup \mathcal{L}_L$ . Segue que  $\#\Upsilon(S_\phi) = d^2 + d|\Gamma_\phi|$ .  $\square$

## 2.1 Os subgrupos $\Gamma_C$ de $Aut(\mathbb{P}^1)$

Considere  $C$  um subconjunto de  $\mathbb{P}^1$ . Definimos  $\Gamma_C = \{T \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid T(C) = C\}$ . Por exemplo, se  $C = \{p_1, p_2, p_3\}$ , temos que  $\Gamma_C \cong D_3$ , o grupo diedral de ordem 6. De fato, existem 6 automorfismos de  $\mathbb{P}^1$  tais que  $T(C) = C$  (confira p. 15 em [11]), segue que a ordem de  $\Gamma_C$  é 6 e além disso este grupo não é abeliano. Basta considerar  $T_1$  e  $T_2$  que fixam  $p_i$  e permutam os outros dois pontos para  $i = 1, 2$ , respectivamente.

**Lema 2.10.** Com as notações acima. Verifica-se que  $\Gamma_C$  é um subgrupo de  $Aut(\mathbb{P}^1)$ . Além disso, temos que  $|\Gamma_C| < \infty$  se e somente se  $\#C \geq 3$ .

*Demonstração.* Deixamos a cargo do leitor a verificação que  $\Gamma_C$  é subgrupo de  $Aut(\mathbb{P}^1)$ .

$\Rightarrow$  Suponha que  $\#C \leq 2$ .

Considere  $p$  e  $q$  pontos distintos em  $\mathbb{P}^1$ . Então  $\Gamma_{p,q} = \{T \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid T(p) = p \text{ e } T(q) = q\}$  é um subgrupo de  $Aut(\mathbb{P}^1)$ .

**Caso 1:**  $p = [1 : 0]$  e  $q = [0 : 1]$

De fato, para cada  $a \in \mathbb{C}$  não nulo considere  $T_a : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dado por  $T_a([x : y]) = [x : ay]$ . Observe que  $T_a \in \Gamma_{p,q}$  e que  $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\varphi} \Gamma_{p,q}$ , dado por  $\varphi(a) = T_a$  é um homomorfismo de grupos injetivo. Assim,  $\Gamma_{p,q}$  é infinito. Além disso,  $\Gamma_{p,q}$  é um subgrupo de  $\Gamma_{\{p,q\}}$  e  $\Gamma_{\{p\}}$ . Portanto,  $\Gamma_{\{p,q\}}$  e  $\Gamma_{\{p\}}$  são infinitos também.

**Caso 2:** Considere  $p_1 = [a_0 : a_1]$  e  $q_1 = [b_0 : b_1]$  pontos distintos em  $\mathbb{P}^1$ . Note que  $T_1 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  dada por  $[x : y] \mapsto [b_1x - b_0y : a_0y - a_1x]$  pertence a  $Aut(\mathbb{P}^1)$  e satisfaz  $T_1(p_1) = p$  e  $T_1(q_1) = q$ . Além disso, se  $\Gamma = \Gamma_{p_1,q_1}$  então  $\Gamma_{p,q} \rightarrow \Gamma$  dado por  $T \mapsto T_1^{-1} \circ T \circ T_1$  é um isomorfismo de grupos. Portanto,  $\Gamma_{p_1,q_1}$  é um grupo infinito. Como também  $\Gamma \leq \Gamma_{\{p_1,q_1\}}$  e  $\Gamma \leq \Gamma_{\{p_1\}}$ , concluímos que  $|\Gamma_C| = \infty$  se  $\#C \leq 2$ .

$\Rightarrow$  Lembremos que dados  $p_1, p_2$  e  $p_3$  dois a dois distintos em  $\mathbb{P}^1$  e  $q_1, q_2$  e  $q_3$  também dois a dois distintos em  $\mathbb{P}^1$ , então existe um único  $T \in Aut(\mathbb{P}^1)$  tal que  $T(p_i) = q_i$  para  $i=1,2,3$ . Considere  $\Sigma = \{T \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid T(C_1) = C_2 \text{ sendo } C_i \subseteq C \text{ com } \#C_i = 3 \text{ para } i = 1, 2.\}$ . Lembremos que  $\binom{d}{3}$  é a quantidade de subconjuntos de  $C$  com 3 elementos que podemos escolher se  $\#C = d$ . Como para cada escolha  $C_1$  e  $C_2$  de subconjuntos de  $C$  com três elementos, temos que existem 6 automorfismos em  $Aut(\mathbb{P}^1)$  que levam  $C_1$  em  $C_2$ , desde que ao escolhermos as imagens de  $p_1, p_2, p_3$  em  $C_1$  respectivamente, temos que olhar para todas as permutações dos elementos no conjunto  $C_2$ . Portanto,  $\#\Sigma \leq 6 \binom{d}{3} \binom{d}{3}$ . Note que  $\Gamma_C \subset \Sigma$ . Assim, a ordem de  $\Gamma_C$  é finita.  $\square$

Estamos interessados em estudar  $\Gamma_\phi = \Gamma_C$  com  $C = Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ . Mais precisamente vamos estudar  $\Gamma_\phi$  sendo  $\phi = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$  para  $d \geq 5$ . Portanto  $\Gamma_\phi$  é um subgrupo finito de  $Aut(\mathbb{P}^1)$ . No caso dos subgrupos finitos de  $Aut(\mathbb{P}^1)$  temos a classificação dada por Klein a saber:

**Teorema 2.11. ( Klein)** *Se  $G$  é subgrupo finito de  $Aut(\mathbb{P}^1)$  então verifica-se que  $G$  é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos:*

1.  $C_n$ , o grupo cíclico de ordem  $n$ .
2.  $D_n$ , o grupo diedral de ordem  $2n$ .
3.  $A_4$ , o grupo alternado de ordem 12.
4.  $S_4$ , o grupo das permutações de 4 elementos de ordem 24.
5.  $A_5$ , o grupo alternado de ordem 60.

**Corolário 2.12.** *Seja  $C \subseteq \mathbb{P}^1$  com  $\#C = d \geq 3$ . Então, verifica-se:*

## 2. Determinação das retas em $S_\phi$

1. Se  $\Gamma_C$  é cíclico então  $|\Gamma_C| \leq d$ .
2. Se  $\Gamma_C \cong D_k$  com  $k \geq 2$ , então  $k|d$  ou  $k|d-2$ .
3. Se  $C$  é conjunto das raízes  $d$ -ésimas da unidade então  $\Gamma_C \cong D_d$ .
4. Se  $d$  é ímpar e  $\Gamma_C$  não é cíclico então  $\Gamma_C \cong D_k$  para algum  $k \in \{2, \dots, d\}$ .

A seguir usaremos os resultados acima para mostrar que:

**Teorema 2.13.** *Se  $\phi = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$  com  $d \geq 5$  e  $C = Z_{\mathbb{P}^1}(\phi)$  então  $\Gamma_\phi \cong D_{d-2}$  se  $d \neq 6$  e  $\Gamma_\phi \cong S_4$  se  $d = 6$ .*

*Demonstração.* Note que  $Z_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[1 : 0], [0 : 1], [\eta^i : 1]\}$  com  $i \in \{0, \dots, d-3\}$  sendo  $\eta$  raiz primitiva  $(d-2)$ -ésima da unidade. Observe que  $T_\eta$  e  $I$  definidos por:  $T_\eta([u : v]) = [\eta u : v]$  e  $I([u : v]) = [v : u]$  são elementos do grupo  $\Gamma_\phi$ . Esta verificação é simples, deixamos a cargo do leitor. Além disso, as seguintes propriedades são verificadas:

$\boxed{ord(T_\eta) = d-2}$  : De fato,  $T_\eta \circ T_\eta([u : v]) = T_\eta([\eta u : v]) = [\eta^2 u : v] = T_{\eta^2}([u : v])$ . Assim, usando indução prova-se que  $T_\eta^k = T_{\eta^k}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $T_\eta^k = id_{\mathbb{P}^1}$  se e somente se  $\eta^k = 1$ . Como  $\eta$  é uma raiz primitiva  $(d-2)$ -ésima da unidade, segue que  $ord(T_\eta) = d-2$ .

$\boxed{ord(I) = 2}$  : De fato,  $I \neq id_{\mathbb{P}^1}$  e  $I \circ I([u : v]) = I([v : u]) = [u : v]$ . Logo,  $ord(I) = 2$ .

$\boxed{I \circ T_\eta = T_\eta^{d-3} \circ I}$  : De fato, temos que  $I \circ T_\eta([u : v]) = I([\eta u : v]) = [v : \eta u] = [\eta^{d-3} v : u] = T_{\eta^{d-3}}([v : u]) = T_\eta^{d-3} \circ I([u : v])$ .

Segue que  $\langle T_\eta, I \rangle \cong D_{d-2}$  o grupo diedral de ordem  $2(d-2)$ . Assim,  $\langle T_\eta, I \rangle \leq \Gamma_\phi$  de ordem  $2(d-2)$ , de onde concluímos que  $|\Gamma_\phi| = 2(d-2)N$  para algum  $N \geq 1$  inteiro. Além disso, como  $d \geq 5$  temos que  $\langle T_\eta, I \rangle$  é um grupo isomorfo a um grupo diedral de ordem  $2(d-2) \geq 6$ . Logo  $\Gamma_\phi$  não é abeliano (em particular não é cíclico). Segue do Teorema 2.11 que  $\Gamma_\phi$  é isomorfo a  $G$  com  $G \in \{D_k, A_k, S_4, A_5\}$ . Lembremos que no caso dos grupos  $A_4, S_4$  e  $A_5$  seus elementos tem ordens dadas por:

Grupo	Ordem dos elementos
$A_4$	1,2,3
$S_4$	1,2,3,4
$A_5$	1,2,3,5

Se  $d \geq 8$  então  $\Gamma_\phi$  possui um elemento de ordem  $d-2 \geq 6$  (a saber  $T_\eta$ ). Assim,  $\Gamma_\phi \cong D_k$  logo:

$$(d-2)N = k \tag{2.4}$$

Deste modo, segue do Corolário 2.12 que  $k|d$  ou  $k|d - 2$ . Vejamos:

**Caso 1:**  $k|d$ .

Neste caso,  $d = kd_1$  para algum  $d_1 \geq 1$  inteiro. Substituindo na equação (2.4) obtemos  $(d-2)Nd_1 = d$ . Considere  $p$  um número primo tal que  $p|(d-2)$  então  $p|d$  e concluímos que  $p|2$ . Logo,  $p = 2$ . Dai  $d - 2 = 2^M$  com  $M \geq 1$  inteiro, isto é,  $d = 2^M + 2$ . Assim,  $2^M Nd_1 = 2(2^{M-1} + 1)$ . Como  $d \geq 8$  temos que  $M > 2$ . Absurdo!

**Caso 2:**  $k|(d-2)$ .

Neste caso,  $d - 2 = kd_1$  para algum  $d_1 \geq 1$  inteiro. Substituindo na equação (2.4) obtemos  $Nd_1 = 1$ , assim  $N = 1$ . Segue que  $\Gamma_\phi \cong D_{d-2}$

A seguir vamos considerar  $d \in \{5, 6, 7\}$ . Primeiro vamos considerar  $d \neq 6$ . Deste modo,  $d$  é ímpar e  $\Gamma_\phi$  não é cíclico. Logo, mais uma vez o Corolário 2.12 nos garante que  $\Gamma_\phi \cong D_k$  sendo  $D_k$  o grupo diedral de ordem  $2k$ . Vejamos:

d=5: Temos que  $|\Gamma_\phi| = 6N = 2k$ , segue que  $k \geq 3$ , como  $\Gamma_\phi \cong D_k$ , temos que  $k|5$  ou  $k|3$ , obtemos que  $k = 3$  e portanto  $N = 1$ . Assim,  $\Gamma_\phi \cong D_3$ .

d=7: Temos que  $|\Gamma_\phi| = 10N = 2k$ , segue que  $k \geq 5$ , como  $\Gamma_\phi \cong D_k$ , temos que  $k|7$  ou  $k|5$ , obtemos que  $k = 5$  e portanto  $N = 1$ . Assim,  $\Gamma_\phi \cong D_5$ .

d=6: Temos que  $|\Gamma_\phi| = 8N = 2^3N$ , segue do Teorema 2.11 que  $\Gamma_\phi \cong G$  com  $G \in \{D_k, S_4\}$  pois 8 divide a ordem de  $G$ . Se  $\Gamma_\phi \cong D_k$  temos que  $|\Gamma_\phi| = 8N = 2k$ , segue que  $k \geq 4$ , e temos que  $k|6$  ou  $k|4$ , obtemos que  $k = 4$  e portanto  $N = 1$ . Assim,  $\Gamma_\phi \cong D_4$  ou  $\Gamma_\phi \cong S_4$ .

Observe que:  $Z_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \{[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1], [-1 : 1], [i : 1], [-i : 1]\}$  se  $d = 6$ . Considere  $\sigma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  definida por  $\sigma([u : v]) = [u + iv : u - iv]$  temos que  $\sigma \in \Gamma_\phi$  além disso  $ord(\sigma) = 3$ , deixaremos a cargo no leitor a verificação deste fato. Portanto, 3 divide a ordem de  $\Gamma_\phi$  e  $\Gamma_\phi \cong S_4$ .  $\square$

**Corolário 2.14.** Com as notações acima. Verifica-se que:

$$\#\Upsilon(S_\phi) = \begin{cases} 3d^2 - 4d & \text{se } d \neq 6 \\ 180 & \text{se } d = 6 \end{cases}$$

# Capítulo 3

## Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

Neste capítulo usaremos os resultados do Capítulo 2 para construir as retas contidas na superfície dada por:

$$\mathcal{S}_d = Z(x_0x_1(x_0^{d-2} - x_1^{d-2}) - x_2x_3(x_2^{d-2} - x_3^{d-2})) \text{ para } d \neq 6.$$

A partir do estudo da intersecção dessas retas mostraremos que  $r(\mathcal{S}_d) = d(d-2) + 4$  se  $d$  é ímpar e no caso  $d$  par, mostraremos que  $d(d-2) + 4 \leq r(\mathcal{S}_d) \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$  se  $d \neq 6$ .

### 3.1 Construindo as retas determinadas por $\Gamma_\phi$

Considere  $\phi(u, v) = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$  com  $d \geq 5$ . Fixe  $\eta$  raiz  $(d-2)$ -ésima da unidade. Sabemos que  $\Gamma_\phi = \langle T_\eta, I \rangle$  sendo  $T_\eta([u : v]) = [\eta u : v]$  e  $I([u : v]) = [v : u]$  se  $d \neq 6$ .

Assim:

$$\Gamma_\phi = \{id, T_\eta, T_\eta^2, \dots, T_\eta^{d-3}, I, I_\eta, \dots, I_\eta^{d-3}\}$$

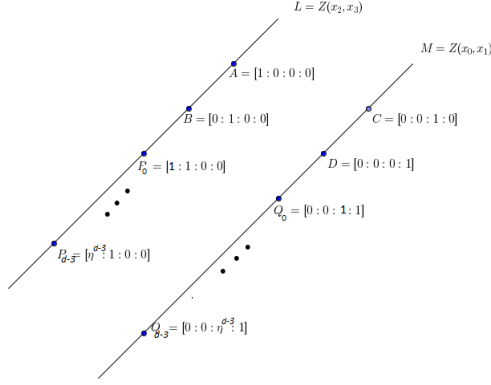
sendo  $I_\eta^i = I \circ T_\eta^i$  com  $i \in \{1, \dots, d-3\}$ . Podemos escrever  $\Gamma_\phi = C_1 \dot{\cup} C_2$  com  $C_1 = \langle T_\eta \rangle$  e  $C_2 = \{I, I_\eta, \dots, I_\eta^{d-3}\}$ .

Lembremos que  $\mathcal{S}_d = Z(\phi(x_0, x_1) - \phi(x_2, x_3))$  com  $\phi(u, v) = uv(u^{d-2} - v^{d-2})$ . Além disso, temos que:

$$\mathcal{L}_\phi = \{l_{p,q} \mid p \in \mathcal{S}_d \cap L \text{ e } q \in \mathcal{S}_d \cap M\} \text{ e } \#\mathcal{L}_\phi = d^2.$$

De fato,  $\mathcal{S}_d \cap L = \{A, B, P_I\}_I$  e  $\mathcal{S}_d \cap M = \{C, D, Q_I\}_I$  com  $0 \leq I \leq d-3$ , conforme ilustra a figura a seguir:

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$



Para cada  $T_{\eta^k} \in C_1$  com  $0 \leq k \leq d-3$  dado por  $T_{\eta^k}([x_2 : x_3]) = [\eta^k x_2 : x_3]$  sabemos que a quádrlica  $Q^{T_{\eta^k}} = Z(x_0 x_3 - \eta^k x_1 x_2)$  contém  $2d$  retas da superfície  $\mathcal{S}_d$  dentre as quais,  $d$  pertencem à família  $\mathcal{M}^{T_{\eta^k}}$  dada por: 
$$\begin{cases} ax_0 = b\eta^k x_2 \\ ax_1 = bx_3 \end{cases} \text{ com } [a : b] \in \mathbb{P}^1.$$

Sabemos que para cada  $0 \leq k \leq d-3$  podemos escolher  $u_k \in \mathbb{C} - \{0\}$  tal que  $\mathcal{M}_{[1:u_k]}^{T_{\eta^k}} \subset \mathcal{S}_d$ . Neste caso verifica-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{[1:u_k]}^{T_{\eta^k}} \subset \mathcal{S}_d &\Leftrightarrow \phi(u_k \eta^k x_2, u_k x_3) - \phi(x_2, x_3) = 0 && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\ &\Leftrightarrow u_k^d \phi(\eta^k x_2, u_k x_3) = \phi(x_2, x_3) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\ &\Leftrightarrow u_k^d \eta^k x_2 x_3 ((\eta^k x_2)^{d-2} - x_3^{d-2}) = x_2 x_3 (x_2^{d-2} - x_3^{d-2}) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\ &\Leftrightarrow u_k^d \eta^k x_2 x_3 (x_2^{d-1} - x_3^{d-2}) = x_2 x_3 (x_2^{d-1} - x_3^{d-2}) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\ &\Leftrightarrow u_k^d \eta = 1 \end{aligned}$$

No que segue vamos fixar uma das possíveis escolhas de  $u_k \in \mathbb{C}$  tal que  $u_k^d = \frac{1}{\eta^k}$ . Assim, obtemos as retas  $L_{k,i}^1 \subset \mathcal{S}_d$  da família  $\mathcal{M}^{T_{\eta^k}}$  dadas por:  $L_{k,i}^1 : \begin{cases} x_0 = \xi^i u_k \eta^k x_2 \\ x_1 = \xi^i u_k x_3 \end{cases}$  sendo  $\xi$  uma raiz primitiva  $d$ -ésima da unidade. Considere:

$$\mathcal{L}^1 = \{L_{k,i}^1 \mid 0 \leq k \leq d-3 \text{ e } 0 \leq i \leq d-1\}$$

Note que  $\#\mathcal{L}^1 = d(d-2)$ . A seguir para cada  $k$ ,  $0 \leq k \leq d-3$  considere  $I_{\eta^k} \in \Gamma_\phi$  dado por  $I_{\eta^k}([x_2 : x_3]) = [x_3 : \eta^k x_2]$ .

De forma análoga ao caso dos automorfismos  $T_\eta^k \in \Gamma_\phi$ , podemos escolher  $v_k \in \mathbb{C}$  não nulo tal que a reta  $\mathcal{M}_{[1:v_k]}^{I_{\eta^k}} \subset Q^{I_{\eta^k}} = Z(x_1 x_3 - \eta^k x_2 x_0)$  esteja contida na superfície

$\mathcal{S}_d$  sendo:  $\mathcal{M}_{[a:b]}^{I_{\eta^k}} : \begin{cases} ax_0 = bx_3 \\ ax_1 = b\eta^k x_2 \end{cases}$  tal que  $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ . Neste caso verifica-se que:

3. Cotas para  $r(\mathcal{S}_d)$  se  $d \neq 6$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{[1:v_k]}^{I_{\eta_k}} \subset \mathcal{S}_d &\Leftrightarrow \phi(v_k \eta^k x_3, v_k \eta^k x_2) = \phi(x_2, x_3) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\
&\Leftrightarrow v_k^d \phi(x_3, \eta^k x_2) = \phi(x_2, x_3) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\
&\Leftrightarrow v_k^d \eta^k x_3 x_2 (x_3^{d-2} - x_2^{d-2}) = x_2 x_3 (x_2^{d-2} - x_3^{d-2}) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\
&\Leftrightarrow -v_k^d \eta^k x_2 x_3 (x_2^{d-1} - x_3^{d-2}) = x_2 x_3 (x_2^{d-1} - x_3^{d-2}) && \forall [x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^1 \\
&\Leftrightarrow -v_k^d \eta = 1
\end{aligned}$$

No que segue fixe  $v_k \in \mathbb{C}$  tal que  $v_k^d = \frac{-1}{\eta^k}$ . Assim, para cada  $k$ ,  $0 \leq k \leq d-3$  obtemos as retas  $L_{k,i}^2$  da família  $\mathcal{M}^{I_{\eta_k}}$  contidas na superfície  $\mathcal{S}_d$  dadas por:

$$L_{k,i}^2 : \begin{cases} x_0 = \xi^i v_k x_3 \\ x_1 = \xi^i v_k \eta^k x_2 \end{cases} \text{ com } 0 \leq i \leq d-1, \text{ sendo } \xi \text{ uma raiz primitiva } d\text{-ésima da unidade. Considere:}$$

$$\mathcal{L}^2 = \{L_{k,i}^2 \mid 0 \leq k \leq d-3 \text{ e } 0 \leq i \leq d-1\}.$$

Note que  $\#\mathcal{L}^2 = d(d-2)$ . Portanto,  $\Upsilon(\mathcal{S}_d) = \mathcal{L}_\phi \dot{\cup} \mathcal{L}^1 \dot{\cup} \mathcal{L}^2$ .

