UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSODE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANÁLISE DO USO DE UM APLICATIVO NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

JOALYTON DOMINGOS DA SILVA

João Pessoa – Paraíba

Março de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSOD E LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOALYTON DOMINGOS DA SILVA

ANÁLISE DO USO DE UM APLICATIVO NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso a presentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

Março de 2020

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Joalyton Domingos da.
Análise do uso de um aplicativo no estudo sistemas de equações lineares / Joalyton Domingos da Silva. - João Pessoa, 2020.
57 f. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Regô.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Sistemas de equações lineares. 2. Photomath. 3. Tecnologias educacionais. I. Regô, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN

JOALYTON DOMINGOS DA SILVA

ANÁLISE DO USO DE UM APLICATIVO NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado em: _____/_____/2020.

Conceito:__________________

Nota:__________________

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo- UFPB
(Orientadora)

____

Prof. Valdenilza Ferreira da Silva - UFPB
(Avaliador)

____

Prof. Rodrigo Silva Rosal de Araujo - UFPB
(Avaliador)

UFPB

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ata da Apresentação e Defesa de Trabalho Acadêmico de Conclusão de Curso do estudante Joalyton Domingos da Silva

Aos **vinte e sete** dias do mês de **março** de dois mil e vinte, através de apresentação oral gravada em vídeo, em virtude da Portaria 90/2020, GR, realizou-se a Defesa do Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do estudante **Joalyton Domingos da Silva**, intitulado **"ANÁLISE DO USO DE UM APLICATIVO NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES"**, sob a orientação da Professora Doutora **Rogéria Gaudencio do Rêgo**/Orientadora e Presidente da Banca Examinadora, tendo como avaliadores integrantes da banca a professora Doutora **Valdenilza Ferreira da Silva**/Examinadora; e o Professor Doutor **Rodrigo Silva Rosal de Araújo**/Examinador. A Banca Examinadora, com base em pareceres relativos ao texto e à apresentação, decidiu pela **APROVAÇÃO** do Trabalho de Conclusão de Curso do estudante **JOALYTON DOMINGOS DA SILVA,** com média final 8,8 (oito vírgula oito). Nada mais havendo a tratar, eu, **Rogéria Gaudencio do Rêgo**, na qualidade de Presidente da Banca, lavro a presente Ata que, lida e aprovada pelos demais membros da Banca, assino.

João Pessoa, 27 de março de 2020

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Rogéria Gaudencio do Rêgo (Orientadora)
SIAPE 1126088

Profa. Rogéria Gaudêncio do Rêgo
Mat. SIAPE 1126088

Dedico esse trabalho a meus familiares e amigos que contribuíram para que que esse momento fosse possível.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu bondoso Deus, por ter me guiado e protegido durante todo esse tempo. Com a fé Nele, presente, pude suportar várias dificuldades durante o Curso, tendo a certeza que tempos melhores viriam.

Gostaria de agradecer à minha família, composta pelos meus pais, Maria do Céu Domingos e José Severino da Silva, e meu irmão Jackson Domingos da Silva. Eles foram e são minha base para tudo que conquistei até aqui. Sempre depositaram grande confiança em mim e me apoiaram em todas as decisões que tomei, o que me dava forças para continuar caminhando.

Gostaria de agradecer a alguns professores do corpo docente da UFPB que marcaram de forma muito positiva minha trajetória como aluno da graduação com seus ensinamentos. Em especial à professora e minha orientadora,Rogéria Gaudencio, que é um grande exemplo como pessoa e como profissional. Agradeço também aos professores Rodrigo Rosal; Valdenilza Ferreira; Joaquim; Antônio de Andrade; Napoleon; Bruno e Elisandra.

Por fim, mas não menos importante, quero agradecer aos amigos e colegas de Curso que ganhei nesses últimos quatro anos: Ana Karolina; Hindrilainy; Hermann Sihler; Grazielle; Cadhimeil; João Batista; Gustavo e Gabriel. Com eles compartilhei os mais diversos momentos, dos bons aos ruins, mas sempre com o apoio uns dos outros. Sou grato por conhecê-los e terem tornado essa caminhada mais prazerosa.

RESUMO

A temática do presente trabalho trata do uso de um aplicativo (Photomath) para smartphones no ensino de sistemas de equações lineares, visando analisar as potencialidades, contribuições e limitações da utilização desse aplicativo para a formação matemática dos alunos, dentro e fora do ambiente escolar, discutindo as possibilidades de melhoria da aprendizagem usando novas tecnologias.O presente trabalho é um estudo qualitativo, usando a pesquisa de campo como principal fonte de investigação, que ocorreu por meio da aplicação de uma atividade em sala de aula, com estudantes do Ensino Médio de uma escola pública estadual paraibana. Para a fundamentação teórica da pesquisa foram utilizados textos relativos a dados históricos e artigos que tratam do uso de novas tecnologias de informação e comunicação na educação.Os resultados obtidos foram positivos, evidenciando as qualidades da ferramenta para o apoio na modelagem de problemas matemáticos e na compreensão da adequação de diferentes processos de resolução de um sistema, a depender da natureza das equações que compõem o sistema. Os estudantes participaram atividade da resolução das questões propostas na atividade aplicada em sala de aula, interagindo e trocando ideias sobre o uso do aplicativo.

Palavras-chave: Sistemas de equações lineares; Photomath; Tecnologias educacionais.

ABSTRACT

The theme of this work deals with the use of anapplication (Photomath) for smartphones in the teaching of systems of linear equations, aiming to analyze the potentials, contributions and limitations of the use of this application for the mathematical formation of students, inside and outside the school environment, discussing the possibilities of improving learning using new technologies. The presentworkis a qualitativestudy, usingfieldresearch as themain source of investigation, which occurred through the application of an activity in the classroom, with high school students from a state publicschool in Paraíba. For the theoretical basis of the research, texts related to historical data and articles dealing with the use of new information and communication technologies in education were used. The results obtained were positive, showing the qualities of the tool to support the modeling of mathematical problems and the understanding of the suitability of different processes for solving a system, depending on the nature of the equations that make up the system. The students participated in the activity of solving the questions proposed in the activity applied in the classroom, interacting and exchanging ideas about the use of the application.

Keywords: Systems of linear equations; Photomath; Educational technologies.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA DE NOSSA PESQUISA

Os conhecimentos matemáticos ganham cada vez mais importância para a formação dos estudantes da Educação Básica, na medida em que a Matemática está sendo cada vez mais utilizada nas mais diversas áreas de atuação do homem. Informações são disponibilizadas para as pessoas na linguagem matemática e se elas não conseguirem ler e interpretá-las, não terão acesso ao que foi comunicado.

Do mesmo modo, saber transformar uma informação dada na linguagem usual para a linguagem matemática, facilita a identificação de solução para muitos problemas do dia a dia. Adiante veremos que demandas dessa natureza são hoje indicadas para estudantes da Educação Básica e de que maneira os documentos oficiais recomendam que eles sejam explorados em sala de aula.

Esse processo de passagem da linguagem usual para a linguagem matemática faz parte do campo do pensamento algébrico, representa um desafio para professores e estudantes,e constitui elemento de avaliação na Matriz de desempenho do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), direcionada a estudantes do 9º Ano, como indicado nos itens apresentados em seguida:

> D30 – Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
> D31 – Resolver problema que envolva equação do 2° grau.
> D32 – Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).
> D33 – Identificar uma equação ou uma inequação do 1° grau que expressa um problema.
> D34 – Identificar um sistema de equações do 1° grau que expressa um problema.
> D35 – Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1° grau. (BRASIL, 2015, p.33)

Na Matriz relacionada ao 3º Ano do Ensino Médio, é feita a seguinte referência direta aos sistemas de equação, no descritor 31: “D31 – Determinar a solução de um sistema linear, associando-o a uma matriz” (BRASIL, 2015, p.35).

Destacamos os descritores do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 3º Ano do Ensino Médio, por terem relação direta com o tema de nossa pesquisa, que trata do estudo de sistemas de equações lineares na Educação Básica.

Entendemos que esse estudo tem grande importância no contexto educacional, em razão da importância da habilidade de ler e interpretar problemas, modelá-los e resolvê-los usando recursos aritméticos, algébricos e gráficos, para a formação do estudante da Educação Básica. A vinculação de sistemas lineares a problemas e fenômenos do cotidiano das pessoas e de outras áreas de conhecimento justifica seu ensino nesse nível de escolaridade.

No entanto, por experiencia própria,seja nas experiências vivenciadas nas disciplinas de estágio Supervisionado, ou como bolsista do Projeto Residência Pedagógica, observamos que o estudo de sistemas lineares vai de encontro às competências exigidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), como veremos adiante, na medida em que acontece de maneira mecânica e relacionada à memorização de técnicas e procedimentos.

Ainda com base em nossas experiências de sala de aula vivenciadas ao longo da graduação no curso de Licenciatura em Matemática, constatamos que, de uma perspectiva geral, os jovens estão cada vez mais ligados ao mundo tecnológico e suas ferramentas, por meio do uso de aparelhos eletrônicos, como celulares e tablets, e aplicativos diversos.

Como resultado das experiências aqui destacadas, surgiu a motivação para escolhermos o tema de investigação do presente trabalho, sobre o ensino de sistemas de equações lineares usando novas tecnologias, que estão presentes em toda parte (bancos, empresas, indústrias, jogos, secretarias de escolas, redes de comunicação e informação, dentre muitos outros espaços) e fazem parte da realidade da maioria dos estudantes.

Para isso, guiamos nossa pesquisa tomando como referência a seguinte questão: quais as potencialidades e limitações do uso de aplicativos no ensino de sistemas de equações lineares, na Educação Básica?

1.2 OBJETIVOS DE NOSSA PESQUISA

Tomando como base a questão de investigação que apresentamos, o Objetivo Geral de nossa pesquisa foi: analisar as potencialidades e limitações do uso de um aplicativo (Photomath) para o ensino de sistemas de equações lineares, com estudantes da Educação Básica.

Para alcançarmos nosso Objetivo principal, seguimos os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar e aplicar um instrumento com questões envolvendo aplicações de sistemas de equações lineares;
- Analisar o uso de um aplicativo de celular (Photomath), pelos estudantes participantes da pesquisa, na resolução dos sistemas propostos no instrumento.

1.3 METODOLOGIA DA PESQUISA

1.3.1 NATUREZA DA PESQUISA E INSTRUMENTO

O presente trabalho tem uma abordagem qualitativa, sendo a análise de dados feita de forma subjetiva, considerando relatos e a interação dos alunos diante da atividade proposta. Segundo Engel (2009) tendo como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses, a nossa pesquisa se enquadra como uma pesquisa exploratória.

Em relação ao procedimento de pesquisa, esse trabalho se enquadra como uma pesquisa de campo, que se caracteriza pela realização da coleta de dados junto aos participantes, no local onde eles se encontram e atuam (ENGEL, 2009).

Como instrumento para a produção e coleta de dados utilizamos um Questionário composto de cinco questões, apresentadas e discutidas em seguida, quando indicamos as competências matemáticas necessárias para resolução de cada questão.

A Questão 1 tinha o seguinte enunciado: “Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi R$ 1400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual o número de sócios presentes ao show?

Para resolver essa primeira questão é necessário inicialmente que o estudante identifique e relacione os dados apresentados no enunciado. No caso, se denotarmos o número de sócios pela letra x e o número de não sócios pela letra y, os dados fornecidos permitiriam identificar as seguintes relações: $x + y = 200$, que corresponde ao total de pessoas que compareceram ao show.

Como cada não-sócio pagou 10 reais e a quantidade de não-sócios era representada por y, a receita com a venda dos ingressos para esse grupo seria dada por 10 y. Como cada sócio pagou metade do valor, ou seja, 5 reais, a receita gerada pela venda dos ingressos aos x sócios do clube seria dada por; 5x. Como o total arrecadado foi de 1.400 reais, tem-se que $5x + 10y = 1.400$.

