Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

# JOGOS DIGITAIS E PROBABILIDADES: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO INTERDISCIPLINAR

Josevandro Barros Nascimento

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Sérgio De Carvalho Bezerra
Jaqueline Aparecida Foratto
Lixandrão Santos

João Pessoa
Maio de 2018

JOGOS DIGITAIS E PROBABILIDADES: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO INTERDISCIPLINAR

Josevandro Barros Nascimento

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL (PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

Prof. Sérgio De Carvalho Bezerra, D.Sc

Profa. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos, Dra.

Prof. Marcelo Rodrigo Portela Ferreira, D.Sc.

Prof. Sílvio De Barros Melo, Ph.D.

Prof. José Ivanildo Felisberto de Carvalho, Dr.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL

MAIO DE 2018

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

N244j Nascimento, Josevandro Barros.
JOGOS DIGITAIS E PROBABILIDADES: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO INTERDISCIPLINAR / Josevandro Barros Nascimento. - João Pessoa, 2018.
90 f. : il.

Orientação: Sérgio De Carvalho Bezerra Bezerra, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Educação Matemática. 2. Jogos. 3. Conceitos probabilísticos. 4. Modelagem matemática. I. Bezerra, Sérgio De Carvalho Bezerra. II. Santos, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos. III. Título.

UFPB/BC

*Dedico este trabalho ao meu amigo Marllon Batista Da Silva*

# Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo, professor D.Sc Sérgio De Carvalho Bezerra, por sua dedicação, pelas contribuições e por várias vezes não ter me deixado desistir desta caminhada. Obrigado pelas palavras e conselhos nos momentos difíceis, e por me guiar para o melhor caminho dessa minha vida. À sua esposa, Lidiane Régis Moreira, muito obrigado por sempre ter paciência e amor pela minha pessoa.

À minha orientadora e Professora, Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos que aceitou o convite com muito amor e entusiasmo. Muito obrigada pelo empenho, paciência, incentivo e por cada ensinamento na realização desta pesquisa. Obrigado por cada palavra de apoio, pelas cobranças e por compartilhar sua sabedoria com atenção e carinho. A senhora "fecha sempre".

À minha amiga, irmã e companheira de todas as horas, Ysmênia Karla, que nos momentos de angústia, tristeza, raiva e alegria esteve sempre presente. Seu amor e carinho contribuíram para minha formação acadêmica. À sua mãe, Dona Albertina, e sua irmã Betânia, agradeço por contribuírem no que sou hoje na minha formação acadêmica e profissional.

Aos meus professores do Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), D.Sc. Hugo Leonardo Davi de Souza Cavalcante e D.Sc. José Miguel Aroztegui Massera por acreditar e confiar no meu potencial, por condescender na minha formação acadêmica às oportunidades que sou eternamente grato.

Aos professores D.Sc. Marcelo Rodrigo Portela Ferreira e Ph.D. Sílvio de Barros Melo, pelas valiosas contribuições e sugestões no Exame de Qualificação e em suas pesquisas realizadas

Aos membros da banca examinadora, professor D.Sc. Marcelo Rodrigo Portela

Ferreira, Ph.D. Sílvio de Barros Melo e Professor Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho pela disposição e contribuições com a defesa do trabalho.

Ao secretário do PPGMMC que sempre me atendeu com tanta dedicação e afeto. Em especial, Jean Paulo Pereira M. Barros, meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ao meu grande amigo e irmão, Manoel Marcelino Silva por ter me acompanhado nessa trajetória e ter sido meu ponto de apoio nos momentos que, sozinho eu não conseguiria.

Aos colegas e amigos do mestrado Jairo Carlos De Oliveira Quintans, Alisson Dos Santos Silva, Andre Francisco Coelho Castro, Antunes Leite Pinto De Menezes, Camila Ravena De Oliveira, Creyton Borges Rocha, Jaelson Dos Santos Oliveira, João Paulo Carau De Oliveira, José Aluísio Silva, José Firmino De Melo Júnior, Olivia Sobreira Gomes e José Zeperino de Andrade Neto. Valeu turma!!!!

Aos demais amigos e familiares, que contribuíram direta e indiretamente na minha caminhada. Não irei citar nomes para não esquecer de ninguém, todos de alguma forma estão em meu coração.

Aos meus queridos professores e funcionários da Escola Teodósio Leite em especial, Micheline Xavier, por sempre me apoiar e motivar. A consideração de vocês me ajudou muito nessa fase final do mestrado.

Aos meus amigos e professores da Escola Anésio Leão. Marinalda Dantas Barbosa e Jussara Barbosa de Farias, meus amores, obrigado por me motivar sempre que estava triste.

À senhora do guichê da Real Bus, Suzana, que incansavelmente me atendeu com doçura e amor, com um sorriso que fazia todo o meu dia mudar uma energia radiante e contagiante.

A Deus, por permitir que eu viva esse momento.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

JOGOS DIGITAIS E PROBABILIDADES: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO INTERDISCIPLINAR

Josevandro Barros Nascimento

Maio/2018

Orientadores: Sérgio De Carvalho Bezerra
Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

A presente pesquisa de mestrado fundamenta-se nas pesquisas em Educação Matemática e Ciências e Modelagem Matemática. Teve como objetivo geral desenvolver jogos pedagógicos digitais para o ensino de probabilidade em uma perspectiva interdisciplinar com alunos do Ensino Fundamental. Como objetivos específicos busca analisar às indicações das pesquisas na área da Educação/Educação Matemática/Ensino de Ciências quanto ao ensino de probabilidade para o desenvolvimento de jogos pedagógicos digitais, além disso, observar se há motivação dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade frente aos jogos pedagógicos digitais Roleta Probabilística e Meteoritos. Para alcançar tais objetivos, a metodologia presente neste estudo tem perspectiva qualitativa e foi organizada em dois momentos: (1) elaboração de dois jogos pedagógicos digitais e (2) uma sondagem que consistiu na aplicação dos jogos desenvolvidos - roleta probabilística e meteoritos - em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. Ao final da pesquisa foi possível perceber que a notável contribuição com a formação do pensamento probabilístico dos alunos do Ensino Fundamental. Além disso, pode ser pensado como um recurso pedagógico inclusivo, pois alunos com diferentes níveis de conhecimento matemático pode desenvolvê-lo.

**Palavras-chaves:** Educação Matemática. Jogos. Conceitos probabilísticos e modelagem matemática.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DIGITAL GAMES AND PROBABILITIES: A POSSIBILITY OF INTERDISCIPLINARY TEACHING

Josevandro Barros Nascimento

May/2018

Advisors: Sérgio De Carvalho Bezerra
Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos

Program: Computational Mathematical Modelling

The present master's research is based on research in Mathematics Education and Mathematical Science and Modeling. It has as general objective to develop digital pedagogical games for the teaching of probability in an interdisciplinary perspective with students of Elementary School. As specific objectives it seeks to analyze the indications of research in the area of Education / Mathematics Education / Science Teaching regarding the teaching of probability for the development of digital pedagogical games, in addition, to observe if there is motivation of the students of the 6th year of Elementary Education in the process of teaching and learning of probability in front of the digital pedagogical games Probabilistic Roulette and Meteorites. To achieve these objectives, the methodology present in this study has a qualitative perspective and was organized in two moments: (1) the elaboration of two digital pedagogical games and (2) a survey that consisted in the application of the developed games - probabilistic roulette and meteorites - in a class of the 6th grade of Elementary School. At the end of the research it was possible to perceive that the remarkable contribution with the formation of probabilistic thinking of Elementary School students. In addition, it can be thought of as an inclusive pedagogical resource, since students with different levels of mathematical knowledge can develop it.

**Keywords:**Mathematical Education. Games. Probabilistic concepts and mathematical modeling.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Capítulo 1

# Introdução

Esta pesquisa de mestrado, inicialmente, tinha como foco aplicar o conceito da modelagem geométrica, simular variáveis aleatórias no computador e o uso de Hierarquia na computação gráfica para a construção de um jogo. Porém, os professores da banca de qualificação perceberam um viés pedagógico no trabalho e sugeriram que ele trouxesse contribuições para a área da Educação. Assim, com as sugestões da banca e nossos anseios, surgiu o desejo do aperfeiçoamento de jogos pedagógicos digitais para o desenvolvimento do pensamento probabilístico em alunos do Ensino Fundamental.

*Nossa formação* [1] e área de pesquisa no programa de Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) não nos davam segurança para esse desenvolvimento. Dessa forma, percebemos que precisávamos da parceria de um profissional com experiência na área de ensino de matemática. Consequentemente, houve o contato com a professora *Jaqueline Lixandrão Santos*[2], da Universidade Federal de Pernambuco, que havia sido orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do autor desta dissertação, em seguida, ela aceitou o convite para também ser orientadora desta pesquisa.

[1] Josevandro Barros Nascimento é graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal De Campina Grande (UFCG) / Sérgio De Carvalho Bezerra: Professor do Centro de Informática da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), lotado no Departamento de Computação Científica. Trabalho com a linha de pesquisa em modelos estocásticos para problemas físicos, Computação Gráfica e Probabilidade

[2] Jaqueline Ap. Foratto Lixandrão Santos: graduada em Matemática e Pedagogia, especialista em Educação Infantil, mestre e doutora em Educação. Desenvolve pesquisa na área de ensino e aprendizagem de Matemática e Matemática Inclusiva. É professora do curso de licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA/UFPE).

Estabelecida a parceria, tomamos como centro dos nossos estudos trabalhos em Educação Matemática e Ciências, modelagem matemática, sobre o ensino de matemática, especificamente, sobre o ensino de probabilidade. Para Santos (2010), o modelo tradicional de ensino não traz consigo a ampliação do pensamento estatístico e probabilístico dos alunos, desse modo, os conceitos estão preconcebidos em que está relacionando com as regras e a memorização.

O tema da probabilidade é um conteúdo favorável à investigação no desenvolvimento dinâmico da aprendizagem. Por isso, propomos o desenvolvimento de dois jogos pedagógicos digitais baseados nas reflexões dos conceitos e pensamentos probabilísticos.

Os estudos sobre os conceitos de probabilidades são indispensáveis no contexto em que vivemos e em momentos futuros. Para tanto, o cidadão moderno necessita de habilidades que facilitem uma leitura diversificada para compreender a realidade e desenvolver intervenções.

Para à compreensão da probabilidade é importante desenvolver reflexões de situações presentes no cotidiano das pessoas pelo viés dos conceitos matemáticos escolares. Nesse sentido, o ensino da probabilidade pode requerer o desenvolvimento intelectual da crítica e da autonomia, além das concepções dos conceitos matemáticos presentes (MICHAELLE, 2011).

Com base nessas ideias, a presente pesquisa buscou contribuições das pesquisas em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências para a elaboração pedagógica dos jogos e dos princípios da modelagem computacional que é aplicada a computação gráfica como recurso para sua construção. Dos jogos.

Diante de tais considerações, elaboramos as seguintes questões para nortear nossos estudos:

- Quais as contribuições que as pesquisas em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências trazem para a elaboração de jogos digitais?

- O que as pesquisas indicam sobre a formação de conceitos sobre probabilidade na Educação Básica?

- Que elementos precisam ter os jogos digitais para a formação de conceitos sobre probabilidade em aulas do Ensino Fundamental?

Após revisão bibliográfica, visando responder os questionamentos acima, elaboramos dois jogos pedagógicos digitais, nomeados de Roleta Probabilística e Meteoritos. Depois da construção dos jogos, novos questionamentos surgiram:

- Qual o impacto dos jogos Roleta Probabilística e Meteoritos no processo de ensino de probabilidade com alunos do Ensino Fundamental?
- Quais as contribuições dos jogos Roleta Probabilística e Meteoritos para a formação de conceitos probabilísticos dos alunos do Ensino Fundamental?

Essas novas questões nos conduziram a dois momentos de pesquisa. O primeiro, com o desenvolvimento dos dois jogos e o segundo, uma sondagem, com o desenvolvimento dos jogos em uma classe do 6º ano do Ensino Fundamental. Assim, nossos objetivos foram:

Objetivo geral:

- Desenvolver jogos pedagógicos digitais para o ensino de probabilidade em uma perspectiva interdisciplinar com alunos do Ensino Fundamental.

Objetivos Específicos:

- Analisar as indicações das pesquisas na área da Educação/Educação Matemática/Ensino de Ciências quanto ao ensino de probabilidade para o desenvolvimento de jogos pedagógicos digitais;
- Observar se há motivação dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade frente aos jogos pedagógicos digitais Roleta Probabilística e Meteoritos.

Visando apresentar nossas ideias ao longo do desenvolvimento dos jogos e analisar os comentários e observações dos alunos no decorrer da sondagem. No primeiro momento, como instrumento de coleta de dados, optamos por prints de telas da formulação dos jogos e registros feitos em diário de campo das discussões com os orientadores da pesquisa. No segundo momento, selecionamos registros de áudios, salvamento das respostas dos alunos no jogo, entrevista semiestruturada realizada com o professor da turma e diário de campo do professor-pesquisador.

Diante do exposto, organizamos nossa dissertação de mestrado em sete capítulos, sendo o primeiro, essa introdução. No segundo capítulo, trazemos um percurso histórico sobre as probabilidades e o ensino da matemática, levando em consideração os principais pontos dos conceitos probabilísticos. No terceiro capítulo, abordamos definições e conceitos da teoria das probabilidades: espaço amostral, sigma álgebra, medidas de probabilidades, variáveis aleatórias discretas, variáveis aleatórias contínuas, variável aleatória uniforme e como simular uma variável aleatória no computador e computação gráfica. No quarto capítulo, trazemos os procedimentos metodológicos abordados em nossa investigação. No quinto capítulo, intitulado “o desenvolvimento dos jogos pedagógicos digitais”, apresentamos os jogos desenvolvidos por meio de sequência de telas e informações para orientar o leitor. Já no sexto capítulo, temos os resultados e análises do desenvolvimento dos jogos com os alunos do 6º ano do ensino fundamental. No sétimo e último capítulo expomos nossas considerações finais que apontam os jogos “meteorito” e “roleta probabilística” podem ser um recurso importante para o professor, pois pode indicar dados para a avaliação da compreensão de conceitos geométricos como posição relativa, distância, diâmetro/área e suas relações com probabilidade no contexto apresentado no jogo. Além disso, os jogos podem desencadear reflexões, e consequentemente, contribuir com a formação do pensamento probabilístico dos alunos do Ensino Fundamental.

# Capítulo 2

# A probabilidade e o ensino: História, pesquisas e concepções

Neste capítulo, enfatizamos algumas possibilidades para o ensino da matemática, considerações sobre pesquisas e ensino de probabilidade, alguns conceitos probabilísticos, o jogo no ensino da matemática e os jogos digitais.

## 2.1 O ensino da matemática: algumas possibilidades

Muitos são os questionamentos sobre o ensino e aprendizagem da matemática. São discutidos os porquês de os alunos não aprenderem conceitos de matemáticos, porque não expressam os conhecimentos “adquiridos” em anos anteriores e saberes fundamentais da matemática (FIORENTINI et al,1990).

Segundo D’AMBRÓSIO (1989), esses questionamentos são abordados pela sociedade de Educação Matemática, inclusive internacional, e tem exposto concepções em literaturas científicas sobre o ensino de matemática no contexto escolar.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam o trabalho pedagógico das escolas e sugerem que sejam fundamentados na contextualização sociocultural, ou seja, é necessário estimular a interação do aluno com a sua realidade:

> Num mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa: . Saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir; . Enfrentar problemas de diferentes naturezas; . Participar socialmente, de forma prática e solidária; . Ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e, . Especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado. (BRASIL, 2002, p.9)

Ao analisarmos concepções sobre contextualização e aprendizagem de matemática nos deparamos com várias possibilidades. Dentre elas, o currículo, que auxilia o trabalho do professor e consequentemente a compreensão e a aprendizagem. Os PCN indicam que:

> [...] um currículo de matemática deve procurar contribuir, de um lado, para valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o aluno transcenda um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente (BRASIL, 2001, p.30).

Assim, ao pensarmos nas aulas de matemática precisamos levar em consideração metodologias de ensino que estimulem os alunos a aprenderem.

Os PCN apresentam alguns caminhos para "fazer Matemática" que são: modelagem, etnomatemática, história da matemática, as tecnologias na comunicação e os jogos. Além disso, a resolução de problema é colocada no referido documento como ponto de partida para o ensino da matemática.

Diante de tais considerações, acreditamos em uma proposta pedagógica que se insere no campo da computação gráfica, os jogos digitais, com o desenvolvimento de dois jogos envolvendo a probabilidade, tendo o jogo como ponto de partida para a resolução de problemas.

Na sequência, apresentamos nossas leituras a respeito de resolução de problemas, jogos e jogos computacionais.

## 2.2 A resolução de problema

Muito se fala sobre o ensino com a resolução de problemas, no entanto, segundo Santos (2010), suas definições não estão claras para muitos professores, pois consideram que a resolução de problemas consistem em situações propostas aos alunos que envolva o conteúdo matemático cujos artifícios de resolução tenham sido previamente apresentados a eles.

De acordo com Onuchic (1999):

> Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução de problema, os professores devem fazer conexão entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Van de Walle (2009) compartilha da seguinte afirmação:

> Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução. (HIEBERT et al., 1997, apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57)

De acordo com os PCN, "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la" (BRASIL, 1997, p.44).

Para Van de Walle (2009) no entendimento da resolução de problemas como método de ensino é conciso perceber que não se resume em apresentar uma situação problema, sentar-se e esperar que o desenvolvimento aconteça no passe de mágica, é importante que haja uma interação entre os alunos e professor no seu desenvolvimento e solução

D'Ambrósio (2007) destaca a necessidade da demonstração da resolução de problema, de acordo descrito nos trabalhos George Polya, está seguido por uma análise e tempos a ideia da heurística.

O método heurístico apresentado por Polya, na concepção de Rosa e Orey (2010), é considerado um conjunto de normas que podem direcionar para uma nova descoberta ou criação que não depende de suposições arbitrárias e tem qualificada base de conceitos e hipóteses imprescindíveis para o desenvolvimento da resolução de problemas. Além disso, destacam que experimentos e erros podem ser percebidos como um caso especial de heurística, dessa forma a solução de um problema pode ser desenvolvida e encontrada por experimentos, mesmo que seja preciso avaliar tal solução com rigor do método científico. (ROSA & OREY, 2010, p. 8).

A partir dessas definições, pensamos a resolução de problemas como ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, que não tenham, de antemão, uma regra ou um modelo para a sua resolução, mas que possibilite ao aluno uma sequência de ações para obtenção do resultado. Nesse contexto, acertos e erros são fundamentais para a formação de conceitos, assim como ferramentas de aprendizagens adequadas.

## 2.3 As tecnologias na sala de aula

As pesquisas quanto ao uso dos meios das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), indicam que propiciam um ambiente contextualizado e significativo, permitem simulações de situações e novos problemas, promovem abordagem experimental com o seu conhecimento da matemática, favorecem a investigação em ambiente de ensino e aprendizagem (APM, 1988; MATHEMATICAL ASSOCIATION, 1992; PONTE E CANAVARRO, 1997; VELOSO, 1988).

Segundo Almiro (2004), a utilização das tecnologias digitais nas aulas de matemática possibilita que o aluno encare um novo estilo de atividade educacional em que são desafiados a desenvolver à sua autonomia (ALMIRO, 2004).

Para D'Ambrósio (1989), o uso do computador faz com que a matemática deixe de ser uma associação de conhecimento pronto transmitido aos alunos e passa a ver como um instrumento importante no processo de constituição de conceitos matemáticos. Espera-se que as metodologias com o uso específico dos computadores promovam a competência criativa e o pensamento matemático.

Com isso, entendemos que os computadores podem contribuir com a aprendizagem matemática, visto que é um recurso dinâmico, além do mais, se for aliado à outras metodologias, como o jogo, pode se tornar uma ferramenta ainda mais potencializadora.

## 2.4 Jogos matemáticos

De acordo com Vygostsky (1987), as atividades lúdicas, como jogos e brincadeiras, são essenciais para o desenvolvimento cognitivo e social da criança. Para Kamii (1992), o conceito de jogo é um resultado para o crescimento da originalidade infantil, o qual envolve tomadas de decisões e elaboração de estratégias que conduz a regras pré-estabelecidas do jogo ou elaboradas pela própria criança.

O uso de jogos no ensino da matemática como uma das tendências metodológicas vem ganhando espaço no ambiente escolar com uma experiência que pode promover o ensino e a aprendizagem de forma lúdica. Segundo Lara (2004), para os professores a utilização de jogos pode tornar as aulas mais agradáveis e instigantes aos alunos.

O grupo de estudo *"Pentathlon Institute "*, [1] que desenvolve pesquisas nesta linha, consideram que os jogos não são apenas formas de abordar o lúdico, mas também resgatá-lo. Conforme D'Ambrósio (1989), o lúdico, assim como os jogos, pode ser pensado nas aulas de matemática como uma estratégia para desenvolver o raciocínio lógico dos alunos em situações relacionadas ao cotidiano e o desenvolvimento formal da matemática.

A contribuição em circunstância das características do jogo em situação que envolva o ensino, evidencia-se que o jogo torna-se uma atividade lúdica quando contribui para o envolvimento do estudante, do desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo. Segundo Grando (2000), quando passamos a utilizar os jogos nas aulas de matemática envolvemos os alunos em competição saudável e desafios que os motivam a conhecer os seus limites e suas possibilidades de conquistas. A referida autora destaca vantagens e desvantagens quanto ao uso do jogo. Apresentamos no seguinte quadro.

[1] No Brasil, os trabalhos do Pentathlon Instituto com jogos matemáticos podem ser conhecidos através do grupo de estudos do Laboratório de Ensino de Matemática da UNICAMP.

Tabela 2.1: Vantagens e desvantagens

| VANTAGENS | DESVANTAGENS |
|---|---|
| - fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; - significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; - o jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe; - a utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos; - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos. | - Quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice"em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber por que jogam; - o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno; - a perda da "ludicidade"do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente. |

**Fonte:** (GRANDO, 2000, p.35)

Assim, para que os jogos matemáticos sejam desenvolvidos de forma significativa no ensino e aprendizagem é importante que o professor conheça suas vantagens e desvantagens para que possa em seu planejamento amenizar às desvantagens. Acredita-se que o jogo possibilita aos alunos envolver se em uma atividade prazerosa e que fortalece o pensamento científico.

