UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

FRANCISCO LOPES DA SILVA JÚNIOR

CONDE-PB

2017.2

FRANCISCO LOPES DA SILVA JÚNIOR

SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Trabalho apresentado à Universidade Federal da Paraíba como pré-requisito parcial para a obtenção do certificado de conclusão da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.

Conde – PB
2017

FRANCISCO LOPES DA SILVA JÚNIOR

SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a distância da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Aprovado em: ___05__/__12__/__2017___

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Daniel Marinho Pellegrino
Orientador

Prof. Moisés Viana F. de Oliveira
Examinador Interno – UFPB/VIRTUAL

Prof. Glauber Dantas Morais
Examinador Interno – UFPB/VIRTUAL

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva Júnior, Francisco Lopes da.
Sobre o teorema fundamental do cálculo / Francisco Lopes da Silva Júnior. - João Pessoa, 2017.
32 f. : il.

Orientação: Pellegrino, Daniel Marinho.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN-EaD.

1. Cálculo. 2. Teorema fundamental do cálculo. 3. Matemática moderna. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Título.

UFPB/BC

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e familiares e a todas as pessoas que, de maneira direta ou indireta, acreditaram que eu seria capaz. Aos meus professores, que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico e, em especial, a minha esposa Silvana Laece, que tanto me estimulou a continuar na caminhada para alcançar meu objetivo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a **Deus,** por ter me dado forças durante toda essa longa e dura caminhada. Tenho a consciência de que sem Ele nada seria possível.

Agradeço aos meus pais **Francisco Lopes (*in memorian*)** e **Maria das Dores** e a minha esposa **Silvana Laece,** que durante esse processo de aquisição de conhecimentos estiveram sempre ao meu lado, me apoiando nos momentos difíceis, com palavras de motivação.

Aos colegas **Alexandro, Severino Venâncio (Lito de Bel) e Stefan,** que sempre estiveram comigo, ao longo de toda vida acadêmica.

Agradeço ao professor **Daniel,** pelas orientações para a construção deste trabalho. Sem elas, não seria possível concluí-lo.

Agradeço e parabenizo a **UFPB,** por todo o curso, pelo acompanhamento e pela equipe de professores e **tutores,** que sempre me apoiaram. Em especial, ao Tutor Presencial do polo do Conde–PB, João Ewerton.

"A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode". Isso fica sendo a minha última e mais elevada descoberta.

Isaac Newton

RESUMO

A escolha do tema apresentado no presente trabalho deveu-se a sua grande importância para as diversas áreas do conhecimento e, principalmente, as suas várias aplicações. O Teorema Fundamental do Cálculo é um princípio fundamental da Matemática moderna, descoberto há cerca de 300 anos, e possui uma aplicabilidade enorme em diferentes áreas.

Por ser muito prático e de fácil entendimento, quando aplicado no dia a dia, logo percebemos a sua funcionalidade. Desse modo, a pretensão deste trabalho é apresentar o contexto histórico em que este teorema foi descoberto, bem como, demonstrá-lo.

Palavras chave: Cálculo, Teorema Fundamental do Cálculo

ABSTRACT

The choice of this theme was due to its great importance for the different areas of knowledge and especially its use in daily life. The Fundamental Theorem of Calculus is a fairly simple principle and has a huge applicability in different areas.

Because it is very practical and easy to understand, when applied on a daily basis, we soon realize its functionality. The purpose of this paper is precisely to demonstrate the Fundamental Theorem of Calculus.

Throughout this work, we will see that this theorem is fantastic and its use quite simple, which presents very significant and accurate results

Keywords: Calculus, Daily, Knowledge, Theorem

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação

PB – Paraíba

RH – Recursos Humanos

SESI - Serviço Social da Indústria

SUMÁRIO

1. MEMORIAL DO ACADÊMICO

1.1 Histórico da formação escolar

A minha vida escolar começou no ano de 1982, aos seis anos de idade, quando iniciei os meus estudos na “Escola Luluzinha”, situada no bairro Castelo Branco III, em João Pessoa – Capital da Paraíba. Foi nessa escola onde aprendi as primeiras letras e palavras. É claro que em casa já tinha aprendido algumas coisas, principalmente, sobre respeito e obediência aos mais velhos.

