



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**DAMIÃO ALVES ROBERTO**

**DOMINÓ PROBABÍLISTICO: Uma concepção no ensino de  
matemática/probabilidade por meio dos jogos**

Rio Tinto – PB  
2019

**DAMIÃO ALVES ROBERTO**

**DOMINÓ PROBABÍLISTICO: Uma concepção no ensino de  
matemática/probabilidade por meio dos jogos**

Trabalho Monográfico apresentado à  
Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática como requisito parcial para  
obtenção do título de Licenciado em  
Matemática.

**Orientador(a):** Prof. Me. Josevandro Barros  
Nascimento.

Rio Tinto – PB  
2019

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catálogo e Classificação**

R642d Roberto, Damiao Alves.

DOMINÓ PROBABÍLISTICO: Uma concepção no ensino de  
matemática/probabilidade por meio dos jogos / Damiao  
Alves Roberto. - João Pessoa, 2019.

50 f.

Orientação: Josevandro Barros Nascimento.  
Monografia (Graduação) - UFPB/CCAÉ.

1. Jogos. 2. Ensino/Educação Probabilidade. 3. Dominó  
probabilístico. I. Barros Nascimento, Josevandro. II.  
Título.

UFPB/BC

**DAMIÃO ALVES ROBERTO**

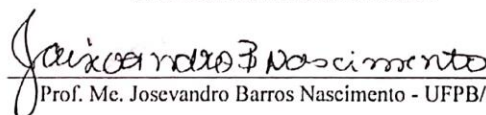
**DOMINÓ PROBABÍLISTICO: Uma concepção no ensino de  
matemática/probabilidade por meio dos jogos**

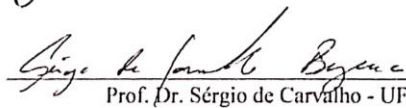
Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em  
Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

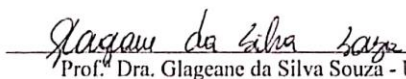
**Orientador(a):** Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento.

Aprovado em: 24 / 09 / 19

**BANCA EXAMINADORA**

  
Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento - UFPB/DCE

  
Prof. Dr. Sérgio de Carvalho - UFPB/CI

  
Prof. Dra. Glageane da Silva Souza - UFCG/CES

### **Dedicatória**

Dedico, principalmente aos meus pais, Antônio Minervino Roberto e Eudes Alves Roberto, a minha esposa, Ana Ligya e a meu filho Enzo Gabriel.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço ao meu Deus todo poderoso, por me proporcionar um momento tão importante que é terminar um curso superior, pois sem consenso dele eu não estaria aqui nesse momento.

Agradeço aos meus pais, Antônio Minervino Roberto e Eudes Alves Roberto que sempre me incentivaram nessa longa caminhada, agradeço também a minha esposa Ana Ligya, que está sempre ao meu lado em tudo que faço e ao meu filho que é minha fonte inspiradora.

Também é com o maior prazer e gratidão que agradeço a meu orientador Prof. Me. Josevandro Barros Nascimento, um professor jovem e com um futuro brilhante na educação matemática/matemática que chegou no campus em uma boa hora com sua dedicação me fez acreditar que conseguia concluir este TCC.

Não posso deixar de agradecer também a banca examinadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Glageane da Silva Souza e Prof. D.Sc. Sérgio De Carvalho das contribuições valiosas em nosso trabalho de conclusão de curso.

Aos meus amigos do curso, Gilson Souto, Anderson Diego e Júlio Cezar, que me acompanharam durante todo esse tempo que passamos na universidade, aos meus queridos professores mestres e doutores na arte de ensinar que me proporcionou chegar ao término do curso

Por fim agradeço a todos que de uma forma mais simples fizeram ou fazem parte desse momento tão importante em minha vida acadêmica obrigado a todos.

“é significativa a discussão da linguagem probabilística nos processos de ensino e de aprendizagem de probabilidade”

(SANTOS, 2015, p. 43)

## RESUMO

Durante o decorrer do tempo a educação básica tem tido diversas discussões no que diz respeito ao ensino de probabilidade e de estatística. Este estudo relacionado a estes temas são primordiais para nossa sociedade. Nosso objetivo nesta pesquisa é desenvolver um dominó probabilístico para os alunos do ensino fundamental. Com ênfase no percurso metodológico em alguns referenciais teóricos na parte da educação/ensino de matemática/probabilidade confeccionamos o jogo que traz a instigação dos alunos nas séries finais do ensino fundamental. Portanto esse jogo irá trazer o desenvolvimento e a estratégia, o raciocínio lógico do mesmo. O jogo dominó probabilístico, será uma forma descontraída de aprender matemática/probabilidade. E com isso expandir para outras áreas de conhecimento científicos.

**Palavras-chave:** Jogos. Ensino/Educação Probabilidade. Dominó probabilístico.

## **ABSTRACT**

Over time basic education has had several discussions regarding the teaching of probability and statistics. This related study and these themes are paramount to our society. Our goal in this research is to develop a probabilistic domino for elementary students. With emphasis on the methodological path in some theoretical references in the education / teaching of mathematics / probability we made the game that brings the instigation of students in the final grades of elementary school. So this game will bring development and strategy, the logical reasoning of it. The probabilistic domino game will be a relaxed way to learn math / probability. And with that expand to other areas of scientific knowledge.

**Keywords:** Games. Teaching / Education Probability. Probabilistic domino.

## Sumário

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.1 Apresentação do Tema .....                                                    | 11        |
| 1.2 Problema e Justificativa.....                                                 | 12        |
| 1.3 Objetivos.....                                                                | 13        |
| 1.3.1 Objetivo Geral .....                                                        | 13        |
| 1.3.2 Objetivos Específicos.....                                                  | 13        |
| 1.4 Percurso metodológico da pesquisa. ....                                       | 14        |
| <b>2.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>                                              | <b>14</b> |
| 2.1 Resolução de problema .....                                                   | 14        |
| 2.2 O material concreto no ensino de Matemática .....                             | 17        |
| 2.3 Jogos matemáticos.....                                                        | 20        |
| 2.4 Ensino de probabilidades .....                                                | 22        |
| 2.5 O ensino da probabilidade: o papel da linguagem na formação de conceitos..... | 23        |
| <b>3. DEFINIÇÕES PROBABILÍSTICAS .....</b>                                        | <b>26</b> |
| 3.1 O princípio básico da contagem .....                                          | 26        |
| 3.3 Permutação.....                                                               | 28        |
| 3.4 Coeficientes multinomiais.....                                                | 28        |
| 3.5 O número de soluções inteiras de equações .....                               | 30        |
| 3.6 Probabilidade condicional e independência .....                               | 31        |
| 3.6 Eventos independentes .....                                                   | 34        |
| 3.8 $(P   f)$ uma probabilidade.....                                              | 35        |
| <b>4. O JOGO DOMINÓ PROBABILÍSTICO .....</b>                                      | <b>38</b> |
| 4.1 O dominó probabilístico.....                                                  | 38        |
| 4.1 Confecção do dominó probabilístico.....                                       | 39        |
| 4.2 Dominó probabilístico.....                                                    | 39        |
| 4.3 A caixinha .....                                                              | 40        |
| 4.4 Regras do jogo: Dominó probabilístico .....                                   | 40        |
| <b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS. ....</b>                                              | <b>41</b> |
| <b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS. ....</b>                                        | <b>42</b> |
| <b>ANEXO I.....</b>                                                               | <b>47</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Apresentação do Tema

O ensino de probabilidade e da estatística na educação básica tem sido tema de inúmeras discussões. Os estudos relacionando com os conceitos probabilísticos são indispensáveis no contexto da sociedade atual.

Os estudos de probabilidade fazem parte da matemática em um contexto que estuda os acontecimentos aleatório e deve ser associado ao ensino e aprendizagem dos alunos em diferentes enfoques, que estão relacionados e surgem as diversas partes necessárias para a compreensão universal dos conceitos.

Um entendimento dos conceitos de probabilidade só se consegue desenvolver a partir de alguns conceitos formais da probabilidade, nesta perspectiva que os estudos estejam associados nas experiências dos estudantes (BATENERO, 2006).

Desse modo, o ensino com a resolução de problema na perspectiva do ensino da matemática/probabilidade e suas definições torna-se claras para muitos professores, pois avaliam que a resolução de problema incide em situações do dia a dia do cotidiano do aluno e onde envolva conteúdo matemáticos cujos artifícios de resolução tenha sido previamente apresenta dos a eles.

Ao associarmos o uso do material concreto de matemática em conjunto com a resolução de problema possibilita desenvolver estratégias de aprendizagem com raciocínio lógico dedutivo e que favorece a compressão dos conceitos probabilísticos de situações do dia a dia.