Observe que:

$$L_{k,i}^1 = \mathbb{P}(W_{k,i}^1) \text{ sendo } W_{k,i}^1 = [(\xi^i u_k \eta^k, 0, 1, 0), (0, \xi^i u_k, 0, 1)]$$

e

$$L_{k,i}^2 = \mathbb{P}(W_{k,i}^2) \text{ sendo } W_{k,i}^2 = [(\xi^i v_k, 0, 0, 1), (0, \xi^i v_k \eta^k, 1, 0)].$$

**Lema 3.1.** Sejam  $l$  e  $m$  retas disjuntas em  $\mathbb{P}^3$ . Se  $l_1$  e  $l_2$  forem retas distintas tais que  $l_i \cap l = \{p_i\}$  e  $l_i \cap m = \{q_i\}$  para  $i = 1, 2$  com  $p_1 \neq p_2$  e  $q_1 \neq q_2$  então  $l_1$  e  $l_2$  são disjuntas.

*Demonstração.* Suponha que  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ . Assim podemos, considerar o plano  $H = \langle l_1, l_2 \rangle$ . Note que  $\{p_1, p_2\} \subset l$  e  $\{p_1, p_2\} \subset H$  então  $\{p_1, p_2\} \subset l \cap H$ , segue que  $\#l \cap H \geq 2$ , que implica em  $l \subset H$ . Analogamente, podemos concluir que  $m \subset H$  como  $l, m \subset H$  temos que  $l \cap m \neq \emptyset$ , o que é um absurdo.  $\square$

**Corolário 3.2.** Com as notações acima. Verifica-se que  $r(\mathcal{L}_\phi) = d$ .

*Demonstração.* Segue do Lema 3.1 que as retas  $l_{AC}, l_{BD}, l_{p_i q_i}$  com  $i \in \{0, \dots, d-3\}$  em  $\mathcal{L}_\phi$  são duas a duas disjuntas. Assim obtemos  $d$  retas duas a duas disjuntas em  $\mathcal{L}_\phi$ . Portanto,  $r(\mathcal{L}_\phi) \geq d$ .

Suponha que  $l_1, \dots, l_k$  com  $k > d$  são retas em  $\mathcal{L}_\phi$  duas a duas disjuntas. Considere  $\{x_i\} = l_i \cap L$  com  $i = 1, \dots, k$ . Note que todos os  $x_i$  são distintos já que as retas são duas a duas disjuntas. Além disso,  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq L \cap \mathcal{S}_d = \{A, B, p_0, \dots, p_{d-3}\}$  e  $\#\{x_i\}_{i=1}^k = k \leq d$ . Segue que  $r(\mathcal{L}_\phi) = d$ .  $\square$

**Proposição 3.3.** Com as notações acima. Verifica-se que  $r(\mathcal{L}^i) = d(d-2)$  para  $i = 1, 2$ .

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

---

*Demonstração.*  $\boxed{\mathcal{L}^1}$  Considere  $L_{k,i}^1$  e  $L_{t,j}^1$  retas distintas em  $\mathcal{L}^1$ . Note que se  $k = t$  então essas retas fazem parte da mesma família  $\mathcal{M}^{T_{\eta^k}}$ , logo são disjuntas. Para estudar a interseção dessas retas no caso  $k \neq t$  é suficiente calcular o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^i u_k & 0 & 1 \\ \xi^j u_t \eta^t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^j u_t & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\xi^i u_k \eta^k - \xi^j u_t \eta^t)(\xi^i u_k - \xi^j u_t).$$

Observe que o determinante acima é nulo se e somente se:

$$\xi^i u_k \eta^k = \xi^j u_t \eta^t \quad (3.1)$$

ou

$$\xi^i u_k = \xi^j u_t. \quad (3.2)$$

Vamos supor que a equação (3.1) seja válida, elevando-a a  $d$  obtemos:  $u_k^d \eta^{kd} = u_t^d \eta^{td}$ , como  $u_k^d = \frac{1}{\eta^k}$  e  $u_t^d = \frac{1}{\eta^t}$ , segue que  $\eta^{k(d-1)} = \eta^{t(d-1)}$ . Assim, temos que,  $\eta^{(k-t)(d-1)} = 1$ , deste modo temos que  $(k-t)(d-1) = (d-2)m$  para algum  $m$ , como  $\text{mdc}(d-2, d-1) = 1$  segue que  $(k-t) = (d-2)m_1$ , no entanto como  $0 \leq k, t \leq d-3$ , temos um absurdo pois  $k \neq t$ .

De maneira análoga, vamos supor que a equação (3.2) seja válida, elevando-a a  $d$  obtemos:  $u_k^d = u_t^d$  como  $u_k^d = \frac{1}{\eta^k}$  e  $u_t^d = \frac{1}{\eta^t}$ , segue que  $\eta^k = \eta^t$ , deste modo temos que  $k-t = (d-2)m$  para algum  $m$ , no entanto como  $0 \leq k, t \leq d-3$ , temos um absurdo.

$\boxed{\mathcal{L}^2}$  Considere  $L_{k,i}^2$  e  $L_{t,j}^2$  retas distintas em  $\mathcal{L}^2$ . Note que se  $k = t$  então essas retas fazem parte da mesma família  $\mathcal{M}^{I_{\eta^k}}$ , logo são disjuntas. Para estudar a interseção dessas retas no caso  $k \neq t$  é suficiente calcular o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi^i v_k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi^i v_k \eta^k & 1 & 0 \\ \xi^j v_t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \xi^j v_t \eta^t & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\xi^j v_t - \xi^i v_k)(\xi^i v_k \eta^k - \xi^j v_t \eta^t).$$

Observe que o determinante acima é nulo se e somente se:

$$\xi^j v_t = \xi^i v_k \quad (3.3)$$

ou

$$\xi^i v_k \eta^k = \xi^j v_t \eta^t. \quad (3.4)$$

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

---

Elevando as equações (3.3) e (3.4) à  $d$  e tendo em mente que  $v_t^d = -\frac{1}{\eta^t}$  e  $v_k^d = -\frac{1}{\eta^k}$  de maneira análoga ao caso anterior chegamos a um absurdo.  $\square$

**Corolário 3.4.** Com as notações acima. Verifica-se que  $r(\mathcal{S}_\phi) \leq d + 2d(d - 2)$ .

**Lema 3.5.** Com as notações acima. Verifica-se que:

1.  $l_{AC} \cap l \neq \emptyset$  e  $l_{BD} \cap l \neq \emptyset \forall l \in \mathcal{L}^1$ .
2.  $l_{AD} \cap l \neq \emptyset$  e  $l_{BC} \cap l \neq \emptyset \forall l \in \mathcal{L}^2$ .
3. Para todo  $l \in \mathcal{L}^1$  e  $X \in M \cap \mathcal{S}_d$ , são válidas as seguintes igualdades:
  - $l_{AX} \cap l = \emptyset$  se  $X \neq C$ ;
  - $l_{BX} \cap l = \emptyset$  se  $X \neq D$ ;
  - $l_{P_I X} \cap l = \emptyset$  se  $X \in \{C, D\}$ .
4. Para todo  $l \in \mathcal{L}^2$  e  $X \in M \cap \mathcal{S}_d$ , são válidas as seguintes igualdades:
  - $l_{AX} \cap l = \emptyset$  se  $X \neq D$ ;
  - $l_{BX} \cap l = \emptyset$  se  $X \neq C$ ;
  - $l_{P_I X} \cap l = \emptyset$  se  $X \in \{C, D\}$ .
5.  $l_{P_I Q_J} \cap L_{k,i}^1 \neq \emptyset$  para todo  $i \Leftrightarrow$  o resto da divisão de  $I - J$  por  $d - 2$  é igual a  $k$ .
6. Seja  $r$  o resto da divisão de  $I + J$  por  $d - 2$ . Então,

$$l_{P_I Q_J} \cap L_{k,i}^2 \neq \emptyset \text{ para todo } i \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 & \text{se } r = 0 \\ k = d - 2 - r & \text{se } r \neq 0 \end{cases}$$

*Demonstração.* Inicialmente lembremos que o Lema A.8 no apêndice, nos permite determinar se duas retas são disjuntas (ou não) via o cálculo do determinante da matriz determinada pela base dos respectivos subespaços que definem as retas em questão. Essa ferramenta é a que utilizaremos a seguir.

1. Sendo  $l_{AC} = \mathbb{P}([(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)])$  e  $l = \mathbb{P}([\xi^i \nu_k, 0, 1, 0), (0, \xi^i \nu_k, 0, 1)])$ .

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^i u_k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ concluímos que } l_{AC} \cap l \neq \emptyset.$$

3. Cotas para  $r(\mathcal{S}_d)$  se  $d \neq 6$

---

Analogamente temos que, sendo  $l_{BD} = \mathbb{P}([(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)])$ .

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^i u_k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ concluimos que } l_{BD} \cap l \neq \emptyset.$$

2. Sendo  $l = \mathbb{P}([\xi^i v_k, 0, 0, 1), (0, \xi^i v_k, 1, 0)])$ , analogamente ao que fizemos no item anterior, obtemos o resultado.

3. Considere  $X \in M \cap \mathcal{S}_d$  e lembre que  $xi$  é raiz primitiva  $d$ -ésima da unidade.

- $l_{AX} \cap l = \emptyset$  se  $X \neq C$ ;

$$\boxed{X = D}$$

Sendo  $l_{AD} = \mathbb{P}([(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)])$  e  $l = \mathbb{P}([\xi^i u_k \eta^k, 0, 1, 0), (0, \xi^i u_k, 0, 1)])$ ,

temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^i u_k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\xi^i u_k \neq 0. \text{ Assim, } l_{AQ_I} \cap l = \emptyset$$

$$\boxed{X = Q_I}$$

Sendo  $l_{AQ_I} = \mathbb{P}([(1, 0, 0, 0), (0, 0, \eta^i, 1)])$  e  $l = \mathbb{P}([\xi^i u_k \eta^k, 0, 1, 0), (0, \xi^i u_k, 0, 1)])$

temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^i & 1 \\ \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^i u_k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\xi^i u_k \neq 0. \text{ Logo } l_{AQ_I} \cap l = \emptyset.$$

Analogamente, mostramos que:

- Para toda  $l \in \mathcal{L}^1$  tem-se que  $l_{BX} \cap l = \emptyset$  se  $X \neq D$ ;
- Para toda  $l \in \mathcal{L}^1$  tem-se que  $l_{P_I X} \cap l = \emptyset$  se  $X \in \{C, D\}$ .

4. Analogamente ao que fizemos ao item anterior, comprovamos que a afirmação é verificada.

5. Sendo  $l_{P_I Q_J} = \mathbb{P}([\eta^I, 1, 0, 0), (0, 0, \eta^J, 1)])$  e  $L_{k,i}^1 = \mathbb{P}([\xi^i u_k \eta^k, 0, 1, 0), (0, \xi^i u_k, 0, 1)])$  temos que:

3. Cotas para  $r(\mathcal{S}_d)$  se  $d \neq 6$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^i u_k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\eta^I \xi^i u_k + \eta^J \xi^i u_k \eta^k = \xi^i u_k (\eta^{k+J} - \eta^I).$$

Assim,  $l_{P_I Q_J} \cap l \neq \emptyset$  se e somente se:

$$\begin{aligned} \xi^i u_k (\eta^{k+J} - \eta^I) = 0 &\Leftrightarrow \eta^{k+J} = \eta^I \\ &\Leftrightarrow 1 = \eta^{I-J-k} \\ &\Leftrightarrow I - J - k = (d-2)q \quad \text{para algum } q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow I - J = (d-2)q + k \quad \text{com } 0 \leq k \leq d-3. \end{aligned}$$

Deste modo,  $k$  é o resto da divisão de  $I - J$  por  $d - 2$ .

6. Sendo  $l_{P_I Q_J} = \mathbb{P}([\eta^I, 1, 0, 0], (0, 0, \eta^J, 1])$  e  $L_{k,i}^2 = \mathbb{P}([0, \xi^i v_k \eta^k, 1, 0], (\xi^i v_k, 0, 0, 1])$ , temos que:

$$\begin{vmatrix} \eta^I & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^J & 1 \\ 0 & \xi^i v_k \eta^k & 1 & 0 \\ \xi^i v_k & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \xi^i v_k - \eta^I \eta^J \xi^i v_k \eta^k = \xi^i v_k (1 - \eta^{I+J+k}).$$

Assim,  $l_{P_I Q_J} \cap l \neq \emptyset$  se e somente se:

$$\begin{aligned} \xi^i v_k (1 - \eta^{I+J+k}) = 0 &\Leftrightarrow 1 = \eta^{I+J+k} \\ &\Leftrightarrow I + J + k = (d-2)m \quad \text{para algum } m \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow I + J = (d-2)m - k \\ &\Leftrightarrow (d-2)m - k = (d-2)q + r \quad \text{com } 0 \leq r \leq d-3. \end{aligned}$$

Deste modo,  $(d-2)(m-q) = r+k \geq 0$  com  $0 \leq r+k \leq 2(d-2) - 2$ . Assim, temos as seguintes possibilidades para  $r+k$ ,  $r+k=0$  ou  $r+k=d-2$ . Se  $r+k=0$ , daí  $r=k=0$ . No outro caso, temos  $r+k=d-2$ , segue que  $k=d-2-r$ , como desejado.

□

**Proposição 3.6.** Seja  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_\phi$  formado por retas duas a duas disjuntas satisfazendo a condição:  $m \cap l = \emptyset$ ,  $\forall l \in \mathcal{L}^1 \quad \forall m \in \mathcal{C}$  (respectivamente,  $m \cap l = \emptyset$ ,  $\forall l \in \mathcal{L}^2 \quad \forall m \in \mathcal{C}$ ). Então  $\#\mathcal{C} \leq 4$ .

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

---

*Demonstração.* Note que  $l_{P_I Q_J} \notin \mathcal{C}$  para todo  $I, J \in \{0, \dots, d-3\}$ . Suponha por absurdo que  $l_{P_I Q_J} \in \mathcal{C}$ , segue do Lema 3.5 que  $l_{P_I Q_J} \cap L_{r_1, i}^1 \neq \emptyset$  para todo  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  se  $r_1$  é o resto da divisão de  $I - J$  por  $d - 2$ . Como também,  $l_{P_I Q_J} \cap L_{k, i}^2 \neq \emptyset$  para todo  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  com  $k = \begin{cases} 0 & \text{se } r_2 = 0 \\ d - 2 - r_2 & \text{se } r_2 \neq 0 \end{cases}$ , sendo  $r_2$  o resto da divisão de  $I + J$  por  $d - 2$ . Deste modo para cada  $m \in \mathcal{C}$ ,  $m \cap L \subset \{A, B, P_I\}$  com  $0 \leq I \leq d - 3$  e  $L = Z(x_2, x_3)$ :

Caso 1 :  $m \cap L = \{A\}$ .

Como  $m \cap l = \emptyset \ \forall \ l \in \mathcal{L}^1$ , necessariamente do Lema 3.5 temos que  $m \cap M \subseteq \{D, Q_I\}$  com  $I \in \{0, \dots, d - 3\}$ , ou seja,  $m = l_{AD}$  ou  $m = l_{AQ_I}$ .

Caso 2 :  $m \cap L = \{B\}$ .

De forma análoga no Caso 1, temos que  $m = l_{BC}$  ou  $m = l_{BQ_I}$ , para algum  $I \in \{0, \dots, d - 3\}$ .

Caso 3 :  $m \cap L = \{P_I\}$  para algum  $I \in \{0, \dots, d - 3\}$ .

Neste caso temos que  $m = l_{P_I C}$  ou  $m = L_{P_I D}$ .

A seguir vamos considerar as seguintes possibilidades para o subconjunto  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{L}_\phi$ :

(I)  $l_{AD} \in \mathcal{C}$  e  $l_{BC} \in \mathcal{C}$ .

Como  $l_{P_I Q_I} \notin \mathcal{C}$  para todo  $I, J \in \{0, \dots, d - 3\}$ . Concluimos que  $\#\mathcal{C} = 2 \leq 4$ .

(II)  $l_{AD} \in \mathcal{C}$  e  $l_{BC} \notin \mathcal{C}$ .

Se  $\#\mathcal{C} > 1$  então  $l_{BQ_I} \in \mathcal{C}$  ou  $l_{P_I C} \in \mathcal{C}$ . De onde concluimos que  $\#\mathcal{C} \leq 4$ .

(III)  $l_{AD} \notin \mathcal{C}$  e  $l_{BC} \in \mathcal{C}$ .

Análogo ao caso (II).

(IV)  $l_{AD} \notin \mathcal{C}$  e  $l_{BC} \notin \mathcal{C}$ .

Sabemos que  $l_{AC} \notin \mathcal{C}$  e  $l_{BD} \notin \mathcal{C}$  pois encontram as retas em  $\mathcal{L}^1$ . Assim, concluimos que  $\mathcal{C} \subseteq \{l_{AQ_J}, l_{BQ_{J_1}}, l_{P_I C}, l_{P_{I_1} D}\}$  com  $J \neq J_1$  e  $I \neq I_1$ . De onde concluimos que  $\#\mathcal{C} \leq 4$ .

□

**Corolário 3.7.** Para todo  $J \neq J_1$  e  $I \neq I_1$  com  $J, J_1, I, I_1 \in \{0, \dots, d - 3\}$ , verifica-se que  $\{l_{AQ_J}, l_{BQ_{J_1}}, l_{P_I C}, l_{P_{I_1} D}\} \subseteq \mathcal{L}_\phi$  é formado por retas duas a duas disjuntas e cada uma dessas retas é disjunta de todas as retas em  $\mathcal{L}^1 \cup \mathcal{L}^2$ .

**Corolário 3.8.** Verifica-se que  $r(S_d) \geq 4 + d(d - 2)$  para todo  $d \neq 6$ .

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

*Demonstração.* De fato, considere  $\mathcal{D} = \{l_{AQ_0}, l_{BQ_1}, l_{P_0C}, l_{P_1D}\} \cup \mathcal{L}^1$ . Segue da Proposição 3.6 que  $\mathcal{D} \subset \Upsilon(\mathcal{S}_d)$  é formado por retas duas a duas disjuntas tal que  $\#\mathcal{D} = 4 + \#\mathcal{L}^1$ , isto é,  $\#\mathcal{D} = 4 + d(d-2)$ . Temos que  $r(\mathcal{S}_d) \geq 4 + d(d-2)$ .  $\square$

#### 3.1.1 Estudando a interseção entre as retas de $\mathcal{L}^1$ e $\mathcal{L}^2$

Com o objetivo de achar subconjuntos de  $\Upsilon(\mathcal{S}_d)$  formado por retas duas a duas disjuntas cujo cardinal seja maior que  $4 + d(d-2)$  (se possível for!). Vamos estudar a interseção das retas da família  $\mathcal{L}^2$ , com retas da família  $\mathcal{L}^1$ .

Note que:

$$\begin{aligned}
 L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \xi^i u_k \eta^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u_k \eta^k & 0 & 1 \\ 0 & \xi^i v_t \eta^t & 1 & 0 \\ \xi^j \eta_k & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \xi^{2i} u_k^2 \eta^k - \xi^{2j} v_t^2 \eta^t = 0 \\
 &\Leftrightarrow \xi^{2i} u_k^2 \eta^k = \xi^{2j} v_t^2 \eta^t \\
 &\Leftrightarrow \frac{\xi^{2i} u_k^2}{\xi^{2j} v_t^2} = \eta^{t-k} \\
 &\Leftrightarrow (\xi^{i-j} u_k v_t^{-1})^2 = \eta^{t-k} \\
 &\Leftrightarrow (\xi^{i-j} u_k v_t^{-1})^2 = -(\xi^{i-j} u_k v_t^{-1})^d \\
 &\Leftrightarrow (\xi^{i-j} u_k v_t^{-1})^{d-2} = -1.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

No que segue vamos fixar  $\sigma_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\sigma_0^d = -1$ . De fato, no caso  $d$  ímpar, consideramos  $\sigma_0 = -1$ . Como também  $v_k = \sigma_0 u_k$ . Assim,

$$v_k = \begin{cases} -u_k & \text{se } d \text{ é ímpar} \\ \sigma_0 u_k & \text{se } d \text{ é par} \end{cases}$$

**Lema 3.9.** Se  $d$  é ímpar então  $L_{k,i}^1 \cap L_{k,i}^2 \neq \emptyset$ , para todo  $k \in \{0, \dots, d-3\}$  e para todo  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ .

*Demonstração.* Queremos mostrar que (3.5) é satisfeito. Isto é  $(u_k v_k^{-1})^{d-2} = -1$ . Como  $d$  é ímpar, temos que  $v_k = -u_k$ . Assim:

$$(u_k v_k^{-1})^{d-2} = (-u_k u_k^{-1})^{d-2} = (-1)^{d-1} = -1.$$

Segue que  $L_{k,i}^1 \cap L_{k,i}^2 \neq \emptyset$  quando  $d$  é ímpar.  $\square$

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

**Lema 3.10.** Se  $d$  é par então  $L_{k,i}^1 \cap L_{k,j}^2 = \emptyset$  para todo  $k \in \{0, \dots, d-3\}$  e para todo  $i, j \in \{0, \dots, d-1\}$ .

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $L_{k,i}^1 \cap L_{k,j}^2 \neq \emptyset$ , segue de (3.5) que  $\xi^{2i}u_k^2 = \xi^{2j}v_k^2$ , substituindo  $v_k = \sigma_0 u_k$  (pois  $d$  é par) segue que  $(\xi^i)^2 = (\xi^j \sigma_0)^2$ , desta igualdade temos  $\xi^i = \xi^j \sigma_0$  ou  $\xi^i = -\xi^j \sigma_0$ , em ambos os casos elevando à  $d$  chegamos a um absurdo ( $1 = -1$ ). Segue que  $L_{k,i}^1 \cap L_{k,j}^2 = \emptyset$  quando  $d$  é par.  $\square$

**Lema 3.11.** Considere  $L_{k,i}^1 \in \mathcal{L}^1$  e  $L_{t,j}^2 \in \mathcal{L}^2$  tais que  $L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset$ . Se  $L_{k,i}^1 \cap L_{t,j_1}^2 \neq \emptyset$  então

$$\begin{cases} j_1 = j & \text{se } d \text{ é ímpar} \\ j_1 \in \{j, j + \frac{d}{2}\} & \text{se } d \text{ é par.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Por hipótese temos que:

$$\begin{aligned} L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \xi^{2i}u_k^2 \eta^k = \xi^{2j}v_k^2 \eta^t \\ L_{k,i}^1 \cap L_{t,j_1}^2 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \xi^{2i}u_k^2 \eta^k = \xi^{2j_1}v_k^2 \eta^t \end{aligned}$$

Segue que  $\xi^{2j} = \xi^{2j_1}$ , isto é,  $\xi^{2(j_1-j)} = 1$ , de onde podemos concluir que  $2(j_1 - j) = dq$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ , pois  $\xi$  é uma raiz  $d$ -ésima da unidade. Deste modo,  $2|q$  ou  $2|d$ .

