UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Sobre efeitos quânticos da interação de um dipolo elétrico induzido com campos externos

Abinael de Brito Oliveira

Tese de Doutorado

João Pessoa
Dezembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Sobre efeitos quânticos da interação de um dipolo elétrico induzido com campos externos

Abinael de Brito Oliveira

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal Paraíba como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Knut Bakke Filho

João Pessoa
Dezembro de 2017

O48s Oliveira, Abinael de Brito.

Sobre efeitos quânticos da interação de um dipolo elétrico induzido com campos externos / Abinael de Brito Oliveira. João Pessoa - 2019

80 f. : il.

Orientador: Knut Bakke Filho

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Momento de dipolo elétrico induzido. 2. Quantização de Landau.

I. Filho, Knut Bakke. II. Sobre efeitos quânticos da interação de um dipolo elétrico induzido com campos externos .

UFPB/CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Abinael de Brito Oliveira**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos quatorze dias do mês de dezembro do ano de dois mil e dezessete, às 14:00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física da Matéria Condensada, **Abinael de Brito Oliveira**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Knut Bakke Filho* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *João Antônio Plascak* (UFPB), *Inácio de Almeida Pedrosa* (UFPB), *Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos* (UFCG) e *João Rafael Lúcio dos Santos* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Sobre efeitos quânticos da interação de um dipolo elétrico induzido com campos externos*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, redigi esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **14 de dezembro de 2017.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Física
CCEN

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Orientador – PPGF/UFPB

Prof. Dr. João Antônio Plascak
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
UFCG

Dedicatória

Dedico a minha família, a minha esposa Priscila, ao meu filho Arthur e a minha filha Adriane.

Agradecimentos

- Ao meu orientador Knut Bakke por toda a paciência e a significante ajuda no meu trabalho;
- Ao Departamento de Físca da UFPB;
- Ao financiamento dado pela CAPES;
- Aos amigos do Grupo de Física da Matéria condesada: Ítallo, Ricardo, Érico, Priscila e Anderson;
- A minha família pois mesmo morando longe está sempre me apoiando, em especial, a minha mãe, meus irmãos por me proporcionar tantas alegrias;
- A minha esposa e companheira de todas as horas, Priscila, pelo carinho e paciência em horas de cansaço e estresse;
- Aos meus amigos da graduação que me acompanham até hoje: Ítallo, Antônio Carlos, Edinardo, João Carlos que me ajudaram bastante no meu trabalho, além do incentivo para que eu chegasse até aqui;
- Aos meus amigos da graduação: Priscila, João Carlos, Silvio, Ítallo, Edinardo, Antônio Carlos, Rodrigo;

Resumo

Analisamos o surgimento de estados ligados em um sistema análogo à quantização de Landau para uma partícula neutra (átomo/molécula) com momento de dipolo elétrico induzido, na presença de uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados e sob a influência de potenciais confinantes escalares: um proporcional à distância radial e o outro do tipo Coulomb. Em seguida, consideramos esse sistema sob efeitos de rotação e determinamos os níveis de energia permitidos. Na busca de soluções analíticas para a equação de Schrödinger, mostramos que os estados de energia de um sistema de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido e sujeito a potenciais confinantes, dependem dos parâmetros que caracterizam os campos elétrico e magnético, bem como dos potenciais e dos números quânticos associados com os modos radiais e momento angular $\{n, l\}$ do sistema. Além disso, averiguamos que os nveis aqui obtidos diferem dos níveis de Landau da referência: C. Furtado, J. R. Nascimento, e L. R. Ribeiro (2006) [1]. Para o caso em que tratamos o sistema em um referencial em rotação, constatamos a dependência do espectro de energia com os parâmetros caracetrizantes do campo eletromagnético, com os números quânticos $\{n, l\}$, e com a velocidade angular uniforme de rotação. Mais ainda, observamos que é possível retomar a quantização de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido sujeito à influência dos potenciais confinantes, quando tomamos o limite em que a velocidade angular desaparece.

Palavras-chave: Momento de dipolo elétrico induzido. Quantização de Landau. Efeitos de rotação.

Abstract

We analyze the appearance of bound states in a Landau-type system for a neutral particle (atom/molecule) with induced electric dipole momentum, in the presence of a configuration of crossed electric and magnetic fields of the following scalars potential: one which is proportional to the radial distance and the other which is a Coulomb-type. Next, we consider this system under rotational effects and we determined the allowed energy levels. In the search for analytical solutions for the Schrödinger equation we show that the energy states of a Landau system for an atom with an induced electric dipole moment subject to potential confiners depend on the parameters that characterize both electric and magnetic fields, besides they also depend on the potential and on the numbers quantum $\{n, l\}$ of the system. Moreover, the levels found in this investigation are different from the Landau levels presented in reference: C. Furtado, J. R. Nascimento, e L. R. Ribeiro (2006) [1]. And for the case where we treat the system in a rotating frame, we find the spectrum with the characterizing parameters for the electromagnetic field, with the quantum numbers $\{n, l\}$ besides its uniform angular speed of rotation. Furthermore, we observe that it is possible to recover the quantization of Landau subject to the potential confiners if we take the limit at when the angular velocity disappears.

Key-words: Induced eletric dipole momentum. Landau Quantization. Effects of rotation.

Lista de publicações

- Abinael B. Oliveira and Knut Bakke, *On the landau system for an atom with no permanent electric dipole moment subject to a linear confining potential*, International Journal of Modern Physics A, **31**, 1650019 (2016).

- Abinael B. Oliveira and Knut Bakke, *On the effects on a landau-type system for an atom with no permanent electric dipole moment due to a coulomb-type potential.* Annals of Physics, **365**, 66-72, (2015).

- Abinael B. Oliveira and Knut Bakke, *Quantum description of an atom with an induced electric dipole moment under the effects of rotation and a linear potential.* Eur. Phys. J. Plus **131**, 266, (2016).

- Abinael B. Oliveira and Knut Bakke, *Effects on a Landau-type system for a neutral particle with no permanent electric dipole moment subject to the Kratzer potential in a rotating frame.* Proc. R. Soc. A **472**, 20150858 (2016).

- Abinael B. Oliveira and Knut Bakke, *Some aspects of an induced electric dipole moment in rotating and non-rotating frames.* R. Soc. open sci. **4**, 170541 (2017).

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No contexto da mecânica clássica, a segunda lei de Newton é considerada a equação de movimento utilizada para prever os estados dos corpos em escalas celeste ou terrestre em referenciais inerciais. Por outro lado, na mecânica quântica, quem desempenha um papel semelhante é a equação de Schrödinger. Normalmente essa equação é utilizada para determinar o espectro de energia de sistemas quânticos, geralmente constituídos de átomos, moléculas e partículas subatômicas. Em suma, a equação de Schrödinger descreve como um estado quântico de um sistema físico evolui temporalmente.

Este trabalho tem o objetivo de investigar um sistema análogo à quantização de Landau para uma partícula neutra (átomo ou molécula), com um momento de dipolo elétrico induzido sujeito a potenciais confinantes, tais como potenciais escalares proporcionais à distância radial e do tipo-Coulomb, além disso, consideramos esse sistema sem e com efeitos de rotação. Com isso, determinamos os níveis de energia bem como a função de onda do sistema. Para essa finalidade, tomamos como base a ideia de Wei ***et al***. [2] que descreve uma partícula neutra a qual adquire um momento de dipolo elétrico induzido por uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados [1]. Vale ressaltar que o campo elétrico é responsável pela indução do momento de dipolo elétrico que se forma no átomo ou molécula.

Esses tipos de arranjos interessam ao estudo de sistemas constituídos de átomos frios na presença de campos eletromagnéticos externos. Novas possibilidades para o estudo de propriedades quânticas de sistemas formados por muitos corpos podem surgir através de uma investigação sobre a dinâmica quântica de átomos frios na presença de um campo eletromagnético. O controle e a manipulação desses sitemas ocorrem facilmente através dos parâmetros que caracterizam os campos eletromagnéticos. O estudo de fenômenos estritamente quânticos tem os átomos frios como sendo objeto principal de análise. Os avanços na tecnologia de átomos frios nos últimos anos possibilitaram a simulação de vários efeitos de estado sólido usando átomos neutros e técnicas de ótica quântica [3, 4, 5].

Técnicas para simular o comportamento de partículas carregadas em átomos neutros foram recentemente desenvolvidas [5, 6, 7, 8]. Em anos recentes, o estudo de arranjos que descrevem sistemas fortemente interagentes para átomos frios tem chamado muita atenção [9, 10]. A utilização de sistemas de átomos com momento de dipolo elétrico na presença de campos eletromagnéticos configurados de maneira apropriada vem sendo usada em diversas investigações [11, 12, 13, 14]. Além disso, o efeito Aharonov-Casher [15] para dipolos magnéticos na presença de um campo elétrico externo deu origem ao estudo de fases quânticas na dinâmica de dipolos. Nesse sentido, He e McKellar [16] e Wilkens [17] estudaram de forma independente um dual eletromagnético do efeito Aharonov-Casher o qual investigaram a dinâmica quântica de um dipolo elétrico na presença de um campo magnético gerado por uma densidade de monopolos magnéticos.

Realmente, através do estudo da dinâmica de dipolos elétricos, uma variedade de fenômenos que geram fases geométricas [16, 17, 2, 14, 18, 19] podem surgir para diferentes configurações da interação dipolo-campos. Uma configuração de campos mais realista foi proposta por Wei, Han e Wei [2] a qual apresenta um análogo ao efeito He-McKellar-Wilkens. De fato, na dinâmica do dipolo, todos os efeitos quânticos ocorrem devido ao acoplamento de dipolos elétrico ou magnético com os campos elétrico ou magnético externos, produzindo um tipo de acoplamento mínimo de uma partícula carregada interagindo com um campo magnético externo. Vamos utilizar, neste trabalho, essa configuração a fim de estudar uma possível quantização análoga a de Landau relacionada a dipolos elétricos induzidos em sistemas de átomos neutros.

Outros estudos, por exemplo, na geração de fenômenos coletivos, tais como, estatística fracionárias [20] e o efeito Hall quântico, quem desempenha um papel importante é a interação do campo eletromagnético com uma partícula carregada. No contexto da mecânica quântica, sabe-se que a teoria de Landau descreve o movimento de uma partícula carregada na presença de um campo magnético constante [21]. A quantização de Landau em duas dimensões produz os níveis de energia aglutinados em um espectro discreto. Entre as várias áreas da física, o efeito Hall quântico [20] tem um notável interesse nos níveis de Landau. Por outro lado, a quantização de Landau foi estudada para diferentes superfícies curvas ([22], [23], [24]) com interesse em várias áreas da física. Inspirados no trabalho de Paredes ***et al.*** [9] a qual estudou a possibilidade de um análogo ao efeito Hall em condensados de Bose-einstein, Ericsson e Sjöqvist [25] propuseram, inicialmente, a ideia de análogos à quantização de Landau. Essa ideia de Ericsson e Sjöqvist [25] consistia em utilizar a interação Aharonov-Casher para poder gerar um análogo dos níveis de Landau em sistemas de átomos neutros. De acordo com a referência [26], essa ideia foi estendida em um trabalho recente para sistemas de dipolos elétricos na presença de um campo magnético e demonstrou-se também um efeito similar da quantização de Landau para dipolos elétricos. Desta forma, analisamos essa possibilidade em um sistema de dipolos induzidos na presença de campos elétricos e magnéticos.

Atualmente, podemos encontrar na literatura vários efeitos físicos associados a dipolos elétricos na presença de campos elétrico e magnéticos [11, 12, 13, 14]. A dinâmica quântica de um átomo que se move em uma região com a presença de campos elétrico e magnético cruzados, em partícular, tem atraído discussões sobre o surgimento de fases quânticas geométricas, isso tem demonstrado que a fase quântica geométrica é um resultado da interação entre o momento de dipolo elétrico do átomo e a configuração de campos elétricos e magnéticos cruzados [2, 27, 28]. Esse tipo de configuração pode ser visto em sistemas de átomos frios na presença de um campo eletromagnético externo, portanto, novos estudos das propriedades quânticas de sistemas de muitos corpos controlados ou manipulados por campos eletromagnéticos podem ser desenvolvidos.

Vale salientar que as melhorias na tecnologia de átomos frios permitiram a simulação de vários efeitos de estado sólido usando átomos e técnicas de ótica quântica [3, 4, 5, 6, 7, 8, 29, 30]. Outras discussões sobre fases quânticas geométricas em sistemas de átomos com momento de dipolo elétrico podem ser encontradas nas referências [16, 17, 19, 31, 32, 33]. Outro efeito topológico associado com a interação entre momento de dipolo elétrico induzido de um átomo e uma configuração de campos elétrico e magnético cruzados tem sido pontuado na referência [34], onde é mostrado que um análogo de efeito Aharanov-Bohm para estados ligados [35], e correntes persistentes [36] pode ser obtido em anéis quânticos e em um ponto quântico.

De acordo com a interação descrita por Wei ***et al.*** [2], uma partícula neutra com momento de dipolo induzido por campos elétrico e magnético configurados de forma cruzada apresenta um efeito de fase topológica similar ao efeito Aharonov-Bohm [37]. Comparado ao efeito de He-Mckellar-Wilkens, a vantagem dessa configuração de campos é a sua possível realização experimental. Nesta tese temos como objetivo produzir um análogo da quantização de Landau para dipolos elétricos, levando em conta a descrição de Wei ***et al.***, onde o inconveniente de um campo gerado por uma distribuição de cargas magnéticas é eliminado [1].

Resumidamente, no capítulo 2 realizaremos uma revisão sobre a quantização de Landau padrão para uma partícula carregada, a fim de quantizarmos, por analogia, um sistema de Landau associado a uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico em um campo magnético uniforme efetivo, onde essa partícula movimenta-se em um plano perpendicular ao campo magnético efetivo. Já, nos capítulos seguintes, confinaremos esse sistema análogo à quantização de Landau tanto do ponto de vista de um referencial inercial como também não inercial.

No capítulo 3, analisaremos os efeitos de um potencial linear em um sistema de Landau [38] para uma partícula neutra (átomo ou molécula) com momento de dipolo elétrico induzido, encontrando soluções de estados ligados, ou seja, resolvendo a equação de Schrödinger. Nesse sentido, podemos destacar estudos relacionados ao potencial linear tem sido realizados em física atômica e molecular [39, 40, 41, 42, 43, 44], salto quântico [45, 46], movimento de uma partícula quântica em campos de força uniforme [38, 47] e em mecânica quântica relativística [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59].

No capítulo 4, investigaremos a influência de um potencial tipo-Coulomb sobre o sistema associado à quantização de Landau para uma partícula neutra. Tal estudo baseia-se em determinar os níveis de energia e as funções de onda do sistema. A motivação em utilizar o potencial do tipo-Coulomb nesta análise surge de estudos em diversas áreas da física [60, 61, 62]. Em estudos de física da matéria condensada em sistemas unidimensionais [63, 64, 65, 66, 67], moléculas [68, 69, 70] e potencial de Kratzer [71].

No capítulo seguinte, analisaremos os efeitos de rotação e potencial linear confinante no sistema análogo à quantização de Landau para uma partícula neutra. Para isso, consideraremos que o sistema rotaciona com uma velocidade angular uniforme [72, 73, 74, 75, 76]. Dessa forma, determinamos os estados de energia do sistema confinado em um referencial não inercial. Ao longo do capítulo 6, realizaremos um estudo da influência de um potencial de Kratzer e rotação em um átomo com momento de dipolo elétrico induzido [77, 78, 79], onde calculamos o espectro de energia bem como as funções de onda do sitema.

Finalmente, o sétimo capítulo foi dividido em duas partes: sem efeitos de rotação e com rotação no referencial [72, 80]. Consideramos o átomo com momento de dipolo elétrico sob influência dos potenciais de Kratzer e um potencial escalar proporcional à distância radial [80, 81], onde obtemos uma expressão geral para os níveis de energia do sistema. Neste capítulo, nossa espectativa foi preencher a ausência de estudos sobre partículas neutras com momento de dipolo elétrico induzido na presença de campos externos. Vale ressaltar que, ao longo deste trabalho, consideramos o sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$).

Capítulo 2

Análogo à quantização de Landau

2.1 Quantização de Landau para um momento de dipolo elétrico induzido

Mostraremos neste capítulo que é possível obter um análogo à quantização de Landau para partículas neutras, através de uma adequada configuração de campos que permite calcularmos os níveis de energia e as funções de onda desse sistema, resolvendo a equação de Schrödinger. Inicialmente realizamos uma revisão sobre a quantização de Landau para uma partícula carregada, em seguida apresentamos a quantização de Landau para uma partícula neutra (átomo/molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido na presença de campos externos. Para isso, vamos seguir a ideia de Wei ***et al***. [2] onde o autor analisa uma partícula neutra a qual adquire um momento de dipolo elétrico induzido devido a campos externos [1].