Dessa forma, pesquisas sobre tais conhecimentos foram desenvolvidas em diversos países. Dentre essas pesquisas, as que envolvem a linguagem como destaca Green (1982); Godino, Batanero e Cañizares (1996); Gal (2005); Watson (2006), Santos (2010); Nacarato e Grando (2013); Santos (2015), Carvalho (2017) e Nascimento (2018), uma vez que possibilita compreender como os alunos estão entendendo a probabilidade.

Ao trabalho com os jogos matemáticos pedagógicos de forma significativa no ensino e aprendizagem dos pensamentos probabilísticos. Para tanto, o tema apresentado em nossa pesquisa é mostrar a importância que os jogos podem contribuir para os pensamentos probabilísticos na educação básica.

Neste sentido apresentamos o nosso problema e justificativa que embasa nosso ponto de partida da pesquisa de conclusão de curso.

## 1.2 Problema e Justificativa

Os conceitos de estatística e probabilidade, no fim da década de 90 era desconhecido por muitos profissionais da educação básica, nesta mesma perspectiva começa ser questionada pela comunidade educacional e acadêmicos, tendo sido associado oficialmente a estrutura curricular da disciplina de matemática da educação básica (CIABOTTI, 2015).

A importância de discutir o ensino de probabilidade e estatística nas escolas de educação básica está sugerida nos Parâmetros curriculares Nacionais (PCN) e no plano pedagógicos dos currículos de vários estados e das escolas.

Os PCN, Brasil (1997), sugere que os professores contribuam com motivações para os alunos possa observar os acontecimentos, realizar hipóteses, fazer classificações de dados e abordar e analisa-los dos aspectos da investigação científica.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p.52).

Para Carvalho (2017) contribui que esse documento nos dá apreço de um trabalho que possa ser desenvolvido em conjunto com os alunos possibilitado o contato com fatos reais de natureza aleatória e o desenvolvimento por meio de aplicações de experimentos e observação de certos eventos.

Com as contribuições do ensino de probabilidade discutido nos PCN, a base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda a inserção na disciplina de matemática os conteúdos de probabilidade na educação básica em que traz várias contribuições para o ensino de probabilidade. (NASCIMENTO, 2018).

Ao escolher pelo o desenvolvimento com os jogos pedagógicos em sala de aula, é imprescindível conhecer os aspectos que contribui para o desenvolvimento da aprendizagem significativa neste sentido, Moura afirma que “um plano de ação, com a busca de conhecimentos anteriores, através da comparação com situações semelhantes à

proposta ou da síntese de conhecimentos anteriores, de modo que haja uma ruptura no conhecimento anterior” (MOURA, 1991, p. 49). Tornando o jogo pedagógico como elemento para utilização dos professores.

Granado (2004) em suas pesquisas defende o uso do jogo como estratégia em sala de aula numa perspectiva associada a resolução de problema:

“O cerne da resolução de problemas está no processo de criação de estratégias e na análise, processada pelo aluno, das várias possibilidades de resolução. No jogo ocorre fato semelhante. Ele representa uma situação problema determinada por regras, em que o indivíduo busca a todo o momento. Elaborando estratégias e reestruturando-as, vencer o jogo, ou seja, resolver o problema” (GRANADO, 2004, p. 29).

Assim, ao trabalharmos por meio do uso dos jogos nas aulas de matemática o professor estará promovendo maiores oportunidades de apropriação das atividades que desenvolvem os pensamentos matemáticos/probabilísticos.

Baseando-se nessas ideias e questionamentos elaboramos os nossos objetivos gerais e específicos.

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1 Objetivo Geral

- Desenvolver um domínio probabilístico para os alunos do ensino fundamental dos anos finais.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Construir um referencial teórico das pesquisas da educação matemática/matemática;
- Produzir um jogo didático pedagógico que aborde os conceitos relacionando ao processo de ensino e aprendizagem dos pensamentos probabilísticos.

Neste sentido traçamos o nosso percurso metodológico da pesquisa.

#### 1.4 Percurso metodológico da pesquisa.

O nosso percurso metodológico será desenvolvido pelos objetivos traçados, pois segundo Andrade (2006, p.117), “metodologia é o conjunto de métodos ou caminhos que são percorridos na busca do conhecimento”.

Nossa pesquisa se caracteriza em uma revisão das literaturas acadêmicas e bibliográficas “oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente” (MANZO,1971, pág.32). Neste sentido possibilitar que seja feito críticas construtivas em que "o reforço paralelo na análise de suas pesquisas ou manipulação de suas informações" (Trujillo, 1974, pág. 230).

Assim, compreendemos que os jogos probabilísticos possam ser desenvolvidos em um contexto de sala de aula com atividade que caracterize os pensamentos probabilísticos e as estratégias adequadas a partir da proposta do DOMINÓ PROBABILISTICOS confeccionando pelo autor.

Apresentamos a análise e elaborada para a fundamentação teórica.

## 2.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Resolução de problema

Desde a antiguidade os problemas matemáticos têm ocupado um lugar de destaque, sendo assim muitos educadores recentes têm utilizados sua prática em sala (MILANI, 2011). Situações problemas do cotidiano vêm sendo desenvolvida nos currículos da disciplina de matemática por muitos professores. O ensino da educação matemática tem questionado a ideia de resolver situações problemas precisam ser destacados.

Para os autores D’Ambrósio (2010) e relaciona que

- “Problema é uma situação, real ou abstrata, ainda não resolvida, em qualquer campo do conhecimento e de ação” (D’AMBRÓSIO, 2010, p. 1).

Compartilhando do pensamento sobre resolução de problema Onuchic (2008, p.9) problema refere-se

- “a tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer” (ONUChIC, 2008, p.9).

Neste sentido necessário adequar os conteúdos de matemática para sala de aula. De acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la” (BRASIL, 1997, p. 44).

Partindo de um problema temos as resoluções de problemas que são definidas pelo *National Council of Teachers of Mathematics*<sup>1</sup> (NCTM) que em 1980 foi apresentado para os educadores as reclamações constantes daquela época a principal reclamação foi que as resoluções de problemas deveriam ter um foco no ensino da matemática (ONUChIC, 2008). Muitos educadores constatarem que a função da matemática que os alunos aprendem a fórmula de resolver problemas, (Larry .L. Hatfield 2009).

O maior objetivos dos educadores na matemática é fazer com que os alunos aprendam os conteúdos matemáticos e consequentemente as resoluções de problemas. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções problemas. (HATFIELD apud DANTE, 2009, p.15).

Pela grande impotência das resoluções de problemas no ensino da matemática, foram apresentados alguns estudos sobre esse tema, o matemático George Poly foi o primeiro matemático a escrever um livro sobre resoluções de problemas em 1945, traduzido para vários idiomas inclusive no Brasil foi lançado em 1978.

No século XX, nas pesquisas e estudos na educação matemática destaca-se a resolução de problemas, que teve como grande pesquisador e atuante nessa área o matemático George Poly. Pesquisador da área de atuação que trouxe ideias detalhadas sobre resoluções de problemas nos currículos escolares no ensino da matemática resgatando ideia do método heurística.

Os professores Milton Rosa e Daniel Clark Orey (2010), confirmam: Na contemporaneidade, Polya (1945) resgatou a importância histórica, a eficácia, o alcance, e a legitimidade dos resultados da heurística, pois de acordo com ele, a heurística é o

---

<sup>1</sup>Conselho Nacional de Professores de Matemática. O Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) foi fundado em 1920. Ele fornece serviços relacionados à educação matemática nos Estados Unidos e no Canadá. O NCTM realiza conferências nacionais e regionais anuais para professores e publica cinco revistas.

“estudo dos métodos e regras da descoberta e da invenção”.(ROSA & OREY, 2010, p. 10).

Os autores consideram o método heurístico como uma forma de regras que leva o autor a um determinado caminho concreto, uma descoberta ou uma inovação na sua pesquisa, e que não utiliza o prognóstico desnecessário, mas aplica bons conceitos que são fundamentais no processo de resolução de problemas.

Muitos autores ou a maioria deles constata e alertam que tentativas e erros também é um caso especial de heurístico, justamente porque, quando se faz muitas tentativas num determinado problema para tentar resolvê-lo, onde a solução de um problema pode ser encontrada por tentativas, embora seja preciso testar tal solução com o rigor do método científico (ROSA & OREY, 2010, p. 8).

Como o matemático e pesquisador George Poly, já tinha pesquisado no campo da matemática em vários ramos, como probabilidade e equação parciais, seu maior feito foi na área de resolução de problemas com vários trabalhos entre esses trabalhos podemos destacar, *Howto solve it (1945)*, no Brasil a tradução foi a “ arte de resolver problemas em (1978).