Fui aluno da professora Zenaide, que até hoje mora perto da minha casa. Dessa época, lembro-me com bastante saudade, pois me vem à memória a figura de meu querido avô, que sempre levava a mim e a minha irmã Mariana para a escola. A escola Luluzinha tinha apenas o nível da alfabetização, então, aos nove anos de idade comecei a estudar em outra instituição, agora uma da rede pública.

Estudei a 1ª série do primário na “Escola Estadual de 1º grau Fenelon Câmara”, durante todo ano de 1986. Lembro-me de um fato bastante engraçado, pois, terminando o ano, ouvi quando a minha mãe falou ao meu pai que eu deveria ser matriculado na 2ª série, então eu perguntei: “Eu vou ter que estudar de novo?”. Mal sabia que aquele era apenas o começo. Na escola Fenelon Câmara cursei até a antiga 4ª série do 1º grau (primário). Aos 14 anos de idade fui estudar a 5ª série no “colégio 2001 Cepruni”, na época, um dos melhores em relação ao ensino. Lá vivenciei um período de grande aprendizado, tanto em termos de conhecimento como de vida, por ter sido bolsista, já que meu pai era funcionário daquela escola.

Foram momentos marcantes e importantes para a minha vida, como pessoa e como estudante. Durante esse período, vivenciei, junto a meu pai, valores de amizade e de respeito com o próximo; fiz boas amizades que, infelizmente, já não tenho mais o contato. No “Colégio 2001 Cepruni” estudei da 5ª série do 1º grau até o 3º ano do 2º grau, somando assim, sete anos de estudo nesse local.

No ano de 1996, com vinte anos de idade, fiz o vestibular para Engenharia Civil, porém não fui aprovado, fazendo uma reopção de curso, para cursar Licenciatura em Química.

1.2 Histórico da Formação Universitária

Na Universidade, estudava no período da noite. Nessa época, o ensino de um modo geral passou por mudanças, a partir da atualização da LDB – Lei nº 9394/96 –, que, entre outras coisas modificou a nomenclatura do ensino. O antigo 1º grau passou a ser chamado de Ensino Fundamental, de 1ª série a 8ª série, e o 2º grau, de Ensino Médio, abarcando de 1º a 3º ano.

No curso de química adquiri bastante aprendizado e fiz muitas amizades, no entanto, a minha falta de dedicação e motivação fez com que eu não levasse o curso tão a sério. Faltava muitas aulas, mas, graças a esse curso consegui meu primeiro emprego, como professor estagiário do SESI, no programa do Telecurso 2000, na cidade de Bayeux. Além desse estágio, também trabalhei na sede dos Correios e Telégrafos, situada na BR 230. Nos dois lugares construí laços de amizade com os alunos, que em sua maioria eram adultos, de modo que a relação de respeito e atenção nas aulas sempre existiu. O fato de ter que trabalhar fez com que eu passasse a frequentar a Universidade durante o período diurno, porém, como a maioria das disciplinas eram ministradas apenas à noite, minha falta de motivação continuou a mesma, pois chegava muito cansado do trabalho. Em consequência, desisti do curso e fiquei um tempo sem estudar.

No ano de 2012, por motivação de minha ex-chefe, Edna Honório, fiz vestibular para o Polo da UFPB Virtual do Conde/PB, para o curso de Licenciatura em Matemática à distância, para o qual fui aprovado, tendo iniciado no primeiro período de 2013. Ao longo do curso passei por inúmeras dificuldades e muitas vezes senti uma grande desmotivação, por não me sentir capaz. Isso se deu pelo fato de que, muitas vezes, no curso de modalidade Virtual o aluno precisa da força de vontade para a pesquisa e ajuda de alguns colegas, quando tem dificuldades, já que não tem o contato presencial do professor. Chegando à conclusão do curso, com muita força de vontade e o apoio de várias pessoas que acompanharam a minha trajetória, posso dizer que os objetivos só são alcançados quando temos determinação para isto.

1.3 Histórico Formação Profissional

A minha formação profissional começou no ano de 2003, após minha aprovação no concurso da cidade de Conde – PB, para a função de Auxiliar Administrativo, cargo que desenvolvo até hoje, somando quatorze anos e sete meses.