Neste fato, os jogos, com o aparecimento dos computadores podem se tornar uma ferramenta ainda mais interativa para o ensino da matemática.

## 2.5 Jogos computacionais

Os jogos computacionais são softwares de divertimento, que oferecem ampla interatividade com o usuário uma vez que possibilita usufruir de estratégias e objetivos para chegarem ao final de um determinado processo educativo. Quando os alunos são desafiados por jogos computacionais e educacionais suas percepções tornam-se elevadas e podem gerar grande conhecimento (HORNES, 2009).

A utilização de jogos na educação possibilita o desenvolvimento de estratégias e hábitos de persistência no desenvolvimento de provocações e atividades.

> "Os jogos proporcionam ainda a melhora da flexibilidade cognitiva, pois funcionam como uma ginástica mental, aumentando a rede de conexões neurais e alterando o fluxo sanguíneo no cérebro quando em estado de concentração"(HORNES, 2009, p.5).

Para Tajra (2002), os softwares educacionais com aspectos de jogos de videogame são mais arguciosos e com maior aceitação por parte dos alunos. Segundo Silva (2011), os jogos bem desenvolvidos podem ser um atraente instrumento na didática dos professores facilitando uma aula dinâmica e lúdica, podendo ser o desenvolvimento de uma abordagem diferenciada da disciplina.

Conforme Ramos (2008), as tecnologias estão se tornando recursos e ferramentas mais presentes no espaço escolar e a exploração dos jogos computadorizados ganham ênfase no que tange o processo educacional.

> "No caso dos jogos educacionais digitais ou softwares educacionais, a interação permitida entre conteúdo e aluno e a possibilidade de aprender usando recursos digitais podem favorecer a apreensão de conteúdo e o interesse pela tarefa. Esse conteúdo, então, é facilmente compreendido e compartilhado entre os alunos-usuários de forma interativa, o que exige, desses estudantes, uma atitude responsiva ativa"(ARAUJO; RIBEIRO; SANTOS, 2012, p. 6).

Os jogos computacionais estão ligados às propostas inovadoras ao desenvolvimento do ensino e aprendizagem, pois para os jogadores a relação entre às estratégias de jogo, aos objetivos educacionais a que se sugerem e ao uso da tecnologia. Alguns tipos de jogos computacionais são mencionando por Hornes (2009):

Tabela 2.2: Jogos computacionais

| Tipos de jogos | Finalidade |
|---|---|
| Estratégia | Nesses jogos o foco principal é a habilidade do jogador. São idealizados a fim de cumprir objetivos usando estratégias e táticas. |
| Simuladores | São jogos que requerem reflexo do usuário na realização de habilidades num ambiente limitado que tenta retratar a realidade, ou parte dela. |
| Ação | São os jogos que através dos reflexos desenvolvem a coordenação entre o olho e a mão associados ao pensamento rápido na tomada de decisões frente a uma situação inesperada. |
| Aventura | Os jogos de aventura combinam ações de raciocínio e reflexo, os jogadores devem ter controle sobre o ambiente a ser descoberto, e devem ultrapassar estágios que envolvam a solução de enigmas para chegar ao final. |
| Lógico | Os jogos lógicos desafiam muito mais a mente do que os reflexos e podem ter um limite de tempo dentro do qual o usuário deve finalizar a tarefa. Aqui podem ser incluídos clássicos como xadrez e damas. |
| Passatempo | São jogos simples como caça-palavras, palavras-cruzadas, quebra-cabeças rápidos e sem nenhuma história. |
| Role-playing game (RPG) | É caracterizado pelo relacionamento entre os personagens do jogo, em que o jogador assume uma personalidade e enfrenta situações para ganhar experiência. |
| Esporte | São jogos de habilidade em esportes populares, como futebol, vôlei, basquete, etc. |
| Educação e treinamento | São jogos com as características de qualquer um dos jogos anteriores, porém, com fins educacionais. |

**Fonte:** (HORNES, 2009, p.6)

As características dos jogos computacionais como estratégias, simuladores, ação, aventura, lógico, Role-playing game (RPG) e esporte trazem concepções diferentes das de fins educacionais - Educação e treinamento -, pois além das características anteriores, sua estrutura precisa envolver a compreensão do ensino e didática do professor.

Com os jogos computacionais é possível o estudo dos conceitos relativos e complexos das diferentes áreas do ensino, como a matemática. Eles podem despertar o interesse e a compreensão dos conteúdos escolares.

Diante do que foi apresentado, entendemos que, os jogos computacionais podem ser uma ferramenta importante para o ensino das probabilidades, foco do nosso estudo. Na sequência, apresentamos considerações sobre probabilidade.

### 2.5.1 Jogos computacionais para o ensino

Com o constante interesse nos estudos sobre os potenciais dos jogos computacionais para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem dos jovens. Os jogos digitais (JD) representam um assunto em desenvolvimento de pesquisa e não apenas no meio acadêmico científico mais também em áreas midiáticas e educacionais (MAZIVIERO, 2014).

Os jogos digitais no ensino possibilitam e ampliam os conhecimentos podendo promover novos experimentos e permitir a construção de modelos da realidade do sujeito. Tais modelos simulam o mundo real, o que tornam mais fácil desenvolver o pensamento e a estratégias lógicas do aluno (SHAFFER, 2006).

De acordo com Williamson (2009), os jogos digitais ou computacionais, enquanto ferramentas de ensino-aprendizagem, trazem alguns questionamentos sobre os aspectos educacionais. Enquanto acreditamos que os JD são lúdicos e motivadores por si, e por isso devem ser aproveitados para aperfeiçoar do educando e carecer de verificados os jogos quando educativos mantém essa característica motivadora aos alunos. Com as novas caraterísticas de um ensino inovador, os jogos são elaborados para conter elementos de aprendizagem, e assim proverem modelos de boas práticas de aprendizagem.

Gee (2004) traz alguns aspectos sobre os jogos educacionais que precisam ser considerados para que sejam aproveitados no ensino. Nesta perspectiva, os jogos digitais foram desenvolvidos com os alunos. Com isso, observamos um ganho elevado no que se refere ao aprendizado dos estudantes quando utilizado uma metodologia e didática escolar eficaz. Isto é, os jogos possibilitam e melhoram o mundo dos alunos que estão a todo o momento cercado de tecnologias em um aprendizado constante.

Gee (2004) esclarece que um bom jogo necessita de algumas razões que devem ser analisados para que se tornem encantos, e ao mesmo tempo conduzam aos conhecimentos. Bomfoco e Azevedo (2012), em análise sobre os trabalhos de Gee, organizaram cinco categorias para que os jogos digitais colaborem para aprendizado:

Tabela 2.3: Características dos bons jogos

| **Fatores considerados** | **Descrição** |
|---|---|
| Metas | As pessoas armazenam melhor suas experiências quando estão relacionadas a metas. |
| Curva de Aprendizagem | As experiências devem ser interpretadas durante e após as ações. Lições devem ser extraídas das experiências anteriores a fim de antecipar em quais outros contextos e de que formas estas lições podem ser úteis novamente. |
| Feedback | As pessoas devem receber feedback imediato durante as suas experiências para que possam reconhecer seus erros. É importante que possam explicar seus erros e o que poderiam ter feito de forma diferente. |
| Oportunidades de Exploração | As pessoas precisam de diversas oportunidades para aplicar suas experiências anteriores em novos contextos. Assim podem melhorar a interpretação de suas experiências e generalizá-las a outros contextos. |
| Colaboração/Socialização | As pessoas precisam aprender a partir das experiências de outras, o que inclui a discussão com seus pares e a instrução dada por mentores. |

**Fonte:** BOMFOCO e AZEVEDO (2012)

Para que se tenha um bom jogo faz necessário que essas qualidades estejam inseridas e veiculem bons princípios de aprendizagem. O emprego de desenvolvimento de jogos digitais com o conteúdo de probabilidade é muito pouco difundido. Assim, propomos trazer uma visão sobre ensino, especificamente, sobre jogos digitais educativos analisando sua importância no desenvolvimento da aprendizagem de conceito de probabilidade.

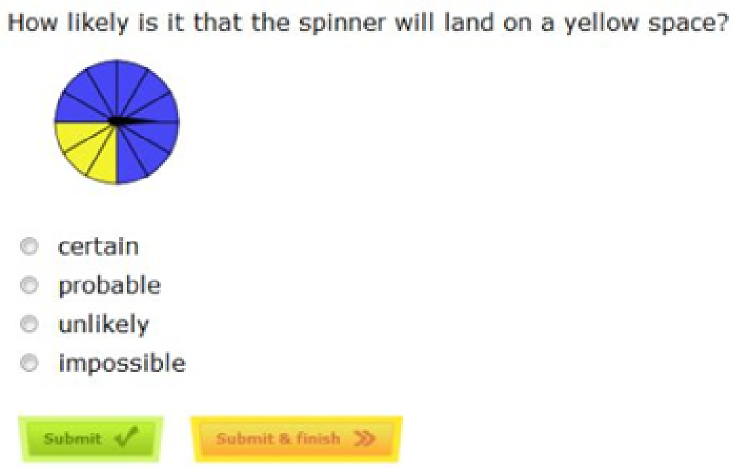
Na internet é possível encontrar diversos jogos educativos. Em seguida, apresentamos o *Free Training Tutoral* online *Educaction for Kid* que expõe alguns jogos para o ensino de probabilidade.

### 2.5.2 Free Training Tutoral online Educaction for Kids

No site *Free Training Tutoral online Educaction for Kids*[2] encontramos jogos matemáticos de probabilidade online e gratuitos. Dentre eles, destacamos o Basic Probability Practice, o Pulling objects from Bag, o Probability fair e o Probability Quiz, que serão apresentados na sequência.

**1**. *Basic Probability Practice*, na tradução para o português quer dizer “Prática Básica de Probabilidade”. Está relacionado aos conceitos básicos, como: certo, provável, improvável e impossível.

Figura 2.1: Prática Básica de probabilidade




**Fonte:** Disponível em < https://www.free-training-tutorial.com/math-games/probability-basics.html> em 15 de junho de 2018.

O jogo envolve uma série de perguntas sobre probabilidade ao escolher um determinando mármore branco de uma seleção de bolinhas coloridas expostas nas telas. Na sequência do jogo surgirá quatro alternativas dentre as quais terão respostas.

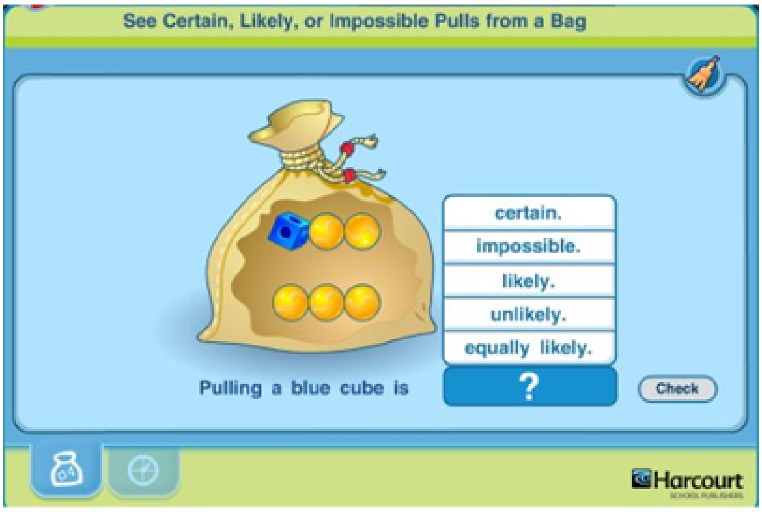
- Certas (Se todas as bolinhas são brancas);
- Prováveis (Se houver mais bolinhas brancas do que outras cores);
- Improváveis (Se houver menos bolinhas brancas do que outras);
- Impossíveis (Se não houver bolinhas brancas).

[2] Este site foi criado para oferecer aos professores, educadores e pais homeschooling atividades gratuitas de alta qualidade on-line para seus filhos e alunos - sejam jogos, tutoriais, lições, testes ou apenas interativos divertidos. Disponível em https://www.free-training-tutorial.com/probability-games.html em 15 de junho de 2018.

O *Basic Probability Practice* é direcionando para alunos a partir do quarto ou quinto ano do Ensino Fudamental.

**2**. *Pulling objects from Bag*, significa "Puxando objetos do saco", é um jogo de probabilidade interativa que testa as percepções sobre o conhecimento de probabilidade.

Figura 2.2: Puxando objetos do saco




**Fonte:** Disponível em < https://www.free-training-tutorial.com/math-games/probability-basics.html> em 15 de junho de 2018.

Em sacola encontra-se vários objetos com diferentes cores. O jogador terá que determinar a probabilidade de sair uma cor específica da sacola ao escolher uma alternativa (Certo, provável, igualmente provável, improvável e impossível). Algumas das perguntas são:

- Qual a probabilidade de pegar uma bolinha vermelha da bolsa? Orientações: Sua resposta vai do impossível - se não houver bolinhas vermelhas no interior -, até a certeza, se for uma bolsa cheia de bolinhas vermelhas.

Ao escolher uma alternativa, o jogador tem que clicar no botão "verificar" para descobrir se sua resposta está correta ou não. Em seguida, clicar no botão "workmat", para "limpar" a tela e começar de novo.

O jogo *Pulling objects from Bag* é indicado para alunos do quarto ou quinto ano do Ensino Fundamental.

**3**. *Probability fair*, sua tradução significa “Feira de probabilidade”. Esse jogo consiste em seis atividades dinâmicas e divertidas com diferentes estratégias. Para iniciar o jogo, o jogador deverá girar uma roda com diversas cores, nisso irá escolher uma determinada cor na qual é provável sair no resultado final.

Figura 2.3: Feira de probabilidade


**Fonte:** Disponível em < https://www.free-training-tutorial.com/math-games/probability-basics.html> em 15 de junho de 2018.

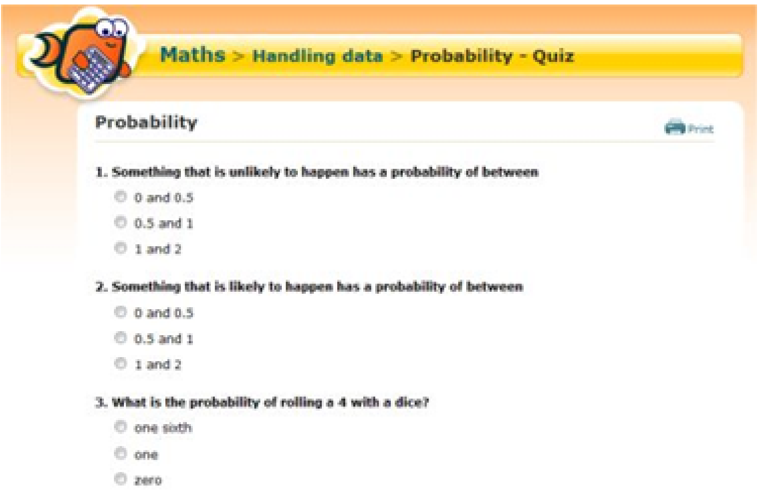
- *Duck Pluck*, envolve a escolha do pato que vai ganhar a corrida;
- *Plinko*, envolve a escolha do melhor lugar para jogar uma moeda em um determinado tabuleiro ganha o jogo quem fizer o maior número de pontuação nas jogadas;
- *Number Board*, o jogador receberá fichas nas cores vermelho, preto ou verde e terá que adivinhar ao colocar suas fichas qual o mais improvável sair as cores em um determinando número e quanto maior o número de apostas na roda o jogador ganhará tickets como recompensa;
- *Shell Game*, está relacionado com a percepção do jogador ao acompanhar uma ervilha debaixo de uma concha onde terá que descobrir em qual concha encontra-se a ervilha;
- *Ticket Wheel*, o jogador encontrará uma roda de ingresso associada com valores 0,1,2,5 e 10 em que o jogador deverá adivinhar os valores dos ingressos em

cada seção e quanto deve girar em cada rodada para tentar alcançar o maior número de recompensa.

Cada jogo é composto com probabilidades de maneiras diferentes e sugere que o jogador utilize sua habilidade para aplicar o que dá maior gratificação. As características dos jogos são indicadas para alunos do ensino fundamental.

**4.** Probability Quiz ou "Questionário de Probabilidade". Este jogo é composto por 10 alternativas de múltiplas escolhas em que o jogador terá de escolher uma resposta correta para cada pergunta.

Figura 2.4: Questionário de Probabilidade




**Fonte:** Disponível em < https://www.free-training-tutorial.com/math-games/probability-basics.html> em 15 de junho de 2018.

As perguntas estão direcionadas ao conceito de probabilidade, por exemplo: "Como a probabilidade de uma moeda cair cara ou coroa, ou as chances de puxar uma determinada cor do botão de uma sacola".

O jogador terá que escolher uma alternativa dentre três das apresentadas no final do jogo, na parte inferior deverá verificar se suas respostas estão corretas ou não".

A sugestão é que o jogo "Questionário de Probabilidade" seja desenvolvido com alunos do quarto e quinto ano do Ensino Fundamental.

Consideramos esses jogos interessantes e pensamos que podem ser utilizados pelos professores em aulas de Matemática. Porém, orientações quanto a formação de conceitos probabilísticos precisam ser observadas por eles para que o jogo contribua de forma significativa com o ensino e a aprendizagem de probabilidade.

## 2.6 Ensino de probabilidade

O ensino de probabilidade no currículo escolar até certo tempo, era abordado apenas no ensino médio e envolvia apenas o contexto de jogos de sorte-azar. Por isso, as pessoas são dirigidas a acreditarem que a teoria das probabilidades está relacionada, exclusivamente, para entendimento desse tipo de jogo. É necessário desconstruir e desvirtuar, pois é imprescindível a inclusão da probabilidade nos dias atuais, é o que concede às orientações curriculares (CARVALHO, 2017).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propostos para Ensino Fundamental destacam que, ao final da etapa da escolaridade os alunos devem ter desenvolvido uma abrangência das noções básicas de probabilidade, sendo questões que envolvam a contagem de casos no mapeamento do espaço amostral e seu significado e a utilização de diagramas de árvore (BRASIL, 1998).

O ensino de matemática nos 6º e 7º *anos* [3], são os terceiros ciclo nos anos finais os PCN traz com relação os conceitos de probabilidade que,

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p.52).

Os PCN nos dá estima de um trabalho que possibilite aos alunos o contato com os fatos reais de natureza aleatória e o desenvolvimento por meio de aplicação de experimento e observação de certos eventos. (CARVALHO, 2017).

Além dos PCN, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica a inserção dos conteúdos probabilísticos na Educação Básica. A BNCC vem sendo bastante

[3] Utilizamos a nomenclatura atual dos anos do Ensino fundamental, mas Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Matemática é composto de 5º e 8º séries.

questionada, contudo, é um documento oficial e consideramos relevante trazer suas considerações sobre o ensino de probabilidades.

De acordo com a BNCC, espera-se que os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental sejam capazes de :

> Indicar a probabilidade de um evento por um número racional (na forma fracionária, decimal e percentual) e compreender que, se um experimento aleatório for realizado com um grande número de tentativas, os resultados obtidos tendem à probabilidade calculada (BRASIL, 2016, p.132).

Para os 7º anos, a BNCC motiva que os estudantes devem ser capazes de:

> Compreender o significado de termos como aleatoriedade, espaço amostral, resultados favoráveis, probabilidade, tentativas, experimentos equiprováveis, dentre outros;
> Planejar experimentos aleatórios ou simulações, estimar probabilidades e compreender probabilidades obtidas por meio de frequências (BRASIL, 2016, p.134).

Já os PCN classificam que no 3º ciclo do ensino fundamental composto pelos 6º e 7º sejam capazes de "Resolver situações-problemas que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão" (BRASIL, 1998, p.65).

Segundo o currículo de matemática, os PCN sugerem que o quarto ciclo do ensino fundamental composto pelos 8º e 9º anos do ensino fundamental, o aluno deve ser capaz de "construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos" (BRASIL, 1998, p.134).

Conforme a BNCC, espera-se que os alunos do 8º anos do ensino fundamental sejam capazes de:

> Construir o espaço amostral de experimentos, utilizando o princípio multiplicativo e indicar a probabilidade de um evento por meio de uma razão, verificando que a soma das probabilidades de todos os resultados individuais é igual a 1 (BRASIL, 2016, p.136).

A BNCC para o 9º ano propõe que o estudante deva estar habilitado a entender:

> Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de ocorrências nos dois casos (BRASIL, 2016, p.138).

Dessa forma, em análise das propostas dos PCNs e BNCC em matemática sobre o conteúdo de probabilidade ressaltamos a importância das sugestões nos currículos prescritos, todavia temos um grande desafio para que as propostas curriculares se constituam em significativos processos de ensino e aprendizagem com a probabilidade na educação básica, Sendo considerado seus aspectos teóricos das probabilidades

## 2.7 Aspectos históricos da teoria das probabilidades

A teoria das probabilidades surgiu como parte da matemática por volta do século XV, como ciência empírica. Embora seja um fato que se apoiava somente em experiências vividas e nas observações de coisas, a teoria e os métodos científicos eram desprezados. Teve seu nascimento principalmente em jogos e apostas *"jogos de azar "*[4](LOPES, MEIRELLES, 2005).

Registros mostram que em 1200 a.C já se utilizavam fragmentos de fósseis ou pedaços de ossos como face de dados. Vestígios sobre aspectos históricos dos povos antigos do Egito indicam que por volta de 3500 a.C, usavam-se ossinhos para tais fins. Os povos Romanos, durante a idade média, tinham jogos de dados e cartas que foram proibidos pela igreja Cristã.