**Caso 1:  $d$  é par** Se  $d$  é par então  $j_1 - j = \frac{d}{2}q$ . Se  $j_1 \geq j$ , segue que  $0 \leq j_1 - j \leq d-1$ , deste modo  $j_1 = j$  ou  $j_1 = j + \frac{d}{2}$ .

**Caso 2:  $d$  é ímpar** Se  $d$  é ímpar então  $j_1 - j = d\frac{q}{2}$ . Como  $0 \leq |j_1 - j| \leq d-1$  concluimos que  $j_1 = j$ .  $\square$

**Lema 3.12.** Se  $d$  é par e  $\eta_0 \in \mathbb{C}$  é tal que  $\eta_0^{d-2} = -1$  então  $\eta_0^2 = \eta^{\nu_0}$  para um único  $\nu_0 \in R_{d-2} = \{0, \dots, d-3\}$  e  $\nu_0$  é ímpar.

*Demonstração.* Como  $\eta_0^{d-2} = -1$  temos  $(\eta_0^2)^{d-2} = 1$ . Assim,  $\eta_0^2 = \eta^{\nu_0}$  para um único  $\nu_0$  em  $R_{d-2}$ . Agora, suponhamos por absurdo que  $\nu_0$  seja par, daí temos que,  $\nu_0 = 2\nu_1$ , segue que  $\eta_0 = \pm \eta^{\nu_1}$  elevando essa equação a potência  $d-2$  segue que  $-1 = 1$ , absurdo. Logo  $\nu_0$  é ímpar.  $\square$

**Lema 3.13.** Fixe  $D \geq 1$  inteiro e  $z_0 \in \mathbb{Z}$ . Considere  $R_D = \{0, 1, \dots, D-1\}$  o conjunto formado pelos restos da divisão por  $D$ . Para cada  $z \in \mathbb{Z}$  seja  $\varphi_{z_0, D}(z)$  o resto da divisão de  $z_0 + z$  por  $D$ . Verifica-se que:

1.  $\varphi_{z_0, D} : \mathbb{Z} \rightarrow R_D$  dada por  $z \mapsto \varphi_{z_0, D}(z)$  é sobrejetiva.
2.  $\varphi_{z_0, D} | R_D$  é uma bijeção.
3. Se  $\psi_{z_0, D} : \mathbb{Z} \rightarrow R_D$  é definida por  $\psi_{z_0, D}(z) = \varphi_{z_0, D}(2z)$  temos:

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

---

- $\psi_{z_0,D}|_{R_D}$  é bijetiva se  $D$  for ímpar.
- $\psi_{z_0,D}|_{R'_D}$  sendo  $R'_D = \{0, 1, \dots, \frac{D}{2} - 1\}$  é injetiva, se  $D$  é par.

*Demonstração.*  $\varphi_{z_0,D}$  é sobrejetora por definição. A seguir verificaremos que  $\varphi_{z_0,D}|_{R_D}$  é injetora. Sejam  $r, r_1 \in R_D$  tais que:  $\varphi_{z_0,D}(r) = \varphi_{z_0,D}(r_1)$ , segue que  $r + z_0 = qD + \varphi_{z_0,D}(r)$  e  $r_1 + z_0 = q_1D + \varphi_{z_0,D}(r_1)$  para algum  $q$  e  $q_1$  em  $\mathbb{Z}$ . A partir dessas duas equações acima temos que  $r - r_1 = (q - q_1)D$ , donde concluímos que  $r = r_1$ , isto é  $\varphi_{z_0,D}$  é injetora e consequentemente bijetora. Vejamos agora o item 3. Assuma que  $\psi_{z_0,D}(r) = \psi_{z_0,D}(r_1)$  para algum  $r, r_1 \in R_D$ . Segue que  $2(r - r_1) = qD$  com  $q \in \mathbb{Z}$ . De fato,  $r - r_1 = \frac{q}{2}D$ , se  $D$  é ímpar e segue que  $r = r_1$ . Agora, se  $D$  for par, concluímos que  $r - r_1 = q\frac{D}{2}$ , logo  $r = r_1$  ou  $|r - r_1| = \frac{D}{2}$ . Se considerarmos  $r, r_1 \in R'_D$  temos que  $|r - r_1| < \frac{D}{2}$ . Logo  $r = r_1$ .  $\square$

**Lema 3.14.** Notações como no Lema 3.11. Se  $L_{k,i}^1 \in \mathcal{L}^1$  e  $t_\nu = \psi_{k,d-2}(\nu)$  com  $\nu \in R_{d-2}$ . Então verifica-se que:

1. Se  $d$  for ímpar e então  $(-u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta^{t_\nu}}$ . Assim,  $v_{t_\nu} = -u_k\eta^{-\nu}\xi^{-N_\nu}$  para um único  $N_\nu \in R_d$ .
2. Se  $d$  é par então  $(\eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta^{t_\nu}}$ , ( $\eta_0$  conforme Lema 3.12). De onde concluímos que  $v_{t_\nu} = \eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu}\xi^{-N_\nu}$  para um único  $N_\nu \in R_d$ .
3. Se  $j = \varphi_{0,d}(i + N_\nu)$  então  $L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* 1. Temos que  $(-u_k\eta^{-\nu})^d = (-1)^d u_k^d \eta^{-\nu d}$ . Note que  $d$  é ímpar,  $u_k^d = \frac{1}{\eta^k}$  e  $\eta^{-\nu d} = \eta^{-\nu(d-2+2)} = \eta^{-2\nu}$ . Fazendo as devidas substituições obtemos que  $(-u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta^{k+2\nu}}$ . Agora, por hipótese temos que  $t_\nu = \psi_{k,d-2}(\nu)$ , isto é,  $k+2\nu = q(d-2) + t_\nu$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ , segue que  $(-u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta^{t_\nu}}$ . Como,  $\frac{-1}{\eta^{t_\nu}} = v_{t_\nu}^d$  segue que existe  $N_\nu \in R_d$  tal que  $-u_k\eta^{-\nu} = v_{t_\nu}\xi^{N_\nu}$ , ou equivalentemente  $v_{t_\nu} = -u_k\eta^{-\nu}\xi^{-N_\nu}$  para um único  $N_\nu \in R_d$ .

2. De fato, temos que  $(\eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu})^d = \eta_0^{-d} u_k^d \eta^{-\nu d}$ , como por hipótese  $\eta_0^{d-2} = -1$  temos que  $\eta_0^{-d} = (-1)\eta_0^{-2}$ . Além disso temos que  $u_k^d = \frac{1}{\eta^k}$ , e como fizemos no item 1  $\eta^{-\nu d} = \eta^{-2\nu}$ . Fazendo as devidas substituições obtemos que  $(\eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta_0^2 \cdot \eta^{k+2\nu}}$ , como por hipótese temos que  $\eta_0^2 = \eta^{\nu_0}$  segue que  $(\eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta^{\nu_0+k+2\nu}}$ . Por hipótese temos que  $t_\nu = \psi_{k+\nu_0}(\nu)$  com  $\nu_0 \in R_{d-2}$ , isto é,  $k + \nu_0 + 2\nu = q(d-2) + t_\nu$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ , portanto  $(\eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu})^d = \frac{-1}{\eta^{t_\nu}}$ .

3. Cotas para  $r(\mathcal{S}_d)$  se  $d \neq 6$

---

Como  $\frac{-1}{\eta^{t_\nu}} = v_{t_\nu}^d$ , concluímos que existe um único  $N_\nu \in R_d$  tal que  $\eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu} = v_{t_\nu}\xi^{N_\nu}$ . Ou equivalentemente,  $v_{t_\nu} = \eta_0^{-1}u_k\eta^{-\nu}\xi^{N_\nu}$  para um único  $N_\nu \in R_d$ .

3. Segue de 3.5 que  $L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset \Leftrightarrow (\xi^{i-j}u_kv_t^{-1})^{d-2} = -1$ , usaremos este fato para mostrar a afirmação. Vamos dividir em casos:

**Caso 1:  $d$  é ímpar** Neste caso, pela equação obtida no item 1, segue que  $v_{t_\nu}^{-1} = -u_k^{-1}\eta^\nu\xi^{N_\nu}$ , substituindo na expressão  $(\xi^{i-j}u_kv_t^{-1})^{d-2}$  e usando o fato de que  $j = \varphi_{0,d}(i + N_\nu)$  obtemos a igualdade. Portanto  $L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset$ .

**Caso 2:  $d$  é par** Neste caso, pela equação obtida no item 2, segue que  $v_{t_\nu}^{-1} = \eta_0u_k^{-1}\eta^\nu\xi^{N_\nu}$ , substituindo na expressão  $(\xi^{i-j}u_kv_t^{-1})^{d-2}$  e usando o fato de que  $j = \varphi_{0,d}(i + N_\nu)$  obtemos a igualdade. Portanto  $L_{k,i}^1 \cap L_{t,j}^2 \neq \emptyset$ .

□

**Notação:** Para cada  $l \in \mathcal{L}^1$  considere  $\Upsilon_l^2 = \{m \in \mathcal{L}^2 \mid m \cap l \neq \emptyset\}$ . E analogamente, para cada  $m \in \mathcal{L}^2$  considere  $\Upsilon_m^1 = \{l \in \mathcal{L}^1 \mid l \cap m \neq \emptyset\}$ .

**Lema 3.15.** Assuma que  $d$  é par. Seja  $l = L_{k,i}^1 \in \mathcal{L}^1$  e considere  $\mathcal{L}_t^2 = \{L_{t,j}^2 \in \mathcal{L}^2 \mid j \in R_d\}$ . Se  $\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2 \neq \emptyset$  então  $t$  e  $k$  tem paridades distintas.

*Demonstração.* Seja  $m \in \Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2$ , segue que  $m = L_{t,j}^2$  com  $j \in R_d$ . Temos que  $m \cap l \neq \emptyset$  se e somente se  $\xi^{2j}v_t^2\eta^t = \xi^{2i}u_k^2\eta^k$ . Suponhamos que  $k$  e  $t$  possuam a mesma paridade.

**$k$  e  $t$  são pares** Neste caso temos que  $k = 2k_1$  e  $t = 2t_1$ , desse modo obtemos que  $\xi^jv_t\eta^{t_1} = \pm\xi^i u_k\eta^{k_1}$ , elevando esta equação a potência  $d$  segue que  $\frac{-1}{\eta^t}\eta^{dt_1} = \frac{1}{\eta^k}\eta^{dk_1}$  o que implica que  $1 = -1$ , absurdo.

**$k$  e  $t$  são ímpares** Análogo ao caso anterior.

Em ambos os casos chegamos a um absurdo, deste modo concluímos que  $k$  e  $t$  possuem paridades opostas. □

**Proposição 3.16.** Se  $l = L_{k,i}^1 \in \mathcal{L}^1$  então existe uma bijeção entre o conjunto  $R_{d-2} = \{0, 1, \dots, d-3\}$  e  $\Upsilon_l^2 = \{m \in \mathcal{L}^2 \mid m \cap l \neq \emptyset\}$ .

*Demonstração.* A demonstração será dividida em dois casos de acordo com a paridade de  $d$ .

**Caso 1:**  $d$  é ímpar.

Fixe  $\nu \in R_{d-2}$  e escolha  $t_\nu \in R_{d-2}$  tal que  $\psi_{k,d-2}(\nu) = t_\nu$ . Segue do Lema 3.14 que  $-u_k\eta^{-\nu} = \xi^{N_\nu}v_{t_\nu}$  para um único  $N_\nu \in R_d = \{0, \dots, d-1\}$  bem como, se escolhermos,  $j_\nu = \varphi_{0,d}(N_\nu + i) \in R_d$  então  $L_{k,i}^1 \cap L_{t_\nu,j_\nu}^2 \neq \emptyset$ . Assim, considere a função:

$$\begin{aligned} \Omega : R_{d-2} &\longrightarrow \Upsilon_l^2 \\ \nu &\longmapsto L_{t_\nu,j_\nu}^2 \end{aligned}$$

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

Afirmação 1:  $\Omega$  é injetiva.

De fato, considere  $\nu, \nu_1 \in R_{d-2}$  tais que  $\Omega(\nu) = \Omega(\nu_1)$ . Ou seja  $L_{t_\nu, j_\nu}^2 = L_{t_{\nu_1}, j_{\nu_1}}^2$  então  $t_\nu = t_{\nu_1}$  e  $j_\nu = j_{\nu_1}$ . Lembremos que  $t_\nu = \psi_{k, d-2}(\nu)$  e  $t_{\nu_1} = \psi_{k, d-2}(\nu_1)$ . Como  $\psi_{k, d-2}$  é injetiva segue que  $\nu = \nu_1$ .

Afirmação 2:  $\Omega$  é sobrejetiva.

Considere  $L_{t, j}^2 \in \mathcal{L}^2$  tal que  $L_{k, i}^1 \cap L_{t, j}^2 \neq \emptyset$ . Logo  $(\xi^{i-j} u_k v_t^{-1})^{d-2} = -1$ , assim:

$$\xi^{i-j} u_k v_t^{-1} = -\eta^\nu \text{ para um } \nu \in R_{d-2}. \quad (3.6)$$

A seguir mostraremos que  $\Omega(\nu) = L_{t, j}^2$ . Sabemos que  $\Omega(\nu) = L_{t_\nu, j_\nu}^2$ , com  $t_\nu = \psi_{k, d-2}(\nu)$  e  $\varphi_{0, d}(N_\nu + i) = j_\nu$ . Note que elevando a equação (3.6) a potência  $d$  e usando a unicidade do resto temos que  $t = t_\nu$ . Por outro lado, do Lema 3.11 concluímos que  $j = j_\nu$ .

Caso 2:  $d$  é par.

Escolha  $\eta_0 \in \mathbb{C}$  como no Lema 3.12. Considere  $R'_{d-2} = \{0, 1, \dots, \frac{d}{2} - 2\}$  e  $R''_{d-2} = R_{d-2} - R'_{d-2} = \{\frac{d}{2} - 1, \dots, d - 3\}$ .

Para cada  $\nu \in R_{d-2}$  vamos definir  $\Omega(\nu) = L_{t_\nu, j_\nu}^2 \in \Upsilon_l^2$  com  $l = L_{k, i}^1$  da seguinte forma: considere  $t_\nu = \psi_{k+\nu_0, d-2}(\nu)$ . Assim do Lema 3.14 temos que  $\eta_0^{-1} u_k \eta^\nu = \xi^{N_\nu} v_{t_\nu}$  para um único  $N_\nu \in R_d$ . A seguir considere  $j_\nu = \varphi_d(N_\nu + i)$ , se  $\nu \in R'_{d-2}$ , caso contrário  $\nu = \nu_1 + \frac{d-2}{2}$  com  $\nu_1 \in R'_{d-2}$  e definimos  $j_\nu = \begin{cases} j_{\nu_1} + \frac{d}{2} & \text{se } j_{\nu_1} \in R'_d \\ j_{\nu_1} - \frac{d}{2} & \text{se } j_{\nu_1} \in R''_d \end{cases}$ .

Note que  $\Omega$  está bem definida pois  $\Omega(\nu) = L_{t_\nu, j_\nu}^2 \in \Upsilon_l^2$  pelo item 3 no Lema 3.14. Agora vamos analisar a injetividade da  $\Omega$ . Dados  $\nu, \nu' \in R_{d-2}$ , temos três possibilidades:

1.  $\nu, \nu' \in R'_{d-2}$
2.  $\nu \in R'_{d-2}$  e  $\nu' \in R''_{d-2}$
3.  $\nu, \nu' \in R''_{d-2}$

Vejam os:

1 Se  $\Omega(\nu) = \Omega(\nu')$  então  $L_{t_\nu, j_\nu}^2 = L_{t_{\nu'}, j_{\nu'}}^2$ , assim  $t_\nu = t_{\nu'}$ . Como  $\psi_{k+\nu_0, d-2}$  restrita a  $R'_{d-2}$  é injetiva, segue que  $\nu = \nu'$ .

2 Note que  $\nu \neq \nu'$ . E neste caso queremos mostrar que  $\Omega_l(\nu) \neq \Omega_l(\nu')$ . Note que  $\Omega_l(\nu) \neq \Omega_l(\nu')$  se e somente se  $t_\nu \neq t_{\nu'}$  ou  $j_\nu \neq j_{\nu'}$ . Se  $t_\nu = t_{\nu'}$  segue que  $\nu' = \nu + \frac{d-2}{2} \in R''_{d-2}$ , e pela definição de  $\Omega_l$  segue que  $j_{\nu'} = j_\nu \pm \frac{d}{2}$ . Portanto,  $j_\nu \neq j_{\nu'}$ , como queríamos.

3 Dados  $\nu, \nu' \in R''_{d-2}$ . Verifica-se que  $\nu = \nu_1 + \frac{d}{2}$  e  $\nu' = \nu'_1 + \frac{d}{2}$ . Além disso,  $t_\nu = t_{\nu_1}$  e  $t_{\nu'} = t_{\nu'_1}$ . Se  $\Omega(\nu) = \Omega(\nu')$ , segue que  $t_\nu = t_{\nu'}$  e  $j_\nu = j_{\nu'}$ . Logo  $t_{\nu_1} = t_{\nu'_1}$  e pela

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

injetividade de  $\psi_{k+\nu_0}$  restrita a  $R'_{d-2}$ , concluimos que  $\nu_1 = \nu'_1$ . Logo  $\nu = \nu'$ .

Isso mostra a injetividade da  $\Omega$ .

Vamos mostrar que  $\Omega$  é sobrejetora. Dado  $m = L_{t,j}^2 \in \Upsilon_l^2$  queremos achar  $\nu \in R_{d-2}$  tal que  $\Omega_l(\nu) = L_{t_\nu, j_\nu}^2 = m$ , isto é  $t = t_\nu$  e  $j = j_\nu$ . Pela definição da  $\Omega$  temos que  $k + \nu_0 + 2\nu = q(d-2) + t$ , isto é,  $t - (k + \nu_0) = (-q)(d-2) + 2\nu$ . Pelo Lema 3.12 temos que  $\nu_0$  é ímpar e pelo Lema 3.15 temos que  $k$  e  $t$  tem paridades distintas, deste modo concluimos que  $t$  e  $k + \nu_0$  tem a mesma paridade logo  $t - (k + \nu_0)$  é par. Assim, o resto da divisão de  $t - (k + \nu_0)$  por  $d-2$  é par digamos  $2\nu$  com  $0 \leq \nu \leq \frac{d}{2} - 2$ . Assim  $\psi_{k+\nu_0}(\nu) = t = t_\nu$  e  $\Omega_l(\nu) = L_{t_\nu, j_\nu}^2 = L_{t, j_\nu}^2$ . Por outro lado  $m \in \Upsilon_l^2$ , assim do Lema 3.11 segue que  $j = j_\nu$  ou  $|j - j_\nu| = \frac{d}{2}$ . Se  $j = j_\nu$  não temos nada a provar, segue que  $\Omega_l(\nu) = m$ . Caso contrário temos que  $j = j_\nu + \frac{d}{2}$  ou  $j = j_\nu - \frac{d}{2}$ . Seja  $\mu = \nu + \frac{d-2}{2} \in R''_{d-2}$ , pela definição da nossa função temos que  $j_\mu = j_\nu + \frac{d}{2}$  ou  $j_\mu = j_\nu - \frac{d}{2}$ , deste modo concluimos que  $j = j_\mu$ . Logo  $\Omega_l(\mu) = m$  como queríamos.  $\square$

**Corolário 3.17.** Com as notações acima. Verifica-se que:  $\#\Upsilon_m^1 = \#\Upsilon_l^2 = d-2$  para todo  $l \in \mathcal{L}^1$  e  $m \in \mathcal{L}^2$ .

No que segue do texto para cada  $k \in R_{d-2}$  seja  $\mathcal{L}_k^i = \{L_{k,s}^i \in \mathcal{L}^i \mid s \in R_d\}$  com  $i = 1, 2$ .

**Corolário 3.18.** Fixe  $l = L_{k,i}^1 \in \mathcal{L}^1$  e  $t \in R_{d-2}$  Verifica-se que:

1. Se  $d$  é ímpar então  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2) = 1$ .
2. Se  $d$  é par temos que:  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ e } k \text{ tem a mesma paridade} \\ 2 & \text{se caso contrário} \end{cases}$

*Demonstração.* Temos  $l = L_{k,i}^1$ , vamos analisar se:

1.  $d$  é ímpar;

Observe que  $\psi_{k,d-2} : R_{d-2} \rightarrow R_{d-2}$  é um bijeção no caso  $d$  ímpar. Assim, dado  $t \in R_{d-2}$  existe um único  $\nu \in R_{d-2}$  de modo que  $\psi_{k,d-2}(\nu) = t_\nu = t$ . Agora segue da Proposição 3.16 que  $\Omega_l(\nu) = L_{t_\nu, j_\nu}^2 \in \Upsilon_l^2$ , portanto  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2) \geq 1$ . Entretanto, segue do Lema 3.11 que dita reta em  $\Upsilon_l^2$  é única. Logo,  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2) = 1$ .

2.  $d$  é par;

Do Lema 3.15 temos que  $\Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_t^2 = \emptyset$  se  $k$  e  $t$  tem a mesma paridade. Agora se  $t$  e  $k$  tem paridade distintas e  $L_{t,j}^2, L_{t,j_1}^2 \in \Upsilon_l^2$ . Segue do Lema 3.11 que  $j = j_1$  ou  $|j - j_1| = \frac{d}{2}$ . Logo,  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_t^2) = 2$ .

$\square$

**Observações 3.1.** Se  $d$  é par,  $l = L_{k,i}^1$  e  $l_1 = L_{k_1,i_1}^1$  tal que  $k$  e  $k_1$  tem paridades distintas então  $\Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_{l_1}^2 = \emptyset$ .