Ao longo de todos esses anos de trabalho, pude aprender bastante coisa da área administrativa e educacional, já que fui nomeado para trabalhar na Secretaria de Educação. Fiz muitas amizades e ainda continuo fazendo; vivenciei muitas alegrias e também algumas tristezas, que muitas vezes nos deixam sem forças para continuar a vida. Além dos amigos de trabalho, o tempo também me levou alguns familiares, dos quais até hoje tenho saudades.

Por ter trabalhado em vários setores da Secretaria de Educação, fui aprendendo um pouco com cada pessoa. Passei pelo RH da Secretaria de Educação do Município e, por fim, fui trabalhar numa escola. Foi nesta escola onde, no ano de 2006, comecei verdadeiramente a desenvolver a atividade que desempenho até hoje, que é lida com a documentação escolar.

Devo muito a minha chefe do RH, Edna Honório (*in memorian*), que me motivou a fazer o curso de Matemática na UFPB Virtual, no polo da cidade de Conde – PB, o qual agora estou concluindo, para que assim comece a exercer a profissão de professor.

2. INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi desenvolvido com a finalidade de enfatizar a importância do Teorema Fundamental do Cálculo; os conceitos de Limites, de derivadas e integrais, principalmente, para o cálculo de área sobre uma dada curva. Partimos da ideia de que dois grandes problemas motivaram o desenvolvimento do Cálculo:

> "Em primeiro lugar, o problema das tangentes: determinar as retas tangentes a uma curva dada, o problema fundamental do calculo diferencial. Em segundo lugar, o problema da quadratura: determinar a área dentro de uma curva dada, o problema fundamental do calculo integral". (COURANT, 2000, p.481).

Newton e Leibniz merecem todo destaque na história do Cálculo, por terem sido os pioneiros a estabelecer estreita ligação entre esses dois problemas. Em seus estudos, foram capazes de unificar novos métodos científicos associados à nova simbologia e à geometria analítica de Descartes.

Diante disso, o objetivo geral deste trabalho é fazer uma breve apresentação sobre o desenvolvimento do Cálculo e a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo.

Especificamente, buscamos:

- Discutir sobre o desenvolvimento do Cálculo através de Newton e Leibniz;
- Evidenciar a relação entre derivadas e integrais (apresentando d como inverso de $\int$.);
- Apresentar exemplos do cálculo da área usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Para uma melhor compreensão do trabalho, ele foi estruturado e subdivido da seguinte maneira: A primeira parte foi constituída pela apresentação do Memorial acadêmico do estudante. Em seguida expomos esta introdução, que indica à importância, justificativa e escolha da tema, bem como evidencia a importância do Teorema Fundamental do Cálculo e os objetivos do estudo.

A terceira parte foi destinada a discussão do Referencial Teórico. Subdividida em:

- Um pouco da História de Newton e Leibniz
- Demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo

- Exemplos e Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

A quarta parte foi destinada as considerações finais a respeito do trabalho.

Na quinta e ultima parte apresentamos o referencial bibliográfico.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir, descrevemos um pouco da parte histórica, relativa ao aparecimento do Cálculo.

3.1 Um pouco da história de Newton e Leibniz

Isaac Newton nasceu em 1642, na cidade de Woolsthorpe Manor, Reino Unido, curiosamente, no mesmo ano da morte de Galileu Galilei. Seu pai morreu pouco antes dele nascer e sua mãe casou-se novamente, quando ele tinha apenas três anos de idade. Foi educado pela avó e por um tio do lado materno, que percebeu no jovem Newton um grande talento para matemática e acabou por convencer sua irmã a matriculá-lo em Cambridge. Ao ingressar no Trinity College, em 1661, aos19 anos, provavelmente não passava por sua mente ser um matemático, já que inicialmente a fascinação durante toda a sua vida foi a química.

Com o passar do tempo, após seus estudos sobre vários matemáticos, como Euclides, Descartes, Fermat, e sobre as obras de Galileu e Kepler, entre outros, despertou em si um gosto por esta ciência. Aos 22 anos, atingiu sua maior fronteira do conhecimento matemático, fazendo assim, contribuições próprias para a matemática.