O principal objetivo de George Poly na matemática era de resolução de problemas. Por isso organizou esses processos em quatro fases:

- 1º fase: e a de compreender os processos que os alunos consigam ser instigado a resolver determinadas situações problemas. Que eles os alunos consigam assimilar figuras dados de algumas situações problemas, identificar essas figuras como alguns gráficos que eles sejam capazes de traçar nestes gráficos alguns dados.
- 2º fase: e que os alunos devem estabelecer estratégias e que os mesmos e que os mesmos, procure levantar algumas questões problemas, pois o autor George Poly diz que, “As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos
- 3º fase: esta é a fase dos planos concretizados, ou seja, é a fase mais, pois como as anteriores foram bem desenvolvidas. Sendo assim os alunos conseguiram assimilar todo processo e que os mesmos sejam instigados para desempenhar cada procedimento com maior atenção a cada momento.
- 4º fase: refere-se ao retrospecto; A investigação e a parte fundamental pois nos remetem e uma depuração de uma situação problema. “ (POLYA, 1978, p. 6).

Essa modificação tem como propósito investigar os procedimentos utilizados, com a finalidade de simplificá-los. Encontrar outros métodos para resolver problemas de formas mais simples.

## 2.2 O material concreto no ensino de Matemática

Os materiais didáticos manipuláveis (MD) compõem um importante recurso didático no ensino e aprendizagem dos conteúdos de matemática perante os estudantes e em sala de aula. Estes materiais contornar as dificuldades nas aulas de matemática tornando mais atrativa e lúdica. Permitindo a aproximação da teoria matemática da verificação na prática, por meio da ação manipulável (RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid 2012).

Lorenzato (2006), considera o papel do professor de suma importância no sucesso e fracasso escolar do aluno. Para o autor, não satisfaz o professor dispor de um bom material didático para que se tenha garantia de uma aprendizagem significativa. Neste sentido o necessário é saber utilizar corretamente estas matérias em sala de aula.

Lorenzato (2006) define material didático concreto, como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem” (LORENZATO, 2006, p. 18). Para o autor caracteriza que com o uso do material didático manipulável a percepção das aplicações nos conteúdos exposto pelo professor facilita sua compreensão.

O aluno que não consegue caracterizar os conceitos, definições matemáticas que são transpostos pelo professor. O docente que não alcançar suas metas e resultados aceitável junto a seus alunos acaba lotando os espaços das salas de aulas e cursos, encontros e congressos em investigação de material didático que possa resolver os seus problemas em sala de aula (FIORENTINI & MIORIM, 1990).

Consideremos material manipulável (MD) como o giz, calculadora, jogos, cartaz, cadernos, canetas entre outros materiais. Com variados materiais, o autor destaca, em especial o material didático concreto que, de acordo com ele pode ter duas interpretações “uma delas refere-se ao palpável, manipulável e a outra, mais ampla, inclui também imagens gráficas”. (LORENZATO, 2006, p. 22-23). Os MD são destacados em três tipos;

**Quadro 1:** Tipos de material.

| O MATERIAL.                           | CARACTERÍSTICA.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Material manipulável estático</b>  | Material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação. Durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele algumas propriedades. Ao restringir o contato com o material didático apenas para o campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto. |
| <b>Material manipulável dinâmico:</b> | Material concreto que não permite a transformação por continuidade, ou seja, alteração da sua estrutura física a partir da sua manipulação. Durante a atividade experimental, o sujeito apenas manuseia e observa o objeto na tentativa de abstrair dele algumas propriedades. Ao restringir o contato com o material didático apenas para o campo visual (observação), corre-se o risco de obter apenas um conhecimento superficial desse objeto. |

**Fonte:** (RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane. 2012, p. 10).

Assim, para que o uso do material didático seja desenvolvido de forma significativa no ensino e aprendizagem é necessário o professor conheça o material e suas características específicas. Acredita-se que o uso do MD possibilita aos alunos um envolvimento e atividade prazerosas que fortalece os pensamentos matemáticos.

Turrioni e Perez (2006) considera o material concreto é fundamental para o ensino experimental, uma vez que “facilita a observação, análise, desenvolve o raciocínio lógico e crítico, sendo excelente para auxiliar o aluno na construção dos seus conhecimentos”. (TURRIONI; PEREZ, 2006, p. 61).

Para Passos (2006) afirma em relação do uso de material didático:

Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (PASSOS, 2006, p. 81).

A autora, preserva que o ensino e aprendizagem de matemática não se faz apenas perante o uso dos objetos manipuláveis é necessário que tenha os conceitos matemáticos em atividades mentais por parte do aluno mediados sempre por professores elevando o aluno a reflexões sobre a ação manipulativa, que caracteriza ao aluno o reconhecimento de relações que levem a analisar e agir (PASSOS, 2006). Neste sentido o professor poderá formular problemas apropriados que favoreça ao aluno passar do concreto ao abstrato por meio de constituições racionais bem desenvolvidas.

É necessário com o uso durante as aulas de matemática que o professor tenha cuidado básicos como Rêgo e Rêgo (2006) destacam:

- I. Dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
- II. Incentivar a comunicação e troca de idéias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
- III. Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades, por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
- IV. Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
- V. Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
- VI. Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material. (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 54).

Conforme Ottesbach e Pavanello (2009), em relação às práticas com uso de material manipulativo, é importante destacar que as conjecturas formuladas, por mais que sejam verificadas e observadas por outros alunos, precisam ser validadas através de uma organização lógica matemática.

Consideramos que a utilização de materiais manipulativos nas aulas sugere uma abordagem no procedimento da aprendizagem de forma contextualizada para conceitualizar os conteúdos Matemáticos escolares. Segundo Souza (1996): “Na

intervenção, o procedimento adotado interfere no processo, com o objetivo de compreendê-lo, explicitá-lo ou corrigi-lo" (SOUZA, 1996, p. 113- 126).

Diante do exposto, consideramos os jogos com material manipulável, dessa forma apresentamos algumas informações que consideramos relevante.

### 2.3 Jogos matemáticos

O uso dos jogos no ensino da matemática possibilita muitas habilidades e conhecimentos desenvolvem o ensino e aprendizagem de forma dinâmica e contextualizada. Os jogos aplicados em sala de aula é umas das tendências metodológicas que vem sendo destacado no espaço escolar com uma experiência que pode promover um ensino de forma lúdica (NASCIMENTO, 2018).

De acordo com Lara (2004), quando os docentes utilizam o jogo em sala de aula torna-se mais agradável e motivador os conteúdos para os alunos. É por meio de jogos que desenvolvem muitas habilidades e informações e ainda possibilita o ensino e aprendizagem de forma lúdica os conteúdos sugeridos pelos professores em sala de aula.

Segundo Grubel (2006), “Aprender brincando é muito mais valioso para a criança, pois brincar faz parte de seu mundo e desenvolvimento. É através das brincadeiras que ela descobre ou pode descobrir o mundo”. Com jogos pode-se questionar e desenvolver as resoluções de problemas de matemática.

O lúdico associado com os jogos pode ser caracterizado nas aulas de matemática sendo uma estratégia metodológica para o desenvolvimento dos pensamentos matemáticos e raciocínio lógico perante situações problemas do seu dia a dia e em situações relacionados com o desenvolvimento formal da matemática (D’AMBRÓSIO, 1989).

Nascimento (2018) em seu trabalho de pesquisa afirma sobre as contribuições sobre o jogo conforme:

“A contribuição em circunstância das características do jogo em situação que envolva o ensino, evidencia-se que o jogo torna-se uma atividade lúdica quando contribui para o envolvimento do estudante, do desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo” (NASCIMENTO, 2018, p.9).

Neste mesmo pensamento de contribuições no qual o jogo contribui para o desenvolvimento da aprendizagem. Segundo Grando (2000), assim como passamos a desenvolver práticas com uso dos jogos em sala de aula de ensino de matemática desenvolvemos nos alunos momentos de competição de caráter saudável e desafios que impulsionar aceitar os seus limites e suas probabilidades de vitórias. Para autora Granado (2000) destaca ainda sobre o uso dos jogos os seguintes conceitos que o jogo traz como vantagens e desvantagem:

### **VANTAGENS**

- “fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; - significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; - o jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe; - a utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos; - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos” (GRANDO, 2000, p.35).

### **DESVANTAGENS**

-“Quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice" em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber por que jogam; - o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno; - a perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente” (GRANDO, 2000, p.35).

Para que se faça sentido o uso dos jogos matemáticos em sala de aula e sua aprendizagem seja significativa é fundamental que os professores conheçam suas vantagens e desvantagem.

Neste sentido, o uso do jogo como estratégia e bem desenvolvido e explorados nas aulas de matemática possibilita um ensino e aprendizagem facilitador nos diferentes aspectos metodológicos e em seus objetivos que variam desde o simples exercício até a construção de um determinado conhecimento. De fato, utilizaremos os jogos na construção do ensino de probabilidades.

