UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ABERTA BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

André Andrade Barbosa

Efeitos de um Terremoto em um Prédio de Vários Andares:

Uma modelagem matemática sobre sistemas de equações diferenciais

João Pessoa – PB

2019

André Andrade Barbosa

Efeitos de um Terremoto em um Prédio de Vários Andares:

Uma modelagem matemática sobre sistemas de equações diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciando em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

João Pessoa – PB

2019

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B238e Barbosa, André Andrade.
Efeitos de um Terremoto em um Prédio de Vários Andares: Uma modelagem matemática sobre sistemas de equações diferenciais / André Andrade Barbosa. - João Pessoa, 2019.
63 f. : il.

Orientação: José Gomes de Assis ASSIS.
TCC (Especialização) - UFPB/CCEN.

1. sistemas de equações diferenciais. 2. equações diferenciais. 3. efeitos de um terremoto. I. ASSIS, José Gomes de Assis. II. Título.

UFPB/BC

Efeitos de um Terremoto em um Prédio de Vários Andares:

Uma modelagem matemática sobre sistemas de equações diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática à Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciando em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Gomes de Assis

Aprovado em: 13/12/2019.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Assis

Prof. Dr. José Gomes de Assis (Orientador)

Jorge Costa Duarte Filho

Prof. Dr. Jorge Costa Duarte Filho

N G Albuquerque

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque

À minhas filhas, Bruna Sofia e Letícia Beatriz, por serem razão às minhas lutas e servirem de inspiração às minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

À minha **mãe**, Zildene Andrade Barbosa, por sempre me apoiar em todas as escolhas de minha caminhada.

À **minha esposa**, Wilma Rodrigues Ramos Barbosa, por ter sido companheira, me apoiando, me incentivando e por ter sempre acreditado em mim.

Aos **meus irmãos**, Rogério Andrade Barbosa e Adriano Andrade Barbosa, por terem sempre me apoiado nos momentos de dificuldade e me dado suporte para superá-los.

Ao **meu orientador**, José Gomes de Assis, pelo estímulo e colaboração, pela paciência e competência, pelo apoio e dedicação a este trabalho e pelas experiências e conhecimentos compartilhados.

A **todos os meus professores**, por todo conhecimento compartilhado e pelo exemplo que me serve de inspiração profissional e pessoal.

Aos **meus amigos**, pelos momentos de alegria e descontração, pelo apoio e pelo incentivo.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação."

Johann Carl Friedrich Gauss

RESUMO

O presente trabalho aborda uma aplicação de sistemas de equações diferenciais lineares em um caso particular, onde iremos modelar matematicamente o Efeito de um Terremoto sobre um Prédio de Vários Andares. Para tanto, iremos inicialmente apresentar os conceitos fundamentais de equações diferenciais lineares. Seguindo, fazendo uso de alguns conceitos da Álgebra Linear, iremos apresentar Sistemas de Equações Diferenciais em sua representação matricial. Por fim, utilizaremos dois conceitos básicos da Física Clássica: Segunda Lei de Newton e Lei de Hooke para demonstrar como os conceitos de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares podem ser utilizados para explicar a mecânica de como um terremoto pode afetar a estrutura de um prédio de vários andares.

Palavras chaves: sistemas de equações diferenciais; equações diferenciais; efeitos de um terremoto.

ABSTRACT

The present work addresses an application of systems of linear differential equations in a case, where we will mathematically model the effect of an earthquake on a multistory building. To do so, we will initially present the fundamental concepts of linear differential equations. Following, using some concepts of Linear Algebra, we will present Systems of Differential Equations in their matrix representation. Finally, we will use two basic concepts of Classical Physics: Newton's Second Law and Hooke's Law to demonstrate how the concepts of Linear Differential Equation Systems can be used to explain the mechanics of how an earthquake can affect the structure of a multi-building. floors

Keywords: systems of differential equations. differential equations. effects of an earthquake.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURA/SIGLAS

ED	Equação Diferencial
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP	Equações Diferenciais Parciais
LD	Linearmente Dependente
LI	Linearmente Independente

SUMÁRIO

1. MEMORIAL ACADÊMICO

1.1 Histórico da formação escolar

Ingressei na escola básica aos 06 anos de idade para cursar a alfabetização (atual 1º ano do Ensino Fundamental) no ano de 1991, na Escola Municipal João Joaquim de Castro, que ficava próximo à minha casa, no Sítio Campo Grande II, na época, zona rural da cidade de Sapé, onde cursei até a 4ª série do 1º grau (atual 5º ano do Ensino Fundamental). Lembro-me de ter sido o aluno mais jovem das turmas de que participei, pois àquela época, na localidade onde vivia, a maioria dos alunos entrava na escola com idade mais avançada. Por isto, fui um aluno mais reservado, tímido, comportado, me dedicava muito às aulas, tirava boas notas e, me saia bem todas as disciplinas e, apesar de ainda não ter percebido, já tinha interesse maior pela matemática.

Aos 11 anos, cursei a 5ª série do 1º grau (atual 6º ano do Ensino Fundamental) na Escola Estadual de 1º e 2º Graus Monsenhor Odilon Alves Pedrosa, na cidade de Sapé - PB. Aos 12 anos, mudei para a Escola Estadual de 1º e 2º Graus José Lins do Rego, cidade de Pilar – PB, de onde tenho as melhores recordações da minha vida estudantil. Nesta escola fiz bons amigos, tive alguns ótimos professores e havia entre os colegas bastante entusiasmo e o ambiente era muito favorável ao aprendizado. Concluí, nesta escola o 1º grau (atual Ensino Fundamental) no ano de 1999 e cursei ainda o 1º ano do já denominado Ensino Médio. Foi neste período que percebi que gostava mais de matemática que das outras disciplinas escolares.

Em 2001, aos 16 anos, mudei para a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Senador Humberto Lucena, situada na cidade de Sobrado-PB, onde cursei o 2º ano e 3º ano do Ensino Médio, concluindo esta etapa no ano de 2003.

1.2 Histórico da formação universitária

Minha vida acadêmica iniciou-se ao ser aprovado no vestibular para UFPB para o curso de Licenciatura em Física, que cursei até o 5º período, quando consegui transferência para o curso de Engenharia Civil, também na UFPB. Porém, não consegui ir adiante no curso, pois, por se tratar de um curso diurno em tempo integral, não consegui conciliar o trabalho com a vida acadêmica, sendo obrigado a abandonar o curso no final de 2006.

Ao final de 2008 ingressei no Licenciatura em Matemática à Distância pela Universidade Federal da Paraíba. A possibilidade de fazer um curso superior à distância, através da internet, podendo conciliar trabalho e estudos, se apresentou como uma excelente oportunidade de fazer uma graduação e construir uma carreira em uma área que me satisfizesse profissionalmente. No entanto, esta nova jornada demonstrou ser mais difícil do que parecia. O curso à distância requer muita dedicação, algumas vezes mais que um curso presencial do modelo tradicional, pois, apesar de necessitar se deslocar até a universidade para assistir as aulas, o curso à distância exige do aluno muita disciplina para estudar de forma mais autodidata e, consequentemente, exige a dedicação mais tempo para os estudos. Neste período, motivos financeiros, me vi obrigado a trabalhar em tempo integral, algumas vezes, também nos fins de semana. O tempo tornou-se o grande obstáculo que nesta oportunidade não consegui superar, tendo assim que a abandonar o curso, após ter completado as disciplinas do 6º semestre e mais algumas do 7º semestre.

Em 2013, ingressei no curso de Bacharelado em Ciências Contábeis pela Universidade Norte do Paraná, tendo cursado e concluído com êxito a minha primeira graduação no 2017, obtendo o título de Bacharel em Ciências Contábeis.

Apesar das dificuldades e dos imprevistos em minha jornada acadêmica, me mantive determinado em concluir a minha graduação em matemática. Por isto, em 2017, ingressei novamente no curso de Licenciatura em Matemática à Distância pela Universidade Federal da Paraíba, tendo solicitado aproveitamento das disciplinas já cursadas anteriormente, retomando assim o curso a partir do 7º período. À medida em que as disciplinas foram sendo ofertadas, fui cumprindo cada uma, até chegar nesta disciplina (Trabalho de Conclusão de Curso), disciplina final do curso, que espero lograr êxito através deste trabalho. Podendo, enfim, concluir a tão sonhada graduação em Licenciatura em Matemática.

2. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais possuem diversas aplicações práticas, servido de modelo matemática para diversos fenômenos do mundo físico. Em alguns casos, para descrever um fenômeno a ser estudado, ocorre a necessidade da utilização simultânea de duas ou mais equação diferenciais, o que leva à utilização de sistemas de equações diferenciais.

Neste trabalho iremos analisar um caso particular da aplicação prática de sistemas de equações diferenciais, com modelagem matemática no estudo dos efeitos de um terremoto em um prédio de vários andares.

O propósito deste trabalho é mostrar, a partir de um exemplo, que a Matemática está inserida em diversas áreas do conhecimento humano com aplicação prática em várias áreas de estudo e que o uso de sistemas de equações diferenciais para prática de modelagem vem se tornando uma ferramenta muito importante para o desenvolvimentos das ciências e tecnologias em geral.

2.1 JUSTIFICATIVA

O trabalho realizado aqui deseja demonstrar uma aplicação de Sistemas de Equações Diferenciais na área de Engenharia, portanto, esse trabalho está muito distante de ser uma conclusão de estudos, o que vamos propor aqui é a discussão dessa aplicação.

2. 2 OBJETIVOS

2.2.1 Geral

Esta pesquisa tem por objetivo principal a investigação do uso de Sistemas de Equações Diferenciais como subsidiário de outras áreas do conhecimento humano.

2.2.2 Específico

Coletar informações necessárias a demonstração da aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias em outra área do conhecimento humano, além do apresentado em sala. Demonstrando a importância do tema para desenvolvimento de vários setores da sociedade.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Equações Diferenciais

Definição 1. Uma equação que contém uma função (de uma ou mais variáveis independentes) e suas as derivadas ou diferenciais, em relação a uma ou mais variáveis dependentes, é chamada **equação diferencial** (ED).

Dada uma função $y = f(x)$, a derivada $dy/dx = f'(x)$ é também uma função de x. Por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então $dy/dx = 2xe^{x^2}$ ou $dy/dx = 2xy$, podemos encontrar alguma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação, temos que a equação $dy/dx = 2xy$ é uma equação diferencial.

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao tipo, ordem e linearidade. Quanto ao **tipo**, se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma varável independente única, chamamos de **equação diferencial ordinária (EDO)**. Caso a equação diferencial contenha derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes, será chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**. Exemplos,

$$\frac{dy}{dx} - 5y = e^x \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias, enquanto

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

são equações diferenciais parciais.

A **ordem** de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem de sua maior derivada. As equações

$$4xy' + y = x \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

são, respectivamente, equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira e segunda ordens. Enquanto as equações

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

são, respectivamente, equações diferenciais parciais (EDP) de primeira e segunda ordens.

Simbolicamente, podemos expressar uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n em uma variável dependente na **forma geral**

$$F\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big) = 0, \tag{1}$$

onde F é uma função de valores reais de $n+2$ variáveis, $x, y, y', \dots, y^{(n)}$, onde $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$. Por questões de praticidade e teóricas, consideraremos que uma EDO na forma (1) possui sempre solução e esta solução é única. Representaremos uma EDO dada na forma (1), para que a derivada mais alta se escreva em termos de $n+1$ variáveis remanescentes.

A equação diferencial ordinária (1) também pode ser representada na forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\big), \tag{2}$$

onde f é uma função contínua de valores reais, conhecida como **forma normal** de (1). Assim, para representarmos equações diferenciais ordinárias gerais de primeira e segunda ordem, respectivamente, na forma normal, podemos escrever $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$. Por exemplo, a forma normal da equação

$$4xy' + y = x \qquad \text{é} \qquad y' = \frac{(x-y)}{4x}.$$

Uma equação diferencial de ordem n do tipo (2) é dita **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (3)$$

As equações diferenciais lineares caracterizam-se por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau, ou seja, o expoente da potência de y é sempre 1;

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Por exemplo, as equações

$$xdy + ydx = 0, \qquad y'' - 2y' + y = 0 \quad \text{e} \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x,$$

são equações diferenciais ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordem respectivamente. Uma equação diferencial que não é linear é chamada de **equação diferencial não-linear**. As equações

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

são exemplos de equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda e quarta ordens, respectivamente, uma vez que os termos $\operatorname{sen} y$ e y^2 são funções não lineares de y.

Neste trabalho, para o desenvolvimento do objeto do nosso estudo, nos interessa apenas o conhecimento sobre equação de equações diferenciais lineares de primeira ordem.

3.1.1 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Sabemos que uma equação diferencial é linear quando é de primeiro grau na variável dependente e em todas as suas derivadas quando $n = 1$ em (3), obtemos uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Definição 2. Uma equação diferencial ordinária linear é uma expressão da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{4}$$

Uma equação linear é chamada de **homogênea** quando $g(x) = 0$, do contrário, é dita **não homogênea**.

Ao dividirmos ambos os lados de (4) pelo coeficiente dominante $a_1(x)$ obtemos a forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{5}$$

que é denominada a **forma padrão** de equação linear, onde as funções P e f são contínuas em um intervalo I.

Por exemplo, na equação $\frac{dy}{dx} + 5xy = 0$, $P(x) = 5x$ e $f(x) = 0$, enquanto na equação $\frac{dy}{dx} = y + 7$, $P(x) = -1$ e $f(x) = 7$.

3.2 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Chamamos de **sistema de primeira ordem** um sistema composto de n equações diferenciais em que todas são de primeira ordem. Na forma normal representamos

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{6}$$

Quando cada uma das funções $g_1, g_2, \dots, g_n$ for linear nas variáveis dependentes $x_1, x_2, \dots, x_n$, obtemos a forma normal de um **sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem**:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{7}$$

Neste sistema iremos supor que os coeficientes a_{ij} e as funções f_i são contínuos num intervalo comum I.

Quando $f_i(t) = 0$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, o sistema será dito **homogêneo**, caso contrário, será chamado **não homogêneo**.

3.2.1 Forma Matricial de um Sistema Linear

Sejam $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{A}(t)$ e $\boldsymbol{F}\,(t)$ as respectivas matrizes

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{F}\,(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

o sistema de equação diferenciais lineares de primeira ordem em (7) pode ser escrito na forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

que, na forma normal, torna-se

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}. \tag{8}$$

Se o sistema for homogêneo, escrevemos

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{9}$$

Por exemplo, consideremos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 4y \end{cases}.$$

Se $X = \binom{x}{y}$, a forma matricial será

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Considerando agora o sistema não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + \ \ y + \ \ \ z + \ \ \ t \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 7y - z + 10t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 9y - \ \ \ z + 6t \end{cases}$$

se $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, a forma matricial será

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}.$$

Definição 3. Um vetor solução em um intervalo I é qualquer matriz coluna

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

cujos elementos são diferenciáveis que satisfazem o sistema (8) no intervalo.

Para exemplificar, vamos verificar que, no intervalo $(-\infty, \infty)$,

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

são soluções de

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Vejamos, diferenciando $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ temos $\boldsymbol{X'_1} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{X'_2} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}$, daí vem

$$\boldsymbol{AX_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{X'_1}$$

ou seja, $\boldsymbol{X'_1} = \boldsymbol{AX_1}$, e

$$\boldsymbol{AX_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{X'_2}.$$

ou seja, $\boldsymbol{X'_2} = \boldsymbol{AX_2}$**.** De onde concluímos que os vetores solução $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ dados são soluções do sistema $\boldsymbol{X'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$.

Um vetor solução do sistema $\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}$, é naturalmente, equivalente a n soluções escalares $x_1 = \phi_1(t),\ x_2 = \phi_2(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$, podendo ser interpretado geometricamente comum conjunto de equações paramétrica de uma curva no espaço.

Caso $n = 2$, as equações $x_1 = \phi_1(t)$ e $x_2 = \phi_2(t)$ representam uma curva no plano x_1x_2.

Utilizando o conceito de vetor solução podemos generalizar o conceito de problema de valor inicial para sistemas de equações. Seja t_0 um ponto no intervalo I e

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

onde γ_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ são constantes dadas. Então, o problema, resolver

$$\begin{cases} \boldsymbol{X'} & = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{F}(t) \\ \boldsymbol{X}(t_0) & = \boldsymbol{X}_0 \end{cases} \tag{11}$$

é problema de valor inicial no intervalo.