Com o fechamento da Trinity College, por causa da peste, Newton vivenciou seu período mais produtivo de descoberta matemática. Fez quatro de suas principais descobertas: **(1) o teorema binomial, (2) o Cálculo (3) a lei da gravitação e (4) a natureza das cores.**

Como o nosso estudo tem como foco o Cálculo, vamos aqui nos deter a esta descoberta. Newton é citado como o efetivo inventor do cálculo, porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área, através de sua nova análise infinita.

Suas descobertas sobre o método das séries infinitas e o cálculo são datadas entre os anos de 1665-1666 e circularam mais entre amigos, dentre os quais temos a importante figura de Leibniz que, assim como Newton, chegou às mesmas conclusões, porém, sem estabelecer ligação direta com os estudos de Newton, que foram feitos anos antes. Em seus últimos anos de vida, Newton recebeu muitas honrarias: foi eleito associado estrangeiro da Academia *des*

Sciences; em 1699, tornou-se presidente da *Royal Society*, posto este que ocupou até o fim de sua vida, e em 1705 recebeu um título de nobreza da Rainha Anne.

Em 1695, um acontecimento deixou uma grande dúvida com relação ao cálculo inventado por Newton, quando ele ficou sabendo que, na Holanda, tal feito era considerado como uma descoberta de Leibniz. Este fato fez com que Nicola F. Duillier, um obscuro matemático suíço que vivia na Inglaterra, sugerisse, em um artigo para a *Royal Society*, que Leibniz poderia ter tirado suas ideias sobre o cálculo das descobertas de Newton, acusando-o, assim, de plágio.

Leibniz nasceu quatro anos depois de Newton, em 1646, em Leipzig, na Alemanha. Aos 15 anos de idade entrou na Universidade e aos 17 já era bacharel. Estudou teologia, direito, filosofia e matemática, na Universidade, e por isso é muitas vezes considerado como o último sábio a ter um conhecimento universal.

Em visita a Londres, no ano de 1676, trouxe consigo sua máquina de calcular. Foi durante esses anos de suas visitas a Londres que o Cálculo Diferencial tomou forma. Ainda no mesmo ano de 1676, Leibniz chegou à mesma conclusão a que Newton tinha chegado vários anos antes – ele possuía um método que era altamente importante, por causa de sua generalidade, sendo aplicável para funções racionais ou irracionais, algébricas ou transcendentes.

A grande contribuição de Leibniz para a matemática, sem dúvidas, foi o Cálculo. Porém, outros aspectos de sua obra merecem menção, como o método de determinantes. Foi o primeiro matemático a usar o ponto para a multiplicação e a escrever proporções na forma “a : b = c : d”, além do uso de “:” para a divisão. Foi graças a Newton e Leibniz que o sinal “=” de recorde triunfou sobre o símbolo $\propto$ de Descartes.

Ainda das notações de Leibniz, temos os símbolos “:” para “é semelhantes a” e "$\cong$" para “é congruente a”.

No entanto, seu maior triunfo no campo da notação foram os símbolos para diferenciação *dx* e integração $\int$. Ele não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, praticamente no mesmo sentido em que é usado hoje.

Suas contribuições para a ciência foram ofuscadas pelas de Newton, que incluíam a maior formulação matemática conseguida até então.

Diante da acusação de plágio, Leibniz protestou em um artigo escrito para a *Royal Society,* afirmando ter prioridade na publicação das descobertas sobre o cálculo.

Hoje em dia é bem sabido que ambos tomaram caminhos diferentes para chegar as mesmas conclusões, porém, sem que nenhum tivesse ligação ou conhecimento direto acerca dos estudos do outro sobre o cálculo.

3.2 Demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

O Cálculo Diferencial e Integral tem, em sua base para as operações, o uso de um teorema, sem o qual seria quase impossível realizar tais operações, pois sem ele os cálculos são muito trabalhosos. Ele é conhecido, principalmente no meio universitário, como: Teorema Fundamental do Cálculo.

James Stewart, em seu livro publicado em 2003, dá todos os créditos da ideia que nos leva a este teorema fundamental ao matemático inglês Isaac Barrow, professor de Newton na Thinity College, o qual ele veio a substituir, com relação aos estudos e feitos na matemática. Porém, a primeira prova da qual temos conhecimento é atribuída ao matemático escocês James Gregory.

