

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DINÂMICA DE MÁGNONS NA PRESENÇA DE DEFEITO  
TOPOLÓGICO

DANIEL BORGES SILVA

João Pessoa

2018

DANIEL BORGES SILVA

DINÂMICA DE MÁGNONS NA PRESENÇA DE DEFEITO  
TOPOLÓGICO

Dissertação apresentada no programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Cláudio Benedito Silva Furtado

João Pessoa

2018

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S586d Silva, Daniel Borges.

Dinâmica de Mágons na Presença de Defeito Topológico /  
Daniel Borges Silva. - João Pessoa, 2018.

94 f. : il.

Orientação: Cláudio Benedito Silva Furtado.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Mágons. 2. Defeito Topológico. 3. Efeito Hall  
Quântico. 4. Condutância. 5. Quantização de Landau. I.  
Furtado, Cláudio Benedito Silva. II. Título.

UFPB/CCEN

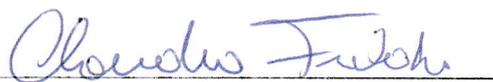
Ata da Sessão Pública da Defesa de  
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Daniel  
Borges Silva**, candidato ao Título de Mestre  
em Física na Área de Concentração Física da  
Matéria Condensada.

1 Aos dezanove dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezoito, às 14:00, na sala  
2 de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da  
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora  
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Física da  
5 Matéria Condensada, **Daniel Borges Silva**. A comissão examinadora composta pelos  
6 professores doutores: Cláudio Benedito da Silva Furtado (DF/UFPB), orientador e  
7 presidente da banca examinadora, Inácio de Almeida Pedrosa (DF/UFPB) e Carlos  
8 Chesman (UFRN). Dando início aos trabalhos, o Prof. Cláudio Benedito da Silva  
9 Furtado comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o  
10 candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação  
11 intitulado “*Dinâmica de Magnons na presença de defeito topológico*”. Concluída a  
12 exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte  
13 parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o  
14 respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo  
15 Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da  
16 Banca Examinadora. João Pessoa, **19 de dezembro de 2018**.

17 Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva Furtado  
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa  
UFPB

Prof. Dr. Carlos Chesman  
UFRN







## DEDICATÓRIA

Aos meus pais pelo incentivo.

Aos amigos conquistados em João Pessoa pelo companheirismo, em especial a Sidney Cordeiro.

A Raphaela Lima pela paciência em ouvir várias sessões de lamentações.

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Claudio Benedito Silva Furtado pela parceria nesse trabalho.

Ao Dr. Jilvan de Melo por toda a contribuição para esse trabalho.

Aos colegas do Laboratório de Física Teórica e Computação Quântica, em especial Anny Caroline e Me. Deigivan da Silva.

Ao prof. Dr. João Pascak pelo exemplo de profissional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A dona Zefa.

## RESUMO

O advento da Mecânica Quântica trouxe uma nova compreensão de mundo e novas perspectivas de tecnologia, tais como métodos de otimização e alternativas à eletrônica clássica. Recentemente vem sendo buscada uma alternativa a eletrônica convencional pautada na corrente de elétrica, essa eletrônica teria como base as propagações de spin, e portanto a chamamos de spintrônica. Tendo em vista tal perspectiva, é de suma importância o estudo de ondas de spin e dos fenômenos magnéticos em física do estado sólido. Portanto buscamos aqui estudar mágnons sob a ótica do efeito Hall Quântico e buscar a dinâmica dessas quase-partículas submetidas a um defeito topológico. Nesse trabalho vamos fazer uma revisão do Efeito Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher para entender as fases quânticas como fases geométricas. Vamos estudar a fase de Berry como o resultado de uma influência externa e a curvatura de Berry para então verificar a ocorrência do efeito Hall Quântico. Procuramos a quantização de Landau para partículas neutras com momento de dipolo magnético e elétrico sujeitas a campos eletromagnéticos externos. Buscamos conceituar mágnons como excitações coletivas de baixa energia e procuramos a ocorrência de Efeito Hall para estes através da quantização da condutância Hall Transversal. Buscamos também a condutância Hall Térmica devido um gradiente de temperatura e assim a razão termomagnética, observamos que tal razão segue a lei de Wiedemann-Franz. Revisamos também a quantização de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo magnético e submetida a um defeito topológico do tipo corda cósmica e verificamos que a presença do defeito quebra a degenerescência infinita dos níveis de Landau. Nesse trabalho consideramos o hamiltoniano proposto por Bakke, Ribeiro, Furtado e Nascimento (2009) [25] como o hamiltoniano efetivo dos mágnons na presença de defeito topológico do tipo corda cósmica e encontramos os níveis de Landau para o sistema. Com isso foi possível encontrar resultados preliminares da condutância Hall e Hall Térmica de mágnons no espaço curvo da corda cósmica no limite não relativístico e de baixas temperaturas.

Estudando as propriedades de uma rede de mágnons esse trabalho busca também instigar a pesquisa que visa entender o comportamento das propriedades dessas quase partículas sujeitas a defeitos topológicos de vários tipos e contribuir assim para o melhor entendimento da dinâmica de mágnons e de suas propriedades.

**Palavras-chave:** Mágnons, Defeito Topológico, Efeito Hall Quântico, Condutância, Quantização de Landau.

## ABSTRACT

The advent of Quantum Mechanics brought a new understanding of the world and new perspectives of technology, such as methods of optimization and alternatives to classical electronics. Recently an alternative has been sought for conventional electronics based on the electric current, this electronics would be based on spin propagations, and therefore we call it spintronics. In view of this perspective, the study of spin waves and magnetic phenomena in solid state physics is of paramount importance. Therefore, we have studied Magnons from the quantum Hall effect and sought the dynamics of these quasi particles subjected to a topological defect. In this work we will review the Aharonov-Bohm and Aharonov-Casher Effect to understand the quantum phases as geometric phases. We will study the Berry phase as the result of an external influence and Berry's curvature to then verify the occurrence of the Quantum Hall effect. We sought the quantization of Landau for neutral particles with magnetic and electric dipole moment subjected to external electromagnetic fields. We sought to conceptualize magnons as collective low energy excitations and look for the occurrence of Hall Effect for them through the quantization of the Transverse Hall conductance. We also look for the Thermal Hall conductance due to a temperature gradient and thus the thermomagnetic ratio, we observe that such a reason follows Wiedemann-Franz's law. We also review the Landau quantization for a neutral particle with a magnetic dipole moment and subjected to a topological defect of the cosmic string type and verify that the presence of the defect breaks the infinite degeneration of the Landau levels. In this work we consider the Hamiltonian proposed by Bakke, Ribeiro, Furtado and Nascimento (2009) [25] as the effective hamiltonian of the magnons in the presence of topological defect of the type cosmic string and we find the levels of Landau for the system. With this, it was possible to find preliminary results of Hall and Hall Thermal conductance of magnons in the curved space of the cosmic string at the non-relativistic and low temperature limits. Studying the properties of a

network of magnons this work also seeks to instigate research that seeks to understand the behavior of the properties of these quasi-particles subjected to topological defects of various types and thus contribute to a better understanding of the dynamics of magnons and their properties.

**Keywords:** Magnons, Topological Defect, Quantum Hall Effect, Conductance, Landau Quantization.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>FASES QUÂNTICAS</b>	<b>8</b>
2.1	Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	9
2.2	Efeito Aharonov-Casher . . . . .	12
2.3	Fase de Berry . . . . .	15
<b>3</b>	<b>QUANTIZAÇÃO DE LANDAU</b>	<b>19</b>
3.1	Quantização de Landau para uma Partícula Neutra . . . . .	19
3.2	Quantização de Landau para um Dipolo Elétrico . . . . .	23
<b>4</b>	<b>EFEITO HALL QUÂNTICO</b>	<b>27</b>
4.1	Efeito Hall Clássico . . . . .	27
4.2	Curvatura de Berry . . . . .	29
4.3	Transporte Adiabático . . . . .	31
4.4	Efeito Hall Quântico . . . . .	35
<b>5</b>	<b>MÁGNONS</b>	<b>42</b>
5.1	Mágnons . . . . .	42
5.1.1	Modelo de Heisenberg . . . . .	44
5.2	Condutância Hall de Mágnons . . . . .	48
5.3	Condutância Hall Térmica de Mágnons . . . . .	51

---

<b>6</b>	<b>DINÂMICA DE MÁGNONS NA PRESENÇA DE DEFEITO TOPO- LÓGICO</b>	<b>54</b>
6.1	Defeito Topológico . . . . .	55
6.2	Quantização de Mágnons na Presença de Defeito Topológico . . .	58
6.3	Condutância Hall de Mágnons na Presença de Defeito Topológico	67
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>71</b>
A	Teorema Adiabático	81
B	Formas Diferenciais	84

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	10
4.1	Efeito Hall Clássico . . . . .	28
4.2	Zona de Brillouin . . . . .	34
4.3	Quantização da resistência Hall . . . . .	39
4.4	Fluxo magnético na zona de Brillouin . . . . .	39
5.1	Ondas de spin . . . . .	43
6.1	Corda Cósmica . . . . .	55
6.2	Produção de defeito topológico em um <i>monolayer</i> . . . . .	58

# 1

## INTRODUÇÃO

As leis da física clássica estão bem estabelecidas para a teoria eletromagnética: as leis de Maxwell descrevem de forma extraordinária os fenômenos elétricos e magnéticos no qual temos contato no cotidiano. Desse ponto de vista partículas carregadas são sujeitas a força de Lorenz na presença de campos eletromagnéticos externos e portanto, conhecendo essa força podemos resolver a equação diferencial e entender toda a dinâmica do sistema. Por outro lado, na total ausência de campos, ou na ausência de cargas, a teoria eletromagnética clássica nos garante que o sistema não evolui. Do ponto de vista quântico é possível, mesmo sem campos ou carga, acontecer uma dinâmica e isso influenciar as propriedades eletrônicas do sistema. Em 1924 o duque de Broglie propôs que também a matéria, além da luz, teria um comportamento ondulatório e portanto podemos associar uma fase a sistemas matérias no qual esta não teria qualquer significado físico *a priori*, porém a diferença de fase entre dois estados interagentes sim. Essas fases quânticas podem ser dinâmicas, quando dependem do movimento, ou geométricas quando dependem da geometria do espaço desses estados.

No entanto, a evolução adiabática dos auto-estados de um sistema quântico bem comportado e periódico com influencias externas já foi estudado em 1984 por Michael Berry [8] onde o autor propôs que tais sistemas estariam sujeitos a uma fase geométrica que ficou conhecida como fase de Berry. Tal fase é interessante pois é invariante de *gauge*,

---

é puramente geométrica e tem analogia com teoria de campos e geometria diferencial. A influência da fase de Berry vem sendo objeto de estudo em diversos sistemas de matéria condensada, tais como em cristais [43, 17], em grafeno [10, 45, 48], em sistemas magnéticos [4, 16] e tantos outros. Dentre os sistemas magnéticos ocorreram vários estudos da influência da fase de Berry sobre as propriedades de excitações coletivas de baixa energia como em [30] e mais recentemente [36]. Em materiais bidimensionais com simetria de translação, se a dinâmica se der em uma curva fechada no espaço de parâmetros, ocorre efeito Hall Quântico: a condutância Hall Transversal é quantizada.

Por outro lado, ondas de spin são excitações coletivas em fase da precessão de todos os spins de uma rede cristalina de um material ferromagnético. Essa precessão acontece devido perturbações externas como variação de temperatura ou de campos eletromagnéticos. Tais perturbações provocam variações do momento de dipolo magnético que interage com seus vizinhos levando a uma propagação dessa perturbação. De caráter bosônico, mágnons são versões quantizadas das ondas de spin e fazem o papel de carga elementar magnética em ferromagnetos. Consideradas quase-partículas, mágnons podem formar estados coerentes macroscópicos devido a condensação de quase-equilíbrio.

A ideia de mágnon foi introduzido em 1930 por Felix Bloch na tentativa de explicar a redução da magnetização espontânea em um ferromagneto. Na temperatura de zero absoluto, um ferromagneto alcança o estado de menor energia em que todos os spins se alinham na mesma direção. A medida que a temperatura aumenta, as orientações dos momentos de dipolos magnético de spin se alteram aleatoriamente da posição original, fazendo com que a energia interna seja aumentada e reduzindo a magnetização líquida. Assim o estado de baixa temperatura com poucos spins fora do alinhamento pode ser entendido como um gás de quasipartículas, ou seja, mágnons. Cada mágnon reduz o spin total ao longo da direção da magnetização em uma unidade de  $\hbar$ .

A teoria de ondas de spins quantizadas, ou mágnons, foi desenvolvida por Theodore Holstein e Henry Primakoff em 1940 e Freeman Dyson em 1950. Usando o formalismo

---

da segunda quantização eles mostraram que os mágnons são quasipartículas de interações fracas e obedecem a estatística de Bose-Einstein. Do ponto de vista pratico é importante estudar mágnons devido suas potencialidades tecnológicas de obtenção de novos sistemas eletrônicos com base na spintrônica.

Não obstante, desde a teoria da relatividade geral de Einstein as propriedades dos espaços curvos vem sendo estudas na cosmologia e hoje sabemos satisfatoriamente a descrição destes espaços com base no formalismo tensorial ou de segunda ordem. Por outro lado, em Física de estado sólido uma rede cristalina pode está sujeita a defeitos topológicos devido a geometria da rede. Tais defeitos influenciam na dinâmica da rede e nas propriedades dessa, portanto é de suma importância estudar sistemas com defeitos topológicos buscando entender o comportamento de propriedades de interesse como transporte e condutância. Sistemas sujeitos a esse tipo de defeito podem se comportam como se estivessem no espaço curvo, portanto podemos utilizar os conhecimentos de relatividade geral para descrevê-los da melhor forma, visando pesquisar a dinâmica quântica da rede.

Portanto, esse trabalho busca estudar a dinâmica de mágnons na presença de defeito topológico do tipo corda cósmica no limite não relativístico, focando nas propriedades como Condutância Hall Quântica e Condutância Hall Térmica. Para isso fazemos uma revisão de fases quânticas como a fase de Berry e do efeito Hall Quântico. Buscamos também instigar a pesquisa para outros tipos de espaços curvos tais como o da deslocação, uma vez que defeitos geométricos na rede de mágnons pode ser descrito pelo formalismo de espaço curvo da gravitação. Buscar o entendimento das propriedades de uma rede de mágnons com defeito topológico pode auxiliar na busca de melhor eficiência do transporte adiabático para possíveis aplicações na spintrônica.

A organização desse trabalho está posta da seguinte forma: No capítulo 2 fazemos uma revisão das Fases Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher, buscamos demonstrar a origem desses efeitos que são puramente quânticos e enfatizamos que essas fases são de caráter geométrico. Estudamos ainda a fase de Berry pelo trabalho de Xiao, Chang e Niu

---

(2010) [15] com base no potencial vetor de Berry e verificamos que é uma fase topológica e invariante de *gauge*. No capítulo 3 revisamos os trabalhos de Ribeiro, Furtado e Nascimento (2006) [40] e de Ribeiro (2008) [20] para demonstrar os níveis de Landau para um dipolo magnético permanente e para um dipolo elétrico induzido. No capítulo 4, com base no *paper* de Xiao, Chang e Niu (2010) [15] fazemos um estudo suscito da curvatura de Berry e relacionamos essa com a fase de Berry. Por fim estudamos o transporte adiabático e a ocorrência de efeito Hall Quântico. No capítulo 5 conceituamos mágnons e introduzimos o modelo de Heisenberg. Ainda exploramos algumas propriedades da rede magnética e o Efeito Hall Quântico no sistema de mágnons pelo trabalho de Nakata, Klinovaja e Loss (2017) [36]. No capítulo 6 seguimos Bakke, Ribeiro, Furtado e Nascimento (2009) [25] para encontrar a quantização de Landau de mágnons na presença de defeito topológico do tipo corda cósmica. Inspirados pelos resultados da referência [36] propomos resultados preliminares para a condutância Hall Quântica e Hall Térmica de mágnons no espaço curvo da corda cósmica para, assim, verificar a influência do defeito sobre essas propriedades.

## 2

# FASES QUÂNTICAS

A dinâmica de uma partícula carregada ou com dipolo magnético sobre a ação de campos eletromagnéticos é bem conhecida no regime clássico: basta conhecer a lagrangiana ou hamiltoniana do sistema e resolver as equações de movimento. Assim conhecemos o comportamento da partícula com o tempo e como os campos interferem nessa dinâmica. Porém quando estudamos fenômenos quânticos a dinâmica não é mais regida pelas equações de Hamilton ou pela equação de Lagrange, mas sim pela equação de Schrödinger no limite não-relativístico. Nesse domínio um sistema pode apresentar um comportamento que não seria deduzido pelas leis clássicas. Nesse capítulo vamos estudar dois desses fenômenos: o efeito Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher, que são efeitos puramente quânticos na dinâmica de partículas sob a influência de um potencial vetor externo. Os efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher mostram que perturbações externas, provocadas por potenciais eletromagnéticos, em sistemas quânticos induzem o aparecimento de uma fase na função de onda, então é imediato pensar que isso pode ocorrer para uma perturbação genérica, assim vamos estudar também a fase de Berry. A fase de Berry é um fase quântica generalizada que aparece na função de onda devido influências externas.

## 2.1 Efeito Aharonov-Bohm

A eletrodinâmica clássica é pautada em um formalismo matemático forte que possibilita a definição dos campos elétricos e magnéticos como derivadas de um campo vetorial chamado de potencial vetor <sup>1</sup>. Por muito tempo o potencial vetor era interpretado como um mero artifício matemático para a melhor descrição dos fenômenos eletromagnéticos e portanto não tinha qualquer significado físico. Porém em 1959 Yakir Aharonov e David Bohm mostraram que é possível atribuir significado físico ao potencial vetor [1]. O efeito Aharonov-Bohm é um fenômeno onde partículas carregadas sofrem a influência o potencial vetor magnético, mesmo em uma região onde o campo eletromagnético é nulo. Devido a força de Lorenz, eq. (4.1), uma partícula carregada em uma região de campos nulos não deveria sentir força qualquer e portanto não deveria ter dinâmica, porém quanticamente as coisas são diferentes.