O matemático e jogador italiano, Gerónimo Cardano (1501-1576), em meados do século XVI, resolveu estudar e analisar as possibilidades de ganhar em nós jogos de azar. Sua primeira análise sobre probabilidades foi um jogo de baralho no qual consistia em tirar azes das cartas, seu segundo experimento envolvia dois dados para obter-se a soma "sete". Suas análises foram publicadas em um manual para jogadores tendo como nome *"Liber de Ludo Aleae "*,[5] lançado em 1526 (LOPES; MEIRELLES, 2005). Suas análises sobre observações no lançamento de um dado honesto, descreveu com argumentos, que ao lançar um dado, a chance de se obter um, três ou cinco e a mesma de obter dois, quatro ou seis.

Posteriormente, às correspondências trocadas entre os matemáticos Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre De Fermat (1601-665), nas quais discutiam os objetivos de

[4]Jogo de azar: "Aquele em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte que do cálculo, ou somente da sorte" (TARANTI, 2011, p. 235).

[5] O livro dos jogos de azar (Tradução nossa).

conseguir solução dos problemas de jogos de azar, também foram consideradas por pesquisadores como o possível surgimento da teoria das Probabilidades.

Nos anos de 1650, Antoine Gombaud, conhecido como Chevalie de Méré (1607-1684) também teve seu nome relacionado ao cálculo matemático de jogos de azar (LOPES; MEIRELLES, 2005).

Neste período, veio à tona o crescimento dos estudos das probabilidades com a publicação do físico, matemático e astrônomo, Christiaan Huygens (1629 -1695), sobre o tratado formal das probabilidades. O estudo trouxe o conceito de esperança matemática e ênfase do cálculo de probabilidades e estatística.

Em 1713, publicou o livro de Jakob Bernoulli (1654-1705) sobre a teoria das probabilidades, uma parte foi dedicada ao trabalho de Christiaan Huygens, que trata dos jogos de azar, e a outra, apresenta as concepções dos conceitos de permutações, combinações e o teorema de Bernouilli sobre as distribuições binomiais (LOPES, MEIRELLES, 2005).

A solução dos problemas de probabilidade de jogos também contribuiu com o desenvolvimento de dados estatísticos. Além disso, os problemas estatísticos relacionados ao processo de amostras envolviam o raciocínio probabilístico em sua compreensão.

A palavra estatística originou-se da palavra latina STATUS (estado) em 3000 a.C. Há indícios de que neste período já se faziam censos na Babilônia, China e Egito. Os romanos utilizavam-se da estatística para o registro dos nascimentos e das mortes em sua população.

De acordo com Lopes e Meirelles (2005), no século XIX, a estatística tomou uma nova direção no Reino Unido, pois seus conceitos ampliaram-se para a matemática e aplicações na biologia. O período de 1900 a 1915 ficou conhecido como o período da transição entre a visão original e nova visão da estatística, assim, necessitou de técnicas matemáticas, probabilidade e sofisticados métodos de estudos de dados.

Entre os anos de 1900 e 1950 teve início a era moderna da estatística, suas inferências estavam na identificação e no desenvolvendo de técnicas. Na passagem de um século para o outro, começou a ser construída a estatística inferencial em conjuntos sistemáticos das probabilidades nos papéis definidos de coleta, resumo e análise de dados empíricos.

O entendimento da história das probabilidades, assim como a de outras temáticas as quais estão relacionadas, como a estatística são relevantes para compreendermos da sua inclusão do ensino no ensino da escolarização básica. Dessa forma, compreendemos que seja importante pensar no ensino de probabilidade não apenas de maneira formal, mas também experimental.

## 2.8 O ensino da probabilidade: o papel da linguagem na formação de conceitos

O conhecimento probabilístico é de suma importância para o cotidiano das pessoas, pois a sociedade está cercada de informações, as quais têm que interpretar e organizar dados para a compreensão da realidade e tomada de decisões. Para tanto , pesquisas sobre tais conhecimentos foram desenvolvidas em diversos países. Dentre essas pesquisas, as que que envolvem a linguagem se destacam, uma vez que possibilita compreender como os alunos estão entendendo a probabilidade.

O estudo sobre linguagens probabilísticas realizado por Green (1982), na Grã Bretanha com alunos de faixa etária entre 11 e 16 anos , concluiu que eles possuem barreiras linguísticas para expressar conceitos sobre probabilidade. O pesquisador observou que os estudantes analisados expressam termos comuns que sugerem distintos graus de probabilidade, como improvável e o que não pode acontecer.

Os estudos realizados por Godino, Batanero e Cañizares (1996) com alunos da Espanha, indicam dificuldades na estimação e interpretação dos conceitos probabilísticos, , pois diferentes medidas foram atribuídas na pesquisa para um mesmo fenômeno probabilístico.

No Brasil, Santos (2015) ao conversar com os alunos sobre probabilidade observou que conceitos probabilísticos estão implícitos em palavras como: impossível, possível, pode ser, provável, entre outras.

> É comum observarmos que as pessoas usam esses termos relacionadas à combinatória e à probabilidade em seu cotidiano, por exemplo: "Eu vou ao dentista com frequência", "É provável que eu vá ao cinema no final de semana" ou ainda "Pode ser que eu tire uma boa nota na prova" (SANTOS, 2015, p. 41)

Segundo Santos (2015), a variação na interpretação dos alunos não se refere a todos os termos do vocabulário probabilístico, em razão de certa regularidade em determinadas palavras, tal como indica o quadro a seguir.

Tabela 2.4: Vocabulário probabilístico

| **Termos que expressam valores** | **Exemplo** |
|---|---|
| "Exatos" | Seguro, certo, impossível e sem dúvida. |
| "Flexíveis" | Como pode ser, há alguma probabilidade, é possível e se espera que. |

**Fonte:** (Santos, 2015, p.41)

De acordo com a referida autora, repertórios de expressões relacionados às linguagens probabilísticas, muitas vezes, passam despercebido pelos professores. No entanto, tais expressões são utilizadas para expressar e classificar a probabilidade de determinados eventos e diferentes interpretações podem ser dadas pelos alunos para o mesmo termo. Desse modo, é fundamental que o professor a explore na sala de aula.

Segundo Gal (2005), pouca atenção tem sido dada à linguagem probabilística, sendo muito importante, pois os estudos dos aspectos probabilísticos são acentuados nas relações do concreto ao abstrato ao se enfatizar as linguagens probabilísticas.

Para Nacarato e Grando (2013), a linguagem probabilística tem um desempenho essencial na concepção sobre conceitos probabilidade do discente, o vocabulário probabilístico torna-se significações para a conceitualização perante o trabalho de negociação.

O estudo sobre o ensino de probabilidade e da linguagem probabilística é muito importante, já que suas discussões são pertinentes e significativas no desenvolvimento do ensino e aprendizagem de probabilidade. Segundo Santos (2015, p. 43) "é significativa a discussão da linguagem probabilística nos processos de ensino e de aprendizagem de probabilidade."

De acordo com as pesquisas de Gal (2005), os estudos em probabilidade não têm um atributo concreto dos conceitos, mas em muitas das vezes sua percepção torna ampla que são expressas por meio de notação formal da matemática. Para este acontecimento é necessário que o conhecimento escolar esteja ligado ao mundo crítico. Watson (2006) afirma que a probabilidade está presente em diferentes contextos associados em atitudes de mensurar as probabilidades.

Para o ensino de probabilidade, Santos (2010) ainda sugere que seja desenvolvido por meio de situações relacionadas a resolução de problemas em um contexto dinâmico que favoreça a simulação e a experimentação. Assim sendo, os jogos digitais parece ser um instrumento favorável. Além disso, a autora nos atenta aos diferentes conceitos probabilísticos.

## 2.9 Os conceitos probabilísticos

Hawkins e Kapadia (1984), Orton (apud CIRINO, 2007) e Godino Batanero e Cañizares (1996) apontam as concepções probabilísticas, que são: conceito clássico ou laplaciano, conceito frequentista ou empírico, conceito subjetivista, conceito lógico, conceito axiomático ou formal e conceito geométrico.

Em sua pesquisa, Santos (2010) ressalta que os referidos conceitos podem estar presentes no ideário dos alunos da educação básica de forma individualizada ou articulada e, à medida que situações de ensino potencializadoras são desenvolvidas, tais conceitos podem ser (re) significados

### 2.9.1 Conceito clássico ou laplaciano

O conceito clássico ou laplaciano da probabilidade surgiu a partir dos estudos de Laplace que resultou na obra *Théorie analytique des probabilités*, publicado em 1812. Em sua publicação a definição é conferida às circunstâncias em que o espaço amostral é equiprovável (SANTOS, 2015).

Nesse contexto, a probabilidade é desenvolver o determinismo absoluto. De acordo com Fernandes (1999, p. 59) “[...] assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral”, constituindo “uma abordagem a priori da probabilidade, pois calculam-se probabilidades antes da realização de qualquer experiência física”. Godino, Batanero e Cañizares (1996) afirmam que a característica de uma circunstância, na teoria da probabilidade em que todos os resultados possíveis são igualmente prováveis também é confirmado pela tática de emprego de simetria física.

Ao analisarmos as perspectivas sobre os jogos de azar relacionados com o lançamento de uma moeda e dado (não viciados) nos deparamos com o referido conceito ou em saída de bolas em urnas, desde que a quantidade de bolas diferentes de cores seja equiprovável.

Em conformidade com SANTOS (2015), dificilmente esse conceito de probabilidade é compreendido nos jogos de azar, por exemplo, as pessoas acreditam que às probabilidades de um bilhete com seis números alternando ser sorteado é maior do que a de um bilhete com seis números consecutivos.

As apreciações dos conceitos de Laplace é um dos pontos altos para o estudo dos demais conceitos sobre probabilidade.

### 2.9.2 Conceito frequentista ou empírico

O conceito frequentista ou empírico da probabilidade está associado *"A lei dos grandes números "*,[6] neste processo de experimentação é utilizado o método de repetições em que não permite obter a probabilidade exata dos acontecimentos, apenas uma estimativa de seus resultados (CIRINO, 2007).

Nesta abordagem da probabilidade temos dois tipos de conhecimentos de argumentos *a posteriori*, em que os ensaios é avaliado após terem sidos realizados e*a prori*, na qual a informação ou justificação independente da experiência. O conceito frequentista é um exemplo de probabilidade *a posteriori*.

Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), o conceito frequentista foi abordado por Richard Von Mises em seu livro *Probability, statistics and truth*, porém, na obra *The logic of chance*, Johon Venn já havia indicado o cálculo de probabilidade por desenvolvimento de frequências relativas

Ao explorarem as teorias e os conceitos frequentistas em suas pesquisas, Goldino, Batanero e Cañizares (1996), com ajuda de um simulador computacional simularam o arremessamento de moedas. No desenvolvimento da pesquisa foram 14 mil repetições, onde analisaram que as frequências de caras e coroas eram muito próximas da probabilidade teórica, $\frac{1}{2}$. Esse experimento indica que quanto maior o número de

[6]A lei dos grandes números foi primeiramente provada pelo matemático James Bernoulli na quarta parte de seu livro Ars Conjectandi publicado em 1713. Disponíveis em: < http://www.portalaction.com.br/probabilidades/72-lei-dos-grandes-numeros > Acesso em: 24 out. 2017

lançamentos, maior a proximidade entre a probabilidade a priori e a posteriori. Um exemplo de situação probabilística frequentista do cotidiano é mencionada por Santos (2011):

> Para fazer o cálculo do valor do seguro dos veículos as seguradoras realizam uma pesquisa estatística sobre o índice de furto dos mesmos, e por meio desses dados calculam a probabilidade de o proprietário do automóvel "x" ter seu carro furtado, ou seja, a razão entre o número de possibilidades favoráveis, automóveis "x" furtados, e o número total de possibilidades, automóveis "x" em circulação. (SANTOS, 2011,p. 3)

Nos estudos dos conceitos frequentista sobre os seguros de furtos de veículos, na análise da probabilidade de um evento é levado em consideração o índice de roubo da região, localização em que o proprietário reside, marca e modelo do veículo, entre outros. Tais índices são variáveis e suas alterações estão relacionadas a fatores econômicos, sociais e até mesmo culturais.

É importante que situações simples do cotidiano, como os seguros de furtos de veículos, que envolvem a aleatoriedade, sejam levados para a sala de aula, pois as concepções dos alunos podem se divergirem, uma vez que as experiências vividas no cotidiano podem influenciar na medida de chance. De acordo com (SANTOS, 2015), algumas situações podem conduzir os estudantes a considerações ingênuas, achando que as probabilidades são as mesmas, independente do contexto.

### 2.9.3 Conceito subjetivista

Na perspectiva probabilística os conceitos subjetivistas estão presentes no ideário do sujeito quando ele faz uso de seus conhecimentos do mundo real para determinar a probabilidade de um sucesso (SANTOS, 2015). Segundo Fernandes (1999), o conceito subjetivista pode ser classificado como "personalista", pois os conceitos clássicos e frequentistas são atributos do mundo real, enquanto na percepção subjetivista as probabilidades são estimativas pessoais de situações eventuais, próprias de cada indivíduo. Assim, a probabilidade acontece de uma avalição exterior ao sujeito para uma avaliação centralizada no sujeito.

De acordo com Godino, Batanero e Cañizares (1996), estas considerações não se fundamentam na repetitividade de um fato acontecer, pois é possível avaliar a probabilidade de um fato que ocorreu apenas uma vez.

Segundo Santos (2015), o conceito subjetivista pode ser observado nos jogos de azar.

> Nas situações que envolvem jogos de azar esse conceito de probabilidade é bastante utilizado, uma vez que estando em situação de risco (excitação emocional) o grau de confiança individual é muito forte. Acredita-se que no conceito subjetivista os jogadores seguem regras básicas ao apostar (confiar) em determinado acontecimento. (SANTOS, 2015, p. 48).

Segundo Borovcnik, Bentz & Kapadia (1991), que analisam as coerências e consistências ao desenvolvem a probabilidade de eventos em diferentes situações, duas das maiores dificuldades e à abordagem dos conceitos subjetivista resultam na pretensão de dúvida por uma probabilidade e de ausência de orientação para adequar às probabilidades prévias.

Para Shaugnessy (1992), é possível desenvolver probabilidades subjetivas como intensa conexão com o *teorema de Bayes*,[7] que possibilita obter uma nova probabilidade de evento com o conceito de aprendizagem a partir da experiência.

Já para alguns autores, como Fernandes (1999) e Godino, Batenero e Cañizares (1996) o conceito subjetivista está ligado aos conceitos de probabilidade lógica.

### 2.9.4 Conceito lógico

O conceito lógico da probabilidade pode estar relacionado ao conceito clássico ou frequentista. Neste conceito probabilístico há uma indução, definida por uma semelhança lógica entre o enunciado evidente e as hipóteses que permite uma generalização das inclusões implícitas e contraditórias (Santos, 2015).

No conceito lógico probabilístico o nível de confirmação é expresso em situações extremas entre certo ou impossível "... uma proposição p é dada pela informação de outra proposição q, [...] se p é uma consequência de q, a proposição q dá a p a probabilidade 1 e a contradição, o caso de que p e q sejam contraditórios, a

[7] Teorema de Bayes: Sejam $A_1, A_2 \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral, e assuma que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para todo $i$. Então, para qualquer $B$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$, temos que $\mathbb{P}(A_i \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)} + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B \mid A_i)$. Para verificar o teorema de Bayes, basta notar que $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_i \mid B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_i \mid B)$ , já que ambos ão iguais a $\mathbb{P}(A \cap B)$o que garante a primeira igualdade. A segunda igualdade segue da aplicação do teorema da probabilidade total para B. Disponíveis em: <http://www.portalaction.com.br/probabilidades/14-eventos-independentes-e-probabilidade-condicional> Acesso em: 24 out. 2017.

probabilidade dada por q à p é 0” (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996, apud SANTOS, 2015, p.48 ).

Santos, (2015) apresenta um exemplo sobre o conceito lógico:

> Foram colocadas em uma caixa 10 bolinhas coloridas, sendo cinco verdes, duas vermelhas e três amarelas. Foram extraídas oito bolinhas dessa caixa, sendo duas vermelhas, três amarelas e três verdes. Qual a cor das bolinhas que estão na caixa? (SANTOS, 2015, p. 48).

A definição do conceito lógico parece simples, porém na prática não é, pois está associado às observações subjetivistas e frequentistas.

### 2.9.5 Conceito axiomático ou formal

O conceito formal ou axiomático originou-se basicamente dos axiomas de Kolmogorv que foi publicado em 1993, com o título “Foundations of the theory of probability” e constitui-se de três conceitos fundamentais : experiência aleatória, sigma álgebra dos acontecimentos e medida de probabilidade (AZEVEDO, 2004).

No conceito axiomático ou formal temos a probabilidade de uma determinada situação que consideramos como $(S)$, que é medida quando se escolhe; para o espaço amostral E, e A como um subconjunto do espaço amostral E. Com essas informações a probabilidade $\mathbb{P}(S)$ é definida pelo quociente entre a medida de A e a medida de E (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996). Particularmente, a probabilidade é um número entre 0 e 1, então $0 \leq \mathbb{P}(S) \leq 1$, dessa forma, a probabilidade do espaço amostral impossível é definido por $\mathbb{P}(E) = 0$ e uma probabilidade certo por $\mathbb{P}(E) = 1$.

Para Fernandes (1999, p. 54), “a probabilidade formal é um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas” A concepção do autor sobre o conceito axiomático é que “a abordagem estrutural não esclarece a própria natureza da probabilidade, apesar de os teoremas deduzidos constituírem um indicador de possíveis interpretações” (FERNANDES, 1999, p. 54).

Ao abranger as concepções dos autores sobre o conceito formal, percebe-se que o conceito subjetivista está associado à existência das observações do sujeito ao definir o conjunto do espaço amostral E, e as possibilidades de A acontecer. Assim, a partir de um subconjunto do espaço amostral o sujeito pode extrai o quociente, no qual a probabilidade de um determinado evento possa acontecer (SANTOS, 2015).

### 2.9.6 Conceito geométrico

A noção de probabilidade geométrica foi desenvolvida por Georges Louis Leclerc. No ano de 1732 ele herdou uma quantia em dinheiro e anos depois se torna Conde de Buffon, propôs o problema da agulha (VIANA, 2013).

Basicamente, no problema da agulha, o Conde de Buffon queria determinar algebricamente qual seria probabilidade do lançamento aleatório da agulha em um assoalho com linhas paralelas e que pudesse cair sem haver interseção com as linhas.

Outras situações relacionadas a probabilidade geométrica pelo Conde de Buffon, como o jogo Franc Carreau.

> "O jogo Franc Carreau, no qual a probabilidade de uma moeda lançada aletrimente em um piso ladrilhado com lajotas congruentes, cair completamente dentro de um dos ladrilhos, ou seja, sem cortar qualquer linha dos ladrilhos. Esses ladrilhos poderiam ser triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc" (VIANA, 2013, p.31).

No ano de 1777, Buffon, publicou seus Essai d'Arithmétique Morale, explicando a utilização da geometria na teoria das probabilidades:

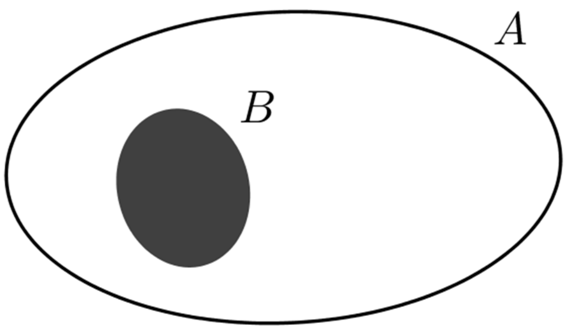
> A análise é o único instrumento do qual nos servimos até o momento, na ciência das probabilidades, para determinar e fixar as relações do acaso; a geometria parecia pouco apropriada para uma obra tão sutil; no entanto se olharmos de perto será fácil reconhecer que esta vantagem da análise sobre a geometria é verdadeiramente acidental, e que o acaso, segundo as modificações e condicionamentos que sofre, encontra-se no campo da geometria, tanto quanto que no da análise: para nos assegurarmos, será suficiente prestar atenção ao fato que os jogos e as questões de conjectura ocorrem ordinariamente unicamente quando utiliza razão de quantidades discretas; o espírito humano, mais familiar com os números que com as medidas de extensão, os preferiu sempre;os jogos são uma prova, porque suas leis ao uma aritmética contínua; para utilizar então a geometria em posse dos seus direitos sobre a ciência do acaso, não se trata de inventar os jogos que se desenrolam sobre a extensão e suas relações,

> ou calcular o pequeno número daqueles desta natureza que foram já encontrados. O jogo do franc-carreau pode nos servir de exemplo: eis as condições que são muito simples (...) (BADIZÉ et al., 1996, p. 11)

Mesmo Buffon não colaborando com suas pesquisas para o avanço da noção de probabilidade geométrica, ele traz situações importantes para que ela seja analisada.

Uma situação que podemos aplicar a probabilidade geométrica é a seguinte: supúnhamos que uma figura plana B, faça parte de outra figura plana A e que se tenha escolhido ao acaso um ponte de A. Se admitimos que a probabilidade de esse ponto pertencer a B é proporcional à área de B e não depende do lugar que B ocupa em A, então a probabilidade que o ponto selecionado este em B será: $\frac{\acute{A}rea\ de\ B}{\acute{A}rea\ de\ A}$

Figura 2.5: Plana B seja parte de uma outra figura plana A e que se tenha escolhido ao acaso um ponto de A.




**Fonte:** Elaboração própria.

Em síntese, a probabilidade geométrica envolve questões análogas à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas.

Segundo Santos (2010, p 18), os conceitos probabilísticos estão presentes no ideário dos alunos da educação básica, mesmo daqueles "que ainda não tiveram a oportunidade de vivenciar teoricamente conceitos relacionados à probabilidade como medida, ideia de aleatoriedade, probabilidade condicional, etc". A autora também ressalta que é importante pensar nas diferentes concepções probabilísticas no trabalho pedagógico com os alunos da educação básica, para tanto é importante que sejam utilizadas metodologias adequadas.

# Capítulo 3

# Definições Probabilísticas

Entendemos que, em nossa pesquisa são necessárias as definições probabilísticas. Em razão deste trabalho acadêmico cientifico está inserido em um programa de modelagem matemática e computacional em que a modelagem probabilística é uma de suas vertentes utilizada para o desenvolvimento do jogo. Portanto, as definições contribuíram para tal.