**Lema 3.19.** Considere  $l = L_{k,i}^1$  e  $l_1 = L_{k_1,i_1}^1$  com  $i \neq i_1$ . Verifica-se que:

1.  $\Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_{l_1}^2 = \emptyset$  se  $d$  é ímpar.
2.  $\Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_{l_1}^2 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } |i - i_1| \neq \frac{d}{2} \\ \Upsilon_l^2 = \Upsilon_{l_1}^2 & \text{se } |i - i_1| = \frac{d}{2} \end{cases}$  se  $d$  é par.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_{l_1}^2 \neq \emptyset$ . Considere  $m = L_{t,j}^2 \in \Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_{l_1}^2$ . Como  $m \cap l \neq \emptyset$  e  $m \cap l_1 \neq \emptyset$  temos que:  $\xi^{2j}v_t^2\eta^t = \xi^{2i}u_k^2\eta^k$  e  $\xi^{2j}v_t^2\eta^t = \xi^{2i_1}u_{k_1}^2\eta^{k_1}$ , logo  $2(i - i_1) = dq$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ . Vamos dividir em casos:

1.  $d$  é ímpar;

Neste caso temos que  $i - i_1 = d\frac{q}{2}$ . Como  $0 \leq i, i_1 \leq d-1$ ,  $|i - i_1| \leq d-1$ , absurdo pois  $i \neq i_1$ .

2.  $d$  é par;

Como  $2(i - i_1) = dq$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$  segue que  $i - i_1 = q\frac{d}{2}$ , isto nos diz que:  $i = i_1$  ou  $|i - i_1| = \frac{d}{2}$ , como por hipótese temos  $i \neq i_1$  segue que  $|i - i_1| = \frac{d}{2}$ . Logo,  $\Upsilon_l^2 \cap \Upsilon_{l_1}^2 = \emptyset$  se  $|i - i_1| \neq \frac{d}{2}$ . Se  $|i - i_1| = \frac{d}{2}$ , suponha que  $i_1 = i + \frac{d}{2}$ , daí temos que  $l = L_{k,i}^1$  e  $l_1 = L_{k,i+\frac{d}{2}}^1$ . E neste caso:

$$m \in \Upsilon_l^2 \Leftrightarrow \xi^{2j}v_t^2\eta^t = \xi^{2i}u_k^2\eta^k \text{ e } m \in \Upsilon_{l_1}^2 \Leftrightarrow \xi^{2j}v_t^2\eta^t = \xi^{2(i+\frac{d}{2})}u_k^2\eta^k.$$

Portanto,  $\Upsilon_l^2 = \Upsilon_{l_1}^2$ .

□

**Proposição 3.20.** Considere  $C \subset \Upsilon(\mathcal{S}_d)$  formado por retas duas a duas disjuntas e não vazias. Sejam  $n_i = \#C_i$  com  $i = 0, 1, 2$  sendo  $C_i = C \cap \mathcal{L}^i$ , sendo  $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}_\Phi$ . Verifica-se que:

1.  $n_0 \leq d$  e  $n_i \leq d(d-2)$  se  $i = 1, 2$ .
2.  $n_1 + n_2 \leq d(d-2)$  se  $d$  é ímpar.
3.  $n_1 + n_2 \leq d(d-2) + \frac{d}{2}(d-2)$  se  $d$  é par.
4.  $n_0 + n_i \leq d(d-2) + 4$  se  $i = 1, 2$ .
5.  $\#C \leq d(d-2) + 4$  se  $d$  é ímpar.



### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

---

Assim,  $\alpha_1 = 2x + y$ . Logo,  $\#\bigcup_{l \in C_1^{k_1}} \Upsilon_l^2 = y(d-2) + x(d-2)$ . Então  $n_2 \leq d(d-2) - (x+y)(d-2)$ . Logo,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &\leq \alpha_1(d-2) + d(d-2) - (x+y)(d-2) \\ &= d(d-2) + (\alpha_1 - x - y)(d-2) \\ &= d(d-2) + x(d-2). \end{aligned}$$

Segue que  $n_1 + n_2 \leq d(d-2) + \frac{d}{2}(d-2)$ .

4. Temos dois casos para analisar:

$n_0 \leq 4$ : Usando o item (1) obtemos que  $n_0 + n_i \leq 4 + d(d-2)$ .

$n_0 \geq 5$ : Existe  $l = L_{P_I, Q_J} \in C_0$ . Pelo Lema 3.5 existem  $k_1, k_2 \in R_{d-2}$  tais que  $l$  encontra todas as retas em  $\mathcal{L}_{k_1}^1$  e  $\mathcal{L}_{k_2}^2$  respectivamente. Note que  $C_i \subset \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{k_i}^i$  para  $i = 1, 2$ . Assim,  $n_i \leq d(d-2) - d$ . Logo,  $n_0 + n_i \leq d(d-2) + 4$  se  $i = 1, 2$ .

5. Temos dois casos para analisar:

$n_0 \leq 4$ : Usando o item (1) e (2) obtemos que  $\#C \leq d(d-2) + 4$  se  $d$  é ímpar.

$n_0 \geq 5$ : Procedendo como no item 2, e lembrando que para cada  $l \in C_1^{\mu_1}$ , a família  $\Upsilon_l^2$  consiste exatamente de  $d-2$  retas que interceptam  $l$ . Além disso temos que  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_{k_2}^2) = 1$  e sabendo que  $C_2 \cap \mathcal{L}_{k_2}^2 = \emptyset$  temos que  $C_2 \subset \mathcal{L}^2 - \mathcal{L}_{k_2}^2 - \bigcup_{l \in C_1^{\mu_1}} (\Upsilon_l^2 - \mathcal{L}_{k_2}^2)$  donde concluímos que  $n_2 \leq d(d-2) - d - \alpha_1(d-3)$ , segue que  $n_1 + n_2 \leq \alpha_1(d-3) + d(d-2) - \alpha_1(d-3) = d(d-2) - d$ . Portanto,  $\#C \leq d(d-2) + 4$  se  $d$  é ímpar.

6. Existe  $L = L_{P_I, Q_J} \in C_0$ . Pelo Lema 3.5 existem  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $L$  encontra todas as retas em  $\mathcal{L}_{k_1}^1$  e  $\mathcal{L}_{k_2}^2$  respectivamente, segue que  $C_{k_1}^1 \neq \emptyset$ , assim  $n_1 \leq \alpha_1(d-3)$ . Segue que  $C_2 \subset \mathcal{L}^2 - \mathcal{L}_{k_2}^2 - \left( \bigcup_{l \in C_1^{\beta_1}} (\Upsilon_l^2 - \mathcal{L}_{k_1}^2) \right)$ . Segue do Corolário 3.18 que  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_{k_1}^2) = 0$  para todo  $l \in C_1^{\beta_1}$  ou  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_{k_1}^2) = 2$  para todo  $l \in C_1^{\beta_1}$ . Neste aspecto temos dois casos para analisar:

Caso 1:  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_{k_1}^2) = 0 \quad \forall l \in C_1^{\beta_1}$ .

Neste caso, temos que  $\# \left( \bigcup_{l \in C_1^{\beta_1}} (\Upsilon_l^2 - \mathcal{L}_{k_1}^2) \right) = (x+y)(d-2)$ . Temos que:

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 + n_2 &\leq d + \alpha_1(d-3) + d(d-2) - (d-2) - (x+y)(d-2) \\ &= d(d-2) + 2 + \alpha_1 d - 3\alpha_1 - (\alpha_1 + x)(d-2) \\ &= d(d-2) + 2 - \alpha_1 + x(d-2) \\ &\leq d(d-2) + \frac{d}{2}(d-2) + 2 - \alpha_1 \\ &= d(d-2) + \frac{d^2}{2} + 2 - d - \alpha_1 \end{aligned}$$

### 3. Cotas para $r(\mathcal{S}_d)$ se $d \neq 6$

---

Portanto,  $n_0 + n_1 + n_2 \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$ .

Caso 2:  $\#(\Upsilon_l^2 \cap \mathcal{L}_{k_1}^2) = 2 \ \forall l \in C_1^{\beta_1}$ .

Neste caso, temos que  $\# \left( \bigcup_{l \in C_1^{\beta_1}} (\Upsilon_l^2 - \mathcal{L}_{k_1}^2) \right) = (x+y)(d-4)$ . Temos que:

$$\begin{aligned}
 n_0 + n_1 + n_2 &\leq d + \alpha_1(d-3) + d(d-2) - (d-2) - (x+y)(d-4) \\
 &= d(d-2) + \alpha_1 d - 3\alpha_1 + 2 - \alpha_1 d + 4\alpha_1 + x(d-4) \\
 &= d(d-2) + 2 + \alpha_1 + x(d-4) \\
 &\leq d(d-2) + 2 + d + \frac{d}{2}(d-4) \\
 &= d(d-2) + 2 - d + \frac{d^2}{2}
 \end{aligned}$$

Portanto,  $n_0 + n_1 + n_2 \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$ .

Em todo caso, temos que  $\#C \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$ .

□

**Teorema 3.21.** *Se  $\mathcal{S}_d \subset \mathbb{P}^3$  é a superfície não singular de grau  $d$  definida por:  $x_0 x_1 (x_0^{d-2} - x_1^{d-2}) + x_2 x_3 (x_2^{d-2} - x_3^{d-2}) = 0$ . Então  $r(\mathcal{S}_d) = d(d-2) + 4$  se  $d \geq 5$  é ímpar e  $d(d-2) + 4 \leq r(\mathcal{S}_d) \leq d(d-2) + \frac{d^2}{2}$  se  $d$  é par, com  $d \neq 6$ .*

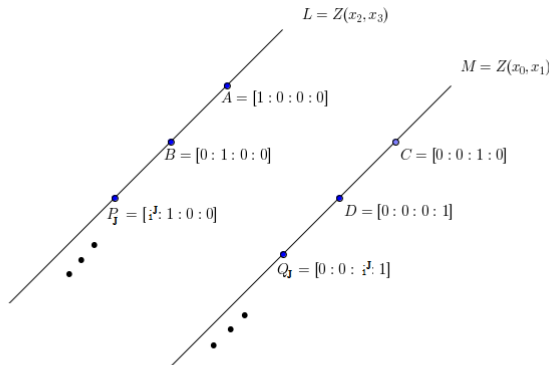
# Capítulo 4

## Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

Lembremos que  $\mathcal{S}_6$  é definida por  $x_0x_1(x_0^4 - x_1^4) - x_2x_3(x_2^4 - x_3^4)$  e que o conjunto das retas  $l$  em  $\mathcal{S}_6$  é estratificado pela condição:  $l \cap L \neq \emptyset$  ou  $l \cap L = \emptyset$  se  $L = Z(x_2, x_3)$ . De fato, a partir dos resultados provados no Capítulo 2, temos que: toda reta que encontra  $L$  também encontra  $M = Z(x_0, x_1)$  (tais retas formam o conjunto  $\mathcal{L}_\Phi$ ) e que as retas de  $\mathcal{S}_6$  disjuntas de  $L$  são determinadas pelos automorfismos de  $\Gamma_C$  sendo  $C = Z(x_0y_0(x_0^4 - y_0^4)) \subset \mathbb{P}^1$ . Assim, o que segue do texto é dedicado à determinação dessas retas e ao estudo das intersecções com o objetivo de calcular  $r(\mathcal{S}_6)$ .

### 4.1 Descrevendo os elementos de $\mathcal{L}_\Phi$

As retas em  $\mathcal{L}_\Phi$  são da forma  $L_{PQ}$  com  $P \in \mathcal{S}_6 \cap L$  e  $Q \in \mathcal{S}_6 \cap M$ , ilustrados na próxima figura:



Assim,

$$\mathcal{L}_\Phi = \{L_{AC}, L_{AD}, L_{AQ_I}, L_{BC}, L_{BD}, L_{BQ_I}, L_{P_1C}, L_{P_1D}, L_{P_IQ_J}\} \text{ com } I, J \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

De fato, a descrição dessas retas em termos dos subespaços que as determinam é dada por:

Reta $L_{XY}$	Subespaço $W_{XY}$
$L_{AC} = \mathbb{P}(W_{AC})$	$W_{AC} = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$
$L_{AD} = \mathbb{P}(W_{AD})$	$W_{AD} = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$
$L_{AQ_I} = \mathbb{P}(W_{AQ_I})$	$W_{AQ_I} = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, i^I, 1)]$
$L_{BC} = \mathbb{P}(W_{BC})$	$W_{BC} = [(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$
$L_{BD} = \mathbb{P}(W_{BD})$	$W_{BD} = [(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$
$L_{BQ_I} = \mathbb{P}(W_{BQ_I})$	$W_{BQ_I} = [(0, 1, 0, 0), (0, 0, i^I, 1)]$
$L_{P_I C} = \mathbb{P}(W_{P_I C})$	$W_{P_I C} = [(i^I, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$
$L_{P_I D} = \mathbb{P}(W_{P_I D})$	$W_{P_I D} = [(i^I, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$
$L_{P_I Q_J} = \mathbb{P}(W_{P_I Q_J})$	$W_{P_I Q_J} = [(i^I, 1, 0, 0), (0, 0, i^J, 1)]$

## 4.2 Descrição dos elementos do grupo $\Gamma_C$

Segue do Teorema 2.13 que  $\Gamma_C \cong S_4$ . No que segue descreveremos os elementos de  $\Gamma_C$  a partir dos geradores de  $\varphi, \psi$  e  $\sigma$ . Considere  $\varphi$  e  $\psi$  automorfismos de  $\mathbb{P}^1$  dados por  $\varphi([u : v]) = [iu : v]$  e  $\psi([u : v]) = [v : u]$ . Note que  $\varphi, \psi \in \Gamma_C$ . Além disso  $\text{ord}(\varphi) = 4$ ,  $\text{ord}(\psi) = 2$  e verifica-se que  $\psi \circ \varphi = \varphi^3 \circ \psi$ , deste modo temos que  $\langle \varphi, \psi \rangle \cong D_4$  e  $\langle \varphi, \psi \rangle \leq \Gamma_C$  de ordem 8.

Considere o automorfismo  $\sigma$  em  $\mathbb{P}^1$  dado por  $\sigma([u : v]) = [u + iv : u - iv]$ , verifica-se que  $\sigma \in \Gamma_C$  e  $\text{ord}(\sigma) = 3$ . Temos que  $\Gamma_C = D_4^0 \dot{\cup} D_4^1 \dot{\cup} D_4^2$ , sendo  $D_4^0, D_4^1$  e  $D_4^2$  as classes laterais de  $id_{\mathbb{P}^1}, \sigma$  e  $\sigma^2$  no grupo quociente  $\frac{\Gamma_C}{\langle \varphi, \psi \rangle}$ . De fato:

$$D_4^0 = \{id, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \psi, \psi \circ \varphi, \psi \circ \varphi^2, \psi \circ \varphi^3\}.$$

$$D_4^1 = \{\sigma, \sigma \circ \varphi, \sigma \circ \varphi^2, \sigma \circ \varphi^3, \sigma \circ \psi, \sigma \circ \psi \circ \varphi, \sigma \circ \psi \circ \varphi^2, \sigma \circ \psi \circ \varphi^3\}.$$

$$D_4^2 = \{\sigma^2, \sigma^2 \circ \varphi, \sigma^2 \circ \varphi^2, \sigma^2 \circ \varphi^3, \sigma^2 \circ \psi, \sigma^2 \circ \psi \circ \varphi, \sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^2, \sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^3\}.$$

Note que cada elemento de  $\Gamma_C$  é representado da forma  $\sigma^I \circ \psi^J \circ \varphi^K$  sendo  $I \in \{0, 1, 2\}$ ,  $J \in \{0, 1\}$  e  $K \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

## 4.3 Descrição das retas determinadas pelos automorfismos em $\Gamma_C$

No que segue do texto vamos considerar  $\xi = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  raiz primitiva 6-ésima da unidade. Lembremos que se  $T([z : w]) = [\alpha z + \beta w : \gamma z + \delta w] \in \Gamma_C$  então existe  $u \in \mathbb{C}$

#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

---

tal que a reta  $\mathcal{M}_u = \begin{cases} x = u(\alpha z + \beta w) \\ y = u(\gamma z + \delta w) \end{cases}$  está contida em  $\mathcal{S}_6$ .

Além disso, após fixar  $u \in \mathbb{C}$  satisfazendo a condição acima, obtemos as seguintes 6 retas em  $\mathcal{S}_6$ :

$$\mathcal{M}_j = \begin{cases} x = \xi^j u(\alpha z + \beta w) \\ y = \xi^j u(\gamma z + \delta w) \end{cases}, \text{ tal que } 0 \leq j \leq 5.$$

O conjunto das retas contidas em  $\mathcal{S}_6$  determinadas pelos automorfismos em  $D_4^j$  será denotado por  $\mathcal{L}^j$  com  $j \in \{0, 1, 2\}$ . De fato, a partir dos resultados do Capítulo 2 temos que:

**Proposição 4.1.** Seja  $\mathcal{S}_6 = Z(f)$  com  $f = x_0x_1(x_0^4 - x_1) + x_2x_3(x_2^4 - x_3)$ . Verifica-se que  $\Upsilon(\mathcal{S}_6) = \mathcal{L}_\Phi \cup \mathcal{L}^0 \cup \mathcal{L}^1 \cup \mathcal{L}^2$ , sendo  $\mathcal{L}^i$  para  $i = 0, 1, 2$  o conjunto das retas determinadas pelos automorfismos em  $D_4^i$ .

#### $\boxed{\mathcal{L}^0}$ Retas determinadas pelos elementos de $D_4^0$

Temos  $D_4^0 = \{id, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \psi, \psi \circ \varphi, \psi \circ \varphi^2, \psi \circ \varphi^3\}$  com:

$$\begin{aligned} id([z : w]) &= [z : w], & \psi([z : w]) &= [w : z], \\ \varphi([z : w]) &= [iz : w], & \psi \circ \varphi([z : w]) &= [w : iz], \\ \varphi^2([z : w]) &= [-z : w], & \psi \circ \varphi^2([z : w]) &= [w : -z], \\ \varphi^3([z : w]) &= [-iz : w], & \psi \circ \varphi^3([z : w]) &= [w : -iz]. \end{aligned}$$

Para cada automorfismo acima podemos encontrar  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ . Por exemplo, se considerarmos  $T = id$  então existe  $u$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ , com:

$$\mathcal{M}_u = \begin{cases} x = uz \\ y = uw \end{cases}.$$

Se e somente se  $(u^6 - 1)zw(z^4 - w^4) = 0$ , o que ocorre se e somente se  $u^6 = 1$ . Procedendo de forma análoga com os demais automorfismos, obtemos:

$T$	$\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ se $u^6 =$	$I$	$J$	$K$
$id$	1	0	0	0
$\varphi$	$-i$	0	0	1
$\varphi^2$	-1	0	0	2
$\varphi^3$	$i$	0	0	3
$\psi$	-1	0	1	0
$\psi \circ \varphi$	$i$	0	1	1
$\psi \circ \varphi^2$	1	0	1	2
$\psi \circ \varphi^3$	$-i$	0	1	3

Tabela 4.1: Existência de  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$  e  $\mathcal{M}_u \in \mathcal{L}^0$

#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

Deste modo, usando valores de  $u \in \mathbb{C}$  escolhidos satisfazendo  $u^6 = a$ , com  $a$  indicado na 2ª coluna da Tabela 4.1 podemos obter as retas  $L_{JK}^0$  com  $J \in \{0, 1\}$ ,  $K \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $j \in \{0, \dots, 5\}$  da seguinte forma:

De fato, se considerarmos  $T = id$  e escolhermos  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $u^6 = 1$ , dai temos:

$$L_{00j}^0 = \begin{cases} x = \xi^j uz \\ y = \xi^j uw \end{cases} \text{ com } 0 \leq j \leq 5,$$

cujos pontos são da forma  $[\xi^j uz : \xi^j uw : z : w]$ . Segue que:  $L_{00j}^0 = \mathbb{P}(W_{00j}^0)$  com  $W_{00j}^0 = [(\xi^j u, 0, 1, 0), (0, \xi^j u, 0, 1)]$ . Procedendo de forma análoga com os demais automorfismos, concluímos que:

$$\mathcal{L}^0 = \{L_{00j}^0, L_{12j}^0, L_{01j}^0, L_{13j}^0, L_{02j}^0, L_{10j}^0, L_{03j}^0, L_{11j}^0\}_{j=0}^5, \text{ sendo:}$$

$$L_{0\alpha j}^0 \equiv \begin{bmatrix} i^\alpha \xi^j u_\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^j u_\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } u_\alpha^6 = (-i)^\alpha$$

$$L_{1\alpha j}^0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & i^\alpha \xi^j v_\alpha & 1 & 0 \\ \xi^j v_\alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } v_\alpha^6 = -(-i)^\alpha$$

com  $\alpha \in \{0, \dots, 3\}$  e  $j \in \{0, \dots, 5\}$ .