Suponha uma partícula carregada sujeita a potenciais eletromagnéticos, nesse caso a hamiltoniana é dada por [42]:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - q\mathbf{A} \right)^2, \quad (2.1)$$

onde  $q$  é a carga da partícula e  $\mathbf{A}$  o potencial vetor. Considerando  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  a hamiltoniana fica:

$$H = \frac{1}{2m} (-\hbar^2\nabla^2 + q^2 A^2 - i\hbar q \nabla \cdot \mathbf{A} - i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla).$$

Ainda

$$\nabla \cdot \mathbf{A} f = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f,$$

portanto usando o *gauge* de Landau,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , temos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} f = \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

---

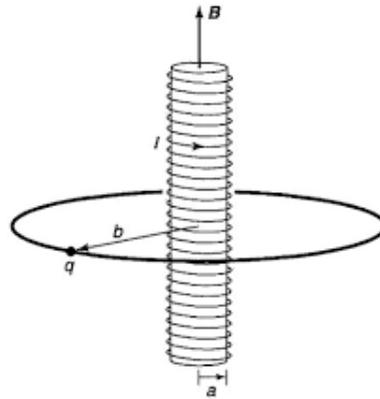
<sup>1</sup>Pelas equações de maxwell:  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

e assim a eq. (2.1) fica

$$H = \frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2 + q^2A^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}\cdot\nabla). \quad (2.2)$$

para garantir que o efeito é puramente quântico considere uma situação onde garantimos que a partícula esteja sujeita ao potencial vetor mas que não haja campos eletromagnéticos: uma partícula em torno de um solenoide que carrega uma corrente  $I$ , por exemplo: Assim conforme a teoria eletromagnética clássica o potencial vetor fora do

**Figura 2.1:** Efeito Aharonov-Bohm



Fonte: Griffiths, David J. - Mecânica Quântica

solenoide é :

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi\rho}\hat{\phi}, \quad (2.3)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo magnético dentro do solenoide e  $\rho$  é a distância radial da partícula ao solenoide em coordenadas cilíndricas.

Considere agora a equação de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi,$$

Pela eq. (2.2):

$$\frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2 + q^2A^2 + 2iq\hbar\mathbf{A}\cdot\nabla)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Por separação de variáveis observamos que a solução é  $\Psi = e^{-iE_n t/\hbar}\psi(\mathbf{x})$ , assim escrevemos a equação espacial:

$$\frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \right] = E_n \psi. \quad (2.5)$$

A equação acima tem solução do tipo:

$$\psi_{AB}(\mathbf{x}) = e^{\phi(\mathbf{x})}\psi'(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

portanto,

$$\begin{aligned} & -\hbar^2 [\nabla^2 \phi(x)\psi'(x) + \nabla \phi(x) \cdot (\nabla \phi(x)\psi'(x) + \nabla \psi'(x)) + \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi'(x) + \nabla^2 \psi'(x)] e^{\phi(x)} + \\ & + q^2 A^2 e^{\phi(x)} \psi'(x) - 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi(x)\psi'(x) + \nabla \psi'(x)) e^{\phi(x)} = 2mE_n e^{\phi(x)} \psi'(x). \end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned} & -\hbar^2 \nabla^2 \psi'(x) - \hbar^2 [\nabla^2 \phi(x) + (\nabla \phi(x))^2 + 2\nabla \phi(x) \cdot \nabla] \psi'(x) + q^2 A^2 \psi'(x) - \\ & - 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi(x) + \nabla) \psi'(x) = 2mE_n \psi'(x), \end{aligned}$$

considerando que  $\psi'(x)$  é solução para o caso  $\mathbf{A} = 0$ , ou seja:

$$-\hbar^2 \nabla^2 \psi'(x) = 2mE_n \psi'(x).$$

Sendo assim

$$-\hbar^2 [\nabla^2 \phi(x) + (\nabla \phi(x))^2 + 2\nabla \phi(x) \cdot \nabla] = -q^2 A^2 + 2i\hbar q \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi(x) + \nabla),$$

logo

$$\nabla \phi(x) = iq \frac{\mathbf{A}}{\hbar}.$$

Assim concluímos que a fase é:

$$\phi_{AB}(\mathbf{x}) = i\frac{q}{\hbar} \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}, \quad (2.7)$$

essa fase é chamada de fase Aharonov-Bohm. A eq. (2.6) mostra que a função de onda adquire uma fase quântica, caracterizando assim o efeito Aharonov-Bohm. Portanto o potencial vetor não é um mero artifício matemático, ele influencia na dinâmica da partícula. O efeito Aharonov-Bohm é um efeito exclusivamente quântico, pois no regime clássico a evolução da partícula é regida pela força de Lorentz.

## 2.2 Efeito Aharonov-Casher

Em 1984 Yakir Aharonov e Aharon Casher [2] observaram que uma partícula neutra com momento de dipolo magnético não nulo sob a ação de um campo elétrico externo mas na ausência de torque adquire uma fase semelhante a fase Aharonov-Bohm.

Considere um sistema composto por um dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}$  sob a influência de um campo elétrico gerado por uma distribuição linear de cargas estacionárias, nesse caso a lagrangiana é dada por [20]:

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}, \quad (2.8)$$

onde  $m$  é a massa do dipolo,  $v$  é a velocidade do dipolo,  $\mathbf{x}$  é a posição da carga,  $\mathbf{X}$  a posição do dipolo,  $q$  é a carga estacionária e  $\mathbf{A}$  o potencial vetor. Pela teoria eletromagnética clássica o potencial vetor é dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{x} - \mathbf{X})}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^3} = -\frac{1}{qc} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{X}), \quad (2.9)$$

com  $\mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{X})$  o campo elétrico gerado pela linha de carga. Assim a lagrangeana do

sistema é:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{c^2}[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{X})] \cdot \mathbf{v}. \quad (2.10)$$

Sabendo que o momento canônico é  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E},$$

e tendo a hamiltoniana definida conforme  $H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$ , chegamos a hamiltoniana do sistema que pode ser escrita conforme:

$$H = \frac{mv^2}{2}.$$

Mas considerando o operador velocidade:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}\right),$$

chegamos na hamiltoniana para o dipolo magnético na presença de um campo elétrico:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}\right)^2. \quad (2.11)$$

Observe a semelhança da eq. (2.11) com a eq. (2.2) portanto, por analogia com o efeito Aharonov-Bohm podemos definir um potencial vetor efetivo que denotamos de potencial vetor Aharonov-Casher:

$$A_{AC} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}. \quad (2.12)$$

Logo podemos concluir que o dipolo vai adquirir uma fase quântica, chamada de fase

Aharonov-Casher, caracterizando assim o efeito Aharonov-Casher:

$$\phi_{AC} = \frac{i}{\hbar} \oint d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_{AC} = \frac{i}{\hbar} \oint \left( \frac{1}{c} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E} \right) \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.13)$$

Para garantir que não haja precessão do dipolo magnético devido a presença do campo elétrico, o momento de dipolo deve ser paralelo a linha de cargas que produzem o campo e seu movimento deve ser restrito a um plano, ou seja [20]:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = 0. \quad (2.14)$$

Sendo assim o dipolo não sofre a ação de forças e o efeito é geométrico, ou seja, depende apenas do número de voltas que dá ao redor da linha de cargas. Portanto dizemos que a fase Aharonov-Casher, assim como a fase Aharonov-Bohm, são fases topológicas nesse sentido. Ambas as fases: Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher independem da velocidade das partículas, porém a fase Aharonov-Bohm só tem independência de *gauge* para uma curva fechada e a fase Aharonov-Casher está em uma região onde existe campo elétrico, mesmo que não haja forças no dipolo. Portanto o efeito Aharonov-Casher pode ser entendido como uma troca local de momento angular entre o campo elétrico e a partícula [20]. Assim a fase Aharonov-Casher não é uma fase topológica pois pode ser medida localmente.

Observe que o efeito Aharonov-Casher é análogo ao efeito Aharonov-Bohm, basta inverter os papéis de carga e momento de dipolo magnético, campo elétrico e campo magnético. Podemos encontrar um efeito dual ao efeito Aharonov-Casher considerando a dualidade de Heaviside [20]:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_e \rightarrow \mathbf{A}_m$$

$$e \rightarrow N$$

$$\mu \rightarrow \mathbf{d}$$

com  $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{A}_e$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_m$ ,  $e$  a carga elementar,  $N$  a unidade de carga norte magnética,  $\mu$  o momento de dipolo magnético e  $\mathbf{d}$  o momento de dipolo elétrico. Assim podemos definir uma fase quântica para um dipolo elétrico sob a ação de um campo magnético externo:

$$\phi_{HMW} = \frac{i}{\hbar} \oint d\mathbf{x} \cdot \left( \frac{1}{c} \mathbf{d} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.15)$$

fase essa proposta por He e McKellar [24] e Wilkens [46] de forma independente. Portanto de forma análoga ao efeito Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher um dipolo elétrico sob um campo magnético adquire uma fase quântica de caráter geométrico.

## 2.3 Fase de Berry

Quando estudamos os efeitos Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher é intuitivo pensar que é possível generalizar a ideia de fase topológica devido a perturbações externas, fazemos isso com a fase de Berry. Nessa seção buscaremos deduzir a fase de Berry e entender esta como uma fase topológica ou geométrica.

Considere um hamiltoniano que depende de um conjunto de parâmetros genéricos  $\mathbf{R} = (R_i)$  que dependem do tempo. Considere agora que esse sistema evolui adiabaticamente sobre uma curva  $C$  no espaço de parâmetros. A equação de auto-estados é:

$$H(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle. \quad (2.16)$$

Consideramos que as funções de base sejam bem comportadas e de valor único ao longo da curva  $C$  no espaço de parâmetros. De acordo com o teorema adiabático, um sistema inicialmente no estado  $|n(\mathbf{R}(t=0))\rangle$ , em que esse estado é um auto-estado de

$H(\mathbf{R}(t))$ , adquire uma fase quântica <sup>2</sup> e podemos escrever:

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\gamma_n(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (2.17)$$

Ainda segundo a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_n(t)\rangle = H(\mathbf{R}(t)) |\psi_n(t)\rangle, \quad (2.18)$$

temos

$$i\hbar \left[ i \frac{\partial \gamma_n(t)}{\partial t} e^{i\gamma_n(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle - i \frac{E_n(\mathbf{R}(t))}{\hbar} e^{i\gamma_n(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + e^{i\gamma_n(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))} \frac{\partial}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \right] = H(\mathbf{R}) e^{i\gamma(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle$$

ou

$$-\hbar \frac{\partial \gamma_n(t)}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle = H(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R}(t))\rangle,$$

como  $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$  é auto-estado do hamiltoniano:

$$\begin{aligned} -\hbar \frac{\partial \gamma_n(t)}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |n(\mathbf{R}(t))\rangle &= 0 \\ -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_n(t)}{\partial \mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando pela esquerda por  $\langle n(\mathbf{R})|$ :

$$-\langle n(\mathbf{R}(t))| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_n}{\partial \mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i \langle n(\mathbf{R}(t))| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_n(t)}{\partial \mathbf{R}} = i \langle u(\mathbf{R}(t))| \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t))\rangle,$$

---

<sup>2</sup>Consultar apêndice A

assim:

$$\gamma_n = \int_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{R}), \quad (2.19)$$

Com:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = i \langle n(\mathbf{R}) | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle. \quad (2.20)$$

A eq. (2.19) é uma fase geométrica e a eq. (2.20) a chamada conexão de Berry. Observe que a fase geométrica é dependente de *gauge*, pois fazendo a transformação

$$|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\zeta(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle \quad (2.21)$$

pela eq. (2.20):

$$\mathbf{A} \rightarrow i \langle n(\mathbf{R}) | e^{-i\zeta(\mathbf{R})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} e^{i\zeta(\mathbf{R})} | n(\mathbf{R}) \rangle$$

assim

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow i \langle n(\mathbf{R}) | e^{-i\zeta(\mathbf{R})} \left( e^{i\zeta(\mathbf{R})} \frac{\partial \zeta(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle + e^{i\zeta(\mathbf{R})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \right) \\ \mathbf{A} &\rightarrow -\frac{\partial \zeta(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} + i \langle n(\mathbf{R}) | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \end{aligned}$$

logo a fase (2.19) se transforma conforme a conexão:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \zeta(\mathbf{R}). \quad (2.22)$$

Durante a evolução adiabática em um tempo  $T$  a fase tem uma diferença de  $\zeta(\mathbf{R}(0)) - \zeta(\mathbf{R}(T))$ , com  $\mathbf{R}(0)$  e  $\mathbf{R}(T)$  os pontos iniciais e finais da curva  $C$ . Fock (1928) [21] observou que sempre podemos escolher um *gauge* no qual esse acréscimo de fase se cancele na curva  $C$ . Berry (1984) [8] motivado pelo resultado de Fock concluiu que em uma curva fechada, ou seja  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$ , uma transformação de *gauge* deve ter valor único, assim:

$$\zeta(\mathbf{R}(0)) - \zeta(\mathbf{R}(T)) = 2\pi \cdot n \quad (2.23)$$

com  $n$  inteiro. Portanto  $\gamma_n$  é um invariante de *gauge*, pois o acúmulo de fase se cancela ao decorrer da curva [21]. A fase geométrica fica então:

$$\gamma_n = \oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \quad (2.24)$$

que é conhecida como fase de Berry. Essa fase depende apenas da geometria da curva fechada e independe da forma que  $\mathbf{R}$  varia no tempo, portanto tem um caráter topológico. A fase de Berry foi deduzida para uma conexão de Berry genérica, porém é nítido a semelhança com as fases Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher. Assim concluímos que no caso do efeito Aharonov-Bohm a fase  $\phi_{AB}$  é a fase de Berry do sistema, e de forma análoga para a fase Aharonov-casher.

# 3

## QUANTIZAÇÃO DE LANDAU

Nesse capítulo vamos deduzir os níveis de Landau para partículas neutras com dipolo magnético permanente e com dipolo elétrico induzido sob a influência de campos externos, analisando as fases Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkens. Seguimos aqui o procedimento usado por [20, 40, 41] e fazemos algumas considerações de existência dos níveis de Landau deduzidas por Ericsson e Sjöqvist (2001) [18].

### 3.1 Quantização de Landau para uma Partícula Neutra

Nessa seção buscamos a quantização de Landau para um dipolo magnético permanente sob um campo elétrico externo conforme o trabalho de Ribeiro, Furtado e Nascimento (2006) [40].

Considere uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente em um campo elétrico onde sua dinâmica se restringe ao plano (x-y), no limite não-relativístico, a hamiltoniana do sistema é [41]:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{\mu}{c^2} \hat{n} \times \mathbf{E} \right)^2 + \frac{\hbar\mu}{2mc^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (3.1)$$

com  $\hat{n}$  a direção do dipolo magnético e  $\mathbf{E}$  o campo elétrico externo. Observe que potencial

Aharonov-Casher efetivo é [18]:

$$\mathbf{A}_{AC} = \frac{1}{c} \hat{n} \times \mathbf{E}.$$

Escolhemos o *gauge* simétrico

$$\mathbf{A}_{AC} = \frac{\lambda}{2c} \rho \hat{e}_\phi, \quad (3.2)$$

que corresponde ao campo elétrico externo:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2} \rho \hat{e}_\rho \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  é uma densidade linear de cargas estacionárias que gera o campo externo. Assim temos um campo magnético Aharonov-Casher efetivo uniforme  $\mathbf{B}_{AC} = \nabla \times \mathbf{A}_{AC}$  [40]:

$$\mathbf{B}_{AC} = \frac{\lambda}{c} \hat{e}_z. \quad (3.4)$$

Observando que esse *gauge* está em conformidade com as condições impostas por Ericsson e Sjöqvist [18] para a existência de níveis análogos ao sistema tomando  $\hat{n} = \hat{e}_z$ , ou seja, no caso do momento magnético da partícula ser perpendicular ou plano:

- Campo elétrico eletrostático:  $\partial_t \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$
- campo magnético uniforme:  $\mathbf{B}_{AC}$
- Ausência de torque no dipolo:  $\boldsymbol{\tau} = \mu \hat{n} \times \mathbf{B} = 0$

O campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_{AC}$  aparece devido a velocidade não nula do dipolo e pelo acoplamento spin-órbita, então apesar do campo externo ser eletrostático é possível definir  $\mathbf{B}_{AC}$  que é um campo efetivo. Assim garantimos a existência de níveis de Landau para o sistema e portanto iremos agora deduzir tais níveis.