Teorema 1. Suponha que os elementos das matrizes $\boldsymbol{A}(t)$ e $\boldsymbol{F}(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo I que contenha o ponto t_0. Existe uma única solução para o problema de valor inicial (11) no intervalo.

A demonstração do teorema de existência e unicidade é encontrado na literatura.

Daqui por diante iremos focar os nossos estudos em sistemas homogêneos. Portanto, nas definições e nos teoremas que seguem, iremos supor, sem mencionar explicitamente, que a_{ij} e f_i são funções contínuas de t no intervalo comum I.

Teorema 2. Seja $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, ..., $\boldsymbol{X_k}$ um **conjunto de vetores solução** do sistema homogêneo (9) no intervalo I. Então a combinação linear

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{X_k}$$

onde c_i, $i = 1, 2, \dots, k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo I, pois o conjunto solução é um espaço vetorial.

O Princípio da Superposição estabelece que um múltiplo constante de qualquer vetor solução de um sistema homogêneo de equações diferenciais lineares de primeira ordem é também uma solução.

Por exemplo, dados os vetores

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -{}^1\!/_2 \cos t + {}^1\!/_2\, sen\ t \\ -\cos t - sen\ t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

soluções do sistema

$$\boldsymbol{X'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Pelo princípio da superposição, a combinação linear

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} = c_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -{}^1\!/_2 \cos t + {}^1\!/_2\, sen\ t \\ -\cos t - sen\ t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

é também solução do sistema.

Definição 4. Seja $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_k}$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (9) no intervalo I. Dizemos que o conjunto é **Linearmente Dependente** (LD) no intervalo se existirem $c_1, c_2, \dots, c_k$, não todas nulas, de tal forma que

$$c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{X_k} = 0$$

para todo t no intervalo. Se o conjunto de vetores não for Linearmente Dependente (LD) no intervalo, será chamado de **Linearmente Independente** (LI).

Observemos que, utilizando conceitos da Álgebra Linear, é simples verificar se um conjunto de vetores solução é LD ou LI. No caso em $k = 2$, dois vetores solução são Linearmente Dependentes se um for múltiplo constante do outro. Para $k > 2$, o conjunto de vetores solução será Linearmente Dependente se pudermos expressar pelo menos um vetor solução como combinação linear dos demais vetores solução.

Uma alternativa que podemos utilizar para identificar se um conjunto de vetores é LD utilizando o conceito de determinante **Wronskiano**. Partindo do pressuposto que o leitor tem familiaridade com o conceito de Wronskiano, a partir dos estudos do curso de Introdução à Álgebra Linear, enunciaremos, sem provas, o teorema a seguir.

Teorema 3. Sejam

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vetores solução do sistema homogêneo (9) no intervalo I. Então o conjunto de vetores solução será Linearmente Independente em I, se e somente se, o **Wronskiano**

$$W(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12}$$

para todo t no intervalo.

Do teorema acima, nota-se que se $W(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}) \neq 0$ para todo t em I, onde $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$ são vetores solução de (9), então, as soluções serão Linearmente Independentes no intervalo. Pode-se demonstrar que, se $W \neq 0$ para algum t_0 em I, então $W \neq 0$ para todo t, bastando, portanto, verificar para um t_0 em I todas soluções serão LI no intervalo.

Por exemplo, sabemos que $\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ e $\boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ são soluções do sistema $\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$. Nota-se que $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ são LI no intervalo $(-\infty, \infty)$, uma vez que nenhum dos vetores é múltiplo escalar do outro. Utilizando o determinante Wronskiano, podemos verificar que

$$W(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$$

para todos os valores reais de t.

Definição 5. Seja $\beta = \{\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}\}$ um conjunto fundamental de vetores L.I. que é solução do sistema homogêneo (9) em um intervalo I, β é chamado **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.

Teorema 4. Existe um **conjunto fundamental de soluções** para o sistema homogêneo (9) em um intervalo I.

Da mesma forma que todo vetor no espaço tridimensional pode ser expresso como combinação linear dos vetores Linearmente Independentes i, j, k, todo vetor solução de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneo de ordem n em um intervalo I pode ser expresso como combinação linear de n vetores solução Linearmente Independentes em I.

Teorema 5. Seja $\beta = \{\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_n}\}$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (9) em um intervalo I. Então, a **solução geral** do sistema no intervalo é

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{X_n},$$

onde c_i, $i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

O Teorema 5 afirma que a solução geral do sistema homogêneo (9) no intervalo I é a combinação linear dos vetores solução $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_n}$ do conjunto fundamental de soluções no intervalo. Assim, se um $\boldsymbol{X}$ qualquer for vetor solução de (9) no intervalo, sempre será possível encontrar $c_1, c_2, \dots, c_n$ de forma que $\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{X_n}$.

Por exemplo, sabemos que

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

e

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

são soluções do sistema

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$. Logo $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ formam um conjunto fundamental de soluções no intervalo. A solução geral do sistema será então

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}\ .$$

Noutro exemplo, temos os vetores

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -{}^{1}\!/_{2}\cos t + {}^{1}\!/_{2}\, sen\ t \\ -\cos t - sen\ t \end{pmatrix}, \boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{X_3} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -{}^{1}\!/_{2}\operatorname{sen} t - {}^{1}\!/_{2}\, cos\ t \\ -\operatorname{sen} t + cos\ t \end{pmatrix}$$

soluções do sistema

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Observemos que o Wronskiano é diferente de zero

$$W(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -{}^{1}\!/_{2}\cos t + {}^{1}\!/_{2}\, sen\ t & e^t & -{}^{1}\!/_{2}\operatorname{sen} t - {}^{1}\!/_{2}\, cos\ t \\ -\cos t - sen\ t & 0 & -\operatorname{sen} t + cos\ t \end{vmatrix} = e^t \neq 0.$$

Para todos os valores reais de t. Concluímos que $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$ e $\boldsymbol{X_3}$ formam um conjunto fundamental de soluções no intervalo $(-\infty, \infty)$. Assim sendo, a solução geral do sistema no intervalo é a combinação linear $\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + c_3\boldsymbol{X_3}$, isto é

$$\boldsymbol{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -{}^{1}\!/_{2}\cos t + {}^{1}\!/_{2}\, sen\ t \\ -\cos t - sen\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -{}^{1}\!/_{2}\operatorname{sen} t - {}^{1}\!/_{2}\, cos\ t \\ -\operatorname{sen} t + cos\ t \end{pmatrix}.$$

Teorema 6. Seja $\boldsymbol{X_p}$ uma solução dada do sistema não homogêneo (8) no intervalo I e seja

$$\boldsymbol{X_c} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{X_n},$$

a solução geral no mesmo intervalo do sistema homogêneo associado (9). Então a **solução geral** do sistema não homogêneo no intervalo é

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_c} + \boldsymbol{X_p}.$$

A solução $\boldsymbol{X_c}$ do sistema homogêneo (9) é chamada **solução complementar** do sistema não homogêneo (8).

Por exemplo, o vetor

$$\boldsymbol{X_p} = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$$

é uma solução particular do sistema não homogêneo

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

no intervalo $(-\infty,\ \infty)$.

A função complementar de X' no mesmo intervalo é $\boldsymbol{X_c} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$. Logo, pelo Teorema 6,

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_c} + \boldsymbol{X_p} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$$

é a solução de $\boldsymbol{X}'$ em $(-\infty,\ \infty)$.

3.3 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Na seção anterior, vimos o exemplo em que a solução geral do sistema homogêneo

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

é

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}.$$

Como ambos os vetores solução tem forma $\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$, onde k_1 e k_2 e são constantes e λ_i escalar, somos instigados a perguntar se podemos sempre obter uma solução na forma

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda t} = \boldsymbol{K}e^{\lambda t} \tag{13}$$

para o sistema linear homogêneo de primeira ordem genérico $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$ (9), onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $n \times n$ de constantes.