2.1.1 Quantização de Landau

Introduzimos nesta seção uma análise sobre a quantização de Landau para uma partícula eletricamente carregada na presença de campo magnético uniforme [82]. Do ponto de vista da física clássica, quando uma partícula carregada entra em uma região onde existe um campo magnético uniforme ela move-se em órbita circular. De acordo com mecânica quântica, a partícula adquire órbitas discretas e com níveis de energia quantizados, chamados de níveis de Landau [82]. Os níveis de Landau apresentam uma quantização de energia similar a do oscilador harmônico, porém cada nível de Landau é infinitamente degenerado.

A importância do estudo dos níveis de Landau faz-se necessário, porque é a base para estudar o efeito Hall quântico [83] e também é importante para explicar a dependência das propriedades eletrônicas de alguns tipos de materiais na presença de campo magnético [84].

Vamos considerar uma partícula carregada com carga q e de massa m que se move no plano $x - y$ na presença de um campo magnético uniforme e constante perpendicular a esse plano. De acordo com a referência [82], o operador Hamiltoniano (com unidades naturais $c = \hbar = 1$) que descreve a dinâmica de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético é dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - e\vec{A})^2 + e\phi, \tag{2.1}$$

onde $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ é o operador momento, $\vec{A}$ é o potencial vetor e ϕ é o potencial escalar. Nessa equação, desprezamos o termo associado com o spin da partícula. Para que tenhamos um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$, vamos tomar o potencial da seguinte forma:

$$\vec{A} = -By\hat{x}, \tag{2.2}$$

onde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Dessa forma, podemos escrever a equação de Schrödinger da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2m}[(\hat{p}_x + eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2]\psi = \varepsilon\psi, \tag{2.3}$$

Como a equação (2.3) não depende explicitamente de x, o operador p_x comuta com o Hamiltoniano. Esse fato nos leva a escrever a solução para equação anterior na forma:

$$\psi = e^{i(xp_x + zp_z)}\chi(y). \tag{2.4}$$

Substituindo a equação (2.4) na equação (2.3), obtemos a seguinte equação para $\chi(y)$:

$$\chi'' + 2m\left[\left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m}\right) - \frac{1}{2}m\omega_B^2(y-y_0)^2\right]\chi = 0, \tag{2.5}$$

onde $y_0 = -\frac{p_x}{eB}$ e $\omega_B = \frac{|e|B}{m}$.

Realizando a seguinte mudança de variáveis $\xi = \sqrt{m\omega_B}(y - y_0)$, a equação (2.5) torna-se

$$\chi'' + \left[\left(\frac{2\varepsilon}{\omega_B} - \frac{p_z^2}{\omega_B m}\right) - \xi^2\right]\chi = 0. \tag{2.6}$$

Analisando os limites assintóticos da equação (2.6), vemos que quando $\xi \longrightarrow \infty$, os termos dominantes são: $\chi'' \approx \xi^2\chi$ que tem como solução $\chi = e^{\frac{-\xi^2}{2}}$, pois a solução tem que ser finita no limite $\xi \longrightarrow \pm\infty$. Dessa forma, uma possível solução para a equação anterior é:

$$\chi = e^{-\xi^2/2}\phi(\xi). \tag{2.7}$$

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.6), obtemos a seguinte equação para $\phi(\xi)$:

$$\phi'' - 2\xi\phi' + 2n\phi = 0, \tag{2.8}$$

onde

$$2n = \frac{2\varepsilon}{\omega_B} - \frac{p_z^2}{\omega_B m} - 1. \tag{2.9}$$

A equação (2.6) tem como solução os polinômios de Hermite $H_n(\xi)$. Assim, a equação (2.7) torna-se

$$\chi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi). \tag{2.10}$$

Por fim, usando as equações (2.4) e (2.10), temos que as funções de onda normalizadas da partícula carregada são:

$$\psi_{n,p_x}(x,y) = \frac{1}{\pi^{1/4}\lambda_B^{1/2}(2^n n!)^{1/2}} e^{ixp_x} e^{-(y-y_0)^2/2\lambda_B^2} H_n(\frac{y-y_o}{\lambda_B}), \tag{2.11}$$

onde

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{1}{m\omega_B}}, \tag{2.12}$$

é o comprimento magnético, que dá as dimensões típicas do sistema.

A quantização da energia vem da condição de que a equação (2.8) possui soluções para inteiros positivos n. Portanto, solucionando a equação (2.9) para ε temos [82]

$$\varepsilon_n = \omega_B \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{2.13}$$

Podemos observar que o espectro de energia da partícula é análogo ao do oscilador harmônico, com a frequência de oscilação igual a frequência do ciclotron ω_B correspondente ao caso clássico. Esse espectro de energia, porém, é diferente do espectro do oscilador harmônico, pois é infinitamente degenerado. Observe que na equação (2.13) os auto-estados são rotulados por n. Além disso, note que a equação (2.13) não depende de p_x. Sendo assim, o movimento da partícula não é quantizada na direção x e, desta forma, p_x pode variar continuamente de $-\infty$ a $+\infty$. Temos infinitas possibilidades de p_x para um determinado valor de n, isto é, em cada nível de Landau existe infinita degenerecência.

Se restrigirmos o movimento da partícula a uma área finita $S = L_x L_y$, os níveis de Landau deixam de ser infinitamente degenerados e passam a ter uma degenerecência finita. O número de elétrons em cada nível de Landau depende diretamente do campo magnético aplicado e é dado por

$$N = \frac{eBS}{2\pi}. \tag{2.14}$$

Logo, se tivermos um aumento do campo magnético, o número de elétrons agrupados em um determinado nível de Landau aumenta proporcionalmente.

2.1.2 Equação de Schrödinger para um dipolo elétrico induzido em movimento

Podemos introduzir os formalismos lagrangeano e hamiltoniano para descrever a interação de um átomo em movimento com o campo eletromagnético. A questão central do formalismo lagrangeano é escrever uma função lagrangeana para o sistema dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_j, v_j, t) = K - U, \tag{2.15}$$

onde K indica as diversas formas de energia cinética presentes no sistema e U corresponde as energias potenciais, que podem ser funções das coordenadas generalizadas x_j, das velocidades generalizadas v_j e do tempo t.

A presença do campo elétrico induz um dipolo elétrico no átomo proporcional a esse campo elétrico $\vec{d} = \alpha\vec{E}$, uma vez que, o átomo move-se com uma velocidade $v << c$, o campo elétrico $\vec{E}$ deve ser substituído por um campo elétrico dado pela transformação de Lorentz para o campo eletromagnético até termos de ordem $\mathcal{O}(v^2/c^2)$: $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são os campos elétrico e magnético no referencial de repouso. Assim, a expressão para o dipolo elétrico fica

$$\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \tag{2.16}$$

onde α é a polarizabilidade dielétrica do átomo e v é a velocidade do átomo. Portanto, a lagrangeana que descreve o movimento do dipolo elétrico na presença de um campo eletromagnético pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\vec{d} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{2.17}$$

Considerando que o dipolo é induzido em átomos, a langrageana possui a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + \alpha B^2)v^2 + \frac{1}{2}\alpha E^2 + \alpha \vec{v} \cdot \vec{B} \times \vec{E}. \quad (2.18)$$

O último termo da eq. (2.18) é definido como a energia de Rötgen e é quem modifica o momento canônico do sistema. O estudo desse termo e sua similaridade com o termo de Chern-Simons tem sido largamente estudado [11]. Em um sistema similar, Zhang [12] analisou a possibilidade de se testar a não-comutatividade espacial. O estudo de propriedades de dualidade foi realizado recentemente por Noronha e Wotzasek [85]. A configuração de campo requer que o sistema permaneça confinado em um plano e esse fato é responsável por sua analogia com a teoria Chern-Simons.

No formalismo lagrangeano, o momento conjugado a uma coordenada generalizada x_j é dado por

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} = v_j(M + \alpha B^2) + \alpha(\vec{B} \times \vec{E})_j, \quad (2.19)$$

note que, na presença de um campo eletromagnético, o momento total da partícula é a soma do momento clássico e um fator associado ao campo eletromagnético.

A função hamiltoniana de um sistema pode ser derivada da lagrangeana, através de uma transformada de Legendre

$$\mathcal{H}(x_j, p_j, t) = v_j p_j - \mathcal{L}(x_j, v_j, t), \quad (2.20)$$

sendo que a hamiltoniana é função das coordenadas generalizadas x_j, dos momentos generalizados p_j e do tempo t. É preciso transformar a lagrangeana para variáveis apropriadas para obter a hamiltoniana. Essencialmente, as velocidades generalizadas da lagrangeana devem ser substituídas por funções das coordenadas e momentos generalizados. Lembrando que o momento generalizado para uma partícula neutra num campo eletromagnético é dado por equação (2.19), podemos escrever uma expressão para velocidade da seguinte forma

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} + \alpha(\vec{E} \times \vec{B})}{M + \alpha B^2}. \tag{2.21}$$

Retornando à Hamiltoniana equação (2.20) e utilizando a lagrangeana equação (2.18), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = v[v(M + \alpha B^2) + \alpha(\vec{B} \times \vec{E})] - \tfrac{1}{2}v^2(M + \alpha B^2) - \\ \alpha\vec{v} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \tfrac{\alpha E^2}{2} + V, \end{aligned} \tag{2.22}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = (M + \alpha B^2)v^2 + \alpha\vec{v} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \tfrac{1}{2}(M + \alpha B^2)v^2 - \\ \alpha\vec{v} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \tfrac{\alpha E^2}{2} + V, \end{aligned} \tag{2.23}$$

ou ainda,

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{v^2}{2}[(M + \alpha B^2)] - \frac{\alpha E^2}{2} + V. \tag{2.24}$$

Considerando a partícula sem spin, sabemos que nesse caso a transição para a mecânica quântica pode ser realizada quando o momento for promovido ao operador quântico $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, e então, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{r}, \hat{p}, t) = \frac{1}{2m}[\hat{p} + \alpha(\vec{E} \times \vec{B})]^2 - \frac{\alpha E^2}{2} + V, \tag{2.25}$$

onde definimos $m = M + \alpha B^2$ como sendo a massa efetiva do sistema.

2.1.3 Análogo à quantização de Landau

Vamos construir um análogo da quantização de Landau para um dipolo elétrico induzido com os campos elétrico e magnético configurados como descrito anteriormente. Considere uma partícula neutra que não possui momento de dipolo elétrico permanente movendo-se em um plano onde existe um campo elétrico radial e um campo magnético perpendicular a esse plano de movimento e que esses campos são, simultâneamente, aplicados. A dinâmica de um dipolo elétrico na presença de um campo eletromagnético é descrita pela lagrangeana dada na equação (2.17). Dessa forma, o hamiltoniano associado a essa lagrangeana é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{r},\hat{p},t) = \frac{1}{2m}[\hat{p} + \alpha(\vec{E}\times\vec{B})]^2 - \frac{1}{2}\alpha E^2, \tag{2.26}$$

onde $m = M + \alpha B^2$ é a massa efetiva e M é a massa da partícula neutra.

Pelo fato desse hamiltoniano ser análogo ao hamiltoniano de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético, podemos identificar o termo $\vec{E}\times\vec{B}$ como sendo um potencial vetor efetivo. Dessa forma, temos que:

$$\vec{A}_{ef} = \vec{E}\times\vec{B}, \tag{2.27}$$

onde os campos elétrico e magnético no referencial de repouso são dados pelas seguintes expressões [1]:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2}r\hat{r};\ \vec{B} = B_0\hat{z}. \tag{2.28}$$

onde ρ é a constante que caracteriza a intensidade do campo elétrico.

Utilizando a configuração de campo dada em (2.28), obtemos o seguinte potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{ef} = -\frac{B_0\rho}{2}r\hat{\varphi}. \tag{2.29}$$

Definimos o campo magnético efetivo $\vec{B}_{ef} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{ef}$ associado ao potencial vetor efetivo como

$$\vec{B}_{ef} = B_0 \rho \hat{z}. \tag{2.30}$$

Observe que, nesta configuração de campo, a interação entre o dipolo elétrico do átomo e o campo magnético no limite não relativístico coincide plenamente com o acoplamento mínimo de uma partícula eletricamente carregada com um campo magnético externo. Neste caso, a equação (2.29), é responsável pelo acoplamento mínimo. Ericsson e Sjöqvist apontaram efeitos similares para níveis de Landau-Aharonov-Casher [25]. Além disso, um dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo foi investigado na referência [26]. A precisa configuração de campo dada pelas equações (2.28) para ocorrer uma quantização análoga à de Landau são apresentadas nas referências [25, 26].

Observe que as necessárias condições para ocorrer a quantização de Landau no sistema de átomos são alacançadas nesta configuração de campo, citadas acima. Portanto, a equação de Schrödinger em coordenadas cilíndricas (com sistema de unidades $c = \hbar = 1$) para este sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + \frac{i\omega}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{m\omega^2}{8}r^2\psi = \varepsilon\psi, \tag{2.31}$$

onde $\omega = \frac{\alpha B_0 \rho}{m}$. Além disso, como observado na referência [28], o termo αE^2 na equação (2.26) é muito pequeno comparado com a energia cinética dos átomos, portanto podemos desconsiderá-lo sem perda de generalidade de agora em diante. Como solução da equação de Schrödinger dada pela expressão anterior, podemos utilizar o seguinte Ansatz:

$$\psi = e^{il\varphi}e^{ikz}R(r). \tag{2.32}$$

Onde $l = 0, \pm1, \pm2, \pm3...$ é o número quântico associado ao momento angular e k é uma constante associada à componente z do momento linear. Usando a equação (2.32), podemos reescrever a equação (2.31) da seguinte forma:

$$\frac{1}{2m}(R'\left(+\frac{1}{r}R' - \frac{l^2}{r^2}R\right) + \left(\varepsilon - \frac{m\omega^2}{8}r^2 + \frac{l\omega}{2}\right)R = 0. \tag{2.33}$$

Vamos realizar a seguinte mudança de variável:

$$\xi = \frac{m\omega}{2}r^2, \tag{2.34}$$

desta forma, a equação (2.33) torna-se

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{l^2}{4\xi}\right)R = 0. \tag{2.35}$$

Onde $\beta = \frac{\varepsilon}{\omega} + \frac{l}{2}$. Observe que o comportamento assintótico das possíveis soluções para a equação (2.35) são determinados para $\xi \longrightarrow 0$ e $\xi \longrightarrow \infty$. Tomando o limite $\xi \longrightarrow 0$, a equação (2.35) torna-se

$$\xi R'' \approx \frac{l^2}{4\xi}R, \tag{2.36}$$

que tem como solução

$$R(\xi \longrightarrow 0) = \xi^{|l|/2}g(\xi). \tag{2.37}$$

Dessa maneira, substituindo a equação (2.37) na equação (2.35), obtemos

$$g'' + \left[\frac{|l|+1}{\xi}\right]g' - \frac{1}{4}g + \frac{\beta}{\xi}g = 0. \tag{2.38}$$

E também tomando o limite $\xi \longrightarrow \infty$, a equação (2.38) reduz-se a

$$g'' \approx \frac{1}{4}g, \tag{2.39}$$

tendo como solução

$$g(\xi \longrightarrow \infty) = e^{-\xi/2}\zeta(\xi). \tag{2.40}$$

Substituindo a equação (2.40) na equação (2.38), obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\xi\zeta'' + \left[(|l|+1) - \xi\right]\zeta' + \mu\zeta = 0, \tag{2.41}$$

onde $\mu = \beta - \frac{|l|+1}{2}$. Podemos observar que a solução da equação (2.41) é a função hipergeométrica confluente definida por

$$\zeta(\xi) = F[-\mu, |l|+1, \xi]. \tag{2.42}$$

Conforme a condição de que a nossa solução seja finita, isto é, a nossa função de onda seja normalizada. De modo a ter a normalização da função de onda, a série em (2.42) deve ser um polinômio de grau n, portanto,

$$\mu = \beta - \frac{(|l|+1)}{2} = n. \tag{2.43}$$

Onde n é um número inteiro. É desta condição que obtemos o valores discretos para a energia, dados por

$$\epsilon_{n,l} = \left(n + \frac{|l|}{2} - \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\right)\omega. \tag{2.44}$$

Note que obtemos um espectro de energia análogo ao de uma partícula carregada.