Considerando a equação de Schrödinger:

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

que a solução pode ser escrita da forma  $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}t}\psi(\mathbf{x})$ , sabendo que a hamiltonina apresenta uma simetria em  $z$  e pelas eqs. (3.1) e (3.3) temos:

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{\mu^2 A_{AC}^2}{2mc^2} + \frac{\mu \mathbf{A}_{AC} \cdot \mathbf{p}}{2mc} + \frac{\mu \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_{AC}}{2mc} \right) \psi + \frac{\hbar \mu \lambda}{2mc^2} \psi = \varepsilon \psi,$$

mas

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_{AC} \psi = -i \nabla (\mathbf{A}_{AC} \psi) = -i (\nabla \cdot \mathbf{A}_{AC}) \psi - i \mathbf{A}_{AC} \cdot \nabla \psi;$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{AC} = 0.$$

Logo

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_{AC} \psi = -i \mathbf{A}_{AC} \cdot \nabla \psi = \mathbf{A}_{AC} \cdot \mathbf{p} \psi.$$

Portanto

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{\mu^2 A_{AC}^2}{2mc^2} + 2 \frac{\mu \mathbf{A}_{AC} \cdot \mathbf{p}}{2mc} \right) \psi + \frac{\hbar \mu \lambda}{2mc^2} \psi = \varepsilon \psi$$

ou

$$\left( \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{(\mu \lambda \rho)^2}{8mc^4} - \frac{2i\hbar \mu \lambda \rho \nabla_\phi}{4mc^2} \right) \psi + \frac{\hbar \mu \lambda}{2mc^2} \psi = \varepsilon \psi.$$

Assim a equação diferencial em coordenadas polares fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] - i\hbar \frac{\omega}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{m\omega^2}{8} \rho^2 \psi + \frac{\hbar \omega}{2} \psi = \varepsilon \psi, \quad (3.5)$$

com a frequência ciclotron [20]

$$\omega = \sigma \omega_{AC} = \sigma \frac{|\mu \lambda|}{mc^2}, \quad (3.6)$$

$\sigma = \pm$  denota a direção de rotação do movimento clássico. Devido a simetria da eq. (3.5)

usamos separação de variáveis e a solução é  $\psi(\mathbf{x}) = e^{il\phi}R(\rho)$ , logo:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{l^2}{\rho^2} R \right) + \left( \varepsilon - \frac{m\omega_{AC}^2}{8} \rho^2 + \frac{\sigma \hbar l \omega_{AC}}{2} - \frac{\sigma \hbar \omega_{AC}}{2} \right) R = 0. \quad (3.7)$$

Fazendo a mudança de coordenada:

$$\xi = \frac{m\omega_{AC}}{2\hbar} \rho^2, \quad (3.8)$$

como consequência temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\rho} &= \frac{m\omega_{AC}}{\hbar} \rho \\ \frac{dR}{d\rho} &= \frac{d\xi}{d\rho} \frac{dR}{d\xi} = \frac{m\omega_{AC}}{\hbar} \rho \frac{dR}{d\xi} \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} &= \frac{m\omega_{AC}}{\hbar} \frac{dR}{d\xi} + \frac{(m\omega_{AC})^2 \rho^2}{\hbar^2} \frac{d^2 R}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Assim aplicamos essa mudança na equação diferencial:

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} + \left( \beta + \frac{\xi}{4} + \frac{l^2}{4\xi} \right) R = 0 \quad (3.9)$$

com

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_{AC}} + \frac{\sigma(l-1)}{2}. \quad (3.10)$$

Analisando os limites assintóticos da função  $R$  chegamos a solução:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|l|/2} \zeta(\xi), \quad (3.11)$$

portanto a equação fica:

$$\xi \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + (|l| + 1 - \xi) \frac{d\zeta}{d\xi} + \left( \beta - \frac{1 + |l|}{2} \right) \zeta = 0. \quad (3.12)$$

A eq. (3.12) tem como solução a função hipergeométrica <sup>1</sup>:

$$\zeta(\xi) = F\left[-\left(\beta - \frac{|l|+1}{2}\right), |l|+1, \xi\right]. \quad (3.13)$$

Para garantir que a função de onda seja normalizável, a função hipergeométrica deve convergir para um polinômio. Para a função hipergeométrica convergir para um polinômio de grau  $\nu$  é preciso que o primeiro fator seja inteiro e igual a  $\nu$ :

$$\nu = \beta - \frac{|l|+1}{2}, \quad (3.14)$$

finalmente pela eq. (3.10) chegamos aos níveis de Landau:

$$\varepsilon_{\nu,l} = \left(\nu + \frac{|l|}{2} - \frac{\sigma l}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{AC}. \quad (3.15)$$

Assim os níveis de Landau são infinitamente degenerados devido a simetria e translação [41], os níveis de Landau são independentes do centro de orbita mas dependentes da direção de revolução clássica.

## 3.2 Quantização de Landau para um Dipolo Elétrico

Agora considerando um sistema análogo ao dipolo magnético: procuramos os níveis de Landau de um dipolo elétrico sujeito a um campo magnético externo. Logo, considere uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido  $\mathbf{d}$  em um campo magnético externo radial  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\lambda_m}{2} \rho \hat{e}_\rho \quad (3.16)$$

---

<sup>1</sup>Para mais informações sobre a função hipergeométrica o leitor pode consultar a referência [14].

com  $\lambda_m$  uma densidade de cargas magnéticas, por analogia com a eq. (3.1) a hamiltoniana do sistema é:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{d}{c^2} \hat{n} \times \mathbf{B} \right)^2 - \frac{\hbar d}{2mc^2} \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (3.17)$$

com  $\hat{n}$  a direção do dipolo, aqui escolhemos  $\hat{n} = \hat{e}_z$  [40]. Definimos o potencial vetor de He-Mckellar- Wilkens conforme [18]:

$$\mathbf{A}_{HMW} = \frac{1}{c} \hat{n} \times \mathbf{B} = \frac{\lambda_m}{2c} \rho \hat{e}_\phi. \quad (3.18)$$

Assim podemos encontrar o campo magnético associado a esse potencial:

$$\mathbf{B}_{HMW} = \nabla \times \mathbf{A}_{HMW} = \frac{\lambda_m}{c} \hat{e}_z. \quad (3.19)$$

Portanto as condições de existência de níveis de Landau análogos são satisfeitas:

- Campo eletrostático:  $\partial_t \mathbf{B} = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$
- Campo magnético uniforme:  $\mathbf{B}_{HMW}$
- Ausência de torque no dipolo:  $\boldsymbol{\tau} = 0$ , desde que a velocidade da partícula de restrinja ao plano [40].

Sabendo que a solução pode ser escrita como  $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\varepsilon t} \psi(\mathbf{x})$ , que a dinâmica deve se restringir ao plano (x-y), e por (3.17) e (3.16) temos de forma similar ao dipolo magnético:

$$\frac{1}{2m} (p^2 + \frac{d^2}{c^2} A_{HMW}^2 + 2\frac{d}{c} \mathbf{A}_{HMW} \cdot \mathbf{p}) \psi - \frac{\hbar d \lambda_m}{2mc^2} \psi = \varepsilon \psi$$

ou

$$\left( \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{(d\lambda_m \rho)^2}{2mc^4} - 2i\hbar \frac{d\lambda_m \rho \nabla_\phi}{4mc^2} \right) \psi - \frac{\hbar d \lambda_m}{2mc^2} \psi = \varepsilon \psi.$$

A equação diferencial em coordenadas polares fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] - i\hbar \frac{\omega}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{m\omega^2}{8} \rho^2 \psi - \frac{\hbar\omega}{2} \psi = \varepsilon \psi, \quad (3.20)$$

de modo análogo ao caso anterior:

$$\omega = \sigma \omega_{HMW} = \sigma \frac{|d\lambda_m|}{mc^2}. \quad (3.21)$$

Usando separação de variáveis encontramos a solução  $\psi(\mathbf{x}) = e^{il\phi} R(\rho)$  e substituímos na eq. (3.20), assim:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{l^2}{\rho^2} R \right) + \left( \varepsilon - \frac{m\omega_{HMW}^2}{8} \rho^2 - \frac{\sigma \hbar l \omega_{HMW}}{2} + \frac{\sigma \hbar \omega_{HMW}}{2} \right) R = 0.$$

Fazendo a mudança de variável

$$\xi = \frac{\omega_{HMW}}{2\hbar} \rho^2 \quad (3.22)$$

chegamos a

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} + \left( \beta - \frac{\xi}{4} - \frac{l^2}{4\xi} \right) R = 0,$$

com

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_{HMW}} - \frac{\sigma(l-1)}{2}. \quad (3.23)$$

Fazendo a análise assintótica da equação diferencial verificamos que a solução é do tipo:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|l|/2} F(\xi). \quad (3.24)$$

Assim temos:

$$\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} + (|l| + 1 - \xi) \frac{dF}{d\xi} - \left( \beta - \frac{1 + |l|}{2} \right) F = 0. \quad (3.25)$$

Assim a solução da eq. (3.25) é uma função hipergeométrica:

$$F(\xi) = F\left[-\left(\beta - \frac{|l|+1}{2}\right), |l|+1, \xi\right], \quad (3.26)$$

onde o primeiro fator deve ser inteiro pela mesma razão do caso magnético, assim:

$$n = \beta - \frac{|l|+1}{2},$$

portanto devido a eq. (3.23) chegamos aos níveis de Landau para o dipolo elétrico:

$$\varepsilon_{n,l} = \left(n + \frac{|l|}{2} + \frac{\sigma l}{2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{HMW}. \quad (3.27)$$

Logo os níveis de Landau também independem do centro de órbita, mas dependem da direção de rotação clássica e são infinitamente degenerados.

# 4

## EFEITO HALL QUÂNTICO

A fase quântica adquirida devido um efeito externo é conhecida como fase de Berry, nesse capítulo buscamos deduzir algumas considerações sobre o efeito dela no transporte adiabático em sistemas bidimensionais. Mostraremos que é possível, em certas condições, ocorrer um efeito semelhante ao efeito Hall Clássico mas com valores de condutância quantizados: o efeito Hall Quântico. Aqui seguimos o trabalho de Chang, Xiao e Niu (2010) [15]. Antes, porém, é conveniente fazer uma breve revisão do fenômeno do Efeito Hall no contexto clássico para então buscarmos sua analogia quântica.

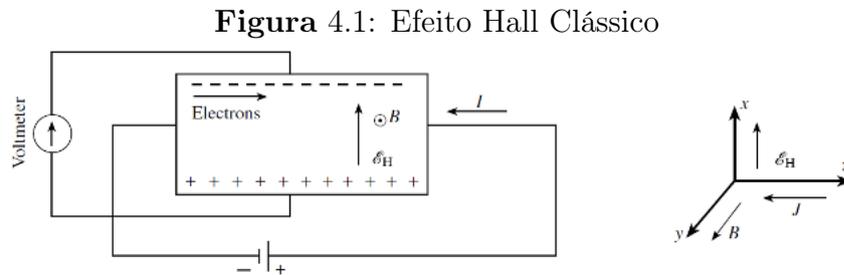
### 4.1 Efeito Hall Clássico

É sabido da física clássica que a dinâmica de uma partícula carregada muda se esta estiver em uma região de campo eletromagnético não nulo, pois partículas carregadas sob influencia de campos eletromagnéticos estão sujeitas à força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\boldsymbol{\varepsilon}_H + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.1)$$

Onde a partícula é acelerada na direção do campo elétrico pela força elétrica e na direção perpendicular ao campo magnético pela força magnética.

Consideramos agora um arranjo onde uma lâmina condutora carregando uma elétrica é submetida a um campo magnético saindo do plano da folha, conforme a figura:



Fonte: <http://futura-sciences.us/dico/d/physics-hall-effect-50002506/>

Esse arranjo experimental foi proposto em 1879 por Edwin Herbert Hall para descobrir se os portadores de carga da corrente elétrica eram positivos ou negativos. Com tal experimento ele concluiu que os portadores de carga que se movem no sentido contrário ao sentido convencional para a corrente e eram elétrons.

Assim, se a corrente estiver fluindo na lâmina da direita para a esquerda, os elétrons estarão se movendo no sentido contrário. Devido a eq. (4.1) os elétrons sofrem uma deflexão para cima devido a força magnética, fazendo surgir assim uma diferença de potencial elétrico no interior da lâmina devido o acúmulo de cargas negativas na parte superior, estabelecendo-se, então um campo elétrico na vertical para cima, esse é o conhecido Efeito Hall Clássico [23]. Ao passo que os elétrons vão sendo depositados na extremidade superior, a diferença de potencial vai aumentando, e conseqüentemente o campo elétrico, até o limiar de força resultante nula:

$$q\varepsilon_H = qvB,$$

sabendo que  $J = nqv$  e  $J = i/A$ :

$$\varepsilon_H = \frac{iB}{nqA}.$$

Porém,  $V_H = \varepsilon_H d$ :

$$n = \frac{iB}{qLV_H}, \quad (4.2)$$

onde  $n$  é a densidade de portadores de cargas,  $i$  é a corrente elétrica,  $B$  é o módulo do campo magnético,  $q$  é o módulo da carga elétrica,  $L$  é o tamanho da tira condutora e  $V_H$  é a diferença de potencial Hall. Assim é possível determinar, com o o fenômeno do Efeito Hall, quantidades importantes como a densidade de portadores.

## 4.2 Curvatura de Berry

Nessa secção vamos definir a curvatura de Berry, uma quantidade genérica que descreve os aspectos geométrico do espaço de parâmetros com base nas conexões de Berry já definidas anteriormente.

A conexão de Berry também é conhecida como potencial vetor de Berry, em analogia com o potencial vetor eletromagnético. Portanto, assim como é possível escrever os campos eletromagnético a partir de derivadas do potencial vetor magnético, é possível definir um tensor campo de *gauge* a partir do potencial vetor de Berry [15]:

$$\Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) = \frac{\partial}{\partial R^\mu} A_\nu^n(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial R^\nu} A_\mu^n(\mathbf{R}). \quad (4.3)$$

A chamada curvatura de Berry, usando a equação 2.20 podemos expressar na forma:

$$\Omega_{\mu\nu}^n = i \left[ \frac{\partial}{\partial R^\mu} \langle n | \frac{\partial}{\partial R^\nu} | n \rangle - \frac{\partial}{\partial R^\nu} \langle n | \frac{\partial}{\partial R^\mu} | n \rangle \right]$$

sabendo que  $\frac{\partial}{\partial R^\mu} = \frac{\partial}{\partial R_\mu}$ :

$$\Omega_{\mu\nu}^n = i \left[ \left\langle \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\mu} \left| \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\nu} \right\rangle + \left\langle n(\mathbf{R}) \left| \frac{\partial}{\partial R^\mu} \frac{\partial}{\partial R^\nu} \right| n(\mathbf{R}) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\nu} \left| \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\mu} \right\rangle - \left\langle n(\mathbf{R}) \left| \frac{\partial}{\partial R^\nu} \frac{\partial}{\partial R^\mu} \right| n(\mathbf{R}) \right\rangle \right]$$

como as derivadas comutam a curvatura de Berry fica:

$$\Omega_{\mu\nu}^n = i \left[ \left\langle \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\mu} \middle| \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\nu} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\nu} \middle| \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R^\mu} \right\rangle \right]. \quad (4.4)$$

Podemos expressar a fase de Berry com relação a curvatura de Berry. Usando o teorema de Stokes e sendo  $S$  uma superfície delimitada pela curva  $C$  a fase de Berry fica [15]:

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \int_S dR^\mu \wedge dR^\nu \Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) \quad (4.5)$$

com  $\wedge$  o produto exterior<sup>1</sup>. A fase de Berry escrita dessa forma garante que a curvatura de Berry seja invariante de *gauge*, e sabendo que o espaço paramétrico é tridimensional a fase pode ser representada na forma [15]:

$$\gamma_n = \int_S d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}) \quad (4.6)$$

com

$$\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}) = \nabla_R \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R}), \quad (4.7)$$

onde a relação entre o tensor de Berry e o vetor de Berry é:  $\Omega_{\mu\nu}^n = \epsilon_{\mu\nu\epsilon} \Omega_{n\epsilon}$  [15].

Usando  $\langle n | \partial H / \partial \mathbf{R} | m \rangle = \langle \partial n / \partial \mathbf{R} | m \rangle (E_n - E_m)$  a curvatura de Berry fica [1]:

$$\Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) = i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \partial H / \partial R^\mu | m \rangle \langle m | \partial H / \partial R^\nu | n \rangle - \langle n | \partial H / \partial R^\nu | m \rangle \langle m | \partial H / \partial R^\mu | n \rangle}{(E_n - E_m)^2}. \quad (4.8)$$

Como toda a dinâmica do sistema se dá no nível  $n$ , a curvatura de Berry pode ser entendida como uma interação residual de projeções dos estados  $m$  no nível  $n$ . Se a dinâmica da

---

<sup>1</sup>Consultar o apêndice B

partícula se restringe ao estado  $n$ , fazemos:

$$\sum_n \Omega_{\mu\nu}^n = i \sum_{m \neq n} \sum_n \frac{\langle m | \partial H / \partial R^\nu | n \rangle \langle n | \partial H / \partial R^\mu | m \rangle - \langle m | \partial H / \partial R^\mu | n \rangle \langle n | \partial H / \partial R^\nu | m \rangle}{(E_n - E_m)^2}$$

ou

$$\sum_n \Omega_{\mu\nu}^n = 0. \quad (4.9)$$

Observe que se todas as energias dos níveis  $n$  e  $m$  forem incluídas na soma a curvatura desaparece para cada valor de  $\mathbf{R}$ , evidenciando assim um comportamento de monopolo no espaço de parâmetros [15]. A eq.(4.9) fornece uma lei de conservação local para a curvatura de Berry se todo o hamiltoniano for conhecido.

A Curvatura de Berry descreve das propriedades geométricas do espaço de parâmetros e é uma quantidade local. Todavia até aqui tratamos quantidades passivas no processo adiabático onde a evolução é dada por um elemento externo. Se as variáveis são dinâmicas e a curvatura de Berry participa de tal evolução, a Curvatura de Berry é mais fundamental que a Conexão de Berry [29].

### 4.3 Transporte Adiabático

Nessa seção buscaremos entender como uma perturbação externa pode induzir uma corrente em um material bidimensional.