Se (13) for solução do sistema linear (9), então $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{K}\lambda e^{\lambda t}$ que, substituindo em (9), vem

$$\boldsymbol{K}\lambda e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{K}e^{\lambda t}$$

dividindo ambos os membros da igualdade por $e^{\lambda t}$ e rearranjando, obtemos

$$\lambda\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{K} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{K} = 0.$$

Usando propriedades da álgebra matricial, podemos fazer $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{IK}$, onde I a matriz identidade multiplicativa, $n \times n$, a equação equivale a

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\,\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}. \tag{14}$$

Fazendo

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_2 \end{pmatrix}$$

a equação matricial (14) é equivalente ao sistema de equações algébricas simultâneas

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)k_1 & + & a_{12}k_2 & + \cdots + & a_{1n}k_n & = 0 \\ a_{21}k_1 & + & (a_{22}-\lambda)k_2 & + \cdots + & a_{2n}k_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}k_1 & + & a_{n2}k_2 & + \cdots + & (a_{nn}-\lambda)k_n & = 0 \end{cases}$$

Embora uma solução óbvia seja de $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, estamos procurando apenas soluções não triviais. Sabemos que um sistema homogêneo de n equações lineares de n incógnitas terá solução não trivial se e somente se o determinante da matriz de coeficientes for igual a zero. Assim sendo, para obtermos uma solução diferente de $\boldsymbol{K}$, não nula, devemos ter

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0.$$

Esta equação polinomial em é denominada **equação característica** da matriz $\boldsymbol{A}$, onde sua solução são os **autovalores** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\boldsymbol{A}$. Uma solução $\boldsymbol{K} \neq 0$ representa um **autovetor** de $\boldsymbol{A}$**.** Temos daí que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}e^{\lambda t}$ é uma solução para o sistema homogêneo. Analisaremos agora, três caso de autovalores em sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes: <u>Autovalores reais e distintos</u>, <u>autovalores reais repetidos</u> e <u>autovalores complexos</u>.

3.3.1 Autovalores Reais Distintos

Iremos analisar aqui casos em que a matriz $\boldsymbol{A}$, $n \times n$, possui n autovalores reais distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, um conjunto de n autovetores Linearmente Independentes $\boldsymbol{K_1},, \boldsymbol{K_2} \ldots, \boldsymbol{K_n}$ poderá sempre ser obtido e

$$\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{K_1} e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{K_2} e^{\lambda_2 t}, \ldots, \boldsymbol{X_n} = \boldsymbol{K_n} e^{\lambda_n t}$$

será um conjunto solução de (9) em $(-\infty, \infty)$.

Teorema 7. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ do sistema homogêneo (9) e sejam $\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \ldots, \boldsymbol{K_n}$ os autovetores correspondentes. Então, a **solução geral do sistema homogêneo** em (9) no intervalo $(-\infty, \infty)$ será denotado por

$$X = c_1 \boldsymbol{K_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{K_2} e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{K_n} e^{\lambda_n t} \tag{15}$$

Para exemplificar vamos resolver o sistema homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Para resolvermos o sistema, primeiramente determinaremos os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes.

Fazendo

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Da equação característica

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0.$$

vemos que os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.

Para $\lambda_1 = -1$, a equação $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\ \boldsymbol{K} = 0$ equivale a

$$\begin{cases} 3k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}.$$

Assim sendo, $k_1 = -k_2$. Considerando $k_2 = -1$, o autovetor correspondente será

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 4$, temos

$$\begin{cases} -2k_1 + 3k_2 = 0 \\ \ \ 2k_1 - 3k_2 = 0 \end{cases}.$$

De onde obtemos $k_1 = 3k_2/2$ e, portanto, tomando $k_2 = 2$, o autovetor correspondente será

$$\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ é de ordem 2×2 e como determinamos duas soluções LI, obtemos

$$\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{K_1}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{(-1)t} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{K_2}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{(4)t},$$

de onde concluímos que, de (15)**,** a solução geral do sistema é

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{4t}.$$

3.3.2 Autovalores Repetidos

É importante observar que nem sempre os n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de uma matriz $\boldsymbol{A}$**,** $n \times n$ são distintos, podendo ocorrer autovalores repetidos.

Seja m um número inteiro positivo, se $(\lambda - \lambda_1)^m$ for um fator da equação característica e $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ não for fator, diremos que λ_1 é um **autovalor de multiplicidade $\boldsymbol{m}$**.

Ilustramos esses casos nos exemplos a seguir:

(i) Para algumas matrizes $\boldsymbol{A}$ $n \times n$, é possível obter m autovetores Linearmente Independentes $\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_m}$ correspondentes a um autovalor λ_1 de multiplicidade $m \leq n$. Nesse caso, a solução geral do sistema contém a combinação linear

$$\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{K_1}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{K}_2e^{\lambda_1 t} + \ \dots + c_n\boldsymbol{K}_n e^{\lambda_1 t} \tag{16}$$

(ii) Se houver apenas um autovetor correspondente ao autovalor λ_1 de multiplicidade m, então podem ser obtidas m soluções Linearmente Independentes da forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X_1} &= \boldsymbol{K_{11}}e^{\lambda_1 t} \\
\boldsymbol{X_2} &= \boldsymbol{K_{21}}e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{K_{22}}e^{\lambda_1 t} \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{X_m} &= \boldsymbol{K_{m1}}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{K_{m2}}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \boldsymbol{K_{mm}}e^{\lambda_1 t}
\end{aligned} \tag{17}$$

onde os $\boldsymbol{K_{ij}}$ são vetores de coluna.

Vejamos nos exemplos a seguir, um caso de **autovalores repetidos** e outro de **autovetores** repetidos.

Neste primeiro exemplo, vamos resolver o sistema

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X},$$

onde a matriz para qual podemos obter dois autovetores distintos, correspondente a um mesmo autovalor de multiplicidade dois.

Primeiramente, calcularemos o determinante da equação característica

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de onde obtemos $-(\lambda+1)^2(\lambda+5) = 0$. Vemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -1$, utilizando efetuando operações nas linhas da matriz aumentada (eliminação de Gauss-Jordan), obtemos a forma reduzida e escalonada por linha:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[nas\ linha]{operações} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da primeira linha da matriz obtida temos $k_1 - k_2 + k_3 = 0$ ou $k_1 = k_2 - k_3$. Escolhendo $k_2 = 1$ e $k_3 = 0$, obtemos $k_1 = 1$, e escolhendo $k_2 = 1$ e $k_3 = 1$, obtemos $k_1 = 0$. Assim sendo, temos dois autovetores correspondentes a $\lambda_1 = -1$:

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como nenhum dos autovetores é múltiplo constante do outro, obtivemos uma solução Linearmente Independentes correspondentes ao mesmo autovalor.

$$\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{K_1}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{K_2}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Por último, para $\lambda_3 = 5$, temos

$$(\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{I}|\boldsymbol{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[nas\ lin]{operações} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que implica em $k_1 = k_3$ e $k_2 = -k_3$. Tomando $k_3 = 1$, obtemos $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$, consequentemente, um terceiro vetor

$$\boldsymbol{K_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enfim, a solução geral do sistema é

$$\boldsymbol{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Veremos agora um caso de autovetores repetidos.

Neste exemplo, encontraremos a solução geral do sistema

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -90 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Da equação característica

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = det\left(\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -90-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

verificamos imediatamente que $(\lambda + 3)^2 = 0$ e, portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ é uma raiz de multiplicidade 2. Para esse valor, obtemos o autovetor

$$\boldsymbol{K_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

é uma solução para o sistema. Porém, estamos interessados em obter a solução geral para o sistema, por isto, nos deparamos com um novo problema, pois precisamos obter uma segunda solução.

Uma segunda solução do sistema, supondo que λ_1 seja um autovalor de multiplicidade dois, associado a apenas um autovetor, pode ser obtida da forma

$$\boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{K} t e^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{P} e^{\lambda_1 t}, \tag{18}$$

onde

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

Para ver isto, substituímos (18) no sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ e simplificamos:

$$(\boldsymbol{AK} - \lambda_1 \boldsymbol{K}) t e^{\lambda_1 t} + (\boldsymbol{AP} - \lambda_1 \boldsymbol{P} - \boldsymbol{K}) t e^{\lambda_1 t} = 0.$$

Esta equação deve ser obtida válida para todos os valores de t, logo devemos ter

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{K} = 0 \tag{19}$$

e

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}. \tag{20}$$

A equação (19) estabelece simplesmente que $\boldsymbol{K}$ deve ser um autovetor de $\boldsymbol{A}$ associado a λ_1, assim, resolvendo (19) determinamos a primeira solução $\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{K}e^{\lambda_1 t}$.