Portanto, obtemos o espectro de energia e as auto-funções para o dipolo elétrico induzido utilizando a interação proposta por Wei. Como podemos notar, para cada valor do número quântico principal n temos infinitas possibilidades para l positivo, ou seja, cada nível é infinitamente degenerado. Nos capítulos seguintes, iremos usar essa mesma dedução com objetivo de analisar efeitos causados por um potencial confinante e rotação neste sistema, análogo da quantização de Landau para uma partícula neutra com um momento de dipolo elétrico induzido em uma região na presença de um campo magnético efetivo na direção $\hat{z}$.

Capítulo 3

Sistema de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido sujeito a um potencial linear confinante

Neste capítulo, apresentamos os resultados referentes a efeitos no sistema análogo à quantização de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido devido ao confinamento desse sistema por um potencial escalar proporcional à distância radial. Para isso, resolvemos a equação de Schrödinger com a intenção de obter soluções para estados ligados. Portanto, obtemos os níveis de energia permitidos para o sistema de Landau associado a uma partícula neutra (átomo ou molécula) com momento dipolar elétrico induzido sob a ação do potencial confinante linear.

A interação entre uma partícula neutra sem momento de dipolo elétrico permanente e campos externos tem sido também explorados no contexto da quantização de Landau [38]. Na referência [1], a quantização de Landau associada com uma partícula neutra sem momento de dipolo elétrico permanente tem sido proposta, e também tem sido analisado em um anel quântico [86] e na presença de defeitos topológicos [87]. No contexto da violação da simetria de Lorentz, a quantização de Landau para uma partícula neutra de Dirac tem sido alcançada na presença de campos elétricos e magnéticos cruzados nas Referências [88, 89].

Neste capítulo, nosso foco é investigar a influência de um potencial de confinamento linear no sistema de Landau associado a uma partícula neutra sem momento de dipolo elétrico permanente em uma região na presença de um campo magnético efetivo. O interesse em incluir um potencial confinante linear vem dos estudos da física atômica e molecular [39, 40, 41, 42, 43, 44], salto quântico [45, 46], movimento de uma partícula quântica em um campo de força uniforme [38, 47] e mecânica quântica relativística [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59]. Assim, ao confinar este sistema análogo à quantização de Landau a um potencial linear, podemos mostrar que as soluções de estados ligados para a equação de Schrödinger podem ser obtidas, além disso a frequência do cíclotron relativa a tais soluções é modificada. Discutimos também um efeito quântico caracterizado pela dependência da frequência angular com os números quânticos associados aos modos radiais e ao momento angular $\{n, l\}$ do sistema. Como caso particular, obtemos os valores possíveis da frequência angular associada ao estado fundamental do sistema.

Este capítulo se estrutura da seguinte maneira: na seção 3.1, fazemos uma breve revisão da dinâmica quântica do movimento de uma partícula neutra sem momento de dipolo elétrico permanente interagindo com uma configuração de campos elétricos e magnéticos cruzados e, portanto, investigando os efeitos quânticos no sistema de Landau associados ao momento de dipolo elétrico induzido sujeito a um potencial confinante linear; Na seção 3.2, apresentamos nossas conclusões.

3.1 Análogo à quantização de Landau sujeito a um potencial linear confinante

Nesta seção, seguiremos os passos das seções do segundo capítulo para determinarmos os níveis discretos de energia do sistema de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido sob a influência do potencial escalar confinante, resolvendo a equação de Schrödinger. Dessa forma, vamos confinar o sistema análogo da quantização de Landau utilizando um potencial proporcional à distância radial, onde isso pode ser feito, introduzindo na equação de Schrödinger a seguinte expressão:

$$V(\rho) = \eta\rho \tag{3.1}$$

onde η é um parâmetro constante que caracteriza o potencial confinante e ρ a distância radial.

Utilizando a configuração de campos dada por (2.28) e (2.29) e o potencial escalar (3.1), podemos escrever a equação de Schrödinger $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ (com unidades naturais

$c = \hbar = 1$) da seguinte forma:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + i\frac{\alpha\chi B_0}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\alpha^2\chi^2B_0^2}{8m}\rho^2\psi + \eta\rho\psi. \quad (3.2)$$

Observe que o operador hamiltoniano do lado direito da equação (3.2) comuta com os operadores $\hat{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$ e $\hat{p_z} = -i\frac{\partial}{\partial z}$. Portanto, uma solução particular para a equação (3.2) pode ser escrita em termos dos autovalores de $\hat{L}_z$ e $\hat{p_z}$ como

$$\psi = e^{-i\varepsilon t}e^{il\varphi}e^{ikz}f(\rho) \quad (3.3)$$

onde $l = 0, \pm1, \pm2, ...$ é o número quântico associado ao momento angular e k é uma constante associada com a componente z do momento linear. De agora em diante, vamos considerar $k = 0$ a fim de reduzir o sistema a um sistema planar. Desta maneira, a equação de schrödinger (3.2) torna-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{l^2}{\rho^2}f - \frac{\alpha^2\chi^2B_0^2}{4}\rho^2 f - 2m\eta\rho f + \beta f = 0, \quad (3.4)$$

onde $\beta = 2m\varepsilon + \alpha\chi B_0 l$. Vamos realizar a mudança de variáveis dada por $r = \sqrt{\frac{\alpha\chi B_0}{2}}\rho$, então, a equação (3.4) é escrita como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2}f - r^2 f - \tau r f + \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0}f = 0, \quad (3.5)$$

onde definimos o parâmetro

$$\tau = \frac{2m\eta}{(\frac{\alpha\chi B_0}{2})^{3/2}}. \quad (3.6)$$

Observe que o comportamento assintótico das possíveis soluções da equação (3.5) é determinado para $r \to 0$ e $r \to \infty$. Quando tomamos o limite $r \to 0$, o termo dominante neste limite é aproximadamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \approx \frac{l^2}{r^2} f, \tag{3.7}$$

cuja solução é

$$f(r) = r^{|l|}\zeta(r), \tag{3.8}$$

onde $\zeta(r)$ é uma função desconhecida.

Desta maneira, substituindo a equação (3.8) na equação (3.5) obtemos a seguinte expressão

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{(2|l|+1)}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} - r^2\zeta - \tau r\zeta + \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0}\zeta = 0, \tag{3.9}$$

no limite $r \to \infty$, o termo dominante para este limite é aproximadamente

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \approx r^2\zeta, \tag{3.10}$$

cuja solução é

$$\zeta(r) = e^{\frac{-r^2}{2}}\varrho(r), \tag{3.11}$$

onde $\varrho(r)$ é uma função desconhecida.

Portanto, substituindo a equação (3.11) na equação (3.9) obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \left[\frac{(2|l|+1)}{r} - 2r\right]\frac{\partial \varrho}{\partial r} - (2|l|+2)\varrho - \tau r\varrho + \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0}\varrho = 0, \tag{3.12}$$

novamente quando tomamos o limte $r \to \infty$, obtemos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \approx \tau r h, \tag{3.13}$$

cuja solução é

$$\varrho(r) = e^{\frac{-\tau r}{2}} H(r), \tag{3.14}$$

onde $H(r)$ é uma função desconhecida.

Por fim, substituindo a equação (3.14) na equação (3.12) obtemos

$$H'' + \left[\frac{2|l|+1}{r} - \tau - 2r\right] H' + \left[g - \frac{h}{r}\right] H = 0. \tag{3.15}$$

onde os parâmetros g e h dados na equação anterior são definidos como

$$\begin{aligned} g &= \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0} + \frac{\tau^2}{4} - 2|l| - 2; \\ h &= \frac{\tau}{2}\left[2\,|l| + 1\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A equação diferencial de segunda ordem (3.15) é conhecida na literatura como equação biconfluente de Heun [90], e a função $H(r)$ é chamada de função biconfluente de Heun [90]: $H(r) = H_B(2|l|, \tau, \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0} + \frac{\tau^2}{4}, 0, r)$.

Nosso foco é nas soluções de estados ligados para equação de Schrödinger (3.2), portanto vamos proceder com o método de Frobenius [91] e escrever a solução para equação (3.15) como uma expansão em série de potências em torno da origem: $H(r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j$. Substituindo esta série e suas primeira e segunda derivadas: $H'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j r^{j-1}$ e $H''(r) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) c_j r^{j-2}$ na equação (3.15), obtemos uma relação de recorrência dada por

$$c_{j+2} = \frac{\tau(j+1) + h}{(j+2)(j+2+2|l|)} c_{j+1} - \frac{g - 2j}{(j+2)(j+2+2|l|)} c_j, \tag{3.17}$$

Vamos iniciar com $c_0 = 1$, então, da equação (3.17), nós podemos obter outros coeficientes da expansão em séries de potência $H(r) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j$. Tal imposição resulta nos seguintes coeficientes

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\tau}{2}; \\ c_2 &= \frac{\tau^2(2|l|+3)}{8(2+2|l|)} - \frac{g}{2(2+2|l|)}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Podemos encontrar soluções para os estados estacionários impondo que a série biconfluente de Heun torna-se um polinômio de grau n. Da relação de recorrência (3.17), temos que a série biconfluente de Heun torna-se um polinômio de grau n se as condições

$$g = 2n; \quad c_{n+1} = 0, \tag{3.19}$$

onde $n = 1, 2, 3, ...$ forem satisfeitas. Da condição $g = 2n$, obtemos os níveis de energia dos estados ligados:

$$\varepsilon_{n,l} = \omega[n + |l| - l + 1] - \frac{\eta^2}{2m\omega^2}, \tag{3.20}$$

onde $n = 1, 2, 3, ...$é o número quântico associado com os modos radiais, $l = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ é o número quântico momento angular e a frequência angular do sistema é dada por

$$\omega = \frac{\alpha \chi B_0}{2m}. \tag{3.21}$$

Por outro lado, necessitamos analisar a condição $c_{n+1} = 0$ dada na equação (3.19). Para isso, vamos considerar que a frequência ω pode ser ajustada de tal maneira que a condição $c_{n+1} = 0$ possa ser satisfeita. Isto é possível porque podemos ajustar a intensidade do campo magnético B_0 ou a intensidade do campo elétrico através do parâmetro χ associado com a densidade de carga volumétrica uniforme. Assim, com esta possibilidade, ambas condições na equação (3.19) são satisfeitas e uma solução polinomial para a função

$H(r)$ é obtida. Além disso, uma consequência desta análise é que existe uma relação da frequência angular ω com os números quânticos $\{n, l\}$ do sistema. Vamos exemplificar considerando o estado fundamental do sistema $n = 1$; assim, da condição $c_{n+1} = 0$, temos que $c_2 = 0$. A condição $c_2 = 0$ leva a

$$\omega_{1,l} = \left[\frac{\eta^2}{2m}(2|l| + 3)\right]^{1/3}. \tag{3.22}$$

Esse exemplo mostra que apenas valores específicos da frequência angular são permitidos e que dependem dos números quânticos $\{n, l\}$. Por esta razão, temos denominado $\omega = \omega_{n,l}$ na equação (3.20). No contexto da mecânica quântica, o que vemos na equação (3.22) é um efeito quântico caracterizado por uma dependência da frequência angular ω com os números quânticos $\{n, l\}$ do sistema, que surge da influência do potencial linear confinante (3.1) no análogo da quantização de Landau associada com um átomo com um momendo de dipolo elétrico induzido. Estudos recentes têm obtido este efeito quântico em diferentes contextos da mecânica quântica [89, 59, 92]. Na referência [93], uma dependência da frequência angular com os números quânticos e a fase geométrica Aharonov-Casher [15] foi investigada em um anel quântico.

Além disso, das equações (3.20) e (3.22), os níveis de energia associados com o estado fundamental são

$$\varepsilon_{1,l} = \left[\frac{\eta^2}{2m}(2|l| + 3)\right]^{1/3} \times [|l| - l + 2] - \frac{\eta^2}{2m}\left(\frac{2m}{\eta^2[2|l| + 3]}\right). \tag{3.23}$$

Observe que, $n = 1$, recai em um caso simples da função $H(r)$ que corresponde a um polinômio de primeiro grau. Portanto, a função de onda radial associada com o estado fundamental é

$$f_{1,l}(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} e^{-\frac{\tau r}{2}} r^{|l|}\left(1 + \frac{\tau}{2} r\right). \tag{3.24}$$

Dessa maneira, podemos escrever de uma forma geral os níveis de energia dos estados ligados como

$$\varepsilon_{n,l,s} = \omega_{n,l}[n + |l| - l + 1] - \frac{\eta^2}{2m\omega_{n,l}^2}. \tag{3.25}$$

O espectro de energia (3.25) corresponde aos níveis de energia do sistema análogo da quantização de Landau para uma partícula neutra (átomo/molécula) sob a influência de um potencial confinante linear. Note que o espectro de energia é infinitamente degenerado como esperado para um sistema análogo da quantização de Landau [38], no entanto, a influência do potencial confinante linear modifica o espectro de energia do análogo da quantização de Landau obtido na referência [1]. Devido a presença do potencial confinante linear, o estado fundamental é determinado pelo número quântico $n = 1$ ao invés do número quantico $n = 0$. Mais ainda, a frequência angular dada na equação (3.21) difere da frequência do cíclotron do sistema análogo da quantização de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido, $\omega_0 = \frac{\alpha\chi B_0}{m}$. Deste modo, apenas alguns valores específicos da frequência angular ω são permitidos implicando uma solução polinomial para a função $H(r)$ dependente dos números quânticos $\{n, l\}$.

3.2 Discussões dos resultados

Ao longo deste capítulo, analisamos a influência de um potencial de confinamento linear no sistema de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido. Observamos que os níveis de energia são modificados, comparados aos níveis para um sistema análogo da quantização de Landau. Além disso, o estado de menos energia é determinado pelo número quântico $n = 1$ em vez do número quântico $n = 0$, e a frequência angular altera-se em contraste com a frequência do cíclotron encontrada na quantização análoga à quantização de Landau [1]. Outro efeito que decorre da influência do potencial de confinamento linear no sistema análogo da quantização de Landau é a dependência da frequência angular com os números quânticos $\{n, l\}$ do sistema, cujo significado é que somente valores específicos da frequência angular são permitidos, assim podemos soluções de estados ligados para este sistema. Como exemplo, determinamos a frequência angular associada ao estado de menor energia do sistema $n = 1$.

Capítulo 4

Os efeitos sobre um sistema análogo à quantização de Landau para um átomo sem momento de dipolo elétrico permanente devido a um potencial tipo-Coulomb

Vamos apresentar, neste capítulo, as soluções para os estados ligados obtidas resolvendo a equação de Schrödinger de um sistema de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido na presença de campos elétrico e magnético cruzados e sujeito a um potencial tipo-Coulomb. Dessa maneira, calculamos os níveis de energia, bem como as funções de onda. Potenciais do tipo-Coulomb têm sido relatados como sendo do interesse de diversas áreas da Física [60, 61, 62]. No contexto da física da matéria condensada, alguns estudos têm trabalhado com sistemas unidimensionais [63, 64, 65, 66, 67], moléculas [68, 69, 70], interações pseudo-harmônicas [94], sistemas de massa dependentes da posição [95, 96, 97], o potencial Kratzer [71] e defeitos topológicos em sólidos [98, 99, 100, 101]. Outros estudos têm abordado o potencial do tipo-Coulomb na propagação de ondas gravitacionais [102], modelos de quarks [103], átomos com momento de quadrupolo elétrico [92, 104, 105] e momento de quadrupolo magnético [106], partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente [93] e mecânica quântica relativística [107, 59, 108, 109]. O objetivo deste capítulo é analisar os efeitos quânticos em um sistema análogo da quantização de Landau associado com um átomo sem momento de dipolo elétrico permanente sujeito a um potencial tipo-Coulomb.

Este capítulo organiza-se da seguinte maneira: na seção 4.1, investigamos os efeitos quânticos neste sistema análogo à quantização de Landau sujeito a um potencial tipo-Coulomb; na seção 4.2, apresentamos nossas conclusões.

4.1 Sistema análogo dos níveis de Landau sujeito a um potencial tipo-Coulomb

Seguindo os passos do capítulo anterior, podemos determinar uma expressão para o hamiltoniano que descreve a dinâmica quântica de uma partícula neutra em um campo magnético uniforme e, consequentemente, obtermos a equação de Schrödinger que por sua vez é resolvida.