Considere um sistema bidimensional cuja hamiltoniana é

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{x}).$$

Considere agora esse sistema constituído de sítios em uma rede periódica com  $U(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = U(\mathbf{x})$  onde  $\mathbf{a}$  é o vetor de rede Bravais. Nesse caso a teorema de Bloch garante que:

$$\psi_n(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} u_{n,\mathbf{q}}(\mathbf{x}), \quad (4.10)$$

com  $u_{n,q}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = u_{n,q}(\mathbf{x})$  e  $\psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}}\psi(\mathbf{x})$ , ou seja,  $\mathbf{q}$  é o momento canônico e  $\hbar\mathbf{q}$  está na primeira zona de Brillouin <sup>2</sup>. Assim podemos reescrever o hamiltoniano em função do parâmetro  $\mathbf{q}$  pela transformação unitária:

$$H(\mathbf{q}) = e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} H e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}},$$

ou

$$H(\mathbf{q}) = e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \left( \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{x}) \right) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}.$$

Aplicando o hamiltoniano em uma função genérica  $f$  temos

$$H(\mathbf{q})f = \frac{1}{2m} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} p^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f + U(\mathbf{x})f,$$

mas  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ , assim

$$H(\mathbf{x})f = \frac{-\hbar}{2m} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f + U(\mathbf{x})f$$

ou ainda

$$H(\mathbf{x})f = \frac{-\hbar}{2m} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \left[ (i\mathbf{q})^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + 2i\mathbf{q}\cdot e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \nabla^2 \right] f + U(\mathbf{x})f.$$

Logo a hamiltoniana fica

$$H(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} (\hbar^2 q^2 - 2i\hbar^2 \mathbf{q}\cdot\nabla - \hbar^2 \nabla^2) + U(\mathbf{x})$$

ou

$$H(\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} ((\hbar\mathbf{q})^2 + 2\hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} + p^2) + U(\mathbf{x}),$$

---

<sup>2</sup>A primeira zona de Brillouin, ou simplesmente zona de Brillouin, é o espaço de parâmetros do hamiltoniano transformado eq. 4.11 ou seja, o correspondente a célula primitiva no espaço recíproco.

portanto podemos escrever na forma:

$$H(\mathbf{q}) = \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{q})^2}{2m} + U(\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

Assim a fase de Berry e a curvatura de Berry ficam, respectivamente [15]:

$$\phi_n = \oint_C d\mathbf{x} \cdot \langle u_n(\mathbf{q}) | i\nabla_{\mathbf{q}} | u_n(\mathbf{q}) \rangle, \quad (4.12)$$

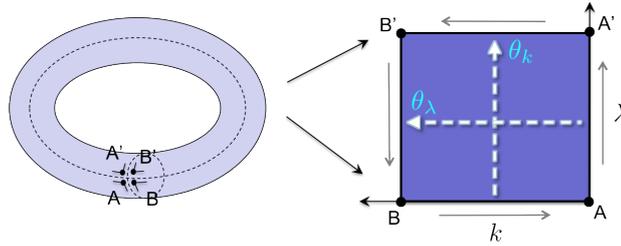
$$\Omega_n(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \times \langle u_n(\mathbf{q}) | i\nabla_{\mathbf{q}} | u_n(\mathbf{q}) \rangle. \quad (4.13)$$

Dessa forma a curvatura de Berry pode ser entendida como uma propriedade inerente da estrutura de bandas pois depende apenas da função de onda.

No caso de um sistema de momento de dipolos magnéticos podemos aplicar um campo magnético externo para induzir o movimento ciclotron em órbitas fechadas no espaço dos  $\mathbf{q}$ 's, assim a curvatura de Berry é evidenciada em efeitos magneto-oscilatórios [33]. Podemos ainda aplicar um campo elétrico externo para causar uma variação linear em  $\mathbf{q}$  e levar esses a varrer toda a zona de Brillouin [15]. Note que nesse caso a zona de Brillouin tem uma topologia de Toro, conforme fig. 4.2, e dois pontos  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q} + \mathbf{G}$  são reconhecidos como o mesmo ponto, onde  $\mathbf{G}$  é o vetor de rede recíproco [34]. A topologia de toro é devido a escolha  $|\psi_n(\mathbf{q})\rangle = |\psi_n(\mathbf{q} + \mathbf{G})\rangle$ . Por Exemplo: considere uma rede com o sitio bidimensional de formato retangular no espaço de parâmetros conforme a fig. (4.2). para garantir que os pontos na direção horizontal satisfaçam a condição acima, junta-se os pontos  $A$  com  $B$  e  $A'$  com  $B'$  de modo que eles coincidam, formando uma estrutura cilíndrica. Para ter a mesma garantia na na direção vertical junta-se os pontos  $A$  com  $A'$  e  $B$  com  $B'$  formando assim um toro. Pela condição de periodicidade acima:

$$u_{n\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{x}} u_{n,\mathbf{q}+\mathbf{G}}(\mathbf{x}).$$

Figura 4.2: Zona de Brillouin



Fonte: <http://inspirehep.net/record/1305724/plots>

Assim a fase de Berry fica [20]:

$$\phi_n = \int_{BZ} d\mathbf{q} \cdot \langle u_n(\mathbf{x}) | i\nabla_{\mathbf{q}} | u_n(\mathbf{q}) \rangle. \quad (4.14)$$

Desde de que o hamiltoniano tenha simetria translacional e seja periódico no tempo, ou seja  $H(t + T) = H(t)$ , com  $T$  o tempo de para chegar em um ponto equivalente no próximo sitio, podemos usar os auto estados de Bloch [15]:

$$|u_n\rangle \rightarrow |u_n\rangle - i\hbar \sum_{m \neq n} \frac{|u_m\rangle \langle u_m | \partial u_n / \partial t \rangle}{E_n - E_m}$$

. Definindo ainda o operador velocidade como:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, t)}{\partial(\hbar\mathbf{q})} \quad (4.15)$$

e usando os auto estados de Bloch temos:

$$v_n(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial(\hbar\mathbf{q})} \left[ \left( \langle u_n | + i\hbar \sum_{m \neq n} \frac{\langle \partial u_n / \partial t | u_m \rangle \langle u_m |}{E_n - E_m} \right) H \left( |u_n\rangle - i\hbar \sum_{m \neq n} \frac{|u_m\rangle \langle u_m | \partial u_n / \partial t \rangle}{E_n - E_m} \right) \right]$$

$$v_n(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial(\hbar\mathbf{q})} \left[ \langle u_n | H | u_n \rangle - i\hbar \sum_{m \neq n} \frac{\langle u_n | H | u_m \rangle \langle u_m | \partial u_n / \partial t \rangle}{E_n - E_m} + i\hbar \sum_{m \neq n} \frac{\langle \partial u_n / \partial t | u_m \rangle \langle u_m | H | u_n \rangle}{E_n - E_m} + \right. \\ \left. + \hbar^2 \sum_{l, m \neq n} \frac{\langle \partial u_n / \partial t | u_m \rangle \langle u_m | H | u_l \rangle \langle u_l | \partial u_n / \partial t \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_l)} \right],$$

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(q)}{\partial q} - i \sum_{m \neq n} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\langle u_n | H | u_m \rangle \langle u_m | \partial u_n / \partial t \rangle}{E_n - E_m} + i \sum_{m \neq n} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\langle \partial u_n / \partial t | u_m \rangle \langle u_m | H | u_n \rangle}{E_n - E_m}$$

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(q)}{\partial q} - i \sum_{m \neq n} \left( \frac{\langle u_n | \partial H / \partial q | u_m \rangle \langle u_m | \partial u_n / \partial t \rangle}{E_n - E_m} - \frac{\langle \partial u_n / \partial t | u_m \rangle \langle u_m | \partial H / \partial q | u_n \rangle}{E_n - E_m} \right). \quad (4.16)$$

Usando ainda  $\langle u_n | \partial H / \partial q | u_m \rangle = (E_n - E_m) \langle \partial u_n / \partial t | u_m \rangle$  e a eq. (4.8) chegamos em:

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(q)}{\partial q} - i \sum_{m \neq n} \left( \frac{\langle u_n | \partial H / \partial q | u_m \rangle \langle u_m | \partial H / \partial t | u_n \rangle - \langle u_n | \partial H / \partial t | u_m \rangle \langle u_m | \partial H / \partial q | u_n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \right)$$

mas compactamente:

$$v_n(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(q)}{\partial q} - \Omega_{qt}^n. \quad (4.17)$$

Para encontrar a densidade de corrente adiabática integramos na Zona de Brillouin. Sob essa integral o termo de ordem zero dado pela derivada parcial desaparece e encontramos o transporte adiabático [15]:

$$j = - \sum_n \int_{BZ} \frac{dq}{2\pi} \Omega_{qt}^n \quad (4.18)$$

Assim a corrente adiabática em uma banda devido uma perturbação que depende do tempo é a integral no espaço de parâmetros da curvatura de Berry e se essa curvatura for não nula garante-se a existência de uma corrente genérica no plano.

## 4.4 Efeito Hall Quântico

Aqui buscaremos deduzir o fenômeno do efeito Hall Quântico e entender as condições para que ele ocorra. Em sistemas bidimensionais o efeito Hall Quântico ocorre quando, devido a uma determinada configuração de campos externos, aparece uma corrente Hall em uma direção, associada a uma condutância que é quantizada.

Considere elétrons, por simplicidade, em uma rede bidimensional periódica sob a

perturbação de um campo elétrico externo. O hamiltoniano desse sistema é dado por:

$$H(t) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + U(\mathbf{x})$$

onde  $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ , no espaço dos parâmetros podemos escrever o hamiltoniano na forma:

$$H(\mathbf{q}, t) = H\left(\mathbf{q} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(t)\right). \quad (4.19)$$

Fazemos o momento invariante de *gauge*:

$$\mathbf{k} = \mathbf{q} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(t), \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{A}$  preserva a simetria translacional já mencionada anteriormente,  $\mathbf{q}$  é um bom número quântico e é uma constante do movimento ( $\partial_t \mathbf{q} = 0$ ) [15].

Usando o operador velocidade eq. (4.15) é possível mostrar que:

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial(\hbar q_a)}$$

com  $\varepsilon_n$  o valor médio do hamiltoniano. Pela eq. (4.20) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial k_a}{\partial t} \frac{\partial}{\partial k_a} = -\frac{e}{\hbar} \frac{\partial A_a(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial k_a},$$

mas o campo elétrico é definido na forma:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

assim as relações ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{e}{\hbar} E_a \frac{\partial}{\partial k_a} \\ \frac{\partial}{\partial q_a} &= \frac{\partial}{\partial k_a}. \end{aligned}$$

Portanto o operador velocidade fica [15]:

$$\mathbf{v}_n = \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \Omega_n(\mathbf{k}), \quad (4.21)$$

onde a curvatura de Berry é expressa na forma:

$$\Omega_n(\mathbf{k}) = i \langle \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}) | \times | \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}) \rangle. \quad (4.22)$$

A velocidade ganha um termo extra que chamamos de velocidade anômala, observe que essa velocidade é perpendicular ao campo externo e gera uma corrente Hall. Em cristais existe simetria de reversão temporal e de inversão espacial, e portanto, o termo anômalo da velocidade desaparece, restando apenas o primeiro termo.

Por outro lado a condutância de um sistema é definida conforme:

$$\sigma = \int \frac{\mathbf{J}}{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Porém  $\mathbf{J} = e\mathbf{v}$ , logo:

$$\sigma = e \int \frac{\mathbf{v}}{E} \cdot d\mathbf{l}$$

assim, considerando a eq. (4.21) a condutância pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma = -\frac{e^2}{\hbar} \int \frac{\mathbf{E} \times \Omega(\mathbf{k})}{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

No espaço dos  $\mathbf{k}$ 's a condutância para  $\mathbf{E}$  na direção  $\hat{e}_z$  fica [15]:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \Omega_{k_x k_y}. \quad (4.23)$$

Não obstante os números de Chern <sup>3</sup>, que podem assumir qualquer número inteiro,

---

<sup>3</sup>Os números de Chern são produtos de qualquer coleção de *gadget* definidos para pacotes vetoriais complexos cujo produto tem a mesma dimensão do *manifold*. Eles são invariantes topológicos associados

são definidos como [20]:

$$n = \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Omega_{k_x k_y}, \quad (4.24)$$

assim a condutância, conhecida como condutividade Hall é quantizada para um *manifold* fechado conforme a expressão:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} n. \quad (4.25)$$

Portanto vai haver uma diferença de potencial no plano (x-y) já que existe uma condutância e associada a essa condutância vai haver uma corrente.

A eq. (4.25) caracteriza o efeito Hall quântico: a condutividade Hall é quantizada para bandas bidimensionais não interagentes. Primeiramente o efeito Hall Quântico foi baseado na invariância de *gauge*, depois verificou-se que está relacionado com a invariância topológica das bandas de energia [37]. O leitor, caso queira, pode se aprofundar no tema a partir da obra Quantum Hall Effect de Zyun F. Ezawa (2008) [19] que trata o efeito Hall Quântico a partir de teoria de campos por aproximações e dá exemplos detalhados desse efeito em diversos sistemas de matéria condensada.

A quantização da condutância Hall foi prevista pela primeira vez em 1975 por Ando, Matsumoto e Uemura [3]. Do ponto de vista experimental é possível verificar o efeito Hall Quântico fazendo medidas da resistência Hall, uma vez que a resistência é definida conforme:

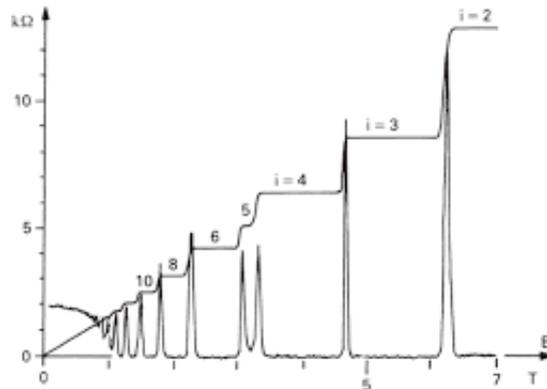
$$R = \frac{1}{\sigma}. \quad (4.26)$$

Assim é possível traçar o gráfico resistência *versus* campo magnético e observar platôs que correspondem os valores quantizados conforme a fig. (4.3).

Em 1980 Klaus von Klitzing [28], observou experimentalmente a quantização da condutância Hall em silício desenvolvidas por Michael Pepper e Gerhard Dorda. Por essa descoberta, von Klitzing recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1985. Posteriormente

---

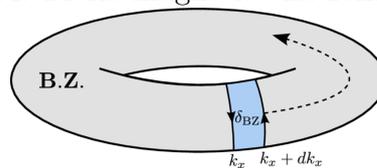
a campos vetoriais. (A frente discutiremos mais sobre eles)

**Figura 4.3:** Quantização da resistência Hall

Fonte: Rafael Emilio Braknecht

Robert Laughlin verificou que a quantização exata da condutância Hall está relacionada com a invariância de *gauge*, o autor chegou a essa conclusão usando uma bomba de carga Thouless. Mais recentemente em 2007 [38], o efeito Hall quântico inteiro foi observado em grafeno em temperaturas comparáveis a temperatura ambiente.

Um efeito análogo é obtido considerando que existe um fluxo magnético na zona de Brillouin, conforme fig.(4.4). Nesse caso a condutância Hall é calculada pela fórmula

**Figura 4.4:** Fluxo magnético na zona de Brillouin

Fonte: Oscar Viyuela

Kubo [15]:

$$\sigma_H = ie^2\hbar \sum_{n>0} \frac{\langle \Phi_0 | v_1 | \Phi_n \rangle \langle \Phi_n | v_2 | \Phi_0 \rangle - (1 \iff 2)}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_n)^2}, \quad (4.27)$$

com o operador velocidade:

$$v_i = \frac{\partial H}{\partial(\hbar k_i)} = \frac{e \phi_i}{\hbar L_i}$$

onde  $\phi_i$  é o fluxo magnético e  $L_i$  as dimensões do sistema. Assim fazendo a média

termodinâmica, a condutância Hall Quântica é:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{\hbar} \int_0^{\frac{2\pi}{L_i}} d^2k \Omega_{k_1 k_2} \quad (4.28)$$

que está de acordo com a eq. (4.23). Se o hamiltoniano for periódico em  $k_i$  com período  $\frac{2\pi}{L_i}$  a condutância Hall é quantizada conforme a eq. (4.25), e ocorre o efeito Hall quântico.

Para elétrons, que são férmions, a condutância Hall é dada por:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} f(\varepsilon_k) \Omega_{k_x k_y} \quad (4.29)$$

onde  $f(\varepsilon_k)$  é a função distribuição de Fermi-Dirac, caracterizando assim, o que chamamos de efeito Hall anômalo [35] e ocorre principalmente em ferromagnetos. Para bósons que são regidos pela estatística de Bose-Einstein temos:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} n_B(\varepsilon_k) \Omega_{k_x k_y} \quad (4.30)$$

onde  $n_B(\varepsilon_k)$  é a função distribuição de Bose-Einstein.

É importante abrir um parenteses para dissertar mais sobre o significado físico dos números de Chern. De início considere a integral:

$$c_n = - \int_0^T dt \int_{BZ} \frac{dq}{2\pi} \Omega_{qt}^n \quad (4.31)$$

Resolvendo essa integral ao longo da curva fechada da fig. (4.2) partindo de B, pela eq. (2.24) e considerando os pontos  $B = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $A' = (1, 1)$ ,  $B' = (0, 1)$  escrevemos:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^1 dx A_x(x, 0) + \int_0^1 dy A_y(1, y) + \int_1^0 dx A_x(x, 1) + \int_1^0 dy A_y(0, y) \right],$$

ou

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^1 dx [A_x(x, 0) - A_x(x, 1)] - \int_0^1 dy [A_y(0, y) - A_y(1, y)] \right].$$

Podemos definir o acúmulo de fase na direção  $x$  por:

$$\int_0^1 dx [A_x(x, 0) - A_x(x, 1)] = \theta_x(1) - \theta_x(0),$$

fazemos uma definição análoga para a direção  $y$ . Portanto durante todo o percurso o estado adquiriu uma fase conforme a expressão [15]:

$$|u(0, 0)\rangle = e^{i[\theta_x(1) - \theta_x(0) - \theta_y(0) + \theta_y(1)]} |u(0, 0)\rangle. \quad (4.32)$$

Assim  $c_n$  pode ser considerado o acúmulo de fase durante o percurso fechado. Porém pela condição de periodicidade esse acúmulo deve se cancelar, logo:

$$c_n = 2\pi n, \quad (4.33)$$

com  $n$  inteiro. Denotamos esse número de primeiro número de chern ou simplesmente de número de Chern, note que  $n$  é o que já definimos anteriormente, e esse número está intimamente relacionado com condição de periodicidade do sistema.