A segunda solução $\boldsymbol{X_1}$ pode ser obtida resolvendo (20) para obter o vetor $\boldsymbol{P}$.

Sendo assim, retomamos ao exemplo, vamos calcular a segunda solução do sistema $\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -90 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$. Identificando $\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ com $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, segue de (20) que precisamos resolver

$$(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}$$
$$\left(\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De onde temos

$$\begin{cases} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{cases}.$$

Nesse sistema, temo um número infinito de escolhas para p_1 e p_2. Tomando $p_1 = \frac{1}{2}$, obtemos $p_2 = 0$. Logo, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, assim, de (18), obtemos

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{K}te^{\lambda_1 t} + \boldsymbol{P}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

A solução geral do sistema é

$$\boldsymbol{X} = \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}}_{X_1} + \underbrace{c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]}_{X_2}.$$

3.3.3 Autovalores Complexos

Teorema 8. Seja $\boldsymbol{A}$ a matriz de coeficientes com elementos reais do sistema homogêneo (9) e seja K_1 um autovetor correspondente ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, α e β reais. Então

$$\boldsymbol{K_1} e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}} e^{\overline{\lambda}_1 t} \tag{21}$$

são soluções de (9).

Por exemplo, no sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

a equação característica é $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$ cujo as raízes complexas são $\lambda_1 = 5 + 2i$ e $\lambda_2 = 5 - 2i$.

Resolvendo para $\lambda_1 = 5 + 2i$, temos

$$\begin{cases} (1-2i)k_1 & - & k_2 & = 0 \\ 2k_1 & - & (1+2i)k_2 & = 0 \end{cases}$$

Uma vez que $k_2 = (1 - 2i)k_1$, escolhemos $k_1 = 1$, resulta o seguinte autovetor e o vetor solução correspondente são:

$$\boldsymbol{K_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}.$$

Analogamente, para $\lambda_2 = 5 - 2i$, obtemos

$$\boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Por meio do Wronskiano, verificamos que esses vetores solução são Linearmente Independentes, portanto, a solução geral do sistema dado é

$$\boldsymbol{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Observemos aqui, pelo desenvolvimento deste exemplo que, as coordenadas $\boldsymbol{K}_2$ correspondentes a λ_2 são as conjugadas das coordenadas $\boldsymbol{K}_1$ correspondente a λ_1, ou seja, $\boldsymbol{K_2} = \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}$. De onde percebemos que a conjugada de λ_1 é $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$.

É possível escrever uma solução a autovalores complexos em termos de funções reais. Para isto, iremos utilizar a fórmula de Euler para escrever

$$e^{(5+2i)t} = e^{5t}e^{2i} \ = e^{5t}(\cos 2t + i\ sen\ 2t)$$
$$e^{(5-2i)t} = e^{5t}e^{-2it} = e^{5t}(\cos 2t - i\ sen\ 2t).$$

Este processo pode ser generalizado. Seja $\boldsymbol{K_1}$ um autovetor da matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ (com elementos reais) correspondem ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Então, os dois vetores solução do Teorema 8, podem ser escritos como

$$\boldsymbol{K_1}e^{\lambda_1 t} = \boldsymbol{K_1}e^{\alpha t}e^{i\beta t} = \boldsymbol{K_1}e^{\alpha t}(\cos \beta t + i\ sen\ \beta t)$$
$$\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}e^{\overline{\lambda}_1 t} = \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}e^{\alpha t}e^{-i} \quad = \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}e^{\alpha t}(\cos \beta t - i\ sen\ \beta t)$$

Pelo princípio da superposição, Teorema 2, os seguintes vetores são solução:

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{K_1}e^{\lambda_1 t} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}e^{\overline{\lambda}_1 t}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}})e^{\alpha t}\cos\beta t - \frac{1}{2}i(-\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}})e^{\alpha t} sen\, \beta t$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \frac{1}{2}i\left(-\boldsymbol{K_1}e^{\lambda_1 t} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}e^{\overline{\lambda}_1 t}\right) = \frac{1}{2}i(-\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}})e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{1}{2}(\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}})e^{\alpha t} sen\, \beta t$$

Vemos que ambos os termos $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a$ e $\frac{1}{2}i(-z + \bar{z}) = b$ são números reais para qualquer número complexo $z = a + ib$. Portanto, as coordenadas dos vetores coluna $\frac{1}{2}(\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}})$ e $\frac{1}{2}i(-\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}})$ são números reais. Se definirmos

$$\boldsymbol{B_1} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B_2} = \tfrac{1}{2}i(-\boldsymbol{K_1} + \overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{1}}) \tag{22}$$

seremos levados ao seguinte teorema.

Teorema 9. Seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ no sistema homogêneo (9) e sejam $\boldsymbol{B_1}$ e $\boldsymbol{B_2}$ os valores coluna definidos em (22). Então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1 &= [\boldsymbol{B}_1 \cos\beta t - \boldsymbol{B}_2\, sen\, \beta t]e^{\alpha t} \\ \boldsymbol{X}_2 &= [\boldsymbol{B}_2 \cos\beta t - \boldsymbol{B}_1\, sen\, \beta t]e^{\alpha t} \end{aligned} \tag{23}$$

são soluções Linearmente Independentes de (9) em $(-\infty, \infty)$.

As matrizes $\boldsymbol{B_1}$ e $\boldsymbol{B_2}$ em (22) são frequentemente denotadas por

$$\boldsymbol{B_1} = Re(\boldsymbol{K_1}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B_2} = Im(\boldsymbol{K_1}) \tag{24}$$

uma vez que esses vetores são, respectivamente, as partes real e imaginária do autovetor $\boldsymbol{K_1}$.

3.4 Variação de Parâmetros

Sejam $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \dots, \boldsymbol{X_n}$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$ em um intervalo $\boldsymbol{I}$, então a solução geral do intervalo será $c_1\boldsymbol{X_1} + c_2\boldsymbol{X_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{X_n}$ ou

$$\boldsymbol{X} = c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{11} + \cdots + c_nx_{11} \\ c_2x_{11} + c_2x_{11} + \cdots + c_nx_{11} \\ \vdots \\ c_nx_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix} \tag{25}$$

A equação obtida em (25) pode ser considerada o produto da matriz $\boldsymbol{\Phi}$, de ordem $n \times n$, das entradas dos vetores soluções do sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$, pela matriz $\boldsymbol{C}$, de ordem $n \times 1$, vetor coluna das constantes arbitrárias $c_1,\ c_2, \dots,\ c_n$. Podemos então escrever

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}, \tag{26}$$

onde

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{\Phi}$ é chamada **matriz fundamental** do sistema no intervalo. Observemos duas propriedades dessa matriz:

- Uma matriz fundamental $\boldsymbol{\Phi}(t)$ é não singular, isto é, admite o inverso multiplicativo.
- Se $\boldsymbol{\Phi}(t)$ for a matriz fundamental do sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$, então

$$\boldsymbol{\Phi}'(t) = \boldsymbol{A\Phi}(t). \tag{27}$$

Podemos verificar que o determinante de $\boldsymbol{\Phi}(t)$ é igual ao Wronskiano $W(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n)$, por isto, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ é Linearmente Independente no intervalo I e seu determinante é diferente de zero para todo t no intervalo. Como $\boldsymbol{\Phi}(t)$ é não singular, existe o inverso multiplicativo para todo t no intervalo. Do resultado em (27), percebemos que cada coluna de $\boldsymbol{\Phi}(t)$ ser um vetor solução de $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$.

Verificaremos agora que, dado um sistema não homogêneo (8)

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}(t),$$

é possível substituir a matriz de constantes $\boldsymbol{C}$ em (26) por uma matriz coluna de funções

$$(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

de tal forma que

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t})\boldsymbol{U}(t) \tag{29}$$

seja solução.

Vejamos, derivando a expressão em (28), utilizando a regra da derivada produto temos

$$\boldsymbol{X'}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{U}'(t) + \boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{U}(t) \tag{30}$$

Observemos que $\boldsymbol{U}(t)$ é uma matriz coluna e, por isto, os produtos $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{U}'(t)$ e $\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{U}(t)$ não estão definidos, sendo assim a ordem dos produtos em (30) é muito importante.