#### $\boxed{\mathcal{L}^1}$ Retas determinadas pelos elementos de $D_4^1$

Sabemos que  $D_4^1 = \{\sigma, \sigma \circ \varphi, \sigma \circ \varphi^2, \sigma \circ \varphi^3, \sigma \circ \psi, \sigma \circ \psi \circ \varphi, \sigma \circ \psi \circ \varphi^2, \sigma \circ \psi \circ \varphi^3\}$  onde:

$$\begin{aligned} \sigma([z : w]) &= [z + iw : z - iw], & \sigma \circ \psi([z : w]) &= [w + iz : w - iz], \\ \sigma \circ \varphi([z : w]) &= [z + w : z - w], & \sigma \circ \psi \circ \varphi([z : w]) &= [w - z : w + z], \\ \sigma \circ \varphi^2([z : w]) &= [z - iw : z + iw], & \sigma \circ \psi \circ \varphi^2([z : w]) &= [w - iz : w + iz], \\ \sigma \circ \varphi^3([z : w]) &= [z - w : z + w], & \sigma \circ \psi \circ \varphi^3([z : w]) &= [w + z : w - z]. \end{aligned}$$

Para cada automorfismo acima podemos encontrar  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ . Por exemplo, se considerarmos  $T = \sigma$  temos que  $T([z : w]) = [z + iw : z - iw]$  então existe  $u$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$  sendo:

$$\mathcal{M}_u = \begin{cases} x = u(z + iw) \\ y = u(z - iw) \end{cases}.$$

Sempre que  $i(8u^6 + i)zw(z - w)(z + w)(w^2 + z^2) = 0$ , o que ocorre se e somente se

#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

---

$u^6 = -\frac{i}{8}$ . De forma análoga fazemos isso para os demais automorfismos, obtemos:

$T$	$\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ se $u^6 =$	$I$	$J$	$K$
$\sigma$	$-i/8$	1	0	0
$\sigma \circ \varphi$	$1/8$	1	0	1
$\sigma \circ \varphi^2$	$i/8$	1	0	2
$\sigma \circ \varphi^3$	$-1/8$	1	0	3
$\sigma \circ \psi$	$i/8$	1	1	0
$\sigma \circ \psi \circ \varphi$	$1/8$	1	1	1
$\sigma \circ \psi \circ \varphi^2$	$-i/8$	1	1	2
$\sigma \circ \psi \circ \varphi^3$	$-1/8$	1	1	3

Tabela 4.2: Existência de  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$  e  $\mathcal{M}_u \in \mathcal{L}^1$

Deste modo, escolhendo  $u \in \mathbb{C}$  de modo que  $u^6 = a$  conforme a Tabela 4.2 podemos obter as retas em  $\mathcal{L}^1$  da seguinte forma:

Se considerarmos  $T = \sigma$  temos  $\sigma([z : w]) = [z + iw : z - iw]$ , e  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $u^6 = -\frac{i}{8}$  obtemos  $L_{00j}^1 \subset \mathcal{S}_6$  dada por:

$$L_{00j}^1 = \begin{cases} x = \xi^j u(z + iw) \\ y = \xi^j u(z - iw) \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq j \leq 5,$$

cujos pontos podem ser escritos na forma  $[\xi^j u(z + iw) : \xi^j u(z - iw) : z : w]$ . Segue que:  $L_{00j}^1 = \mathbb{P}(W_{00j}^1)$  com  $W_{00j}^1 = [(\xi^j u, \xi^j u, 1, 0), (\xi^j u i, -\xi^j u i, 0, 1)]$ . De forma análoga fazemos isso para os demais automorfismos e obtemos:

$$\mathcal{L}^1 = \{L_{00j}^1, L_{12j}^1, L_{01j}^1, L_{11j}^1, L_{02j}^1, L_{10j}^1, L_{03j}^1, L_{13j}^1\}_{j=0}^5, \text{ sendo}$$

$$L_{0\alpha j}^1 \equiv \begin{bmatrix} \xi^j u_\alpha & \xi^j u_\alpha & 1 & 0 \\ (-i)^{\alpha-1} \xi^j u_\alpha & (-i)^{\alpha+1} \xi^j u_\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } u_\alpha^6 = \frac{i^{\alpha-1}}{8}$$

$$L_{1\alpha j}^1 \equiv \begin{bmatrix} i^{\alpha+1} \xi^j v_\alpha & i^{\alpha-1} \xi^j v_\alpha & 1 & 0 \\ \xi^j v_\alpha & \xi^j v_\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } v_\alpha^6 = \frac{(-i)^{\alpha-1}}{8}$$

com  $\alpha \in \{0, \dots, 3\}$  e  $j \in \{0, \dots, 5\}$ .

#### $\boxed{\mathcal{L}^2}$ Retas determinadas pelos elementos de $D_4^1$

Sabemos que  $D_4^2 = \{\sigma^2, \sigma^2 \circ \varphi, \sigma^2 \circ \varphi^2, \sigma^2 \circ \varphi^3, \sigma^2 \circ \psi, \sigma^2 \circ \psi \circ \varphi, \sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^2, \sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^3\}$

#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

---

onde:

$$\begin{aligned}
\sigma^2([z : w]) &= [z + w : (z - w)(-i)], \\
\sigma^2 \circ \varphi([z : w]) &= [iz + w : z + iw], \\
\sigma^2 \circ \varphi^2([z : w]) &= [z - w : i(z + w)], \\
\sigma^2 \circ \varphi^3([z : w]) &= [-iz + w : -z + iw], \\
\sigma^2 \circ \psi([z : w]) &= [z + w : (z - w)i], \\
\sigma^2 \circ \psi \circ \varphi([z : w]) &= [w + iz : -iw - z], \\
\sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^2([z : w]) &= [w - z : (-i)(w + z)], \\
\sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^3([z : w]) &= [w - iz : -iw + z].
\end{aligned}$$

Para cada automorfismo acima podemos encontrar  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ . Por exemplo, se considerarmos  $T = \sigma^2$  temos que  $T([z : w]) = [z + w : (z - w)(-i)]$  então existe  $u$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$  com

$$\mathcal{M}_u = \begin{cases} x = u(z + w) \\ y = u(z - w)(-i) \end{cases}.$$

Sempre que  $i(8u^6 - i)zw(z - w)(z + w)(w^2 + z^2) = 0$ , o que ocorre se e somente se  $u^6 = \frac{i}{8}$ . De forma análoga fazemos isso para os demais automorfismos, obtemos:

$T$	$\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$ se $u^6 =$	$I$	$J$	$K$
$\sigma^2$	$i/8$	2	0	0
$\sigma^2 \circ \varphi$	$1/8$	2	0	1
$\sigma^2 \circ \varphi^2$	$-i/8$	2	0	2
$\sigma^2 \circ \varphi^3$	$-1/8$	2	0	3
$\sigma^2 \circ \psi$	$-i/8$	2	1	0
$\sigma^2 \circ \psi \circ \varphi$	$-1/8$	2	1	1
$\sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^2$	$i/8$	2	1	2
$\sigma^2 \circ \psi \circ \varphi^3$	$1/8$	2	1	3

Tabela 4.3: Existência de  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{S}_6$  e  $\mathcal{M}_u \in \mathcal{L}^2$

Deste modo, escolhendo  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $u^6 = a$  conforme a Tabela 4.3 podemos obter as retas de  $\mathcal{L}^2$  da seguinte forma:

Se considerarmos  $T = \sigma^2$  temos  $\sigma^2([z : w]) = [z + w : (z - w)(-i)]$ , e  $u \in \mathbb{C}$  tal que  $u^6 = \frac{i}{8}$ , daí temos:

$$L_{00j}^2 = \begin{cases} x = \xi^j u(z + w) \\ y = \xi^j u(z - w)(-i) \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq j \leq 5,$$

cujos pontos são da forma  $[\xi^j u(z + w) : \xi^j u(z - w)(-i) : z : w]$ .

Segue que:  $L_{00j}^2 = \mathbb{P}(W_{00j}^2)$  com  $W_{00j}^2 = [(\xi^j u, -i\xi^j u, 1, 0), (\xi^j u, i\xi^j u, 0, 1)]$ . De

forma análoga fazemos isso para os demais automorfismos, obtemos:

$$\mathcal{L}^2 = \{L_{00j}^2, L_{12j}^2, L_{01j}^2, L_{13j}^2, L_{02j}^2, L_{10j}^2, L_{03j}^2, L_{11j}^2\}_{j=0}^5, \text{ sendo,}$$

$$L_{0\alpha j}^2 \equiv \begin{bmatrix} i^\alpha \xi^j u_\alpha & i^{\alpha-1} \xi^j u_\alpha & 1 & 0 \\ \xi^j u_\alpha & i \xi^j u_\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } u_\alpha^6 = \frac{(-i)^{\alpha-1}}{8}$$

$$L_{1\alpha j}^2 \equiv \begin{bmatrix} i^\alpha \xi^j v_\alpha & i^{\alpha+1} \xi^j v_\alpha & 1 & 0 \\ \xi^j v_\alpha & -i \xi^j v_\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } v_\alpha^6 = \frac{(-i)^{\alpha+1}}{8}$$

com  $\alpha \in \{0, \dots, 3\}$  e  $j \in \{0, \dots, 5\}$ .

**Observações 4.1.** Considere  $\mathcal{L}^i = \bigcup L_{ab}^i$  sendo  $L_{ab}^i = \{L_{abk}^i \mid 0 \leq k \leq 5\}$  com  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Dizemos que  $L_{ab}^i$  e  $L_{cd}^j$  são disjuntas se para toda  $l \in L_{ab}^i$  e  $m \in L_{cd}^j$  verifica-se que  $l \cap m = \emptyset$ . Do contrário dizemos que elas não são disjuntas.

Para facilitar nosso estudo, no que segue do texto fixaremos os seguintes valores para  $u_\alpha$  e  $v_\alpha$ .

	$L_{0\alpha}^0$	$L_{1\alpha}^0$	$L_{0\alpha}^1$	$L_{1\alpha}^1$	$L_{0\alpha}^2$	$L_{1\alpha}^2$
$\alpha$	$u_\alpha$	$v_\alpha$	$u_\alpha$	$v_\alpha$	$u_\alpha$	$v_\alpha$
0	1	$i$	$\frac{i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{i^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{i^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$
1	$i^{\frac{1}{2}}$	$i^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$
2	$i$	1	$\frac{i^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\frac{i^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$
3	$i^{\frac{3}{2}}$	$i^{\frac{1}{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Tabela 4.4: Valores de  $u_\alpha$  e  $v_\alpha$  para  $\mathcal{L}^i$  com  $i \in \{0, 1, 2\}$

## 4.4 Estudando as intersecções

O nosso objetivo neste momento é estudar a intersecção entre as retas nas famílias  $\mathcal{L}^i$  e  $\mathcal{L}^j$  com  $0 \leq i \leq j \leq 2$ . De fato, verifica-se que se  $l = L_{\alpha\beta t}^i \in \mathcal{L}^i$  e  $m = L_{\alpha_1, \beta_1 k}^j \in \mathcal{L}^j$  forem determinadas por  $z_\beta, \omega_{\beta_1} \in \mathbb{C}$  com  $z_\beta \in \{u_\beta, v_\beta\}$  relativos a  $\mathcal{L}^i$  e  $\omega_{\beta_1} \in \{u_{\beta_1}, v_{\beta_1}\}$  relativo a  $\mathcal{L}^j$  na tabela 4.4 tem-se que:  $l \cap m \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{\xi^k \omega_{\beta_1}}{\xi^j z_\beta}$  for a solução de uma equação de grau 2 que descreveremos nas tabelas a seguir. (Usamos o pacote Maxima na determinação dessas equações).

4. Estimativas para  $r(\mathcal{S}_6)$

Intersecção	Equação
$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{0\beta k}^0$	$i^\alpha - (i^\alpha + i^\beta)x + i^\beta x^2 = 0$
$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^0$	$i^\alpha - i^\beta x^2 = 0$
$L_{1\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^0$	$-i^\alpha + (i^\alpha + i^\beta)x - i^\beta x^2 = 0$

Tabela 4.5: Intersecção das retas em  $\mathcal{L}^0$

Intersecção	Equação
$L_{0\alpha j}^1 \cap L_{0\beta k}^1$	$2i(-i)^\alpha - i((-i)^\alpha - (-i)^\beta)x + 2i(-i)^\beta x^2 = 0$
$L_{0\alpha j}^1 \cap L_{1\beta k}^1$	$2i(-i)^\alpha - ((-i)^{\alpha-1} - i^{\beta+1}(-i)^{\alpha+1})x - 2i^{\beta-1}x^2 = 0$
$L_{1\alpha j}^1 \cap L_{1\beta k}^1$	$-2i^{\alpha-1} - 2(i^{\alpha-1} + i^{\beta-1})x - 2i^{\beta-1}x^2 = 0$

Tabela 4.6: Intersecção das retas em  $\mathcal{L}^1$

Intersecção	Equação
$L_{0\alpha j}^2 \cap L_{0\beta k}^2$	$-2i^{\alpha-1} + 2(i^{\alpha-1} - i^{\beta-1})x - 2i^{\beta-1}x^2 = 0$
$L_{0\alpha j}^2 \cap L_{1\beta k}^2$	$i^{\alpha-1}(i-1) + (-2i^{\alpha-1} + i^\beta(i-1))x = 0$
$L_{1\alpha j}^2 \cap L_{1\beta k}^2$	$-2i^{\alpha+1} + 2(i^{\alpha-1} + i^{\beta+1})x - 2i^{\beta+1}x^2 = 0$

Tabela 4.7: Intersecção das retas em  $\mathcal{L}^2$

Intersecção	Equação
$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{0\beta k}^1$	$-2i(-i)^\beta x^2 - (1 + (-i)^{\beta+3\alpha+1})x + i^\alpha = 0$
$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^1$	$2i(i)^\beta x^2 - (i^\alpha + i^{\beta+1})x + i^\alpha = 0$
$L_{1\alpha j}^0 \cap L_{0\beta k}^1$	$-2i(-i)^\beta x^2 + (1 + i^{\alpha+1+3\beta})x - i^\alpha = 0$
$L_{1\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^1$	$2i(i)^\beta x^2 + (i^\alpha + (-i)i^\beta)x - i^\alpha = 0$

Tabela 4.8: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^0$  e  $\mathcal{L}^1$

Intersecção	Equação
$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{0\beta k}^2$	$2i(i)^\beta x^2 - (i^\beta + i^{\alpha+1})x + i^\alpha = 0$
$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^2$	$-2i^{\beta+1}x^2 - (i^\beta - i^{\beta+1})x + i^\alpha = 0$
$L_{1\alpha j}^0 \cap L_{0\beta k}^2$	$2i^{\beta+1}x^2 + (i^\alpha - i^{\beta+1})x - i^\alpha = 0$
$L_{1\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^2$	$-2i^{\beta+1}x^2 + (i^\alpha + i^{\beta+1})x - i^\alpha = 0$

Tabela 4.9: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^0$  e  $\mathcal{L}^2$

Intersecção	Equação
$L_{0\alpha j}^1 \cap L_{0\beta k}^2$	$2i^{\beta+1}x^2 + (1 - i + (1+i)i^\beta(-i)^\alpha)x - 2i(-i)^\alpha = 0$
$L_{0\alpha j}^1 \cap L_{1\beta k}^2$	$-2i^{\beta+1}x^2 + (1 + i + (i-1)i^\beta(-i)^\alpha)x - 2i(-i)^\alpha = 0$
$L_{1\alpha j}^1 \cap L_{0\beta k}^2$	$2i^{\beta+1}x^2 + (i^\alpha(1-i) + i^\beta(i+1))x + 2i^{\alpha+1} = 0$
$L_{1\alpha j}^1 \cap L_{1\beta k}^2$	$-2i^{\beta+1}x^2 + (i^\alpha(1+i) + i^\beta(1-i))x - 2i^{\alpha+1} = 0$

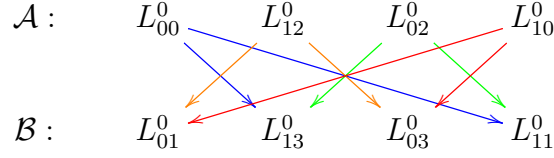
Tabela 4.10: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^1$  e  $\mathcal{L}^2$

**Observações 4.2.** No diagrama a seguir são indicadas pelas setas que saem de cada reta as famílias que não são disjuntas. Por exemplo,  $L_{00}^0$  não é disjunta de  $L_{13}^0$  e  $L_{11}^0$ .

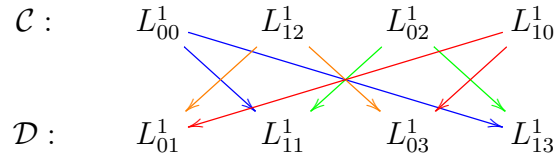
#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

Além disso, de agora em diante usaremos as partições:  $\mathcal{L}^0 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  e  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ .

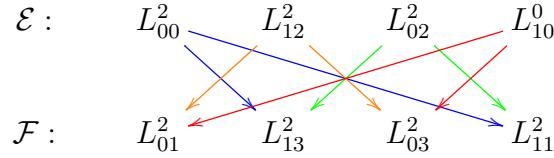
$\mathcal{L}^0$



$\mathcal{L}^1$



$\mathcal{L}^2$



**Lema 4.2.** Com as notações acima. Verifica-se que:

1. Para cada família  $L_{ab}^i$  existem exatamente duas famílias  $L_{a_1b_1}^i$  e  $L_{a_2b_2}^i$  que não são disjuntas de  $L_{ab}^i$ .
2. Se  $L_{ab}^i \cap L_{cd}^j \neq \emptyset$  então para cada reta  $l \in L_{ab}^i$  verifica-se que  $\#\{m \in L_{cd}^j \mid l \cap m \neq \emptyset\} = 2$ .

A demonstração do Lema acima segue do estudo das intersecções das retas em  $\mathcal{L}^i$  e  $\mathcal{L}^j$ .

**Proposição 4.3.** Verifica-se que  $L_{s\alpha j}^\nu \cap L_{s\alpha_1 j_1}^\nu = \emptyset$  para todo  $\nu \in \{0, 1, 2\}$ ,  $j, j_1 \in \{0, \dots, 5\}$ ,  $s \in \{0, 1\}$  e  $\alpha, \alpha_1 \in \{0, \dots, 3\}$  se e somente se  $\alpha \neq \alpha_1$ .

*Demonstração.* Vamos verificar a afirmação para  $\nu = 0$ , os outros casos são feitos de forma análoga.

Neste caso temos que:

$$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{0\alpha_1 j_1}^0 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{vmatrix} i^\alpha \xi^j u_\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^j u_\alpha & 0 & 1 \\ i^{\alpha_1} \xi^{j_1} u_{\alpha_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^{j_1} u_{\alpha_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = (i^\alpha \xi^j u_\alpha - i^{\alpha_1} \xi^{j_1} u_{\alpha_1})(\xi^j u_\alpha - \xi^{j_1} u_{\alpha_1}) = 0.$$

Isso ocorre se e somente se  $i^\alpha \xi^j u_\alpha = i^{\alpha_1} \xi^{j_1} u_{\alpha_1}$  ou  $\xi^j u_\alpha = \xi^{j_1} u_{\alpha_1}$ . Elevando essas igualdades à sexta potência obtemos  $i^\alpha = i^{\alpha_1}$  ou  $(-i)^\alpha = (-i)^{\alpha_1}$  o que ocorre se e somente se  $\alpha = \alpha_1$ . De maneira análoga, fazemos para  $s = 1$ .  $\square$

**Proposição 4.4.** Verifica-se que  $L_{0\alpha j}^\nu \cap L_{1\beta k}^\nu = \emptyset$  para todo  $\nu \in \{0, 1, 2\}$ ,  $j, k \in \{0, \dots, 5\}$  se e somente se  $\alpha$  e  $\beta$  tem a mesma paridade.

*Demonstração.* Vamos verificar a afirmação para  $\nu = 0$ , os outros casos são feitos de forma análoga.

Temos que:

$$L_{0\alpha j}^0 \cap L_{1\beta k}^0 \neq \emptyset \Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} i^\alpha \xi^j u_\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \xi^j u_\alpha & 0 & 1 \\ 0 & i^\beta \xi^k v_\beta & 1 & 0 \\ \xi^k v_\beta & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i^\alpha (\xi^j u_\alpha)^2 - i^\beta (\xi^k v_\beta)^2 = 0.$$

Isso ocorre se e somente se  $i^{\alpha-\beta} = \left(\frac{\xi^k v_\beta}{\xi^j u_\alpha}\right)^2$ . Elevando ao cubo e considerando que  $u_\alpha^6 = i^{3\alpha}$  e  $v_\beta^6 = i^{3\beta+2}$  concluímos que  $(-1)^{1+\beta-\alpha} = 1$  assim,  $1 + \beta - \alpha$  é par, logo  $\alpha$  e  $\beta$  tem paridades distintas.  $\square$

**Proposição 4.5.** Para cada  $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$  considere  $l \in L_{0\alpha}^\nu$  e  $x_{\alpha\beta}$  solução da 2ª equação nas tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 se  $\nu \in \{0, 1, 2\}$  respectivamente. Verifica-se que:

1.  $x_{\alpha\beta} \frac{u_\alpha}{v_\beta} \in \langle \xi \rangle$  com  $u_\alpha, v_\beta$  relativos a  $\mathcal{L}^\nu$  (na tabela 4.4)  $\Leftrightarrow \alpha$  e  $\beta$  tem paridades distintas.
2. Se  $\alpha$  e  $\beta$  tem paridades distintas e  $\xi^k = x_{\alpha\beta} \xi^j \frac{u_\alpha}{v_\beta}$  então  $L_{1\beta k}^\nu \cap l \neq \emptyset$  sendo  $l = L_{0\alpha j}^\nu$  e  $\{m \in L_{1\beta}^\nu \mid m \cap l \neq \emptyset\} = \{L_{1\beta k}^\nu, L_{1\beta k_1}^\nu\}$  com  $|k - k_1| = 3$ .

*Demonstração.* Vamos verificar as afirmações para  $\nu = 0$ , os outros casos são feitos de forma análoga.

1. Observe que  $(x_{\alpha\beta} \frac{u_\alpha}{v_\beta})^6 = i^{3(\alpha-\beta)} i^{3(\alpha-\beta)-2} = (-1)^{\alpha-\beta-1}$  pois  $x_{\alpha\beta}^2 = i^{\alpha-\beta}$ ,  $u_\alpha^6 = i^{3\alpha}$  e  $v_\beta^6 = i^{3\beta+2}$ . De onde concluímos que  $\alpha - \beta - 1$  é par (ou seja,  $\alpha$  e  $\beta$  tem paridades distintas) se, e somente se  $x_{\alpha\beta} \frac{u_\alpha}{v_\beta} \in \langle \xi \rangle$ .
2. Assuma que  $\xi^k = x_{\alpha\beta} \xi^j \frac{u_\alpha}{v_\beta}$ . Neste caso,  $\xi^{k-j} \frac{v_\beta}{u_\alpha}$  é solução da equação  $x^2 = i^{\alpha-\beta}$ . Portanto  $l \cap L_{1\beta k}^0 \neq \emptyset$  (veja tabela 4.5). Considere que a paridade  $\alpha$  e  $\beta$  de são distintas e seja  $m = L_{1\beta k}^0$  com  $k \in \{0, \dots, 5\}$  uma das retas que encontra  $l$ . A condição  $m \cap l \neq \emptyset$  implica que  $\xi^{k-j} \frac{v_\beta}{u_\alpha}$  é solução da equação  $x^2 = i^{\alpha-\beta}$ . Tendo em consideração que se  $x_{\alpha\beta}$  é uma das soluções então  $-x_{\alpha\beta} = \xi^3 x_{\alpha\beta}$  é outra solução, temos que:  $\{m \in L_{1\beta}^0 \mid m \cap l \neq \emptyset\} = \{L_{1\beta k}^0, L_{1\beta k_1}^0\}$  com  $|k - k_1| = 3$ .