Para fundamento da pesquisa e compreensão do desenvolvimento neste capítulo abordaremos as definições e conceitos da teoria das probabilidades: espaço amostral, sigma-álgebra, medidas de probabilidades, variáveis aleatórias discretas, variáveis aleatórias contínuas, variável aleatória uniforme e como simular uma variável aleatória no computador.

## 3.1 O formalismo de kolmogorov

kolmogorov foi um matemáticos Russo que definiu os axiomas básicos para o desenvolvimento formal do que vem a ser modelo probabilístico. Tal modelo, esta baseado num tripé: espaço amostral, sigma-álgebra e medida de probabilidade.

Um conceito anterior ao tripé de probabilidade é o que vem a ser um experimento aleatório

**Definição 3.1.** *Seja $\epsilon$ um experimento aleatório,então $\epsilon$ é um experimento que pode ser repetido seguindo as mesmas condições e não alterando as chances para cada resultado possível a cada realização.*

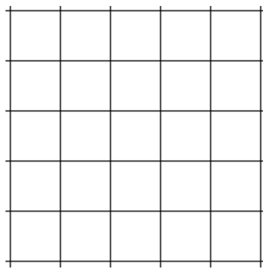
A partir do experimento, temos o seguinte conceito.

**Definição 3.2.** *Para cada experimento aleatório $\epsilon$ do tipo que estamos considerando, definiremos o espaço amostral como o conjunto de todos os resultados possíveis de $\epsilon$. Geralmente representaremos esse conjunto por $S$.*

Vejamos um exemplo sobre a definição de Espaço Amostral

**Exemplo 3.1.** *Considere o experimento de selecionar uma imagem de formato digital, possuindo apenas tons de cinza e com resolução $5 \times 5$, ou seja,*

Figura 3.1: Imagem digital com tons de cinzas



**Fonte:** Elaboração própria

*Uma possível representação dessa imagem é uma matriz de ordem $5 \times 5$ onde o valor de tom de cinza de um pixel é a entrada da matriz associada a esse tom de cinza. Cada tom pode ser um valor entre $[0, 255]$*

**Observação 3.1.** *$0$ significa preto e $255$ significa cor branca. Os outros valores correspondem a tons de cinza.*

*Suponha que a seleção de cada uma das imagens possíveis descritas acima é de forma aleatória. Portanto, o espaço amostral é:*

$$S = \{M_{5\times 5} \mid m_{i,j} \in \{0, 1, \ldots, 255\}\ 1 \leq i \leq j \leq 5.\}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,5} \\ & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & m_{5,5} \end{pmatrix}$$

Em seguida. o conceito de Sigma-álgebra é abordado.

**Definição 3.3.** *Uma sigma-álgebra $\mathcal{A}$, com respeito a um conjunto $S$ é uma coleção de subconjuntos de $S$, tais que:*

- $S \in \mathcal{A}$.
- *Se o subconjunto $B \in \mathcal{A}$ então o complementar de $B$ também pertence a $\mathcal{A}$.*
- *Se $B_1, B_2, \ldots$ pertencem a $\mathcal{A}$ então $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$.*

No caso em que $S$ é enumerável, o que se usa como sigma álgebra é o conjunto de todos os subconjuntos de $S$. Contudo, este conceito surge com muita importância, quando o conjunto $S$ é não enumerável. Apesar, de nesse segundo caso a sigma álgebra não possui todos os subconjuntos de $S$, ela vai ter os principais subconjuntos.

**Exemplo 3.2.** *Considere o espaço amostral das imagens digitais de resolução $5x5$ descrito acima, o qual é enumerável. Tome como sigma álgebra $\mathcal{A}$ todos os subconjuntos de $S$. Definamos os seguintes elementos de $\mathcal{A}$, denotados por $B$ e $C$, os quais são chamados de eventos.* $B = \{todas\ as\ matrizes\ com\ o\ mesmo\ tom\ de\ cinza\ em\ todos\ os\ pixels\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 255 & 255 & \cdots & 255 \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} \right\}$$

$C = \ \{\ Todos\ os\ tons\ da\ diagonal\ principal\ são\ nulos\}$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \\ & & 0 \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, m_{i,j} \ \in \{0, 1, 2 \ldots 255\}, \ i \neq j \right\}$$

O terceiro objeto do modelo probabilístico é uma medida de probabilidade. De fato, a medida será uma função que associa a cada evento da sigma álgebra $\mathcal{A}$ um valor real entre zero e um. Tal medida, satisfaz as seguintes relações.

- $\mathbb{P}(S) = 1$

- $0 \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$
- se $B_1, B_2, \ldots$ são mutuamente disjuntos entre si. Então, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} B_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$.

## 3.2 Variáveis Aleatórias

O conceito de variável aleatória surge da necessidade de atribuirmos valores aos resultados dos experimento. Com o intuito de realizarmos contas. Um fato interessante é que uma variável aleatória é de fato uma função e determinística.

**Definição 3.4.** *Considere um tripé $(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ como descrito acima. Uma função $X$, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real, $X(s)$, é denominado uma variável aleatória se para todo intervalo $(a, b)$ a imagem inversa $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ para todos os valores reais $a, b$.*

**Exemplo 3.3.** *Suponha que temos o mesmo tripé do Exemplo 3.2, ou seja, S é formado pelas matrizes de resolução $5 \times 5$ com tons de cinza:*

*Seja $s \in S$, com cada entrada da matriz $s$ denotada por $m_{i,j}$, definimos uma variável aleatória $X$ por*

$$X(s) = \sum_{1 \ \leq \ i \leq j \leq 5} \frac{m_{i,j}}{25}$$

**Observação 3.2.** *A variável aleatória $X$ corresponde a média dos tons de cinza da imagem*

**Exemplo 3.4.** *Outro exemplo de variável aleatória seria, por exemplo:*

$$Y = max_{1 \leq i \leq j \leq 5}\{m_{i,j}\}$$

*A variável aleatória $Y$ calcula o tom de cinza mais elevado da imagem*

**Definição 3.5.** *Sejam um experimento aleatório $\epsilon$ e o seu espaço amostral $S$. Seja $X$ uma variável aleatória definida em $S$ e seja $R_X$ seu conjunto imagem. Seja $B$ um evento definido em relação a $R_x$, isto é, $B \subset \ R_x$. Então $C$ equivalente a $B$ será definido assim:*

$$C = \{s \in S \ | X(s) \ \in B\} \tag{3.1}$$

Esta definição nos leva a entender como calcular a probabilidade de uma certa variável aleatória assumir determinados valores e justifica o fato da definição de variável aleatório requerer a condição da imagem inversa de qualquer intervalo está contida na sigma álgebra.

**Exemplo 3.5.** *Considere o experimento aleatório de lançar uma mesma moeda duas vezes. O espaço amostral associado ao experimento é* $S = \{C_aC_a, C_aC_o, C_oC_a, C_oC_o\}$. $C_a$ *é cara e* $C_o$ *é coroa. Seja* $X$ *o número de caras obtido. Portanto,* $R_x = \{0, 1, 2\}$. *Seja* $B = \{1\}$. *Já que* $X(C_aC_o) = X(C_oC_a) = 1$ *se, e somente se,* $X(s) = 1$*, Temos que* $C = \{C_aC_o, C_oC_a\}$ *é equivalente a* $B$.

Vamos da enfase a definição seguinte

**Definição 3.6.** *Seja* $B$ *um evento no conjunto imagem* $R_x$. *Nesse caso, definimos* $P(B)$ *da seguinte maneira.*

$$P(B) = P(C), \; onde \; C = \{s \in S \mid X(s) \in B\} \tag{3.2}$$

Vejamos o exemplo seguinte

**Exemplo 3.6.** *Se as moedas consideradas no Ex. 3.5 forem " equilibradas", teremos* $P(C_aC_o) = P(C_oC_a) = \frac{1}{4}$. *Portanto* $P(C_aC_o, C_oC_a) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. *Visto que o evento* $\{X = 1\}$ *é equivalente ao evento* $\{C_aC_o, C_oC_a\}$*, empregando a Eq. 3.1, teremos que* $P(X = 1) = P(C_aC_o, C_oC_a) = \frac{1}{2}$.

Um conceito extremamente importante em modelos probabilísticos é a definição de independência.

**Definição 3.7.** *Dois elementos* $A, B$ *da sigma-álgebra* $\mathcal{A}$ *são independentes se*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Exemplo 3.7.** *Continuando o Exemplo 3.6 considere o evento*

$$A = \{\textit{o resultado da primeira moeda foi } C_a\} \textit{ e}$$

$$B = \{ \text{ o resultado da segunda moeda foi } C_o\}.$$

*Vamos calcular $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ e $\mathbb{P}(A \cap B)$. Nós temos um espaço amostral com quatro possíveis resultados, cada um com a mesma chance $\frac{1}{4}$. Obtêm-se:*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

*Portanto, os eventos $A$ e $B$ são independentes.*

Em seguida, faz-se uma classificação entre algumas variáveias aleatórias. As variáveis aleatórias discretas e as variáveis aleatórias continuas.

### 3.2.1 Variáveis Aleatórias Discretas

A definição de uma variável aleatória discreta é a seguinte:

**Definição 3.8.** *Se o número de valores possíveis que $X$ assume, isto é, $R_X$ for finito ou infinito enumerável (situação onde os elementos de $R_X$ podem ser colocados em uma lista), $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ denominaremos $X$ de variável aleatória discreta. Além disso, em virtude dos axiomas de Kolmogorov temos que a cada possível resultado $x_i$ associaremos um número $p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ os quais devem satisfazer às seguintes condições:*

- $p(x_i) \geq \ 0 \, para \; todo$ *i,*
- $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

*A função $p$, definida acima, é denominada função de probabilidade $($ou função de probabilidade no ponto$)$ da variável aleatória $X$. A coleção de pares $[x_i, p(x_i)], i = 1, 2, \ldots,$ é denotada função de distribuição de probabilidade de $X$.*

**Exemplo 3.8.** *Considere uma variável aleatória $X$ com função de probabilidade dada por $p(i) = c\lambda^i/i!, i = 0, 1, \ldots,$ onde $\lambda$ é um valor real positivo. Nós vamos determinar*

$(a) P\{X = 0\}$

$(b) P\{X > 2\}$

**Solução 3.1.** *Como*

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = 1$$

*Temos*

$$c\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

*o que, como,*

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

*implica que* $ce^{\lambda} = 1$ *ou* $c = e^{-\lambda}$

*Com isso,*

$(a)$ $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}\lambda^0/0! = e^{-\lambda}$

$(b)$ $P\{X > 2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$ ■

### 3.2.2 Variável Aleatórias Continuas

De fato, o divisor de águas para que os axiomas de Kolmogorov terem tanto sucesso é quando analisamos as variáveis aleatórias continuas.

**Definição 3.9.** *Dizemos que* $X$ *é uma variável aleatória contínua se existir uma função não negativa* $f$*, definida para todo real* $x \in (-\infty, \infty)$ *, que tenha a propriedade de que, para qualquer conjunto* $B = (a, b)$*, intervalo real:*

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,
- $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$

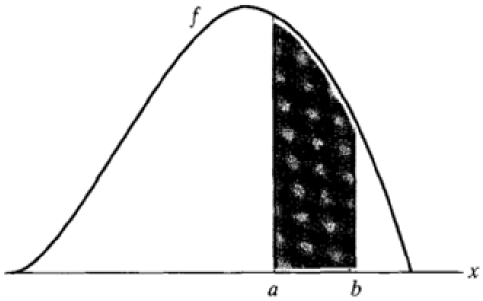
*A função* $f$ *é chamada de função densidade de probabilidade da variável aleatória* $X$ *(abreviação f.d.p. de* $X$*).*

Analisando a Figura 3.2 observamos o fato do cálculo da probabilidade ser igual ao cálculo de uma área.

No caso da variável aleatória continua, a sua função de distribuição acumulada é:

$$F(a) = \mathbb{P}\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Figura 3.2: $P(a \leq \times \leq b) =$ área da região sombreada




**Fonte:** Elaboração própria

**Exemplo 3.9.** *Suponha que $X$ considere que seja uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é dada como:*

$$f(x) = \begin{cases} C(x - x^2), \ 0 \ < \ x \ < \ 1 \\ 0 \qquad caso\ contrario \end{cases}$$

$(a)\ Qual$ é $o\ valor\ de\ C?$

$(b)\ Determine\ P(X > \frac{1}{2})$

**Solução 3.2.** $(a)$ *Como $f$ é a função densidade de probabilidade, devemos ter* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^1 C(x - x^2)dx = 1$$

*ou*

$$C\left[\ \tfrac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\ \right]\Big|_{x=0}^{x=1} = 1$$

*ou*

$$C = 6$$

*Portanto,*

$(b) P\{X > \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x - x^2)dx = \dfrac{1}{2}$

### 3.2.3 Variáveis Aleatórias Uniformes

Neste trabalho, as variáveis aleatórias utilizadas foram umas das mais simples possíveis: variável aleatória uniforme discreta e a variável aleatória uniforme continua.

**Definição 3.10.** *$X_n$ é uma variável aleatória uniforme discreta entre $0$ e $n-1$ se*

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n},$$

*para $i = 0, \ldots, n-1$, ou seja todos os número naturais entre $0$ e $n-1$ tem a mesma chance de ocorrer no experimento aleatório.*

**Definição 3.11.** *$X$ é uma variável aleatória uniforme continua no intervalo $[a, b]$ se a sua função de densidade de probabilidade $f$ assume o valor $f(x) = \frac{1}{b-a}$ se $x \in [a, b]$ e zero para qualquer outro valor de $x \notin [a, b]$.*

### 3.2.4 Como Simular uma variável aleatória no computador: Método da transformação inversa.

Uma questão de grande interesse é saber como simular variáveis aleatórias no computador. De fato, até hoje não se conseguiu com perfeição tal feito. Até o momento o que se faz é uma pseudo simulação, em outras palavras, uma simulação quase perfeita. A simulação mais simples realizada é simular uma variável aleatória uniforme discreta, ou seja, dado um número $n$ gerar números entre $0$ e $n-1$, tendo a propriedade de que cada número tem a mesma chance de sair. Ao fazer um programa em determinada linguagem de programação com o intuito de gerar números aleatórios, faz-se necessário utilizar um gerador como o citado acima. Basicamente, nós temos duas situações ou o $n$ é pequeno e isso seria a simulação da variável aleatória uniforme discreta ou o $n$ é muito grande e estaríamos gerando "aproximadamente"a variável aleatória uniforme contínua. Existe um teorema que nos faz simular outras variáveis aleatórias a partir da variável aleatória uniforme continua. Tal teorema é o seguinte: Seja $X$ variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade $F$ , ou seja,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

Onde $f$ é a $f.d.p$ de $X$. Agora, seja $Y = F(X)$ variável aleatória

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F(X) \leq y).$$

Assuma que $F$ tem inversa

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(F^{-1}F(X) \leq F^{-1}(y)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq F^{-1}(y)\right) \\ &= FF^{-1}(y) = y \qquad (3.3)\end{aligned}$$

que é a funçao de distribuição acumulada da variável aleatória uniforme continua no intervalo $[0, 1]$.

Conclusão: se $X$ é uma variável aleatória com função de distribuição de probabilidade $F$ e existe a inversa de $F$ então $F(X)$ é uma variável aleatória uniforme continua entre $[0, 1]$. Portanto, basta simular uma variável aleatória uniforme $[0, 1]$ vamos chama-la de $U$ e aplicar a função inversão da acumulada de $X$, ou seja, $F^{-1}(U)$ que estará simulando $X$. Esta é uma das técnicas de geração de variáveis aleatórias.

## 3.3 Computação Gráfica

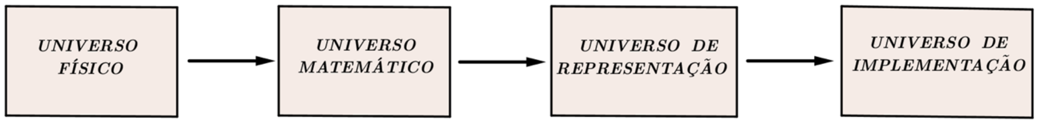
A definição da computação gráfica pelos autores Gomes & Velho é a seguinte "Conjunto de métodos e técnicas para transformar dados em imagem através de um dispositivo gráfico" ( Gomes & Velho, 2015, p.1).Tal definição foi norteadora para construção dos jogos digitais da nossa pesquisa.

### 3.3.1 Paradigma dos Quatros Universos

Na representação da modelagem matemática e computacional necessitamos aplicar e modelar diversos objetos do mundo real.

De acordo com os autores Gomes & Velho em seu livro Fundamentos da computação gráfica, o paradigma dos quatros universos pode ser incluído em Universo físico, Universo matemático Universo de representação e Universo de implementação sendo

Figura 3.3: Representação dos quatros paradigmas



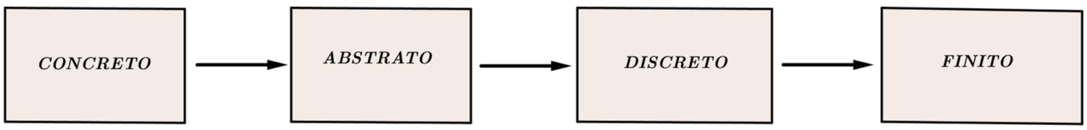

**Fonte:** Elaboração própria

assim;

> "O universo físico contem os objetos do mundo real que pretendemos estudar; o universo matemático contém uma descrição abstrata dos objetos do mundo físico; o universo da representação é constituído por descrições simbólicas e finitas associadas a objetos do universo matemático; e o universo da implementação associamos as descrições do universo da representação às estruturas de dados, com a finalidade de obter uma representação dos objetos no computador. O universo da implantação tem por objetivo separar a etapa de discretização (representação) das particularidades de uma determinada linguagem de programação utilizada na implantação " ( Gomes & Velho, 2015, p.8).

Uma aplicação ao "paradigma dos quatro universos " proposto pelos autores (Gomes & Velho, 2015, p.8) é utilizar o mesmo com o objetivo de construirmos aplicativos.

Figura 3.4: Paradigma dos quatros universos



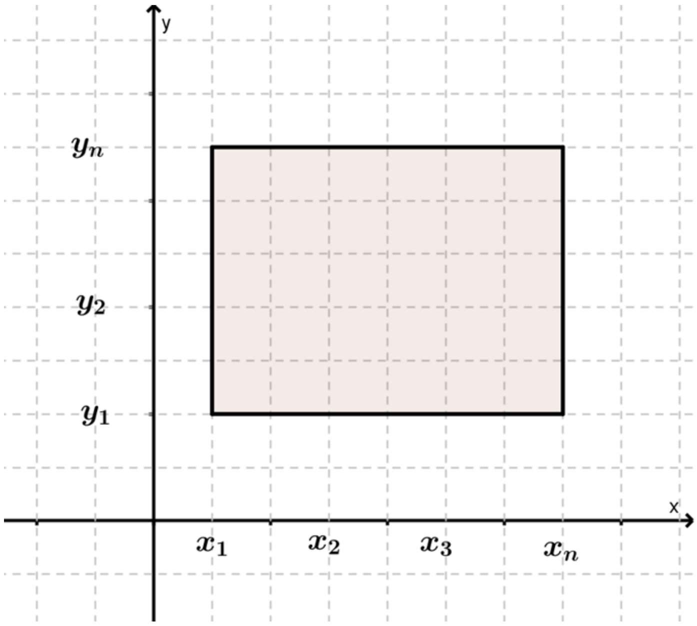

**Fonte:** Elaboração própria.

**Exemplo 3.10.** *Vamos considerar o exemplo de uma imagem em tons de cinza, para descrever o uso do paradigma dos quatro objetos. No universo físico, uma imagem, corresponde a emissão de luz de determinados objetos que estamos observando. Ou seja,* *está relacionada ao espectro de cores que os objetos emitem quando determinada fonte de luz reflete nos mesmos. No universo matemático, tal imagem pode ser representada por uma função*

***U.M*** $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Universo da representação **U.R**

Figura 3.5: Universo da representação



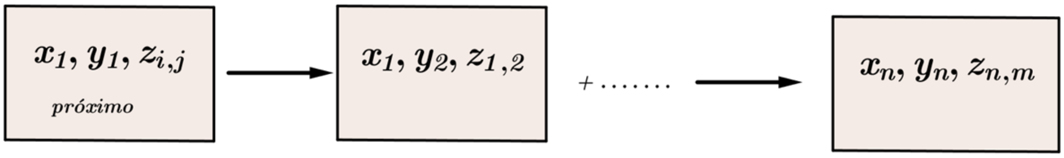

**Fonte:** Elaboração própria.

**U.R** $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{I} \times \mathbb{J} \longrightarrow [0, ..., 255]$, $(x_i, y_j) \longrightarrow z = f(x_i, y_j)$ onde $\mathbb{I} \times \mathbb{J} = (x_i, y_j), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$

No Universo da implementação discute-se qual estrutura de dados pode ser utilizada para descrever o universo da representação dentro do computador. Tais representações, podem ser listas encadeadas, duplamente encadeadas, matrizes, grafos, etc.

Temos $x_i, y_j, z_{i,j}$

Figura 3.6: Estrutura de dados uma lista




**Fonte:** Elaboração própria.

Neste caso temos como estrutura de dados uma lista.

# Capítulo 4

# Procedimentos Metodológicos

Neste capítulo apresentaremos as opções e procedimentos metodológicos da pesquisa, bem como os sujeitos envolvidos, pois segundo Andrade (2006, p.117), "metodologia é o conjunto de métodos ou caminhos que são percorridos na busca do conhecimento".

Nossa pesquisa se caracteriza como qualitativa. Assim, pauta-se em estudos como os de Ludke & André (1986), Bogdan & Biklen (1994) e Goldenberg (1997). Como característica da abordagem utilizada nessa pesquisa é possível destacar que: "a pesquisa qualitativa ou naturalista envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes" (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.13).