## 2.4 Ensino de probabilidades

A sociedade vivência nos últimos tempos um círculo vicioso de informações, o capitalismo e os gastos são características marcante da nossa sociedade atual. Segundo Costa (2007) o pensamento quantitativo não caminha na mesma rapidez dos dados gerados pela atual sociedade virtual.

É necessário que para contribuir com algumas situações nesse sentido que tenham uma concepção e um pensamento crítico em cima dos dados apresentados. Segundo Lopes (1998) nenhuma área do conhecimento humano pode desconsiderar a Probabilidade/Estatística, pois ela contribui para indicar a probabilidade de seu futuro desenvolvimento e para o conhecimento e interpretação das características de fenômenos típicos.

De maneira parecida Castro (1999), afirma que o ensino de probabilidade através de muitas circunstâncias reais, deixa bem claro que o estudo, teoria e probabilidade dá um norte, ou seja, dá um sentido, e um pensamento diversificado ao complementar o pensamento lógico. É deixar bem relatado que a incorporação da disciplina de probabilidade nos currículos em muitas escolas de países diferentes, vem crescendo gradativamente, por ser um grande meio de comunicação sendo teoricamente a ferramenta e pensar. Sendo assim, nos leve a acreditar que essas tarefas explicativas e investigativas com os trabalhos de probabilidades, podem trazer resultados surpreendente no decorrer de suas implantações. Quais os perspectiva do ensino e probabilidade e seus papéis na linguagem na formação de conceitos?

## 2.5 O ensino da probabilidade: o papel da linguagem na formação de conceitos

Os conceitos e as abordagens das concepções probabilísticas abordado com Fernandes (1999), proporcionam maneira multifacetada e podem distorcer as diferentes perspectivas. Compartilhado dessa mesma ideia Shaughnessy (1992) lembra que a tradição dualista da noção de probabilidade retratado no cálculo de frequências que é natural mediar debates de pesquisas de caráter quase artilosa. Santos (2010) “Acrescenta ainda que os méritos das diferentes concepções sobre probabilidade têm sido apresentados, por meio da literatura, como se houvesse uma batalha a ser vencida” (SANTOS, 2010, p.10).

Os conceitos e concepções probabilísticos, que são conceito clássico ou laplaciano, conceito frequentista ou empírico, conceito subjetivista, conceito lógico, conceito axiomático ou formal e conceito geométrico. São apontados por Hawkins e Hawkins e Kapadia (1984), Orton (apud CIRINO, 2007) e Godino Batanero e Cañizares (1996).

Santos (2010) em suas pesquisas avalia que os conceitos probabilísticos podem estar presentes no dia a dia dos alunos da educação básica de forma contextualizados ou articulados e, à medida que situações de ensino potencializadoras são desenvolvidas tais conceitos podem ser (re) significados.

### 2.5.1 Conceito frequentista ou empírico

O conceito frequentista é estabelecido através de um movimento experimental, que esse conceito é trabalhado através de alguns resultados repetidos. O conceito citado é determinado a posteriori sendo assim é calculado após já ter tido alguns experimentos realizados. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), a teoria frequentista foi defendida por *Richard Von Mises* na obra *Probability, statistics and truth*<sup>1</sup>, no entanto, John Venn já havia recomendado o cálculo de probabilidade por meio de frequências relativas presentes em sua obra *The logic of chance*!

Os autores fizeram alguns experimentos aleatórios para explorar tal teoria, como por exemplos fizeram lançamentos de moedas, com milhares de repetições para trabalhar as probabilidades com o auxílio do computador. Eles observaram que as repetições de cara ficaram muito próximas da probabilidade teórica.

Portanto essas tentativas deram a certeza de que, quanto maior o número de ocorrência, maior a possibilidade deste evento dá certo.

### 2.5.2 Conceito subjetivista

Esse conceito é quando um determinado sujeito trabalha seu próprio conhecimento e experiência em assunto qualquer, onde o mesmo determina uma maior probabilidade de vitória. Sendo assim algumas perspectivas probabilísticas priorizam o grau de crença e inteligência pessoal, ocasionando uma geração de diversas medidas em um mesmo evento.

Nas circunstâncias onde os jogos de azar e bastante explorado, esse conceito probabilístico se faz muito presente, onde a situação de risco é o grau de confiança própria se torna muito forte. Acreditam que é neste conceito onde os jogadores conseguir elaborar regras básicas de apostas, onde os mesmos confiam em um determinado acontecimento probabilístico. Segundo os autores, Godino, Batanero e Cañizares (1996), o critério de coerência é muito notado e fundamental no conceito subjetivista, sendo assim este conceito pode ser o pioneiro no ensino de probabilidade nas universidades, a opinião na visão clássica, requer por exemplo uma imperícia ao estabelecer a probabilidade em busca de uma razão.

### 2.5.3 Conceito lógico

O conceito lógico da probabilidade é criado em situação diferentes dos quais onde são aplicados os outros conceitos. São apresentadas em ocasiões onde os indivíduos passam explicar uma consequência, onde defenda uma situação lógica pois existe uma hipótese em que passa possibilitar uma abrangência das relações implícitas e contrária.

E neste conceito onde existe apenas duas maneiras de ser medidos “acerto ou impossível. Este conceito pode parecer mais simples de ser trabalhado, mas na verdade não é, pois, as interpretações subjetivistas e frequentista fazem parte onde pessoas possa trazer ideias de analisar algumas proposições.

### 2.5.4 Conceito axiomático ou formal

Os autores Godino, Batanero e Cañizares (1996), trazem esse conceito, formal ou axiomático da probabilidade, onde o mesmo originou-se dos trabalhos de

Kolmogorov<sup>2</sup>, sendo contrário ao conceito clássico. Impõe em que todos os resultados possíveis seriam igualmente provados com sucesso.

Este conceito propicia a probabilidade de diversas situações,  $(S)$  é a proporção em que se elege  $E$  como espaço amostral e  $A$  como um subconjunto de  $E$ . Sendo assim a partir dessas situações probabilísticas  $P(S)$  é definida pelo quociente entre a medida de  $A$  e a medida de  $E$  (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996). Ou seja, em particular a probabilidade nos remete a um número entre 0 e 1, então  $0 < P(S) < 1$ , dessa forma, a probabilidade do espaço amostral impossível é definido por  $P(E) = 0$  e uma probabilidade certo por  $P(E) = 1$ .

O autor Fernandes (1999, p. 54), “traz que o conceito com definições explícitas através de sistema axiomáticos, nada mais é que um conjunto de teoremas e definições, que deduz o axioma” O autor também traz seu ponto de vista correlação ao conceito axiomático.” Diz que, “Algumas situações estruturantes não esclarece a essência da probabilidade, apesar de construírem teoremas que indiquem prováveis interpretações” (FERNANDES, 1999, p. 54).

#### 2.4.5 Conceito geométrico

Esta noção de probabilidade geométrica foi criada pelo, naturalista matemático escritor e francês, Georges Louis Leclerc. Em 1732, Leclerc, herdou um dote logo depois se tornou Conde de Buffon, o mesmo propôs o problema de agulha (VIANA, 2013).

Nesse problema o mesmo determinar algebricamente seria a probabilidade de um lançamento aleatório de uma agulha em uma superfície paralelas com linhas que tivesse a possibilidade de cair sem ter atrito com as linhas. Onde também criou outras situações relacionada a probabilidade geométricas, tais como jogo Franc Carreau.

---

<sup>2</sup>Andrei Nikolaevich Kolmogorov foi um matemático soviético, que fez contribuições significativas em teoria das probabilidades, topologia, lógica intuicionista, turbulência, mecânica clássica, Teoria Algorítmica da Informação e análise de algoritmos. Disponível em <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Andrei\\_Kolmogorov](https://pt.wikipedia.org/wiki/Andrei_Kolmogorov)> Acesso em 2 de Agost. De 2019

“Jogo esse que ao lançando uma moeda aleatoriamente em um piso ladrilhado com lajotas congruentes, cair completamente dentro de um dos ladrilhos, ou seja, sem cortar qualquer linha dos ladrilhos. Esses ladrilhos poderiam ser triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc” (VIANA, 2013, p.31).

O conde Buffan, em 1777, publicou um artigo, explicando a aplicação da geometria na teoria da probabilidade. Em resumo a probabilidade geométrica, tem muitas questões semelhantes à seleção ou casual de alguns pontos e espaços amostrais, representados por figuras geométricas.

Conforme Santos (2010, p.18), as concepções probabilísticas, estão expostos no cotidiano dos alunos na educação básica, ainda que muito deles não tem a oportunidade de ter conhecimento teoricamente algumas concepções relacionadas à probabilidade tais como, providência, ideias de imprevisto e probabilidade condicional e etc.

Também é de se ressaltar que é importante estabelecer conceitos das definições de probabilidade no que diz respeito ao trabalho da matemática formal, com os alunos na fase da educação básica. No entanto é importante que seja implantada a metodologia adequada para a tal.