Depois de organizadas as informações, chega-se ao sistema de duas equações com duas incógnitas representado em seguida:

$x + y = 200$

$5x + 10y = 1.400$

Uma vez obtido o sistema ele pode ser resolvido por meio de diferentes procedimentos, como a adição, a substituição, a comparação, graficamente, pela regra de Cramer ou com o uso de um aplicativo. A solução, para este caso, seria dada por $x = 120$ e $y = 80$.

O enunciado da Questão 2, era: “Três vizinhos compraram mercadorias da mesma marca e preço, nas seguintes quantidades: o primeiro comprou 1 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 3 kg de café, pagando 28 reais. O segundo comprou 3 kg de amendoim, 1 kg de sabão e 2 kg de café, pagando 26 reais. O terceiro comprou 2 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 2 kg de café, pagando 18 reais. Qual o preço do quilo de cada produto?”.

Para encontrar a solução da questão o estudante precisaria organizar as informações do enunciado, considerando três incógnitas distintas: o preço do quilo do amendoim (x); o preço do quilo do sabão (y) e o preço do quilo do café (z). Em seguida, relacionaria cada conjunto de dados às incógnitas correspondentes em uma equação, relativa às quantidades de vezes o preço de cada quilo e o gasto total de cada um dos vizinhos.

Assim, para o vizinho A, teríamos: 1x + 2y + 3z = 28; para o vizinho B, teríamos: 3x + 1y + 2z = 26; e para o vizinho C a equação seria dada por: 2x + 2y + 2z = 18. Neste caso, o estudante chegaria a um conjunto de três equações com três incógnitas.

Por se tratar de um sistema com três equações e três incógnitas, a maneira mais prática de resolução é por meio da Regra de Cramer, do seguinte modo: primeiro calculamos o determinante da matriz (D) formada pelos coeficientes das variáveis de cada equação presente no sistema (matriz geral). Depois calculamos os determinantes referente a cada incógnita, substituindo as colunas que contêm os coeficientes da variável em questão pela coluna dos termos independentes do sistema, uma de cada vez. Por exemplo, calculamos o determinante da matriz (D_x) substituindo a primeira coluna da matriz geral, pela coluna dos termos independentes.

O valor de x será dado pelo quociente do determinante da matriz geral pelo determinante da matriz Dx. O mesmo procedimento é seguido para determinarmos os valores das demais incógnitas. Dessa forma, usando a regra de Cramer nessa questão temos que os determinantes de cada matriz são; D = 3; D_x = 7; D_y = 17; D_z = 37; ou sejá, $x = \frac{Dx}{D} = \frac{7}{3}$; $y = \frac{Dy}{D} = \frac{17}{3}$; $z = \frac{Dz}{D} = \frac{37}{3}$.

O enunciado da terceira questão era o seguinte: “As idades de Joana, Paula e Iara somam 52 anos. A idade de Paula é igual à soma das idades de Joana e Iara, menos quatro anos. A idade de Joana é igual à soma das idades de Paula e Iara, mais dois anos. Determine a idade de cada garota”.

Nessa questão, além do aluno ter que identificar o que se pede e associar cada informação a uma incógnita, no caso seriam três delas, é necessário despender um esforço maior na interpretação desta questão, do que o exigido nas questões anteriores.

Assim, representando a idade de Joana por x; a idade de Paula por y e a idade de Iara por z, as informações do enunciado levariam as seguintes equações: x + y + z = 52; y = x + z – 4; x = y + z + 2.

Para resolver o sistema correspondente, é preciso organizar as equações, colocando as incógnitas na mesma ordem em cada equação, e dispondo os termos independentes no lado oposto da igualdade em que se encontram as incógnitas. Assim, chega-se ao sistema:

x + y + z = 52

x – y + z = 4

x – y – z = 2

Resolvendo o sistema também pela regra de Cramer, temos os seguintes determinantes D = 4, Dx = 108, Dy =96, Dz = 4, e assim: $x = \frac{Dx}{D} = \frac{108}{4}$; $y = \frac{Dy}{D} = \frac{96}{4}$; $z = \frac{Dz}{D} = \frac{4}{4}$; logo, x = 27, y = 24 e z = 1.

O enunciado da Questão 4 foi dado por; “Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida da seguinte forma: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Se um aluno totalizou 210 pontos, qual o número de questões que ele acertou?”.

Para encontrar a solução da questão o estudante precisaria primeiro identificar as duas incógnitas presentes, por exemplo, denotando por x o número de questões certas e y o número de questões erradas ou deixadas em branco, percebendo que a soma de ambas totalizam no número de questões, formando a seguinte equação: x + y = 60.

Como para cada questão certa o estudante ganhava 5 pontos e para cada questão errada ou deixada em branco perdia 1 ponto, chega-se à seguinte equação: 5x – 1y = 210. Dessa forma, chegamos ao sistema:

x + y = 60

5x – 1y = 210

Resolvendo-se o sistema por adição, segue que (somando-se as duas equações): 6x = 270, logo, x = 270/6 = 45 e y = 15.

O enunciado da Questão 5 era dado por: “Examinando o anúncio abaixo, conclua qual é o preço de cada faca, garfo e colher”.

Figura 01. Questão 5 da segunda etapa

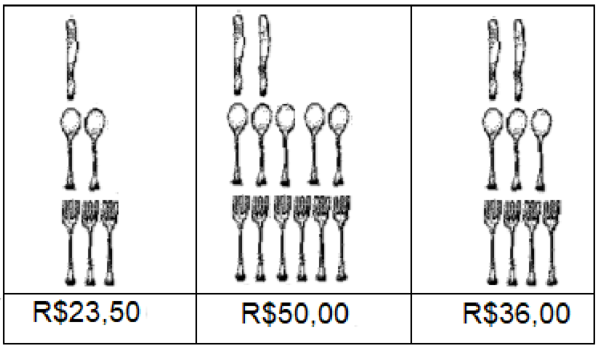


Figura 1. Questão 5 da atividade

Fonte: Clube de matemática da OBMEP

Para resolver a questão, bastava associar as incógnitas aos dados apresentados nas imagens, do seguinte modo: denotando o preço de cada faca por x; o preço de cada colher por y e de cada garfo por z, e relacionando as quantidades de cada peça nos três quadros, com os preços unitários e o valor total gasto, chegamos a três equações com três incógnitas:

x + 2y + 3z = 23,50

2x + 5y + 6z = 50,00

2x + 3y + 4z = 36,00

Temos um caso de sistema de equações lineares 3 x 3, ou seja, com três equações e três incógnitas, que podemos resolver pela regra de Cramer. Calculando os determinantes temos que D = -2 , Dx = -11, Dy = -6, Dz = -8. Isso implica que: $x = \frac{Dx}{D} = \frac{-11}{-2}$; $y = \frac{Dy}{D} = \frac{-6}{-2}$; $z = \frac{Dz}{D} = \frac{-8}{-2}$; logo, x = 5.5, y = 3, z = 4.

O enunciado da última questão (Questão 6) era: “Agora, sem o uso do aplicativo resolva os seguintes sistemas, identificando e justificando o uso do método que achar mais adequado”:

a) $\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 240 \\ 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 405 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 8 \\ 3\mathrm{x} - 5\mathrm{y} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - z = 6 \\ x - y + z = 20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\mathrm{x} - 16\mathrm{y} = 8 \\ 3\mathrm{x} - 8\mathrm{y} = 20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

Como indicado no enunciado, para solucionar esta Questão os estudantes poderiam fazer uso de qualquer estratégia de resolução para os sistemas, exceto o aplicativo.

As soluções de cada sistema eram as seguintes:

(a) $\begin{cases} x + 2y = 240 \ \ (-2) \\ 2x + 3y = 405 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -480 \\ 2x + 3y = 405 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -480 \\ -y = -75 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} -2x - 4y = -480 \\ -y = -75 \ (-1) \end{cases} \rightarrow \ y = 75 \ \rightarrow \ -2x - 4(75) = \ -480 \ \rightarrow \ -2x - 300 = -480 \ \rightarrow \ -2x = \ -480 + 300 \ \rightarrow \ -2x = -180 \ \rightarrow x = \ \frac{-180}{-2} \rightarrow x = 90$.Conjunto solução: (90,75)

(b) $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \ (-5) \\ 3x - 5y = 1 \ (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -25x + 10y = -40 \\ 6x - 10y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 25x + 10y = -40 \\ -19x = -38 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-38}{-19} \ \rightarrow x = 2 \ \rightarrow 5(2) - 2y = 8 \ \rightarrow 10 - 2y = 8 \rightarrow -2y = 8 - 10 \ \rightarrow -2y = -2 \ \rightarrow y = \ \frac{-2}{-2} \ \rightarrow y = 1$. Conjunto solução: (2,1)

(c) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - z = 6 \\ x - y + z = 20 \end{cases} \rightarrow$ L3: -L1 + L3$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - z = 6 \\ -2y = -20 \end{cases} \rightarrow y = \ \frac{-20}{-2} = 10 \ \rightarrow$ L2: L1 + L2 $\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 40 \\ 2x + 2y = 46 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow 2x + 2(10) = 46 \ \rightarrow 2x = 46 - 20 \rightarrow x = \frac{26}{2} \ \rightarrow x = 13x + y + z = 40 \ \rightarrow 13 + 10 + z = 40 \ \rightarrow 23 + z = 40 \ \rightarrow z = 40 - 23 \ \rightarrow z = 17$.Conjunto solução: (13, 10, 17)

(d) $\begin{cases} 2x - 16y = 8 \\ 3x - 8y = 20 \ (-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 16y = 8 \\ -6x + 16y = -40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 16y = 8 \\ -4x = -32 \end{cases} \rightarrow x = \ \frac{-32}{-4} = 8 \ \rightarrow \begin{cases} 2(8) - 16y = 8 \\ x = 8 \end{cases} \rightarrow 16 - 16y = 8 \ \rightarrow -16y = 8 - 16 \ \rightarrow \ -16y = -8 \rightarrow y = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$ .Conjunto solução (8, $\frac{1}{2}$)

(e) $\begin{cases} 3x + y = 9 \ \ (-3) \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9x - 3y = -27 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = -27 \\ -7x = -15 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-15}{-7} =$

$\frac{15}{7} \rightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{15}{7}\right) + y = 9 \\ x = \frac{15}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{45}{7}\right) + y = 9 \\ x = \frac{15}{7} \end{cases} \rightarrow y = 9 - \left(\frac{45}{7}\right) \rightarrow y = \frac{18}{7}.$

Conjunto solução: $(\frac{15}{7}, \frac{18}{7})$

1.3.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

O questionário apresentado e discutido no item anterior foi impresso e aplicado com 18 estudantes de uma turma do 2ª Ano do Ensino Médio de uma escola estadual cidadã de tempo integral, em duas aulas seguidas de 50 minutos cada.

O Questionário foi entregue individualmente para cada aluno, no entanto, eles podiam discutir com os colegas sobre a interpretação dos enunciados e a organização dos dados na forma de equações, em cada questão.

Depois de organizados as equações e sistemas correspondentes a cada item os estudantes eram orientados a encontrar a solução dos sistemas obtidos, com o auxílio do aplicativo PHOTOMATH, que eles instalaram em seus celulares (smartphones), aparelho que praticamente todos os estudantes tinham com eles no momento da aula.

Antes do início da atividade resolvemos alguns sistemas no quadro, explicando o passo a passo da passagem da linguagem usual para a linguagem matemática (algébrica) e orientamos sobre a instalação e uso do aplicativo. Depois da apresentação dos exemplos os estudantes começaram a responder a atividade com o auxílio do aplicativo e a ajuda do pesquisador e do professor durante a segunda aula.

1.4 A ESTRUTURA DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho está organizado em três Capítulos, sendo o primeiro Capítulo dirigido à apresentação da temática escolhida, dos objetivos da pesquisa e da metodologia que adotamos, assim como a discussão do instrumento aplicado.