De agora em diante, vamos investigar os efeitos de um potencial tipo-Coulomb no sistema análogo à quantização de Landau para um átomo com um momento de dipolo elétrico induzido. Isto pode ser feito introduzindo o seguinte potencial escalar na equação de Schrödinger:

$$V(\rho) = \frac{\mu}{\rho}, \tag{4.1}$$

onde μ é um parâmetro constante que caracteriza o potencial tipo-Coulomb [103, 59]. Portanto, substituindo a equação (4.1) na equação de Schrödinger, obtemos

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + i\,\frac{\alpha\,\chi\,B_0}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\alpha^2\chi^2 B_0^2}{8m}\,\rho^2\psi + \frac{\mu}{\rho}\,\psi. \tag{4.2}$$

Podemos observar que o operador hamiltoniano do lado direito da equação (4.2) comuta com os operadores $\hat{L}_z = -i\,\frac{\partial}{\partial\varphi}$ e $\hat{p}_z = -i\,\frac{\partial}{\partial z}$, então, uma solução particular para equação (4.2) pode ser escrita em termos dos autovalores de $\hat{L}_z$ e $\hat{p}_z$ como $\psi(t,\,\rho,\,\varphi,\,z) = e^{-i\mathcal{E}t}\,e^{i\,l\,\varphi}\,e^{ikz}\,f(\rho)$, onde $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, k é uma constante e $f(\rho)$ é uma função da coordenada radial. Daqui em diante, assumimos que $k = 0$ a fim de reduzir o sistema para um sistema planar. Substituindo a solução particular dada acima em (4.2) e realizando uma mudança de variáveis dada por $r = \sqrt{\frac{\alpha\,\chi\,B_0}{2}}\,\rho$, a equação de Schrödinger (4.2) torna-se

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{l^2}{r^2}\,f - r^2\,f - \frac{\theta}{r}\,f + \beta\,f = 0, \tag{4.3}$$

onde definimos os parâmetros

$$\beta = \frac{4m\mathcal{E}}{\alpha\,\chi\,B_0} + 2l; \qquad \theta = \frac{2m\mu}{\sqrt{\frac{\alpha\,\chi\,B_0}{2}}}. \tag{4.4}$$

O comportamento assintótico das soluções possíveis para a equação (4.3) é determinado para $r \to 0$ e $r \to \infty$, portanto, isso nos permite escrever a função $f(r)$ em termos de uma função desconhecida $H(r)$ como [59, 58, 57, 110]

$$f(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}\, r^{|l|}\, H(r)\,. \tag{4.5}$$

Dessa maneira, substituindo a equação (4.5) na equação (4.3), obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem para a função $H(r)$:

$$\frac{d^2H}{dr^2} + \left[\frac{2\,|l|+1}{r} - 2r\right]\frac{dH}{dr} + \left[g - \frac{\theta}{r}\right] H = 0, \tag{4.6}$$

onde o parâmetro g é definido como

$$g = \beta - 2 - 2\,|l|\,. \tag{4.7}$$

A equação diferencial de segunda ordem (4.6) é conhecida na literatura como a função biconfluente de Heun [110], e a função $H(r)$ é a função biconfluente de Heun [110]:

$$H(r) = H_B\left(2\,|l|\,,\, 0,\, \beta,\, 2\theta,\, r\right). \tag{4.8}$$

Vamos nos concentrar nas soluções de estados ligados para a equação de Schrödinger, portanto prosseguimos com o método de Frobenius [91] a fim de escrever a solução para equação (4.6) como uma expansão em série de potências em torno da origem: $H(r) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, r^k$. Substituindo esta série na equação (4.6), obtemos a relação de recorrência:

$$c_{k+2}=\frac{\theta}{(k+2)\,(k+2+2\,|l|)}\,c_{k+1}-\frac{g-2k}{(k+2)\,(k+2+2\,|l|)}\,c_k. \tag{4.9}$$

Iniciando com $c_0 = 1$, então, da equação (4.9), podemos obter outros coeficientes da expansão em série de potências $H\,(r)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, r^k$. Como exemplo, os coeficientes c_1, c_2 e c_3 que são dados por

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\theta}{(1+2\,|l|)};\\
c_2 &= \frac{\theta^2}{2\,(2+2\,|l|)\,(1+2\,|l|)}-\frac{g}{2\,(2+2\,|l|)};\\
c_3 &= \frac{\theta^3}{6\,(3+2\,|l|)\,(2+2\,|l|)\,(1+2\,|l|)}-\frac{g\,\theta}{6\,(3+2\,|l|)\,(2+2\,|l|)}-\frac{(g-2)\,\theta}{3\,(3+2\,|l|)\,(1+2\,|l|)}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

De acordo com a teoria quântica, é preciso que a função de onda seja normalizável, portanto, para este fim, assumimos que a função $f(r)$ desapareça em $r \to 0$ e $r \to \infty$. Esta imposição significa que a função de onda não diverge em $r \to 0$ e $r \to \infty$, portanto, a função de onda é finita em todos os lugares, com isso, soluções para estados ligados são obtidos. Sendo assim, neste caso, soluções de estados ligados são alcançados impondo-se que a série biconfluente de Heun torne-se um polinômio de grau n. Podemos garantir, como uma consequência, que a função $f\,(r)$ comporta-se como $r^{|l|}$ na origem e desapareça em $r \to \infty$. Da relação de recorrência (4.9), podemos observar que a série biconfluente de Heun torna-se um polinômio de grau n se as duas condições seguintes são satisfeitas [108, 92, 59]:

$$g = 2n; \quad c_{n+1} = 0, \tag{4.11}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Analisando a condição $g = 2n$, determinamos os níveis de energia do sistema analógo de Landau sujeito a um potencial tipo Coulomb:

$$\mathcal{E}_{n,\,l} = \omega\left[n + |l| - l + 1\right], \tag{4.12}$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$ é o número quântico associado aos modos radiais e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ é o número quântico momento angular. Além disso, a frequência angular do sistema é dada pela seguinte expressão:

$$\omega = \frac{\alpha\,\chi\,B_0}{2m}. \tag{4.13}$$

Na sequência, vamos analisar a condição $c_{n+1} = 0$ dada na equação (4.11). Para atender essa condição, vamos considerar que a frequência angular ω pode ser ajustada de tal forma que a condição $c_{n+1} = 0$ possa ser satisfeita. Isto é possível porque podemos ajustar a intensidade do campo elétrico através do parâmentro χ associado à densidade volumétrica de cargas uniforme. Desta maneira, ambas condições impostas na equação (4.11) são satisfeitas e uma solução polinomial para a função $H\,(r)$ é obtida.

No contexto da mecânica quântica, esta relação produz um efeito quântico caracterizado pela dependência da frequência angular ω com os números quanticos $\{n,\,l\}$ do sistema, a qual surge da influência do potencial tipo Coulomb no analógo da quantização de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido. Em diferentes contextos, estudos atuais têm obtido este tipo de efeito quântico [59, 92, 98]. De acordo com a referência [93], uma dependência da frequência angular com os números quânticos e a fase geométrica Aharonov-Casher [15] tem sido obtida num anel quântico. Agora, vamos exemplificar a discussão em relação a condição $c_{n+1} = 0$. Primeiramente considerando o estado de menor energia do sistema $n = 1$, desta forma, da condição $c_{n+1} = 0$, obtemos $c_2 = 0$. Através da condição $c_2 = 0$ obtemos a frequência angular associada ao estado de menor energia que é dada por

$$\omega_{1,\,l} = \frac{2m\mu^2}{(1 + 2\,|l|)}. \tag{4.14}$$

Neste exemplo, observamos que apenas valores específicos da frequência angular ω

são permitidos e dependem dos números quânticos $\{n,\, l\}$. Por esta razão, renomeamos $\omega = \omega_{n,\,l}$ na equação (4.12). Além disso, utilizando as equações (4.12) e (4.14), o nível de energia para o estado fundamental pode ser escrito como

$$\mathcal{E}_{1,\,l} = \frac{2m\mu^2}{(1+2\,|l|)}\,[|l| - l + 2]\,, \tag{4.15}$$

e a função de onda (4.5) associado ao estado de menor energia é dada por

$$f_{1,\,l}\,(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}\,r^{|l|}\left[1 + \frac{\theta}{(1+2\,|l|)}\,r\right]. \tag{4.16}$$

Na sequência, vamos considerar o primeiro estado excitado do sistema $n = 2$. De acordo com a condição $c_{n+1} = 0$ obtemos $c_3 = 0$, e, desta forma, a frequência angular relacionada ao primeiro estado excitado do sistema é dada pela expressão a seguir

$$\omega_{2,\,l} = \frac{m\,\mu^2}{(3+4\,|l|)}. \tag{4.17}$$

Além disso, utilizando as equações (4.17) e (4.12), a expressão para os níveis de energia do primeiro estado excitado torna-se

$$\mathcal{E}_{2,\,l} = \frac{m\,\mu^2}{(3+4\,|l|)}\,[|l| - l + 3]\,, \tag{4.18}$$

e a função de onda (4.5) relacionada ao primeiro estado excitado do sistema é escrita como

$$f_{2,\,l}\,(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}\,r^{|l|}\left[1 + \frac{\theta}{(1+2\,|l|)}\,r + \frac{\theta^2}{2\,(2+2\,|l|)\,(1+2\,|l|)}\,r^2 - \frac{2}{(2+2\,|l|)}\,r^2\right]. \tag{4.19}$$

Por fim, reescrevemos a expressão para os níveis de energia (4.12) de uma forma geral como se segue:

$$\mathcal{E}_{n,\,l}=\omega_{n,\,l}\left[n+|l|-l+1\right]. \tag{4.20}$$

Neste capítulo, podemos observar que os níveis de energia (4.12) são obtidos em consequência dos efeitos do potencial tipo-Coulomb no sistema análogo à quantização de Landau para um átomo com momento de dipolo elétrico induzido. Note que os níveis de energia são modficados, contrário ao que foi obtido na referência [1] para a quantização de Landau devido a influência do potencial tipo-Coulomb. Também podemos notar que o estado fundamental do sistema é determinado pelo número quântico $n=1$ ao invés de $n=0$ e que a degenerecência dos níveis de Landau deixa de existir como podemos detectar nos casos partículares mencionados nas equações (4.15) e (4.18). Se compararmos com a frequência do cíclotron da quantização análoga a de Landau $\omega_0=\frac{\alpha\,\chi\,B_0}{m}$ obtida na referência [1], podemos notar que a frequência angular do sistema análogo de Landau é modificado em virtude do confinamento produzido pelo potencial tipo-Coulomb como pode ser visto na equação (4.13). Além disso, somente alguns valores específicos da frequência angular ω conforme a equação (4.14) são permitidos, a fim de obter uma solução polinomial para a função $H\left(r\right)$, onde os valores específicos dependem dos números quânticos $\{n,\,l\}$.

4.2 Discussões dos resultados

Analisamos, neste capítulo, um sistema análogo da quantização de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido sujeito à influência de um potencial tipo-Coulomb. Através de uma análise das soluções de estados ligados da equação de Schrödinger, notamos que os níveis de energia do sistema análogo da quantização de Landau são modificados no sentido de que o número quântico $n=1$ determina o estado fundamental do sistema, ao invés de $n=0$, e perde-se a degenerecência dos níveis de energia. Além disso, a frequência angular deste sistema difere da frequência do cíclotron obtido no análogo da quantização de Landau [1]. A dependência da frequência angular com os números quânticos $\{n,\,l\}$ do sistema corresponde a outro efeito quântico devido à influência do potencial tipo Coulomb sobre o análogo da quantização de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido. A dependência dos números quânticos $\{n, l\}$ significa que apenas valores específicos da frequência angular são determinados para obtermos soluções de estados ligados. Calculamos como exemplos, as frequências angulares, os níveis de energia e as funções de onda associados ao primeiro estado excitado do sistema. Nos próximos capítulos iremos considerar que este sistema análogo da quantização de Landau sujeito a potenciais confinantes estará rotacionando, ou seja, em um referencial não inercial. Assim, resolveremos a equação de Schrödinger e consequentemente obteremos soluções para estados ligados.

Capítulo 5

Descrição quântica de um átomo com momento de dipolo elétrico induzido sob efeitos de rotação e um potencial linear

Neste capítulo, vamos analisar o sistema análogo da quantização de Landau em rotação com velocidade angular constante e confinado por um potencial linear. Podemos dizer que o sistema está em movimento num referencial não-inercial. No contexto da física quântica, o efeito mais conhecido associado com rotação é o efeito Sagnac [111, 112, 113]. Esse efeito está relacionado com a mudança de fase que aparece nos experimentos de interferometria [114, 115, 116, 117]. O efeito Mashhoon [117] e a fase geométrica Aharonov-Carmi [118] são outros casos de desvios de fase associados com efeitos de rotação. No efeito Hall quântico também é observado efeitos de rotação [119], spintrônica [120, 121, 122], anéis quânticos [123, 124, 72, 55], condensação de Bose-Einstein [125], quantização de Landau [126, 127, 55], partículas de dirac [128] e partícula escalar relativística [129, 130].

Neste capítulo, temos como objetivo investigar os efeitos de um potencial linear e rotação em um átomo com um momento de dipolo elétrico induzido em um campo magnético efetivo uniforme. Dessa forma, mostramos que soluções analíticas podem ser obtidas, onde observamos que a degenerecência dos níveis de Landau é quebrada. Além disso, na busca de soluções polinomiais para a função de onda radial, observa-se que os valores possíveis da frequência do cíclotron do sistema análogo da quantização de Landau são determinados pela velocidade angular de rotação, parâmetro que caracteriza o potencial linear e números quânticos associados aos modos radiais e o momento angular. Na sequência do nosso raciocínio, determinamos como exemplos os possíveis valores da frequência do cíclotron e as energias permitidas associadas com o estado de energia mais baixo do sistema.

A organização desse capítulo se estrutura da seguinte maneira: na seção 5.1, fazemos uma breve revisão da quantização de Landau para um átomo em movimento com momento dipolar elétrico induzido. Em seguida, analisamos os efeitos do potencial linear e rotação no sistema de Landau; já na seção 5.2, apresentamos nossas conclusões.

5.1 Efeitos de rotação e do potencial linear

Agora, procederemos de forma semelhante aos capítulos anteriores, porém vamos supor que o sistema análogo da quantização de Landau está em rotação. Por isso, utilizaremos um hamiltoniano que descreve a lei de transformação da energia quando mudamos para um estado de rotação. Nesta seção, investigamos os efeitos de rotação em um átomo (ou molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido e confinado por um potencial linear, que interage com uma configuração de campo de campos magnéticos e elétricos cruzados. Vimos no capítulo 2 que a descrição quântica de uma partícula neutra (um átomo ou uma molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido em movimento num referencial inercial (referencial de repouso) é dada pelo seguinte operador hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\pi}^2}{2m}\psi - \frac{\alpha}{2}E^2\psi + V\psi, \tag{5.1}$$

onde α é a polarizibilidade dielétrica de um átomo (ou molécula), V é um potencial escalar, $m = M + \alpha B^2$ é a massa efetiva do sistema, M é a massa do átomo [131] e o operador $\hat{\pi}$ (momento efetivo) é definido como

$$\hat{\pi} = \hat{p} + \alpha \vec{E} \times \vec{B}. \tag{5.2}$$

Observe que o segundo termo do lado direito da equação (5.2) corresponde a um potencial vetor efetivo $\vec{A}_{ef} = \vec{E} \times \vec{B}$. Além disso, tal como apontado na referência [28], o termo E^2 dado na equação (5.1) é muito pequeno em comparação com a energia cinética dos átomos, portanto, podemos desde já negligencia-lo sem perda de generalidade. Além disso, vamos agora considerar o sistema análogo da quantização de Landau para um átomo (molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido sujeito a um potencial escalar linear dado por $V(\rho) = \nu\rho$, onde ν é uma parâmetro constante [103, 59].