### **3. DEFINIÇÕES PROBABILÍSTICAS**

A probabilidade visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições.

Entretanto; se o número de elementos a serem contado for grande, esse trabalho torna-se quase impossível, sem o uso de método especiais. Neste sentido abordaremos conceitos, definições da teoria das probabilidades com base nos seguintes autores MORGADO (1991), ROSS (2009), VIALI (2003). Pois neste sentido os conceitos da probabilidade são fundamentais para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

#### **3.1 O princípio básico da contagem**

O princípio básico da contagem é fundamental para todo nosso trabalho. Dito de forma simples, ele diz que se um experimento pode levar a qualquer um de  $n$

possíveis resultados e se outro experimento pode resultar em qualquer um de  $n$  possíveis resultados, então os dois experimentos possuem  $m \cdot n$  resultados possíveis.

Analizando o seguinte experimento: Suponha a realização de dois experimentos.

### 3.1.1 Explicar

Pode gerar qualquer um de  $m \cdot n$  resultados possíveis e se, para cada um dos resultados do experimento 1, houver  $n$  resultados possíveis para o experimento 2 como em seguida.

### 3.1.2 Experimento 1

Então os dois experimentos possuem conjuntamente  $m \cdot n$  diferentes resultados possíveis.

**Demonstração do princípio básico:** O princípio básico pode ser demonstrado ao serem enumerados todos os possíveis resultados dos dois experimentos; isto é,

$$\begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots (1,n) \\ (2,1), (2,2), \dots (2,n) \\ \vdots \\ (m,1), (m,2), \dots (m,n) \end{array}$$

Onde dizemos que o resultado é  $(i, j)$  se o experimento 1 levar ao seu  $i$ -ésimo resultado possível e o experimento 2 levar ao seu  $j$ -ésimo resultado possível. Portanto, o conjunto dos resultados possíveis consiste de  $m$  linhas, cada uma contendo  $n$  elementos. Isso demonstra o resultado.

### 3.2 Exemplo 1.

Uma pequena comunidade é composta por 10 mulheres, cada uma com 3 filhos. Se uma mulher e um de seus filhos devem ser escolhidos como mãe e filho do ano, quantas escolhas diferentes são possíveis?

**Solução** Supondo a escolha da mulher como o resultado do primeiro experimento, e a subsequente escolha de um de seus filhos como o resultado do segundo experimento, vemos a partir do princípio básico que há  $10 \times 3 = 30$  escolhas possíveis.

Quando há mais que dois experimentos a serem realizados, pode-se generalizar o princípio.

### Generalização do princípio básico da contagem

Se  $r$  experimentos são tais que o primeiro experimento pode levar a qualquer um de  $n$ , resultados possíveis; e se, para cada um desses  $n$ , resultados houver  $n$ , resultados possíveis para o segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos houver  $n$ , resultados possíveis para o terceiro experimento; e se..., então haverá um total de  $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ , resultados possíveis para os  $r$  experimentos.

### 3.3 Permutação

Quantos diferentes arranjos ordenados das letras  $a$ ,  $b$  e  $c$  são possíveis? Por enumeração direta vemos que são 6, ou seja,  $abc$ ,  $acb$ ,  $bac$ ,  $bca$ ,  $cab$  e  $cba$ .

Cada combinação é conhecida como uma permutação. Assim, vê-se que um conjunto de 3 objetos permite 6 permutações possíveis. Esse resultado poderia ser obtido a partir do princípio básico, já que o primeiro objeto da permutação pode ser qualquer um dos três, o segundo objeto da permutação pode então ser escolhido a partir dos dois restantes e o terceiro objeto da permutação é o objeto restante.

Assim, há  **$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$**  permutações possíveis.

Suponha agora que tenhamos  $n$  objetos. O emprego de um raciocínio similar aquele que acabamos de utilizar no caso das três letras mostra então que há

$$n (n-1) (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Permutações diferentes dos  $n$  objetos.

#### 3.3.1 Exemplo 2

Quantas diferentes ordens de rebatedores são possíveis em um time de beisebol formado por 9 jogadores?

Solução

Há  **$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362.880$**  ordens de rebatedores possíveis.

### 3.4 Coeficientes multinomiais

Nesta seção, consideramos o seguinte problema: um conjunto de  $n$  itens distintos deve ser dividido em  $r$  grupos distintos de tamanhos  $n_1, n_2, \dots, n_r$ , respectivamente,  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ . Quantas divisões diferentes são possíveis?

Para responder a essa questão, notamos que há  $\binom{n}{n_1}$  escolhas possíveis para o primeiro grupo; para cada escolha do primeiro grupo há  $\binom{n-n_1}{n_2}$  escolhas possíveis para o segundo grupo; para cada escolha dos dois primeiros grupos, há  $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$  escolhas possíveis para o terceiro grupo, e assim por diante.

Daí sucede da versão generalizada do princípio básico da contagem que existem

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} \\ &= \frac{n!}{(n-n_1)! n_1!} \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! n_2!} \dots \dots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1})!}{0! n_r!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots \dots n_r!} \end{aligned}$$

divisões possíveis.

Outra maneira de visualizar esse resultado é considerar os  $n$  valores 1, 1, ..., 1, 2, ..., 2, ...,  $r$ , ...,  $r$ , onde  $i$  aparece  $n_i$  vezes, para  $i = 1, \dots, r$ . Cada permutação desses valores corresponde a uma divisão dos  $n$  itens em  $r$  grupos da seguinte maneira: suponha que a permutação  $i_1, i_2, \dots, i_n$  corresponda à atribuição do item 1 ao grupo  $i_1$ , do item 2 ao grupo  $i_2$ , e assim por diante. Por exemplo, se  $n = 8$  e se  $n_1=4, n_2 = 3, n_3 = 1$  então a permutação 1,1,2,3,2,1,2 corresponde à atribuição dos itens 1,2,6,8 ao primeiro grupo, dos itens 3,5,7 ao segundo grupo, e do item 4 ao terceiro grupo. Como cada permutação leva a uma divisão dos itens e toda divisão possível é resultado de alguma permutação, tem-se que o número de divisões de  $n$  itens em  $r$  grupos distintos de tamanhos  $n_1, n_2, \dots, n_r$  é igual ao número de permutações de  $n$  itens dos quais  $n_i$  são semelhantes,  $n_i$  são semelhantes, ..., e  $n_r$  são semelhantes, o que se mostra.

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots \dots n_r!}$$

### 3.4.1 Exemplo 3

Um dos departamentos de polícia de um vilarejo é formado por 10 policiais. Se a política do departamento é a de possuir 5 dos policiais patrulhando as ruas, 2 deles trabalhando todo o tempo na delegacia e 3 deles de reserva, quantas divisões diferentes dos 10 policiais nos três grupos são possíveis?

Solução

Temos então que

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 2! \cdot 3!} = 2520$$

Divisões possíveis

### 3.5 O número de soluções inteiras de equações

“Existem  $r$ ” resultados possíveis quando  $n$  bolas diferentes são distribuídas em  $r$  urnas distintas. Isso ocorre porque cada bola pode ser colocada em cada uma das  $r$  urnas. No entanto, suponhamos agora que não seja possível distinguir as  $n$  bolas entre si. Nesse caso, quantos resultados diferentes são possíveis? Como não há diferença entre as bolas, tem-se que o resultado do experimento que envolve distribuir as  $n$  bolas entre as  $r$  urnas pode ser descrito por um vetor  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , onde  $x_i$  indica o número de bolas depositadas na  $i$ -ésima urna. Portanto, o problema reduz-se a encontrar o número de vetores com valores inteiros não negativos  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  tais que

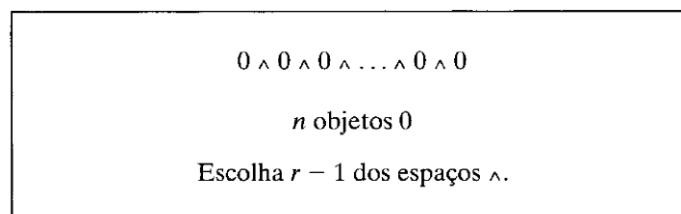
$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

Para computar esse número, comecemos considerando o número de soluções inteiras positivas. Com esse objetivo, imagine que tenhamos  $n$  objetos idênticos alinhados e que queiramos dividi-los em  $r$  grupos não vazios. Para fazer isso, podemos selecionar  $r - 1$  dos  $n - 1$  espaços entre objetos adjacentes como nossos pontos divisórios (veja a Figura 1.2). Por exemplo, se tivermos  $n = 8$  e  $r = 3$ , e escolhermos os dois divisores de forma a obter.

000 | 000 | 00

Então o vetor resultante é  $x_1=3, x_2=3, x_3=2$ . Como há  $(n - r + 1)$  seleções possíveis, temos a seguinte proposição

**Figura 1:** Número de soluções positivas.



Proposição 1.