Na pesquisa qualitativa, Goldenberg (1997, p.19) menciona que os pesquisadores "buscam compreender os valores, crenças, motivações e sentimentos humanos, compreensão que só pode ocorrer se a ação é colocada dentro de um contexto de significado". Dessa forma, a autora complementa em seu discurso que "fruto da observação pura e simples, mas de um diálogo e de uma negociação de pontos de vista, do pesquisador e pesquisados" (GOLDENBERG, 1997, p. 24).

D'Ambrósio (2006, p. 78) esclarece que a área de Educação matemática vem desenvolvendo nos últimos anos pesquisas qualitativas, uma vez que é mais adequada para educação, pois "tem como foco entender e interpretar dados e discursos mesmo quando envolve grupos de participantes".

Para um bom encaminhamento de uma pesquisa é necessário no início à formulação e questionamento do problema, neste sentido que deve ser analisado e estudado de modo que possa ser observado por métodos científicos (GOLDENBERG, 1997).

Segundo Ludke e André (1986), na pesquisa qualitativa, o pesquisador deve ter estratégias no processo do desenvolvimento da pesquisa e no procedimento na análise, que são: 1) a delimitação progressiva do foco de estudo; 2) a formulação de questões analíticas; 3) o aprofundamento da revisão de literatura; 4) a testagem de ideias com os sujeitos; 5) o uso de comentários, observações e especulações ao longo da coleta. Além disso, instrumentos adequados de coletas são importantes para a pesquisa qualitativa, como registros escritos, gravações de áudio e vídeo, diário de campo, fotografias, etc.

## 4.1 Apresentando nosso percurso metodológico

Diante de tais considerações, iniciamos nossa pesquisa estabelecendo que o foco seria o desenvolvimento de jogos digitais para a formação de conceitos probabilísticos de alunos do Ensino Fundamental a partir dos apontamentos de pesquisas desenvolvidas na área da Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências. Com isso, elaboramos as seguintes questões:

- Quais as contribuições que as pesquisas em Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências trazem para a elaboração de jogos digitais?
- O que as pesquisas indicam sobre a formação de conceitos sobre probabilidade na Educação Básica?
- Que elementos precisam ter os jogos digitais para a formação de conceitos sobre probabilidade em aulas do Ensino Fundamental?

Após revisão bibliográfica visando responder os questionamentos, que apresentaremos no próximo capítulo, elaboramos dois jogos pedagógicos digitais, nomeados de Roleta Probabilística e Meteoritos. Mas, entendemos que o desenvolvimento dos jogos a partir de respaldo teórico não era garantia para bons resultados no processo de ensino e de aprendizagem. Dessa forma, novos questionamentos surgiram:

- Quais as contribuições dos jogos Roleta Probabilística e Meteoritos para a formação de conceitos probabilísticos dos alunos do Ensino Fundamental?

Essas novas questões nos conduziram a dois momentos de pesquisa. O primeiro, com o desenvolvimento de dois jogos digitais. E o segundo, uma sondagem , com a aplicação dos jogos desenvolvidos em uma classe do 6º ano do Ensino Fundamental. Assim, nossos objetivos foram:

**Objetivo geral:**

- Desenvolver jogos pedagógicos digitais para o ensino de probabilidade em uma perspectiva interdisciplinar com alunos do Ensino Fundamental.

**Objetivos Específicos:**

- Analisar as indicações das pesquisas na área da Educação/Educação Matemática/Ensino de Ciências quanto ao ensino de probabilidade para o desenvolvimento de jogos pedagógicos digitais;

- Observar se há motivação dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade frente aos jogos pedagógicos digitais Roleta Probabilística e Meteoritos

Visando apresentar nossas ideias ao longo do desenvolvimento dos jogos e analisar os comentários e observações dos alunos no decorrer da sondagem. De início, optamos por prints de telas da formulação dos jogos e registros feitos em diários de campo das discussões com os orientadores da pesquisa como instrumento de coleta de dados. Em seguida, optamos por registros de áudios, salvamento das respostas dos alunos no jogo, entrevistas semiestruturada realizada com o professor da turma e diário de campo do professor-pesquisador.

## 4.2 Apresentando a escola e os alunos, sujeitos da pesquisa de campo

Para a realização da sondagem de campo recorremos a uma escola do ensino regular com turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental II. A escola funciona nos turnos manhã e tarde, ao todo conta com 574 alunos.

O público alvo está na faixa etária de 10 a 16 anos de idade e são oriundos de comunidades de indicadores socioeconômico baixos do município de Campina Grande, sendo eles os seguintes bairros: Catolé, José Pinheiro, Monte Castelo, Santa Terezinha, Vila Cabral de Santa Terezinha, Glória, Centro e Mirante.

A escola possui quatro salas de 6º ano do Ensino Fundamental. Optamos por uma turma, a que continha menor número de alunos, pois não havia muitos computadores na sala de informática, e com duas aulas seguidas de 50 minutos cada uma. A pesquisa ocorreu no horário da aula de Matemática da turma, porém o professor da turma não acompanhou o trabalho.

Além disso, as turmas são compostas por cerca de 30 a 35 alunos. A turma em que desenvolvemos nossa pesquisa tinha 30 alunos, porém no dia da sondagem, um aluno faltou. As idades dos alunos participantes eram entre 10 e 14 anos de idade.

A infraestrutura física da escola é composta por: secretaria, sala de direção, sala de professor, laboratório de informática, salas de aulas e etc. A escola possui alguns equipamentos e materiais didáticos como: Datashow, Lousa Digital, Televisores, DVD, etc.

Mesmo possuindo tecnologias educacionais, contando com participação da comunidade escolar nos projetos da escola e aumento de trabalhos com projetos, ainda existem dificuldades a serem superadas. Destacam-se como principais: o baixo desempenho escolar dos discentes, a precariedade na manutenção do ambiente, insuficiência no número de funcionários na escola, quadra esportiva interditada pelo Ministério Público desde 2014, dentre outros. Além disso, observamos que o equipamento do laboratório de informática é obsoleto, e os serviços administrativos ainda não estão informatizados totalmente, faltam recursos financeiros suficientes para manutenção, etc.

## 4.3 Detalhando a pesquisa

Como mencionamos, nossa pesquisa foi organizada em dois momentos

### 4.3.1 Primeiro momento

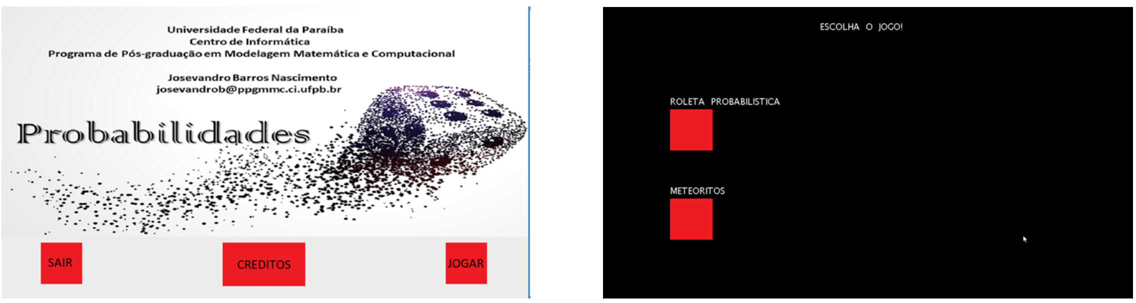
Inicialmente, foi realizado a revisão bibliográfica para a composição do referencial teórico e elaboração de diretrizes que foram utilizadas na construção de dois jogos pedagógicos digitais.

Neste momento, foram levantadas hipóteses sobre importância de envolver os diferentes conceitos probabilísticos e as possibilidades de ensino sugeridas na bibliografia pesquisada. Assim, para construção dos jogos pedagógicos digitais buscamos retomar conceitos matemáticos importantes para a compreensão dos conceitos probabilístico, utilizar a perspectiva da resolução de problemas e da linguagem probabilística, entre outros

A partir dessas diretrizes, elaboramos os jogos Roleta Probabilística e Meteoritos. No jogo Roleta Probabilística exploramos a análise das chances de números pares e ímpares serem sorteados em uma roleta, identificação dos números pares e ímpares, conceitos probabilísticos clássico e frequentista. O jogo Meteoritos envolve a análise das chances de destruir o maior número de meteoritos a partir da percepção de conceitos geométricos de diversas variáveis como: distância, posição relativa e diâmetro.

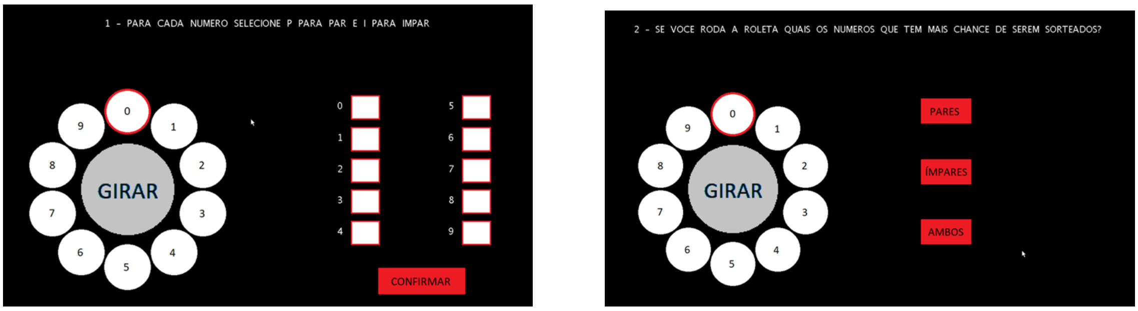
Ainda no primeiro momento, foi feito um esboço sobre a proposta dos jogos e a elaboração do jogo experimental.

Figura 4.1: Janela de visualização e escolha do jogo



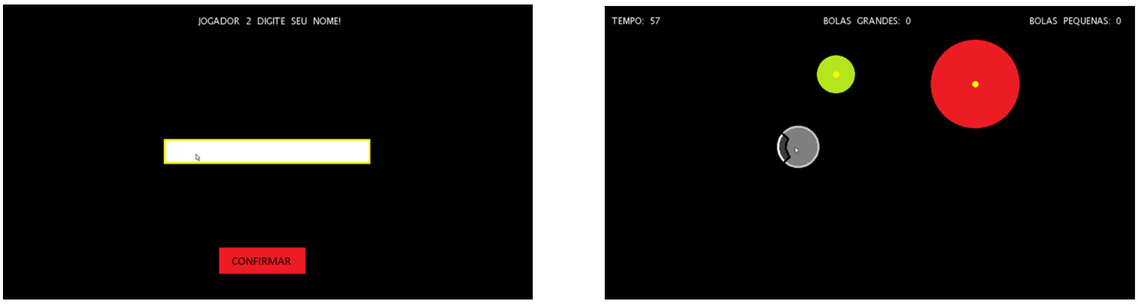

**Fonte:** Elaboração própria.

Figura 4.2: Instruções da fase 1 do jogo roleta probabilística




**Fonte:** Elaboração própria.

Figura 4.3: Instruções da fase 2 do jogo meteoritos




**Fonte:** Elaboração própria.

A partir dos esboços e das jogadas novas versões foram criadas. No próximo capítulo apresentaremos essa versão de forma detalhada. .

### 4.3.2 Segundo momento

Já no segundo momento realizamos a atividade de campo na referida escola. Ela foi realizada no laboratório de informática e ministrada pelo professor-pesquisador. Antes de realizarmos a sondagem verificamos se todos os computadores estavam funcionando e foram instalados os jogos em todas as máquinas.

A nossa pesquisa foi desenvolvida em dois dias da semana: segunda e terça-feira. Foi realizada nas aulas de matemática, sendo que cada aula era composta de 50 minutos de aulas. Em ambos os dias iniciamos as 13h00min hora e terminamos às 14h40min.

No primeiro dia havia 29 alunos presentes na sala de aula e desenvolvemos o jogo da roleta probabilística. No segundo dia contamos com a presença de 28 alunos para a realização do jogo meteoritos. Na segunda-feira os alunos jogaram individualmente e na terça-feira em duplas. Os alunos, entre si, escolheram com quem jogariam.

No primeiro dia da pesquisa de campo, iniciamos com uma roda de conversas com os alunos, a partir de alguns questionamentos: Vocês já usaram alguma tecnologia digital nas aulas, como: computador, tablet, celular e outros? Vocês gostam das aulas de Matemática? Vocês sabem o que é probabilidade? Vocês se lembram de ter estudado probabilidade na escola?

O objetivo dessa conversa era observar os conhecimentos prévios que os alunos possuíam sobre as aulas de matemática, as tecnologias e a probabilidade, focos da nossa pesquisa. Na sequência, os alunos sentaram cada um frente a uma mesa com computador. Passamos uma lista numerada para que cada aluno marcar o computador que estava utilizando, para posteriormente identificar os registros produzidos pelos alunos nos respectivos computadores e poder compará-los no segundo dia de pesquisa.

Foi explicado que eles iriam jogar, mas não foi dada nenhuma explicação introdutória sobre o conteúdo matemático envolvido no jogo ou como executá-lo, pois o objetivo era que os mesmos compreendessem os conceitos à medida que interagiam com o jogo.

Durante as jogadas, à medida que tinham dúvidas, os alunos recorriam ao professor-pesquisador. Depois de 20 minutos de jogo, os alunos já haviam jogado várias vezes, o professor-pesquisador deu por encerrado esse momento e na sequência, fez algumas perguntas para compreender quais as impressões dos alunos quanto ao jogo. As perguntas foram: O que você achou da aula de hoje? Qual jogo você mais gostou? Por quê? O que achou difícil no jogo? Explique. O que achou muito legal? Por quê? Gostaria de ter outras aulas assim? Por quê?

Neste dia foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: gravação de áudio das conversas com alunos, as capturas das telas e o diário de campo do professor-pesquisador.

No segundo dia da sondagem, o professor-pesquisador foi recebido com muita euforia pelos alunos. Foi explicado que eles iram jogar um outro jogo, o meteoritos e que eles deveriam escolher um colega para jogar com eles. Cada dupla escolheu uma máquina para jogar e como no dia anterior, foi passada uma lista para relacionar os alunos ao computador que estava usando

Durante o desenvolvimento do jogo, o professor-pesquisador ficou atento às observações dos alunos mediante ao jogo e quanto às estratégias utilizadas por eles para vencer o jogo. Depois de várias jogadas com cerca de 30 minutos, o professor-pesquisador deu por encerrada a aula e perguntou se os alunos gostaram do jogo.

De maneira semelhante ao dia anterior, os instrumentos de coleta de dados foram: gravação de áudio das conversas com alunos, as capturas das telas e o diário de campo do professor-pesquisador.

No próximo capítulo apresentaremos a análise dos jogos elaborados: roleta probabilística e meteoritos

# Capítulo 5

# O desenvolvimento dos jogos pedagógicos digitais

O jogo é apontado nos PCN como uma maneira de fazer matemática, além de possibilitar a resolução de problemas. Assim, são considerados por alguns autores como uma tendência metodológica que pode promover o ensino e a aprendizagem da Matemática de forma lúdica.

Diante dos estudos realizados entendemos que o jogo nas aulas de matemática envolve os alunos em uma competição saudável, os desafios e os motivam a conhecer seus limites e suas potencialidades. Dessa forma, pensamos no jogo computacional como um jogo pedagógico digital que possibilita ao aluno tanto o acesso ao recurso digital como ao ensino e aprendizagem da matemática.

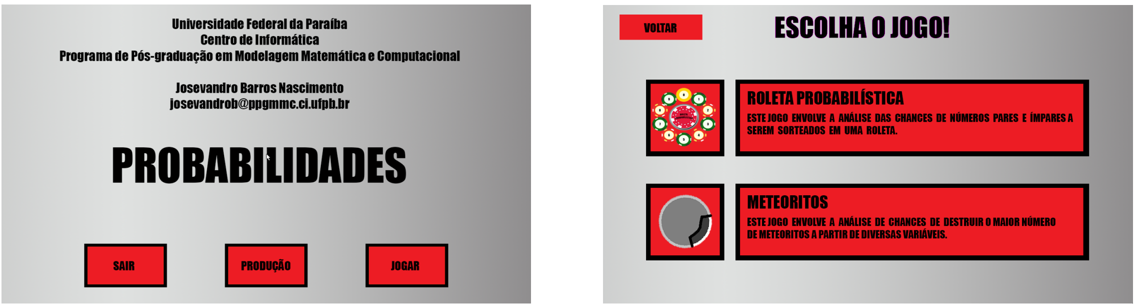
Assim, visando o desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos alunos do Ensino Fundamental a partir das considerações apresentadas em pesquisas na área de ensino de Matemática, como como de documentos oficiais, como os PCN, desenvolvemos dois jogos chamados "Roleta Probabilística e Meteoritos".

Na sequência, apresentamos os jogos, as orientações e objetivos/considerações relacionados a cada fase e a modelagem computacional aplicada aos jogos. Para tanto, apresentamos uma sequência de telas, apresentadas nas figuras. As telas representam na íntegra a sequência que o jogador terá em cada um dos jogos.

## 5.1 Roleta Probabilística

Na figura 5.1 temos a janela de visualização e de escolha de jogos. O aluno opta por um dos jogos, Roleta Probabilística ou Meteorito. Junto ao nome dos jogos, apresentamos uma breve explicação sobre o jogo para que o aluno tenha ciência do conteúdo da matemática que está envolvido em cada jogo.

Figura 5.1: Janela de visualização e escolha do jogo.




**Fonte:** Elaboração própria.

Imaginemos que o aluno optou pelo jogo Roleta Probabilística, que envolve a análise das chances de números pares e ímpares a serem sorteados em uma roleta. Ao fazer essa escolha, ele será remetido às telas da figura 5.2.

Figura 5.2: Fase 1: instruções e identificação de números pares e ímpares


**Fonte:** Elaboração própria.

Na primeira tela o aluno terá as instruções sobre a fase 1 que indica o que a ação que ele irá realizar. Na fase 1 ele terá que identificar os números que são pares ou ímpares, por meio das letras “p” ou “i”, tal como apresentado na segunda tela.

Optamos por essa verificação, pois caso o aluno não tenha essa compreensão, ele pode fazer uma avaliação equivocada das chances de sorteios apresentados nas próximas fases.

Figura 5.3: *Feedback* à resposta do aluno a fase 1


**Fonte:** Elaboração própria.

Constatamos em nossos estudos que a comunicação, assim como as orientações sobre seus acertos e erros nas aulas de matemática devem fazer parte do processo de ensino e contribui para a formação de conceitos, uma vez que o aluno começa a refletir sobre o porquê do erro e também do acerto.

Dessa forma, incluímos em todas as fases do jogo, depois de cada jogada, um *feedback* ao jogador. Se ele acertou a jogada, depois do *feedback*, ele pode voltar e jogar novamente ou avançar para a próxima fase. Caso tenha errado, deverá jogar novamente. Espera-se que ele reflita sobre seu erro com essa possibilidade.

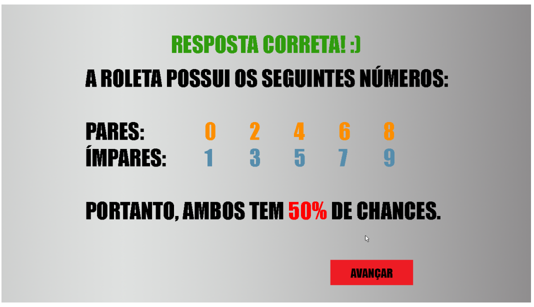
Figura 5.4: Fase 2: instruções e escolha

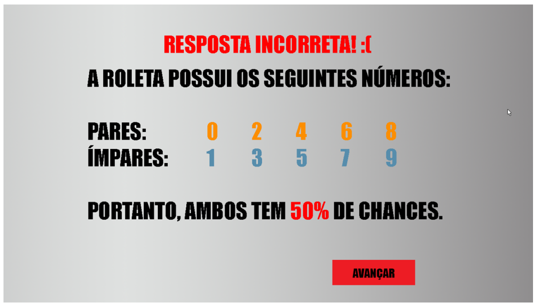

**Fonte:** Elaboração própria.

Como na fase anterior, no início, o jogador tem as instruções (figura 5.4). Nesta, ele observará os números pares e ímpares que há na roleta e escolherá uma resposta a pergunta "Ao girar a roleta qual o resultado mais provável?". Ele tem como opção de resposta: ímpares, pares ou ambos.

Essa fase contribui para a formação do conceito probabilístico clássico, pois as chances de resultados pares e ímpares no jogo são equiprováveis. Depois que fizer a escolha, ele será remetido a uma tela com o *Feedback*.

Figura 5.5: Fase 2: *feedback*



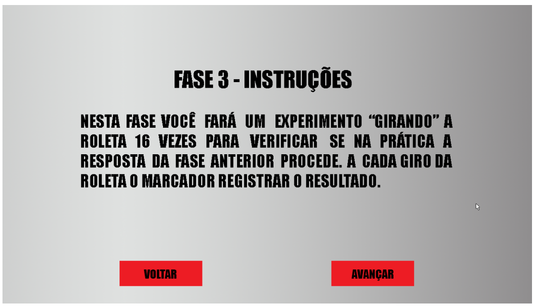




**Fonte:** Elaboração própria.

Na fase 2, o feedback para quem dá a resposta correta ou incorreta é o mesmo. Ele tem a informação de quais números da roleta são pares, quais são ímpares e o percentual de chances, neste caso, ambos têm as mesmas, 50%. Com essa informação o jogador que acertou tem a confirmação que sua hipótese estava correta e o que errou, a explicação do porquê da resposta não ser a que ele escolheu.

Depois que o jogador analisou as chances dos números pares e ímpares serem sorteados, ele vai para a fase 3 para verificar se as chances estimadas na fase anterior acontecem em experimentos.

