Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Bacharelado em Matemática

Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações

por

Leon Tarquino da Costa

Março/2014
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Bacharelado em Matemática

Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações

por

Leon Tarquino da Costa

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Março/2014
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

C837t Costa, Leon Tarquino da.
Teoremas de ponto fixo e aplicações / Leon Tarquino da Costa. – João Pessoa, 2014.
58p. -

Monografia (Bacharelado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba.
Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó.

1. Equações diferenciais. 2. Teorema do ponto fixo. 3. Teorema de Schauder. I. Título.

UFPB/BS-CCEN CDU 517.9(043.2)

Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações

por

Leon Tarquino da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo – UFPB

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB

Março/2014

AGRADECIMENTOS

- À Deus.

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó por ter orientado este trabalho, multiplicando meus conhecimentos.

- A Professora Flávia Jerônimo por ter me incentivado, por ter me apoiado e pela ajuda nos momentos de dificuldade.

- A minha família, em especial a minha esposa Ivanilde Carlos Tarquino Moureira Neta, ao meu pai José Tarquino da Costa Filho e a minha mãe Maria do Socorro Padilha da Costa pela cobrança, carinho, apoio e incentivo.

- Aos meus amigos da UFPB em especial à Ageu Freire, Rayssa Cajú, Victor Carvalho pelo companheirismo e por terem sempre me ajudado de diversas maneiras.

- A banca examinadora: Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza, Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.

"A terefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que niguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo ver".

Arthur Schopenhauer

À minha esposa e aos meus pais.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos certas teorias afim de obter alguns teoremas de ponto fixo clássicos tais como Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema de Brouwer e o Teorema Schauder. Nosso objetivo com isto será utilizar tais resultados para obter soluções para certas equações diferenciais ordinárias e parciais. Afim de obter estas soluções desenvolveremos métodos específicos utilizando pontos fixos.

Palavras-Chave: Contração, Ponto Fixo, Conjunto Contrátil.

ABSTRACT

In this work we will study some theories in other to obtain some classics fixed point theorems such as Banach Fixed Point Theorem, Brouwer Fixed Point Theorem and the Schauder Fixed Point Theorem. Our objective with this is to use these results to obtain solutions for certain ordinary and partial differential equation. In order to obtain these solution we develop specific methods using fixed point.

Keywords: Contraction, Fixed Point, Contractible Set.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os teoremas relativos à existência de pontos fixos de aplicações desempenham papel de grande importância em várias áreas da Matemática. Tais teoremas tem diversas aplicações na Análise.

Nosso objetivo neste trabalho é utilizar a teoria de ponto fixo como uma forma alternativa de encontrar soluções para certas equações diferenciais ordinárias e parciais. Resultados relevantes, tais como o Teorema de Picard e o Teorema de Peano, seguirão como aplicações de teoremas de ponto fixo. As demonstrações que apresentaremos possuem uma linguagem fortemente geométrica a qual não entraremos em detalhes. Tais teoremas de existência da análise matemática podem ser demonstrados independentemente por processos analíticos.

No primeiro capítulo, apresentaremos alguns resultados clássicos, tais como o Teorema do Ponto Fixo de Banach, e obteremos alguns teoremas conhecidos como aplicações deste resultado. No Capítulo 2, obteremos os conhecidos Teorema de Brouwer e o Teorema de Schauder em conjuntos compactos e convexos nos casos de dimensão finita ou infinita, respectivamente.

No Capítulo 3, trabalharemos com conjuntos compactos contráteis e enunciaremos o Teorema de Lefschetz. Em seguida, no Capítulo 4, estudaremos o cubo de Hilbert e algumas propriedades deste, que nos auxiliarão na demonstração de uma generalização do Teorema de Schauder.

No Capítulo 5, trabalharemos com aplicações não-expansivas, finalizando assim o estudo dos teoremas de ponto fixo. Finalmente, no Capítulo 6, desenvolveremos alguns métodos de ponto fixo para, posteriormente, aplicarmos tais métodos na obtenção de soluções de importantes equações diferenciais ordinárias e parciais, finalizando assim o trabalho.

Como pré-requisitos para a leitura deste texto, são necessários conhecimentos básicos de Análise e Álgebra Linear. Utilizaremos também alguns resultados de Análise Funcional, aos quais daremos as referências necessárias no decorrer do TCC.