O Teorema Fundamental permite calcular a área de uma figura plana de uma forma muito prática, sem a necessidade de se calcular a soma de áreas de um número indefinidamente grande de retângulos, como é possível verificar na figura 1, mas sim usando a primitiva da função envolvida. Para tanto, primeiramente devemos definir os conceitos de limite, derivadas e integrais.

Definição formal de Limite:

Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto possivelmente x_0. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Se, para cada número $\varepsilon > 0$, existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que todos os valores de x.

$$0 < |x - x_0|\, \delta \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição de derivada de uma função:

A derivada de uma função y = f(x) em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Definimos a integral definida de f em $[a, b]$ como sendo:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta x$$

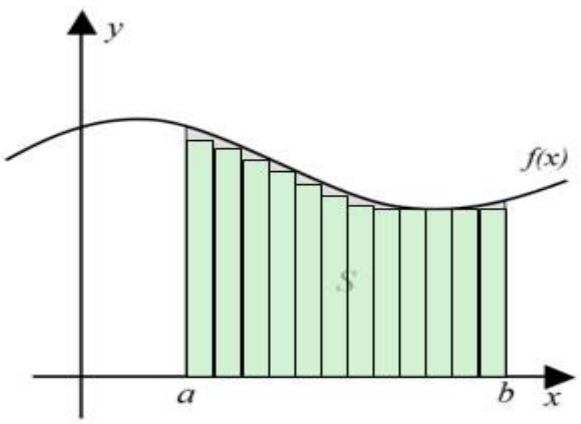
Vamos representá-lo pelo símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Devemos lê-lo como integral de $f(x)$ entre a e b. Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta x$$

Figura 1
Área sob uma Curva – representação com retângulos



Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/area-sob-uma-curva.htm

O Teorema Fundamental do Cálculo pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$.

Parte I: Se a função F é definida por

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx \quad para\ todo\ x \in [a, b]$$

Então F'(x) = f(x). Para todo x em $[a\ , b]$, então F(x) é uma antiderivada.

Parte II: Se G é qualquer primitiva de f então

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Agora, vejamos que

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

De fato, acabamos de provar que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Precisamos investigar o seguinte limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

que por definição é $F'(x)$.

Para tanto, precisamos calcular os seguintes limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

e vamos mostrar que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Assim,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

Pela propriedade de integrais definidas, temos:

$$\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{(x+h) - x} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

O Teorema do Valor Médio nos diz que:

Suponha que f seja uma função contínua no intervalo aberto (a,b), então existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ou equivalentemente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Daí, aplicando o Teorema do Valor Médio, temos:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{(x+h) - x}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\theta(h))$$

com $x \leq \theta(h) \leq x + h$.

Por outro lado, note que

$$\lim_{h \to 0^+} x = x \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^+} x + h = x, \quad \text{logo} \quad \lim_{h \to 0^+} \theta(h) = x$$

Logo, pelo Teorema do Confronto, tem-se

$$\lim_{h \to 0^+} f\big(\theta(h)\big) = x.$$

Usando a continuidade de f, note que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f\big(\theta(h)\big) = f\left(\lim_{h \to 0^+} \theta(h)\right) = f(x)$$

Analogamente, $\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,.$$

Ou seja,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x), \ \ \text{e consequentemente} \ \ F'(x) = f(x)$$

Segundo Swokowshi,

> Seja F uma antiderivada de f em um intervalo I. Se G é uma outra antiderivada de f em I, então $G(x) = f(x) + C$. Para alguma constante C e todo x em I
>
> (SWOKOWSHI, 1994,Teorema 5.2, pág. 305)

$$G(x) = C + \int_a^x f(t)dt$$

Para alguma constante C. Logo

$$G(b) - G(a) = \left(C + \int_a^b f(t)dt\right) - \left(C + \int_a^a f(t)dt\right) = \int_a^b f(t)dt$$

3.3 Exemplos da Aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo

O Cálculo é, sem dúvidas, um dos maiores feitos da humanidade. Fazendo uma junção entre ideias geométricas e ideias analíticas, torna-se um instrumento bastante poderoso para a resolução e interpretação de problemas e fenômenos.