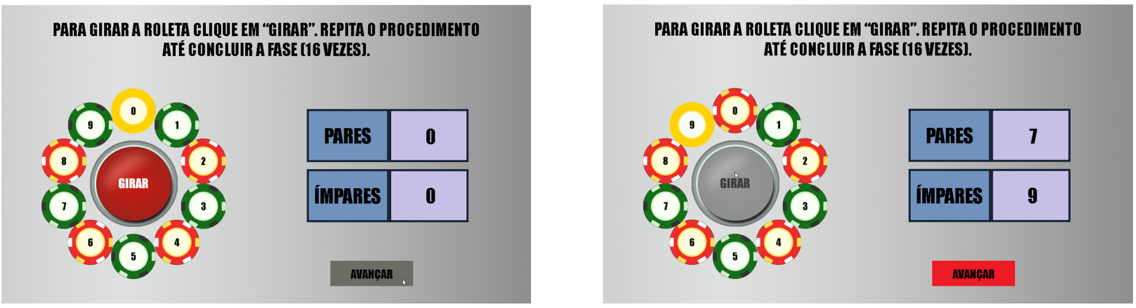
Figura 5.6: Fase 3: instruções




**Fonte:** Elaboração própria.

Quando inicia a fase 3, o jogador se depara com uma tela que contém a ação que ele deve realizar, uma roleta, que gira ao clicar na palavra "girar", e contadores, que farão a marcação automática dos resultados pares e ímpares obtidos nas jogada figura 5.7. Essa fase é encerrada após 16 jogadas (giros da roleta). Optamos por 16 giros, pensando na possibilidade de chegar no resultado estimado e também, de não deixar o jogo monótono com um número excessivo de jogadas. O resultado da roleta é aleatório.

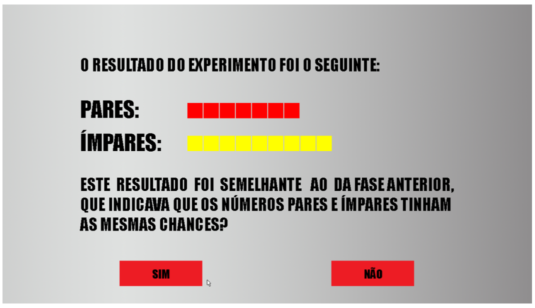
Figura 5.7: Roleta probabilística: primeiro experimento




**Fonte:** Elaboração própria.

Esta fase tem por objetivo envolver o jogador em um contexto em que o conceito probabilístico frequentista se faz presente. Assim, após “girar” a roleta 16 vezes o jogo irá parar e o jogador não conseguirá mais girar a roleta e deverá clicar em “avançar”. Ao realizar essa ação, será encaminhado à tela com o resultado do experimento.

Figura 5.8: Fase 3: primeiro resultado do experimento

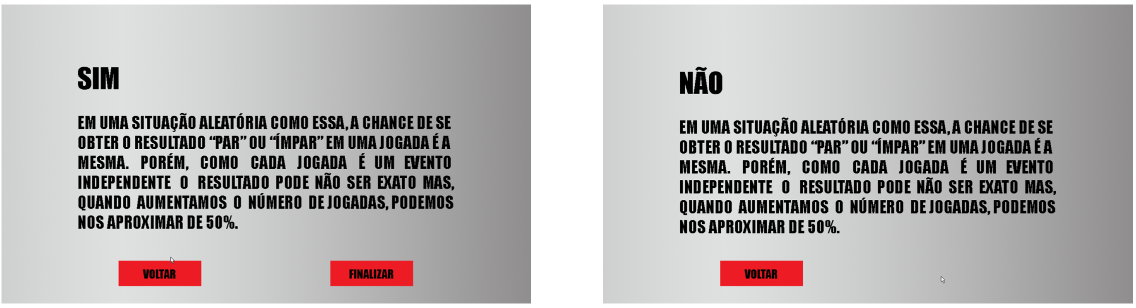



**Fonte:** Elaboração própria.

O resultado do experimento é apresentado por meio de um gráfico de barras vertical visando auxiliar na comparação dos resultados obtidos. A pergunta “este resultado foi semelhante ao da fase anterior, que indicava que os números pares e ímpares tinham as mesmas chances?” é apresentada abaixo do resultado, com a opção “sim” ou “não” como resposta. Essa questão tem por objetivo que o aluno reflita sobre as probabilidades estimadas e experimentadas. Com isso, poderá desenvolver noções sobre o conceito de probabilidade frequentista.

Depois de optar pela resposta “sim” ou “não”, o jogador será encaminhado a tela do *Feedback*.

Figura 5.9: Fase 3:*Feedback*




**Fonte:** Elaboração própria.

Ambas as respostas, sim ou não, trazem as mesmas explicações "Em uma situação aleatória como essa, a chance de se obter o resultado "par" ou "ímpar" em uma jogada é a mesma, porém, como cada jogada é uma evento independente o resultado pode não ser exato quando aumentamos o número de jogadas, podemos nos aproximar de 50%". Independente da resposta, o jogador pode continuar o experimento que já havia realizado (figura 5.9 e figura 5.10 -abaixo) clicando na palavra "voltar". A diferença nas telas é que se o aluno responder não, ele não terá a opção para finalizar o jogo.

Figura 5.10: Retomando o experimento


**Fonte:** Elaboração própria.

O objetivo de continuar o experimento é que o jogador tenha a possibilidade de constatar que quando ampliamos o número de jogadas podemos nos aproximar das probabilidades estimadas.

## 5.2 Modelagem computacional do jogo da roleta

A modelagem computacional aplicada aos jogos tem como transferi-lo para o uma interface gráfica a tarefa de desenvolver os cálculos probabilísticos por intermédio de uma interação virtual. A definição de computação gráfica pelos autores Gomes & Velho é a seguinte "conjunto de métodos e técnica para transformar dados em imagem através de um dispositivo gráfico" (GOMES & VELHO. 2015, p.1). Tal definição foi norteadora para construção dos jogos digitais da nossa pesquisa. Podemos iniciar nossa perspectiva na construção e aplicações dos conceitos:

## Concreto

Gerar computacionalmente o jogo da roleta em que o Jogo consiste em um disco e uma bola que gira na borda do círculo de maneira aleatória parando no final em um número entre $0$ e $n-1$ onde cada número tem a mesma chance de ser sorteado.

## Abstrato

Um círculo é dividido em $n$ setores circulares de mesma área formando uma imagem. A partir dessa imagem uma bola percorrer os setores do circulo e paramos a bola em um dos setores sorteados de forma uniforme entre $0$ e $n-1$.

## Discreto

Neste caso temos $n$ setores, uma velocidade de giro, matriz de rotação (de um ângulo fixo) e um número sorteado de forma aleatória entre $0$ e $n-1$.

## Implementação

Associamos um gerador de números aleatórios. Escolhemos um número entre $0$ e $n-1$. A imagem base é a roleta e sobrepomos o caminho que a bola percorre usando uma matriz de rotação de um ângulo $\theta$ (pequeno).

**Exemplo 5.1.** **Rotação**

*No plano uma rotação de um ângulo $\theta$ é representado matematicamente (abstrato) por uma matriz da forma:*

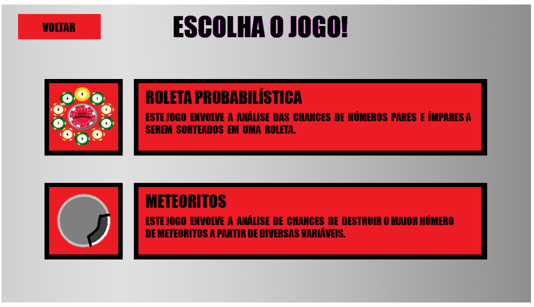
$$M_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

*A implementação de uma rotação de um ângulo $\theta$ sobre um ponto $P$ é $q = M_\theta P$ e $q$ é o ponto $P$ rotacionado.*

## 5.3 Meteoritos

Como mencionamos anteriormente, inicialmente o aluno/jogador terá que clicar em "jogar" e depois escolher um dos jogos.

Figura 5.11: Escolha do jogo




**Fonte:** Elaboração própria.

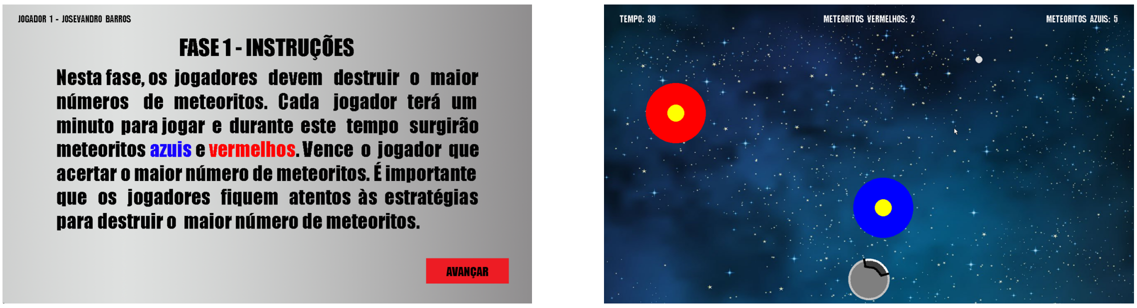
Suponhamos que o aluno optou pelo jogo meteoritos (figura 5.11), ele terá que destruir o maior número de meteoritos a partir de diversas variáveis para vencer o jogo. Ao fazer essa opção será direcionado para tela de identificação (figura 5.12). Esse jogo é para ser jogado entre dois participantes.

Figura 5.12: Identificação dos participantes


**Fonte:** Elaboração própria.

Após registrar seus nomes e clicar em “avançar”, os alunos serão submetidos à tela com as instruções do jogo (figura 5.13). Assim, como no jogo roleta probabilística, o meteoritos tem três fases, como é em dupla, cada jogador terá um tempo para fazer suas jogadas.

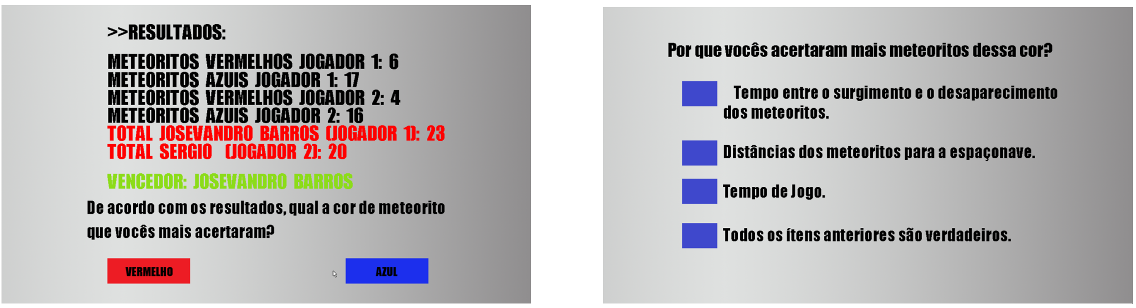
Figura 5.13: Fase 1: instruções e jogo




**Fonte:** Elaboração própria.

Nesta fase 1 exploramos a relação entre as chances de acertar os meteoritos e a distância que os mesmos se encontram da espaçonave. Na tela surgirá meteoritos de cores vermelhas e azuis. Os meteoritos vermelhos sempre surgirão mais distante da espaçonave e os azuis mais próximo. Cada jogador terá um minuto para jogar e depois que ambos jogarem, terão o *feedback*.

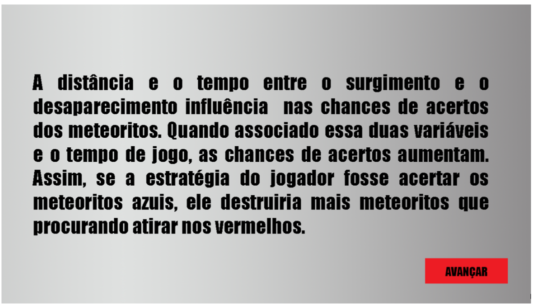
Figura 5.14: Fase 1: Feedback e questionamento




**Fonte:** Elaboração própria.

Na tela dos resultados será apresentada a quantidade de meteoritos de cada cor e total acertado por ambos os jogadores. O objetivo é que os alunos percebam alguma relação entre os meteoritos mais e menos acertados por ambos. Assim, visando promover reflexões sobre os meteoritos mais acertados, os alunos serão encaminhados ao questionamento “Por que vocês acertaram mais meteoritos dessa cor? Quatro frases serão apresentadas como alternativas das possíveis respostas: Tempo entre o surgimento e desaparecimento dos meteoritos, distâncias dos meteoritos para a espaçonave, tempo de jogo e todos os itens anteriores são verdadeiros. Após a escolha, os alunos serão encaminhados a tela de *Feedback*.

Figura 5.15: Fase 1: *Feedback* Meteoritos

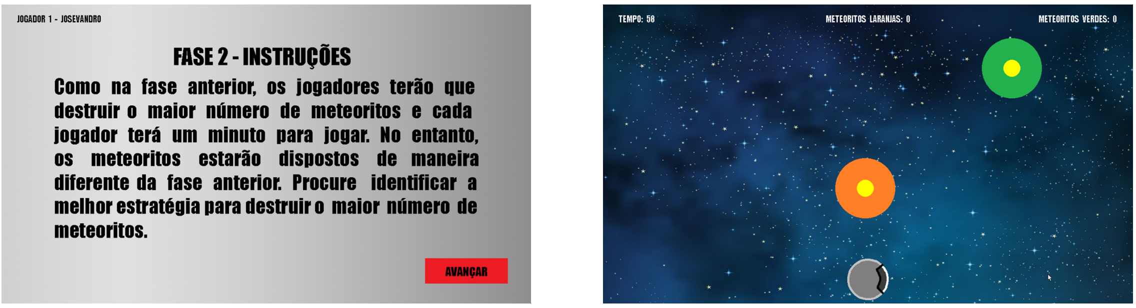



**Fonte:** Elaboração própria.

O objetivo desse *feedback* é explicar para o aluno que “a distância e o tempo entre o surgimento e o desaparecimento influencia nas chances de acertos dos meteoritos e, que quando essa duas variáveis e o tempo de jogo estão associados, as chances de acertos aumentam.

Após o *feedback*, ao clicar em avançar, surgirá a tela com a introdução da segunda fase.

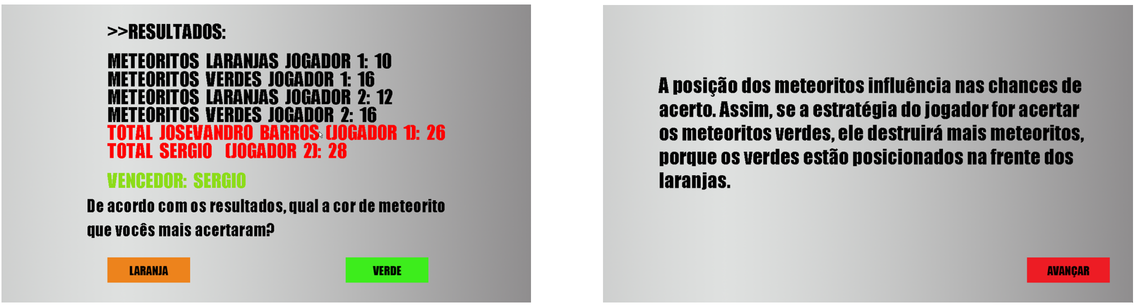
Figura 5.16: Fase 2: instruções e jogo




**Fonte:** Elaboração própria.

Nesta fase os meteoritos são das cores laranjas e verdes e surgirão aleatoriamente, um parcialmente sobreposto ao outro. Assim como na fase anterior, os jogadores terão que destruir o maior número de meteoritos em determinado tempo, um questionamento e *feedback* serão apresentados na sequência.

Figura 5.17: Fase 2: resultados e *Feedback*

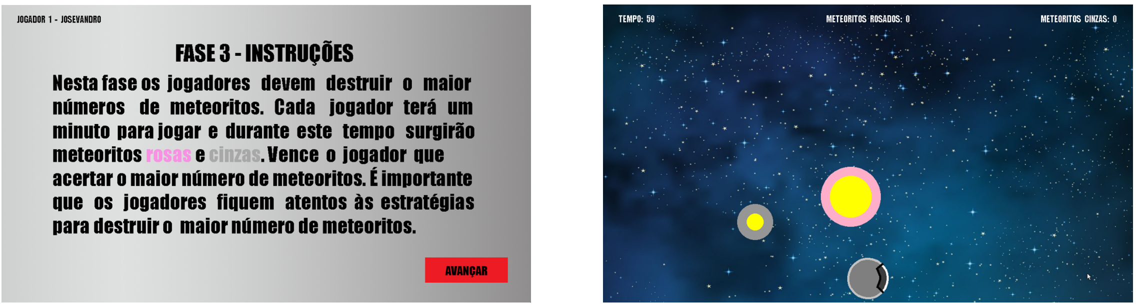



**Fonte:** Elaboração própria.

Nesta fase também são apresentados os resultados aos alunos, por cor e total, e eles são conduzidos a refletirem sobre os meteoritos que mais acertaram. O *feedback* explica que a posição dos meteoritos influenciam nas chances de acertos.

Em seguida, ao clicar em "avançar", o aluno passa para a fase 3 (figura 5.18).

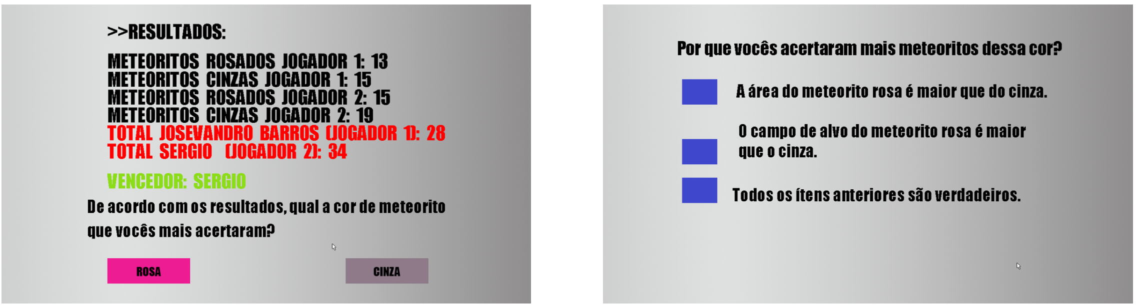
Figura 5.18: Fase 3: Instruções e jogo




**Fonte:** Elaboração própria.

A figura 5.18 apresenta as instruções e a tela da terceira fase do jogo, com os meteoritos das cores rosas e cinzas. Nesta fase, o objetivo é refletir sobre a relação entre os diâmetros dos meteoritos e as chances deles serem acertados. Para isso, os meteoritos rosas (diâmetro maior) e cinzas (diâmetro menor) surgirão de forma aleatória na tela, ambos surgem e desaparecem juntos. Surgindo e desaparecendo na tela do jogo

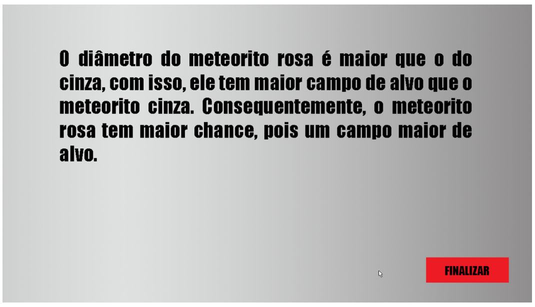
Figura 5.19: Fase 3: *Feedback*




**Fonte:** Elaboração própria.

Depois das jogadas, os alunos serão encaminhados à fase dos resultados e novamente serão conduzidos a reflexões sobre as cores que mais acertaram e a hipótese motivo de tais acertos, "a posição dos meteoritos em relação à espaçonave, o campo de alvo do meteorito rosa é maior que do cinza ou todos os itens anteriores são verdadeiros". Por fim, recebem o *feedback* que explica que o campo de alvo dos meteoritos influência nas chances de acertos.

Figura 5.20: Fase 3: *Feedback*




**Fonte:** Elaboração própria.

O jogo meteoritos possibilita observar que algumas relações como as de distância, posição relativa e diâmetro, podem interferir na probabilidade de acertos. As situações propostas conduzem os alunos a reflexões sobre aos conceitos de probabilidade frequentista, axiomático e geométrica.

Ao desenvolvermos os jogos roleta probabilística e meteoritos, tomamos com uma perspectiva dos jogos pedagógicos digitais. Dessa forma, entendemos que os jogos pedagógicos digitais possibilitam aos jogadores a interação entre o lúdico e o educativo, pois os dados que interagem entre si.

Neste processo da construção e criação levamos em consideração diversos fatores, como a importância da resolução de problemas na formação do pensamento probabilístico, da linguagem e dos alunos serem envolvidos em situações didáticas que envolvam as diferentes concepções (SANTOS, 2010).

Como mencionamos anteriormente, nossa pesquisa foi realizada em dois momentos, elaboração dos jogos e pesquisa de campo. No próximo capítulo apresentaremos os resultados e análises da pesquisa de campo.

## 5.4 Modelagem computacional do jogo dos meteoritos

Utilizando das interfaces gráfica computacional o jogo (meteoritos) foi elaborado com o intuito de dialogar por intermédio do jogo com os estudantes conceitos de probabilidade, por exemplo, probabilidade geométrica.

### Concreto

Simular um jogo de espaçonave que destrói os meteoritos, em três níveis. Neste caso termos:

- Nível 1. Meteoritos vermelhos e azuis onde os meteoritos azuis só aprecem na parte inferior da imagem e os meteoritos vermelhos sempre aparecem na parte superior da imagem;

- Nível 2. Meteoritos laranja e verdes onde os meteoritos estarão dispostos em quaisquer pontos da tela.

- Nível 3 Meteoritos de cores rosa e cinza. Os meteoritos com a cor rosa tem um raio maior que os meteoritos com a cor cinza os quais são distribuídos de forma aleatória no retângulo.

Os meteoritos só ficam aparecendo um certo espaço de tempo, ou eles são destruídos ou eles somem.Todos os meteoritos aparecem de forma aleatória. A espaçonave fica parada embaixo no meio da tela, nas o canhão de tiro se movimenta ao longo de um setor circular.

## Abstrato

A tela é um retângulo. Os meteoritos são objetos circulares. Os centros dos círculos são escolhidos de forma aleatória (usando duas variáveis aleatórias uniformes uma para cada coordenada). Portanto, cada meteorito está definido por um ponto, o centro do círculo, na tela (retângulo) e um raio $r$ (na terceira fase temos dois valores de $r$). A espaçonave está definida pelo ponto médio dos extremos inferiores da tela. O tiro do canhão está definido por um ângulo entre $[-45^o, 45^o]$, ângulo esse referente ao eixo vertical que passa pelo centro da espaçonave.