Nosso foco neste trabalho é sobre os efeitos de um potencial escalar linear sobre o sistema de tipo Landau para um átomo (molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido em rotação, neste caso, procurando soluções analíticas. Para esta finalidade, assumimos que este sistema rotaciona com velocidade angular constante $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$, isso foi discutido nas seguintes referências [72, 73, 74, 75, 76] e, portanto, mostra-se que o operador hamiltoniano que descreve o comportamento do sistema em rotação é dado pela expressão

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \vec{\Omega} \cdot \hat{L}, \tag{5.3}$$

onde $\hat{L}$ é o operador momento angular cuja forma é $\hat{L} = \vec{r} \times \hat{\pi}$ e $\hat{\pi}$ é definido na equação (5.2) e $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ em um sistema bidimensional. Substituindo as equações (5.1), (5.2) e os campos $\vec{E} = \frac{\chi\rho}{2}\hat{\rho}$ e $\vec{B} = B_0\hat{z}$ na equação (5.3), a equação de Schrödinger toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + i\frac{\alpha\chi B_0}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\alpha^2\chi^2 B_0^2}{8m}\rho^2\psi + \\ i\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\Omega\alpha\chi B_0}{2}\rho^2\psi + \nu\rho\psi. \end{aligned} \tag{5.4}$$

A solução para equação (5.4) pode ser escrita usando o método de separação de variáveis [132], isto é, escrevemos $\psi(t,\rho,\varphi,z) = \varPsi(t)\varPhi(\varphi)Z(z)f(\rho)$. Após alguns cálculos, obtemos $\varPsi(t) = e^{-i\varepsilon t}, \varPhi(\varphi) = e^{il\varphi}, Z(z) = e^{ikz}$, onde $l = 0, \pm1, \pm2, ...$ e k é uma constante. Desde já, assumimos que $k = 0$ a fim de reduzir o sistema a um sistema planar. Além disso, realizando uma mudança de variáveis dada por $r = \sqrt{\frac{m\varpi}{2}}\rho$. A equação de Schrödinger (5.4) torna-se

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{l^2}{r^2}f - r^2 f - \vartheta r f + \beta f = 0, \tag{5.5}$$

onde definimos os seguintes parâmetros na equação (5.5):

$$\varpi^2 = \omega^2 + 4\Omega\omega; \beta = \frac{2}{m\varpi}[2m\varepsilon + 2m\Omega l + m\omega l]; \vartheta = \frac{2m\nu}{(\frac{m\varpi}{2})^{3/2}}; \omega = \frac{\alpha\chi B_0}{m}. \tag{5.6}$$

Vale ressaltar que o parâmetro ω foi definido na referência [1] como sendo a frequência do cíclotron da quantização de Landau associada a um átomo com um momento de dipolo elétrico induzido. Uma maneira interessante de alcançar as soluções de estados ligados é observar o comportamento das possíveis soluções para equação (5.5) em $r \to 0$ e $r \to \infty$. Este comportamento assintótico permite escrever a função $f(r)$ em termos de uma função desconhecida $H(r)$ como segue [59, 57, 58, 110]:

$$f(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} e^{-\frac{\vartheta r}{2}} r^{|l|} H(r), \tag{5.7}$$

e assim, substituindo a equação (5.7) na equação (5.5), temos que a função $H(r)$ é uma solução para a seguinte equção diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2H}{dr^2} + \left[\frac{2|l|+1}{r} - \vartheta - 2r\right]\frac{dH}{dr} + \left[\beta + \frac{\vartheta^2}{4} - 2 - 2|l| - \frac{\vartheta(2|l|+1)}{2r}\right] H = 0. \tag{5.8}$$

A equação diferencial de segunda ordem (5.8) é chamada como equação biconfluente de Heun [110], e a função $H(r)$ é a função biconfluente de Heun [110]: $H(r) = H_B(2|l|, \vartheta, \beta + \frac{\vartheta^2}{4}, 0, r)$. Em seguida, vamos escrever a função $H(r)$ como uma expansão em séries de potência em torno da origem, isto é, $H(r) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ [91]. Desta forma, substituindo esta série na equação (5.8), obtemos uma relação de recorrência dada por

$$a_{k+2} = \frac{\vartheta(k+1) + \tau}{(k+2)(k+2+2|l|)} a_{k+1} - \frac{\theta - 2k}{(k+2)(k+2+2|l|)} a_k, \tag{5.9}$$

além de

$$a_1 = \frac{\vartheta}{2} a_0, \tag{5.10}$$

onde $\theta=\beta+\frac{\vartheta^2}{4}-2-2|l|$ e $\tau=\frac{\vartheta}{2}[2|l|+1]$. Da equação (5.9), observamos que a série de Heun biconfluente torna-se um polinômio de grau n impondo [80, 81, 59]

$$\theta=2n \quad e \quad a_{n+1}=0, \tag{5.11}$$

onde $n=1,2,3,....$ A partir de agora, é interessante analisar as condições estabelecidas na equação (5.11) separadamente. Analisando a condição $\theta=2n$, obtemos

$$\varepsilon_{n,l}=\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+4\Omega\omega}[n+|l|+1]-\frac{\omega l}{2}-\frac{2\nu^2}{m(\omega^2+4\Omega\omega)}-\Omega l, \tag{5.12}$$

que corresponde aos níveis de energia do sistema, onde $n=1,2,3,...$, é o número quântico associado aos modos radiais, $l=0,\pm1,\pm2,...$, é o número quântico do momento angular e ω é chamado como a frequência do cíclotron do sistema do tipo Landau obtido na referência [1], que foi definido na equação (5.6). Note que o último termo da equação (5.12) corresponde ao acoplamento entre o momento angular e a velocidade angular de rotação. Este acoplamento é conhecido como o termo Page-Werner et al. [114, 115, 133].

Nosso próximo passo na busca de soluções polinomiais para $H(r)$ é analisar a condição $a_{n+1}=0$ dada na equação (5.11). Em vista desta análise, precisamos primeiro obter alguns coeficientes da expansão da série de potências, por exemplo, vamos começar com $a_0=1$, portanto, da equação (5.9), obtemos $a_1=\frac{\vartheta}{2}$ e $a_2=\frac{\vartheta^2(2|l|+3)}{8(2+2|l|)}-\frac{\theta}{2(2+2|l|)}$. Assim, tomemos o estado de menor energia do sistema $(n=1)$. Para $n=1$, obtemos da equação (5.11) que $a_{n+1}=a_2=0$, e então,

$$\omega_{1,l}=-2\Omega\pm2\Omega\sqrt{1+\frac{1}{4\Omega^2}(\frac{4\nu^2}{m}[2|l|+3])^{2/3}}. \tag{5.13}$$

A equação (5.13) informa os valores possíveis da frequência do cíclotron associada ao estado de menor energia do sistema; que nos permite determinar uma solução polinomial para $H(r)$. Observe que os valores possíveis de $\omega_{1,l}$ dados na equação (5.13) resultam em $\varpi>0$, e assim o comportamento assintótico da função de onda radial quando $r\rightarrow\infty$ é satisfeito. Este caso partícular mostra que somente valores específicos da frequência

ω do cíclotron são permitidos para obter uma solução polinomial para a função $H(r)$, onde esses valores possíveis são determinados pelos números quânticos $\{n, l\}$ do sistema, a velocidade angular da estrutura rotativa e o parâmetro associado ao potencial escalar linear. Por esta razão, temos nomeado $\omega = \omega_{n,l}$ na equação (5.12). Esta restrição dos valores da frequência do cíclotron resulta da influência dos efeitos de rotação e do potencial escalar linear na quantização de tipo Landau associada a um átomo (ou molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido. Além disso, substituindo (5.13) na equação (5.12), temos

$$\varepsilon_{1,l} = \frac{(|l|+2)}{2}\left[\frac{4\nu^2}{m}(2|l|+3)\right]^{1/3} - \frac{2\nu^2}{m}\left[\frac{m}{4\nu^2(2|l|+3)}\right]^{2/3} \mp l\Omega\sqrt{1+\frac{1}{4\Omega^2}(\frac{4\nu^2}{m}[2|l|+3])^{2/3}}, \quad (5.14)$$

que corresponde às energias permitidas para o estado fundamental do sistema. Seguindo esta discussão no que diz respeito ao estado de menor energia, então, a função de onda radial (5.7) associado, com este estado é dada por

$$f_{1,l} = e^{-\frac{r^2}{2}} e^{\frac{-\vartheta r}{2}} r^{|l|}\left[1+\frac{\vartheta}{2}r\right]. \quad (5.15)$$

Deste modo, os níveis de energia (5.12) podem ser reescritos de uma forma geral, nomeando $\omega = \omega_{n,l}$, como

$$\varepsilon_{n,l} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_{n,l}^2 + 4\Omega\omega_{n,l}}[n+|l|+1] - \frac{l\omega_{n,l}}{2} - \frac{2\nu^2}{m(\omega_{n,l}^2+4\Omega\omega_{n,l})} - \Omega l, \quad (5.16)$$

onde $\omega \to \omega_{n,l}$.

Assim, os níveis de energia (5.16) são obtidos a partir da influência do potencial escalar linear e efeitos de rotação no sistema de tipo Landau para um átomo com um momento de dipolo elétrico induzido. Em contraste com os níveis de Landau obtidos na referência [1], temos que a degenerecência do níveis de Landau é quebrado, como podemos verificar nas equações (5.12), (5.13) e (5.14). Também temos uma frequência angular dada por $\varpi = \sqrt{\omega^2 + 4\Omega\omega}$ que difere da frequência de cíclotron da quantização de tipo Landau

$\omega = \frac{\alpha\chi B_0}{m}$ dado na referência [1] devido aos efeitos de rotação. Além disso, ao procurar uma solução polinomial para a função $H(r)$, temos que apenas alguns valores específicos da frequência ω do cíclotron são permitidos, onde esses valores possíveis são determinados pelos números quânticos $\{n, l\}$ do sistema, a velocidade angular de rotação e o parâmetro associado ao potencial escalar linear. Finalmente, temos na equação (5.16) o acoplamento entre o número quântico do momento angular l e a velocidade angular Ω que corresponde ao termo Page-Werner ***et al***. [114, 115, 133]. Observe que, tomando $\Omega \to 0$, os efeitos de rotação desaparecem e, assim, recuperamos os efeitos de confinamento produzido pelo potencial linear na quantização de Landau para um átomo com um momento de dipolo elétrico induzido [81]. No próximo capítulo iremos mudar o potencial de confinamento linear para o potencial de Kratzer e revelaremos como determinar soluções para os estados ligados.

5.2 Discussões dos resultados

Observamos que a rotação e o confinamento do potencial escalar linear no sistema de Landau associado a um átomo (ou molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido produzem efeitos que modificam os níveis de energia, quebrando a degenerecência deles, isso é visto quando comparado com o análogo dos níveis de Landau obtidos na referência [1]. Verificamos além disso que os efeitos da rotação modificam a frequência do cíclotron do sistema. Além disso, ao buscar uma solução polinomial para a função $H(r)$ e as soluções de estados ligados, vemos que apenas alguns valores específicos da frequência de cíclotron ω são permitidos. Tais valores, dependem do parâmetro associado ao potencial escalar linear, da velocidade angular do estado de rotação e dos números quânticos associados aos modos radiais e ao momento angular. Finalmente, obtivemos uma contribuição para os níveis de energia decorrentes do acoplamento entre a velocidade angular de rotação e o momento angular, que é chamado de Termo Page-Werner ***et al***. [114, 115, 133]. No limite $\mathit{\Omega} \to 0$, os efeitos rotação desaparecem, portanto, recuperamos os efeitos da interação do potencial linear no sistema análogo ao de Landau [81].

Capítulo 6

Efeitos sobre um sistema análogo à quantização de Landau para uma partícula neutra sem momento de dipolo elétrico permanente sujeito ao potencial de Kratzer e em rotação

Neste capítulo apresentaremos os resultados dos esfeitos de rotação e do potencial de Kratzer em um sistema de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido. Para isso, seguiremos as etapas do capítulo anterior onde resolvemos a equação Schrödinger e obtivemos os níveis de energia do sistema. Os efeitos de rotação têm despertado atenção e atraído muita discussão na literatura, por exemplo, Landau e Lifshitz [134] apontaram um ponto de vista geométrico onde uma transformação de coordenadas de um sistema em repouso para um estado de rotação uniforme gera um comportamento intrigante: o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski torna-se não bem definido para grandes distâncias, isto é, o sistema de coordenadas torna-se singular a grandes distâncias. Este comportamento singular a grandes distâncias está associado com o fato da velocidade da partícula ser maior que a velocidade da luz.

Recentemente, esta restrição espacial tem sido explorada em estudos do oscilador de Dirac [135] e a quantização de Landau para partículas neutras [136]. O objetivo deste capítulo é investigar os efeitos de rotação em um átomo (ou molécula) com momento de dipolo elétrico induzido sujeito ao potencial Kratzer [77, 78, 79] em uma região com um campo magnético efetivo uniforme.

Neste capítulo, procurando soluções de estado ligado, mostramos que a frequência angular do sistema difere da frequência de cíclotron obtida na referência [1], e os possíveis valores dessa frequência angular do sistema são determinados pelos números quânticos associados aos modos radiais e momento angular, a velocidade angular de rotação e os parâmetros associados ao potencial de Kratzer [77, 78, 79]. A estruturação deste trabalho é: na seção 6.1, fazemos uma breve introdução da dinâmica quântica de um átomo em movimento com um momento de dipolo elétrico induzido e a quantização de Landau associada a ele, e então, analisamos este sistema sujeito ao potencial de Kratzer e em um estado rotatório; Enquanto na seção 6.2, apresentamos nossas conclusões.

6.1 Efeitos de rotação

Nesta seção, investigamos os efeitos rotativos sobre um átomo com momento de dipolo elétrico induzido que interage com campos externos sujeitos ao potencial de Kratzer [77, 78, 79]. Consideremos agora o sistema de tipo Landau para um átomo sem momento de dipolo elétrico permanente a ser sujeito ao potencial Kratzer [77, 78, 79] dado por:

$$V(\rho) = -\frac{2Da}{\rho} + \frac{Da^2}{\rho^2}, \tag{6.1}$$

Aqui D e a são constantes. Isso tem despertado grande interesse em estudos de moléculas [137, 68, 69]. Além disso, este sistema rotaciona com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Portanto, a equação de Schrödinger pode ser escrita da seguinte forma:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + i\frac{\alpha\chi B_0}{2m}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\alpha^2\chi^2B_0^2}{8m}\rho^2\psi + i\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\Omega\alpha\chi B_0}{2}\rho^2\psi - \frac{\mu}{\rho}\psi + \frac{\tau^2}{\rho^2}\psi, \tag{6.2}$$

onde $\mu = 2Da$ e $\tau^2 = Da^2$. Observe que o operador Hamiltoniano do lado direito da equação (6.6) comuta com os operadores $\hat{L}_z = -i(\frac{\partial}{\partial\varphi})$ e $\hat{p}_z = -i(\frac{\partial}{\partial z})$, então, a solução deve ser da mesma forma da equação (3.3), isto é: $\psi(t,\rho,\varphi,z) = e^{-i\varepsilon t}e^{il\varphi}e^{ikz}f(\rho)$. Daqui em diante, assumimos que $k=0$ para reduzir o sistema a um sistema planar. Substituindo $\psi(t,\rho,\varphi,z)$ na equação (6.2) e realizando uma mudança de variáveis dada por $r = \sqrt{m\varpi}\rho$, a equação de Schrödinger (6.2) torna-se

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{\gamma^2}{r^2}f-r^2f+\frac{\vartheta}{r}f+\frac{\beta}{m\varpi}f=0, \tag{6.3}$$

onde definimos os seguintes parâmetros na equação (6.3):

$$\varpi^2=\tfrac{\omega^2}{4}+\Omega\omega;\quad \gamma^2=l^2+2m\tau^2;\quad \beta=2m\varepsilon+2m\Omega l+m\omega l;\quad \vartheta=\tfrac{2m\mu}{\sqrt{m\varpi}};$$
$$\omega=\tfrac{\alpha\chi B_0}{m}. \tag{6.4}$$

Vale ressaltar que o parâmetro ω foi definido na referência [1] como sendo a frequência de cíclotron da quantização de Landau associada a um átomo com um momento dipolar elétrico induzido. Prosseguimos com a análise do comportamento assintótico das possíveis soluções da equação (6.3), o que nos permite determinar a forma da função $f(r)$, isto é feito quando tomamos os limites $r\rightarrow 0$ e $r\rightarrow\infty$ (pontos singulares). Desejamos que a função vá a zero tanto na origem quanto no infinito, portanto, a função $f(r)$ pode ser escrita em termos de uma função desconhecida $H(r)$ como [59, 58, 57, 110]

$$f(r)=e^{-\frac{r^2}{2}}r^{|\gamma|}H(r). \tag{6.5}$$

Assim, ao substituir a equação (6.5) na equação (6.3), mostramos que a função $H(r)$ é uma solução para a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\left[\frac{2|\gamma|+1}{r}-2r\right]\frac{dH}{dr}+\left[\nu+\frac{\vartheta}{r}\right]H=0, \tag{6.6}$$

onde $\nu=\frac{\beta}{m\varpi}-2-2|\gamma|$. A equação diferencial de segunda ordem (6.6) é chamada de equação biconfluente de Heun [110], e a função $H(r)$ é também a função biconfluente de Heun [110]: $H(r)=H_B(2|\gamma|,0,\frac{\beta}{m\varpi},2\vartheta,-r)$. De agora em diante, vamos usar o método de Frobenius [91] para escrever a solução para a equação (6.6) como uma expansão de série de potências em torno da origem: $H(r)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$. Substituindo esta série na equação (6.6), obtemos a relação de recorrência

$$a_{k+2} = \frac{-\vartheta}{(k+2)(k+2+2|\gamma|)}a_{k+1} - \frac{\nu - 2k}{(k+2)(k+2+2|\gamma|)}a_k, \tag{6.7}$$

e $a_1 = -(\frac{\vartheta}{(1+2|\gamma|)})a_0$.