Por sua vasta versatilidade, ele é aplicado a muitas áreas do conhecimento que não estiveram presentes em sua origem, tais como: problemas da física atual, o conceito de derivada, no estudo de fenômenos sociais, econômicos, químicos, etc.

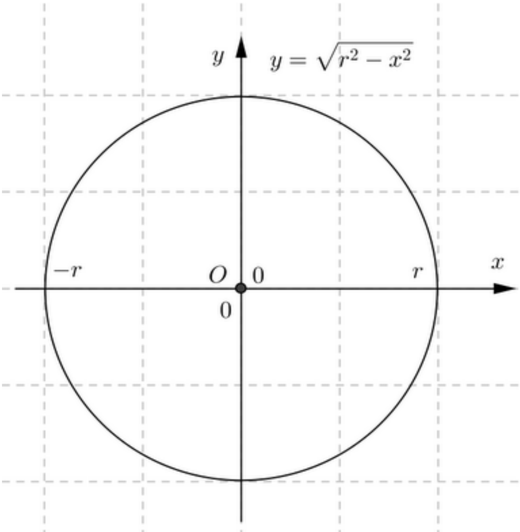
A seguir temos um exemplo que nos permite encontrar a fórmula da área do círculo:

Dada a equação do círculo $X^2 + Y^2 = r^2$, de centro na origem e raio r, gera duas funções cujas representações no plano cartesiano são as seguintes:

- Para a função $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ temos o semicírculo mostrado no diagrama na parte superior do eixo $0x$;
- Já para a função $y' = -\sqrt{r^2 - x^2}$, temos o semicírculo na parte inferior do mesmo eixo.

Figura2

Cálculo da área do circulo com integral



Fonte: http://elementosdeteixeira.blogspot.com.br/2012/11/086-calculo-da-area-do-circulo-com.html

Com a intenção de utilizar o Cálculo Integral para calcular a área A do círculo, vamos utilizar a primeira função $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ no intervalo $[0, r]$. É suficiente, pois a área referida é quatro vezes a área sob esta curva no 1^oquadrante. Logo,

$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$ Fazendo,

$$\begin{cases} x = rsen\theta \\ \dfrac{dx}{d\theta} = rcos\theta \\ dx = rcos\theta d\theta \end{cases}$$

temos,

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(\theta)} \cdot r\cos(\theta)d\theta$$

$$A = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(\theta)d\theta$$

Mas, $cos^2\theta = \frac{1+cos2\theta}{2}$ e, substituindo, vem

$$A = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

Logo, o valor da nossa integral definida é

$$A = 2r^2 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = 2r^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - 0$$

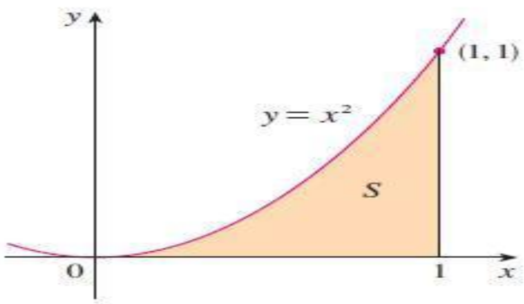
$$A = \pi r^2$$

EXEMPLOS:

1) Ache a área sob a parábola y =x^2 de 0 a 1.

Figura 3

Cálculo da área da parábola com integral



Fonte: http://wp.ufpel.edu.br/nucleomatceng/files/2012/07/Teorema-fundamental-do-c%C3%A1lculo1.pdf

Resolução: Sabemos que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é a antiderivada de $f(x) = x^2$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

2) Encontre a área das seguintes região $y = x^2 - 4$ e $y = 0$, $para - 1 \leq x \leq 3$.

Vamos procurar os pontos de interseção:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Pontos de Interseção: (-2,0) e (2,0)