O segundo Capítulo trata da fundamentação teórica referente à modelagem de problemas matemáticos, por meio de sistemas de equações, e do uso de aplicativos como ferramentas educacionais, contextualizando-as com competências exigidas na atual BNCC (BRASIL, 2018).

No terceiro Capítulo trazemos a apresentação e a análise dos dados produzidos e coletados, na qual destacamos o desempenho dos estudantes, referente à atividade aplicada em sala de aula, foco de nosso trabalho. Por fim, encerramos o texto com as Considerações finais sobre nossa investigação.

2. O REFERENCIAL TEÓRICO DO TRABALHO: OS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 UM BREVE RECORTE HISTÓRICO SOBRE O DESENVOLVIMENTO E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Vamos iniciar a discussão teórica sobre o tema de nossa pesquisa com uma breve introdução histórica sobre os sistemas de equações lineares, que surgiram há mais de dois milênios, na China. Para isso, é imprescindível mencionar a matemática chinesa e o livro K´ui-ch´angSuan-shu (Os nove capítulos sobre a arte matemática), onde se tem o mais antigo registro sobre o estudo de sistemas lineares.

O livro foi publicado no século III a.C pelo matemático QinJiushao, no entanto, foram os comentários de Liu Hui com resoluções, provas, e a criação de algoritmos, fornecendo resultados precisos posteriormente, que teve maior relevância para a matemática.

O livro contém 246 problemas sobre o meio agrícola, mensuração de terras, sociedade, comércio, entre outros contextos de aplicação prática. Referente ao estudo de sistemas lineares da época, sua representação se dava através de barras de bambus ordenadas sobre tábuas, sendo que os espaços vazios representavam o número zero. Além disso, os chineses resolviam os sistemas usando tanto os números positivos quanto os negativos. Segundo Boyer,

> [A] ideia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses pois estavam acostumando a calcular com duas coleções de barras - uma vermelha para coeficientes positivos ou números, e uma outra preta para os negativos. No entanto, não aceitavam a ideia de um número negativo pode ser solução de uma equação (BOYER, 1974, p.147).

Liu Hui relatou métodos engenhosos de soluções como a “regra da matriz”, que consiste em reduzir uma matriz quadrada para o formato triangular, método hoje que chamamos de método de eliminação por Gauss, além de outros métodos de grande relevância, como a regra de dupla falsa posição usada para encontrar a incógnita de equações do tipo: $ax + b = c$, e a regra “do um excesso e um déficit” que encontra os valores das incógnitas de sistemas 2x2. Não vamos adentrar em como funcionavam esses métodos por não fazerem parte do foco de nosso trabalho, mas o leitor pode encontrar detalhes sobre eles no site do IMECC (Disponível em:https://www.ime.unicamp.br/lem/material-de-apoio/nove-capitulos-arte-matematica-liu-hui-seculo-ii-dc).

Em seguida destacamos um exemplo de problemas que são encontrados no capítulo oito do livro exclusivo sobre sistemas lineares:

> Foram vendidos 2 bois e 5 carneiros para comprar 13 porcos. Sobraram 1000 moedas. Venderam 3 bois e 3 porcos e compraram 9 carneiros. Eles têm exatamente o dinheiro para isto. Venderam 6 carneiros e 8 porcos. Então compraram 5 bois. (Existem 600 moedas em déficit). Pergunta: qual o preço de cada boi, carneiro e porco, respectivamente? (Disponível em:https://www.ime.unicamp.br/lem/material-de-apoio/nove-capitulos-arte-matematica-liu-hui-seculo-ii-dc).

O problema destacado, assim como todos os outros problemas do Capítulo oito, trata de problemas contextualizados, associados a situações do cotidiano, sendo imprescindível a interpretação da situação, o pensamento crítico sobre o problema e a denotação das incógnitas, para depois usar os possíveis métodos de resolução.

Ou seja, desde o seu princípio, os procedimentos referentes ao estudo de sistemas lineares se baseiam em:

1. Identificar se um problema pode ser representado por meio de alguma modelagem matemática;
2. Interpretar, organizar os dados e construir o modelo matemático correspondente;
3. Usar o método de resolução mais adequado para resolver o problema.

A sequência de passos relacionados à resolução de um sistema de equações lineares é praticamente a mesma, dos tempos em que eles foram concebidos na Matemática até os dias atuais, mudando principalmente as ferramentas que podem ser usadas na modelagem e na resolução dos problemas que podem ser representados por um sistema dessa natureza.

No nosso caso, optamos pelo uso de um aplicativo, na etapa de resolução dos sistemas propostos aos estudantes, denominado de PHOTOMAT, e que pode ser utilizado no celular, do qual trataremos adiante.

2.2 TRABALHOS DE INVESTIGAÇÃO JÁ REALIZADOS SOBRE O TEMA

No que se refere ao uso de aplicativos no estudo de sistemas lineares como ferramenta educacional, temos poucas pesquisas sobre o tema, pois até então, o uso da tecnologia em sala de aula ou em casa, para fins pedagógicos, é relativamente recente, em especial se tratarmos do uso de smartphones (celulares). No entanto, é importante salientar algumas das pesquisas já feitas sobre o tema.

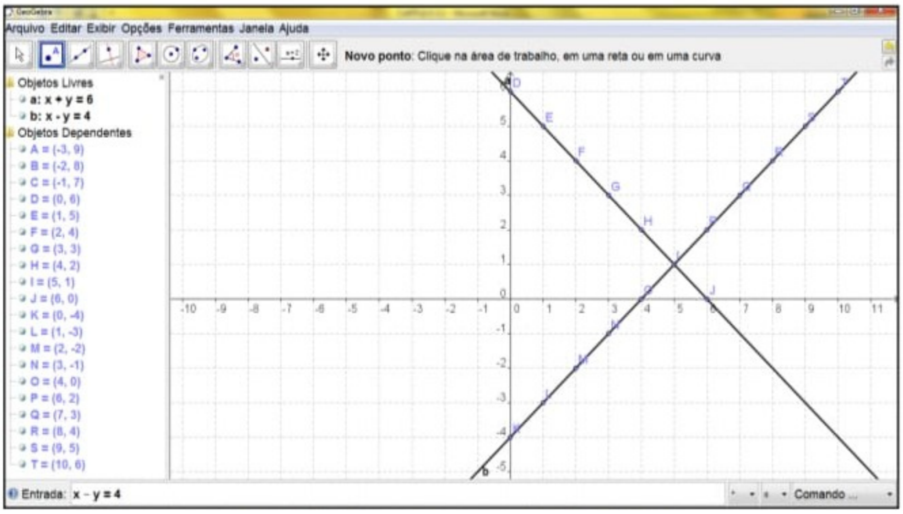
Uma das investigações é o trabalho de conclusão de curso do aluno Mizael Carvalho, da Universidade Federal do Pará, com o seguinte título: “Sistemas de equações lineares: Uma análise das soluções utilizando o programa computacional Geogebra”. Como o próprio título aponta, a pesquisa foi voltada ao estudo e análise de soluções de sistemas lineares utilizando o aplicativo Geogebra, que tem como principal característica criar representações geométricas e gráficas de elementos matemáticos diversos.

> Segundo o manual do Geogebra, ele é um *software* livre de código aberto e multiplataforma de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino. Junta geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um só pacote de interface simples e fácil de usar. Foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter da Universidade de *Salzburg*, em 2001, para auxiliar no ensino de matemática nas escolas. O programa permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas como com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica e interativa[...] (CARVALHO, 2013, p. 30).

Com essa ferramenta a pesquisa focou na resolução gráfica de sistemas lineares, com o seguinte procedimento: introduz-se, uma a uma, as equações de primeiro grau que formam o sistema linear em questão, na janela de entrada de comandos. Imediatamente seu gráfico é apresentado na tela, representado por uma reta no plano cartesiano. As coordenadas dos pontos do gráfico (x,y) correspondem aos pares de dados que satisfazem a equação. Depois de inseridas todas as equações do sistema, caso exista uma intersecção entre as retas, esse ponto em comum (coordenadas x e y) representa a solução do sistema, caso o sistema seja possível e determinado, ou seja, ele admita solução e ela seja única.

No texto o autor apresenta o seguinte exemplo: o sistema linear representado no Geogebra é composto de duas equações: x+ y = 6 e x – y = 4. A representação gráfica de cada uma das equações está presente na Figura 02.

Figura 02. Retas concorrentes – Sistema possível e determinado.

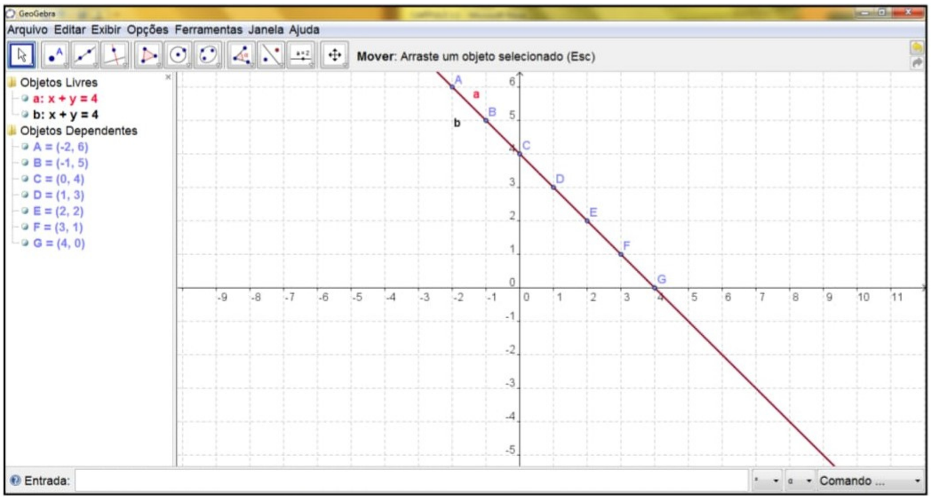


Fonte: CARVALHO, 2013.

Pela imagem podemos ver que as duas equações do sistema se intersectam no ponto I, de coordenadas (5,1), sendo esse o único par ordenado que satisfaz o sistema, ou seja, sua única solução.

No caso dos sistemas serem possíveis e indeterminados, vamos considerar o seguinte sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$. Como a segunda equação do sistema é um múltiplo da primeira (multiplicada por dois), temos que os pares ordenados que correspondem à solução da equação x + y = 4, como (2,2), (4,0), (6, -2), dentre outros, também são soluções da equação 2x + 2y = 8. A representação gráfica das equações que compõem o sistema está presente na Figura 03 e, neste caso, as retas são coincidentes.

Figura 03. Reta coincidente – Sistema possível e indeterminado.

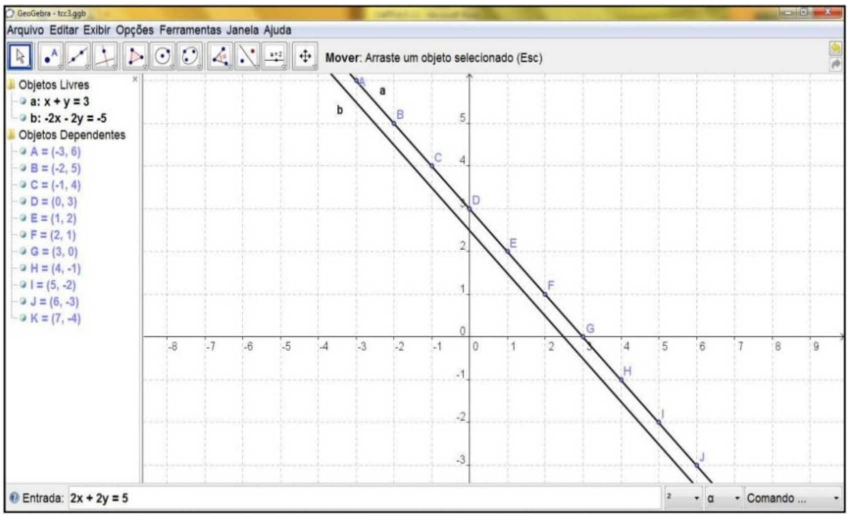


Fonte: CARVALHO, 2013.