# 5

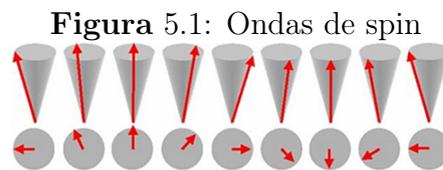
## MÁGNONS

Desde o experimento de Stern-Gerlach no século passado sabemos que os átomos são dotados de um momento de dipolo magnético intrínseco que não está relacionado com o movimento atômico, esse momento de dipolo é singular e o denotamos de spin. Sabemos ainda que esse momento magnético pode interagir com um campo magnético externo se alinhando a ele. Por outro lado a spintrônica busca a utilização desse fenômeno para transportar informações com um menor curso energético, uma vez que a resistência envolvida no transporte é quase nula. A ideia de usar o acoplamento do spin com um campo externo para o transporte de informações é recente e portanto ainda em construção e pode se apresentar uma alternativa a eletrônica convencional pautada na corrente de elétrica. Um meio de fazer isso é através de quase-partículas conhecidas como mágnons, que são ondas de spin quantizadas. Nesse capítulo buscamos entender o conceito de mágnons e algumas propriedades destes tais como condutância Hall e condutância Hall Térmica a partir do efeito Hall Quântico.

### 5.1 Mágnons

Nessa seção buscamos conceituar ondas de spin e mágnons e entender as propriedades destes com base no Efeito Hall Quântico. O spin é uma propriedade puramente

quântica da matéria, ou seja, não tem análogo clássico, é a propriedade de interagir com um campo magnético externo através do acoplamento do dipolo magnético de spin. Esses dipolos são alinhados em uma direçao para ferromagnetos, por exemplo, mas podem mudar seu alinhamento por perturbações externas. Se essa mudança no alinhamento for periódica e se propagar, tem-se então, ondas de spin conforme a fig. (5.1). Então pode-se definir ondas de spin como excitações coletivas de baixa energia do acoplamento do spin, magnons são versões quantizadas dessas ondas de spin <sup>1</sup>. As principais interações que ondas de spin sofrem é devido o acoplamento dipolo-dipolo e interação de troca. Os spins de sistemas ferromagnéticos interagem a partir de interações de troca e com o campo magnético aplicado, fazendo com que as excitações do sistema sejam excitações coletivas ao redor de um ponto de equilíbrio, mantendo-se paralelos uns aos outros e girando em torno do campo magnético. Veja mais em [11].



Fonte: <https://www.uni-muenster.de>

Quando o dipolo magnético de spin muda de direçao a força magnética total do grupo de dipolos é diminuída, para voltar ao estado original de alinhamento é necessário um quantum de energia, podemos imaginar mágnons como a quantidade de energia necessária para realinhar os spins. Devido a natureza bosônica, magnons podem formar estados coerentes devido a condenscao de quase-equilíbrio, e se propagar por grandes distâncias sem perder as informações que são carregadas pela carga magnética [36].

<sup>1</sup>O leitor interessado encontrará um apanhado introdutório sobre o formalismo de mágnons no livro "Introdução à Física Estatística" de Sílvio R. A. Salinas.

### 5.1.1 Modelo de Heisenberg

Um modelo que descreve mágnons é o hamiltoniano proposto por Werner Heisenberg e por Paul Dirac em 1926 para descrever o ordenamento ferromagnético [39]:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (5.1)$$

Com  $i$  e  $j$  representando o sítio onde cada spin se encontra,  $\mathbf{S}$  o operador de spin e  $J_{ij} > 0$  o termo de interação de troca, observe que o modelo de Heisenberg é um exemplo de interação entre os primeiros vizinhos.

Considere agora um ferromagneto em uma região sob a influência de um campo magnético externo  $B_0$  paralelo ao momento de dipolo na direção  $\hat{e}_z$ , nesse caso é preciso levar em conta a contribuição de Zeeman:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - 2\mu_B B_0 \sum_i S_i^Z \quad (5.2)$$

Pra reescrever o hamiltoniano de Heisenberg introduzimos os operadores

$$S_i^x = \frac{1}{2}(S_i^+ + S_i^-) \quad (5.3)$$

e

$$S_i^y = \frac{1}{2i}(S_i^+ - S_i^-), \quad (5.4)$$

onde esses novos operadores satisfazem a relação:

$$[S_i^+, S_j^-] = 2S_i^z \delta_{ij}. \quad (5.5)$$

Substituindo esses operadores na eq. (5.2) temos:

$$H = -J \sum_{i \neq j} \left[ \frac{1}{4} (S_i^+ + S_i^-)(S_j^+ + S_j^-) - \frac{1}{4} (S_i^+ - S_i^-)(S_j^+ - S_j^-) + S_i^z S_j^z \right] - 2\mu_B B_0 \sum_i S_i^z,$$

ou ainda

$$H = -J \sum_{i \neq j} \left[ \frac{1}{4} (S_i^+ S_j^+ + S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+ + S_i^- S_j^-) - \frac{1}{4} (S_i^+ S_j^+ - S_i^+ S_j^- - S_i^- S_j^+ + S_i^- S_j^-) + S_i^z S_j^z \right] - 2\mu_B B_0 \sum_i S_i^z.$$

No caso isotrópico onde a interação de troca se torna  $J = J_{ij}$ , o hamiltoniano de Heisenberg se torna:

$$H = -2\mu_B B_0 \sum_i S_i^z - J \sum_{ij} \left( \frac{1}{2} (S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-) + S_i^z S_j^z \right). \quad (5.6)$$

Por outro lado Meier e Loss (2003) [32] propõem o seguinte hamiltoniano para uma descrição mais detalhada de um ferromagneto no espaço bidimensional com momento de dipolo  $g\mu_B$  na direção  $\hat{e}_z$  e na presença de um campo elétrico externo  $\mathbf{E}$ :

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \left[ \frac{1}{2} \left( S_i^+ S_j^- e^{i\theta_{ij}} + S_i^- S_j^+ e^{-i\theta_{ij}} \right) + S_i^z S_j^z \right], \quad (5.7)$$

com  $S_i^\pm = S_j^x \pm iS_j^y$  e [47]

$$\theta_{ij} = \frac{g\mu_B}{\hbar c^2} \int d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{e}_z). \quad (5.8)$$

Observe que  $\theta_{ij}$  é uma fase do tipo Aharonov-casher. Recentemente Nakata, Klinovaja e Loss (2017) [36] diagonalizaram o hamiltoniano da eq. (5.7) usando as transformações de Holstein-Primakoff [19]:

$$S_i^+ = \sqrt{2S} \left( 1 - \frac{a_i^\dagger a_i}{2S} \right)^{1/2} a_i, \quad (5.9)$$

$$S_i^- = \sqrt{2S} a_i^\dagger \left( 1 - \frac{a_i^\dagger a_i}{2S} \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

e

$$S_i^z = S - a_i^\dagger a_i. \quad (5.11)$$

Onde  $a_i$  aniquila um mágnon no sítio  $i$ ,  $a_i^\dagger$  cria um mágnon no sítio  $i$  e  $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ . Para  $S \gg 1$  temos:

$$S_i^+ = \sqrt{2S} \left( a_i - \frac{1}{4S} (a_i^\dagger a_i a_i) + \dots \right)$$

e

$$S_i^- = \sqrt{2S} \left( a_i^\dagger - \frac{1}{4S} (a_i^\dagger a_i^\dagger a_i) + \dots \right),$$

Assim a equação 5.7 fica:

$$H_m = - \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} e^{i\theta_{ij}} (a_i a_j^\dagger + H.c.) \quad (5.12)$$

com  $t_{ij} = J_{ij} S$  e  $H.c.$  significa hamiltoniano conjugado. Fazendo o caso isotrópico e no limite termodinâmico e contínuo o hamiltoniano magnético se torna [36]:

$$H_m = \frac{JSa^2}{\hbar^2} \left( \mathbf{p} + \frac{g\mu_B}{c^2} \mathbf{E} \times \hat{e}_z \right)^2 \quad (5.13)$$

com  $a$  a constante de rede. Ainda fazendo  $\frac{JSa^2}{\hbar^2} = \frac{1}{2m}$ ,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$  e  $\mathbf{A}_m = \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \hat{e}_z$  finalmente a eq. (5.7) pode ser escrita na forma [36]:

$$H_m = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{g\mu_B}{c} \mathbf{A}_m \right)^2. \quad (5.14)$$

Observando a eq. (5.14) fica claro que o sistema vai apresentar uma fase Aharonov-Casher com um potencial efetivo  $\mathbf{A}_m$ .

Usando o momento invariante de *gauge* temos de forma compacta [19]:

$$H_m = \frac{1}{2m} \mathbf{\Pi}^2. \quad (5.15)$$

Podemos ainda considerar uma configuraao de campo em coordenadas retangulares dada por:  $\mathbf{E} = \lambda(x/2, y/2, 0)$  [18] que corresponde ao *gauge* simétrico  $\mathbf{A}_m = (\lambda/c)(y/2, x/2, 0)$  já explorado no capitulo 3 em coordenadas curvilíneas e que garante a existência de níveis de Landau para o sistema. Apesar de não existir campo magnético perpendicular ao plano, o gradiente de campo  $\lambda$  provoca um efeito totalmente correspondente. Para diagonalizar o hamiltoniano (5.14) fazemos:

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y) \quad (5.16)$$

e

$$a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y) \quad (5.17)$$

com  $[\Pi_x, \Pi_y] = \frac{i\hbar^2}{l_B^2}$ ,  $[a, a^\dagger] = 1$ , definindo o comprimento elétrico em analogia com o comprimento magnético:

$$l_\epsilon = \sqrt{\frac{\hbar c^2}{g\mu_B\lambda}} \quad (5.18)$$

e a frequência do movimento ciclotron:

$$\omega_c = \frac{g\mu_B\lambda}{mc^2}. \quad (5.19)$$

Portanto a frequência pode ser expressa na forma:

$$\omega_c = \frac{\hbar}{ml_\epsilon^2}$$

e os operadores:

$$\Pi_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_\epsilon}(a + a^\dagger),$$

$$\Pi_y = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}l_\epsilon}(a^\dagger - a).$$

Substituindo no hamiltoniano:

$$H_m = \frac{1}{2m}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2) = \frac{\hbar^2}{4ml_\epsilon^2}[(a + a^\dagger)^2 - (a^\dagger - a)^2]$$

ou

$$H_m = \frac{\hbar^2}{4ml_\epsilon^2}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a - a^2 - a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) = \frac{\hbar^2}{2ml_\epsilon^2}(aa^\dagger + a^\dagger a),$$

mas pela relação de comutação

$$aa^\dagger = 1 + a^\dagger a.$$

Assim o hamiltoniano fica:

$$H_m = \hbar\omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_c \left( N + \frac{1}{2} \right).$$

Portanto o níveis de landau magnéticos são dados por

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (5.20)$$

Assim os mágns não-relativísticos têm os níveis de Landau lineares com o número quântico e tais níveis são igualmente espaçados.

## 5.2 Condutância Hall de Mágns

Aqui buscamos entender como um gradiente de uma direção do campo externo pode proporcionar Efeito Hall Quântico em mágns. Considere uma rede periódica de mágns com vetor de rede Bravais  $\mathbf{R} = (a_x, a_y)$  onde o hamiltoniano de mágns é:

$$H = H_m + U(\mathbf{x})$$

com  $H_m$  dado pela eq. (5.14) e  $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x} + \mathbf{R})$ . Introduzindo o vetor de rede de Bloch  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  o hamiltoniano transformado no espaço recíproco fica:

$$H_k = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} H e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

ou como vimos anteriormente:

$$H_k = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla + \hbar\mathbf{k} + \frac{g\mu_B}{c} \mathbf{A}_m \right)^2. \quad (5.21)$$

Devido a periodicidade do sistema podemos usar o teorema de Bloch:

$$H_k u_{n,k} = E_{n,k} u_{n,k}$$

com

$$u_{n,k} = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \psi_n$$

e

$$H\psi_n = E_{n,k}\psi_n.$$

Nakata, Klinovajara e Loss [36] consideraram um gradiente na direção x de uma componente do campo magnético perpendicular ao plano com  $|\partial_x B| \ll \hbar\omega_c/q\mu_B a$  atuando sob o sistema bidimensional de mágns e ainda que o sistema é cercado por cargas magnéticas que atuam como reservatório para os mágns. Os autores procuraram a condutância de mágns sem impurezas, considerando que o gradiente de campo induz uma corrente dessas quase-partículas na direção perpendicular e portanto pode-se associar a essa corrente uma condutância conforme a definição:

$$\langle j_y \rangle = -G^{yx} \partial_x B$$

com  $\langle j_y \rangle$  o valor médio da corrente de mágns na direção  $y$ ,  $G^{yx}$  a condutividade Hall transversal e  $\partial_x B$  o gradiente de campo magnético. Por analogia com o caso elétrico e sabendo que  $g\mu_B$  faz o papel da carga temos [19]:

$$v_i = \frac{1}{\hbar} \partial_i B,$$

logo:

$$j_y = \frac{q\mu_B}{L^2} v_y. \quad (5.22)$$

Pela eq. (4.18) e (4.21), a formula Kubo (4.27) e sabendo do caráter bosônico dos magnos a condutância Hall é escrita conforme [26]:

$$G^{yx} = -i\hbar \frac{(g\mu_B)^2}{L^2} \sum_k \sum_n n_B(E_{n,k}) \times \sum_{m \neq n} \left[ \frac{\langle n\mathbf{k} | v_y | m\mathbf{k} \rangle \langle m\mathbf{k} | v_x | n\mathbf{k} \rangle - H.c.}{(E_{n,k} - E_{m,k})^2} \right]$$

como o vetor curvatura de Berry é definido na forma

$$\Omega_{n,j}(\mathbf{k}) = i\epsilon_{j\sigma\tau} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n\mathbf{k} | v_j | m\mathbf{k} \rangle \langle m\mathbf{k} | v_\sigma | n\mathbf{k} \rangle - H.c.}{(E_{n,k} - E_{m,k})^2}$$

temos

$$G^{yx} = \hbar \frac{(g\mu_B)^2}{L^2} \sum_k \sum_n n_B(E_{n,k}) \Omega_{n,z}(\mathbf{k}).$$

No limite termodinâmico a condutância se torna [36]:

$$G^{yx} = \frac{(g\mu_B)^2}{h} \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} n_B(E_{n,k}) \Omega_{n,z}(\mathbf{k}) \quad (5.23)$$

com  $n_B(E_{n,k})$  a função de distribuição de Bose-Einstein

$$n_B(E_{n,k}) = \left( e^{\frac{E_{n,k}}{k_B T}} - 1 \right)^{-1}.$$

Portanto, assim como o campo elétrico age sobre uma partícula carregada, o gra-

diente de campo magnético age sobre mágns induzindo uma corrente Hall transversal no plano. Como o campo magnético é perpendicular ao plano a simetria de reversão temporal é quebrada e a curvatura de Berry é não-nula [31]. Por outro lado a condição para a existência de efeito Hall quântico é a invariância topológica do número de Chern [44], considerando que a diferença entre os níveis de Landau é aproximadamente  $\hbar\omega_c$  e que para baixas temperaturas, ou seja  $k_B T \ll \hbar\omega_c$ , somente o nível  $n = 0$  contribui para a condutância [36] e chegamos na Condutância Hall para o espaço de Bloch quase plano:

$$G^{yx} \approx \frac{(g\mu_B)^2}{h} n_B(E_0^*) \nu_0, \quad (5.24)$$

com o primeiro número de chern:  $\nu_0 = \int_{BZ} (d^2k/2\pi) \Omega_{0,z}(\mathbf{k})$  e  $E_0^*$  é o valor típico de energia para a banda quase plana com  $\partial_k E_{0,k} \neq 0$ . Assim a condutância Hall para mágns é quantizada em unidades de  $\frac{(g\mu_B)^2}{h} n_B(E_0^*)$  com  $\nu_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , caracterizando assim o efeito Hall Quântico da rede de mágns.