Pontos de Interseção para $-1 \leq x \leq 3$: $(2, 0)$

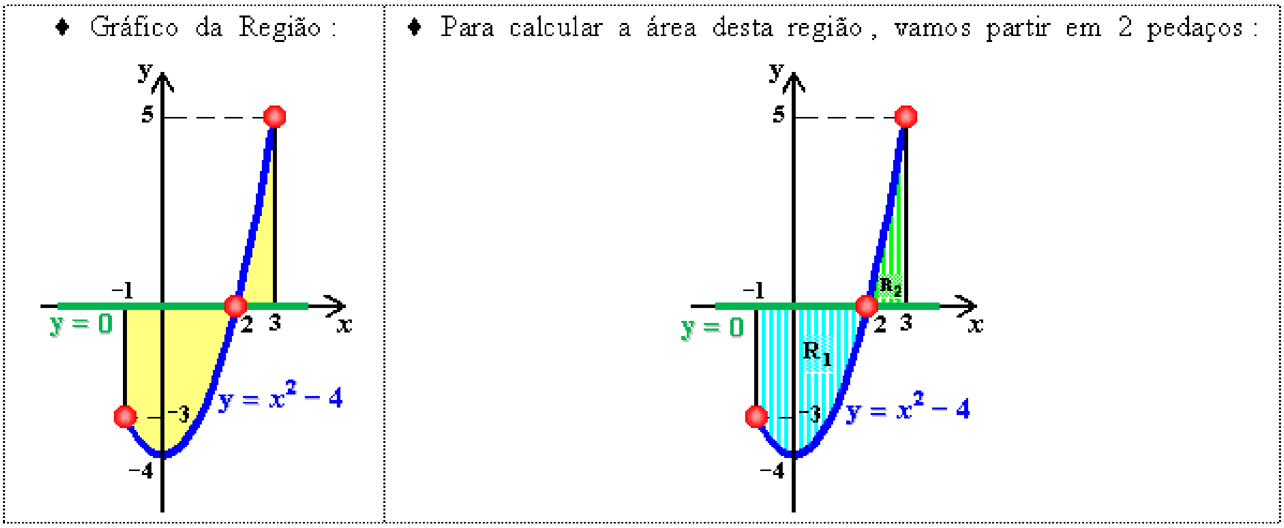
Vamos procurar o ponto inicial e final da parábola para $x \in [-1\ ,3]$:

$$x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 - 4 = -3 \rightarrow Ponto\ Inicial\ (-1\ , -3)$$

$$x = 3 \rightarrow y = (3)^2 - 4 = 5 \rightarrow Ponto\ Final$$

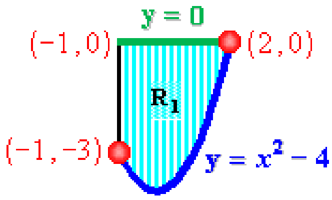
Figura 4 e 5

Gráfico da Região de uma Parábola



Fonte: http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap22_Calc1.html , Acesso em outubro/2017

♦ Área da região R_1 :



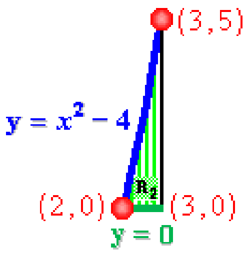
$$A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x)dx$$

$$A_1 = \int_{-1}^{2} (0 - (x^2 - 4))dx \;\; = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)dx$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 4\right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4 = -\frac{9}{3} + 12 = 9$$

♦ Área da região R_2 :



$$A_2 = \int_a^b (f(x) - g(x)dx$$

$$A_2 = \int_{2}^{3} ((x^2 - 4) - 0)dx \;\; = \int_{-1}^{2} (x^2 - 4)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3} = \left(\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2\right) =$$

$$= \left(\frac{27}{3} - 12\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 =$$

$$= -3 - \frac{8}{3} + 8 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{15-8}{3} = \frac{7}{3}$$

Logo, a área da região: $A_1 + A_2 = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$

3) Considere um corpo que se movimenta na direção horizontal com aceleração $\vec{a}$, constante. Temos que:

$$\frac{dv_x(t)}{dx} = a_x = constante$$

Onde a_x é a aceleração na direção x. Integrando a relação acima, encontramos:

$$dv_x(t) = a_x dt \Rightarrow v_x = \int a_x dt = a_x \int dt = a_x t + constante.$$

Assim, a velocidade do corpo será uma função linear do tempo,

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Onde v_{0x} é a velocidade do corpo no instante t=0.