Como as retas são coincidentes, todos os pares ordenados que satisfazem a primeira equação, também satisfazem a segunda, tendo o sistema infinitas soluções.

Por fim, para discutir o caso de um sistema impossível, onde não há nenhum par ordenado que satisfaça todas as equações do sistema, ao mesmo tempo, consideremos o seguinte sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x - 2y = -5 \end{cases}$, cujas retas encontram-se representadas na Figura 04.

Figura 04. Retas paralelas – Sistema indeterminado



Fonte: CARVALHO, 2013.

Como não há nenhum ponto de intersecção entre as retas x + y = 3 e -2x – 2y = –5, as retas são paralelas. Considerando o processo apresentado por Carvalho (2013), entendemos que o uso do Geogebra pode facilitar a compreensão do que representa a solução de um sistema e das diferentes relações entre as equações, em um sistema.

A segunda pesquisa que analisamos foi apresentada em um artigo de Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista,doInstituto Federal Fluminense, com o seguinte Título: “Uso de aplicativos em Tablets no estudo de sistemas lineares: percepção de licenciados em Matemática”.

O foco principal do artigo foi o uso de *tablets* como ferramenta educacional, para apoio aos professores e, principalmente, aos alunos. Os *tablets* podem desempenhar várias funções no espaço escolar, mas o foco do artigo foi o uso de aplicativos no ensino de matemática, particularmente, o estudo gráfico de sistemas lineares. De acordo com as autoras, a pesquisa teve como objetivo “[...] discutir a visão dos licenciandos em Matemática sobre os plotadores gráficos dos aplicativos considerados, quando utilizados na interpretação geométrica de sistemas lineares 2x2 e 3x3” (TEIXEIRA e CRISTINA, 2013, p.01).

Desse modo, o artigo tratado uso de Tecnologias Digitais (TD) no ambiente escolar, no caso, uma pesquisa com estudantes de uma Licenciatura em Matemática, na disciplina *Educação Matemática e Tecnologias*. Para isso foram escolhidos quatro aplicativos matemáticos que podem ser utilizados para resolver sistemas lineares,por meio de suas representações gráficas, mas que também podem ser utilizados na abordagem de outros conteúdos matemáticos.

Os aplicativos selecionados operam com o sistema Android, para *tablets,*podiam ser utilizados para resolver graficamente sistemas de equações lineares 2x2 e 3x3, além de ter avaliação igual ou superior a 4,5 na loja do Google Play. Os aplicativos escolhidos foram: *Calculus Tools;xGraphing;mePlotFree; e TriPlot 3D GraphingFree.*

As especificações de cada aplicativo, apresentadas em seguida, estão presentes no artigo aqui discutido, e são referentes ao ano da publicação da pesquisa, e não estão, portanto, necessariamente atualizadas:

Calculus Tools: aplicativo com recursos para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, possibilitando o trabalho com funções, equações, derivadas, integrais definidas e séries de Taylor, com ilustrações gráficas em 2D e 3D. Tem um limite de até seis gráficos por tela, podendo ser compartilhado como imagem. O aplicativo também oferece instruções para auxiliar os usuários.

xGraphing: aplicativo voltado para representação gráficade funções no plano cartesiano, tanto funções polinomiais como funções trigonométricas, modulares e logarítmicas, em 2D. Também é possível criar gráficos marcando até quatro pontos no plano cartesiano, e o aplicativo determina a lei de formação da função. Sem limites de gráficos por tela, ele pode ser compartilhado de várias maneiras, tendo também tutorial para o usuário.

mePlotFre: aplicativo utilizado para a construção de gráficos em 2D e 3D, de modo que suas equações podem ser expressas de forma implícita, explicita e paramétrica. O fato de possuir uma calculadora cientifica permite operar com matrizes, números complexos e equações do primeiro e segundo graus. O *mePlotFre*também não tem limite de gráficos por tela e é possível compartilhar as representações por meio de foto.

TriPlot 3D GraphingFree: aplicativo para construção de gráficos em 3D, podendo ser de funções polinomiais, trigonométricas, inversas, logarítmicas e modulares. No entanto, é possível mostrar apenas oitos gráficos por tela e o aplicativo não fornece uma seção de ajuda para os usuários.

A investigação consistiu na resolução de duas questões propostas para os licenciandos, que se dividiram em dois grupos. A primeira questão continha três sistemas lineares 2x2; um possível e determinado; um sistema possível e indeterminado; e um sistema impossível. A segunda questão era referente a sistemas 3x3 - nesse tipo de sistema são possíveis oito tipos de posições relativas ao espaço 3D: possível e determinado (01); possível e indeterminado (04), impossível (03). Como só três dos aplicativos possuíam ilustração em 3D, foram propostos nove sistemas para uso em cada aplicativo adequado a esse fim.

Após a execução da atividade pelos estudantes, foram feitas várias observações, como defeitos nos aplicativos, o nível dos gráficos, a dificuldade de leitura dos comandos (por exemplo, a confusão entre o sinal de multiplicação (e não o uso de um ponto) e a variável x, o que dificultava a construção do gráfico). Os participantes também relataram a descoberta de algumas funções dos aplicativos que não eram evidentes, como alterar as escalas dos eixos ou transladar os gráficos.

De uma forma geral os alunos constataram que para a Questão 1, do instrumento, o aplicativo que obteve melhor desempenho foi o xGraphing:

> Atribui-se o resultado mais favorável ao xGraphing à interface mais atraente, ao tutorial que é apresentado ao abrir o aplicativo e à possibilidade de visualizar o gráfico na mesma tela da lei da função. É importante considerar que, apesar de melhor avaliado, esse aplicativo também apresentou algumas dificuldades, como por exemplo, no procedimento para apagar um gráfico e por não mostrar y ou f(x) antes da lei da função (TEIXEIRA e CRISTINA, 2013, p.06).

Já na segunda questão, referente aos sistemas 3x3, o TriPlot 3D e o Calculus Tools tiveram um bom desempenho, diferentemente do mePlotFree, que, na visão dos alunos, tem uma variação de cores nos gráficos que atrapalhavam sua compreensão. Na opinião de uns dos alunos “[O] ideal seria juntar os pontos positivos dos aplicativos em um só” (TEIXEIRA e CRISTINA, 2013, p.06). De forma geral, o estudo gráfico de sistemas lineares através do uso dos *tablets* se mostrou satisfatório e bem aceito pelos alunos, evidenciando que a TD pode ser uma aliada do processo de ensino e aprendizagem matemática.

Nos dois trabalhos citados destaca-se o foco das resoluções dos sistemas ao processo gráfico, não contemplando estratégias algébricas, como a adição, comparação ou solução matricial. No caso de nosso estudo, optamos pelo aplicativo PHOTOMATH, que. Além de possuir o recurso da representação gráfica, permite a exploração de diversas formas de solução algébrica de sistemas lineares, em uma interface de fácil acesso pelos usuários.

Diferentemente do Geogebra, que possui muitos comandos, o que pode dificultar seu manuseio pelos estudantes, assim como os aplicativos do segundo artigo, o Photomath disponibiliza a solução do sistema por meio da foto do sistema de equações, inclusive manuscrito, fornecendo explicações detalhadas do passo a passo, em diferentes processos de resolução.

Nosso trabalho diferencia-se dos dois apresentados, em especial pela ênfase que demos à passagem da linguagem usual para a linguagem algébrica, partindo da modelagem de um problema até a sua resolução, com pelo menos três tipos de resoluções distintas. Em nossa pesquisa apresentamos uma nova perspectiva para o trabalho com os métodos mais usuais de resolução de equações, na medida em que o aplicativo permite comparar qual método é mais adequado para cada sistema, dependendo das equações envolvidas.

Também trazemos como diferencial, em nossa pesquisa, a conexão de elementos de nosso estudo, explorados nas questões propostas aos estudantes do Ensino Médio, com capacidades e habilidades presentes na base nacional comum Curricular, documento ainda pouco conhecido por muitos professores da Educação Básica.

2.3 O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA BREVE APRESENTAÇÃO DO APLICATIVO PHOTOMATH

O Photomath é um aplicativo desenvolvido pelo *Photomath.Inc* e está disponível nos sistemas operacionais IOS e Android. Encontrado nas lojas online da App Store e Google Play, o Photomath é um aplicativo utilizado no ensino de Matemática, com mais de 100 milhões de *downloads* e com uma média de 1.234.054.453 problemas matemáticos resolvidos por mês, segundo os seus desenvolvedores. Já foi premiado pela 4YFN, que é o maior concurso de startups em tecnologias móveis e modelos de negócio, na categoria mídias digitais, como a primeira câmera matemática do mundo, no ano de 2015, em

Barcelona. Também foi contemplado com o prêmio do fórum Netexplo, por seu trabalho em tecnologia da educação.

O Photomath é uma ferramenta educacional que captura a imagem de um cálculo, equação ou sistema de equações através da câmera de smartphones e tablets e, de forma instantânea, fornece o resultado de forma detalhada, com o passo a passo. Uma vantagem é que o sistema funciona offline, ou seja, não é necessário ter conexão com a Internet no momento do uso – apenas para o download, facilitando seu acesso a qualquer momento e em qualquer lugar, depois de disponível no celular ou tablet.

Em sua atual versão gratuita 6.4.0 atendo uma grande variedade de conteúdos matemáticos, possibilitando a resolução rápida de problemas com diferentes tipos de resoluções, facilitando a aprendizagem matemática de qualquer pessoa que tenha um dispositivo móvel com sistema operacional adequado:

1.Números naturais: adição, subtração, multiplicação, divisão e comparação;

2. Números racionais na forma fracionária: adição, subtração, multiplicação, divisão, comparação, números mistos, conversão;

3. Números racionais na forma decimal: adição, subtração, multiplicação, divisão, comparação, conversão;

4. Potências e raízes: adição, subtração, multiplicação, divisão, comparação, notação cientifica;

5. Números complexos: operações, conjugado, raízes reais e imaginárias, forma polar;

6. Função linear: equações lineares, desigualdades lineares, sistemas, gráficos;

7. Função quadrática: equações quadráticas, desigualdades quadráticas, sistemas, gráficos;

8. Função exponencial e logarítmica: equações exponenciais e logarítmicas, desigualdades exponenciais e logarítmicas, sistemas,gráficos;

9. Função racional: equações racionais,desigualdades racionais, sistema, gráficos;

10. Função trigonométrica: equações trigonométricas, sistemas, gráficos;

11. Função absoluta: equações absolutas,desigualdades absolutas, sistemas, Gráficos;

12. Simplificação e fatoração de expressões algébricas;

14. Teorema binomial: Coeficientes binomiais, fatoriais, equações com fatoriais;

15. Cálculo: Limites, derivados, Integrais. (Fonte: https://Photomath.net/pt/)

O aplicativo é de fácil uso e abre ativando a câmera do celular, indicando uma janela de localização das informações (Figura 05). No exemplo, indicamos o posicionamento dos dados de um sistema 2x2, na janela indicada.

Figura 05. Tela inicial do aplicativo Photomath.

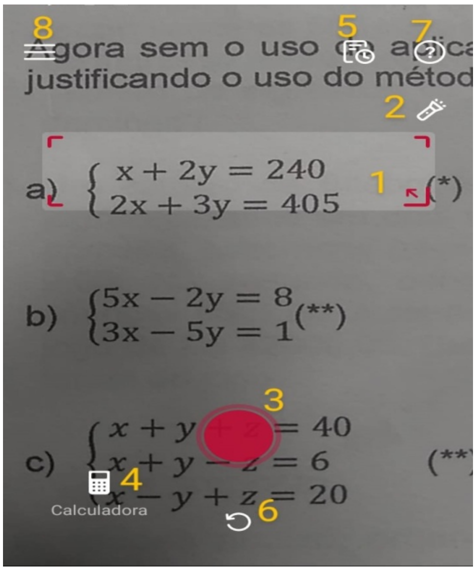


Figura 2. Tela inicial do aplicativo.