### 5.3 Condutância Hall Térmica de Mágns

Assim como um gradiente de uma componente do campo induz uma corrente de mágns, um gradiente de temperatura também causa o mesmo efeito. Considere um ferromagneto sob a influência de uma componente do gradiente de temperatura  $\partial_x T$ , esse gradiente vai gerar uma corrente de mágns na direção  $y$  induzindo assim uma magnetização não uniforme na amostra. Tal magnetização também irá contribuir para a corrente Hall pois irá gerar um campo magnético inhomogêneo. Podemos analisar a contribuição desse campo na corrente em ambas as direções, porém tomamos por exemplo somente a direção  $x$  do gradiente de campo criado pela magnetização não uniforme  $\partial_x B$  pois irá gerar uma corrente na mesma direção da corrente gerada pela temperatura, com isso é preciso analisar a contribuição da corrente dada pela temperatura inhomogênea e pelo campo gerado pela magnetização, ou seja, a densidade de corrente térmica e a densidade de

corrente adiabática, respectivamente. A teoria de resposta linear garante que a densidade de corrente e densidade de corrente térmica obedecem a matriz de Onsager [31]:

$$\begin{pmatrix} \langle j_x \rangle \\ \langle j_j \rangle \\ \langle i_x^Q \rangle \\ \langle j_y^Q \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{xx} & L_{11}^{xy} & L_{12}^{xx} & L_{12}^{xy} \\ L_{11}^{yx} & L_{11}^{yy} & L_{12}^{yx} & L_{12}^{yy} \\ L_{21}^{xx} & L_{21}^{xy} & L_{33}^{xx} & L_{33}^{xy} \\ L_{21}^{yx} & L_{21}^{yy} & L_{33}^{yx} & L_{33}^{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x B \\ \partial_y B \\ \partial_x T/T \\ \partial_y T/T \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Aqui focamos no caso  $L_{ij}^{\mu\mu} = 0$  que é o caso de bandas totalmente separadas e com os coeficientes de Onsager definidos conforme [36]:

$$L_{ij}^{yx} = (k_B T)^{i+j-2} (g\mu_B)^{4-i-j} C_{i+j-2}[n_B(E_0^*)] \nu_0/h, \quad (5.26)$$

ainda

$$C_0[n_B(E_0^*)] = n_B(E_0^*)$$

$$C_1[n_B(E_0^*)] = [1 + n_B(E_0^*)] \log[1 + n_B(E_0^*)] + n_B(E_0^*) \log[n_B(E_0^*)]$$

$$c_2[n_B(E_0^*)] = [1 + n_B(E_0^*)] \log^2[1 + n_B(E_0^*)] - \log^2[n_B(E_0^*)] - 2Li[n_B(E_0^*)]$$

$Li(x)$  a função polilogarítmica  $Li_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^s$ . Assim temos escrevemos o transporte adiabático e o transporte térmico:

$$\langle j_y \rangle = -L_{11}^{yx} \partial_x B - L_{12}^{yx} \frac{\partial_x T}{T}, \quad (5.27)$$

$$\langle j_y^Q \rangle = -L_{21}^{yx} \partial_x B - L_{22}^{yx} \frac{\partial_x T}{T}. \quad (5.28)$$

Como aqui buscamos encontrar a condutância Hall Térmica, procuramos o caso onde a corrente provocada pela magnetização seja muito pequena, ou seja a situação de quase equilíbrio,  $\langle j_y \rangle = 0$ , usando a eq. (5.27) na eq. (5.28) para encontrar a corrente

Hall térmica temos:

$$\langle j_y^Q \rangle = - \left( L_{22}^{yx} - \frac{L_{12}^{yx} L_{21}^{yx}}{L_{11}^{yx}} \right) \frac{\partial_x T}{T}. \quad (5.29)$$

De modo análogo ao caso anterior podemos definir:

$$\langle j_y^Q \rangle = -K^{yx} \partial_x T$$

portanto, devido a eq. (5.29) condutância Hall Térmica para a rede de mágns é dada por:

$$K^{yx} = \left( L_{22}^{yx} - \frac{L_{12}^{yx} L_{21}^{yx}}{L_{11}^{yx}} \right) \frac{1}{T}. \quad (5.30)$$

Assim chegamos nas expressões da condutância Hall e condutância Hall Térmica, portanto, representamos a razão termomagnética para baixas temperaturas na forma [36]:

$$\frac{K^{yx}}{G^{yx}} = \left( \frac{k_B}{g\mu_B} \right)^2 T \left[ \frac{C_2}{C_0} + \left( \frac{C_1}{C_0} \right)^2 \right] \approx \left( \frac{k_B}{g\mu_B} \right)^2 T. \quad (5.31)$$

Logo para baixas temperaturas, isto é  $E_0^*/k_B T \geq 5$ , a razão termomagnética para a rede de mágns segue a lei de Wiedemann-Franz, ou seja, é proporcional a temperatura. Observe que a constante de proporcionalidade é o número de Lorenz:

$$L = \left( \frac{k_B}{g\mu_B} \right)^2 \quad (5.32)$$

que é independente dos parâmetros geométricos do sistema. Verificamos assim mais uma evidência da universalidade da lei de Wiedemann-Franz.

## 6

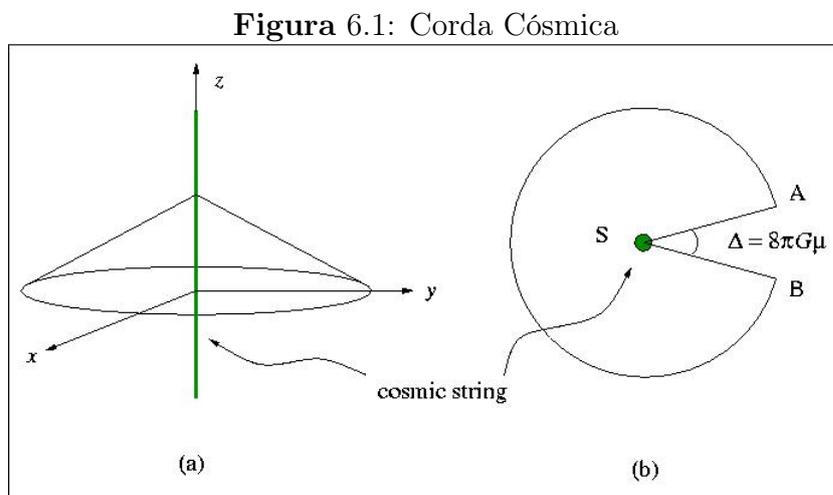
# DINÂMICA DE MÁGNONS NA PRESENÇA DE DEFEITO TOPOLÓGICO

Até aqui estudamos as fases quânticas, o efeito Hall Quântico e mágnons sem qualquer defeito, então é imediato perguntar: Como seria o comportamento dessas propriedades caso a rede de mágnons estivesse sujeita a algum defeito topológico? Para responder essa questão é preciso primeiro definir defeito topológico, o que fazemos nesse capítulo. Alguns autores como Bakke, Ribeiro, Furtado e Nascimento (2009) [25] procuraram quantizar um dipolo magnético com defeito topológico, aqui iremos seguir esses autores e apresentar a quantização de Landau para uma rede de mágnons com um defeito topológico do tipo corda cósmica. Considerando que o hamiltoniano proposto pela ref. [5] descreve os mágnons no espaço curvo da corda cósmica propomos ainda resultados preliminares das Condutância Hall Quântica e Hall Térmica para a rede de mágnons com um defeito topológico do tipo corda cósmica.

## 6.1 Defeito Topológico

Nessa seção buscamos apresentar o defeito topológico do tipo corda cósmica e algumas características desse defeito. Defeito topológico é um defeito de caráter geométrico no espaço-tempo que não pode ser revertido. Um defeito topológico ou um solitron topológico são estruturas do espaço defasadas de modo que impossibilitam uma transição perfeita entre essas estruturas. Na gravitação, assim como em matéria condensada, defeitos topológicos aparecem devido a quebra espontânea de simetria, como exemplo, cordas cósmicas. Katanaev e Volovick [27] desenvolveram uma abordagem geométrica fundamentada na geometria de Riemann-Cartan e mostraram a equivalência entre a teoria gravitacional tridimensional com torção e a teoria de defeitos em sólidos, assim cristais com defeitos topológicos no limite contínuo podem ser descritos pela teoria geométrica de defeitos.

Aqui usamos um defeito topológico tipo corda cósmica. Uma corda cósmica é um defeito que descreve um espaço-tempo curvo com um déficit de ângulo: imagine um espaço bidimensional plano, dele retire um ângulo  $\Delta$  e junte as partes restantes. O resultado é uma estrutura cônica onde o grau de curvatura dessa estrutura vai depender da quantidade que ângulo que foi retirado, conforme a fig. (6.1):



Fonte: [http://aether.lbl.gov/eunhwa\\_w\\_ebpage2/stringdynamics.html](http://aether.lbl.gov/eunhwa_w_ebpage2/stringdynamics.html)

Assim o espaço-tempo se curva como se houvesse uma linha massiva no eixo da cur-

vatura dando origem ao que chamamos de curvatura cônica. É possível também adicionar um ângulo  $\Delta$ , nesse caso temos uma curvatura negativa, ou curvatura anti-cônica.

O elemento de linha que define a métrica desse espaço é dado por [6]:

$$ds^2 = d\rho^2 + (\eta\rho)^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (6.1)$$

com o déficit angular definido conforme [9]:

$$\eta = 1 - \frac{\Delta}{2\pi} \quad (6.2)$$

e  $\Delta$  depende da densidade de massa da corda  $\varpi$ :

$$\Delta = \frac{8\pi G\varpi}{c^2}, \quad (6.3)$$

para a curvatura cônica temos  $\eta < 1$  e para a curvatura anti-cônica temos  $\eta > 1$ .

É possível estudar a dinâmica de um sistema no espaço tempo usando o formalismo de primeira ordem pelo uso de tetradas, que são vetores da base de um sistema ortogonal local da teoria da relatividade [13]. Os campos de tetradas mapeiam o espaço curvo em um espaço plano de modo a possibilitar a definição dos spinores no primeiro espaço, esses campos satisfazem as relações:

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad (6.4)$$

e

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \quad (6.5)$$

onde  $e_a^\mu$  transforma as bases coordenadas  $dx^\mu$  para um espaço ortogonal ao espaço anterior por:

$$\theta^a = e_\mu^a dx^\mu. \quad (6.6)$$

De forma análoga  $e_\mu^a$  transforma uma base  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  em outra base ortogonal conforme:

$$\theta_a = e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = e_a^\mu \partial_\mu. \quad (6.7)$$

Assim o tensor métrico pode ser obtido por:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (6.8)$$

com  $\eta_{ab}$  a métrica do espaço plano de Minkowski.

A torção 2-forma <sup>1</sup> é dada por:

$$T^a = d\theta^a + \omega_b^a \wedge \theta^b = \frac{1}{2} T_{bc}^a \theta_b \wedge \theta_c \quad (6.9)$$

com  $\omega_b^a$  as chamadas conexões de spin, as conexões de spin têm esse nome pois são usadas na derivada covariante de spin. A curvatura de uma conexão é então definida:

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \theta^c \wedge \theta^d. \quad (6.10)$$

As equações de torção e de curvatura são chamadas de equações de estrutura de Maurer-Cartan e são o cerne do formalismo de primeira ordem, esse formalismo é totalmente equivalente ao formalismo métrico e vamos usá-lo para descrever o defeito. O leitor interessado pode consultar Carvalho (2003) [13] que faz um apanhado mais detalhado sobre transformações de holonomia existente em estruturas curvas de grafite e traz mas informações sobre a teoria aqui mostrada.

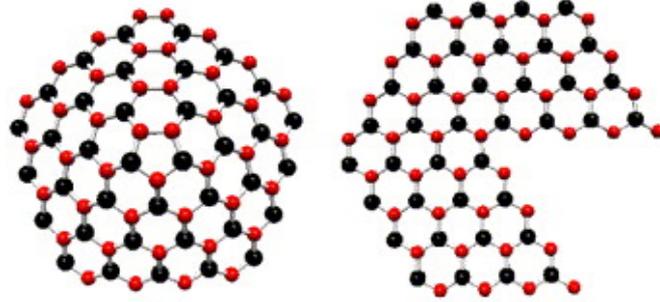
É possível estudar os efeitos de defeitos em sólidos através do formalismo inerente a gravitação, pois alguns defeitos podem ser produzidos em uma rede cristalina de forma semelhante ao procedimento enunciado anteriormente: Considere que o plano da fig. (6.1)

---

<sup>1</sup>Consulte o Apêndice B

é um *monolayer*<sup>2</sup> com uma rede de átomos, conforme a fig. (6.2), retirar parte dos átomos equivale a retirar o setor de ângulo no espaço, para que a rede continue fechada junta-se os átomos restantes de forma que o *monolayer* constitui uma estrutura cônica e portanto os átomos irão se comportar como se estivessem no espaço curvo da corda cósmica.

Figura 6.2: Produção de defeito topológico em um *monolayer*



Fonte: Souza, Ribeiro e Furtado

## 6.2 Quantização de Mágns na Presença de Defeito Topológico

O estudo das propriedades de sistemas bidimensionais devido a presença de fases geométricas está bem estabelecido devido o estudo das fases Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher para diferentes sistemas. Com a intenção de expandir esse estudo Bakke, Ribeiro, Furtado e Nascimento (2009) [25] buscaram os níveis de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo magnético não nulo sob a influência de um campo elétrico externo e no espaço curvo da corda cósmica.

Primeiramente observe que o elemento de linha que define o espaço em questão é [12]:

$$ds^2 = d\rho^2 + (\eta\rho)^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (6.11)$$

com  $\eta$  o déficit de ângulo definido por [25]  $\eta = 1 - \frac{4\bar{\omega}G}{c^2}$  e  $\bar{\omega}$  é a densidade de massa da corda cósmica, o déficit de angulo pode assumir qualquer valor  $\eta < 1$  para uma curvatura

<sup>2</sup>*monolayer* pode ser entendido como uma folha simples de átomos

positiva no qual chamamos de curvatura canônica. Se  $\eta > 1$  a curvatura do espaço-tempo é negativa e chamamos de curvatura anti-canônica. Observe que para  $\eta = 1$  o espaço é plano.

No caso da curvatura cônica o tensor de curvatura é dado por [6]:

$$R_{\rho,\phi}^{\rho,\phi} = \frac{1-\eta}{4\eta} \delta_2(\mathbf{x}), \quad (6.12)$$

observe que o espaço é curvo localmente na posição da corda cósmica e plano nos demais locais, esse tipo de comportamento é chamado de singularidade cônica. Para construir um referencial no qual é possível definir os spinores no espaço curvo, usamos as bases não-coordenadas

$$\hat{\theta}^a = e_\mu^a dx^\mu \quad (6.13)$$

onde  $\mu$  representa as componentes do espaço-tempo curvo e  $a$  as componentes do espaço plano. As tetradas  $e_\mu^a$  formam um conjunto de modo a escrever a métrica conforme:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab} \quad (6.14)$$

com  $\eta_{ab}$  a métrica do espaço plano de Minkowski e  $g_{\mu\nu}$  a métrica da corda cósmica. Na notação matricial temos:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\eta\rho)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mathbf{ab}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A tetrada inversa é definida de forma que  $dx^\mu = e_a^\mu \hat{\theta}^a$  e devem seguir as relações:

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a$$

e

$$e_a^\mu e_\nu^\mu = \delta_\nu^a.$$

Existem várias tetradas que satisfazem a condição acima e a eq. (6.14), portanto devido essa liberdade é possível escolher a tetrada mais conveniente para o problema. Os autores em questão escolheram a seguinte:

$$\mathbf{e}_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cos(\phi) & -\eta\rho \text{sen}(\phi) & 0 \\ 0 \text{sen}(\phi) & \eta\rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

tendo como inversa:

$$\mathbf{e}_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ 0 -\frac{\text{sen}(\phi)}{\eta\rho} & \frac{\cos(\phi)}{\eta\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Usando a eq. (6.13) encontramos as componentes do espaço ortogonal:

$$\hat{\theta}^0 = dt,$$

$$\hat{\theta}^1 = \cos(\phi)d\rho - \eta\rho \text{sen}(\phi)d\phi,$$

$$\hat{\theta}^2 = \text{sen}(\phi)d\rho + \eta\rho \cos(\phi)d\phi,$$

e

$$\hat{\theta}^3 = dz.$$

Observe que  $ds^2 = -(\hat{\theta}^0)^2 + (\hat{\theta}^1)^2 + (\hat{\theta}^2)^2 + (\hat{\theta}^3)^2$  fornece a eq. (6.11). Observe ainda que tomando a derivada exterior temos:

$$d\theta^0 = 0 \tag{6.17}$$

$$d\theta^1 = \text{sen}(\phi)(1 - \eta)d\rho \wedge d\phi \tag{6.18}$$

$$d\theta^2 = -(1 - \eta)\text{cos}(\phi)d\rho \wedge d\phi \tag{6.19}$$

$$d\theta^3 = 0. \tag{6.20}$$

Levando em conta a primeira equação de estrutura de Cartan:

$$T^a = d\theta^a + \omega_b^a \wedge \theta^b, \tag{6.21}$$

onde o segundo termo é um produto exterior e  $\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a dx^\mu$  são as chamadas conexões de spin. Ainda considerando que a métrica é diagonal e conseqüentemente não há torção, ou seja  $T^a = 0$ , temos:

$$d\theta^a = -\omega_b^a \wedge \theta^b. \tag{6.22}$$

Portanto:

$$0 = -\omega_b^0 \wedge \theta^b, \tag{6.23}$$

$$\text{sen}(\phi)(1 - \eta)d\rho \wedge d\phi = -\omega_0^1 \wedge \theta^0 - \omega_1^1 \wedge \theta^1 - \omega_2^1 \wedge \theta^2 - \omega_3^1 \wedge \theta^3, \tag{6.24}$$

$$\text{cos}(\phi)(1 - \eta)d\rho \wedge d\phi = \omega_0^2 \wedge \theta^0 + \omega_1^2 \wedge \theta^1 + \omega_2^2 \wedge \theta^2 + \omega_3^2 \wedge \theta^3, \tag{6.25}$$

e

$$0 = -\omega_b^3 \wedge \theta^b. \tag{6.26}$$

Assim analisando a primeira a a ultima equação concluímos que

$$\omega_b^0 = \omega_b^3 = 0 \quad (6.27)$$

com  $b = 0, 1, 2, 3$ , e

$$\text{sen}(\phi)(1-\eta)d\rho \wedge d\phi = -(\text{cos}(\phi)\omega_1^1 + \text{sen}(\phi)\omega_2^1) \wedge d\rho + \eta\rho(\text{sen}(\phi)\omega_1^1 - \text{cos}(\phi)\omega_2^1) \wedge d\phi \quad (6.28)$$

$$\text{cos}(\phi)(1-\eta)d\rho \wedge d\phi = (\text{cos}(\phi)\omega_1^2 + \text{sen}(\phi)\omega_2^2) \wedge d\rho + (-\text{sen}(\phi)\omega_1^2 + \text{cos}(\phi)\omega_2^2) \wedge d\phi. \quad (6.29)$$