A função x em função do tempo é obtida a partir de:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$

Integrando a equação acima encontramos:

$$dx(t) = v_x dt \Rightarrow x(t) = \int v_x dt = \int (v_{0x} + a_x t) dt = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + constante$$

Finalmente,

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

A equação acima é chamada de *equação horária* da partícula

Existem várias outras aplicações do cálculo das derivadas e integrais, nas áreas de Engenharia Civil, Biologia e muitas outras, as quais, pela natureza de nosso trabalho, não vamos exemplificar aqui.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do levantamento histórico sobre a criação do cálculo moderno, por Newton e Leibniz, ficou claro que tal conhecimento adquirido é fundamental para o desenvolvimento e melhoria de certo conceito ou teoria.

Muitas vezes, é através das ideias de outros que chegamos a uma determinada solução para problemas que passaram anos sem ser resolvidos. Foi o que Newton e Leibniz fizeram com o cálculo, resolvendo os dois problemas mais intrigantes da época: o problema da tangente, fazendo assim, surgir o cálculo diferencial, além de outro problema aparentemente sem nenhum relacionamento, o problema da área, que levou ao cálculo integral.

A partir destes dois ramos do cálculo foi estabelecida uma conexão através do "Teorema Fundamental do Cálculo", que permitiu solucionar estes dois problemas gigantescos da época, de maneira bastante simples.

Em sua demonstração, o Teorema Fundamental do Cálculo faz uso de outros conhecimentos do cálculo, tais como: o teorema do valor médio para integrais e o teorema do confronto. Tal fato prova que, em sua grande maioria, um novo conhecimento depende de outro para o seu desenvolvimento e aplicação.

5 REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Cálculo I: funções de uma variável**. Editora LTC, 6a Edição 1994

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. Programa Nacional Biblioteca do Professor: MEC – FAE – 1994

CRUZ, Lucas Cavalcanti. **Algumas Aplicações de Física do Ensino Médio a partir do Cálculo Diferencial e Integral.** UFPB, Março/2013. Disponível em: < https://adm.cedoc-iu.org.br/.../Lucas%20Cruz%20-%20Dissertac%CC%A7a%CC%83o%2015-05-2013.p...> acesso em dezembro/2017

DEMONSTRAÇÃO, **Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).** Disponível em: <www.uff.br/webmat/Calc1_LivroonLine/dem_calc1/cap22_dem02.html> acesso em outubro/2017

DIAS, Gabriela Alves, **Cálculo Diferencial e Integral e suas Aplicações** Vitória da Conquista – Bahia. Disponível em: <http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/monografia.-Gabriela-Alves-Vers%C3%A3o-Final.pdf> acesso em outubro/2017

FLEMMING, Diva M., Gonçalves, Mirian B. **Cálculo A – funções, limite, derivação e integração**. Editora da UFSC, 5a Edição, 1987

LANG, Serge. **Cálculo**. Volume 1, Editora LTC, 1975

PRADO, Poliana Ferreira do. **Integrais de Linha – Matemática Aplicada.** Vitória da Conquista – Bahia, setembro/2013. Disponível <http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Poliana.pdf> acesso em setembro/2017

PROF. 2000, **Nota histórica do Cálculo.** Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/4238anibal/tarefa7/ficalu3.htm> acesso em setembro/2017

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Área sob uma Curva**; *Brasil Escola*. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/area-sob-uma-curva.htm>. Acesso em novembro/2017

SIMMONS, George, **Cálculo com geometria analítica**. Volume 1, McGraw-Hill,1985.

SMANIA MAT, **Teorema Fundamental do Cálculo II– Demonstração da parte II.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VCmpXZr5RRg> acesso em outubro/2017

SMANIA MAT, **Teorema Fundamental do Cálculo IV – Demonstração da parte I.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=WJ5rvpZa_nI> acesso em outubro/2017

SOUZA, Veriano Catinin de, **A origem do Cálculo Diferencial e Integral**. Rio de Janeiro / RJ, agosto/2001. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/monopdf/4/VERIANO%20CATININ%20DE%20SOUZA.pdf> acesso em setembro/2017

STEWART, James, **Cálculo**. Volume 1, Editora Pioneira, 4ª. Edição, 2003

SWOKOWSKI, Earl W, **Cálculo com Geometria Analítica;** Volume 1, 2ª Edição, MAKRON books do Brasil Editora Ltda

THOMAS, George B., **Cálculo**. Vol. 1, Editora Pearson Education do Brasil, 10a Edição, 2002.