Substituindo (29) e (30) em $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}(t)$, obtemos

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{U}'(t) + \boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{F}(t) \tag{31}$$

Usando agora a equação em (27) para substituir $\boldsymbol{\Phi}'(t)$,

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t).$$

Subtraindo ambos os membros da igualdade por $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{U}(t)$, temos

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{F}(t). \tag{32}$$

Multiplicando agora ambos os membros da equação (32) por $\boldsymbol{\Phi}^{-\mathbf{1}}(t)$, segue

$$\boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-\mathbf{1}}(t)\boldsymbol{F}(t),$$

Integrando, então, ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\boldsymbol{U}(t) = \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\, dt. \tag{33}$$

Como $\boldsymbol{X_p} = \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t})\boldsymbol{U}(t)$, concluímos que uma solução particular de (8) é

$$\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t}) \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\, dt \tag{34}$$

Para calcularmos a integral indefinida da matriz coluna $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)$ em (33), integramos cada entrada da matriz. Desde modo, a solução geral do sistema não homogêneo $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$, será $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_c + \boldsymbol{X}_p$ ou seja,

$$\boldsymbol{X} = \underbrace{\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{X}_c} + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t}) \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\, dt}_{\boldsymbol{X}_p} \tag{35}$$

Observemos que não há necessidade usar uma constante de integração no cálculo de $\int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\, dt$.

Vejamos um exemplo de variação de parâmetro, calculando a solução do sistema não homogêneo

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Para encontrarmos a solução desse sistema não homogêneo, vamos primeiro resolver o sistema homogêneo $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}.$$

A equação característica da matriz dos coeficientes é dada por

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = det\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de onde obtemos os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -5$. Pelo método usual, obtemos os autovetores correspondentes a λ_1 e λ_2, são, respectivamente,

$$\boldsymbol{K_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{K_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Os vetores são solução do sistema homogêneo $\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}$, portanto,

$$\boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{K_1} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{X_2} = \boldsymbol{K_2} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

As entradas de $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ formam, respectivamente, a primeira e a segunda colunas de $\boldsymbol{\Phi}(t)$. Logo,

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} e^{2t} & \frac{1}{3} e^{2t} \\ \frac{1}{3} e^{5t} & -\frac{1}{3} e^{5t} \end{pmatrix}.$$

De (34), obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{\Phi}(t) \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) \boldsymbol{F}(t)\, dt &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3} e^{2t} & \frac{1}{3} e^{2t} \\ \frac{1}{3} e^{5t} & -\frac{1}{3} e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3} e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3} e^{4t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{t} \\ \frac{1}{5} te^{5t} - \frac{1}{25} e^{5t} - \frac{1}{12} e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5} t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4} e^{-t} \\ \frac{3}{5} t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2} e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, de (35) que a solução geral do sistema não homogêneo

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

é

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_c} + \boldsymbol{X_p}$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C} + \boldsymbol{\Phi}(\mathrm{t}) \int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{F}(t)\, dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3.5 Exponencial de Matriz

Sabemos que uma equação diferencial linear de primeira ordem $x' = ax$ admite a solução geral $x = ce^{t}$, o que nos leva a indagar se é possível definir uma função exponencial de matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$ de forma que $e^{\boldsymbol{A}t}$ seja solução do problema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$.

Partindo deste pressuposto, primeiramente para **sistemas homogêneos**, vamos verificar agora que é possível definir a exponencial de uma matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$ de tal forma que

$$\boldsymbol{X} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C} \tag{36}$$

seja solução do sistema homogêneo $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$, onde $\boldsymbol{A}$ é a matriz $n \times n$ de constante e $\boldsymbol{C}$ é uma matriz coluna, $n \times 1$, de constantes arbitrárias. Observemos que a ordem da multiplicação das matrizes $e^{\boldsymbol{A}t}$ e $\boldsymbol{C}$ é importante, pois desejamos que o produto seja da ordem $n \times n$, por isto, a matriz $\boldsymbol{C}$ pós-multiplica $e^{\boldsymbol{A}t}$.

Para definirmos matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$ iremos usar uma representação inspirada em séries de potências da função exponencial escalar $e^{\boldsymbol{A}t}$:

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^k\frac{t^k}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{2!} \tag{37}$$

A série (37) converge para todo t. Substituindo na série, o 1 pela identidade multiplicativa $\boldsymbol{I}$ e a constante a por uma matriz $\boldsymbol{A}$, $n \times n$, de constantes, chegamos a uma definição para a matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$, de ordem $n \times n$.

Definição 6. Exponencial de matriz. Para a matriz $\boldsymbol{A}$, de ordem $n \times n$,

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{2!} \tag{38}$$

É possível mostrar que a série converge para uma matriz de ordem $n \times n$ para todo valor de t. Também é importante observar que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2)$ e assim por diante.

Para obtermos uma solução do sistema homogêneo $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, devemos derivar $\boldsymbol{X} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}$. Assim, vejamos a derivada da exponencial de matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$:

$$\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} \tag{39}$$

Diferenciando termo a termo em (38), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} &= \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \boldsymbol{A}^k\frac{t^k}{2!} + \cdots\right] = \\ &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3t^2 + \cdots = \\ &= \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{1} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \cdots\right] = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}. \end{aligned}$$

De (39), podemos provar agora que (36) é solução de $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ para todo $\boldsymbol{C}$, $n \times 1$, de constantes:

$$\boldsymbol{X}' = \frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}.$$

Se denotarmos a exponencial da matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$ pelo símbolo $\Psi(t)$, então (39) será equivalente à equação diferencial matricial $\Psi'(t) = \boldsymbol{A}\Psi(t)$. Além disso, segue imediatamente da Definição 6 que $\Psi(0) = e^{\boldsymbol{A}0} = \boldsymbol{I}$ e, portanto, $\det \Psi(0) \neq 0$. Consequentemente, essas duas propriedades são suficientes para concluirmos que $\Psi(t)$ é uma **matriz fundamental** do sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$.

Vamos agora, verificar para **sistemas não homogêneos**, que é possível definir uma função exponencial de matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$ de forma que $e^{\boldsymbol{A}t}$ seja solução do problema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}(t)$.

Sabemos que a solução geral de uma única equação diferencial linear de primeira ordem $x' = ax + f(t)$, onde a é uma constante, pode ser expressa por

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at} \int_{t_0}^{t} e^{-as} f(s)\, d(s) .$$

Para um sistema não homogêneo de equações diferenciais lineares de primeira ordem é possível mostrar que a solução geral de $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}(t)$, onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz, $n \times n$, de constantes, é

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_c} + \boldsymbol{X_p} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C} + e^{\boldsymbol{A}t} \int_{t_0}^{t} e^{-\boldsymbol{A}s} \boldsymbol{F}(s)\, d(s). \tag{40}$$

Vemos aqui que a exponencial de matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$ é uma matriz fundamental, portanto, sempre será não singular e, por isto, $e^{-\boldsymbol{A}s} = (e^{\boldsymbol{A}s})^{-1}$. Na prática, $e^{-\boldsymbol{A}s}$ pode ser obtida de $e^{\boldsymbol{A}t}$ simplesmente substituindo t por $-s$.

Há várias maneiras para definirmos $e^{\boldsymbol{A}t}$, neste estudo iremos utilizar a transformada de Laplace. Vimos de (40) que $\boldsymbol{X} = e^{\boldsymbol{A}t}$ é uma solução de $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$. De fato, como $e^{0t} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{X} = e^{\boldsymbol{A}t}$ é uma solução do problema de valor inicial

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}, \qquad \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{I}. \tag{41}$$

Se $\boldsymbol{x}(s) = \mathcal{L}\{\boldsymbol{X}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{\boldsymbol{A}t}\}$, então a transformada de Laplace de (41) será

$$sx(s) - \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{A}x(s) \qquad \text{ou} \qquad (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{I}.$$

Multiplicando a última equação por $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ obtemos que $\boldsymbol{x}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{I} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$. Ou seja

$$\mathcal{L}\{e^{\boldsymbol{A}t}\} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{42}$$

ou

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}.$$

4. EFEITOS DE UM TERREMOTO EM UM PRÉDIO DE VÁRIOS ANDARES

Iremos demonstrar uma aplicação de sistemas de equações diferenciais ordinárias com modelagem no efeito de um terremoto em um prédio de vários andares, inicialmente, definiremos as equações diferenciais que compõem o sistema e representam as grandezas participantes do fenômeno.