Existem  $(n - 1r - 1)$  vetores distintos com valores inteiros positivos  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  satisfazendo a equação.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \text{ onde } x_i > 0, i = 1, \dots, r$$

Para obter o número de soluções não negativas (em vez de positivas), note que o número de soluções não negativas de  $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$  é igual ao número de soluções positivas de  $y_1 + y_2 + \dots + y_r = n + r$  (o que se vê ao fazer  $y_i = x_i + 1, i = 1, \dots, r$ ). Portanto, da Proposição 6.1, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 2.

Existem  $(n + r - 1r - 1)$  vetores distintos com valores inteiros não negativos satisfazendo a equação.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = r$$

### 3.5.1 Exemplo

Quantas soluções com valores inteiros não negativos de  $x_1 + x_2 = 3$  são possíveis?

Solução

Temos assim que

$$(3 + 2 - 12 - 1) = 4 \text{ soluções: } (0,3), (1,2), (2,1), (3,0).$$

## 3.6 Probabilidade condicional e independência

### 3.6.1 Probabilidades condicionais

Consideremos o experimento que consiste em jogar um dado não viciado.

Sejam  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{1, 2, 4\}$ . Temos que  $P(B) = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . Esta é a probabilidade de B a priori, quer dizer, antes que o experimento se realize. Suponhamos que, uma vez realizado o experimento, alguém nos informe que o resultado do mesmo é um número par, isto é, que A ocorreu. Nossa opinião sobre a ocorrência de B se modifica com esta informação, já que, então, somente poderá ter ocorrido B se o resultado do experimento tiver sido 2. Esta opinião é quantificada com a introdução de uma "probabilidade a posterior" ou, como vamos chamá-la doravante, probabilidade condicional de B dado A definida por

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Introduzimos em geral a seguinte

**Definição 1:** Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ . Representaremos este número pelo símbolo  $P(B/A)$ . Temos então simbolicamente

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Note-se que este número só está definido quando  $P(A) > 0$ . A equação anterior também pode ser escrita como

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

Se  $P(B) > 0$  temos também

$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

Antes de passar aos exemplos indicaremos algumas propriedades básicas da noção de probabilidade condicional.

**Proposição 3:** Seja A tal que  $P(A) > 0$ . Então

a)  $P(\emptyset/A) = 0$ ,  $P(\Omega/A) = 1$ ,  $0 \leq P(B/A) \leq 1$ .

b)  $P((B \cup C)/A) = P(B/A) + P(C/A)$ , se  $B \cap C = \emptyset$ . UO seja, fixado A a probabilidade condicional é outra probabilidade sobre o espaço amostral  $\Omega$ .

**Demonstração:** item

$$a) P(\phi/A) = \frac{P(\phi \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\phi)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0,$$

$$P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Como  $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$  temos

$$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1,$$

isto é,

$$0 \leq P(B/A) \leq 1.$$

$$\begin{aligned} b) P((B \cup C)/A) &= \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} \\ &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \\ &= P(B/A) + P(C/A). \end{aligned}$$

□

**Proposição 3:** (Teorema do produto) se então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0,$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \dots \\ &\dots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})) \end{aligned}$$

Esboço da Demonstração: Para dois conjuntos  $A_1$  e  $A_2$  a fórmula é válida porque coincide com definição 1. Verifiquemos a fórmula para três conjuntos **(71= 3)**  $A_1, A_2$  e  $A_3$

Temos

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_2/(A_1 \cap A_2)) / P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_3/(A_1 \cap A_2)) P(A_2/A_1) P(A_3) \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. No caso geral o raciocínio é semelhante e usa o Princípio de Indução Completa.

Exemplo 6: Um grupo de pessoas está classificado da seguinte forma:

|          | Fala Inglês | Fala Alemão | Fala Francês |
|----------|-------------|-------------|--------------|
| Homens   | 92          | 35          | 47           |
| Mulheres | 101         | 33          | 52           |

Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabendo-se que esta pessoa fala francês, qual é a probabilidade de que seja homem?

Solução:

Seja  $A$  o evento que ocorre se a pessoa escolhida fala francês e  $B$  se a pessoa escolhida é homem. Temos

$$P(A) = \frac{47 + 52}{360} = 99/360$$

E, portanto,

$$P(A \cap B) = \frac{47}{360},$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{47/360}{99/360} = \frac{47}{99},$$

Note-se que

$$P(B/A) = \frac{47}{99} = \frac{47}{47 + 52} = \frac{\#A \cap B}{\#A}.$$

Isto sempre acontecerá se, na probabilidade considerada, todos os pontos do espaço amostral são igualmente prováveis

### 3.6 Eventos independentes

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostral  $S$ .  $A$  e  $B$  são ditos independentes se a probabilidade de um deles ocorrer não afetar a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se:

**I.  $P(A/B) = P(A)$ ;**

**II.  $P(B/A) = P(B)$ ;**

### III. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Qualquer uma das 3 relações acima pode ser usada como definição de independência.

#### 3.6.1 Exemplo 7

Três componentes **C1**, **C2**, e **C3**, de um mecanismo são postos em série (em linha reta). Suponha que esses componentes sejam dispostos em ordem aleatória. Seja **R** o evento { **C2** está à direita de **C1** }, e seja **S** o evento { **C3** está à direita de **C1** }.

Os eventos **R** e **S** são independentes? Por quê?

Solução:

Para que **R** e **S** sejam independentes deve-se ter:

$$P(R \cap S) = P(R) \cdot P(S).$$

O espaço amostra para este caso é:

$$S = \{ C1C2C3, C1C3C2, C2C1C3, C2C3C1, C3C1C2, C3C2C1 \}$$

As sequências em que **C2** está à direita de **C1** são:

$$R = \{ C1C2C3, C1C3C2, C3C1C2 \}. \text{ Logo: } P(R) = 3/6 = 50\%$$

As sequências em que **C3** está à direita de **C1** são:

$$S = \{ C1C2C3, C1C3C2, C2C1C3 \}. \text{ Logo}$$

$$P(S) = 3/6 = 50\%$$

As sequências em que **C2** está à direita de **C1** e **C3** está também à direita de **C1** são:

$$R \cap S = \{ C1C2C3, C1C3C2 \}.$$

Logo

$$P(R \cap S) = 2/6 = 1/3 = 33,33\% \neq P(R) \cdot P(S) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%$$

Portanto os eventos **R** e **S** não são independentes.

#### 3.8 $P(A|B)$ uma probabilidade

Probabilidades condicionais satisfazem todas as propriedades das probabilidades comuns, o que é demonstrado pela Proposição 5.1, que mostra que  $P(A|B)$  satisfaz os três axiomas de uma probabilidade.

Proposição 4.

- (a)  $0 \leq P(E|F) \leq 1$
- (b)  $P(S|F) = 1$
- (c) Se  $E_i, i = 1, 2, \dots$ , são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i|F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i|F)$$

Demonstração

Para demonstrar a letra

(a), devemos mostrar que  $0 \leq P(EF) \leq P(F)$ . O lado esquerdo da desigualdade é óbvio, enquanto o lado direito resulta de  $EF \subset F$ , o que implica  $P(EF) \leq P(F)$ .

A letra (b) é verdade porque:

$$P(S|F) = \frac{P(SF)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

A letra (c) resulta de

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i|F\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)F\right)}{P(F)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_iF\right)}{P(F)} \quad \text{já que} \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_iF \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(E_iF)}{P(F)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i|F) \end{aligned}$$

Onde se obtém a penúltima igualdade porque  $E_jE_i = \emptyset$  implica  $E_iE_jF = \emptyset$ . O Se definirmos  $Q(E) = P(E|F)$ , então,  $Q(E)$  pode ser vista como uma função probabilidade dos eventos de  $S$ . Portanto, todas as proposições previamente aprovadas para as probabilidades se aplicam a  $Q(E)$ .

Por exemplo, temos

$$Q(E_1 \cup E_2) = Q(E_1) + Q(E_2) - Q(E_1 E_2)$$

ou, equivalentemente,

$$P(E_1 \cup E_2|F) = P(E_1|F) + P(E_2|F) - P(E_1 E_2|F)$$

Também, se definirmos a probabilidade condicional  $Q(E_1|E_2)$  como  $Q(E_1 E_2)/Q(E_2)$  e, então, da Equação ,temos

$$Q(E_1) = Q(E_1|E_2)Q(E_2) + Q(E_1|E_2^c)Q(E_2^c)$$

Como

$$\begin{aligned} Q(E_1|E_2) &= \frac{Q(E_1 E_2)}{Q(E_2)} \\ &= \frac{P(E_1 E_2|F)}{P(E_2|F)} \\ &= \frac{P(E_1 E_2 F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(E_2 F)}{P(F)} \\ &= P(E_1|E_2 F) \end{aligned}$$

A Equação equivalente a

$$P(E_1|F) = P(E_1|E_2 F)P(E_2|F) + P(E_1|E_2^c F)P(E_2^c|F)$$

### Exemplo 8

Considere o, que trata de uma companhia de seguros que acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes distintas: aquelas que são propensas a sofrer acidentes e aquelas que não o são. Durante um ano, uma pessoa propensa a acidentes terá uma probabilidade de 0,4 de sofrer um acidente, enquanto o valor correspondente a uma pessoa não propensa a acidentes é de 0,2. Qual é a probabilidade condicional de que um novo segurado sofra um acidente em seu segundo ano de contrato, dado que ele ou ela tenha sofrido um acidente no primeiro ano?