Fonte: Acervo pessoal do autor.

Para facilitar a explicação de cada funçãopresente na tela inicial (Figura 05), numeramos os itens, que são descritos em seguida:

1. Janela de captura de dados – que devem ficar totalmente inseridos no espaço indicado (podemos fazer isso aumentando ou diminuíndo a distância entre a câmera e a imagem a ser capturada);
2. Aciona a lanterna do dispositivo móvel, em casos de pouca luz, para se ter uma capitação adequada da imagem;

3. Tecla que executa a captura dos dados (depois de inseridos na janela, pressiona-se o botão vermelho);
4. Opção calculadora, que disponibiliza a edição manual de dados, caso o usuário não queira ou não consiga capturar os dados com foto, ou, ainda, para editar um problema após a captura de sua imagem;
5. Histórico dos itens resolvidos anteriormente;
6. Retorna ao último item resolvido.
7.Instruções de como usar a câmera, calculadora e o histórico, com pequenos vídeos demonstrativos e ilustrativos (Figura 06).

Figura 06: Instruções para o uso da câmera pelo aplicativo.

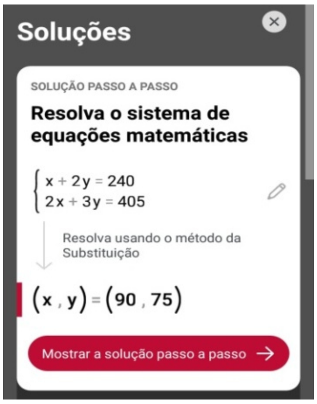
Figura 3. Tutorial câmera.

Fonte: Acervo do autor.

Finalmente, o item 8 abre a seção do perfil do usuário, que também contem a opção do **idioma**, acesso ao centro de ajuda, para tirar as dúvidas e informar os usuários, e, por fim, a opção "**sobre nós"** que fornece o site do aplicativo, e-mail para contato, termos de utilização e política de privacidade. O usuário pode, ainda, personalizar seu perfil no aplicativo.

Focando no uso do Photomath na resolução de um sistema de equações lineares, vamos utilizar como exemplo o item que constava na atividade proposta aos participantes de nossa pesquisa: $\begin{cases} x + 2y = 240 \\ 2x + 3y = 405 \end{cases}$. Após a captura do sistema, a partir da imagem presente na lista, e do registro das informações, como uso do botão vermelho, o aplicativo apresenta a resposta, como indicado na Figura 07.

Figura 07: Resolução do sistema, parte 01.

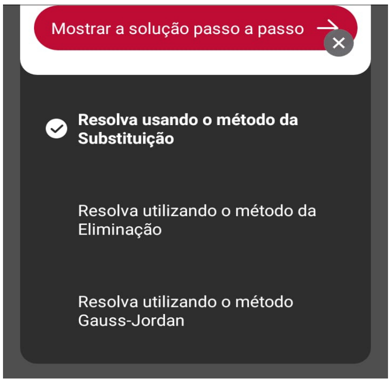


Fonte: Acervo do autor.

Os valores de x e y são dados imediatamente, e o aplicativo indica o método indicado para resolver o sistema. O símbolo do lápis, à direita da tela, serve para edição do problema, caso necessário. Isso pode ocorrer quando a informação é manuscrita e há problemas na recepção de dados pelo aplicativo (por exemplo, confusão entre a letra z e o número 2).

O usuário pode solicitar a apresentação do detalhamento da resolução, pressionando a tecla “Mostrar a solução passo a passo”, mas aparecem, ainda, outras opções de resolução, quando deslizamos a tela para cima (Figura 08).

Figura 08: Resolução do sistema, parte 02.



Fonte: Acervo do autor.

Podemos observar que, para o sistema em questão, foram oferecidos três tipos distintos de resolução, cabendo ao usuário escolher o que desejar.

Deslizando a tela um pouco mais para cima, veremos que também há uma representação gráfica do sistema (Figura 09).

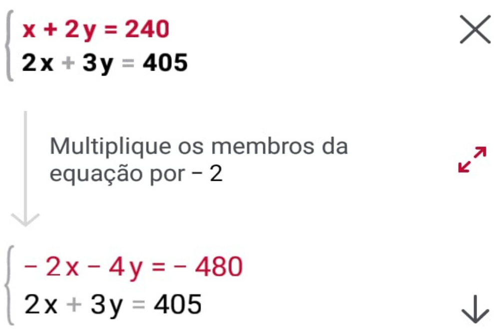
Figura 09: Resolução gráfica do sistema.

Fonte: Acervo do autor.

Como podemos notar, as retas que representam as equações são concorrentes, cujo ponto de intersecção representa o conjunto solução do sistema. Ao clicarmos em “mostrar gráfico” o aplicativo amplia o gráfico e fornece detalhes como o domínio, intersecção com o eixo vertical e a raiz de cada equação do sistema.

O passo a passo das soluções apresenta detalhamentos que ajudam o usuário a compreender o que é realizado em cada etapa da resolução, como indicado nas figuras 10 a 16. No caso, optamos pela resolução por adição.

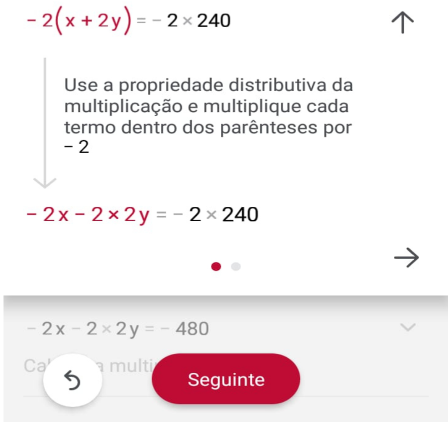
Figura 10: Resolução do sistema por adição – passo a passo.



Fonte: Acervo do autor.

A equação que será modificada no procedimento está indicada com a cor vermelha. Usando as setas de expansão (em vermelho), o aplicativo informa que operação foi realizada, no caso, multiplicação da equação, por dois. O detalhamento dessa operação também é indicado no aplicativo (Figuras 11, 12 e 13).

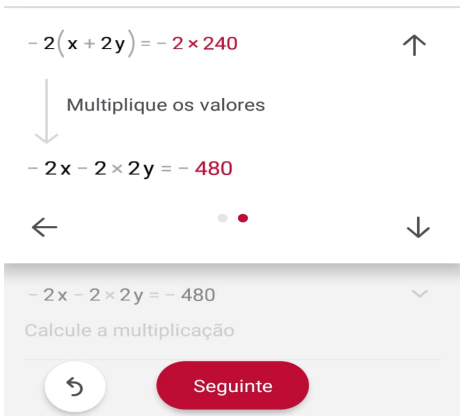
Figura 11: Multiplicação de uma equação do sistema, por dois.



Fonte: Acervo do autor.

Na Figura 11 temos a indicação da operação e o uso da propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição. Na Figura 12 temos o resultado das operações, nos dois lados da igualdade.

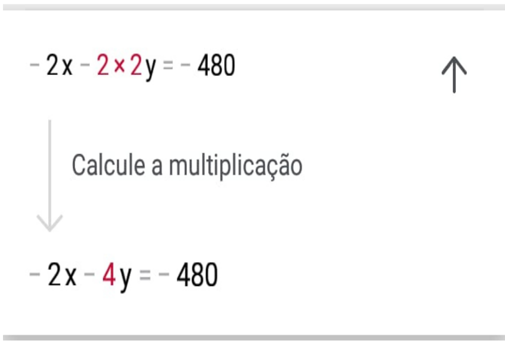
Figura 12. Resultado da aplicação da distributividade



Fonte: Acervo do autor.

Finamente, na Figura 13 temos o resultado da multiplicação do número pelos coeficientes das variáveis.

Figura 13. Operação de multiplicação de uma constante pelo coeficiente de uma variável.

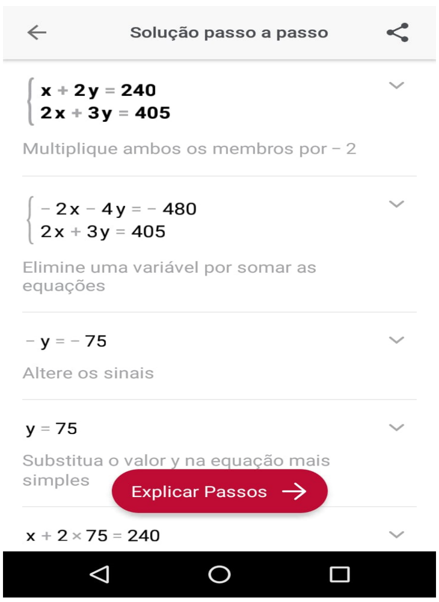


Fonte: Acervo do autor.

Como podemos observar, o usuário pode ter acesso a todos os detalhes do processo, uma vez que o Photomath disponibiliza e indica o que foi feito em cada passo, com o uso de cores e setas para facilitar a compreensão do processo.

Voltando à tela de resolução do problema, vemos, na Figura 14, que a primeira equação já se apresenta modificada (após a multiplicação pelo número 2):

Figura 14: Sistema com uma das equações modificada



Fonte: Acervo do autor.

O passo seguinte corresponde à adição das duas equações, para eliminar uma das variáveis (no caso, a variável x), como indicado na explicação presente na imagem da Figura 13 da figura anterior. Desse modo, ao realizar esse procedimento, temos que -y = -75. O detalhamento da adição pode ser obtido solicitando-se a explicação dos passos e o uso da tecla “seguinte”, disponibilizada no detalhamento.

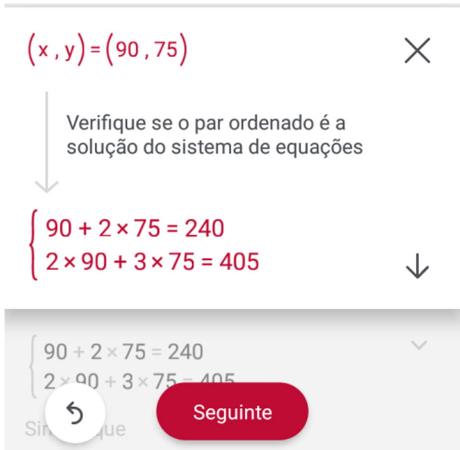
Como o resultado foi -y = -75, o aplicativo indica a multiplicação dos dois membros da igualdade por -1, levando ao resultado y = 75. Para obter o valor de x, o aplicativo sugere a substituição do valor de y na equação x + 2y = 240 (Figura 15).

Figura 15: Obtenção do valor de x, a partir de y.

Fonte: Acervo do autor.

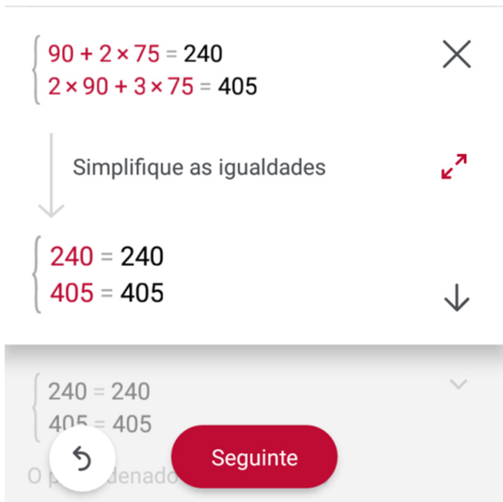
Clicando na tecla “seguinte” apresenta-se um novo quadro com o valor da incógnita x = 90. Se desejar expandir o passo a passo que antecede o resultado para x, solicitamos o detalhamento dos passos. Dessa forma, chegamos ao conjunto solução (x, y) = (75, 90). O aplicativo sugere, ainda, o cumprimento do último passo do processo, que é a verificação da validade das igualdades, substituindo-se os valores de x e y nas duas equações (Figuras 15 e 16).