Na **figura 1**, a seguir, podemos perceber que um prédio vertical é usualmente constituído da sobreposição de seus andares, onde a estrutura do andar térreo está apoiada sobre o solo, a partir daí, cada andar está apoiado sobre o andar imediatamente inferior, até o seu último ($n - ésimo$) andar.

Figura 1 – Prédio de n andares

Usualmente, a estrutura de um edifício é formada por vigas e colunas que exercem a função de suportar as cargas produzidas por seus pavimentos. Na maioria dos prédios, esta estrutura é construída em concreto armado, que é constituído por concreto (mistura de cimento, areia e brita) e barras de aço, que é um material metálico altamente elástico. Considerando esta característica estrutural, suponhamos que os andares estejam conectados por junções elásticas cujos efeitos assemelham-se ao de uma mola e que o i-ésimo andar do edifício tenha massa m_i constante. Cada junção exerce uma força restauradora F quando os andares são deslocados um em relação ao outro, de modo que esta força é oposta à direção do deslocamento e proporcional à distensão s.

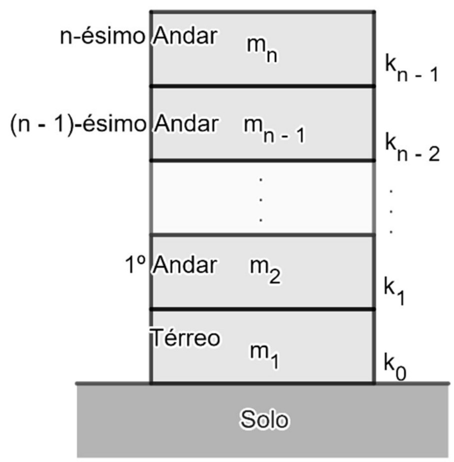

Figura 2 – Constante de proporcionalidade em cada pavimento de um prédio de n andares

Podemos aqui aplicar a Lei Hooke em sua forma mais simples, $F = ks$, onde k é uma constante de proporcionalidade denominada **constante elástica**, de onde obtemos que a força restauradora entre dois andares é dada por

$$F = k_i(x_{i+1} - x_i), \tag{43}$$

onde k_i representa a constante de proporcionalidade entre o i-ésimo e o $(i + 1)$-ésimo pavimentos, x_i o deslocamento horizontal do i-ésimo pavimento a partir do equilíbrio e $x_{i+1} - x_i$ o deslocamento o $(i + 1)$-ésimo pavimento em relação ao i-ésimo pavimento. Suporemos também que uma relação análoga ocorre entre o primeiro piso e o 1º pavimento (térreo), no nível $i = 0$, com constante de proporcionalidade k_0.

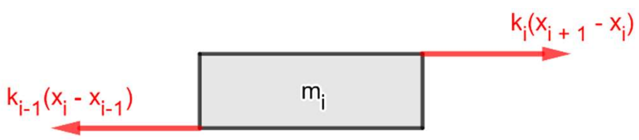

Figura 3 – Forças restauradoras que atuam em um pavimento

Considerando a massa de cada pavimento m_i constante, podemos aplicar a segunda lei do movimento de Newton, $F = ma$, a cada seção do prédio.

É sabido da Física clássica que a aceleração é, por definição, a taxa de variação da velocidade, ou seja, a aceleração corresponde à derivada da velocidade. A velocidade, por sua vez, é a taxa de variação do deslocamento, isto é, a velocidade corresponde a derivada do deslocamento. Nota-se que a aceleração é a derivada segunda do deslocamento ($a = x$''). Assim podemos então escrever a segunda lei do movimento de Newton como

$$F = m_i x_i''. \tag{44}$$

Com este resultado podemos determinar a equação da força restauradora para cada nível i de cada andar.

No primeiro pavimento (andar térreo), atuam as forças restauradoras entre o piso e térreo (nível $i = 0$), que consideraremos a orientação no sentido negativo, e entre o térreo e o primeiro andar (nível $i = 1$), que consideremos no sentido positivo, conforme **figura 4**.

Da equação em (43), no nível $i = 0$, obtemos

$$F_0 = -k_0(x_{0+1} - x_0) = -k_0 x_1$$

e no nível $i = 1$,

$$F_1 = k_1(x_{1+1} - x_1) = k_1(x_2 - x_1).$$

Aplicando a Segunda Lei do Movimento de Newton, em (45), temos

$$F_1 = m_1 x_1''.$$

Daí, a equação da força restauradora resultante no primeiro pavimento (andar térreo) é dada por

$$m_1x_1'' = -k_0x_1 + k_1(x_2 - x_1).$$

Analogamente, no segundo pavimento (primeiro andar), atuam as forças restauradoras entre o andar térreo e o primeiro andar (nível $i = 1$) e entre o primeiro e segundo andar (nível $i = 2$).

No nível $i = 1$,

$$F_1 = -k_1(x_{1+1} - x_1) = -k_1(x_2 - x_1)$$

e no nível $i = 2$,

$$F_2 = k_2(x_{2+1} - x_2) = k_2(x_3 - x_2).$$

Aplicando a Segunda Lei do Movimento de Newton, em (46), temos

$$F_1 = m_1x_1''.$$

Temos assim, a equação da força restauradora resultante no segundo pavimento (primeiro andar) é dada por

$$m_2x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2).$$

Repetindo o procedimento utilizado para cada pavimento do prédio, verificamos que a generalização da força restauradora resultante para o i-ésimo nível do n-ésimo andar é dada pela equação diferencial linear de segunda ordem

$$m_i x_i'' = k_i(x_{i+1} - x_i) \tag{47}$$

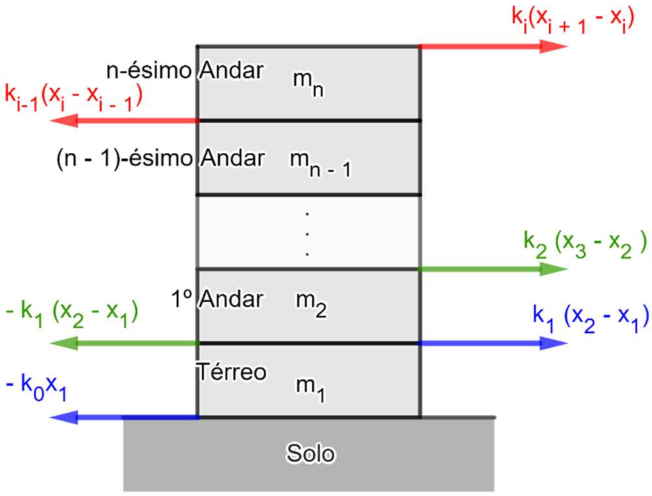

Figura 4 – Força restauradoras que atuam em cada pavimento de um prédio de n andares

Reunindo todas equações obtidas para os i-ésimos andares do prédio podemos escrever

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_n x_n'' = -k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{cases} \tag{48}$$

A expressão em (48) é a um Sistema de Equações Diferenciais Lineares que descreve a ação das forças restauradoras em sua estrutura devido ao movimento causado por um terremoto.

Como exemplo, consideremos um edifício de dois andares, onde cada pavimento tem a mesma massa $m = 5.000\ kg$ e cada força restauradora tem o mesmo valor de $k = 10.000\ kg/s^2$.