Solução

Seja A o evento em que o segurado é propenso a sofrer acidentes, e  $A_i = 1, 2$ , o evento em que ele ou ela tenha sofrido um acidente no i-ésimo ano. Então, a probabilidade desejada,  $P(A_2, A_1)$ , pode ser obtida colocando-se uma condição na propensão ou não de o segurado sofrer acidentes, da forma a seguir:

$$P(A_2|A_1) = P(A_2|AA_1)P(A|A_1) + P(A_2|A^cA_1)P(A^c|A_1)$$

Agora;

$$P(A|A_1) = \frac{P(A_1A)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|A)P(A)}{P(A_1)}$$

Entretanto, assume-se que  $P(A)$  seja igual a  $3/10$ , e foi mostra que  $P(A_1) = 0,26$ . Com isso,

$$P(A|A_1) = \frac{(0,4)(0,3)}{0,26} = \frac{6}{13}$$

Assim,

$$P(A^c|A_1) = 1 - P(A|A_1) = \frac{7}{13}$$

Como  $P(A_2|AA_1) = 0,4$  e  $P(A_2|A^cA_1) = 0,2$ , tem-se que

$$P(A_2|A_1) = (0,4)\frac{6}{13} + (0,2)\frac{7}{13} \approx 0,29 \quad \blacksquare$$

## 4. O JOGO DOMINÓ PROBABILÍSTICO

### 4.1 O dominó probabilístico

Por meio de materiais alternativos de baixo custo, cartolinas, lápis de cor, cola branca é possível facilitar a aprendizagem de alguns conceitos e operações probabilística. Reafirmando o que muitos educadores indagaram sobre o aprender por meio de materiais concretos, numa situação onde o aluno faz uso da visão e do tato para melhores resultados em seu processo de cognição do novo. Por meio de ideias como estas que se fundamenta a proposta de ensino abordada aqui: explorar a aprendizagem de combinação por meio do jogo dominó personalizado.

#### 4.1 Confecção do dominó probabilístico

Material necessário para confecção das peças do dominó probabilístico

- Cartolinas guache;
- 21 peças do dominó (anexo);
- Folha cartolina para confeccionar as peças;
- Tesoura sem ponta;
- Cola Branca escolar;
- Régua para criar uma caixinha para guardar as peças do dominó probabilístico.

Neste sentido apresentamos o nosso Dominó probabilístico

#### 4.2 Dominó probabilístico

Formado por 21 peças com combinação de dois a dois de ordem 1 á 6, que serão trabalhadas nas séries finais do ensino fundamental, as peças serão do tamanho das peças de um domínio normal, para que os alunos consigam assimilar o jogo normalmente.

Exemplo:

**Figura:** Modelo das peças do dominó probabilístico.

---

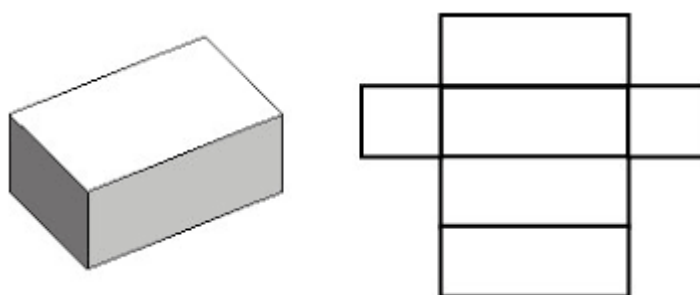
|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 3 |

**Fonte:** O autor (2019)

### 4.3 A caixinha

Com a cartolina guache cria um caixinha de 8,5 cm x 6 cm em que servirá para guarda as peças do dominó (anexo).

**Figura:** caixinha de 8,5 cm x 6 cm



**Fonte:** Disponível em <[escolakids.uol.com.br](http://escolakids.uol.com.br)> Acesso em: 19 de Agost. de 2019

### 4.4 Regras do jogo: Dominó probabilístico

O desenvolvimento constitui em representar o jogo e as regras sendo o primeiro passo da atividade a criação do material, pode-se confeccioná-lo juntamente com a turma transformando a aula de matemática em arte e descontração. Este processo de confecção do material ainda apresenta matemática presente por meio da exploração de planificação.

#### 4.4.1 Participantes

O jogo pode ser dividido em 2, 3 alunos. Ficando a critério do professor a sua divisão.

#### 4.4.2 Regras

O jogo será iniciado com os jogadores mexendo as peças do dominó probabilístico lembrando que as peças tem que estar viradas para que o seu oponente não consiga ver a peças que está em sua mão , em seguida cada jogador fica com 7

peças do dominó, ficando mais 7 peças fora do jogo para que os mesmo possa comprar quando precisar, iniciaremos com uma moeda tirando “cara e coroa” (pode aqui trabalhar o conceito de probabilidade: número de chance de um evento acontecer), logo após o vencedor do ‘cara ou coroa’ começa a jogar. Será vencedor quem conseguir fazer todas as combinações possíveis e que não fica com nenhuma peças nas mãos, ou se o jogo não estiver, mas possibilidade de trabalhar as peças ganha a partida que fica com uma contagem mínima em mãos.

## **5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.**

Nossa pesquisa teve como objetivo geral “Desenvolver um dominó probabilístico para os alunos do ensino fundamental dos anos finais sobre probabilidade e seus ensinios”. Em que é através também a importância de que o jogo deve ser criado pelos próprios alunos com o auxílio do professor de matemática.

Tivemos a incumbência de elaborar este jogo para o ensino de probabilidade jogando dominó, é muito importante o uso de jogos em sala de aulas, pois traz a curiosidade do aluno e quando fala em competição estimula mais ainda. O jogo traz a importância do raciocínio lógico do aluno e também possibilita ou mesmo a articular diversas situações e reflexões o respeito do jogo.

O jogo do dominó probabilístico é muito simples, além de uma questão pedagógica para o ensino da matemática/probabilidade. O jogo traz a curiosidades dos alunos, e também tirar aquela tensão de que é matemática/probabilidade é um “bicho de sete cabeças”, os jogos matemáticos tirar esse rótulo da matemática e faz com que os alunos consigam aprender matemática brincando.

Sendo assim o jogo faz com que a turma interaja mais com os conteúdos matemáticos e os alunos consigam ter mais empenho nos decorreres de cada partidas. Portanto nós como professores de matemática acreditamos que o jogo do dominó probabilístico irá contribuir bastante no ensino de probabilidade.

Pois o jogo faz os alunos se envolverem em movimentos de estratégias, raciocínio lógico ao tentar descobrir qual a peça que o seu oponente pode esta,ter algumas discussões e argumentações no decorrer do jogo, e com isso interagir com os colegas e o professor.

Diante desse trabalho, acreditamos que nosso intuito é contribuir para com esse jogo, uma melhor forma de matemática, mas descontraída. E com isso expandir para outras áreas de conhecimento científicos.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

ANDRADE, Maria Margarida de. **Introdução a Metodologia do Trabalho Científico: elaboração de trabalhos na graduação**; 10. ed. São Paulo. Atlas, 2010. Atlas, 2006.

BATANERO, C. **Razonamiento probabilístico em la vida cotidiana: um desafio educativo**. In: FLORES, P.; LUPI.

ÁÑEZ, J. (Orgs.). **Investigación em el aula de matemática. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales**, 2006. 1 CD-ROM.

**BRASIL. Ministério de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais:**

CABRAL, Marcos Aurélio et al. **A utilização de jogos no ensino de matemática**. 2006.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **Um estudo sobre conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2017. 344 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pós-graduação -Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017.

CÉSAR, Castro S., **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades – propuesta de un modelo didáctico** – UAM EDICIONES – 1999

CIABOTTI, Valéria, **A utilização de livros paradidáticos para o ensino de probabilidade no ensino fundamental**, 2015. Disponível <<https://www.uniube.br/eventos/epeduc/2015/completos/10.pdf>> acesso em 25/06/2019

CIRINO M. M. **A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no Ensino Médio**. 2007. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência). Faculdade de Ciências, UNESP, Bauri, 2007 combinatório no contexto de sala de aula. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <[http://ciaemredumate.org/ocs/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/1468/971](http://ciaemredumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1468/971)>. Acesso em: 24 out. 2017.