Figura 16: Substituição dos valores de x e y nas equações.



Fonte: Acervo do autor.

Figura 17: Resultado dos cálculos



Fonte: Acervo do autor.

Uma vez conferida a validade da resposta, o aplicativo pode ser encerrado. Como vimos pelo exemplo e algumas imagens que representam partes do registro do processo, o Photomath é um aplicativo didático e que possibilita que o estudante resgate, inclusive, o trabalho com operações algébricas e aritméticas básicas, ou propriedades e relações de sinais em operações, possibilitando que superem dúvidas que tenham acumulado em relação a esses elementos.

2.4 AS DEMANDAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO PARA A RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES PROPOSTOS, NA BNCC

A Base Nacional Comum Curricular é o documento que atualmente regulamenta os conhecimentos, habilidades e competências mínimos que devem ser desenvolvidos pelos estudantes da Educação Básica, da Educação Infantil ao Ensino Médio, em todas as áreas de conhecimento.

O documento foi aprovado, em sua versão completa em dezembro de 2018 e desde então passou a ser obrigatoriamente adotado na organização dos currículos das escolas públicas e privadas do Brasil, assim como servirá de referência para a elaboração de materiais didáticos, como livros escolares, e para os sistemas de avaliação de larga escala.

No documento, a área de Matemática, no Ensino Fundamental, está organizada em cinco Unidades Temáticas: Números; Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometria e Probabilidade e estatística. A cada Unidade Temática são associados Objetos de conhecimentos e estes, por sua vez, estão ligados a habilidades, codificadas do seguinte modo: as duas primeiras letras indicam que a habilidade é indicada para o Ensino Fundamental (EF); os dois primeiros números, indicam o ano de escolaridade (por exemplo, 05 corresponde ao 5º Ano); as duas letras seguintes a área (Matemática – MA) e os dois últimos números a ordem da habilidade no ano de escolaridade correspondente.

Em relação ao nosso tema de investigação, destacamos as habilidades que entendemos serem importantes como base para a resolução dos sistemas de equações lineares propostos aos estudantes, em nossa pesquisa, independentemente do método a ser utilizado no processo, no Quadro 1 (todas as habilidades são transcrições literais do documento (BRASIL, 2018).

Quadro 1. Habilidades demandadas na resolução das questões propostas em nosso instrumento

HABILIDADE	DESCRIÇÃO
EF05MA10	Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
EF05MA11	Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença

	matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
EF06MA06	Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
EF07MA04	Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
EF07MA06	Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm as mesmas estruturas podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
EF07MA13	Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
EF08MA08	Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Quadro 1. Habilidades da BNCC.

Como podemos observar, as habilidades que entendemos que seriam demandas pelos estudantes na resolução dos problemas que compuseram nosso instrumento de investigação, estão indicados do 5º ao 8º Anos do Ensino Fundamental, no documento. As questões propostas no questionário podiam ser associadas às Habilidades de Matemática indicadas na BNCC (2018), como indicado em seguida.

Questão 1) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi R$ 1400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual o número de sócios presentes ao show? As habilidades contempladas nesses itens são: EF05MA11; EF07MA04; EF07MA06; EF07MA13 e EF08MA08.

Questão 2) Três vizinhos compraram mercadorias da mesma marca e preço, nas seguintes quantidades: o primeiro comprou 1 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 3 kg de café, pagando 28 reais. O segundo comprou 3 kg de amendoim, 1 kg de sabão e 2 kg de café, pagando 26 reais. O terceiro comprou 2 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 2 kg de café, pagando 18 reais. Qual o preço do quilo de cada produto? As habilidades contempladas nesses itens são: EF05MA11; EF07MA04; EF07MA06; EF07MA13.

Questão 3) As idades de Joana, Paula e Iara somam 52 anos. A idade de Paula é igual à soma das idades de Joana e Iara, menos quatro anos. A idade de Joana é igual à soma das idades de Paula e Iara, mais dois anos.

Determine a idade de cada garota. As habilidades contempladas nesses itens são: EF05MA11; EF07MA04; EF07MA13 e EF05MA10.

Questão 4) Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida da seguinte forma: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Se um aluno totalizou 210 pontos, qual o número de questões que ele acertou? As habilidades contempladas nesses itens são: EF05MA11; EF07MA04; EF07MA06; EF07MA13 e EF08MA08.

Questão 5) Examinando o anúncio abaixo, conclua qual é o preço de cada faca, garfo e colher.

Figura 18: questão 5 da segunda etapa.

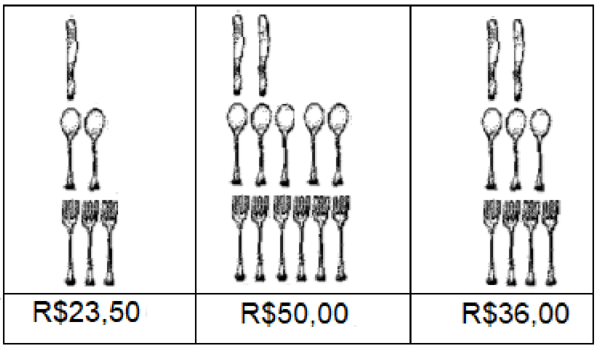


Figura 4. questão 5 da etapa dois.

Fonte: Clube de matemática da OBMEP

As habilidades contempladas nesses itens são: EF05MA11; EF07MA04; EF07MA06 e EF07MA13.

Questão 6: Agora, sem o uso do aplicativo resolva os seguintes sistemas, identificando e justificando o uso do método que achar mais adequado:

a) $\begin{cases} x + 2y = 240 \\ 2x + 3y = 405 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - z = 6 \\ x - y + z = 20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

As habilidades contempladas nesses itens são: EF05MA10; EF06MA06; EF07MA04; EF07MA06; EF07MA13 e EF08MA08.

De forma geral, entre as habilidades citadas podemos citar EF07MA04, EF07MA06 e EF07MA13, como competências que estão presentes em todas as questões, já a habilidade EF05MA11não estava relacionada apenas à questão de número 6. A habilidade EF08MA08 trata de equações apenas com duas incógnitas, não contemplando a questão número 2 e 4. A habilidade EF06MA06 em especial é contemplada em praticamente todas as questões, exceto a de número 3. Por fim, a habilidade EF05MA10 está relacionada apenas às questões de número 3 e 6.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS DA PESQUISA

As questões que fizeram parte do questionário foram selecionadas de fontes diversas, de modo a contemplarem a habilidade de modelar e resolver sistemas de equações de 1º grau, com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas. Além disso, queríamos avaliar se os estudantes conseguiam utilizar corretamente o aplicativo, extraindo ao máximo suas potencialidades, da forma mais adequada possível.

Classificamos previamente as questões contextualizadas do instrumento (1 a 5) em dois níveis de dificuldade: Nível 1, as questões que julgamos serem mais fáceis de serem modeladas e resolvidas (Questões 1 e 4); e Nível 2 as questões mais difíceis (Questões 2, 3 e 5).

O instrumento cotinha 6 questões, sendo a última constituída de cinco itens, totalizando 10 itens. Os estudantes não eram obrigados a resolver os dez itens, mas era necessário apresentar a resolução de pelo menos seis itens, sendo três deles selecionados dentre as questões 1 a 5 do instrumento e três dentre os cinco sistemas da Questão 6. A intenção era que fossem respondidas pelo menos dois itens com Nível 1 de dificuldade e uma do Nível 2.

3.2 DESENVOLVIMENTO DA APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

3.2.1 A RESOLUÇÃO DE ITENS COM O USO DO APLICATIVO

O processo de aplicação do Questionário com os 18 estudantes do 2º Ano do Ensino Médio foi realizado em três etapas. Na primeira etapa apresentamos inicialmente o instrumento e explicamos o processo de resolução, que consistia da modelagem dos sistemas que seriam gerados a partir dos dados dos enunciados dos problemas, que envolviam contextos diversificados, e a determinação de suas soluções.

No segundo momento os estudantes realizaram a instalação do aplicativo Photomath, que a maioria deles não conhecia, e explicamos como ele funcionava, exemplificando com um sistema de duas equações de 1º grau com duas incógnitas e propondo a exploração de seus recursos, como a possibilidade de verificação do passo a passo, por diferentes procedimentos de resolução, como o método da adição, da substituição, da comparação e o método de Gauss-Jordan.

Fizemos uma breve discussão acerca da diferenciação entre o modo como eles haviam trabalhado com sistemas lineares e a forma como iríamos abordar o tema, que seria baseada em uma abordagem com uma perspectiva mais intuitiva, acrescentada do uso de uma ferramenta tecnológica.

O objetivo de usarmos o aplicativo foi possibilitar que os estudantes focassem no procedimento de modelagem das equações e sistemas correspondentes aos dados dos enunciados, sem se preocupar, no momento, com os cálculos necessários para obtenção das soluções.

Esse último estágio foi muito importante para a pesquisa, uma vez que constatamos, pelas falas apresentadas, que os alunos não tinham familiaridade com o processo de codificação matemática das questões, ou seja, da geração de modelos matemáticos, a partir dos enunciados, e pouca experiência com o uso de aplicativos em sala de aula.

A segunda etapa foi constituída da organização das equações e sistemas relacionados às questões 1 a 5, a partir da leitura e interpretação dos dados apresentados nas questões, quando eles deveriam utilizar os conhecimentos adquiridos na primeira etapa. Uma vez obtida a solução do sistema associado a cada questão, usando o Photomath, os estudantes identificavam e registravam os respectivos passo a passo, disponibilizados pelo aplicativo, transcrevendo-os para o caderno.

A terceira etapa consistiu na resolução de sistemas 2x2 e 3x3 propostos na Questão 6, sem o usodo aplicativo, mas sendo necessário justificar a escolha do método usado. Como sugestão, orientamos para a aplicação dos métodos da adição, substituição ou comparação.

Enquanto os estudantes respondiam as questões suas dúvidas eram anotadas por nós e ao entregarem a atividade fazíamos perguntas voltadas para sua percepção sobre as dificuldades que encontraram o processo e o que acharam mais fácil fazer, se modelar o sistema ou resolvê-lo manualmente.

No processo de aplicação do instrumento tivemos o auxílio de um colega do curso de Licenciatura e do professor responsável pela disciplina de Matemática do 2º Ano, na escola, que nos ajudaram na distribuição dos Questionários e no acompanhamento da turma durante a resolução dos itens.

Em relação à etapa de modelagem das questões contextualizadas, procuramos fornecer explicações da forma mais sucinta possível, orientando sobre como materializar os dados de um problema do cotidiano em modelos matemáticos, começando por fazer os alunos identificarem quantas e quais eram as incógnitas e em quais situações distintas, porém relacionadas, nas quais elas eram citadas.

Por fim, destacamos o cuidado para a representação matemática da relação entre elas, ou seja, que operações poderiam representar a relação entre as incógnitas e com os valores totais apresentados. Para exemplificar apresentamos o seguinte problema: “Para uma peça teatral que estava estreando no teatro local naquele fim de sema, com apresentações no sábado e no domingo, à noite, foram vendidos 500 ingressos e a arrecadação total foi de R$ 4560,00. O preço do ingresso no sábado era de R$ 10,00 e, no domingo, era de R$ 8,00. Qual o número de ingressos vendidos para a apresentação do sábado e para o domingo?”.

Na discussão questionamos aos estudantes o que estava sendo solicitado no problema, ao que eles prontamente responderam que era o número de ingressos vendidos em cada dia, que representamos pelas letras x (número de ingressos vendidos no sábado) e y (número de ingressos vendidos no domingo). Fazendo a leitura do problema com os estudantes, chegamos à conclusão de que a soma dos ingressos vendidos no sábado e no domingo era igual ao número total de ingressos vendidos, ou seja, $x + y = 500$.

Em seguida chamamos a atenção dos estudantes para o fato de que aquela não era a única situação que ocorria no enunciado do problema, ou seja, o enunciado não se resumia a apenas uma equação do primeiro grau.