Incialmente, vamos escrever as equações das forças restauradoras para cada andar edifício. No andar térreo, atuam força restauradoras entre o solo e o primeiro piso e entre o térreo e o primeiro andar, daí temos,

$$m_1 x_1'' = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1)$$
$$5.000 x_1'' = -10.000 x_1 + 10.000(x_2 - x_1)$$
$$x_1'' = \frac{10.000}{5000}.\left[-x_1 + (x_2 - x_1)\right]$$
$$x_1'' = -4x_1 + 2x_2 \qquad (i)$$

Enquanto no primeiro andar, há forças restauradoras apenas entre o térreo e o primeiro andar,

$$m_2 x_2'' = -k_1(x_2 - x_1)$$
$$5.000 x_2'' = -10.000(x_2 - x_1)$$
$$x_2'' = \frac{10.000}{5.000}.\left[x_2 - x_1\right]$$
$$x_2'' = -2x_1 + 2x_2 \qquad (ii)$$

Reunindo as equações (i) e (ii), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem.

$$\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 2x_2 \\ x_2'' = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Este resultado descreve a ação das forças restauradoras na estrutura de um edifício de dois andares devido ao movimento causado por um terremoto, onde cada pavimento tem $m = m_1 = m_2 = 5.000\ kg$ e cada força restauradora tem o valor de $k = k_1 = k_2 = 10.000\ kg/s^2$.

É possível representar o sistema em (48) na sua forma matricial. Para tanto, consideremos $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$, respectivamente, as matrizes

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} -(k_0 + k_1) & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_{n-1} \end{pmatrix}$$

o sistema de equação diferenciais lineares em (48) pode ser escrito na forma

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} \cdot \frac{d^2}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(k_0 + k_1) & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{49}$$

ou, simplesmente,

$$\boldsymbol{MX''} = \boldsymbol{KX} \tag{50}$$

As matrizes $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$, $n \times n$, são chamadas, respectivamente, de **matriz de massa** e **matriz de rigidez** do edifício. Podemos observar que a matriz $\boldsymbol{M}$ é diagonal e tem a massa do i-ésimo andar como i-ésima entrada da diagonal. Como a matriz $\boldsymbol{M}$ admite a inversa

$$\boldsymbol{M^{-1}} \begin{pmatrix} {m_1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {m_2}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {m_n}^{-1} \end{pmatrix},$$

Assim obtemos a equação matricial de um sistema homogêneo de segunda ordem na forma matricial

$$\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{51}$$

Onde $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ é a matriz dos coeficientes.

Durante um terremoto, uma grande força horizontal é aplicada ao primeiro pavimento. Se esta força for de natureza oscilatória, digamos da forma $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{G}\ \cos\gamma t$, onde **G** é a matriz coluna de constantes, poderá haver grandes deslocamentos no edifício, especialmente se a frequência γ do termo forçante $\boldsymbol{F}$ estiver próximo de uma das frequências naturais do prédio (fenômeno de ressonância), fazendo com que a amplitude de sua oscilação seja amplificada, podendo levar ao colapso de sua estrutura.

Definição 7. As **frequências naturais** do edifício são as raízes quadradas dos negativos dos autovalores. Se λ_i for o i-ésimo autovalor de $\boldsymbol{A}$, então $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ será a i-ésima frequência de $i = 1, 2, \dots, n$.

Assim, podemos representar a estabilidade do edifício durante o terremoto a partir dos autovalores de $\boldsymbol{A}$, sendo este autovalores negativos e distintos.

Durante um terremoto típico, o período de oscilação $T_i = 2\pi/\omega_i$ (em segundos) costuma está no intervalo de 2 a 3 segundos.

Como exemplo, consideremos agora um edifício de 10 andares, em que cada pavimento tem $m = 10.000\,kg$ e cada força restauradora tem a constante de proporcionalidade k_i tem o valor de $5.000\,kg/s^2$. Como as matrizes **M** e **K** são, ambas 10×10, a matriz **A** é também 10×10.

$$\boldsymbol{M^{-1}K} = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

Os autovalores de λ_i da matriz **A** podem ser obtidos com a ajuda de um Software Computacional Matemático.

Os autovalores de λ_i bem como as respectivas frequências $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ e os períodos $T_i = 2\pi/\omega_i$ (em segundos) correspondentes são assumidos na Tabela 1.

Tabela 1 – Autovalores, frequência e período de oscilação de um prédio de 10 andares em que cada pavimento tem $m = 10.000\ kg$ e cada força restauradora tem a constante de proporcionalidade k_i tem o valor de $5.000\ kg/s^2$

λ_i	-1,9560	-1,8260	-1,6230	-1,3650	-1,0750	-0,7770	-0,5000	-0,2670	-0,0990	-0,0110
ω_i	1,3990	1,3510	1,2740	1,1680	1,0370	0,8810	0,7070	0,5170	0,3150	0,1050
T_i	4,4910	4,6510	4,9320	5,3790	6,0590	7,1320	8,8870	12,1530	19,9470	59,8400

Observando a última linha de números da tabela, podemos verificar que esse edifício não parece correr risco algum em desenvolver o fenômeno de ressonância, pois os períodos de oscilação T_i são maiores ou iguais a $4{,}4910$ segundos, quando, para que ocorra ressonância o período de deveria estar entre 2 e 3 segundos. De onde concluímos que a estrutura deste edifício pode ser considerada segura para o evento de um terremoto típico.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos ao longo do nosso trabalho descrever matematicamente os Efeitos de um Terremoto em um Prédio de Vários Andares. Vimos que, a partir de conceitos fundamentais advindos da Álgebra Linear e da Física Clássica, é possível transformar em modelagem matemática as propriedades de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares.

Conseguimos verificar que é possível prever o comportamento oscilatório de um prédio de vários andares durante um terremoto típico, calculando, a partir dos autovalores das matrizes do Sistema de Equações Diferenciais Lineares, as frequências naturais e os períodos de oscilação do edifício, podendo assim prever se este tende, ou não, a desenvolver o fenômeno de ressonância, o que pode ocasionar o comprometimento da sua estrutura.

Por fim, ao longo de nossa pesquisa, podemos demonstrar a partir de um caso particular que é possível a utilização prática de Sistemas de Equações Diferenciais para aplicações em outras áreas de estudo, neste caso, da Engenharia Civil, ajudando assim no desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento humano

6. REFERÊNCIAS

ASSIS, José Gomes de. El al. Licenciatura em Matemática a Distância. volume 3. Ed. 1. José Gomes de Assis... [et al]. João Pessoa. Gráfica UFPB, 2008.

ASSIS, José Gomes de. El al. Licenciatura em Matemática a Distância. volume 8. Ed. 1. José Gomes de Assis... [et al]. João Pessoa. Gráfica UFPB, 2011.

BOLDRINI, José Luíz, COSTA, Sueli Irene Rodrigues, FIGUEIREDO, Vera Lúcia, WETZLER, Henry G. Álgebra Linear. São Paulo: 3ª ed. Harper & Row do Brasil, 1980.

FERNANDES, Ângela Maria Dias. El al. Licenciatura em Matemática a Distância. volume 7. Ed. 1. José Gomes de Assis... [et al]. João Pessoa. Gráfica UFPB, 2010.

HALLIDAY, David. Fundamentos da física, volume 1: mecânica / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LIMA NETO, Eufrásio de Andrade. El al. Licenciatura em Matemática a Distância. volume 5. Ed. 1. Eufrásio de Andrade Lima Neto... [et al]. João Pessoa. Editora Universitária UFPB, 2009.

MONTE, Eduardo Marinho do. El al. Licenciatura em Matemática a Distância. volume 6. Ed. 1. Eduardo Marinho do Monte... [et al]. Et al Ed. João Pessoa. Editora Universitária UFPB, 2010.

SILVA, Antônio Sales da. El al. Matemática a distância. volume 1. Ed. 1. Antônio Sales da Silva... [et al]. João Pessoa. Liceu, 2007.

SILVA, Antônio Sales da. El al. Matemática a distância. volume 2. Ed. 1. Antônio Sales da

Silva... [et al]. Et al Ed. João Pessoa. Editora Universitária UFPB, 2008.

SILVA, Antônio de Andrade e. El al. Licenciatura em Matemática a Distância. volume 4. Ed. 1. Antônio de Andrade e Silva... [et al]. Et al Ed. João Pessoa. Editora Universitária UFPB, 2009.

ZILL, Dennis G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem / Dennis G. Zill; Tradução Cyro de Carvalho Patarra; Revisão técnica Antônio Luiz Pereira. -- São Paulo ; Pioneira Thomson Learning, 2003.

ZILL, Dennis G. Equações diferenciais, volume 1 / Dennis G. Zill, Michael R. Cullen; tradução Antônio Zumpano, revisão técnica: Antônio Pertence Jr. São Paulo; Pearson Makron Books, 2001.