## Discreto

Temos um retângulo R= [a,b] x [c,d] em que sorteamos aleatoriamente pontos $(P_i)_i$ de uma maneira uniforme em R. Calculamos sua posição relativa no retângulo R, caso seja na parte superior na tela associamos a cor vermelha, e se for na inferior associamos a cor azul. Em seguida, ficamos monitorando se o jogador atirou, ou seja, qual foi o ângulo do tiro e se esse segmento de reta definido pelo ângulo passa por alguma espaçonave. Além disso, devemos representar na tela o tiro (um círculo bem pequeno que se movimenta com velocidade constante na tela). O último teste depende do tempo que o círculo fica aparecendo e o tempo que o tiro tem para se deslocar e acertar o círculo.

No nível 2, os meteoritos são alternadamente das cores laranja e verde. Observe que não depende da posição relativa do meteorito ser da cor verde ou da cor laranja. Escolhe-se um ponto aleatoriamente e alternadamente atribuímos a cor verde ou a cor laranja.

No nível 3, os meteoritos são alternadamente das cores rosa e cinza. Os meteoritos de cor rosa tem um raio $r_1$ maior que o raio $r_2$ dos meteoritos da cor cinza.

## Implementação

- Lista de círculos;
- Lista com a direção e distâncias dos tiros para os círculos ativos;
- Exibir os círculos, a espaçonave e os tiros.

# Capítulo 6

# O desenvolvimento dos jogos pedagógicos digitas na sala de aula

Neste capítulo apresentamos a análise dos dados da pesquisa de campo. Apresentamos desde o primeiro momento com a problematização do tema e com os questionamentos sobre os conceitos de probabilidades presentes nos jogos pedagógico digitais e no desenvolvimento da pesquisa de campo. Além de considerarmos os questionamentos e reflexões feitas antes, durante e depois.

Para as descrições das análises dos dados da nossa pesquisa, utilizamos: os registros através do jogo que automaticamente salva as respostas escolhidas pelos alunos na execução do jogo como além de registro dos questionamentos dos alunos em áudio e um questionário após o término do jogo onde questionamos os seguintes pontos: O que você achou da aula de hoje? Qual o jogo você mais gostou? Por quê? O que achou difícil no jogo? Explique. O que achou muito legal? Por quê? Gostaria de ter outras aulas assim? Por quê?

Santos (2010), afirma que a modificação na dinâmica de uma aula interativa ocorre no intuito é de observar o formato mais objetiva em que este presente os conceitos sobre a probabilidade.

Para a compreensão das soluções desenvolvidas sobre o ambiente dos jogos digitais e os pensamentos probabilísticos presente, foi realizado um estudo em que aborda sua aplicação e avaliação sobre sua usabilidade voltada para jogos, com o alvo de compreender as concepções dos jogadores neste sentido da nossa pesquisa os “alunos” do 6º ano do Ensino Fundamental com o uso dos jogos e os pensamentos probabilísticos seja eficiente.

Foi realizada, antes da aplicação dos jogos produzindo pelo professor-pesquisador uma discussão acerca dos conceitos prévios sobre probabilidade. E foram construídos e verificados dois jogos a roleta probabilística e os meteoritos, aplicando uma breve avaliação sobre o desempenho. Para Avellar (2010, p.2). “A partir desta discussão, percebemos o nível individual de conhecimento das operações fundamentais dos alunos, no qual foi constatado um grau mínimo de dificuldade”.

Assim, nos próximos tópicos apresento-lhes as análises realizadas sobre aplicação do jogo.

## 6.1 Primeiro dia da pesquisa de campo: episódios e o jogo roleta probabilística

No primeiro contato com os alunos, antes de iniciar o jogo “Roleta Probabilística”, algumas indagações foram feitas pelo professor-pesquisador aos alunos em uma roda de conversa. Tal procedimento, segundo Oliveira (2013), deve estar presente no ambiente escolar, pois somente a tecnologia pode não atender os objetivos pedagógicos.

Dessa forma, iniciamos nossas análises apresentando transcrições de questionamentos e/ou fragmentos das falas ocorridos no coletivo da pesquisa de campo com os alunos 6º ano do ensino fundamental, que nomeamos de episódios. Eles foram extraídos das gravações de áudio e diário de campo do professor-pesquisador.

> **Episódio 1**
>
> *PP[a]:Vocês já usaram alguma tecnologia digital nas aulas, como: computador, Tablet, celular e outros?*
>
> *JC [b]:Professor, usamos a sala de informática este ano junto com o professor de História para pesquisar.*
>
> *PP: Outra aluno já utilizou as tecnologias nas aulas ou até mesmo para estudar em casa?*
>
> [a] Professor - pesquisador.
>
> [b]Utilizaremos as iniciais dos nomes dos sujeitos da pesquisa para garantir seus anonimatos.

*W: Aprendemos com a professora de inglês a usar o Google tradutor, muito interessante para entender o inglês.*
*G: Professor em casa eu uso o tablet e o celular para pesquisa.*

O episódio traz evidências de que as tecnologias estão presentes no cotidiano dos alunos. No entanto, no ambiente escolar temos a impressão de que a tecnologia é utilizada apenas pelos professores em trabalho de pesquisa.

Sobre este contexto, MICOTTI (1999) afirma que:

> A renovação do ensino não consiste, apenas, em mudança de atitude do professor diante do saber científico, mas ainda e especialmente diante do conhecimento do aluno: é preciso compreender como ele compreende, constrói e organiza o conhecimento. (MICOTTI, 1999, p.164).

Objetivando compreender as considerações dos alunos sobre as aulas de matemática, continuamos com os questionamentos.

**Episódio 2**
*PP: Vocês gostam das aulas de matemática?*
*W.: Eu gosto das aulas de matemática por que o professor passa atividade para trabalhar o exercício mental.*
*R: Gosto das aulas de matemática por que tudo é matemática.*
*W: Matemática é importante por que tudo é uma aprendizagem.*
*G.: O Professor de matemática nosso é muito bom, ele ensina muitas coisas diferentes.*
*PP: Parabéns! Muito bom ver que vocês gostam das aulas de matemática e também do seu professor.*

É possível perceber nas falas dos alunos que a matemática vem ganhando sentido e sua aprendizagem é considerada importante. A relação dos alunos com o professor de matemática parece ser o motivo de tais considerações. No processo de ensino e aprendizagem uma boa relação entre professor e alunos é fundamental. O respeito mútuo não deve se dar apenas na forma de tratamento, mas na preocupação com a aprendizagem do outro.

Como mencionamos anteriormente, o conhecimento probabilístico é de suma importância para o cotidiano das pessoas, pois a sociedade está cercada de informações, as quais têm que interpretar e organizar dados para a compreensão da realidade e tomada de decisões. Dessa forma, concepções sobre probabilidade são desenvolvidas em contextos escolares e não. Segundo Santos (2015), é importante, antes de iniciar um trabalho sobre probabilidade, saber quais os conhecimentos dos alunos a temática, pois diferentes interpretações podem ser dadas a um mesmo tema.

Esse fato desencadeou o episódio a seguir:

> **Episódio 3**
>
> *PP: Vocês sabe o que é probabilidade?. W.: Sim, escutei falar sobre o assunto só não sei o significado.*
>
> *R: Probabilidade é prova que se faz no computador.*
>
> *W.:Probabilidade, eu acho que é uma chance que uma coisa pode acontecer. É uma grande probabilidade de acontecer.*
>
> *PP: Acontecer o que, por exemplo?*
>
> *W.:Existe uma grande Probabilidade de uma tragédia acontecer.*
>
> *P:Muito bem W.! Alguém mais compartilha deste pensamento?.*

Diante dos questionamentos, apenas dois alunos manifestaram suas ideias, um deles de maneira equivocada "*Probabilidade é prova que se faz no computador*" e outro, que percebe sua presença em avaliações de situações do cotidianos "*Existe uma grande Probabilidade de uma tragédia acontecer*". As falas dos alunos não indicam evidências de conhecimento sistematizado de probabilidade.

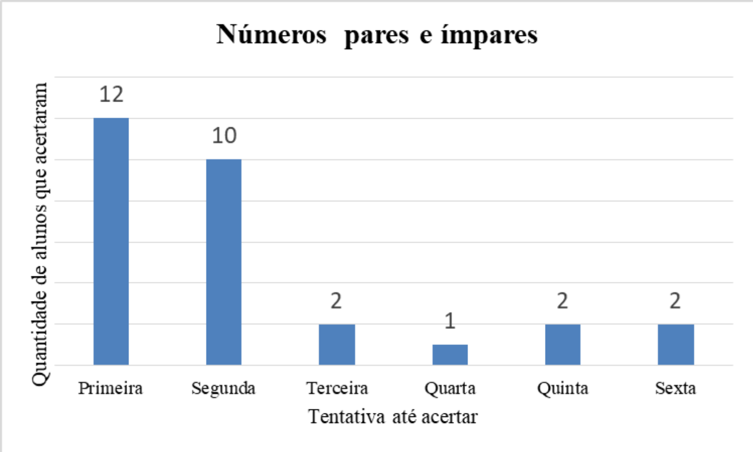
A conversa inicial trouxe indícios de que os alunos gostam das aulas de matemática, que o professor tem uma boa relação com os alunos e busca trabalhar assuntos diversificados. Quanto ao ensino de probabilidade, temos a impressão de que não tiveram experiências escolares significativas, pois o único exemplo mencionado, está relacionado a questões do cotidiano. De acordo com os relatos, a tecnologia é pouco explorada na escola e quando é utilizada, está restrita a pesquisa.

O segundo passo da nossa investigação foi utilizar os computadores do laboratório de informática da escola para jogar "Roleta probabilística", o jogo contém três fases e cada uma foi organizada da seguinte forma: instruções, desenvolvimento do jogo, resultado das jogadas, questionamento e *feedback*.

A primeira fase do jogo envolvia a identificação de números pares e ímpares. Essa verificação é importante, pois caso o aluno não tenha essa compreensão, pode fazer uma avaliação equivocada das chances de sorteios apresentados fases posteriores do jogo.

Na sequência apresentamos os resultados de acertos nesta fase.

Figura 6.1: Números pares e ímpares

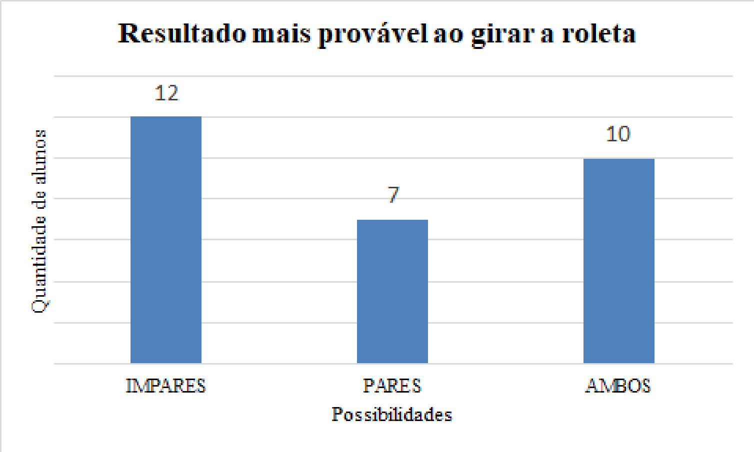



**Fonte:** Elaboração própria.

Neste dia, 29 alunos participaram da pesquisa. Destes, 12 alunos acertaram na primeira jogada quais números eram pares e ímpares, 10 alunos só conseguiram na segunda tentativa, 2 alunos na terceira, 1 aluno na quarta, 2 alunos na quinta e 2 alunos na sexta tentativa. Essa identificação parece algo simples para os alunos do 6º ano, no entanto, os resultados indicam que esse conceito ainda não está suficientemente claro para eles.

Na análise da fase dois, do jogo roleta probabilística, objetivamos que os alunos observassem o conceito de equiprobabilidade em uma roleta com a mesma quantidade de números pares (0, 2, 4, 6 e 8) e ímpares (1, 3, 5, 7 e 9). Assim, em cada jogada é sorteado aleatoriamente um número entre 0 e 9 e o aluno deveria analisar o resultado mais provável em um jogada, respondendo a questão "Ao girar a roleta qual o resultado mais provável?". O aluno tinha três alternativas para escolher, sendo eles: ÍMPARES; PARES OU AMBOS. Diante do espaço amostral, a resposta correta seria ambos, pois as chances de pares ou ímpares é 50%.

Figura 6.2: Resultado mais provável ao girar a roleta



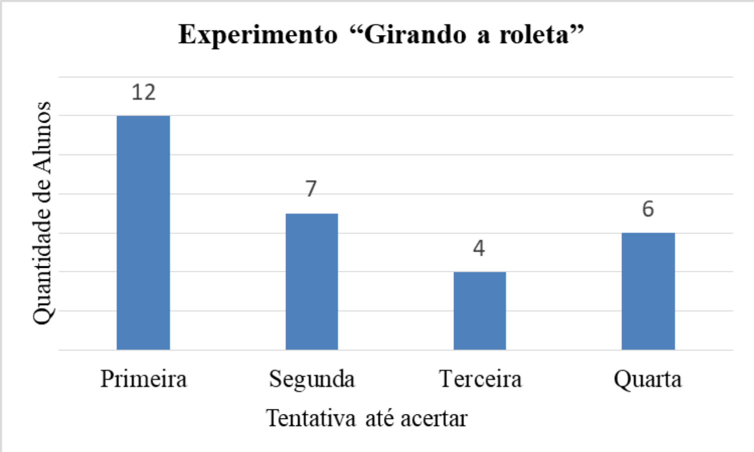

**Fonte:** Elaboração própria.

Frente ao questionamento “Qual o resultado mais prováveis ao girar a roleta”, o resultado deu-se da seguinte forma: 12 alunos acharam que os números ímpares têm mais chance de sair, 7 alunos consideraram que a chance de sair pares é maior e 10 alunos chegaram à conclusão de que uma roleta de números entre 0 à 9 a chance de sair são as mesmas tanto para pares como para ímpares.

Na fase três, o aluno fará um experimento “Girando” a roleta 16 vezes para verificar se na prática a resposta da fase anterior procede. Cada resultado da roleta será automaticamente registrado em um marcador. Após o término da fase surgirá na tela os resultados do experimento e a pergunta “este resultado foi semelhante ao da fase anterior, que indicava que os números pares e ímpares tinham as mesmas chances?”. O aluno terá que optar por uma das respostas: “SIM” ou “NÃO”.

Como cada jogada é um evento independente, o resultado pode não ser exato na primeira tentativa, mas quando aumentamos o número de jogadas, podemos nos aproximar de 50%. O resultado desse experimento foi o seguinte:

Figura 6.3: Experimento “Girando a roleta”




**Fonte:** Elaboração própria.

O resultado do experimento “Girando a roleta” nos indica que 12 alunos notaram que a chance de sair par ou ímpar é a mesma logo na primeira tentativa; 7 alunos chegaram a essa conclusão na segunda, 4 alunos na terceira tentativa e 6 alunos notaram que probabilidade de sair números pares e ímpares são as mesmas na quarta tentativa. Como mencionamos, os eventos são independentes e o resultado esperado pode não acontecer logo nas primeiras tentativas. O objetivo desta fase é que os alunos vivenciem a uma situação aleatória e tenha a possibilidade de aumentar sua amostra para observar que a probabilidade medida e experimentada se aproximem.

Após o término do jogo, voltamos a roda de conversa para verificar as considerações dos alunos sobre o jogo. O professor-pesquisador fez algumas questões específicas ao aluno “W” e “J”, que se envolveram nos primeiros episódios.

**Episódio 4**

*PP: W., o que você achou do jogo?.*

*W.:Eu achei muito interessante, aumentou nosso QI.*

*PP: Na primeira etapa do jogo ele vinha trazendo o jogo do par ou ímpar, como foi para você nesta rodada?*

*W.: O do par ou ímpar foi muito simples. PP:E sobre probabilidade?.*

*W.: Percebi que é a mesma coisa que disse na roda de conversa.*

*PP: E na parte do jogo que tinha uma roleta o que você notou?.*

*W.:Na roleta eu demorei um pouco para compreender a situação.*

*PP:E depois que compreendeu esta situação?.*

*W.:Notei que é uma roda aleatória que tem números pares e ímpares e que tem a mesma chance de aparecer (sair).*

*PP: Para você ter essa ideia, quantas vezes você teve que jogar?".*

*W.: Eu, acertei na terceira vez.*

Segundo Van de Walle (2009), a maior parte da aprendizagem acontece enquanto os alunos refletem individualmente e coletivamente sobre as ideias que eles criaram e inventaram.

**Episódio 5**

*PP:O que você achou do jogo?.*

*J.:Achei muito bom, aprendi várias coisas.*

*PP:Na primeira rodada o jogo trazia par e ímpar, o que você entendeu?.*

*J:Eu entendi que o zero (0) é par e o um (1) é ímpar.*

*PP:No segundo momento do jogo, que tinha uma roleta, quantas vezes você jogou para entender?. J.:Eu joguei 3 vezes.*

*PP:Por que você jogou 3 vezes*

*J.: Eu, errei e fui de novo e coloquei não, depois eu notei que tinha jogado 48 vezes, pois cada rodada era composta de 16 vezes.*

*PP: Com essas jogadas o que você observou?*

*J.:Que pares e ímpares tem a mesma chance e que aumenta o número de chance?*

Durante o jogo observamos certa dificuldade dos alunos em compreender às características do jogo em cada fase. Proporcionamos as discussões e aplicação do jogo no laboratório, mas houve alunos que simplesmente utilizam o jogo pelo jogo, sem criar estratégias para solucionar o problema ou refletir sobre o que estava sendo apresentado a eles.

Mesmo diante deste contexto, todos os alunos se envolveram na atividade e a realizaram as atividades (jogo) de forma autônoma.

> "Esse contexto reforça a importância de um trabalho dinâmico e flexível, que favoreça a autonomia dos educandos, pois o ambiente de aprendizagem envolve professores e turmas singulares, que por sua vez são sujeitos únicos, com ideários distintos e expectativas particulares, envolvidos em um mesmo contexto" (SANTOS, 2010, p.44).

Em síntese, entendemos que o jogo "roleta probabilística" pode proporcionar o aprendizado da matemática significativo e dinâmico, pode ainda trazer alguns dados importantes para o professor, como a avaliação da compreensão de números pares e ímpares e de probabilidades clássica e frequentista. Consideramos que o ponto forte do jogo é o aluno poder realizar o experimento para verificar se ele se aproxima, ou não, na medida que a matemática pode apresentar.

## 6.2 Segundo dia da pesquisa de campo: episódios e o jogo meteoritos

Nesta fase do jogo não realizamos a roda de conversa e os alunos se organizaram em duplas para jogar. Neste dia da pesquisa participaram 28 alunos, sendo 14 duplas. A primeira fase do jogo consiste pela destruição de meteoritos azuis e vermelhos por uma espaçonave que libera tiros e pode girar até 180º. Os meteoritos azuis surgem sempre a uma distância próxima da espaçonave os vermelhos a uma distância longe da espaçonave. Com isso, o objetivo é que os alunos percebam que se mirar nos mais próximos terá maior chances de ganhar, desenvolvendo assim, a percepção dos conceitos geométrico baseado em distância e probabilidade.

O resultado dos acertos das duplas foram organizados na seguinte tabela:

Tabela 6.1: Quantidade de acertos meteoritos azuis e vermelhos

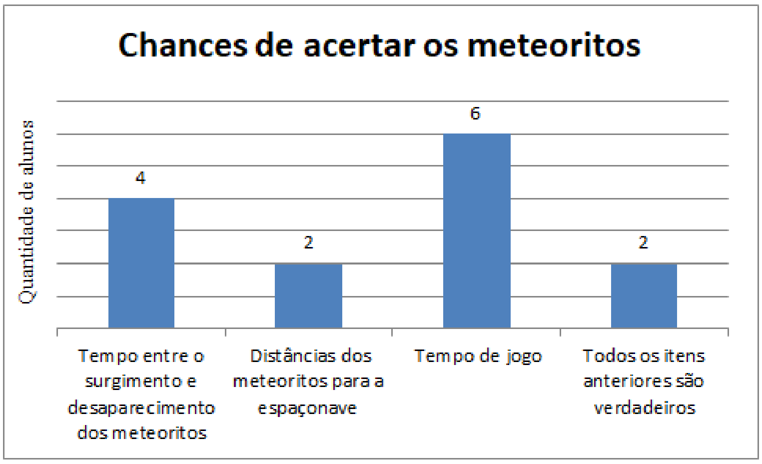
| Duplas | Meteoritos Azuis | Meteoritos Vermelhos | Total |
|---|---|---|---|
| 1 | 32 | 40 | 72 |
| 2 | 34 | 35 | 69 |
| 3 | 33 | 32 | 65 |
| 4 | 30 | 36 | 66 |
| 5 | 47 | 18 | 65 |
| 6 | 42 | 30 | 72 |
| 7 | 32 | 30 | 62 |
| 8 | 23 | 27 | 50 |
| 9 | 38 | 34 | 72 |
| 10 | 29 | 27 | 56 |
| 11 | 24 | 8 | 32 |
| 12 | 16 | 25 | 41 |
| 13 | 3 | 18 | 21 |
| 14 | 4 | 11 | 15 |
| Total | 387 | 371 | 758 |

**Fonte:** Elaboração própria.

Na tabela acima, observamos que metade das duplas acertaram mais meteoritos azuis e a outra, mais meteoritos vermelhos. Dessa forma, a estratégia de que os meteoritos mais próximos são mais fáceis de acertar não foi observada por todos. Talvez, se os alunos tivessem a oportunidade de jogar mais vezes e o professor conversar sobre essa questão, poderiam observar com mais precisão.