Relendo o texto, destacamos que havia valores relacionados às incógnitas x e y, dez e oito reais, respectivamente, e que a soma do número de vezes que os ingressos vendidos a dez e oito reais era igual à arrecadação total, ou seja: $10x + 8y = 4560$. Esta segunda situação mostrou-se mais difícil de ser compreendida pelos estudantes do que a que gerou a primeira equação, que era mais direta. Os estudantes chegaram à conclusão que o problema estava relacionado a duas incógnitas e duas situações, representando um sistema que denominamos de 2 x 2.

Depois de lermos e explicarmos as cinco questões iniciais do Questionários, os estudantes passaram a trabalhar para resolvê-las. Na medida em que resolviam as questões, as dúvidas apresentadas pelos estudantes eram registradas com o auxílio do nosso colega de curso.

Os alunos formaram pequenos grupos de dois ou três participantes e nos primeiros 15 minutos eles debateram entre si sobre como resolver as questões escolhidas e por unanimidade começaram pelas questões de Nível 1 de dificuldade. Após os 15 minutos iniciais passamos a intervir nos grupos, para avaliarmos como eles estavam se saindo e quais eram suas dúvidas.

As principais dúvidas e/ou dificuldades dos estudantes foram:

- Compreender a montagem do sistema formado por equações do 1ª grau;
- Elaborar as equações, onde uma variável dependia da outra, o que demandava interpretação;
- Organizar as equações e formar o sistema;
- Usar o valor ou a quantidade de uma variável para encontrar as outras;
- Compreender a estrutura de sistemas 3 x 3 (identificar as três incógnitas e as três situações que identificavam as relações entre elas);
- Ausência de conhecimentos básicos, como usar a propriedade comutativa ou na hora de substituir uma variável e aplicar a propriedade distributiva;
- Interpretação inadequada do que estava sendo solicitado.

De modo geral a maioria dos estudantes entendeu o procedimento de modelagem das equações e sistemas correspondentes, embora vários deles tenham precisado de ajuda para completar o raciocínio e responder às questões. Em alguns casos a dificuldade era organizar a primeira equação. Depois disso as outras eram geradas com mais naturalidade.

Em outros casos a dificuldade estava centrada em identificar cada incógnita. Em geral, depois que sugeríamos como representar a primeira os estudantes conseguiam representar as outras e identificar a situação seguinte que representava a segunda equação, no caso dos sistemas 2x2.

Também ocorreu de os estudantes identificarem as equações, mas terem dificuldade para representá-las na linguagem matemática, por confundirem alguma operação de conexão entre as incógnitas. Esse tipo de dificuldade logo foi resolvido com algumas instruções e praticamente todos acertaram o segundo problema de Nível 1 de dificuldade.

Nas questões que envolviam sistemas 3x3, com Nível 2 de dificuldade, apesar de serem consideradas por nós como mais difíceis, como os estudantes já haviam respondido as questões anteriores, mais fáceis, não apresentaram muita dificuldade nesse procedimento, embora alguns ainda tenham apresentado problemas na representação matemática da terceira situação que representava a terceira equação do sistema. Houve também o caso de alunos que conseguiram modelar os sistemas com facilidade, ressaltando a facilidade para responder à questão que continha ilustrações, que simplificam a visualização das relações entre as incógnitas do problema.

Depois que todos os estudantes organizaram os sistemas relativos às questões escolhidas por eles, teve início a etapa de resolução dos itens usando o aplicativo Photomath, o que deixou os alunos entusiasmados e aliviados, pois, segundo eles, já haviam gasto muito tempo e forçado muito o raciocínio modelando os sistemas.

Com o Photomath, que em questão de segundos apresentava a solução do sistema elaborado por eles, os alunos só teriam que acompanhar a explicação passo a passo da resolução dos sistemas, disponibilizada pelo aplicativo, e decidir sobre qual método eles consideravam mais fácil ou em qual situação um método se aplicava melhor do que outro, registrando todos essas informações em seus cadernos.

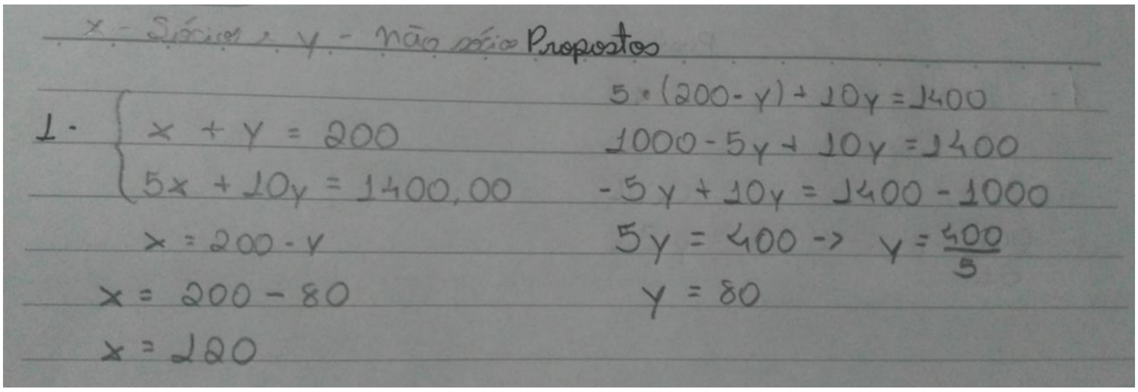
O aplicativo, além de ser prático quanto a esse ponto (identificar as soluções), apresenta a resolução detalhada dos sistemas, incluindo como são realizadas as operações mais básicas, como mudanças de sinal, isolamento de uma incógnita e uso da propriedade comutativa.

O aplicativo tem uma interface bastante amigável e suas funções são rapidamente compreendidas pelos estudantes, mas alguns estudantes tiveram uma certa dificuldade com o uso do aplicativo por não ter letra muito legível, o que foi facilmente corrigido pela função de editar as expressões matemáticas no aplicativo.

Outra dificuldade encontrada, mas observada em dois estudantes da turma, foi o desinteresse para observar a forma detalhada de resolução dos sistemas apresentada no aplicativo. No entanto, de forma geral ficou evidente a satisfação dos alunos em ter feito até ali uma atividade relativamente extensa e intuitiva em um tempo consideravelmente rápido e de forma mais didática do que o convencional, usando como ferramenta o aparelho celular, que está sempre com eles.

Na Figura 19 podemos observar o registro no caderno de um estudante na turma, relativo ao procedimento de resolução apresentado no aplicativo para a questão 1 do questionário.

Figura 19. Resposta da Questão 1, com o passo a passo apresentado pelo aplicativo.



x - Sócios ; y - não sócio Propostos

1. $\begin{cases} x + y = 200 \\ 5x + 10y = 1400,00 \end{cases}$

$x = 200 - y$

$x = 200 - 80$

$x = 120$

$5 \cdot (200 - y) + 10y = 1400$

$1000 - 5y + 10y = 1400$

$-5y + 10y = 1400 - 1000$

$5y = 400 \rightarrow y = \frac{400}{5}$

$y = 80$

Figura 5. Resolução da questão 1.

Fonte: acervo do pesquisador

Pela imagem podemos constatar o nível de detalhamento da resposta disponibilizada pelo aplicativo. Quando o aplicativo for utilizado pelo professor em atividades semelhantes a que propomos em nossa pesquisa, ele pode sugerir que o estudante transcreva o que for necessário para o entendimento do processo de solução, omitindo os detalhes que considerar de menor relevância.

3.2.2 A RESOLUÇÃO DE ITENS SEM O USO DO APLICATIVO

Após todos os estudantes terem completado a etapa de registro das soluções, de forma detalhada, como disponibilizado no aplicativo, demos início à terceira e última etapa de nossa pesquisa, quando eles deveriam resolver sistemas dados (Questão 6), porém, não poderiam usar o aplicativo, mas usar os conhecimentos adquiridos na etapa anterior para resolvê-los. Além disso, era necessário justificar o uso do método escolhido, dessa forma, era possível analisar o nível de compreensão do aluno diante da resolução de cada sistema.

Os sistemas dos itens escolhidos eram semelhantes aos obtidos por meio das modeladas feitas na etapa anterior, o que facilitava sua resolução, porém, alguns estudantes disseram ter sentido um pouco de dificuldade. Quando compreendiam que se tratava de sistemas simples, fizeram as escolhas dos itens, considerando o método de resolução que identificavam como sendo mais adequado para cada caso.

Em algumas situações acabavam escolhendo o método mais extenso, embora tivessem convicção de suas escolhas, e em outros casos observavam os sistemas e identificavam em quais seria mais adequado usar um determinado método de resolução. Por exemplo, no caso do item “a”, constituído das equações $x + 2y = 240$ e $2x + 3y = 405$, sua solução era encontrada facilmente pelo método da adição ou da substituição, mas era muito trabalhoso pelo uso do método da comparação.

Aconteceu, em alguns casos, que a escolha do método ocorreu não por ser o mais prático para aplicar em determinado sistema, mas por ter sido melhor compreendido pelo estudante, seja em razão das aulas do professor da turma ou pelo uso do aplicativo. Como exemplo, trazemos na Figura 36 “a” resolução do item destacado, por substituição.

Figura 20. Resolução do item a da Questão 6, por um estudante.

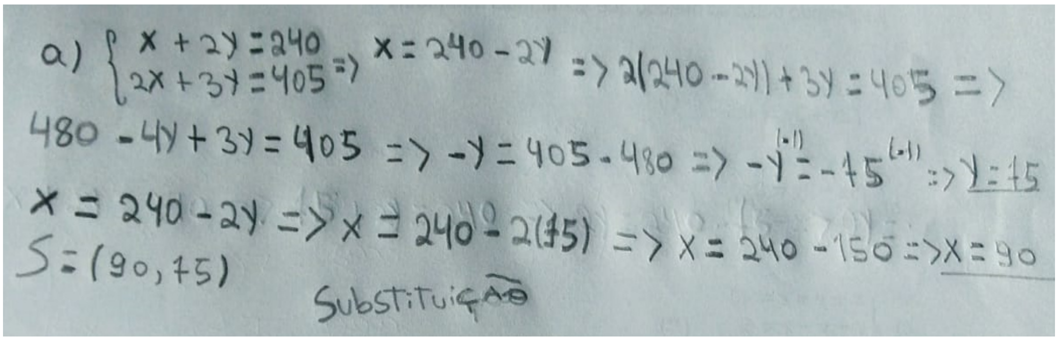


Figura 6. Resolução do item "a" questão 6.

Fonte: acervo do pesquisador.

Nesse caso, seria mais adequado o uso do método da adição em termos de praticidade, sendo esse o método escolhido pela maioria dos alunos para este item, entretanto, devido ao uso do aplicativo na etapa anterior, no qual esse aluno escolheu usar o método da substituição na questão número um, ele conseguiu assimilar o método e não teve dificuldade para aplicá-lo nesse caso.

Vale salientar que enquanto eles resolviam as questões da última etapa (sistemas dados), como foi solicitado, também justificavam a escolha do método. Destacamos, em seguida, as principais justificativas apresentadas nos registros dos estudantes, para a escolha do método utilizado por eles:

- O método da adição é o mais fácil;
- Foi mais fácil entender o método da adição depois do aplicativo;
- Já estou habituado a fazer dessa forma (referente ao método da adição ou substituição);
- De todas as resoluções que o aplicativo forneceu anteriormenteo método da adição era o mais simples;
- É mais fácil compreender o método da substituição, pois basta isolar a incógnita.

Constatamos que o método da adição é o mais escolhido pelos estudantes, o que já esperávamos, pois, além de ser mais prático, considerando as questões propostas, era o mais utilizado em sala de aula.

Observamos, ainda, que os estudantes passaram a ter uma visão mais ampla decorrente do uso do Photomath, quanto aos procedimentos que podemos adotar para resolver um sistema de equações.