$\square$

**Proposição 4.6.** Considere  $l = L_{0\alpha j}^\nu$  e  $l_1 = L_{0\alpha j_1}^\nu$  com  $\nu \in \{0, 1, 2\}$  e  $j \neq j_1$ . Para cada  $\beta$  tal que  $\alpha$  e  $\beta$  tem paridades distintas. Verifica-se:

$$\begin{cases} \{m \in L_{1\beta}^\nu \mid m \cap l \neq \emptyset\} = \{m \in L_{1\beta}^\nu \mid m \cap l_1 \neq \emptyset\} & \text{se } |j - j_1| = 3 \\ \{m \in L_{1\beta}^\nu \mid m \cap l \neq \emptyset\} \cap \{m \in L_{1\beta}^\nu \mid m \cap l_1 \neq \emptyset\} = \emptyset & \text{se } |j - j_1| \neq 3 \end{cases}$$

*Demonstração.* Vamos verificar a afirmação para  $\nu = 0$ , os outros casos são feitos de forma análoga.

Vamos analisar os dois casos:

$$\boxed{|j - j_1| = 3}$$

Suponhamos que  $j = j_1 + 3$ . Considere  $m = L_{1\beta k}^0$  e  $x_{\alpha\beta}$  uma das soluções da equação  $x^2 = i^{\alpha-\beta}$ . Sabemos que:

$$\begin{aligned} m \cap l &\Leftrightarrow \xi^{k-j} \frac{v_\beta}{u_\alpha} = x_{\alpha\beta} & \text{ou} & \xi^{k-j} \frac{v_\beta}{u_\alpha} = \xi^3 x_{\alpha\beta} \\ &\Leftrightarrow \xi^{k-j_1-3} \frac{v_\beta}{u_\alpha} = x_{\alpha\beta} & \text{ou} & \xi^{k-j_1-3} \frac{v_\beta}{u_\alpha} = \xi^3 x_{\alpha\beta} \\ &\Leftrightarrow \xi^{k-j_1} \frac{v_\beta}{u_\alpha} = \xi^3 x_{\alpha\beta} & \text{ou} & \xi^{k-j_1} \frac{v_\beta}{u_\alpha} = x_{\alpha\beta} \\ &\Leftrightarrow m \cap l_1 \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\boxed{|j - j_1| \neq 3}$$

Considere  $m = L_{1\beta k}^0$ . Suponha que  $m \cap l \neq \emptyset$  e  $m \cap l_1 \neq \emptyset$ . Assim,  $\xi^{k-j} \frac{v_\beta}{u_\alpha}$  e  $\xi^{k-j_1} \frac{v_\beta}{u_\alpha}$  são soluções da equação  $x^2 = i^{\alpha-\beta}$ . De onde concluímos que  $j = j_1$  ou  $|j - j_1| = 3$ .  $\square$

**Observações 4.3.** Considere  $\mu, \nu \in \{0, 1\}$ ,  $a, a_1 \in \{0, 1\}$  e  $\alpha, \alpha_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$  tais que  $L_{a\alpha}^\nu \cap L_{a_1\alpha_1}^\mu \neq \emptyset$ . Verifica-se que:

1. Fixadas 4 retas em  $L_{a\alpha}^\nu$  existem pelo menos 5 retas em  $L_{a_1\alpha_1}^\mu$  se  $\nu \neq \mu$ .
2. Se  $L_{a\alpha j_i}^0$  forem retas da família  $L_{a\alpha}^0$  que encontram exatamente 3 retas da família  $L_{a_1\alpha_1}^1$  dadas por  $L_{a_1\alpha_1 k_i}^0$ . Verifica-se que  $j_1, j_2, j_3$  tem a mesma paridade e  $\{k_1, k_2, k_3\} = \{0, \dots, 5\} - \{j_1, j_2, j_3\}$ .
3. Usando as equações (nas tabelas 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10) e os valores de  $u_\alpha$  e  $v_\alpha$  relativos a  $\mathcal{L}^\nu$  na tabela 4.4, para estudar as intersecções chegamos numa equação cujas raízes são potências de  $\xi$ . Abaixo descreveremos os resultados obtidos ao estudarmos a intersecção das famílias  $L_{00}^0$  e  $L_{00}^1$ , as demais foram feitas de maneira análoga e segue o mesmo raciocínio.

Queremos saber para quais valores de  $k, j$ , temos  $L_{00j}^0 \cap L_{00k}^1$  é não vazia. Como vimos acima, isso irá ocorrer quando  $\frac{\xi^k \omega_0}{\xi^j v_0}$  ( $\omega_0$  e  $v_0$  relativos a tabela 4.4) for a solução da equação  $-2ix^2 - (1 - i)x + 1 = 0$  (veja tabela 4.8). Isto é, quando

#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

---

$\xi^{k-j}$  for solução da equação  $1 + (i-1)\frac{i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\xi^{k-j} + \xi^{2(k-j)} = 0$ , cujas soluções são  $\xi$  e  $\xi^5$ . Segue que  $k-j = 1$  ou  $k-j = 5$ . Assim,

$$\begin{array}{ll} j = 0 & \Rightarrow k \in \{1, 5\}. \\ j = 1 & \Rightarrow k \in \{2, 0\}. \\ j = 2 & \Rightarrow k \in \{3, 1\}. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} j = 3 & \Rightarrow k \in \{4, 2\}. \\ j = 4 & \Rightarrow k \in \{3, 5\}. \\ j = 5 & \Rightarrow k \in \{0, 4\}. \end{array}$$

Salientamos que essas contas foram feitas para cada família, no entanto omitiremos as mesmas, por ser mais uma parte técnica que segue o mesmo raciocínio apresentado acima.

**Teorema 4.7.** *Notações como na Proposição 4.1. Verifica-se que:*

1.  $r(\mathcal{L}_\Phi) = 6$ .
2.  $r(\mathcal{L}^i) = 24$ .
3.  $r(\mathcal{L}_\Phi \cup \mathcal{L}^i) = 30$  para  $i = 0, 1, 2$ .
4.  $r(\mathcal{L}^i \cup \mathcal{L}^j) = 32$ .
5.  $r(\mathcal{S}_6) = 48$ .

*Demonstração.* 1. Ver Corolário 3.2 no Capítulo 2.

2.  $\boxed{i = 0}$

No que segue  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  indicam a união das retas listadas na 1ª e 2ª linhas. Conforme indicado no diagrama a seguir.

$$\mathcal{A} : \quad L_{00}^0 \quad L_{12}^0 \quad L_{02}^0 \quad L_{10}^0$$

$$\mathcal{B} : \quad L_{01}^0 \quad L_{13}^0 \quad L_{03}^0 \quad L_{11}^0$$

Salientamos, que também nos referimos a  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  como uma lista ordenada ou ciclo.

Seja  $C \subset \mathcal{L}^0$  formado por retas duas a duas disjuntas.

**Caso 1:** Existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^0) \geq 5$ . Neste caso, temos três possibilidades para a cardinalidade de uma família  $L_{\alpha_1, \beta_1}^0$  que antecede ou procede  $L_{\alpha, \beta}^0$ .

- Para alguma delas (antecessor ou sucessor)  $\#(C \cap L_{\alpha_1, \beta_1}^0) \geq 5$ . Neste caso Concluímos que  $C \cap \mathcal{B} = \emptyset$ .

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{cccc} \square & L_{\alpha\beta}^0 & \square & \square \\ \square & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Logo  $\#C \leq 24$ .

- Caso contrário, ambas (antecessor ou sucessor) tem cardinalidade menor ou igual a 4. Suponha que alguma delas satisfaz  $\#(C \cap L_{\alpha_1\beta_1}^0) \geq 3$ .

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & L_{\alpha\beta}^0 & 4 & 6 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Logo  $\#C \leq 24$ .

- Caso contrário, a família que antecede e a que precede, verificam  $\#(C \cap L_{\alpha_1\beta_1}^0) \leq 2$ .

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & L_{\alpha\beta}^0 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Logo  $\#C \leq 24$ .

**Caso 2:** Para todo  $\alpha, \beta$   $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^0) \leq 4$ . Neste caso temos duas possibilidades, a saber:  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^0) \leq 2$  para todo  $\alpha, \beta$ , logo  $\#C \leq 16$  ou existe  $\alpha$  e  $\beta$ , tal que  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^0) \geq 3$ . Dai temos as seguintes possibilidades para a cardinalidade de uma família  $L_{\alpha\beta_1}^0$  que antecede ou procede  $L_{\alpha\beta}^0$ :

- Para alguma delas verifica-se que  $\#(C \cap L_{\alpha_1\beta_1}^0) \geq 3$ , logo  $\#C \leq 24$ .
- Para ambas verifica-se que  $\#(C \cap L_{\alpha_1\beta_1}^0) \leq 2$ , logo  $\#C \leq 24$ .

Os casos para  $i = 1$  e  $i = 2$ , deixaremos a cargo do leitor, vale salientar que segue o mesmo raciocínio que  $i = 0$ .

3. Seja  $C \subset \mathcal{L}_\Phi \cup \mathcal{L}^i$  formado por retas duas a duas disjuntas. Temos que  $C = C_\Phi \cup C_i$  onde  $C_\Phi = \mathcal{L}_\Phi \cap C$  e  $C_i = \mathcal{L}^i \cap C$ , deste modo temos que  $\#C = \#C_\Phi + \#C_i \leq 30$ . Neste momento vamos exibir  $C \subset \mathcal{L}_\Phi \cup \mathcal{L}^i$  para cada  $i = 0, 1, 2$  com  $\#C = 30$  para concluir a igualdade. Salientamos que as escolhas das retas em  $C$  decorrem das informações nas Tabelas 4.11, 4.12 e 4.13, respectivamente para  $i = 0, 1, 2$ . No que segue citaremos as famílias  $\mathcal{B}, \mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  na observação 4.2.

$i = 0$

Já sabemos que as retas  $\{L_{AQ_1}, L_{BQ_3}, L_{P_1C}, L_{P_3D}\}$  são disjuntas de todas as retas de  $\mathcal{L}^0$ . Note que as retas  $L_{P_0Q_0}$  e  $L_{P_2Q_2}$  são duas a duas disjuntas da lista  $\mathcal{B}$ , assim temos que  $\{L_{AQ_1}, L_{BQ_3}, L_{P_1C}, L_{P_3D}, L_{P_0Q_0}, L_{P_2Q_2}\} \cup \mathcal{B}$  é formado por 30 retas duas a duas disjuntas.

$i = 1$

Já sabemos que as retas  $\{L_{AC}, L_{BD}, L_{P_0Q_0}, L_{P_2Q_2}\}$  são disjuntas de todas as

retas de  $\mathcal{L}^1$ . Note que as retas  $L_{P_1Q_1}$  e  $L_{P_3Q_3}$  são duas a duas disjuntas da lista  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{D}$ , assim temos que  $\{L_{AC}, L_{BD}, L_{P_0Q_0}, L_{P_2Q_2}, L_{P_1Q_1}, L_{P_3Q_3}\} \cup \mathcal{C}$  ou  $\{L_{AC}, L_{BD}, L_{P_0Q_0}, L_{P_2Q_2}, L_{P_1Q_1}, L_{P_3Q_3}\} \cup \mathcal{D}$  é formado por 30 retas duas a duas disjuntas.

$i = 2$

Já sabemos que as retas  $\{L_{AC}, L_{BD}, L_{P_1Q_1}, L_{P_3Q_3}\}$  são disjuntas de todas as retas de  $\mathcal{L}^2$ . Note que as retas  $L_{P_0Q_0}$  e  $L_{P_2Q_2}$  são duas a duas disjuntas da lista  $\mathcal{E}$ , assim temos que  $\{L_{AC}, L_{BD}, L_{P_1Q_1}, L_{P_3Q_3}, L_{P_0Q_0}, L_{P_2Q_2}\} \cup \mathcal{E}$  é formado por 30 retas duas a duas disjuntas.

Logo,  $r(\mathcal{L}_\Phi \cup \mathcal{L}^i) = 30$  para  $i = 0, 1, 2$ .

4. Mostraremos que  $r(\mathcal{L}^0 \cup \mathcal{L}^1) = 32$ . Deixaremos os outros casos a cargo do leitor. Seja  $C \subseteq \mathcal{L}^0 \cup \mathcal{L}^1$  formado por retas duas a duas disjuntas. Temos que  $C = (C \cap \mathcal{L}^0) \dot{\cup} (C \cap \mathcal{L}^1)$ . Se  $C \cap \mathcal{L}^i = \emptyset$  para algum  $i \in \{0, 1\}$  então  $\#C \leq 24$ . Assim vamos assumir que  $C \cap \mathcal{L}^i \neq \emptyset$  para  $i \in \{0, 1\}$ .

**Caso 1:** Existe  $\alpha, \beta, \nu$  tal que  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^\nu) \geq 5$ .

Sem perda de generalidade assuma que  $\alpha = \beta = \nu = 0$ , ou seja,  $\#(C \cap L_{00}^0) \geq 5$ . Neste caso as retas em  $C \cap L_{00}^0$  encontram todas as retas de  $\mathcal{L}^1 - (L_{03}^1 \dot{\cup} L_{13}^1)$ . Seja  $x = \#(C \cap L_{03}^1)$  e  $y = \#(C \cap L_{13}^1)$ . No diagrama a seguir são indicadas a contagem das retas em  $C \cap L_{\alpha,\beta}^\nu$  para  $\nu = 0, 1$ .

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \geq 5 & \square & \square & \square \\ \hline \square & 0 & \square & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x & y \\ \hline \end{array}$$

A seguir faremos a estimada para  $\#C$ , a partir da análise dos valores de  $x$  e  $y$ .

- $x \geq 4$  ou  $y \geq 4$ . Sem perda de generalidade assuma que  $x \geq 4$  (o quadrado em branco indica que seu cardinal vai depender das cardinalidades indicadas nos quadrados da 1ª e 3ª colunas da 2ª linha no diagrama de  $\mathcal{L}^0$ ). Neste caso, as retas em  $C \cap L_{03}^1$  encontram pelo menos 4 retas em cada família  $L_{\mu\nu}^0$  com  $(\mu, \nu) \notin \{(0, 0), (1, 2)\}$ . Assim, temos no máximo a seguinte quantidade de retas.

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \geq 5 & \square & 2 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Segue que  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 20$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 12$ . Portanto,  $\#C \leq 32$ .

- $x \leq 3$  ou  $y \leq 3$ .

Nesse caso, pelo item 2 (nesse Teorema) temos que  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 24$ . Como  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 6$ . Concluimos que,  $\#C \leq 30$ .

**Caso 2:** Para todo  $\alpha, \beta, \nu$  temos que  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^\nu) \leq 4$ .

Seguindo o raciocínio do caso 1, assuma que  $\#(C \cap L_{00}^0) = 4$ . Temos duas possibilidades:

- (a) Existem três retas  $L_{00j_t}^0$  em  $C \cap L_{00}^0$  com  $t \in \{1, 2, 3\}$  tais que  $j_1, j_2, j_3$  tem a mesma paridade. Neste caso as 4 retas em  $C \cap L_{00}^0$  vão interceptar no mínimo 5 retas dos pacotes  $L_{\mu\nu}^1$  com  $(\mu, \nu) \notin \{(0, 3), (1, 3)\}$ . Assim temos:

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & \square & \square & \square \\ \hline \square & 0 & \square & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & x & y \\ \hline \end{array}$$

A seguir, para o cálculo de  $\#C$ , vamos analisar os possíveis valores para  $x$  e  $y$  (sendo  $x, y \leq 4$ ).

- $x = 4$  ou  $y = 4$ . Neste caso as retas em  $C \cap L_{03}^1$  se  $x = 3$ ,  $C \cap L_{13}^1$  se  $y = 4$  encontram pelo menos 4 retas nos pacotes  $L_{\alpha\beta}^0$  se  $(\alpha, \beta) \notin \{(0, 0), (1, 2)\}$ .

Assim temos :

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & \leq 4 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Nesse caso temos que  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 16$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 14$ . Portanto,  $\#C \leq 30$ .

- $x \leq 3$  e  $y \leq 3$ . Se  $x = 3$  (ou  $y = 3$ ) temos que  $\#(L_{\alpha\beta}^0 \cap C)$  é no máximo

3 se  $(\alpha, \beta) \notin \{(0, 0), (1, 2)\}$ . Assim:

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & 3 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Nesse caso temos que  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 18$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 12$ . Portanto,  $\#C \leq 30$ .

- $x \leq 2$  e  $y \leq 2$ . Neste caso, se  $x = 2$  (ou  $y = 2$ ) verifica-se que  $\#(L_{\alpha\beta}^0 \cap C)$  é no máximo 4 se  $(\alpha, \beta) \notin \{(0, 0), (1, 2)\}$ . Temos assim,

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & \leq 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Logo  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 20$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 10$ . Portanto,  $\#C \leq 30$ .

- $x = 1$  ou  $y = 1$ . Temos a seguinte estimativa,

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & \leq 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Assim,  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 20$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 8$ . Portanto,  $\#C \leq 28$ .

- (b) Não existem três retas  $L_{00j_t}^0$  em  $C \cap L_{00}^0$  com  $t \in \{1, 2, 3\}$  tais que  $j_1, j_2, j_3$  tem a mesma paridade. Neste caso temos que:

$C \cap L_{00}^0 = \{L_{00j_1}^0, L_{00j_2}^0, L_{00j_3}^0, L_{00j_4}^0\}$  com  $j_1, j_2$  pares e  $j_3, j_4$  ímpares a menos de reordenação. Neste caso verifica-se que as retas encontram todas as retas de 4 pacotes  $L_{\mu\nu}^1$  (neste caso os da 1ª linha no diagrama de  $\mathcal{L}^1$ ) e 4 retas dos outros dois pacotes (na 2ª linha do diagrama de  $\mathcal{L}^1$ ), como

ilustramos a seguir.

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & 2 & & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Novamente, vamos estimar  $\#C$  a partir do estudo dos possíveis valores para  $x$  e  $y$  ( $x, y \leq 4$ ).

- $x = 4$  ou  $y = 4$ . Temos:

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Assim,  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 20$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 12$ . Portanto,  $\#C \leq 32$ .

- $x = 3$  ou  $y = 3$ . Temos:

$$\mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Assim,  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 22$  e  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 10$ . Portanto,  $\#C \leq 32$ .

- $x \leq 2$  ou  $y \leq 2$ . Neste caso, podemos usar o fato que  $\#(C \cap \mathcal{L}^0) \leq 24$  e tendo em consideração que as retas de  $\mathcal{L}^1 \cap C$  então distribuídas como ilustra o diagrama.

$$\mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & x & y \\ \hline \end{array}$$

Temos que  $\#(C \cap \mathcal{L}^1) \leq 8$ . Portanto,  $\#C \leq 32$ .

**Caso 3:** Para todo  $\alpha, \beta, \nu$  temos que  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^\nu) \leq 3$ .

Deixamos a cargo do leitor essa verificação, salientamos que segue o mesmo raciocínio, colocando a devida atenção na paridade dos índices das retas em  $L_{00}^0 \cap C$ .

#### 4. Estimativas para $r(\mathcal{S}_6)$

---

**Caso 4:** Para todo  $\alpha, \beta, \nu$  temos que  $\#(C \cap L_{\alpha\beta}^\nu) \leq 2$ . Neste caso temos cada pacote tem duas retas no máximo, assim  $\#C \leq 32$ .

Para concluir que  $r(\mathcal{L}^0 \cup \mathcal{L}^1) = 32$  é suficiente observar que na demonstração do próximo item vamos apresentar 48 retas duas a duas disjuntas em  $\mathcal{S}_6$  das quais 16 pertencem a cada  $\mathcal{L}^i$  para  $i = 0, 1, 2$ . Portanto, temos 32 duas retas duas a duas disjuntas em  $\mathcal{L}^0 \cup \mathcal{L}^1$

5. Pela cota de Miayoka dada em [8] temos que  $r(S) \leq 2d(d - 2)$  se  $S$  for uma superfície não singular de grau  $d$ , assim para  $d = 6$  temos  $r(S) \leq 48$ . Através do Software MAXIMA mostramos que as 48 retas apresentadas abaixo são duas a duas disjuntas.

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{L}^0 : \begin{array}{|c|} \hline L_{000}^0 \\ \hline L_{003}^0 \\ \hline L_{012}^0 \\ \hline L_{015}^0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{120}^0 \\ \hline L_{123}^0 \\ \hline L_{132}^0 \\ \hline L_{135}^0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{020}^0 \\ \hline L_{023}^0 \\ \hline L_{032}^0 \\ \hline L_{035}^0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{100}^0 \\ \hline L_{103}^0 \\ \hline L_{112}^0 \\ \hline L_{115}^0 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathcal{L}^1 : \begin{array}{|c|} \hline L_{000}^1 \\ \hline L_{003}^1 \\ \hline L_{012}^1 \\ \hline L_{015}^1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{120}^1 \\ \hline L_{123}^1 \\ \hline L_{112}^1 \\ \hline L_{115}^0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{020}^1 \\ \hline L_{023}^1 \\ \hline L_{032}^1 \\ \hline L_{035}^1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{100}^1 \\ \hline L_{103}^1 \\ \hline L_{132}^1 \\ \hline L_{135}^1 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathcal{L}^2 : \begin{array}{|c|} \hline L_{000}^2 \\ \hline L_{003}^2 \\ \hline L_{012}^2 \\ \hline L_{015}^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{120}^2 \\ \hline L_{123}^2 \\ \hline L_{132}^2 \\ \hline L_{135}^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{020}^2 \\ \hline L_{023}^2 \\ \hline L_{032}^2 \\ \hline L_{035}^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline L_{100}^2 \\ \hline L_{103}^2 \\ \hline L_{112}^2 \\ \hline L_{115}^2 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Deste modo, concluímos que  $r(\mathcal{S}_6) = 48$ .