Vamos começar com $a_0 = 1$, então, a partir da equação (6.7), podemos obter outros coeficientes da expansão da série de potências $H(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$. Por exemplo, os coeficientes a_1, a_2 e a_3 são dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\vartheta}{(1+2|\gamma|)}; a_2 = \frac{\vartheta^2}{2(2+2|\gamma|)(1+2|\gamma|)} - \frac{\nu}{2(2+2|\gamma|)}; \\ a_3 &= -\frac{\vartheta^3}{6(3+2|\gamma|)(2+2|\gamma|)(1+2|\gamma|)} + \frac{\nu\vartheta}{6(3+2|\gamma|)(2+2|\gamma|)} + \\ &\qquad \frac{(\nu-2)\vartheta}{3(3+2|\gamma|)(1+2|\gamma|)}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Nos concentramos em alcançar soluções de estado ligado, portanto, precisamos impor que a série biconfluente de Heun se torne um polinômio de grau n. Dessa forma, garantimos que a função $f(r)$ se comporta bem na origem e desaparece em $r \to \infty$. A partir da relação de recorrência (6.7), podemos mostrar que a série de Heun biconfluente se torna um polinômio de grau n impondo [80, 59]

$$\nu = 2n \qquad a_{n+1} = 0, \tag{6.9}$$

onde $n = 1, 2, 3, ...$ Analisando a condição $\nu = 2n$, obtemos uma expressão geral para os níveis de energia, dada por

$$\varepsilon_{n,l} = \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \Omega\omega}[n + |\gamma| + 1] - \frac{1}{2}\omega l - \Omega l. \tag{6.10}$$

Na equação (6.10) o acoplamento entre o número quântico do momento angular l e a velocidade angular Ω corresponde ao termo Page-Werner et al. [114, 115, 133]. Em seguida, vamos analisar a condição $a_{n+1} = 0$ dada na equação (6.9). Para isso, consideremos a frequência do ciclotron ω [1] que pode ser ajustada de tal forma que a condição

$a_{n+1} = 0$ possa ser satisfeita. Isso é possível por que podemos ajustar a intensidade do campo magnético B_0 ou a intensidade do campo elétrico através do parâmetro χ associado à densidade de carga volumétrica uniforme [80]. Com essa suposição, temos que ambas as condições impostas na equação (6.9) são satisfeitas e uma solução polinomial para a função $H(r)$ é obtida. Como exemplo, vamos tomar $n = 1$ e rotular $\omega = \omega_{n,l}$. Para $n = 1$, temos o estado fundamental do sistema, então $a_{n+1} = a_2 = 0$ e, portanto, os possíveis valores da frequência de cíclotron associados ao estado fundamental do sistema são

$$\omega_{1,l} = 2\Omega\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m^2\mu^4}{\Omega^2(1+2|\gamma|)}}\right]. \tag{6.11}$$

Observe que os valores possíveis de $\omega_{1,l}$ dados na equação (6.11) produzem $\varpi \gneq 0$ e, portanto, o comportamento assintótico da função de onda radial quando $r \to \infty$ é satisfeito. Assim, este exemplo mostra que somente valores específicos da frequência angular ω são permitidos e dependem dos números quânticos $\{n, l\}$ do sistema e da velocidade angular de rotação. Do ponto de vista da mecânica quântica, essa relação da frequência angular ω com os números quânticos do sistema $\{n, l\}$ e a velocidade angular do estado rotativo é um efeito quântico que decorre da influência dos efeitos rotativos e Potencial de Kratzer na quantização de tipo Landau associada à partícula neutra (átomo ou molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido. Observe que, substituindo (6.11) na equação (6.10), temos

$$\varepsilon_{1,l} = \frac{2m\mu^2(|\gamma|+2)}{(1+2|\gamma|)} \mp \Omega l\sqrt{1 + \frac{4m^2\mu^4}{\Omega^2(1+2|\gamma|)^2}}, \tag{6.12}$$

que corresponde às energias permitidas para o estado fundamental do sistema. Além disso, a função de onda radial (6.5) associada ao estado fundamental é dada por

$$f_{1,l}(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} r^{|\gamma|}\left[1 - \frac{\vartheta}{(1+2|\gamma|)} r\right]. \tag{6.13}$$

Finalmente, vamos reescrever os níveis de energia (6.10) de uma forma geral como

$$\varepsilon_{n,l} = \sqrt{\frac{\omega_{n,l}^2}{4} + \Omega\omega_{n,l}[n + |\gamma| + 1]} - \frac{1}{2}l\omega_{n,l} - \Omega l. \tag{6.14}$$

Assim, os níveis de energia (6.14) são obtidos a partir dos efeitos do potencial de Kratzer e efeitos de rotação no sistema de Landau para uma partícula neutra (átomo ou molécula) com um momento de dipolo elétrico induzido. Observe que os níveis de energia são modificados em contraste com o obtido na referência [1] para a quantização de Landau, onde o estado fundamental do sistema é determinado pelo número quântico $n = 1$ em vez do número quântico $n = 0$ e a degenerecência dos níveis de Landau é quebrada como podemos ver nas equações (6.10)-(6.12). Comparando com a frequência de cíclotron da quantização do tipo Landau $\omega = \frac{\alpha\chi B_0}{m}$ dado na referência [1], temos uma frequência angular dada por $\varpi = \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \Omega\omega}$, o que significa que a frequência angular do sistema do tipo Landau é modificada pela influência da rotação.

Além disso, somente alguns valores específicos da frequência ω do cíclotron são permitidos para que uma solução polinomial para a função $H(r)$ possa ser obtida, onde os valores permitidos dependem dos números quânticos $\{n, l\}$, a velocidade angular de rotação e os parâmetros associados ao potencial Kratzer como podemos ver na equação (6.11) para o estado fundamental do sistema. Além disso, observe que o último termo da equação (6.14) corresponde ao acoplamento entre o número quântico do momento angular l e a velocidade angular Ω que é chamado termo de Page-Werner ***et al***. [114, 115, 133]. Além disso, tomando $\Omega \to 0$, os efeitos de rotação desaparecem, e assim os efeitos análogos aos efeitos de um potencial tipo Coulomb em uma quantização de Landau para uma partícula neutra com um momento de dipolo elétrico induzido são recuperados.

6.2 Discussões dos resultados

Discutimos os efeitos da rotação e do potencial de Kratzer [77, 78, 79] na quantização de Landau associada à uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido. Vimos que a frequência angular do sistema adquire uma nova contribuição que decorre dos efeitos de rotação. Além disso, os níveis de Landau obtidos na referência [1] são modificados, onde a degenerecência dos níveis do tipo Landau é quebrada e o estado fundamental do sistema é determinado pelo número quântico $n = 1$ em vez do número quântico $n = 0$.

Além disso, um efeito quântico caracterizado pela dependência da frequência do cíclotron da quantização do tipo Landau nos números quânticos do sistema e da velocidade angular de rotação é obtida, o que significa que apenas alguns valores específicos da frequência de cíclotron ω são permitidos para se obter soluções de estado ligado. Uma nova contribuição para o análogo dos níveis de Landau resulta do acoplamento entre a velocidade angular do estado rotativo e o momento angular, que é chamado de termo Page-Werner et al. [114, 115, 133]. Finalmente, no limite $\Omega \to 0$, temos que os efeitos de rotação desaparecem, e assim os efeitos análogos à interação tipo Coulomb no sistema tipo Landau são recuperados [80].

Capítulo 7

Um átomo com momento de dipolo elétrico induzido em referenciais inercial e não-inercial

Este capítulo comtemplará os resultados referentes a uma investigação de um átomo com momento de dipolo elétrico induzido sob a influência dos potenciais linear e Kratzer em referenciais inercial e não inercial. Mostraremos que as soluções de estado ligado para o equação Schrödinger podem ser obtidas. Para isso, seguiremos o raciocínio do capítulo anterior, onde encontramos os níveis de energia para o sistema análogo da quantização de Landau.

A estrutura deste capítulo é: na seção 7.1, apresentamos a descrição quântica de uma partícula neutra móvel (molécula ou átomo) com um momento de dipolo elétrico induzido em uma região com campos elétricos e magnéticos; Assim, consideramos a configuração de campo proposta na referência [1] que dá origem ao análogo da quantificação de Landau e analisa este sistema sujeito ao potencial de Kratzer [77, 78, 79] e um potencial escalar proporcional à distância radial; Na seção 7.2, investigamos os efeitos quânticos no sistema descrito na seção anterior, considerando-se em um referencial não-inercial, ou seja, o sistema em rotação; Na seção 7.3, apresentamos nossas conclusões.

7.1 Sem efeito de rotação

Para investigar a influência do potencial de Kratzer [77, 78, 79] e um potencial escalar proporcional à distância radial, escrevemos a energia potencial V da seguinte forma:

$$V(r) = br - \frac{2Da}{r} + \frac{Da^2}{r^2}. \tag{7.1}$$

O primeiro termo da equação (7.1) corresponde ao potencial escalar proporcional à distância radial, onde b é uma constante. O segundo termo corresponde ao potencial de Kratzer, onde D e a são constantes. Isto tem atraído um grande interesse em estudos de moléculas [137, 68, 69]. Assim, seguindo os passos dos capítulos anteriores, podemos escrever a equação de Schrödinger independente do tempo da seguinte maneira:

$$\varepsilon\Psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi + i\frac{\alpha\lambda B_0}{2m}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + \frac{\alpha^2\lambda^2 B_0^2}{8m}r^2\Psi - \frac{2Da}{r}\Psi + \frac{Da^2}{r^2}\Psi + br\Psi, \tag{7.2}$$

Vamos realizar a mudança de variável dada por

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}r. \tag{7.3}$$

Desta forma, obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$F'' + \frac{1}{y}F' - \frac{\tau^2}{y^2}F - y^2F + \frac{\mu}{y}F - \Theta yF + \chi F = 0. \tag{7.4}$$

onde $\tau^2 = \nu^2 + 2mDa^2$, $\mu = \frac{4mDa}{\sqrt{\frac{m\omega}{2}}}$, $\Theta = \frac{2mb}{(\frac{m\omega}{2})^{3/2}}$ e $\chi = \frac{2}{m\omega}[2m\varepsilon - k^2 + m\omega\nu]$. É bem conhecido que a análise do comportamento assintótico da equação (7.4) determina a forma da função $F(y)$, portanto, esta função pode ser escrita em termos de uma função desconhecida $H(y)$ como

$$F(y) = e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{\Theta y}{2}} y^{|\tau|} H(y). \tag{7.5}$$

Substituindo a equação (7.5) na equação (7.4), obtemos que $H(y)$ é a solução para a seguinte equação:

$$H'' + \left[\frac{2|\tau| + 1}{y} - \Theta - 2y\right]H' + \left[\chi + \frac{\Theta^2}{4} - 2|\tau| - 2 + \frac{2\mu - \Theta(2|\tau| + 1)}{2y}\right]H = 0, \tag{7.6}$$

que é a equação biconfluente de Heun [90], então, $H(y) = H_B(2|\tau|, \Theta, \chi + \frac{\Theta^2}{4}, -2\mu; y)$ é a função biconfluente de Heun. Queremos que a função $F(y)$ vá a zero quando $y \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow 0$, portanto, usamos o método de Frobenius [91]. Neste método, primeiramente escrevemos a função biconfluente de Heun como uma série de potências em torno da origem, $H(y) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i y^i$, e então, nós procuramos por soluções polinomiais para a equação biconfluente de Heun (7.6). Substituindo esta série na equação (7.6) obtemos a seguinte relação

$$b_1 = \left[\Theta - \frac{2\mu}{2|\tau| + 1}\right] b_0, \tag{7.7}$$

e a relação de recorrência

$$b_{i+2} = \frac{\Theta(i+1) - 2\mu + \Theta(2|\tau|+1)}{(i+2)(i+2+2|\tau|)} b_{i+1} + \frac{2i - \chi - \frac{\Theta^2}{4} + 2 + 2|\tau|}{(i+2)(i+2+2|\tau|)} b_i. \tag{7.8}$$

A partir da relação de recorrência acima temos que a série biconfluente de Heun torna-se um polinômio de grau n, impondo as duas condições a seguir [90]

$$\chi + \frac{\Theta^2}{4} - 2|\tau| - 2 = 2n; \qquad b_{n+1} = 0, \tag{7.9}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ Portanto, essas duas condições devem ser analisadas a fim de alcanar uma solução polinomial para equação biconfluente de Heun. A partir da condição $\chi + \frac{\Theta^2}{4} - 2|\tau| - 2 = 2n$, obtemos

$$\varepsilon_{n,\nu} = \frac{1}{2}\omega[n + |\tau| - \nu + 1] - \frac{2b^2}{m\omega^2} + \frac{k^2}{2m}, \tag{7.10}$$

que representa os níveis de energia de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido em uma região com campos elétrico e magnético cruzados sob a influência de potenciais escalares. Observe que a configuração do campo elétrico e magnético dada na equação (2.28) dá origem a um campo magnético efetivo uniforme na direção z que produz um análogo da quantização de Landau tal de acordo com a referência [1].

Comparando os níveis de energia (7.10) com o análogo dos níveis de Landau na referência [1], temos que a presença do potencial de Kratzer e o potencial escalar proporcional à distância radial modifica os níveis de energia e quebra a degenerecência dos níveis de Landau determinados na referência [1]. Por outro lado, nossa busca por soluções polinomiais para a série biconfluente de Heun será concluída quando analisarmos a seguinte condição $b_{n+1} = 0$ dada na equação (7.9). Para isso, consideremos a princípio $b_0 = 1$. Então, vamos construir um polinômio de primeiro grau. Para $n = 1$, geramos $b_2 = 0$ da condição $b_{n+1} = 0$. Desta forma, obtemos a seguinte expressão

$$\omega_{1,\nu}^3 - \frac{64mD^2a^2}{2|\tau|+1}\omega_{1,\nu}^2 + \frac{32bDa(4|\tau|+3)}{2|\tau|+1}\omega_{1,\nu} - \frac{32b^2(|\tau|+1)}{m} = 0, \tag{7.11}$$

onde temos uma equação algébrica de terceiro grau. Isso significa que, para obtermos um polinômio de primeiro grau para $H(y)$, nem todos os valores da frequência de cíclotron são permitidos, só os quais são determinados pela equação algébrica de terceiro grau [138]. Apesar de ter pelo menos uma solução real para a equação algébrica de terceiro grau (7.11), não escrevemos esta solução porque é muito longa. Além disso, para cada nível de energia n do sistema, podemos ter uma expressão diferente que determina os possíveis valores da frequência do cíclotron. Por esta razão, definimos $\omega = \omega_{n,\nu}$ na equação (7.10) e reescrevemos os níveis de energia (7.10) da seguinte forma:

$$\varepsilon_{n,\nu} = \frac{1}{2}\omega_{n,\nu}[n + |\tau| - \nu + 1] - \frac{2b^2}{m\omega_{n,\nu}^2} + \frac{k^2}{2m}, \tag{7.12}$$

que são os níveis de energia de uma partícula neutra com um momento de dipolo elétrico induzido em uma região com um campo magnético efetivo uniforme, onde existe a influência do potencial de Kratzer e um potencial escalar confinante linear.

7.2 Sob efeito de rotação

Nesta seção, iniciaremos novamente pela equação de Schrödinger independente do tempo dada por

$$\varepsilon\Psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi + i\frac{\alpha\lambda B_0}{2m}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + \frac{\alpha^2\lambda^2 B_0^2}{8m}r^2\Psi + i\Omega\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + \frac{\Omega\alpha\lambda B_0}{2}r^2\Psi - \frac{2Da}{r}\Psi + \frac{Da^2}{r}\Psi + br\Psi, \tag{7.13}$$

Considerando o Ansatz $\Psi(r,\varphi,z) = e^{il\varphi+ikz}G(r)$ na equação (7.13), definindo um novo parâmetro ϖ através da relação:

$$\varpi^2 = \omega^2 + 4\Omega\omega, \tag{7.14}$$

onde $\omega = \frac{\alpha\lambda B_0}{m}$ é a frequência do cíclotron como estabelecido na referência [1] e além da mudança de varável dada por:

$$x = \sqrt{\frac{m\varpi}{2}}\rho, \tag{7.15}$$

encontramos

$$G'' + \frac{1}{x}G' - \frac{\tau^2}{x^2}G - x^2G + \frac{\bar{\mu}}{x}G - \bar{\Theta}xG + \bar{\chi}G = 0, \tag{7.16}$$

onde $\tau^2 = l^2 + 2mDa^2$, $\bar{\mu} = \frac{4mDa}{\sqrt{\frac{m\varpi}{2}}}$, $\bar{\Theta} = \frac{2mb}{(\frac{m\varpi}{2})^{3/2}}$ e $\bar{\chi} = \frac{2}{m\varpi}[2m\varepsilon - k^2 + ml\omega + 2ml\Omega]$.