Os estudantes usaram o método da substituição em casos onde podemos isolar facilmente uma das incógnitas e o método da comparação foi descartado por ter sido considerado mais trabalhoso pelos alunos.

3.3 SÍNTESE DAS RESPOSTAS ÀS QUESTÕES COMPLEMENTARES

Após o término da atividade coletamos o testemunho de alguns alunos e fizemos algumas perguntas para toda a turma. Questionamos aos alunos qual abordagem era melhor, se estudar os sistemas lineares de forma tradicional, apenas resolvendo sistemas dados, aplicando diferentes métodos de resolução, ou se modelando os sistemas antes. Embora não seja uma tarefa fácil, surpreendeu-nos o fato de 10 estudantes, cerca de 60% da turma, terem optado pela modelagem dos sistemas, afirmando que depois que se “pega o jeito”, fica fácil modelar.

Sobre o uso do aplicativo Photomath os estudantes afirmaram que ele era muito útil e prático, e que se adequou bem à atividade, tornando-a dinâmica e didática, mesmo se tratando de uma atividade extensa. Também afirmaram que o aplicativo vai ser bastante útil nos estudos fora do colégio, seja pra corrigir questões ou para o aprendizado deconteúdos não compreendidos, não só relativos ao estudo de sistemas lineares, mas também de diversos outros conteúdos matemáticos, ligados a propriedades e jogo de sinais, por exemplo.

Assim, vale ressaltar a importância do grande acervo disponível para professores, dentre os aplicativos disponíveis para celular, e que podem ser explorados em aulas de Matemática, potencializando ferramentas tecnológicas que estão presentes na vida dos jovens e devem também fazer parte do arsenal didático dos docentes. No entanto, o professor deve analisar bem qualquer seja o aplicativo afim de ter certeza que sua utilização será adequada para os alunos, pois segundo Teixeira e Cristina:

> [...] O professor deve analisar os aplicativos identificados, em termos de aspectos fundamentais como conteúdo, funcionamento, usabilidade e proposta pedagógica. Há muitos aplicativos disponíveis, mas nem sempre os mesmos apresentam qualidade adequada (TEIXEIRA e CRISTINA, 2013, p.02).

Por fim, cremos ser degrande relevância relatar alguns pontos levantados durante o processo de aplicação do questionário, começando pelo estranhamento inicial dos alunos com uma atividade diferente do que eles estavam acostumados, onde eles tinham que pensar e interpretar o problema ao invés de simplesmente resolver um sistema dado, usando técnicas muitas vezes memorizadas, sem serem compreendidas.

Referente a esse ponto, trazemos uma situação que ocorreu enquanto explicávamos a atividade, quando uma aluna já estava resolvendo os sistemas presentes na Questão 6 utilizando a regra de Cramer, sem mesmo ler o enunciado da questão e antes mesmo de ser explicado o que deveria ser feito. Para nós, isso evidencia como os alunos são ensinados com foco nos resultados de um processo, obtidos de forma automática, sem uso do pensamento crítico, contrariando o proposto na BNCC que defende que

> [...] é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada (BNCC, 2018, p.297).

Outra informação importante foi a opinião da maioria dos estudantes de que a montagem do sistema é mais interessante do que apenas resolvê-lo, o que reflete a possibilidade de aceitação, pelos estudantes, da adoção de uma postura diferente dos professores, em incentivar uma aprendizagem com base na investigação e na modelagem de problemas matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluirmos nosso trabalho entendemos que os objetivos que delimitamos inicialmente foram cumpridos, permitindo-se entender as potencialidades e limitações do uso do Photomath em sala de aula, com reflexões acerca do uso de novas tecnologias como ferramentas educacionais, proporcionando melhorias na aprendizagem, por meio de metodologias adequadas ao atual contexto social.

Como é possível concluir, pelo exposto ao longo do texto, o Photomath é um aplicativo de fácil acesso e didático, se mostrando com grande potencial para o ensino de Matemática, se utilizado de maneira adequada, como acontece com todo recurso educacional. Ou seja, é fundamental conhecer bem o aplicativo, bem como fazer um planejamento detalhado do que se pretende alcançar com seu uso em sala de aula.

A aplicação da atividade com os participantes da pesquisa foi produtiva e teve boa receptividade por parte dos estudantes, que, em sua maioria, ainda não tinham utilizado o celular para fins educacionais em sala de aula, com a mediação do professor (pesquisador). Destacamos, ainda, a eficácia do aplicativo Photomath em auxiliar os alunos em uma atividade relativamente extensa, proporcionando um estudo mais aprofundado das equações de sistemas lineares, como foi feito, partindo de sua modelagem (passagem da língua materna para a escrita algébrica), até sua resolução.

O aplicativo também contribuiu para a revisão e superação de dúvidas dos estudantes em relação a elementos de matemática básica. Mesmo estudantes que tinham dificuldades matemáticas conseguiram utilizar com sucesso o aplicativo, evidenciando como estão cada vez mais aptos a usar recursos tecnológicos. Com o uso do aplicativo os estudantes conseguiram analisar e entender melhor os diferentes métodos de resolução de sistemas de equações lineares, identificando qual o mais adequado para diferentes casos.

Cabe a nós, professores, aproveitarmos as potencialidades desses recursos, para facilitar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, embora haja educadores que ainda não estão aptos a lidar com esse tipo de ferramenta, o que é ponto de reflexão sobre a capacitação dos educadores para as novas tecnologias.

Nessa direção, seria importante que os cursos de Licenciatura em Matemática, responsáveis pela formação dos futuros docentes da área, para atuação na Educação Básica (6º ao 9º ano e Ensino Médio), incluíssem em suas grades curriculares, componentes voltados para essa demanda específica.

No mesmo modo, entendemos ser necessário que gestores de escolas e autoridades que estão à frente de Secretarias de Educação invistam na formação continuada dos professores de suas redes de ensino, de modo a aproveitar os recursos que estão disponíveis na Internet para a melhoria do ensino oferecido nas escolas públicas.

No ponto de vista formativo, a pesquisa nos ajudou a compreender as potencialidades de recursos tecnológicos como ferramentas educacionais, podendo ajudar o professor a alcançaro que está indicado, em termos de competências e habilidades, pela BNCC.

O tema explorado em nossa pesquisa é instigante e nos incentivou a pensarmos na continuação de estudos sobre ele, na direção da realização de aprofundamentos, visando a influência que a ferramenta que exploramos (Photomath),aliada a outras ferramentas tecnológicas, pode exercer sobre a aprendizagem dos estudantes.

REFERÊNCIAS

BARCELOS, G. T;BATISTA, S. C. **Uso de Aplicativos em Tablets no Estudo de Sistemas Lineares: percepção de licenciandos em Matemática**. *Nuevas Ideas en Informática Educativa TISE 2013*, pp. 1-8. 2013

BOYER, C. B. ***História da matemática.*** (E. .. Gomide, Trad.) São Paulo: Edgard Blücher Ltda. 1974.

BRASIL.**Base nacional comum curricular - Matemática:***Ensino fundamental e Ensino Médio.* Brasília: 2018.

GERHARDT, T. E.;SILVEIRA, D. T. **CLASSIFICAÇÃO DAS PESQUISAS SOCIAIS.***Metodos de pesquisa,* pp. 35-41. Porto Alegre: UFRGS. 2009.

PAQUES, O. T. (15 de janeiro de 2020). **Os nove capítulos da arte matemática, de Liu Hui, do século II d.C.** Fonte: Instituto de matemática, computação, estatística e ciências : https://www.ime.unicamp.br/lem/material-de-apoio/nove-capitulos-arte-matematica-liu-hui-seculo-ii-dc

PHOTOMATH, i. (1 de fevereiro de 2020). **Photomath**. Fonte: Photomath.net: https://Photomath.net/pt/

SOUZA, M. C. **Sistemas de equações lineares:Uma análise das soluções utilizando o programa computacional Geogebra.** Abaetetuba: UFPA. 2013.

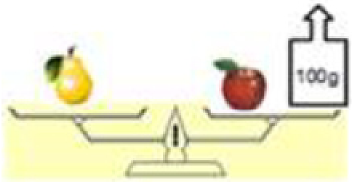
Modelagem e resolução de sistemas lineares

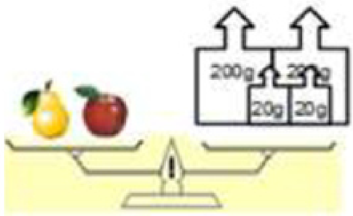
Exercícios resolvidos (quadro):

1) Clarice e Antônia gastaram juntas no shopping R$ 48,00. Clarice gastou três vezes mais que Antônia. Quanto gastou cada uma delas?

2) Na turma do 2° ano D do colégio Compositor Luiz Ramalho,12 alunos resolveram fazer uma vaquinha para comprar uma bola de vôlei que custa R$ 70,00. Todos deram a mesma quantia com o acréscimo de R$ 10,00 doado pelo professor Alcides. Com quanto cada aluno contribuiu?

3) As balanças das figuras abaixo estão perfeitamente equilibradas. Deseja-se calcular o peso de cada fruta.





4) Para as apresentações de uma peça teatral (no sábado e no domingo, à noite) foram vendidos 500 ingressos e a arrecadação total foi de R$ 4560,00. O preço do ingresso no sábado era de R$ 10,00 e, no domingo, era de R$ 8,00. Qual o número de ingressos vendidos para a apresentação do sábado e para a do domingo?

5) Um estádio de futebol tem capacidade para 14000 espectadores. Em dois jogos realizados em dois dias diferentes, foram vendidos todos os lugares. No primeiro, os homens pagaram R$ 5,00, as mulheres R$ 3,00 e as crianças R$ 2,00. No segundo, os homens pagaram R$ 4,00, as mulheres 3,00 e as crianças R$ 1,00. A renda do primeiro jogo foi de R$ 56000,00 e a do segundo jogo de R$ 42000,00. Deseja-se calcular quantos homens, mulheres e crianças foram ao jogo.

Nas atividades abaixo, organize e resolva o sistema correspondente a cada questão, determinando os valores solicitados, usando aplicativo.

1) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi R$ 1400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual o número de sócios presentes ao show? (*)

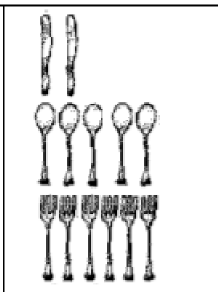
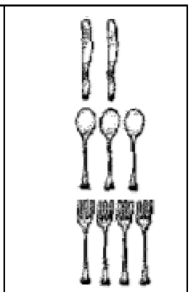
2) Três vizinhos compraram mercadorias da mesma marca e preço, nas seguintes quantidades: o primeiro comprou 1 kg de amendoim, 2 kg de sabão e 3 kg de café, pagando 28 reais. O segundo comprou 3 kg de amendoim, 1 kg de sabão e 2 kg de café, pagando 26 reais. O terceiro comprou 2 kg de amendoim, 2 kg

de sabão e 2 kg de café, pagando 18 reais. Qual o preço do quilo de cada produto? (**)

3) As idades de Joana, Paula e Iara somam 52 anos. A idade de Paula é igual à soma das idades de Joana e Iara, menos quatro anos. A idade de Joana é igual à soma das idades de Paula e Iara, mais dois anos. Determine a idade de cada garota. (**)

4) Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida da seguinte forma: o aluno ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Se um aluno totalizou 210 pontos, qual o número de questões que ele acertou? (*)

5) Examinando o anúncio abaixo, conclua qual é o preço de cada faca, garfo e colher. (**)

		
R$23,50	R$50,00	R$36,00

6) Agora sem o uso do aplicativo resolva os seguintes sistemas, identificando e justificando o uso do método que achar mais adequado:

a) $\begin{cases} x + 2y = 240 \\ 2x + 3y = 405 \end{cases}$ (*)

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ (**)

c) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x + y - z = 6 \\ x - y + z = 20 \end{cases}$ (**)

d) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$ (**)

e) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ (*)