□

4.4.1 Tabelas: intersecção das retas de  $\mathcal{L}_\Phi$ ,  $\mathcal{L}^0$ ,  $\mathcal{L}^1$  e  $\mathcal{L}^2$

	$L_{00k}^0$	$L_{12k}^0$	$L_{01k}^0$	$L_{13k}^0$	$L_{02k}^0$	$L_{10k}^0$	$L_{03k}^0$	$L_{11k}^0$
$L_{AC}$	Não	Disj	Não	Disj	Não	Disj	Não	Disj
$L_{AD}$	Disj	Não	Disj	Não	Disj	Não	Disj	Não
$L_{AQ_I}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{BC}$	Disj	Não	Disj	Não	Disj	Não	Disj	Não
$L_{BD}$	Não	Disj	Não	Disj	Não	Disj	Não	Disj
$L_{BQ_I}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{P_I C}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{P_I D}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{P_I Q_I}$	Não $1 = i^{I-J}$	Não $-1 = i^{I+J}$	Não $i = i^{I-J}$	Não $i = i^{I+J}$	Não $-1 = i^{I-J}$	Não $1 = i^{I+J}$	Não $-i = i^{I-J}$	Não $-i = i^{I+J}$

Tabela 4.11: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^0$  e  $\mathcal{L}_\Phi$

	$L_{00k}^1$	$L_{12k}^1$	$L_{01k}^1$	$L_{11k}^1$	$L_{02k}^1$	$L_{10k}^1$	$L_{03k}^1$	$L_{13k}^1$
$L_{AC}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{AD}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{AQ_I}$	I=1 - Não	I=1 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=3 - Não	I=3 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não
	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj
$L_{BC}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{BD}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{BQ_I}$	I=3 - Não	I=3 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=1 - Não	I=1 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não
	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj
$L_{P_I C}$	I=0 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não
	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj
$L_{P_I D}$	I=2 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não
	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj
$L_{P_I Q_I}$	$p = i$ $q = 1$	$p = -i$ $q = 1$	$p = -1$ $q = i$	$p = i$ $q = -i$	$p = -i$ $q = 1$	$p = i$ $q = 1$	$p = i$ $q = i$	$p = i$ $q = i$
	$p = i$ $q = 1$	$p = -i$ $q = 1$	$p = -1$ $q = i$	$p = i$ $q = -i$	$p = -i$ $q = 1$	$p = i$ $q = 1$	$p = i$ $q = i$	$p = i$ $q = i$
	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não

Tabela 4.12: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^1$  e  $\mathcal{L}_\Phi$

	$L_{00k}^2$	$L_{12k}^2$	$L_{01k}^2$	$L_{13k}^2$	$L_{02k}^2$	$L_{10k}^2$	$L_{03k}^2$	$L_{11k}^2$
$L_{AC}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{AD}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{AQ_I}$	I=0 - Não	I=2 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não	I=2 - Não	I=0 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não
	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$3 \neq 0$ - Disj
$L_{BC}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{BD}$	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj	Disj
$L_{BQ_I}$	I=2 - Não	I=0 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não	I=0 - Não	I=2 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não
	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 0$ - Disj	$I \neq 2$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj
$L_{P_1C}$	I=1 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não
	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj
$L_{P_1D}$	I=3 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não	I=3 - Não	I=1 - Não
	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj	$I \neq 3$ - Disj	$I \neq 1$ - Disj
$L_{P_1Q_I}$	$p = 1$ $q = i$	$p = 1$ $q = i$	$p = q = 1$	$p = q = 1$	$p = 1$ $q = -i$	$p = 1$ $q = -i$	$p = 1$ $q = -1$	$p = 1$ $q = -1$
	$p = -1$ $q = -i$	$p = -1$ $q = -1$	$p = q = -1$	$p = q = -1$	$p = -1$ $q = i$	$p = -1$ $q = i$	$p = -1$ $q = -1$	$p = -1$ $q = 1$
	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não

Tabela 4.13: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^2$  e  $\mathcal{L}_\Phi$

4. Estimativas para  $r(\mathcal{S}_6)$

	$L_{00k}^0$	$L_{12k}^0$	$L_{01k}^0$	$L_{13k}^0$	$L_{02k}^0$	$L_{10k}^0$	$L_{03k}^0$	$L_{11k}^0$
$L_{00j}^0$	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não
$L_{12j}^0$	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj
$L_{01j}^0$	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj
$L_{13j}^0$	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj
$L_{02j}^0$	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não
$L_{10j}^0$	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj
$L_{03j}^0$	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj
$L_{11j}^0$	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj

Tabela 4.14: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^0$

	$L_{00k}^1$	$L_{12k}^1$	$L_{01k}^1$	$L_{11k}^1$	$L_{02k}^1$	$L_{10k}^1$	$L_{03k}^1$	$L_{13k}^1$
$L_{00j}^1$	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não
$L_{12j}^1$	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj
$L_{01j}^1$	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj
$L_{11j}^1$	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj
$L_{02j}^1$	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não
$L_{10j}^1$	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj
$L_{03j}^1$	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj
$L_{13j}^1$	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj

Tabela 4.15: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^1$

	$L_{00k}^2$	$L_{12k}^2$	$L_{01k}^2$	$L_{13k}^2$	$L_{02k}^2$	$L_{10k}^2$	$L_{03k}^2$	$L_{11k}^2$
$L_{00j}^2$	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não
$L_{12j}^2$	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj
$L_{01j}^2$	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj
$L_{13j}^2$	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj
$L_{02j}^2$	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não
$L_{10j}^2$	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj
$L_{03j}^2$	Disj	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj
$L_{11j}^2$	Não	Disj	Disj	Disj	Não	Disj	Disj	Disj

Tabela 4.16: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^2$

	$L_{00k}^0$	$L_{12k}^0$	$L_{01k}^0$	$L_{13k}^0$	$L_{02k}^0$	$L_{10k}^0$	$L_{03k}^0$	$L_{11k}^0$
$L_{00j}^1$	Não	Não	Disj	Disj	Não	Não	Não	Não
$L_{12j}^1$	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Disj	Disj
$L_{01j}^1$	Não	Não	Não	Não	Disj	Disj	Não	Não
$L_{11j}^1$	Não	Não	Não	Não	Disj	Disj	Não	Não
$L_{02j}^1$	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Disj	Disj
$L_{10j}^1$	Não	Não	Disj	Disj	Não	Não	Não	Não
$L_{03j}^1$	Disj	Disj	Não	Não	Não	Não	Não	Não
$L_{13j}^1$	Disj	Disj	Não	Não	Não	Não	Não	Não

Tabela 4.17: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^0$  e  $\mathcal{L}^1$

4. Estimativas para  $r(\mathcal{S}_6)$

---

	$L_{00k}^0$	$L_{12k}^0$	$L_{01k}^0$	$L_{13k}^0$	$L_{02k}^0$	$L_{10k}^0$	$L_{03k}^0$	$L_{11k}^0$
$L_{00j}^2$	Não	Não	Não	Disj	Não	Não	Disj	Não
$L_{12j}^2$	Não	Não	Não	Disj	Não	Não	Disj	Não
$L_{01j}^2$	Disj	Não	Não	Não	Não	Disj	Não	Não
$L_{13j}^2$	Disj	Não	Não	Não	Não	Disj	Não	Não
$L_{02j}^2$	Não	Não	Disj	Não	Não	Não	Não	Disj
$L_{10j}^2$	Não	Não	Disj	Não	Não	Não	Não	Disj
$L_{03j}^2$	Não	Disj	Não	Não	Disj	Não	Não	Não
$L_{11j}^2$	Não	Disj	Não	Não	Disj	Não	Não	Não

Tabela 4.18: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^0$  e  $\mathcal{L}^2$

	$L_{00k}^1$	$L_{12k}^1$	$L_{01k}^1$	$L_{11k}^1$	$L_{02k}^1$	$L_{10k}^1$	$L_{03k}^1$	$L_{13k}^1$
$L_{00j}^2$	Não	Não	Disj	Não	Não	Não	Não	Disj
$L_{12j}^2$	Não	Não	Não	Disj	Não	Não	Disj	Não
$L_{01j}^2$	Não	Não	Não	Não	Disj	Disj	Não	Não
$L_{13j}^2$	Disj	Disj	Não	Não	Não	Não	Não	Não
$L_{02j}^2$	Não	Não	Não	Disj	Não	Não	Disj	Não
$L_{10j}^2$	Não	Não	Disj	Não	Não	Não	Não	Disj
$L_{03j}^2$	Disj	Disj	Não	Não	Não	Não	Não	Não
$L_{11j}^2$	Não	Não	Não	Não	Disj	Disj	Não	Não

Tabela 4.19: Intersecção entre as retas de  $\mathcal{L}^1$  e  $\mathcal{L}^2$

# Apêndice A

## Geometria Algébrica

### A.1 Grasmaniana

**Definição A.1.** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $N$  sobre  $\mathbb{K}$ . Para cada  $d$  inteiro  $0 \leq d \leq N$  definimos a grasmaniana de subespaços de dimensão  $d$  de  $V$  ou  $d$ -grasmaniana, que denotaremos por  $G_d(V)$  por:

$$G_d(V) = \{W \mid W \leq V \text{ e } \dim W = d\}.$$

Deste modo temos que,  $G_0(V) = \{\{0\}\}$  e  $G_1(V)$  é formado pelas retas em  $V$  passando pela origem.

### A.2 Projetivização de $V$

**Definição A.2.** A projetivização de  $V$  que denotaremos por  $\mathbb{P}(V)$  é o conjunto formado pelos subespaços de dimensão 1 de  $V$ , ou seja  $\mathbb{P}(V) = G_1(V)$ .

**Notações:**

- Se  $V = \mathbb{K}^{n+1}$  então  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ .
- Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  usaremos a notação  $\mathbb{P}^n$  em lugar de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

**Observações A.1.** 1. Cada elemento de  $\mathbb{P}(V)$  é dado por  $[v]$  com  $v \neq 0$  em  $V$ , onde  $[v] = \{\lambda v \in V \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$  o subespaço gerado por  $v$  em  $V$ . Assim,  $\mathbb{P}(V) = \{[v] \mid v \in V, v \neq 0\}$ .

2. Se  $[v]$  e  $[w] \in \mathbb{P}(V)$  então  $[v] = [w]$  se e somente se  $w = \lambda v$  para algum  $\lambda \neq 0$  em  $\mathbb{K}$  se e somente se  $v$  e  $w$  são linearmente dependentes.

3. Defina a seguinte relação em  $V - \{0\}$ :

$$u \sim v \iff v = \lambda u \text{ para algum } \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{K}.$$

Note que  $\sim$  define uma relação de equivalência em  $V - \{0\}$ . E a classe de equivalência associada a  $v \neq 0$  em  $V$  é dada por:

$$\bar{v} = \{\lambda v | \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{K}\} = [v] - \{0\}.$$

Verifica-se que:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow V - \{0\} / \sim \\ [v] &\longmapsto \bar{v} \end{aligned}$$

é uma bijeção.

4. Se  $u = (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  não nulo, então usamos a notação  $[u_0 : u_1 : \dots : u_n]$  em lugar de  $[u]$ . Neste caso  $u_0, \dots, u_n$  são chamadas coordenadas homogêneas de  $[u]$ . Essas coordenadas não são únicas. De fato, são determinadas a menos de múltiplos escalares.

**Exemplo A.1.** Considere  $[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1$ . Temos duas possibilidades:  $u_1 = 0$  ou  $u_1 \neq 0$ . De fato:

- Se  $u_1 = 0$  então  $[u_0 : u_1] = [u_0 : 0] = [\frac{1}{u_0} \cdot u_0 : \frac{1}{u_0} \cdot 0] = [1 : 0]$ .
- Se  $u_1 \neq 0$  então  $[u_0 : u_1] = [\frac{u_0}{u_1} : 1] = [\alpha : 1]$  onde  $\alpha = \frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{C}$ .

Assim,  $\mathbb{P}^1 = \{[\alpha : 1] | \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}$ .

## A.2.1 Polinômios Homogêneos

**Definição A.3.** Se  $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  então para cada  $d \geq 0$  inteiro,  $S_d$  denota o subespaço de  $S$  gerado pelos monômios  $x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$  com  $i_0 + \dots + i_n = d$ , cada  $i_j$  é um inteiro não negativo. Os elementos de  $S_d$  são chamados de polinômios homogêneos. Se  $F \in S_d$  e é não nulo então será chamado de polinômio homogêneo de grau  $d$ .

**Exemplo A.2.** Se  $R = \mathbb{C}[x_0, x_1]$  então  $R_0 = [1] = \mathbb{C}$ ,  $R_1 = [x_0, x_1]$ ,  $R_2 = [x_0^2, x_0x_1, x_1^2]$ , ...,  $R_d = [x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_0x_1^{d-2}, x_1^d]$ . Assim,  $\dim R_d = d + 1$ . No caso geral, se  $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  então verifica-se  $\dim S_d = \binom{n+d}{d} = \binom{n+d}{n}$ .

**Fato A.1.** Seja  $F \in S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  e  $d \geq 0$  inteiro. Verifica-se que:  $F \in S_d \iff F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{C}$ .

### A.3 Zeros de um polinômio homogêneo em $\mathbb{P}^n$

**Definição A.4.** Se  $F \in S_d$  então  $Z(F) = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid F(v) = 0\}$  é denominado conjunto dos zeros de  $F$  em  $\mathbb{P}^1$ .

Note que o  $Z(F)$  está bem definido pois para cada  $w \neq 0$  em  $[v] \in Z(F)$  temos que  $w = \lambda v$  com  $\lambda \neq 0$  em  $\mathbb{C}$ . Logo,  $F(w) = F(\lambda v) = \lambda^d F(v) = \lambda^d \cdot 0 = 0$ .

**Exemplo A.3.** Seja  $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$  homogêneo.

- Se  $F = 0$  então:  $Z(F) = \mathbb{P}^1$
- Se  $F = 1$  então  $Z(1) = \emptyset$ .
- Se  $F = b_0 x_0 + b_1 x_1 \neq 0$  então:  $Z(F) = \{[a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1 \mid b_0 a_0 + b_1 a_1 = 0\}$ .

Note que:

$$\begin{aligned}
 b_0 a_0 + b_1 a_1 = 0 &\iff \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff (a_0, a_1) \text{ e } (-b_1, b_0) \text{ são LD} \\
 &\iff (a_0, a_1) = \lambda(-b_1, b_0) \text{ com } \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{C} \\
 &\iff [a_0 : a_1] = [-b_1 : b_0]
 \end{aligned}$$

Assim,  $Z(b_0 x_0 + b_1 x_1) = \{[-b_1 : b_0]\}$ .

**Fato A.2.** Seja  $F \neq 0 \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$  homogêneo de grau  $d \geq 1$ . Então existem:

$$[a_1 : b_1], [a_2 : b_2], \dots, [a_d : b_d] \in \mathbb{P}^1$$

não necessariamente distintos tais que:

$$F = (a_1 x_0 - b_1 x_1)(a_2 x_0 - b_2 x_1) \dots (a_d x_0 - b_d x_1).$$

A demonstração do fato acima é feita por indução no grau  $d$ .

- Se  $d = 1$  o resultado é válido.
- Suponhamos que o resultado seja válido para  $d = k$  e mostremos que o resultado vale para  $d = k + 1$ .

Seja  $F = a_0 x_0^{k+1} + a_1 x_0^k x_1 + a_2 x_0^{k-1} x_1^2 + \dots + a_{k+1} x_1^{k+1}$  um polinômio homogêneo de grau  $d + 1$ . Temos dois casos para analisar:

1.  $a_{k+1} = 0$

Neste caso  $F = x_0G$ , onde  $G = a_0x_0^k + \dots + a_kx_1^k$ . Como  $G \in R_k$  segue da hipótese de indução que  $G$  pode ser representado por um produto de polinômios homogêneos de grau 1 em  $\mathbb{C}[x_0, x_1]$ . Logo,  $F$  também será um produto de fatores homogêneos de grau 1.

2.  $a_{k+1} \neq 0$

Consideremos  $f(x_1) = F(1, x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{k+1}x_1^{k+1}$ . Segue do Teorema Fundamental da Álgebra que existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  raiz de  $f(x_1)$ . Assim,  $f(\alpha) = F(1, \alpha) = 0$ . Considere  $L = x_1 - \alpha x_0 \in R_1$ . Assim aplicando o algoritmo da divisão temos:

$$F = (x_1 - \alpha x_0).Q + R \quad Q \in \mathbb{C}[x_0, x_1] \text{ e } R \in \mathbb{C}[x_0]$$

segue que:

$$F(\lambda, \lambda\alpha) = R(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \neq 0$$

desde que  $F(\lambda, \lambda\alpha) = \lambda^d F(1, \alpha) = 0$ . Assim,  $R = 0$  e  $F = (x_1 - \alpha x_0).Q$  com  $Q \in R_k$ . O que conclui a prova do fato acima.

## A.4 Conjuntos Algébricos

**Definição A.5.** Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{P}^n$ . Dizemos que  $X$  é um conjunto algébrico projetivo, ou simplesmente um conjunto algébrico, se existir uma quantidade finita de polinômios homogêneos em  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  digamos  $F_1, \dots, F_k$  tais que:  $X = Z(F_1) \cap \dots \cap Z(F_k)$ .

Usaremos a notação  $Z(F_1, \dots, F_k)$  em lugar de  $Z(F_1) \cap \dots \cap Z(F_k)$ . Se  $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  for um ideal homogêneo, isto é possui um conjunto finito de geradores homogêneos  $F_1, \dots, F_k$  definimos  $Z(I) = Z(F_1, \dots, F_k)$ . Observe que a definição de  $Z(I)$  não depende da escolha destes geradores.

**Exemplo A.4.** • Os conjuntos algébricos de  $\mathbb{P}^1$  são  $\mathbb{P}^1, \emptyset$  e os subconjuntos finitos de pontos.

- Se  $P = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$  então  $\{P\}$  é um conjunto algébrico em  $\mathbb{P}^n$ .

Vamos analisar o caso em que  $a_0 \neq 0$ . Seja  $f = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n \in S_1$ .

Se  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$  então  $b_0a_0 + b_1a_1 + \dots + b_n a_n = 0$ . Então podemos escrever:

$$b_0 = -\frac{b_1}{a_0}a_1 - \frac{b_2}{a_0}a_2 - \dots - \frac{b_n}{a_0}a_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^n b_i x_i = \left[ -\frac{b_1}{a_0} a_1 - \frac{b_2}{a_0} a_2 - \dots - \frac{b_n}{a_0} a_n \right] x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \\ &= b_1 \left( x_1 - \frac{a_1}{a_0} x_0 \right) + b_2 \left( x_2 - \frac{a_2}{a_0} x_0 \right) + \dots + b_n \left( x_n - \frac{a_n}{a_0} x_0 \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\{[a_0 : a_1 : \dots : a_n]\} = Z(a_0 x_1 - a_1 x_0, \dots, a_0 x_n - a_n x_0).$$

De maneira geral,

$$\{[a_0 : a_1 : \dots : a_n]\} = Z(a_i x_1 - a_1 x_i, \dots, a_i x_n - a_n x_i) \quad \text{se } a_i \neq 0.$$

**Definição A.6.** Seja  $F \in S_d$  com  $d \geq 1$  for não nulo, então  $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$  é denominada hipersuperfície.

**Definição A.7.** Uma hipersuperfície  $S \subset \mathbb{P}^3$  tem grau  $d$  se existir  $F \in S_d$  não nulo e livre de quadrado, (isto é  $\langle F \rangle = \sqrt{\langle F \rangle} \subset S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ), tal que  $S = Z(F)$ .

**Observações A.2.** A seguir listamos algumas denominações específicas usadas para uma hipersuperfície  $S$  de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$ .

- $S$  é chamado de hiperplano, se  $d = 1$ . Os hiperplanos em  $\mathbb{P}^3$  são denominados de planos.
- $S$  é chamada curva projetiva plana, se  $n = 2$ .
- $S$  é chamado de superfície, se  $n = 3$ . Em relação ao grau da superfície elas recebem as denominações de superfície quádrlica, superfície cúbica, superfície quártica, se  $d = 2, 3$  e  $4$  respectivamente.

**Fato A.3.** Existe uma bijeção de  $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^3$  com  $F \neq 0$  homogêneo de grau 1 e o plano projetivo.

De fato, basta observar que se  $F = a_0 x_0 + \dots + a_3 x_3$  um destes coeficientes é não nulo, digamos  $a_3$ , então podemos escrever portanto a variável  $x_3$  em função das outras. Assim todo ponto de  $Z(F)$  é da forma:

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \left[ x_0, x_1, x_2, \frac{-a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2}{a_3} \right].$$

Deste modo podemos definir:

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow Z(F) \\ [x_0, x_1, x_2] &\longmapsto \left[ x_0, x_1, x_2, \frac{-a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2}{a_3} \right]. \end{aligned}$$

Verifica-se que  $\zeta$  é uma bijeção entre  $\mathbb{P}^2$  e  $Z(F)$ .

**Definição A.8.** Seja  $l \subset \mathbb{P}^n$ , com  $n \geq 2$ , dizemos que  $l$  é uma reta projetiva se existirem  $L_1, \dots, L_{n-1}$  polinômios homogêneos de grau 1 e linearmente independentes de modo que  $l = Z(L_1, \dots, L_{n-1})$ .

**Observações A.3.** Se  $n \geq 3$  segue da definição que uma reta é dada pela interseção de  $n - 1$  hiperplanos.

Considere  $\mathbb{C}^{n+1}$  como espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{C}$  e  $(\mathbb{C}^{n+1})^* = \{f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é } \mathbb{C}\text{-linear}\}$  seu espaço dual. E considere o isomorfismo linear dado por:

$$\begin{aligned} T : (\mathbb{C}^{n+1})^* &\longrightarrow S_1 = [x_0, \dots, x_n] \\ \sum_{j=0}^n b_j e_j^* &\longmapsto \sum_{j=0}^n b_j x_j \end{aligned}$$

sendo  $\alpha^* = \{e_0^*, \dots, e_n^*\}$  base dual de  $(\mathbb{C}^{n+1})^*$  associada a base canônica  $\alpha = \{e_0, \dots, e_n\}$ .