De imediato observamos também que

$$\omega_{t1}^1 = \omega_{t2}^1 = \omega_{z1}^1 = \omega_{z2}^1 = 0. \quad (6.30)$$

Como  $\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a dx^\mu$ , as equações não nulas ficam:

$$\text{sen}(\phi)(1-\eta)d\rho \wedge d\phi = \text{cos}(\phi)(\omega_{\phi 1}^1 - \eta\rho\omega_{\rho 2}^1)d\rho \wedge d\phi + \text{sen}(\phi)(-\omega_{\phi 2}^1 + \eta\rho\omega_{\rho 1}^1)d\rho \wedge d\phi$$

e

$$\text{cos}(\phi)(1-\eta)d\rho \wedge d\phi = -\text{cos}(\phi)(\omega_{\phi 1}^2 + \eta\rho\omega_{\rho 2}^2)d\rho \wedge d\phi - \text{sen}(\phi)(\omega_{\phi 1}^2 + \eta\rho\omega_{\rho 1}^2)d\rho \wedge d\phi.$$

Comparando as equações e sabendo que as funções seno e cosseno são linearmente independentes entre si:

$$\omega_{\phi 1}^1 - \eta\rho\omega_{\rho 2}^1 = 0,$$

$$\omega_{\phi 2}^1 + \eta\rho\omega_{\rho 1}^1 = 1 - \eta,$$

$$-(1 - \eta) = \omega_{\phi 1}^2 + \eta\rho\omega_{\rho 2}^2,$$

e

$$\omega_{\phi 2}^2 + \eta \rho \omega_{\rho 1}^2 = 0.$$

sabendo ainda que  $\omega_a^b = -\omega_b^a$  [13] chegamos em:

$$\omega_{\rho 1}^1 = \omega_{\rho 2}^2 = \omega_{\phi 1}^1 = \omega_{\phi 2}^2 = 0 \quad (6.31)$$

e finalmente as conexões de spin não nulas são:

$$\omega_{\phi 2}^1 = 1 - \eta = -\omega_{\phi 1}^2. \quad (6.32)$$

No limite não relativístico a dinâmica de uma partícula neutra, com momento de dipolo magnético, no espaço-tempo da corda Cós mica e sob um campo eletromagnético é obtida usando a aproximação de Foldy-Wouthuysen [22] na equação de Dirac, e é [5]:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = m \Psi + \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \boldsymbol{\Xi})^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2mc^4} + \frac{\mu \hbar \nabla \cdot \mathbf{E}}{2mc^2} + \mu \hat{n} \cdot \mathbf{B} \right] \Psi. \quad (6.33)$$

Com o potencial vetor efetivo do tipo Aharonov-Casher modificado devido a presença do defeito:

$$\Xi_j = \frac{\mu}{c^2} (\hat{n} \times \mathbf{E})_j + \frac{\hbar}{2} (1 - \eta) e_j^\phi, \quad (6.34)$$

onde  $\hat{n}$  é a direção do dipolo magnético,  $m \Psi$  é apenas um *shift* de energia e portanto pode ser desconsiderado pois não vai influir no comportamento das propriedades que desejamos calcular.

Considerando um campo  $\mathbf{B}$  uniforme perpendicular ao plano na direção (x-y), o momento de dipolo na direção  $\hat{e}_z$  e

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2} \rho \hat{\rho} \quad (6.35)$$

e pela eq. (6.34) encontramos o potencial vetor efetivo [25]:

$$\vec{\Xi} = \left( \frac{\mu\lambda\rho}{2c^2} - \frac{\hbar(1-\eta)}{2\eta\rho} \right) \hat{\phi}. \quad (6.36)$$

Assim o campo magnético associado ao potencial (6.34) é uniforme:

$$\mathbf{B}_{AC} = \frac{\mu\lambda}{c^2} \hat{z}. \quad (6.37)$$

Portanto todas as condições para a existência de níveis de Landau exigidas na ref. [18] são satisfeitas e garantimos a existência de níveis de Landau para o sistema.

Escrevemos então a solução na forma  $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\varepsilon t} \psi(\mathbf{x})$ , portanto pela eq. (6.33) temos [25]:

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi = & -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{(\eta\rho)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{\mu\lambda}{\eta c^2} + \frac{\hbar(1-\eta)}{(\eta\rho)^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{(\mu\lambda)^2}{8mc^4} \rho^2 \psi + \\ & + \frac{\hbar^2 (1-\eta)^2}{8m (\eta\rho)^2} \psi + \frac{\hbar\mu\lambda}{2mc^2} \psi + \frac{\hbar\mu\lambda (1-\eta)}{4mc^2 \eta} \psi. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Devido a simetria da equação a solução pode ser encontrada usando separação de variáveis:

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{il\phi} e^{ikz} R(\rho).$$

Assim substituindo na equação diferencial a solução a cima chegamos em:

$$\varepsilon R = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} R + \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m\eta^2 \rho^2} R + \frac{\hbar\gamma\omega}{2\eta} R + \frac{m\omega^2}{8} \rho^2 R + \frac{\hbar\omega}{2} R$$

com  $\gamma = l + \frac{1-\eta}{2}$  e  $\omega = \frac{\mu\lambda}{mc^2}$ .

Fazendo a mudança de variável [25]:

$$\xi = \frac{m\omega}{2\hbar} \rho^2,$$

temos

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} + \left( \beta - \frac{\gamma^2}{4\eta^2 \xi} - \frac{\xi}{4} \right) R = 0 \quad (6.39)$$

com

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega} - \frac{\hbar k^2}{2m\omega} - \frac{\gamma}{2\eta} - \frac{1}{2}. \quad (6.40)$$

Analisando os limites assintóticos da eq. (6.39) verificamos que a solução é do tipo:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|\gamma|/2\eta} F(\xi).$$

Portanto a eq. (6.39) é escrita na forma:

$$\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left( \frac{|\gamma|}{\eta} + 1 - \xi \right) \frac{dF}{d\xi} + \left( \beta - \frac{1}{2} - \frac{|\gamma|}{2\eta} \right) F = 0.$$

A solução desse tipo de equação diferencial é uma função hipergeométrica conforme:

$$F(\xi) = F \left[ - \left( \beta - \frac{1}{2} - \frac{|\gamma|}{2} \right), \frac{|\gamma|}{\eta} + 1, \xi \right].$$

Onde definimos o parâmetro  $\nu$ :

$$\nu = \beta - \frac{1}{2} - \frac{|\gamma|}{2}, \quad (6.41)$$

para a função hipergeométrica convergir para um polinômio de grau  $\nu$  e a solução ser normalizável é necessário que  $\nu$  seja um número inteiro. Assim obtemos os níveis de Landau para o dipolo magnético no espaço curvo da corda cósmica e sob a influência de um campo elétrico externo:

$$\varepsilon = \left( \nu + \frac{|l + \frac{1-\eta}{2}|}{2\eta} + \frac{l + \frac{1-\eta}{2}}{2\eta} + 1 \right) \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (6.42)$$

O  $k$  corresponde ao movimento na direção  $\hat{e}_z$ , para sistemas bidimensionais podemos fazer  $k = 0$ , o  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  é o momento angular do dipolo e  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . A

eq. (6.42) mostra que os níveis de Landau independem da direção de rotação clássica e do centro de órbita, e para  $\eta \neq 1$  a degenerescência infinita é quebrada [25], para  $\eta = 1$  recuperamos o caso do espaço plano encontrado por Ericsson e Sjöqvist [18].

Esse procedimento foi proposto pela referência [25] para uma partícula neutra com momento de dipolo não nulo, porém uma rede de mágons pode ser pensada como uma rede de spins. Considerando que o estudo de uma rede periódica se restringe a primeira Zona de Brillouin e considerando que a eq. (6.33) no limite termodinâmico descreve a rede de mágons podemos entender a eq. (6.42) como os níveis de Landau para essa rede no limite de baixas temperaturas. A hamiltoniana da rede seria, para uma rede com  $N$  mágons fracamente interagentes:

$$H = \sum_{i=1}^N H_i \quad (6.43)$$

com a hamiltoniana  $H_i$  de cada dipolo dado pela eq. (6.33):

$$H_i = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + \mathbf{\Xi})^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2mc^4} + \frac{\mu \nabla \cdot \mathbf{E}}{2mc} + \mu \hat{n} \cdot \mathbf{B}. \quad (6.44)$$

Para  $N \rightarrow \infty$  devemos tomar a função de partição e procurar a energia média da rede no limite termodinâmico, a função de partição é definida conforme:

$$Z = \sum \Omega(E) e^{-\beta H}$$

com  $\beta^{-1} = k_B T$  e  $\Omega$  a degenerescência dos estados. Como os spins são idênticos e fracamente interagentes a função de partição se reduz a:

$$Z = Z_0^N$$

com:

$$Z_0 = \sum \Omega e^{-\beta H_i}.$$

Por outro lado o hamiltoniano médio é definido por:

$$\langle H \rangle = \frac{\sum \Omega H e^{-\beta H}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log(Z).$$

No limite termodinâmico temos então:

$$\frac{\langle H \rangle}{N} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log(Z_0)$$

como  $\log(Z_0) = -\beta H_i + \log(\Omega)$ . Observe que a degenerescência é constante para cada nível, uma vez que para baixas temperaturas somente o nível zero contribui, assim  $\log(\Omega)$  é um número e não influi na dinâmica do sistema, logo o hamiltoniano médio fica:

$$\frac{\langle H \rangle}{N} \rightarrow H_i. \quad (6.45)$$

Portanto a eq. (6.44) funciona como o hamiltoniano efetivo da rede de mágns no limite termodinâmico. Assim, pela eq. (6.42) e sabendo que a dinâmica dos mágns está restrita ao plano, os níveis de Landau para a rede de mágns na presença de defeito topológico do tipo corda cósmica são:

$$\varepsilon = \left( \nu + \frac{|l + \frac{1-\eta}{2}|}{2\eta} + \frac{l + \frac{1-\eta}{2}}{2\eta} + 1 \right) \hbar\omega \quad (6.46)$$

com  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  e  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  o momento angular das quase-partículas.

### 6.3 Condutância Hall de Mágns na Presença de Defeito Topológico

Inspirados no trabalho da referência [36] e considerando que a eq. (6.33) descreve a rede de mágns no espaço curvo da corda cósmica vamos, aqui, mostrar resultados

preliminares da condutância Hall Quântica e condutância Hall Térmica em função do parâmetro do defeito.

Tendo em vista que a condição de ocorrência do Efeito Hall Quântico é a invariância topológica do número de Chern [36] e que a condutância Hall Quântica é dada pela eq. (4.25), expandimos a função de distribuição de Bose-Einstein para o limite de baixas temperaturas (isto é  $\hbar\omega/k_B T \gg 1$ ) e levando em conta a eq. (6.42) chegamos na condutância Hall Quântica da rede de mágns com um defeito topológico do tipo corda cósmica:

$$G^{yx} \approx \frac{(g\mu_B)^2}{h} (e^{-\alpha x} + e^{-2\alpha x}) \nu_0 \quad (6.47)$$

com a variável  $x$  definida conforme:

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}.$$

Devido a dinâmica dos mágns ser restrita ao plano a constante  $\alpha$ , que carrega a contribuição do defeito topológico, pode ser escrita conforme:

$$\alpha = \frac{|l + \frac{1-\eta}{2}|}{2\eta} + \frac{l + \frac{1-\eta}{2}}{2\eta} + 1. \quad (6.48)$$

Por outro lado, pela eq. (5.30) a Condutância Hall Térmica é dada por:

$$K^{yx} T = \left( L_{22}^{yx} - \frac{L_{12}^{yx} L_{21}^{yx}}{L_{11}^{yx}} \right). \quad (6.49)$$

Pelos coeficientes de Onsager já definidos anteriormente podemos escrever:

$$K^{yx} T = \frac{(k_B T)^2 \nu_0}{h} \left( C_2(n_B(E_0^*)) - \frac{[C_1(n_B(E_0^*))]^2}{C_0(n_B(E_0^*))} \right)$$

ou

$$\frac{2\pi K^{yx}}{k_B \omega \nu_0} = \frac{1}{x} \left( C_2(n_B(E_0^*)) - \frac{[C_1(n_B(E_0^*))]^2}{C_0(n_B(E_0^*))} \right).$$

Como a função distribuição de Bose-Einstein é denotada por:

$$n_B(E_0^*) = (e^{-\alpha x} - 1)^{-1}$$

temos:

$$x = \frac{\log\left(\frac{1}{n_B(E_0^*)} + 1\right)}{\alpha}, \quad (6.50)$$

portanto substituímos na expressão da condutância Hall Térmica e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi K^{yx}}{k_B \omega \nu_0} &= \frac{\alpha}{\log\left(\frac{1}{n_B(E_0^*)} + 1\right)} \left[ (1 + n_B(E_0^*)) \log^2\left(\frac{1}{n_B(E_0^*)} + 1\right) - \log^2(n_B(E_0^*)) - \right. \\ &\left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n_B(E_0^*))^n}{n^2} - \frac{[(1 + n_B(E_0^*)) \log(1 + n_B(E_0^*)) - n_B(E_0^*) \log(n_B(E_0^*))]^2}{n_B(E_0^*)} \right]. \end{aligned}$$

Logo usando as propriedades da função logarítmica a equação fica:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi K^{yx}}{k_B \omega \nu_0} &= \frac{\alpha}{\log(1 + n_B(E_0^*)) - \log(n_B(E_0^*))} \left[ (n_B(E_0^*) - 1) \log^2(n_B(E_0^*)) - \right. \\ &\left. - 2(1 + n_B(E_0^*))(2 + n_B(E_0^*)) \log(1 + n_B(E_0^*)) \log(n_B(E_0^*)) + \left(3 - \frac{1}{n_B(E_0^*)}\right) \log^2(n_B(E_0^*)) \right]. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Não obstante no limite de baixas temperaturas ao invés de analisar a variável  $x$  podemos analisar o comportamento da função distribuição de Bose-Einstein: Nesse limite temos  $n_B(E_0^*) \ll 1$ . Assim no limite de baixas temperaturas a condutância Hall Térmica em termos da função distribuição fica:

$$\frac{2\pi K^{yx}}{k_B \omega \nu_0} = \frac{2\alpha n_B(E_0^*)(1 - 2 \log(n_B(E_0^*)))}{n_B(E_0^*) - \log(n_B(E_0^*))}. \quad (6.52)$$

Portanto, voltando para a variável  $x$  escrevemos uma expressão final para a condutância Hall Térmica de uma rede de mágns com um defeito topológico do tipo corda

cósmica:

$$\frac{2\pi K^{yx}}{k_B \omega \nu_0} = \frac{2\alpha(1 + 2\log(e^{\alpha x} - 1))}{1 + (e^{\alpha x} - 1)\log(e^{\alpha x} - 1)} \quad (6.53)$$

com  $\alpha$  dado por (6.48).

Salientamos que os resultados das eqs. (6.47) e (6.53) ainda são preliminares e ainda precisam ser verificados. Uma vez corroborados podemos fazer a análise gráfica das condutâncias Hall Quântica e Hall Térmica em função do parâmetro  $\eta$  que caracteriza o defeito para verificar a influência que o defeito topológico exerce sobre essas propriedades.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesse trabalho estudamos as fases quânticas do Efeito Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher, e de forma mais geral a fase de Berry com base no trabalho de Xiao, Chang e Niu (2010) [15]. Buscamos entender o processo de quantização de Landau para um dipolo magnético e elétrico e a ocorrência de efeito Hall Quântico. Por fim buscamos esse efeito em mágnons com base no trabalho de Nakata, Klinovaja e Loss (2017)[36] e conhecer a um pouco da dinâmica de magnons com defeito topológico do tipo corda cósmica com base no trabalho de Bakke, Ribeiro, Furtado e Nascimento (2009) [25].

O Efeito Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher deixa nítido que uma perturbação externa influencia na dinâmica de um sistema quântico e nas propriedades deste. No efeito Aharonov-Bohm uma partícula carregada sujeita a um potencial vetor externo, mas na ausência de campos, tem sua função de onda modificada por uma fase de caráter geométrico. No caso de um dipolo magnético sob efeito de um campo elétrico externo o efeito é similar e ocorre o que chamamos de efeito Aharonov-Casher, com isso os potenciais eletromagnéticos passam a ocupar um papel importante na mecânica quântica. Além disso, considerando a dualidade de Heaviside chegamos ao efeito He-McKellar-Wilkins onde a função de onda de um dipolo elétrico também adquire uma fase quântica.

Ainda a fase de Berry vem generalizar o que se conhecia para o efeito Aharonov-Bohm e Aharonov-Casher. A fase de Berry é uma fase topológica no contexto semiclássico

---

e representa a influência da perturbação sobre a dinâmica do sistema. Observamos que o potencial vetor de Berry descreve a influência no qual o sistema está sujeito e gera a curvatura de Berry. A aparição de um campo magnético externo gerado pela curvatura de Berry é prevista e isso afeta o fator de renormalização da condutividade transversal [7]. Tendo em vista isso a curvatura de Berry desempenha um importante papel na dinâmica eletrônica de cristais e nas propriedades dos mágnons, proporcionando efeitos como o efeito Hall Quântico, Efeito Hall Quântico Anômalo e o Platô Hall. Por outro lado, a curvatura de Berry não-nula garante a existência de um transporte adiabático no *monolayer* e associado a essa, uma condutância Hall transversal. O efeito Hall Quântico, caracterizado pela quantização da condutância Hall transversal, ocorre devido a invariância de *gauge* e a invariância topológicas de bandas bidimensionais não interagentes.