O comportamento da função $G(x)$ em $x \to \infty$ e $x \to 0$ permite-nos escrever esta função em termos de uma função desconhecida $\bar{H}(x)$ como

$$\bar{G}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{\bar{\Theta}x}{2}}x^{|\tau|}\bar{H}(x), \tag{7.17}$$

e então, substituindo a equação (7.17) na equação (7.16), obtemos

$$\bar{H}'' + \left[\frac{2|\tau|+1}{x} - \bar{\Theta} - 2x\right]\bar{H}' + \left[\bar{\chi} + \frac{\bar{\Theta}^2}{4} - 2|\tau| - 2 + \frac{2\bar{\mu} - \bar{\Theta}(2|\tau|+1)}{2x}\right]\bar{H} = 0, \tag{7.18}$$

que também se trata da equação biconfluente de Heun [1] e $\bar{H}(x) = H_B(2|\tau|, \bar{\Theta}, \chi +$

$\frac{\bar{\Theta}^2}{4}, -2\bar{\mu}; x)$ é a função biconfluente de Heun. Seguindo os passos da equação (7.6) até a equação (7.7), obtemos as relações:

$$b_1 = [\bar{\Theta} - \frac{2\bar{\mu}}{2|\tau| + 1}]b_0, \tag{7.19}$$

e

$$b_{i+2} = \frac{\bar{\Theta}(i+1) - 2\bar{\mu} + \bar{\Theta}(2|\tau| + 1)}{(i+2)(i+2+2|\tau|)}b_{i+1} + \frac{2i - \bar{\chi} - \frac{\bar{\Theta}^2}{4} + 2 + 2|\tau|}{(i+2)(i+2+2|\tau|)}b_i. \tag{7.20}$$

Além disso, nesse caso, temos que a série biconfluente de Heun torna-se um polinômio de grau n, impondo que [1]

$$\bar{\chi} + \frac{\bar{\Theta}^2}{4} - 2|\tau| - 2 = 2n; \qquad b_{n+1} = 0, \tag{7.21}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ Então, a partir da condição $\bar{\chi} + \frac{\bar{\Theta}^2}{4} - 2|\tau| - 2 = 2n$, obtemos o seguinte espectro de energia

$$\varepsilon_{n,l} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + 4\Omega\omega}[n + |\tau| + 1] - \frac{1}{2}\omega l - \frac{2\eta^2}{m(\omega^2 + 4\Omega\omega)} + \frac{k^2}{2m} - \Omega l, \tag{7.22}$$

onde $n = 1, 2, 3, ...$ e $l = 0, 1, 2, ...$ Portanto, a equação (7.22) corresponde aos níveis de energia do sistema num estado de referência não-inercial. Em contraste com o análogo dos níveis de Landau [1], as mudanças nos níveis de energia e na degenerecência deles são devidas aos efeitos de rotação, à presença do potencial de Kratzer e ao potencial escalar proporcional à distância radial. Além disso, os efeitos da rotação dão origem ao acoplamento entre o número quântico do momento angular e a velocidade angular, que é conhecido como o termo Page-Werner ***et al*** [114, 115, 133]. Note que tomando $\Omega \to 0$, recuperamos os níveis de energia (7.10). Seguindo a mesma análise da condição $b_{n+1} = 0$ feita para obter a equação (7.11), obtemos que os valores possíveis da frequência do cíclotron associados ao estado de energia mais baixa ($n = 1$) são determinados por

$$(\omega_{1,l}^2 + 4\Omega\omega_{1,l})^{3/2} - \frac{64mD^2a^2}{2|\tau|+1}(\omega_{1,l}^2 + 4\Omega\omega_{1,l}) + \frac{32\eta Da(4|\tau|+3)}{2|\tau|+1}(\omega_{1,l}^2 + 4\Omega\omega_{1,l})^{1/2} - \frac{32\eta^2(|\tau|+1)}{m} = 0. \tag{7.23}$$

Assim, podemos ver que os valores possíveis da frequência do cíclotron são determinados pelos números quânticos do sistema $\{n, l\}$ e os parâmetros que caracterizam a rotação, o potencial de Kratzer e o potencial escalar proporcional à distância radial. Novamente, podemos rotular $\omega = \omega_{n,l}$ e reescrever os níveis de energia (7.22) na forma:

$$\varepsilon_{n,l} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_{n,l}^2 + 4\Omega\omega_{n,l}}[n + |\tau| + 1] - \frac{1}{2}l\omega_{n,l} - \frac{2\eta^2}{m(\omega_{n,l}^2 + 4\Omega\omega_{n,l})} + \frac{k^2}{2m} - \Omega l, \tag{7.24}$$

que é a expressão geral do espectro de energia de uma partícula neutra com um momento de dipolo elétrico induzido em um estado de referência não-inercial sob a influência de uma região com um campo magnético efetivo uniforme, o potencial de Kratzer e um potencial escalar proporcional à distância radial.

7.3 Discussões dos resultados

Neste capítulo, investigamos os efeitos quâticos em uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido em referenciais em rotação e sem rotação quando esta partícula quântica está sujeita a potenciais escalares. Consideramos também uma configuração de campo de campos elétricos e magnéticos cruzados que dá origem a um campo magnético efetivo uniforme perpendicular ao plano $x - y$ e, então, buscamos soluções de estados ligados para a equação de Schrödinger. Em relação ao primeiro caso investigado, considerou-se um estado de referência na ausência de rotação, assim, obtivemos uma expressão geral para os níveis de energia do sistema, no qual constatamos que a presença do potencial de Kratzer e o potencial escalar proporcional à distância radial modifica os níveis de energia e quebra a degenerecência dos níveis de Landau da referência [1]. No entanto, em busca de soluções polinomiais para a equação biconfluente de Heun, vimos que há uma restrição sobre os possíveis valores da frequência de cíclotron caracterizada pela dependência dessa frequência com os números quânticos $\{n, l\}$ do sistema e os parâmetros associados ao potencial de Kratzer e o potencial escalar proporcional à distância radial. Exemplificando isso, observamos que os valores possíveis da frequência de cíclotron associados ao estado de energia mais baixa do sistema são determinados por uma equação algébrica de terceiro grau. Quanto ao segundo caso investigado, considera-se um referencial em rotação, obtendo-se assim uma expressão geral dos níveis de energia, onde se observa que a alteração dos níveis de energia e da degenerecência em contraste com os níveis de Landau [1] são devidas aos efeitos da rotação e à presença de potenciais escalares. Além disso, obtivemos uma contribuição para os níveis de energia na equação (7.24), dado pelo acoplamento do número quântico do momento angular e a velocidade angular, conhecido como o termo Page-Werner ***et al*** [114, 115, 133]. Em particular, vimos que os valores possíveis da frequência de cíclotron associados ao estado de energia mais baixa do sistema diferem do caso em referencial inercial como podemos constatar na equação (7.23).

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Ao longo deste trabalho sobre efeitos quânticos da interação de um dipolo elétrico induzido com campos externos, observou-se que é possível obter soluções da equação de Schrödinger para estados ligados. Para isso, analisamos o sistema análogo à quantização de Landau para uma partícula neutra sujeito aos potenciais escalares: proporcional à distância radial e tipo coulomb. Além disso, esse sistema foi investigado do ponto de vista de referenciais inerciais e não inerciais.

No terceiro capítulo, observamos que a influência do potencial linear modifica os níveis de energia do sistema e que o estado de menor enegia é determinado pelo numero quântico $n = 1$, isso é observado quando se compara ao espectro de energia associado ao análogo à quantizao de Landau para uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico induzido na presença de campos externos. Além disso, foi observado que apenas valores específicos da frequência angular são permitidos. Nesse sentido, determinamos as energia e as funções de onda radiais para o estado de menor energia.

No quarto capítulo, notamos o efeito quântico que mostra uma dependência da frequência angular com os números quânticos $\{n, l\}$, isso é devido a influência do potencial tipo coulomb sobre o sistema de landau para uma partícula neutra, assegurando novamente que a frequência angular só pode ter valores específicos. Dessa forma, calculamos como exemplos as frequências angulares, os níveis de energia e as funções de onda radiais associados ao primeiro estado excitado do sitema $n = 2$.

Em seguida, analisamos o sistema análogo à quantização de Landau sujeito a potenciais confinantes e em rotação com velocidade angular constante, isto é, em um referencial não inercial. Para isso, resolvemos a equação de Schrödinger e consequentemente obtemos soluções analíticas para estados ligados. Dessa forma, verificamos que, além de modificar os níveis de energia, os efeitos de rotação modificam a frequência de cíclotron do sistema. Além disso, observamos que os valores da frequência angular dependem dos parâmetros que caracterizam os potenciais escalares linear e Kratzer, da velocidade angular de rotação e dos números quânticos associados aos modos radiais e ao momento angular. Determinamos também uma contribuição para os níveis de energia decorrente do acoplamento entre a velocidade angular de rotação e o momento angular, que é conhecida na literatura como termo Page-Werner ***et al***. Vale salientar que, se tomarmos o limite $\mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{0}$, os efeitos de rotação desaparecem, isto é, recuperamos os efeitos das interações dos potenciais linear e Kratzer sobre o sistema análogo ao de Landau.

No sétimo capítulo, investigamos em referenciais inercias e não inerciais os efeitos quânticos em um dipolo elétrico sujeito a potenciais escalares os quais atuam simultaneamente. Na ausência de rotação, notamos a dependência dos níveis de energia com os parâmetros que caracterizam os potenciais linear e Kratzer e dos números quânticos do sistema. No referencial não inercial, observamos que, quando comparamos com os níveis de landau, há uma ateração dos níveis de energia e uma quebra da degenerecência que surgem dos efeitos de rotação e da presença de potenciais escalares. Além disso, obtivemos uma contribuição para os níveis de energia dada pelo termo Page-Werner ***et al***. Observamos também que os valores possíveis da frequência de cíclotron associados ao estado de energia mais baixa do sistema diferem do caso em referencial inercial.

Vale a pena observar que ao longo dessa discussão consideramos as correções relativísticas dos campos até $\mathcal{O}(v^2/c^2)$. Em uma abordagem futura pretendemos analisar esse sistema sob a influência das correções relativísticas que inclui termos de ordem $\mathcal{O}(v^2/c^2)$. Neste caso, efeitos relativísticos podem dar origem a uma massa efetiva [53] que pode ser interessante no estudo de sistemas com massa dependente da posição [54, 56]. Desejamos retomar a continuidade desse estudo num futuro próximo.

Apêndice A

Equação Biconfluente de Heun

Na literatura matemática, a forma canônica da equação biconfluente de Heun [90] é usualmente expressa da seguinte maneira:

$$xy'' + (1 + \alpha - \beta x - 2x^2)y' \left((\gamma - \alpha - 2)x - \frac{1}{2}[\delta + \beta(1 + \alpha)] \right) y = 0. \quad \text{(A.1)}$$

Trata-se de uma equação diferencial homogênea, linear e de segunda ordem definida no plano complexo. No espaço bidimensional de suas soluções específicas, pode-se escolher uma solução que seja finita em $x = 0$. Então a segunda solução linearmente independente comporta-se em $x = 0$ como $x^{-\alpha}$. A solução finita em $x = 0$ é usualmente denotada por $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ e denominada como equação biconfluente de Heun. Sua forma usual é expressa como [90]

$$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = \Sigma_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}{(1 + \alpha)_m} \frac{x^m}{m!}, \quad \text{(A.2)}$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \quad \text{(A.3)} \\ A_1 &= \frac{1}{2}(\delta + \beta(1 + \alpha)); \\ A_{m+2} &= \left((m + 1)\beta + \frac{1}{2}[\delta + \beta(1 + \alpha)] \right) A_{m+1} - (m + 1)(m + 1 + \alpha)(\gamma - 2 - \alpha - 2m)A_m. \end{aligned}$$

A partir da equação (3.15) e mediante as substituições a seguir

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{r}{\sqrt{\frac{\alpha\chi B_0}{2}}}; \\
\alpha &= 2|l|; \\
\beta &= \tau; \\
\gamma &= \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0} + \frac{\tau^2}{4}; \\
\delta &= 0,
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

com todos os parâmetros reais, restrigindo o domínio da equação ao semi-eixo real e, então, a equação (A.1) se transforma na equação (3.15).

No semi-eixo real, podemos definir

$$
N(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x) = H\left(2|l|, \tau, \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0} + \frac{\tau^2}{4}, 0, r\right), \tag{A.5}
$$

onde $H\left(2|l|, \tau, \frac{2\beta}{\alpha\chi B_0} + \frac{\tau^2}{4}, 0, r\right)$ é a solução formal para a equação (3.15).

Referências Bibliográficas

[1] C. Furtado, J. R. Nascimento, and L. R. Ribeiro. Landau quantization of neutral particles in an external field. *Physics Letters A*, 358(5):336–338, 2006.

[2] H. Wei, R. Han, and X. Wei. Quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field. *Physical review letters*, 75(11):2071, 1995.

[3] A. B. Kuklov and B. V. Svistunov. Counterflow superfluidity of two-species ultracold atoms in a commensurate optical lattice. *Physical review letters*, 90(10):100401, 2003.

[4] J. K. Pachos and E. Rico. Effective three-body interactions in triangular optical lattices. *Physical Review A*, 70(5):053620, 2004.

[5] L. M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin. Controlling spin exchange interactions of ultracold atoms in optical lattices. *Physical review letters*, 91(9):090402, 2003.

[6] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Physical Review Letters*, 81(15):3108, 1998.

[7] D. Jaksch and P. Zoller. Creation of effective magnetic fields in optical lattices: the hofstadter butterfly for cold neutral atoms. *New Journal of Physics*, 5(1):56, 2003.

[8] W. V. Liu, F. Wilczek, and P. Zoller. Spin-dependent hubbard model and a quantum phase transition in cold atoms. *Physical Review A*, 70(3):033603, 2004.

[9] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, and P. Zoller. 1 2-anyons in small atomic bose-einstein condensates. *Physical review letters*, 87(1):010402, 2001.

[10] B. Paredes, P. Zoller, and J. I. Cirac. Fractional quantum hall regime of a gas of ultracold atoms. *Solid state communications*, 127(2):155–162, 2003.

[11] C. Baxter. Cold rydberg atoms as realizable analogs of chern-simons theory. *Physical review letters*, 74(4):514, 1995.

[12] J. Z. Zhang. Testing spatial noncommutativity via rydberg atoms. *Physical review letters*, 93(4):043002, 2004.

[13] J. Z. Zhang. Angular momentum of supersymmetric cold rydberg atoms. *Physical review letters*, 77(1):44–47, 1996.

[14] J. K. Pachos. Quantum phases of electric dipole ensembles in atom chips. *Physics Letters A*, 344(6):441–446, 2005.

[15] Y. Aharonov and A. Casher. Topological quantum effects for neutral particles. *Physical Review Letters*, 53(4):319, 1984.

[16] X. G. He and B. H. J. McKellar. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Physical Review A*, 47(4):3424, 1993.

[17] M. Wilkens. Quantum phase of a moving dipole. *Physical review letters*, 72(1):5, 1994.

[18] C. A. de Lima Ribeiro, C. Furtado, and F. Moraes. Solid-state analog for the he-mckellar-wilkens quantum phase. *EPL (Europhysics Letters)*, 62(3):306, 2003.

[19] G. Spavieri. Quantum effect of the aharonov-bohm type for particles with an electric dipole moment. *Physical review letters*, 82(20):3932, 1999.

[20] R. E. Prange and S. M. Girvin. The quantum hall effect, springer verlag. *New York*, 1990.

[21] L. D. Landau. Diamagnetismus der metalle. *Zeitschrift für Physik*, 64(9-10):629–637, 1930.

[22] A. Comtet. On the landau levels on the hyperbolic plane. *Annals of physics*, 173(1):185–209, 1987.

[23] C. Grosche. The path integral on the poincaré upper half-plane with a magnetic field and for the morse potential. *Annals of Physics*, 187(1):110–134, 1988.

[24] G. V. Dunne. Hilbert space for charged particles in perpendicular magnetic fields. *Annals of Physics*, 215(2):233–263, 1992.

[25] M. Ericsson and E. Sjöqvist. Towards a quantum hall effect for atoms using electric fields. *Physical Review A*, 65(1):013607, 2001.

[26] L. R. Ribeiro, C. Furtado, and J. R. Nascimento. Landau levels analog to electric dipole. *Physics Letters A*, 348(3):135–140, 2006.

[27] C. R. Hagen. Comment on quantum phase of induced dipoles moving in a magnetic field. *Physical review letters*, 77(8):1656, 1996.

[28] H. Wei, X. Wei, and R. Han. Wei et al. reply. *Physical review letters*, 77(8):1657, 1996.