**Proposição A.1.** Seja  $l \subset \mathbb{P}^n$  um conjunto algébrico com  $n \geq 2$ . Verifica-se que:

$$l \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^n \iff \exists W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1}) \text{ tal que } l = \mathbb{P}(W).$$

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Temos que  $l = Z(L_1, \dots, L_{n-1}) \subset \mathbb{P}^n$  sendo  $\{L_1, \dots, L_{n-1}\} \subset S_1$  linearmente independente, temos assim que,  $\{L_1^*, \dots, L_{n-1}^*\}$  sendo  $L_i^* = T^{-1}(L_i)$  conjunto linearmente independente em  $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ . Seja  $U = [L_1^*, \dots, L_{n-1}^*] \leq (\mathbb{C}^{n+1})^*$  temos que  $\dim U = n - 1$ . Considere  $U^0 = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid L_i^*(v) = 0, i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ , o anulador de  $U$  em  $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ . Sabe-se que  $\dim U + \dim U^0 = \dim \mathbb{C}^{n+1}$ , segue que  $\dim U^0 = 2$ . Afirmamos que  $l = Z(L_1, \dots, L_{n-1}) = \mathbb{P}(U^0)$ . De fato, temos que:

$$\begin{aligned} p \in l &\iff p = [v] \in l \text{ onde } v = (v_0, \dots, v_n) \\ &\iff L_i(v) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ &\iff \sum_{j=0}^n b_{ij} v_j = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \text{ se } L_i = \sum_{j=0}^n b_{ij} x_j \\ &\iff L_i^*(v) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ &\iff v \in U^0 \\ &\iff [v] \in \mathbb{P}(U^0). \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Considere  $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^n$  com  $W \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ . Considere o anulador  $W^0 = \{f \in (\mathbb{C}^{n+1})^* \mid f(w) = 0 \ \forall w \in W\}$  o anulador de  $W$ . Sabemos que  $\dim W + \dim W^0 = \dim \mathbb{C}^{n+1} = n + 1$  segue que  $\dim W^0 = n - 1$ . Além disso vale que  $(W^0)^0 = W$ . Seja  $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$  uma base de  $W^0$ , considere  $L_i = T(f_i)$  com  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ . Vamos mostrar que  $\mathbb{P}(W) = Z(L_1, \dots, L_{n-1})$ . De fato, como  $L_1, \dots, L_{n-1} \in S_1$  são linearmente independentes temos que  $Z(L_1, \dots, L_{n-1})$  é uma reta em  $\mathbb{P}^n$ . De fato:

$$\begin{aligned} [w] \in \mathbb{P}(W) &\iff f_i(w) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n - 1\} \\ &\iff L_i(w) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n - 1\} \\ &\iff [w] \in Z(L_1, \dots, L_{n-1}). \end{aligned}$$

□

**Observações A.4.** Vale destacar que:

1. Dados  $p \neq q \in \mathbb{P}^n$  existe uma única reta contendo  $p$  e  $q$ .

De fato, temos que  $p = [u]$  e  $q = [v]$  com  $u$  e  $v$  linearmente independentes. Assim podemos consideramos  $W = [u, v] \in G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ , logo  $l = \mathbb{P}(W)$  é uma reta contendo  $p$  e  $q$ .

2. Considere  $l = \mathbb{P}(W)$  uma reta em  $\mathbb{P}^3$  tal que  $W = [u, v]$ . Verifica-se que:

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow l = \mathbb{P}(W) \\ [\alpha, \beta] &\longmapsto [\alpha u + \beta v] \end{aligned}$$

é um bijeção.

De fato:

- $\phi$  é injetiva

Dados  $[\alpha, \beta]$  e  $[\gamma, \delta] \in \mathbb{P}^1$  tais que  $\phi([\alpha, \beta]) = \phi([\gamma, \delta])$ , segue que  $\alpha u + \beta v = \lambda(\gamma u + \delta v)$  com  $\lambda \neq 0$ , de onde concluímos que  $\alpha = \lambda \gamma$  e  $\beta = \lambda \delta$  (pois  $u$  e  $v$  são linearmente independentes). Segue que,  $[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta]$ , isto é  $\phi$  é injetiva.

- $\phi$  é sobrejetiva

Dado  $[w] \in \mathbb{P}(W)$ , segue que  $w = \alpha u + \beta v$  com  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$  (pois  $w \neq 0$ ). Assim  $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$  e  $\phi([\alpha, \beta]) = [w]$ . Segue que  $\phi$  é sobrejetiva.

**Fato A.4.** Sejam  $l$  e  $m$  retas em  $\mathbb{P}^2$  com  $l \neq m$ . Então  $l \cap m \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* De fato, denotemos  $l = P(W_1)$  e  $m = P(W_2)$  com  $W_1$  e  $W_2 \in G_2(\mathbb{C}^3)$ . Observemos que  $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 0$  pois caso contrário teríamos que  $\dim W_1 + \dim W_2 = 4$  o que não pode ocorrer (pois  $W_1 + W_2 \leq \mathbb{C}^3$ ). Desse modo, temos que existe  $u \in W_1 \cap W_2$  não nulo, segue que  $[u] \in l \cap m$ , como queríamos. □

**Definição A.9.** Se  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  então  $\mathcal{I}(X) = \langle \{F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid F \text{ é homogêneo e } F(p) = 0 \text{ para todo } p \in X\} \rangle$  é chamado de ideal associado a  $X$ .

**Observações A.5.** Sendo  $X, X_1$  subconjuntos de  $\mathbb{P}^n$  e  $I, I_1$  ideais. As seguintes propriedades são válidas:

1. Se  $X \subset X_1$  então  $\mathcal{I}(X_1) \subset \mathcal{I}(X)$ .
2. Se  $I \subset I_1$  então  $Z(I_1) \subset Z(I)$ .
3.  $\mathcal{I}(X \cup X_1) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(X_1)$ .
4.  $I \subset \mathcal{I}(Z(I))$ .
5.  $X \subset Z(\mathcal{I}(X))$ .
6.  $Z(\mathcal{I}(X)) = \bar{X}$ .

**Teorema A.2.** [Zeros de Hilbert] Seja  $\mathbb{K}$  um corpo algebricamente fechado e  $I$  um ideal homogêneo próprio em  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ . Então  $\mathcal{I}(Z(I)) = \sqrt{I}$ .

*Demonstração.* Ver Teorema 9, pág. 384 em [6]. □

**Proposição A.3.** Sejam  $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^3$ ,  $F \neq 0$  homogêneo de grau  $d \geq 1$  e  $l = Z(L_1, L_2) \subset \mathbb{P}^3$  uma reta. Então:

$$l \subset X \Leftrightarrow F = AL_1 + BL_2 \quad \text{para algum } A, B \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3].$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $l = Z(L_1, L_2) \subset X = Z(F)$ . Segue que  $\mathcal{I}(l) = \mathcal{I}(Z(L_1, L_2)) \supseteq \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Z(F))$ . Deste modo pelo Teorema A.2 temos que  $\sqrt{\langle L_1, L_2 \rangle} \supseteq \sqrt{\langle F \rangle}$ . Mas  $\langle L_1, L_2 \rangle$  é um ideal primo assim,  $\sqrt{\langle L_1, L_2 \rangle} = \langle L_1, L_2 \rangle$ . Logo  $F \in \langle L_1, L_2 \rangle$ , isto é  $F = AL_1 + BL_2$ , como queríamos.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $f = AL_1 + BL_2$  com  $A$  e  $B$  polinômios homogêneos. Assim dado  $p \in l$  temos que  $L_1(p) = 0$  e  $L_2(p) = 0$  segue que  $F(p) = 0$ . Logo,  $p \in X = Z(F)$  □

**Definição A.10.** Dizemos que uma hipersuperfície  $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$  é não singular se  $Z(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}) = \emptyset$ .

**NOTAÇÃO:** Seja  $S = Z(F)$  uma hipersuperfície, denotaremos o conjunto de todos seus pontos singulares por  $Sing(S)$ .

**Exemplo A.5.** Seja  $F = x_0^2 + x_1^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ . Calculando as derivadas parciais obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 2x_0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0.$$

Assim,  $Sing(Z(F)) = Z(x_0, x_1)$  é uma reta em  $\mathbb{P}^3$ . Note que podemos fatorar  $F$ , isto é, podemos escrever  $F = x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$ . Assim,  $Z(F) = Z(x_0 + ix_1) \cup Z(x_0 - ix_1)$  é a união de dois planos cuja interseção é o conjunto dos pontos singulares.

**Exemplo A.6.** Seja  $F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ . Calculando as derivadas parciais obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i \quad \forall \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Assim,

$$Sing(Z(F)) = Z(x_0, x_1, x_2, x_3) = \emptyset.$$

Segue que  $Z(F)$  é não singular.

## A.5 Mudanças de Coordenadas Projetivas em $\mathbb{P}^n$

**Definição A.11.** Uma função  $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é chamada de Mudança de Coordenadas Projetivas (MCP) se existe  $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  isomorfismo  $\mathbb{C}$ -linear tal que  $\varphi([v]) = [T(v)] \quad \forall [v] \in \mathbb{P}^n$ .

**Exemplo A.7.** Considere o plano  $H = Z(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)$  em  $\mathbb{P}^3$  existe uma Mudança de Coordenadas Projetivas, digamos  $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  tal que  $\varphi(H) = Z(x_0)$ .

Note que  $H = \mathbb{P}(W)$  com  $W = \{(v_0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^4 \mid a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0\}$  de dimensão 3. Considere  $\alpha = \{w_1, w_2, w_3\}$  base de  $W$  e  $\beta = \{v, w_1, w_2, w_3\}$  base de  $\mathbb{C}^4$ . Além disso considere o isomorfismo linear determinado por:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ v &\longmapsto e_0 \\ w_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

para  $i=1,2,3$ .

Considere  $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  a MCP determinada por  $T$ , isto é,  $\varphi([u]) = [T(v)] \quad \forall [u] \in \mathbb{P}^3$ .

Afirmção:  $\varphi(H) = Z(x_0)$ .

Observe inicialmente que  $Z(x_0) = \mathbb{P}(U)$  com  $U = [e_1, e_2, e_3]$ . Considere  $p \in \varphi(H)$ . Segue que:

$$\begin{aligned} p \in \varphi(H) &\Rightarrow p = \varphi([w]) \quad \text{para algum } w \in W, \quad w \neq 0 \\ &\Rightarrow p = [T(w)] \quad \text{com } T(w) \in U \quad \text{pois } T(W) = U \\ &\Rightarrow p \in \mathbb{P}(U) = Z(x_0). \end{aligned}$$

Analogamente, seja  $p \in Z(x_0)$ . Temos que:

$$\begin{aligned}
 p \in Z(x_0) &\Rightarrow p \in \mathbb{P}(U) \\
 &\Rightarrow p = [u] \text{ para algum } u \neq 0 \\
 &\Rightarrow p = [T(w)] \text{ com } w \in W \text{ tal que } T(w) = u \\
 &\Rightarrow p = \varphi([w]) \text{ com } w \in W \\
 &\Rightarrow p \in \varphi(H) \text{ pois } H = \mathbb{P}(W).
 \end{aligned}$$

De maneira análoga com o que fizemos no Exemplo acima é possível mostrar que dada uma reta  $l \subset \mathbb{P}^3$  existe uma Mudança de Coordenadas Projetivas tal que  $\varphi(l) = Z(x_0, x_1)$ , para isso basta completar uma base, agora com dois vetores, e seguir o mesmo raciocínio.

Neste trabalho  $Aut(\mathbb{P}^n)$  denota o conjunto formado pelas MCP em  $\mathbb{P}^n$ , ou seja:

$$Aut(\mathbb{P}^n) = \{\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \mid \varphi \text{ é uma Mudança de Coordenadas Projetivas}\}.$$

**Observações A.6.** [1]  $Aut(\mathbb{P}^n)$  é um grupo com a composição de funções.

[2] Toda Mudança de Coordenadas Projetivas leva conjuntos algébricos em conjuntos algébricos.

De fato, considere a ação pela esquerda do grupo  $Aut(\mathbb{C}^{n+1})$  no conjunto  $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  dada por:  $(T, F) \mapsto T_{\bullet}F$  com  $T \in Aut(\mathbb{C}^{n+1})$ ,  $F \in S$  sendo que  $T_{\bullet}F \in S$  é definida por  $T_{\bullet}F(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$ .

Deste modo, dado  $F \in S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Considere  $\varphi \in Aut(\mathbb{P}^n)$  definida por  $T \in Aut(\mathbb{C}^{n+1})$ . Verifica-se que  $\varphi(Z(F)) = Z(T_{\bullet}F) \subset \mathbb{P}^n$ . De fato:

$$\begin{aligned}
 \varphi(Z(F)) &= \{\varphi([v]) \in \mathbb{P}^n \mid [v] \in Z(F)\} \\
 &= \{[T(v)] \in \mathbb{P}^n \mid F(v) = 0\} \\
 &= \{[w] \in \mathbb{P}^n \mid F(T^{-1}w) = 0\} \\
 &= \{[w] \in \mathbb{P}^n \mid T_{\bullet}F(w) = 0\} \\
 &= Z(T_{\bullet}F).
 \end{aligned}$$

De maneira geral, se  $X = Z(F_1, \dots, F_l) \subset \mathbb{P}^n$  então  $\varphi(X) = Z(T_{\bullet}F_1, \dots, T_{\bullet}F_l)$ .

[3] Toda Mudança de Coordenadas Projetivas preserva singularidades.

De fato, sejam  $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$  uma MCP e  $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$  com  $F \in S$  então:

$$p \in Sing(X) \iff \varphi(p) \in Sing(\varphi(X)).$$

Sabemos que  $Sing(X) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \ \forall \ i \in \{0, \dots, n\}\}$  e como  $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$  é uma MCP existe  $T \in Aut(\mathbb{C}^{n+1})$  tal que  $\varphi([v]) = [T(v)] \ \forall \ [v] \in \mathbb{P}^n$ . Além disso,  $\varphi(X) = \varphi(Z(F)) = Z(T_\bullet F)$  com  $T_\bullet F \in S$  tal que  $T_\bullet F(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$ . Note que:  $T_\bullet F = F \circ T^{-1} : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ . Assim,

$$d(T_\bullet F)_q = dF(T^{-1}(q)) \cdot dT^{-1}(q).$$

$$\left[ \frac{\partial T_\bullet F}{\partial x_0}(q) \dots \frac{\partial T_\bullet F}{\partial x_n}(q) \right] = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_0}(T^{-1}(q)) \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}(T^{-1}(q)) \right] [T^{-1}].$$

Deste modo, dado  $p = [v] \in Sing(X)$  então  $\varphi(p) = [T(v)] = q \in Sing(\varphi(X)) = Sing(Z(T_\bullet F))$ . Segue que  $\varphi(p) \in Sing(\varphi(X))$ .

Analogamente, usando  $\varphi^{-1}$  em lugar de  $\varphi$  mostra-se a outra implicação.

**[4]** Se  $p_1, \dots, p_{n+2}$  e  $q_1, \dots, q_{n+2}$  são pontos em posição geral em  $\mathbb{P}^n$  então existe uma única MCP  $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$  tal que  $\varphi(p_i) = q_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n+2$ .

Lembremos que os pontos  $p_1, \dots, p_{n+2}$  de  $\mathbb{P}^n$  dados por  $p_i = [v_i]$  para cada  $i \in \{1, \dots, n+2\}$  estão em posição geral em  $\mathbb{P}^n$  se para quaisquer subconjunto de  $\{p_1, \dots, p_{n+2}\}$  formado por exatamente  $n+1$  pontos, verifica-se que os vetores que representam esses pontos ( $v_i$  é um representante de  $p_i$ ) formam uma base de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Temos que  $p_i = [v_i]$  e  $q_i = [u_i]$  para cada  $i \in \{1, \dots, n+2\}$ . Temos que cada subconjunto de  $\{p_1, \dots, p_{n+2}\}$  e  $\{q_1, \dots, q_{n+2}\}$  com  $n+1$  elementos determina uma base de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Suponhamos sem perda de generalidade que:

$$v_{n+2} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n+1} v_{n+1} \quad \text{e} \quad w_{n+2} = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n+1} w_{n+1}$$

Como  $\{\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_{n+1} v_{n+1}\}$  e  $\{\beta_1 w_1, \dots, \beta_{n+1} w_{n+1}\}$  são bases de  $\mathbb{C}^{n+1}$  existe um único isomorfismo tal que  $T(\alpha_i v_i) = \beta_i w_i$ . Logo  $\varphi \in Aut \mathbb{P}^n$  definida por  $T$  satisfaz  $\varphi(p_i) = q_i$ .

**Definição A.12.** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos algébricos projetivos em  $\mathbb{P}^n$ . Dizemos que  $X$  e  $Y$  são projetivamente equivalentes se existe uma Mudança de Coordenadas Projetivas  $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$  tal que  $\varphi(X) = Y$ .

**Lema A.4.** Sejam  $X$  e  $X_1$  superfícies não singulares em  $\mathbb{P}^3$  e projetivamente equivalentes. Verifica-se que  $\Upsilon(X)$  e  $\Upsilon(Y)$  estão em bijeção.

*Demonstração.* Considere  $\varphi \in Aut(\mathbb{P}^3)$  determinada por  $T \in Aut(\mathbb{C}^4)$  tal que  $\varphi(X) = X_1$ . Defina:

$$\begin{aligned} \psi : \Upsilon(X) &\longrightarrow \Upsilon(X_1) \\ l &\longmapsto \varphi(l) \end{aligned}$$

Sendo  $\varphi^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ , definimos:

$$\begin{aligned} \phi : \Upsilon(X_1) &\longrightarrow \Upsilon(X) \\ m &\longmapsto \varphi^{-1}(l) \end{aligned}$$

Verificamos que  $\phi$  é a inversa de  $\psi$ . Logo  $\psi$  é uma bijeção. □

**Observações A.7.** Além de termos a identificação de retas de  $X$  com as retas de  $X_1$ , sob Mudanças de Coordenadas Projetivas (pois são bijeções) temos que também preservam pares de retas concorrentes ou disjuntas.

**Proposição A.5.** Sejam  $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  definidos por  $T, S \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$  respectivamente. Verifica-se que:

$$\varphi = \psi \iff T = \lambda S \text{ para algum } \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{C}$$

**Proposição A.6.** Sejam  $C = \{p_1, p_2, p_3\}$  e  $D = \{q_1, q_2, q_3\}$  subconjuntos de  $\mathbb{P}^1$  contendo exatamente 3 elementos. Existe um único  $T \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  tal que  $T(p_i) = q_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

## A.6 Retas em $\mathbb{P}^3$

**Proposição A.7.** Sejam  $p$  e  $q \in \mathbb{P}^3$  pontos distintos. Então existe uma única reta passando por esses dois pontos a qual denotaremos por  $l_{p,q}$ .

**Proposição A.8.** Sejam  $l_1$  e  $l_2$  retas distintas em  $\mathbb{P}^3$ . Se  $l_i = \mathbb{P}(W_i)$  com  $W_i \in G_2(\mathbb{C}^4)$  para  $i = 1, 2$ . As seguintes afirmações são válidas:

1.  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \iff \dim(W_1 + W_2) = 3$ . Neste caso existe um único plano em  $\mathbb{P}^3$  contendo  $l_1$  e  $l_2$ , sendo este dado por  $\mathbb{P}(W_1 + W_2)$ . Este plano será denotado por  $\langle l_1, l_2 \rangle$ .
2.  $l_1 \cap l_2 = \emptyset \iff W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^4$ . Neste caso não existe plano em  $\mathbb{P}^3$  contendo  $l_1$  e  $l_2$ .

*Demonstração.* 1. Observemos que se  $l_1 \cap l_2 = \{p\}$  então  $p = [u]$  com  $u \in W_1 \cap W_2$ . Sendo  $l_1 \neq l_2$ , temos que  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$  e portanto  $\dim(W_1 + W_2) = 3$ . Assim  $H = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$  é um plano contendo  $l_1$  e  $l_2$ . Para a unicidade denotaremos por  $\pi$  outro plano em  $\mathbb{P}^3$  que contém  $l_1$  e  $l_2$ . Assim, temos que  $\pi = \mathbb{P}(U)$  sendo  $U$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}^4$  de dimensão 3, além disso  $W_1 + W_2 \subset U$ . Portanto  $H = \pi$ .

2. Uma vez que  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , então temos que  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ . Assim,  $\dim(W_1 + W_2) = 4$  pois  $W_i \in G_2(\mathbb{C}^4)$  e o resultado segue.

□

**Proposição A.9.** Seja  $S \subseteq \mathbb{P}^3$  superfície de grau  $d$  e considere uma reta  $l \subseteq \mathbb{P}^3$  então  $l \subseteq S$  ou  $\#l \cap S \leq d$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] ASSIS, C.F.C., *As 27 retas sobre uma superfície cúbica não singular*. Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2004.
- [2] BARTH, W. AND NIETO, I. *Abelian surfaces of type (1,3) and quartic surfaces with 16 skew lines*. Alg. Geom. vol.3, p. 173-222, 1994.
- [3] BOISSIÉRE, S. & SARTI, A. *Counting Lines on Surfaces*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, vol. 6, n.1. p. 2-10, 2007.
- [4] CAYLEY, A., *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*. The Cambridge and Dublin Math., v.4, p. 118-132, 1849.
- [5] GODEAUX, L. *Sur la surface du quatrieme ordre contenant trente-deux droites*. Bull. Acad. Roy. Belg. vol.25, p. 539-552, 1939.
- [6] COX, D., LITTLE, J. & O'SHEA, D., *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer, New York, 3a Ed., 2006.
- [7] LIRA, D. S. DE. *Sobre o número máximo de retas duas a duas disjuntas em superfícies não singulares em  $\mathbb{P}^3$* . Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2017.
- [8] MIYAOKA, Y. *The Maximal Number of Quotient Singularities on Surfaces with given Numerical Invariants*. Mathematische Annalen vol.268, p. 159-172, 1984.
- [9] NIKULIN V.V. *On Kummer surfaces*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., No.2, vol. 39, p. 278-293, 1975.
- [10] RAMS, S. *Projective surfaces with many skew lines*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 133, n.1, p. 11-13, 2005.
- [11] SILVA, S.A.V., *Sobre o número máximo de retas em superfícies de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^3$* . Dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2016.
- [12] SCHUR, F. *Ueber eine besondere Class von Flächen vieter Ordnung*. Math. Ann. Vol.20, p. 254-296, 1882.

- [13] SEGRE, B., *The maximum number of lines lying on a quartic surface*,. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Ser. 14, p. 86-96, 1943.
- [14] TRAYNARD, E. *Sur les fonctions theta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques*. Ann. l'Escole Norm. vol.3 n.24, p. 77-177, 1907.