Na sequência da primeira fase do jogo, os alunos marcavam a resposta que consideravam indicar o porquê de terem acertados mais meteoritos de determinada cor. As possibilidades eram quatro, sendo: tempo entre o surgimento e desaparecimento dos meteoritos; distâncias dos meteoritos para a espaçonave; tempo de jogo e todos os itens anteriores são verdadeiros. As respostas dadas pelas diferentes duplas foram organizadas no seguinte gráfico:

Figura 6.4: Chances de acertar os meteoritos




**Fonte:** Elaboração própria.

Nessa situação, temos 4 alunos que relacionaram suas jogadas ao tempo entre o surgimento e desaparecimento dos meteoritos, 2 alunos escolheram a alternativa distâncias dos meteoritos para a espaçonave, 6 alunos colocaram a alternativa tempo de jogo e 2 alunos que afirmam todos os itens anteriores ser verdadeiros.

Diante do resultado anterior, nota-se que o número de acertos nos meteoritos azuis e vermelhos não foram próximos nas diferentes duplas, compreendemos as diferentes hipóteses apresentadas pelos alunos. Na sequência os alunos tiveram o feedback, pode ser que essa devolutiva propiciou novas reflexões.

Na segunda fase do jogo abordamos os estudos do conceito de posição relativa. Com isso, os meteoritos da cor laranja sempre surgiam a uma distância próxima a espaçonave e os meteoritos da cor verde, em uma distância longe, já os verdes ficavam atrás dos laranjas, dificultando assim, seu acerto

O resultado das jogadas foram organizados na seguinte tabela:

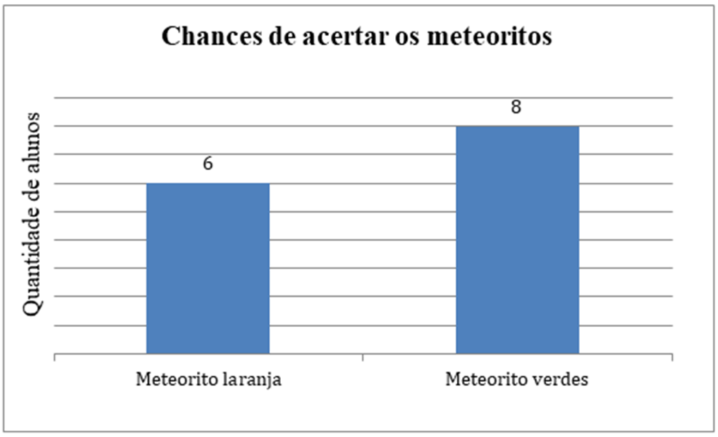
Tabela 6.2: Quantidade de acertos meteoritos laranja e verdes

| Duplas | Meteoritos Laranjas | Meteoritos Verdes | Total |
|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 49 | 89 |
| 2 | 36 | 26 | 62 |
| 3 | 37 | 33 | 70 |
| 4 | 30 | 29 | 59 |
| 5 | 38 | 35 | 73 |
| 6 | 37 | 34 | 71 |
| 7 | 30 | 42 | 72 |
| 8 | 30 | 27 | 57 |
| 9 | 40 | 37 | 74 |
| 10 | 32 | 33 | 65 |
| 11 | 24 | 25 | 49 |
| 12 | 40 | 41 | 81 |
| 13 | 18 | 31 | 49 |
| 14 | 20 | 40 | 60 |
| Total | 461 | 473 | 931 |

**Fonte:** Elaboração própria.

Essa tabela nos mostra que a metade das duplas destruíram mais meteoritos verdes que laranjas e a outra metade, o contrário. Na sequência, as duplas foram encaminhadas ao questionamento que perguntava qual cor de meteoritos que eles mais acertaram. As repostas dos alunos foram organizadas no gráfico seguinte:

Figura 6.5: Chances de acertar os meteoritos




**Fonte:** Elaboração própria.

Os dados do gráfico reforçam a resposta apresentada na tabela anterior. Em seguida, os jogadores receberam o *feedback* que dizia: “A posição dos meteoritos influência nas chances de acerto. Assim, se a estratégia do jogador for acertar os meteoritos verdes, ele destruirá mais meteoritos, por que os verdes estão posicionados na frente dos laranjas". Com essa informação, espera-se que nas próximas jogadas os alunos verifiquem se essa estratégia é válida ou não.

Na terceira fase, cada jogador tinha um minuto para jogar e durante este tempo surgiam meteoritos rosas e cinzas na tela. Vencia o jogador que acertasse o maior número de meteoritos, independente das cores. Nesta fase, o meteorito rosa tinha um diâmetro visivelmente maior que o cinza, com isso, o meteorito rosa teria maior área e consequentemente, maior campo de alvo.

Os resultados das jogadas foram as seguintes:

Tabela 6.3: Quantidade de acertos meteoritos rosa e cinza

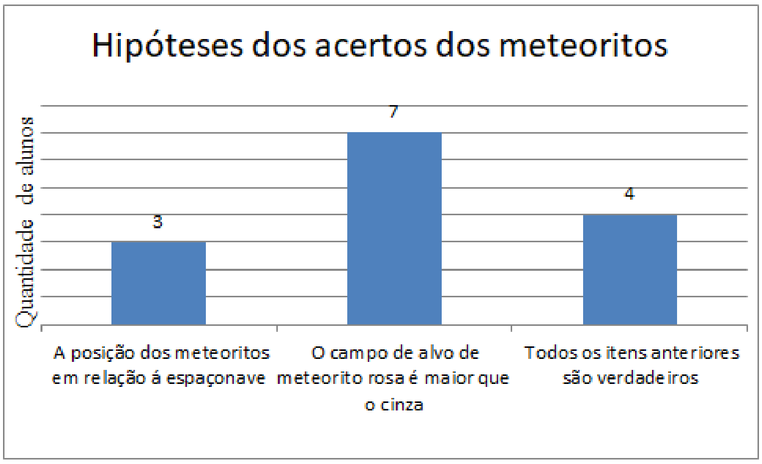
| Duplas | Meteoritos Rosas | Meteoritos Cinzas | Total |
|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 27 | 75 |
| 2 | 52 | 39 | 91 |
| 3 | 43 | 31 | 74 |
| 4 | 33 | 37 | 70 |
| 5 | 40 | 42 | 82 |
| 6 | 48 | 45 | 93 |
| 7 | 38 | 39 | 77 |
| 8 | 50 | 39 | 89 |
| 9 | 29 | 22 | 51 |
| 10 | 45 | 30 | 75 |
| 11 | 36 | 41 | 77 |
| 12 | 27 | 34 | 61 |
| 13 | 28 | 30 | 58 |
| 14 | 30 | 25 | 55 |
| Total | 547 | 481 | 534 |

**Fonte:** Elaboração própria.

De acordo com a tabela temos indícios de que o campo do alvo maior pode influenciar o resultado do jogo, pois 8 duplas acertaram mais os meteoritos rosas e 6 duplas acertaram mais os meteoritos da cor cinzas, que tinha menor campo de alvo.

Continuadamente, foi feita uma pergunta com o objetivo de verificar a hipótese dos alunos aos resultados desta fase do jogo. As alternativas com as hipóteses foram: a posição dos meteoritos em relação à espaçonave, a área do meteorito rosa é maior que do cinza e todos os itens anteriores são verdadeiros. As respostas foram as seguintes:

Figura 6.6: Hipóteses dos acertos dos meteoritos




**Fonte:** Elaboração própria.

O gráfico nos indica que 3 duplas responderam que a posição dos meteoritos em relação a espaçonave seria o motivo dos acertos; 7 duplas, que o campo de alvo do meteorito rosa é maior que do cinza e 4 duplas, que todos os itens anteriores são verdadeiros.

Metade das duplas observaram que o campo de alvo maior foi o motivo dos resultados obtidos em suas jogadas; quatro duplas afirmaram que foi a posição dos meteoritos em relação a espaçonave, e quatro declararam que essas duas hipóteses são verdadeiras.

Conforme mencionamos anteriormente, as hipóteses são baseadas nos resultados das jogadas dos alunos, assim, é possível que tenham diferentes resultados e conclusões.

Durante o jogo não observamos dificuldades dos alunos ao jogar, talvez porque já tinham jogado a "roleta probabilística" ou também, porque estavam em duplas, consequentemente, um colega ajudava o outro. A competição gerou certa adrenalina nos jogadores e comemorações de alguns alunos quando o resultado era favorável a ele. Entendemos que como foi a primeira vez que jogaram, não refletiram muito sobre as estratégias matemáticas que os ajudariam a vencer o jogo, no entanto, ao serem conduzidos a questionamentos e *feedback* algumas reflexões foram elaboradas por eles.

Em síntese, entendemos que o jogo "meteorito", assim como o jogo "roleta probabilística" podem indicar dados importantes para o professor, como a avaliação da compreensão de conceitos geométricos como posição relativa, distância, diâmetro/área e suas relações com probabilidade no contexto apresentado no jogo. O jogo pode desencadear reflexões sobre os conceitos frequentista, axiomático e geométrico de probabilidades.s.

Compreendemos que o jogo pelo jogo pode não trazer o resultado esperado como recurso de ensino e aprendizagem, mas aliado à discussões e problematizações promovidas pelo professor no coletivo da sala de aula, seus objetivos podem ser potencializados.

Diante do exposto, apresentamos nossas considerações finais sobre a pesquisa.

# Capítulo 7

# Considerações Finais

Nossa pesquisa teve como objetivo geral desenvolver jogos pedagógicos digitais para o ensino de probabilidade. Para tanto, nos pautamos em orientações de pesquisas na área que nos indicaram que o jogo digital pode ser um recurso pedagógico importante o ensino da Matemática. Além disso, as orientações sobre o ensino de probabilidade nos apontaram que há diferentes concepções sobre probabilidade - clássica, frequentista, subjetivista, axiomática, lógica e geométrica - e que é importante que situações de ensino possibilitem reflexões sobre as mesmas.

Dessa forma, desenvolvemos os jogos “roleta probabilística” e “meteoritos”. Nestes jogos, o jogador que tiver como estratégia principal a análise das chances das situações poderá ter melhor desempenho no jogo.

A elaboração de jogos digitais não é simples, além de questões pedagógicas sobre o ensino da matemática, é preciso conhecimento específico na área de computação gráfica. Assim, além de estudos, é importante o diálogo entre as diferentes áreas. Esse fator foi preponderante para o desenvolvimento dos referidos jogos.

Além disso, nos preocupamos em desenvolver os jogos em sala de aula com alunos da Educação Básica. Optamos por uma turma do 6º ano porque consideramos que o jogo é bem interessante para esse ano de escolaridade. Mas, ele pode ser desenvolvido com outros anos de ensino, se o professor da turma considerar adequado.

A sondagem nos possibilitou observar que os alunos se envolveram de forma autônoma e dinâmica nos jogos. Eles manifestaram adrenalina e sentimento de prazer em realizar as fases. O jogo “meteoritos”, que envolvia a disputa entre os jogadores, foi mais instigante, porém a “roleta probabilística” também teve boa aceitação por parte dos alunos.

No decorrer do jogo, ao serem questionados sobre o motivo que possibilitou as diferentes respostas, os alunos apresentavam hipóteses sobre tal. Como o resultado do experimento não acontecia da mesma forma nas diferentes duplas, as hipóteses apresentadas por eles variavam. Esse fato é um indicativo de houve reflexões por parte dos alunos sobre as variáveis que interferiam, ou não, nos seus resultados.

Entendemos que o jogo pelo jogo pode não trazer os resultados pedagógicos esperados, por isso é muito importante a mediação do professor e intervenções didáticas, como a discussão coletiva dos resultados e hipóteses. Além de outras propostas de experimentos, como lançamentos de moedas, lançamento de dados, etc.

Quanto ao jogo, concordamos com Grando (2000) que para que o jogador jogue com competência é preciso jogar várias vezes, para que possa analisar as suas jogadas e do adversário, assim como, elaborar e testar diferentes estratégias. Consideramos que essa questão possa ser realizada em pesquisas futuras.

Consideramos que a estrutura como os jogos foram organizados: instruções, desenvolvimento do jogo, resultado das jogadas, questionamento e feedback, assim como as diferentes variáveis e conceitos probabilísticos, podem contribuir com a formação do pensamento probabilístico dos alunos no ensino fundamental.

Concordamos com Santos (2010, 2015) ao considerar que o desenvolvimento do pensamento probabilístico é fruto de reflexões e intervenções didáticas desenvolvidas em todo o período escolar. Assim, consideramos que os jogos meteoritos” e “roleta probabilística”, pode contribuir com esse desenvolvimento.

Acreditamos que nossa pesquisa possa contribuir também com a área de ensino multidisciplinar uma vez que envolve não apenas o estudo específico da disciplina de matemática, mas de outras disciplinas, pois ao jogar o aluno é envolvido em um movimento de leitura, reflexões, análise, discussões, argumentações, troca de ideias com o colega e professor, etc. Além disso, pode ser pensado como um recurso pedagógico inclusivo, pois alunos com diferentes níveis de conhecimento matemático pode desenvolvê-lo.

O trabalho com os jogos pedagógicos digitais pode romper com o estereótipo de que a matemática é apenas um conjunto de fórmulas expostas no quadro. A sala de aula pode e deve ser um laboratório de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos onde o aluno possa experimentar e descobrir com o auxílio de jogos digitais à aproximações entre a disciplina e o seu cotidiano. Diante dessas considerações, é possível pensar em uma aprendizagem matemática lúdica com o desenvolvimento de estratégias para resolver problemas que modelam seu cotidiano.

Diante do exposto, consideramos ter atingido nossos objetivos com a pesquisa e acreditamos que nossos dados podem contribuir para o desenvolvimento de outros jogos na área de ensino de matemática, assim como, na parceria entre as diferentes áreas das ciências. Vale ressaltar que, o desenvolvimento dos jogos "roleta probabilística" e "meteoritos" em sala de aula pode ser objeto de novas investigações sobre o ensino de probabilidade.

# Referências Bibliográficas


ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução a Metodologia do Trabalho Científico: elaboração de trabalhos na graduação**; 10. ed. São Paulo. Atlas, 2010. Atlas, 2006.

AVELLAR, Ariane Ferreira. **Jogos pedagógicos para o ensino da matemática**. 2010

ALMIRO, João. **Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. O professor e o desenvolvimento curricular**, 2004.

ARAUJO, NUKÁCIAMEYRE Silva; RIBEIRO, Fernanda Rodrigues and SANTOS, Suellen Fernandes dos. **Jogos pedagógicos e responsividade: ludicidade, compreensão leitora e aprendizagem**. Bakhtiniana, Rev. Estud. Discurso [online]. 2012, vol.7, n.1, ISSN 2176-4573.

AZEVEDO, Cecília Maria. **O que é a probabilidade?: Interpretações da probabilidade**. 2004.

BADIZÉ M., JACQUES A., PETITPAS M. & PICHARD J.-F. (1996). **Le jeu du franc-carreau – une activité probabiliste au Collège**. Rouen : IREM de Rouen

BOULOS, P. **Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2000.

BOMFOCO, M. A.; AZEVEDO, V. D. A. **Os jogos eletrônicos e suas contribuições para a aprendizagem na visão de j. P. Gee**. CINTED-UFRGS Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, 2012.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quart ciclo do ensino fundamental**. Ministério da Educação, Brasília, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular Proposta Preliminar**. Ministérioda Educação. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 15 maio 2018

BRASIL. Ministério da Educação – SEB. Coleção. ). **Explorando o Ensino de Matemática**. Brasília, MEC, 2004.

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: A. J. Bishop et al. (eds.), **International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers**, 1996

BOGDAN, Robert C. & BIKLEN, Sári K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **Um estudo sobre conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2017. 344 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Pós-graduação -Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017.

CIRINO M. M. **A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no Ensino Médio**. 2007. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2007.

CASTRO, Renata Brandão de. **Tópicos da geometria projetiva**. 2012.

CEDERBERG, J. N. **A Course in Modern Geometries**. 5. ed. New York: Undergraduate Texts in Mathematics - Springer, 1989.

D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva; D'AMBRÓSIO, Ubiratan **Formação de professores de matemática: professor-pesquisador**. Atos de pesquisa em educação, Blumenau, v. 1, n. 1. 2006.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje. Temas e Debates**. SBEM. Ano II, v. 2, 1989.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **A evolução da Resolução de Problemas no currículo matemático**. Revista Brasileira de História da Matemática. SBEM. Dezembro/2007. p. 11. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20%20Festschrift/33%20-%20Beatriz%20-%20final.pdf>. Acesso em: 23/10/2017

DE LARA, Isabel Cristina Machado. **Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série**. 2004.

FERNANDES, José Antônio. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.o ano de escolaridade**. 1999. 461 f. Tese (Doutorado em Educação) -Universidade do Minho, Braga, 1999

FISHBACK, W. T. **Projective and euclidean geometry**. 2. ed. New York: John Wiley, 1969.

FIORENTINI, Dario et al. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM-SP, v. 4, n. 7, 1990.

GOMES J. e VELHO L. **Fundamentos da Computação Gráfica. Coleção Matemática e Aplicações**. IMPA. 2015.

GEE, James. Paul. **What video games have to teach us about learning and literacy**. Nova York: Palgrave Macmillan, 2004.

GAL, Iddo. **Towards probability literacy for all citizens: building blocks and instructional dilemmas**. In: Jones, Graham. (Ed.). Exploring probability in school: challenges for teaching and learning. Nova York: Springer, 2005.

GRANDO, Regina Célia; MARCO, Fabiana F. **O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático**. In: MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Org.). Múltiplos Olhares: matemática e produção de conhecimento.Musa educação matemática; v. 3, São Paulo: Musa Editora, 2007.

GRANDO, Regina Célia et al.**O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000.

GRANDO, R. C. A **O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática**. Campinas, SP, 1995. 175p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP.

GREEN, David. A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: Grey, David. et al (Ed.). In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 1., 1982, Sheffield. Proceeding... Sheffield: University of Sheffield, 1982.

GREESNSPAN, A. Financial Literacy: A tool for Economic **Progress**. The Futurist, v.36, n.4. 2002.

GODINO, Juan; BATANERO, Maria Carmen; CAÑIZARES, Maria José. **Azar y probabilidad. Madrid: Síntesis**, 1996.

GOLDENBERG, Miriam. **A arte de pesquisar. Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. Rio de janeiro: Ed. Record, 1997.

HAWKINS, Anne; KAPADIA, Ramesh. **Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. Educational Studies in Mathematics, Netherlands**, v.15, n.4, 1984.

HORNES, Andréia et al. **Os jogos computacionais no ensino de física**.ENPEC, VII, 2009.

LOPES, Celi Espasandin; MEIRELLES, Elaine. **O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística**. XVIII Encontro Regional De Professor De Matemática-–LEM/IMECC/UNICAMP–2005, 2005.

LOPES, José Junio et al. **A introdução da informática no ambiente escolar**. Rio Claro:[sn], 2004

LUDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A.**Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

Maria A. V.; BORBA, M. C (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 2 ed. São Paula: Cortez, 200

MICOTTI, M.C.O. **O ensino e as propostas pedagógicas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Ed. da UNESP, 1999.

MAZIVIERO, Hélio Fernando Gomes. **Jogos digitais no ensino de matemática: o desenvolvimento de um instrumento de apoio ao diagnóstico das concepções dos alunos sobre diferentes representações dos números**. 2014.

NACARATO, Adair; GRANDO, Regina. **Aprendizagens compartilhadas a partir do trabalho colaborativo tendo a estocástica como objeto de investigação**. In: NACARATO, Adair; GRANDO, Regina. (Org.). textbfEstatística e probabilidade na educação básica: professores narrando suas experiências. Campinas: Mercado de Letras, 2013

NCTM (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics**. New Jersey: National Council of Teachers of Mathematics.

ONUCHIC, Lourdes. **Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas**. In BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO,

O. DOLCE e J. N. POMPEO, **Fundamentos de Matemática Elementar, vol 10: Geometria Espacial**, posição e métrica, 6a ed., Atual Editora, São Paulo, 2005.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: **matemática Ministério da educação. Secretaria da educação fundamental**. 3 ed. Brasília :A secretaria ,2000

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: **matemática Ministério da educação. Secretaria da educação fundamental**. 3 ed. Brasília :A secretaria ,2001

PETRY, A. S. **Uma contribuição ao Conceito de Jogo em Hipermídia. Informática na Educação: Teoria & Prática**. v.8, n.2, jul/dez. 2005

RAMOS, Daniela. J**ogos eletrônicos, desejo e juízo moral**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

DE SANTANA,R.M., MICHAELLE.**O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental**. 2011.

ROSA, M.; OREY, D. C. **De Pappus a Polya: da heurística à resolução de problemas**. Disponível em <http://csus.academia.edu/DanielOrey/Papers/299440>. Acesso em: 24 out. 2017.

SANTOS, Jaqueline.**O desenvolvimento do pensamento probabilístico e combinatório no contexto de sala de aula**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <http://ciaemredumate.org/ocs/index.php/xiiiciaem/xiiiciaem/paper/viewFile/1468/971>. Acesso em: 24 out. 2017.

SANTOS, Jaqueline. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental**. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação)–Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2010

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. 191 p. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SILVA, Márcia Rodrigues Luiz. **História da Matemática: alternativas metodológicas no ensino de matemática**.Cadernos da FUCAMP, v. 5, n. 5, 2006.

SILVA & MORAIS, I.K.O. & M.I.O. **Desenvolvimento de Jogos Educacionais no Apoio ao Processo de Ensino-Aprendizagem no Ensino Fundamental**.HOLOS, Ano 27, Vol 5, 2011.

SHAFFER, David Williamson. **How computer games help children learn**. Nova York: Palgrave, 2006.

SHAUGHNESSY, J. M..**Research in probability and statistics: reflections and directions.** In: GROUWS, D. A. (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. USA: NCTM, 1992.

TAJRA, S. F. **Informática na educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade.** São Paula, SP: Érica, 2002. 1

VAN DE WALLE, John, **A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**.Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIANA, Fernando Cesar de Abreu et al. **Estudo e aplicações de probabilidade geométrica e paradoxos**. 2013.

VYGOTSKY, L. S.**Pensamento e linguagem**. São Paulo, Martins Fontes, 1 edição 1987.

WILLIAMSON, Ben. **Computer games, schools, and young people A report for educators on using games for learning**. Futurelab, Inglaterra, 2009.

WATSON, Jane M. **Statistical literacy at school: growth na goals**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2006.