[29] A. Jacob, P. Öhberg, G. Juzeliūnas, and L. Santos. Landau levels of cold atoms in non-abelian gauge fields. *New Journal of Physics*, 10(4):045022, 2008.

[30] I. I. Satija, D. C. Dakin, J. Y. Vaishnav, and C. W. Clark. Physics of a two-dimensional electron gas with cold atoms in non-abelian gauge potentials. *Physical Review A*, 77(4):043410, 2008.

[31] J. Audretsch and V. D. Skarzhinsky. Aharonov-bohm scattering of neutral atoms with induced electric dipole moments. *Physics Letters A*, 241(1):7–13, 1998.

[32] G. Spavieri. Comment on quantum phase of a moving dipole. *Physical review letters*, 81(7):1533, 1998.

[33] M. Wilkens. Wilkens replies. *Physical Review Letters*, 81(7):1534, 1998.

[34] K. Bakke and C. et al Furtado. Persistent currents for a moving neutral particle with no permanent electric dipole moment. *Eur. Phys. J. B*, 87:222, 2014.

[35] M. Peshkin and A. Tonomura. The aharonov-bohm effect, vol. 340 of lecture notes in physics springer-verlag, 1989.

[36] N. Byers and C. N. Yang. Theoretical considerations concerning quantized magnetic flux in superconducting cylinders. *Physical review letters*, 7(2):46, 1961.

[37] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485, 1959.

[38] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, volume 3. Elsevier, 2013.

[39] E. J. Austin. Perturbation theory and padé approximants for a hydrogen atom in an electric field. *Molecular Physics*, 40(4):893–900, 1980.

[40] E. R. Vrscay. Algebraic methods, bender-wu formulas, and continued fractions at large order for charmonium. *Physical Review A*, 31(4):2054, 1985.

[41] J. Killingbeck. Quantum-mechanical perturbation theory. *Reports on Progress in Physics*, 40(9):963, 1977.

[42] J. Killingbeck. Perturbation theory without wavefunctions. *Physics Letters A*, 65(2):87–88, 1978.

[43] R. P. Saxena and V. S. Varma. Polynomial perturbation of a hydrogen atom. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15(4):L149, 1982.

[44] E. Castro and P. Martín. Eigenvalues of the schrödinger equation with coulomb potentials plus linear and harmonic radial terms. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(30):5321, 2000.

[45] R. L. Gibbs. The quantum bouncer. *American Journal of Physics*, 43(1):25–28, 1975.

[46] R. D. Desko and D. J. Bord. The quantum bouncer revisited. *American Journal of Physics*, 51(1):82–84, 1983.

[47] L. E. Ballentine. *Quantum mechanics: a modern development.* World Scientific Publishing Co Inc, 2014.

[48] G. Plante and A. F. Antippa. Analytic solution of the schrödinger equation for the coulomb-plus-linear potential. i. the wave functions. *Journal of mathematical physics*, 46(6):062108, 2005.

[49] J. H. Noble and U. D. Jentschura. Ijmpa 30, 1550002 (2015); ml glasser and n. shawagfeh. *J. Math. Phys*, 25:2533, 1984.

[50] M. L. Glasser and N. Shawagfeh. Dirac equation for a linear potential. *Journal of mathematical physics*, 25(8):2533–2537, 1984.

[51] H. Tezuka and A. I. P. Advances. 3 (2013) 082135; jf gunion, lf li. *Phys. Rev. D*, 12:3583, 1975.

[52] J. F. Gunion and L. F. Li. Relativistic treatment of the quark-confinement potential. *Physical Review D*, 12(11):3583, 1975.

[53] P. L. Ferreira. Two-body dirac equation with a scalar linear potential. *Physical Review D*, 38(8):2648, 1988.

[54] F. Dominguez-Adame and M. A. González. Solvable linear potentials in the dirac equation. *EPL (Europhysics Letters)*, 13(3):193, 1990.

[55] I. C. Fonseca and K. Bakke. Rotating effects on an atom with a magnetic quadrupole moment confined to a quantum ring. *The European Physical Journal Plus*, 131(3):1–6, 2016.

[56] G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, and W. Greiner. Solution of the dirac equation for scalar potentials and its implications in atomic physics. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 28(9):1389–1396, 1973.

[57] A. Verçin. Two anyons in a static, uniform magnetic field. exact solution. *Physics Letters B*, 260(1-2):120–124, 1991.

[58] J. Myrheim, E. Halvorsen, and A. Vercin. Two anyons with coulomb interaction in a magnetic field. *Physics Letters B*, 278(1-2):171–174, 1992.

[59] E. R. F. Medeiros and E. R. B. de Mello. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *The European Physical Journal C*, 72(6):2051, 2012.

[60] M. Dineykhan, G. V. Efimov, G. Ganbold, and S. N. Nedelko. *Oscillator representation in quantum physics*, volume 26. Springer Science & Business Media, 2008.

[61] M. A. Núñez. Accurate computation of eigenfunctions for schrödinger operators associated with coulomb-type potentials. *Physical Review A*, 47(5):3620, 1993.

[62] A. de Souza Dutra. Conditionally exactly soluble class of quantum potentials. *Physical Review A*, 47(4):R2435, 1993.

[63] P. Gribi and E. Sigmund. Exact solutions for a quasi-one-dimensional coulomb-type potential. *Physical Review B*, 44(8):3537, 1991.

[64] F. Gesztesy and B. Thaller. Born expansions for coulomb-type interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 14(3):639, 1981.

[65] J. A. Reyes and M. del Castillo-Mussot. 1d schrödinger equations with coulomb-type potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(10):2017, 1999.

[66] Y. Ran, L. Xue, S. Hu, and R. K. Su. On the coulomb-type potential of the one-dimensional schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(50):9265, 2000.

[67] Y. Chargui, A. Dhahbi, and A. Trabelsi. Exact analytical treatment of the asymmetrical spinless salpeter equation with a coulomb-type potential. *Physica Scripta*, 90(1):015201, 2014.

[68] S. M. Ikhdair, B. J. Falaye, and M. Hamzavi. Nonrelativistic molecular models under external magnetic and ab flux fields. *Annals of Physics*, 353:282–298, 2015.

[69] I. I. Guseinov and B. A. Mamedov. Evaluation of multicenter one-electron integrals of noninteger u screened coulomb type potentials and their derivatives over noninteger n slater orbitals. *The Journal of chemical physics*, 121(4):1649–1654, 2004.

[70] I. I. Guseinov. Unified treatment of multicenter integrals of integer and noninteger u yukawa-type screened coulomb type potentials and their derivatives over slater orbitals. *The Journal of chemical physics*, 120(20):9454–9457, 2004.

[71] A. Kratzer. Z. physik 3 (1920) 289. *Ann. Phys*, 67:127, 1922.

[72] L. Dantas, C. Furtado, and A. L. S. Netto. Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Physics Letters A*, 379(1):11–15, 2015.

[73] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Mechanics, vol. 1. *Course of theoretical physics*, 3, 1976.

[74] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Statistical physics, 3rd. *Edition (Part 1 Oxford: Pergamon Press. 1980)*, 1980.

[75] C. H. Tsai and D. Neilson. New quantum interference effect in rotating systems. *Physical Review A*, 37(2):619, 1988.

[76] J. Anandan. J. suzuki in relativity in rotating frames, relativistic physics in rotating reference frame.

[77] A. Kratzer. Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 3(5):289–307, 1920.

[78] M. R. Setare and E. Karimi. Algebraic approach to the kratzer potential. *Physica Scripta*, 75(1):90, 2006.

[79] G. de A Marques and V. B. Bezerra. Non-relativistic quantum systems on topological defects spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 19(5):985, 2002.

[80] A. B. Oliveira and K. Bakke. On the effects on a landau-type system for an atom with no permanent electric dipole moment due to a coulomb-type potential. *Annals of Physics*, 365:66–72, 2016.

[81] A. B. Oliveira and K. Bakke. On the landau system for an atom with no permanent electric dipole moment subject to a linear confining potential. *International Journal of Modern Physics A*, 31(06):1650019, 2016.

[82] L. D. Landau and E. M. Lifshits. Quantum mechanics. non-relativistic theory, 1977, 1989.

[83] R. E. Prange. Sm girvin the quantum hall eect, 1990.

[84] T. Holstein, R. E. Norton, and P. Pincus. de haas-van alphen effect and the specific heat of an electron gas. *Physical Review B*, 8(6):2649, 1973.

[85] J. L. Noronha and C. Wotzasek. Testing quantum duality using cold rydberg atoms. *Physics Letters B*, 602(1):144–148, 2004.

[86] L. Dantas and C. Furtado. Induced electric dipole in a quantum ring. *Physics Letters A*, 377(41):2926–2930, 2013.

[87] K. Bakke, L. Ribeiro, and C. Furtado. Landau quantization for an induced electric dipole in the presence of topological defects. *Open Physics*, 8(6):893–899, 2010.

[88] K. Bakke and H. Belich. On the influence of a rashba-type coupling induced by lorentz-violating effects on a landau system for a neutral particle. *Annals of Physics*, 354:1–9, 2015.

[89] K. Bakke and H. Belich. A landau-type quantization from a lorentz symmetry violation background with crossed electric and magnetic fields. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 42(9):095001, 2015.

[90] A. Ronveaux and F. M. Arscott. *Heun's differential equations*. Oxford University Press, 1995.

[91] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical methods for physicists international student edition*. Academic press, 2005.

[92] K. Bakke. Bound states for a coulomb-type potential induced by the interaction between a moving electric quadrupole moment and a magnetic field. *Annals of Physics*, 341:86–93, 2014.

[93] P. M. T. Barboza and K. Bakke. An angular frequency dependence on the aharonov–casher geometric phase. *Annals of Physics*, 361:259–265, 2015.

[94] S. M. Ikhdair and M. Hamzavi. Spectral properties of quantum dots influenced by a confining potential model. *Physica B: Condensed Matter*, 407(24):4797–4803, 2012.

[95] A. D. Alhaidari. Solutions of the nonrelativistic wave equation with position-dependent effective mass. *Physical Review A*, 66(4):042116, 2002.

[96] A. D. Alhaidari. Solution of the dirac equation with position-dependent mass in the coulomb field. *Physics Letters A*, 322(1):72–77, 2004.

[97] J. Yu and S. H. Dong. Exactly solvable potentials for the schrödinger equation with spatially dependent mass. *Physics Letters A*, 325(3):194–198, 2004.

[98] C. Furtado, B. G. C. da Cunha, F. Moraes, E. R. B. de Mello, and V. B. Bezzerra. Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, 195(1):90–94, 1994.

[99] S. Mil'Shtein. Application of dislocation-induced electric potentials in si and ge. *Le Journal de Physique Colloques*, 40(C6):C6–207, 1979.

[100] M. Kittler, X. Yu, T. Mchedlidze, T. Arguirov, O. F. Vyvenko, W. Seifert, M. Reiche, T. Wilhelm, M. Seibt, O. Voß, et al. Regular dislocation networks in silicon as a tool for nanostructure devices used in optics, biology, and electronics. *Small*, 3(6):964–973, 2007.

[101] Y. Ran, Y. Zhang, and A. Vishwanath. One-dimensional topologically protected modes in topological insulators with lattice dislocations. *Nature Physics*, 5(4):298–303, 2009.

[102] H. Asada and T. Futamase. Propagation of gravitational waves from slow motion sources in a coulomb-type potential. *Physical Review D*, 56(10):R6062, 1997.

[103] C. L. Critchfield. Scalar potentials in the dirac equation. *Journal of Mathematical Physics*, 17(2):261–266, 1976.

[104] K. Bakke. Some quantum aspects of a particle with electric quadrupole moment interacting with an electric field subject to confining potentials. *International Journal of Modern Physics A*, 29(23):1450117, 2014.

[105] K. Bakke. On a particle with electric quadrupole moment interacting with a magnetic field subject to a harmonic and a linear confining potentials. *The European Physical Journal Plus*, 130(7):129, 2015.

[106] I. C. Fonseca and K. Bakke. Quantum aspects of a moving magnetic quadrupole moment interacting with an electric field. *Journal of Mathematical Physics*, 56(6):062107, 2015.

[107] H. W. Crater, J. H. Yoon, and C. Y. Wong. Singularity structures in coulomb-type potentials in two-body dirac equations of constraint dynamics. *Physical Review D*, 79(3):034011, 2009.

[108] K. Bakke and C. Furtado. On the klein–gordon oscillator subject to a coulomb-type potential. *Annals of Physics*, 355:48–54, 2015.

[109] V. R. Khalilov. Relativistic aharonov-bohm effect in the presence of planar coulomb potentials. *Physical Review A*, 71(1):012105, 2005.

[110] F. M. Arscott. *Heun's differential equations*. Clarendon Press, 1995.

[111] G. Sagnac. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme. *CR Acad. Sci.*, 157:708–710, 1913.

[112] G. Sagnac. Cr acad. sci. 157 708 sagnac g 1913. *CR Acad. Sci*, 157:1410, 1913.

[113] E. J. Post. Sagnac effect. *Reviews of Modern Physics*, 39(2):475, 1967.

[114] L. A. Page. Effect of earth's rotation in neutron interferometry. *Physical Review Letters*, 35(8):543, 1975.

[115] S. A. Werner, J. L. Staudenmann, and R. Colella. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Physical Review Letters*, 42(17):1103, 1979.

[116] J. Anandan. Gravitational and rotational effects in quantum interference. *Physical Review D*, 15(6):1448, 1977.

[117] U. Bonse and T. Wroblewski. Measurement of neutron quantum interference in noninertial frames. *Physical Review Letters*, 51(16):1401, 1983.

[118] Y. Aharonov and G. Carmi. Quantum aspects of the equivalence principle. *Foundations of Physics*, 3(4):493–498, 1973.

[119] U. R. Fischer and N. Schopohl. Hall state quantization in a rotating frame. *EPL (Europhysics Letters)*, 54(4):502, 2001.

[120] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa. Effects of mechanical rotation on spin currents. *Physical review letters*, 106(7):076601, 2011.

[121] D. Chowdhury and B. Basu. Effect of spin rotation coupling on spin transport. *Annals of Physics*, 339:358–370, 2013.

[122] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa. Spin-dependent inertial force and spin current in accelerating systems. *Physical Review B*, 84(10):104410, 2011.

[123] R. Merlin. Rotational anomalies of mesoscopic rings. *Physics Letters A*, 181(5):421–423, 1993.

[124] G. Vignale and B. Mashhoon. Persistent current in a rotating mesoscopic ring. *Physics Letters A*, 197(5-6):444–448, 1995.

[125] L. H. Lu and Y. Q. Li. Effects of an optically induced non-abelian gauge field in cold atoms. *Physical Review A*, 76(2):023410, 2007.

[126] K. Bakke. Analog landau-he-mckellar-wilkens quantization due to noninertial effects of the fermi-walker reference frame. *Physical Review A*, 81(5):052117, 2010.

[127] K. Bakke. On the rotating effects and the landau-aharonov-casher system subject to a hard-wall confining potential in the cosmic string spacetime. *International Journal of Theoretical Physics*, 54(7):2119–2126, 2015.

[128] B. R. Iyer. Dirac field theory in rotating coordinates. *Physical Review D*, 26(8):1900, 1982.

[129] J. R. Letaw and J. D. Pfautsch. Quantized scalar field in rotating coordinates. *Physical Review D*, 22(6):1345, 1980.

[130] K. Konno and R. Takahashi. Spacetime rotation-induced landau quantization. *Physical Review D*, 85(6):061502, 2012.

[131] J. A. Yeazell, G. Raithel, L. Marmet, H. Held, and H. Walther. Observation of wave packet motion along quasi-landau orbits. *Physical review letters*, 70(19):2884, 1993.

[132] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2016.

[133] F. W. Hehl and W. T. Ni. Inertial effects of a dirac particle. *Physical Review D*, 42(6):2045, 1990.

[134] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The classical theory of fields (course of theoretical physics series, volume 2,), 1980.

[135] K. Bakke. Rotating effects on the dirac oscillator in the cosmic string spacetime. *General Relativity and Gravitation*, 45(10):1847–1859, 2013.

[136] K. Bakke. Noninertial effects on a dirac neutral particle inducing an analogue of the landau quantization in the cosmic string spacetime. *Brazilian Journal of Physics*, 42(5-6):437–444, 2012.

[137] R. J. LeRoy and R. B. Bernstein. Dissociation energy and long-range potential of diatomic molecules from vibrational spacings of higher levels. *The Journal of Chemical Physics*, 52(8):3869–3879, 1970.

[138] I. C. Fonseca and K. Bakke. On an atom with a magnetic quadrupole moment subject to harmonic and linear confining potentials. In *Proc. R. Soc. A*, volume 471, page 20150362. The Royal Society, 2015.