COSTA, Adriana, **A educação estatística na formação do professor de matemática – curricular**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Campinas, SP: FE/UNICAMP. 1998.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje. Temas e Debates**. SBEM. Ano II, v. 2, 1989.

D'AMBRÓSIO, U. **Algumas reflexões sobre a resolução de problemas**. Disponível em <<http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com/2010/09/algumas-reflexoes-sobre-resolucao-de.html>> Acesso em: 25 jul. 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. São Paulo; Ática 209....

DE LARA, Isabel Cristina Machado. **Jogando com a Matemática de 5a a 8a série**. 2004. Dissertação (Mestrado em educação) – Itatiba, SP – Universidade São Francisco, 2007. Disponível em: <[http://www.rc.unesp.br//serp/trabalhos\\_completos/completo3.pdf](http://www.rc.unesp.br//serp/trabalhos_completos/completo3.pdf)> Acesso em: 25 JUL. 2010.

FERNANDES, J. A. S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma proposta de ensino de probabilidades no 9.o ano de escolaridade**. Tese (doutorado em Educação), Universidade do Minho, Braga (Portugal), 1999.

FIorentini, D.; Miorim, M.A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

GAL, Iddo. **Towards probability literacy for all citizens: building blocks and instructional dilemmas**. In: Jones, Graham. (Ed.). Exploring probability in school: challenges for teaching and learning. Nova York: Springer, 2005.

GODINO, Juan; BATANERO, Maria Carmen; CAÑIZARES, Maria José. Azar y probabilidad. Madrid: Síntesis, 1996.

GRANDO, Regina Célia. ” **O jogo na educação matemática: aspectos teóricos e metodológico**. ” *O jogo e a matemática no contexto de sala de aula*. São Paulo: Paulus (2004)

GRANDO, Regina Célia et al. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000.

GREEN, David. A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: Grey, David. et al (Ed.). In: **INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 1.**, 1982, Sheffield. Proceeding... Sheffield: University of Sheffield, 1982.

GRÜBEL, Joceline Mausolff; BEZ, Marta Rosecler. Jogos educativos. Renote, Revista Nova Tecnologia na Educação, v. 4, n. 2, 2006

HAWKINS, Anne; KAPADIA, Ramesh. Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, Netherlands, v.15, n.4, 1984.

LOPES, Celi A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise**

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MANZO, Abelardo J. **Manual para la preparación de monografías: una guía para presentar informes y tesis**. Buenos Aires: Humanitas, 1971.

Marger da Conceição Ventura Viana. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Área de concentração: Educação Matemática. matemática. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

MILANI, Wilton Natal. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio [manuscrito]** / Wilton Natal Milani. – 2011. xiii, 127 f.: tabs. Orientadora: Profa. Dra.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e probabilidade. Instituto de Matemática aplicada**, 1991.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de (1991): **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. Disponível em: <[http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias\\_10\\_p045-053\\_c.pdf](http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf)>. Acesso em: 31 ago. 2019.

NACARATO, Adair; GRANDO, Regina. **Aprendizagens compartilhadas a partir do trabalho colaborativo tendo a estocástica como objeto de investigação**. In: \_\_\_\_\_ (Org.). *Estatística e probabilidade na educação básica: professores narrando suas experiências*. Campinas: Mercado de Letras, 2013

NASCIMENTO, Josevandro Barros. **JOGOS DIGITAIS E PROBABILIDADE: UMA POSSIBILIDADE DE ENSINO INTERDISCIPLINAR**.- João Pessoa, 2018. 90 f. : il. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

ONUICHIC, L. R. “**Uma história da resolução de problemas no Brasil e no mundo**.” *seminário em resolução de problema* 1(2008): 1-15.

OTTESBACH, R.C.; PAVANELLO, R.M. **Laboratório de Ensino e Aprendizagem da Matemática na apreciação de professores**, 2009. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/248-4.pdf>>. Acesso em: 28 dez. 2010.

POLYA, G. A. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. São Paulo: Interciência, 1978.prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática**. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão** Reflectionson use of material in schoolteachingofmathematicsmanipulable: trialofactiontoponder. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 7, n. 2, p. 187-196, 2012.

ROSA, M.; OREY, D. C. **De Pappus a Polya: da heurística à resolução de problemas**. Disponível em: <<http://csus.academia.edu/DanielOrey/Papers/299440>>. Acesso em: 25 mai. 2011.

ROSS, Sheldon, **Probabilidade: um curso moderno com Aplicações**. Bookamn Editora, 2009

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. 2015. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SANTOS, Jaqueline. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental**. 2010.183f. Dissertação (Mestrado em Educação)– Programa de Pós-Graduação Stricto Sensuem Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2010

\_\_\_\_\_. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental**. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.

SHAUGHNESSY, J. Michel **Research in probabilityandstatistics: reflectionsanddirections**. InGROUWS, D. A. (ed.) Handbook ofresearchonmathematicsteachingandlearning. USA:NCTM, 1992.

SOUZA, M. T. C. C. **Intervenção psicopedagógica: com e o que planejar**. In SISTO, F. F. et al (org.). Atuação Psicopedagógica e Aprendizagem Escolar. Petrópolis: Vozes, 1996. Cap. p.113-126.

TRUJILLO FERRARI, Alfonso. **Metodologia da ciência**. 3. ed. Rio de Janeiro: Kennedy, 1974.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. **Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores**. In: LORENZATO, Sérgio.

Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 57-76.

VIALI, Lorí. **Ensino a Distância: Lecionando Estatística Probabilidade para Engenharia Química**. In: XXXI CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA. Anais... Rio de Janeiro. 2003.

VIANA, Fernando Cesar de Abreu et al. Estudo e aplicações de probabilidade

WATSON, Jane M. **Statistical literacy at school: growth na goals**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2006.

## ANEXO I

|   |   |
|---|---|
| 1 | 1 |
|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|

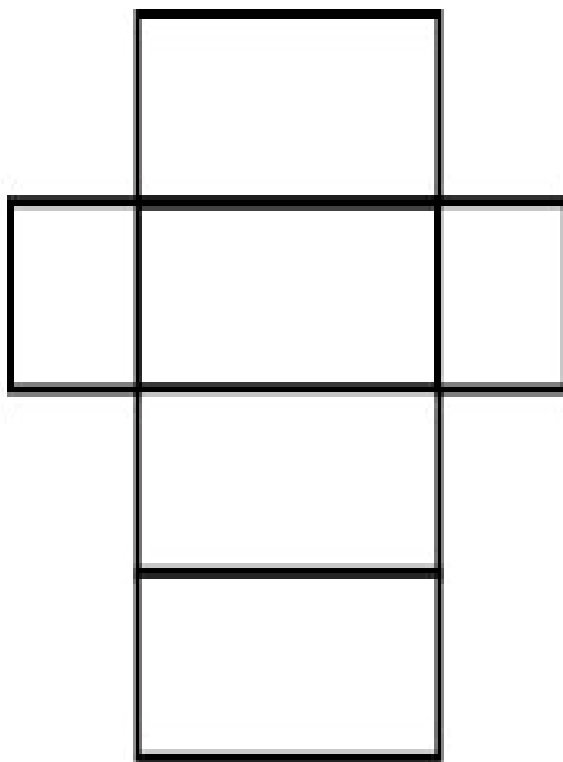
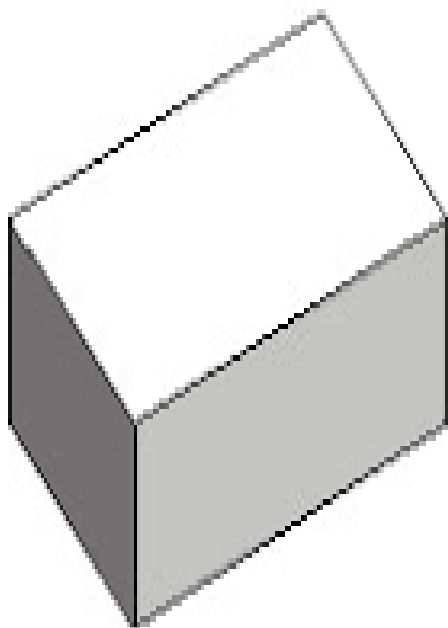
|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 2 | 6 |
| 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 5 | 3 | 6 |
| 4 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 4 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 4 | 6 |
| 5 | 1 | 5 | 2 |
| 5 | 3 | 5 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 6 |
| 6 | 1 | 6 | 2 |
| 6 | 3 | 6 | 4 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|

## ANEXO II



**Fonte:** Disponível em <[escolakids.uol.com.br](http://escolakids.uol.com.br)> Acesso em: 19 de Agost. de 2019