Verificamos a quantização de Landau para um dipolo magnético permanente e um dipolo elétrico induzido através do procedimento de Ribeiro, Furtado e Nascimento (2006) [40]. Os autores descobriram que os níveis de Landau são independentes do centro de orbita clássica mas dependentes da direção de rotação do movimento ciclotron. Verificou-se, ainda, que são infinitamente degenerados e que no caso do dipolo elétrico, devido as condições para a existência dos níveis de Landau análogos, é preciso que o campo magnético externo seja gerado por uma linha de cargas magnéticas, ou seja, monopolos magnéticos.

A descrição de mágnons através do hamiltoniano proposto por Meier e Loss (2003) [32] motivou Nakata, Klinovaja e Loss (2017) [36] a buscarem os níveis de Landau para mágnons sob a influência de um potencial eletromagnético do tipo dente de serra e observou-se que essa relação era linear e igualmente espaçada. Revisando esse trabalho e chegamos na condutância Hall da rede de mágnons para baixas temperaturas e verificamos a existência de efeito hall Quântico para bandas quase planas. Calculamos a condutância Hall térmica, devido um gradiente de temperatura, e a razão termomagnética e observamos que essa ultima é linear com a temperatura, evidenciando assim a validade

---

da lei de Wiedemann-Franz para esse sistema.

Com base na referência [25], estudamos os níveis de Landau para um dipolo magnético permanente na presença de um defeito topológico do tipo corda cósmica. Verificou-se que, no limite não relativístico, a presença do fator que caracteriza os espaço-tempo curvo quebra a degenerescência infinita e os níveis de Landau, os níveis são independentes do centro de orbitas clássico e no limite de  $\eta \rightarrow 1$  recuperamos o resultado já obtido no espaço plano.

Considerando ainda que o estudo de uma rede periódica se restringe a primeira Zona de Brillouin, uma vez que a dinâmica se repete na rede, e que o hamiltoniano para o dipolo magnético no limite termodinâmico é um hamiltoniano efetivo da rede, a eq. (6.44) descreve a os mágnons no espaço curvo da corda cósmica. Assim, no capítulo 6 chegamos aos níveis de Landau para os mágnons na presença de defeito topológico do tipo corda cósmica. Tais níveis são independente do centro de orbita clássico mas dependem do momento angular. Motivados pelos resultados de Nakata, Klinovaja e Loss (2017) [36] chegamos em resultado preliminares para a Condutância Hall Quântica e Hall Térmica de uma rede de mágnons no espaço-tempo curvo da corda cósmica no limite de baixas temperaturas. Salientamos que tais resultados ainda devem ser corroborados por outros métodos de cálculo analítico que não foram feitos aqui por questão de tempo, uma vez corroborados podemos fazer a análise gráfica dos resultados e entender a influência que o defeito exerce sobre essas propriedades.

Com isso fizemos uma revisão de alguns aspectos relevantes para o estudo das propriedades de mágnons com defeito topológico, salientamos que existem outras propriedades que não foram abordadas nesse trabalho mas podem ser relevantes sob outro ponto de vista. Portanto futuramente pretendemos buscar entender de forma mais aprofundada tais propriedades e até buscar meios de otimizá-las.

O efeito Hall Quântico de mágnons já é bem estudado e hoje conhecemos as propriedades de interesse prático da rede, tais como corrente Hall transversal e condutância

Hall para o sistema no espaço plano. A quantização de Landau para uma partícula neutra com dipolo magnético e com defeito topológico também já é conhecida para vários defeitos, tais como a corda cósmica. Assim motivados pelos resultados das referências [25] e [36], futuramente, pode-se buscar melhorar o entendimento e corroborar através de outros métodos o comportamento da condutância Hall Quântica e Hall Térmica de uma rede de mágnons sob a influência de diversos defeitos topológicos de para inferir o grau de influência que o defeito tem sobre tais propriedades. Com isso podemos procurar meios de otimizar a condutância hall e assim contribuir para o desenvolvimento da spintrônica.

## REFERÊNCIAS

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485, 1959.
- [2] Y. Aharonov and A. Casher. Topological quantum effects for neutral particles. *Physical Review Letters*, 53(4):319, 1984.
- [3] T. Ando, Y. Matsumoto, and Y. Uemura. Theory of hall effect in a two-dimensional electron system. *Journal of the Physical Society of Japan*, 39(2):279–288, 1975.
- [4] A. Aronov and Y. B. Lyanda-Geller. Spin-orbit berry phase in conducting rings. *Physical review letters*, 70(3):343, 1993.
- [5] K. Bakke, C. Furtado, and J. Nascimento. Gravitational geometric phase in the presence of torsion. *The European Physical Journal C*, 60(3):501, 2009.
- [6] K. Bakke, J. Nascimento, and C. Furtado. Geometric phase for a neutral particle in the presence of a topological defect. *Physical Review D*, 78(6):064012, 2008.
- [7] D. L. Bergman, R. Shindou, G. A. Fiete, and L. Balents. Quantum effects in a half-polarized pyrochlore antiferromagnet. *Physical review letters*, 96(9):097207, 2006.
- [8] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 392(1802):45–57, 1984.
- [9] M. J. Bueno. *Propriedades Eletrônicas de Grafeno com Defeitos*. PhD thesis, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.

- [10] P. Carmier and D. Ullmo. Berry phase in graphene: Semiclassical perspective. *Physical Review B*, 77(24):245413, 2008.
- [11] A. M. C. Cunha. *Ondas de Spin em Sistemas magnéticos Bidimensionais com Interação de Troca Aleatória*. PhD thesis, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.
- [12] G. de A Marques, C. Furtado, V. Bezerra, and F. Moraes. Landau levels in the presence of topological defects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(30):5945, 2001.
- [13] A. M. de Moraes Carvalho. *Transformações de Holonomia em Cordas Negras e Espaços Cônicos*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.
- [14] E. C. de Oliveira. *Funções especiais com aplicações*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [15] M.-C. C. Di Xiao and Q. Niu. Berry phase effects on electronic properties. *Phys. Rev. D*, 78, 2010.
- [16] V. Dugaev, P. Bruno, B. Canals, and C. Lacroix. Berry phase of magnons in textured ferromagnets. *Physical Review B*, 72(2):024456, 2005.
- [17] K. Elder, N. Provatas, J. Berry, P. Stefanovic, and M. Grant. Phase-field crystal modeling and classical density functional theory of freezing. *Physical Review B*, 75(6):064107, 2007.
- [18] M. Ericsson and E. Sjöqvist. Towards a quantum hall effect for atoms using electric fields. *Physical Review A*, 65(1):013607, 2001.
- [19] Z. F. Ezawa. *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics*. 2008.

- [20] L. R. R. Filho. *Dinâmica de uma partícula neutra em mecânica quântica não-comutativa e em regime de quebra de simetria de Lorentz*. PhD thesis, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.
- [21] V. Fock. Über die beziehung zwischen den integralen der quantenmechanischen bewegungsgleichungen und der schrödingerschen wellengleichung. *Zeitschrift für Physik*, 49(5-6):323–338, 1928.
- [22] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen. On the dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Physical Review*, 78(1):29, 1950.
- [23] J. Frenkel. *Princípios de eletrodinâmica clássica*. Edusp, 1996.
- [24] X.-G. He and B. H. McKellar. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Physical Review A*, 47(4):3424, 1993.
- [25] C. F. K. Bakke, L.R. Ribeiro and J. Nascimento. Landau quantization for a neutral particle in the presence of topological defects. *Phys. Rev. D*, 79(024008), 2009.
- [26] C. L. Kane and E. J. Mele. Quantum spin hall effect in graphene. *Physical review letters*, 95(22):226801, 2005.
- [27] M. Katanaev and I. Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, 216(1):1–28, 1992.
- [28] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical Review Letters*, 45(6):494, 1980.
- [29] H. Kuratsuji and S. Iida. Effective action for adiabatic process: Dynamical meaning of berry and simon’s phase. *Progress of theoretical physics*, 74(3):439–445, 1985.
- [30] R. Matsumoto and S. Murakami. Rotational motion of magnons and the thermal hall effect. *Physical Review B*, 84(18):184406, 2011.

- [31] R. Matsumoto and S. Murakami. Theoretical prediction of a rotating magnon wave packet in ferromagnets. *Physical review letters*, 106(19):197202, 2011.
- [32] F. Meier and D. Loss. Magnetization transport and quantized spin conductance. *Physical review letters*, 90(16):167204, 2003.
- [33] G. Mikitik and Y. V. Sharlai. The phase of the de haas–van alphen oscillations, the berry phase, and band-contact lines in metals. *Low Temperature Physics*, 33(5):439–442, 2007.
- [34] J. E. Moore and L. Balents. Topological invariants of time-reversal-invariant band structures. *Physical Review B*, 75(12):121306, 2007.
- [35] N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. MacDonald, and N. Ong. Anomalous hall effect. *Reviews of modern physics*, 82(2):1539, 2010.
- [36] K. Nakata, J. Klinovaja, and D. Loss. Magnonic quantum hall effect and wiedemann-franz law. *Physical Review B*, 95(12):125429, 2017.
- [37] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y.-S. Wu. Quantized hall conductance as a topological invariant. *Physical Review B*, 31(6):3372, 1985.
- [38] K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. Maan, G. Boebinger, P. Kim, and A. K. Geim. Room-temperature quantum hall effect in graphene. *Science*, 315(5817):1379, 2007.
- [39] R. R. Oliveira. *Modelo de Heisenberg para cadeias de spins*. PhD thesis, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- [40] L. Ribeiro, C. Furtado, and J. Nascimento. Landau levels analog to electric dipole. *Physics Letters A*, 348(3-6):135–140, 2006.

- [41] L. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, and S. Sergeenkov. Analogue of the quantum hall effect for neutral particles with magnetic dipole moment. *Physics Letters A*, 381(9): 849–851, 2017.
- [42] R. G. Romano et al. Efeito aharonov-bohm sem interação com a fronteira do solenoide. 2013.
- [43] G. Sundaram and Q. Niu. Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and berry-phase effects. *Physical Review B*, 59(23):14915, 1999.
- [44] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, 49(6): 405, 1982.
- [45] X. Wang, L. Zhi, and K. Müllen. Transparent, conductive graphene electrodes for dye-sensitized solar cells. *Nano letters*, 8(1):323–327, 2008.
- [46] M. Wilkens. Quantum phase of a moving dipole. *Physical review letters*, 72(1):5, 1994.
- [47] X. Zhang, T. Liu, M. E. Flatté, and H. X. Tang. Electric-field coupling to spin waves in a centrosymmetric ferrite. *Physical review letters*, 113(3):037202, 2014.
- [48] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim. Experimental observation of the quantum hall effect and berry’s phase in graphene. *nature*, 438(7065):201, 2005.

# Apêndices

## APÊNDICE A

# Teorema Adiabático

Considere um hamiltoniano que depende do tempo, nesse caso a equação de autovalores é:

$$H(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t) \quad (\text{A.1})$$

com  $\Psi_n(t) = \psi_n(t)e^{-i \int_0^t E_n(t')dt'/\hbar}$ .

Por outro lado a equação de Schrödinger é:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H(t)\Psi(t). \quad (\text{A.2})$$

Podemos escrever a função de onda como uma combinação linear dos auto estados uma vez que são completos e ortogonais:

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{-i \int_0^t E_n(t')dt'/\hbar}. \quad (\text{A.3})$$

Assim, substituindo na eq. de Schrödinger:

$$i\hbar \sum_n \left( \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(t) + c_n(t) \frac{d\psi_n(t)}{dt} - i \frac{E_n(t)}{\hbar} c_n(t) \right) e^{-i \int_0^t E_n(t')dt'/\hbar} = \sum_n c_n(t) H(t) \psi_n(t) e^{-i \int_0^t E_n(t')dt'/\hbar}, \quad (\text{A.4})$$

pela eq. de autovalores:

$$\sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(t) e^{-i \int_0^t E_n(t') dt' / \hbar} = - \sum_n c_n(t) \frac{d\psi_n(t)}{dt} e^{-i \int_0^t E_n(t') dt' / \hbar}. \quad (\text{A.5})$$

Fazendo o produto interno com  $\psi_m(t)$ :

$$\sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} \delta_{nm} e^{-i \int_0^t E_n(t') dt' / \hbar} = - \sum_n c_n(t) \left\langle \psi_m(t) \left| \frac{d\psi_n(t)}{dt} \right. \right\rangle e^{-i \int_0^t E_n(t') dt' / \hbar} \quad (\text{A.6})$$

ou

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = - \sum_n c_n(t) \left\langle \psi_m(t) \left| \frac{d\psi_n(t)}{dt} \right. \right\rangle e^{-i \int_0^t (E_n(t') - E_m(t')) dt' / \hbar}. \quad (\text{A.7})$$

Derivando com relação ao tempo a equação de autovalores:

$$\frac{dH(t)}{dt} \psi_n(t) + H(t) \frac{d\psi_n(t)}{dt} = \frac{dE_n(t)}{dt} \psi_n(t) + E_n(t) \frac{d\psi_n(t)}{dt},$$

tomando o produto interno com  $\psi_m(t)$ :

$$\left\langle \psi_m(t) \left| \frac{dH(t)}{dt} \right. \right| \psi_n(t) \right\rangle + \left\langle \psi_m(t) \left| H(t) \right. \right| \frac{d\psi_n(t)}{dt} \right\rangle = \frac{dE_n(t)}{dt} \delta_{nm} + E_n(t) \left\langle \psi_m(t) \left| \frac{d\psi_n(t)}{dt} \right. \right\rangle.$$

Como  $\langle \psi_m | H(t) = E_m(t) \langle \psi_m(t) |$ , temos para  $n \neq m$ :

$$\left\langle \psi_m(t) \left| \frac{dH(t)}{dt} \right. \right| \psi_n(t) \right\rangle = (E_n(t) - E_m(t)) \left\langle \psi_m(t) \left| \frac{d\psi_n(t)}{dt} \right. \right\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Podemos escrever a soma em  $n = m$  e  $n \neq m$ , assim:

$$\frac{dc_m(t)}{dt} = -c_m \left\langle \psi_m(t) \left| \frac{d\psi_m(t)}{dt} \right. \right\rangle - \sum_{n \neq m} \frac{\langle \psi_m(t) | H(t) | \psi_n(t) \rangle}{(E_n(t) - E_m(t))} e^{-i \int_0^t (E_n(t') - E_m(t')) dt' / \hbar}. \quad (\text{A.9})$$

Usando a aproximação adiabática: consideramos que o hamiltoniano é muito pequeno, de modo que o segundo termo pode ser negligenciado:

---

$$\frac{dc_m(t)}{dt} = -c_m \left\langle \psi_m(t) \left| \frac{d\psi_m(t)}{dt} \right. \right\rangle, \quad (\text{A.10})$$

assim:

$$c_n(t) = c_n(0) e^{i\lambda_n(t)} \quad (\text{A.11})$$

com:

$$\lambda_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_m(t') \left| \frac{d\psi_m(t')}{dt'} \right. \right\rangle dt'. \quad (\text{A.12})$$

Por conclusão a função de onda pode ser escrita conforme:

$$\Psi_n(t) = e^{i\lambda_n(t)} \psi_n(t) e^{-i \int_0^t E_n(t') dt' / \hbar}. \quad (\text{A.13})$$

## APÊNDICE B

# Formas Diferenciais

Uma forma diferencial é um objeto matemático pertencente a um espaço vetorial que aparece no cálculo multivariável ou cálculo tensorial. Podemos imaginar as formas diferenciais como generalizações do conceito de gradiente. O gradiente de uma função é uma derivada direcional, portanto, um campo vetorial. O gradiente fornece um mapa de intensidade da função. Se denotamos o gradiente como  $\nabla f$  podemos denotar uma forma diferencial como  $df$  e esperamos que essa quantidade tenha as mesmas propriedades do gradiente, porém a forma como definimos o produto interno de uma variedade depende da métrica associada a essa variedade. Assim precisa-se definir as formas diferenciais de tal forma que o produto não seja dependente da métrica. Em um espaço ou variedade de dimensão  $n$ , podemos definir 0-formas, 1-formas, 2-forma, ... e  $n$ -formas.

De uma maneira informal, uma forma diferencial é uma soma de termos da forma  $f dx_i dx_j$ , ou  $g dx_i dx_j dx_k$ , onde o produto das diferenciais satisfaz a regra de alternância:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (1 \leq i, j \leq 3) \quad (\text{B.1})$$

$\wedge$  é chamado de produto exterior, portanto:

$$dx_i \wedge dx_i = 0. \quad (\text{B.2})$$

Podemos catalogar:

- 0-forma:  $f$  (função diferenciável)
- 1-forma:  $f dx + g dy + h dz$
- 2-forma:  $f dx \wedge dy + g dx \wedge dz + h dy \wedge dz$
- 3-forma:  $f dx \wedge dy \wedge dz$

No  $\mathbb{R}^3$  só existem essas formas diferenciais.

1-formas são somativas:

$$\sum_i f_i dx_i + \sum_i g_i dx_i = \sum_i (f_i + g_i) dx^i \quad (\text{B.3})$$

Dado  $\phi = \sum_i f_i dx^i$  uma 1-forma em  $\mathbb{R}^3$  a derivada dessa quantidade é:

$$d\phi = df_1 \wedge dx^1 + df_2 \wedge dx^2 + df_3 \wedge dx^3 \quad (\text{B.4})$$

com

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3} dx^3$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3} dx^3$$

$$df_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3} dx^3$$

assim:

$$d\phi = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^3$$

---

Assim usando a propriedade fundamental definimos a derivada exterior:

$$d\phi = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2} dx^2 \right) \wedge dx^3 \quad (\text{B.5})$$

assim a derivada exterior de um 1-forma é um 2-forma.

Algumas propriedades da derivada exterior: Seja  $f$  e  $g$  funções,  $\theta$  e  $\psi$  1-formas:

$$(1) d(fg) = (df)g + f(dg)$$

$$(2) d(f\phi) = df \wedge \phi + f d\phi$$

$$(3) d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$$