CAPÍTULO 1

APLICAÇÕES DE CONTRAÇÃO

Seja M uma conjunto não vazio e $T : M \to M$ uma aplicação. Neste contexto mais geral, uma pergunta que pode ser feita é: será que algum ponto $x \in M$ é levado nele mesmo pela aplicação T, isto é, a equação

$$T(x) = x$$

tem uma solução? Se a resposta for afirmativa, x é chamado um ponto fixo de T. Os teoremas que provaremos asseguram que, sob certas condições para o espaço M e para a aplicação T, existem pontos fixos.

Normalmente, M é um espaço topológico e algumas condições de continuidade e compacidade (ou, pelo menos, completude) são necessárias. Veremos que muitos teoremas de existência podem ser tratados como casos particulares de teoremas de ponto fixo.

Apresentaremos a seguir três resultados que utilizaremos com frequência no decorrer da teoria. Considere T^n como sendo a n-ésima iterada da aplicação T, isto é, $T^2 = T \circ T$, $T^3 = T^2 \circ T$, ..., $T^n = T^{n-1} \circ T$.

Teorema 1.1. *Se $T : M \to M$ é uma aplicação que tem ponto fixo, então algum ponto fixo y de T pertence à $\cap_{n=1}^{\infty} T^n(M)$. Por outro lado, se $\cap_{n=1}^{\infty} T^n(M) = \{y\}$ é um conjunto formado por um único ponto, então y é um ponto fixo de T.*

Demonstração. Suponha que $y \in M$ é um ponto fixo de T, então $y = T(y) \in T(M) \subset M$, aplicando novamente T temos $T(y) = T(T(y)) = T^2(y) = y \in T(T(M)) = T^2(M)$, logo $y \in T(M) \cap T^2(M)$. Indutivamente vemos que $y \in T^n(M)$

para todo n, e portanto, $y \in \cap_{n=1}^{\infty} T^n(M)$.

Reciprocamente, suponha que $\cap_{n=1}^{\infty} T^n(M) = \{y\}$. Deste modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in M$ tal que

$$T^n(z_n) = y. \tag{1.1}$$

Quando $n = 1$, sabemos que $T(y) \in T(M) = T^1(M)$, provemos que $T(y) \in T^n(M)$ para $n \geq 2$. Por (1.1), podemos escrever $T(y) = T(T^{n-1}(z_{n-1})) = T^n(z_{n-1})$, portanto $T(y) \in T^n(M)$, para todo $n \geq 2$, donde concluimos que $T(y) \in \cap_{n=1}^{\infty} T^n(M) = \{y\}$. Logo, y é ponto fixo de T. □

Teorema 1.2 (Princípio das Aproximações Sucessivas)**.** *Seja M um espaço topológico de Hausdorff. Se $T : M \to M$ é uma aplicação contínua tal que $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = y$ para algum $x \in M$, então y é ponto fixo de T.*

Demonstração. Como $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = y$, temos

$$T(y) = T(\lim T^n(x)).$$

Daí usando a continuidade de T, obtemos

$$\begin{aligned} T(y) &= \lim(T(T^n(x))) \\ &= \lim(T^{n+1}(x)) \\ &= y. \end{aligned}$$

O que prova o resultado. □

Teorema 1.3. *Seja X um espaço métrico. Suponha que T é uma aplicação contínua de um subconjunto fechado $F \subset X$ em um subconjunto compacto $C \subset X$ e que para cada $\epsilon > 0$, existe $x(\epsilon) \in F$ tal que*

$$d(T(x(\epsilon)), x(\epsilon)) < \epsilon. \tag{1.2}$$

Então, T tem um ponto fixo.

Demonstração. Seja $T : F \to C$ uma aplicação contínua. Dado $\epsilon > 0$ e $x(\epsilon) \in F$, temos que $T(x(\epsilon)) \in C$ e como C é compacto podemos assumir que para alguma sequência $\epsilon_n \to 0$ temos $T(x(\epsilon_n)) \to y \in C$. Como por hipótese $d(T(x(\epsilon_n)), x(\epsilon_n)) < \epsilon_n$, tomando o limite obtemos

$$\lim d(T(x(\epsilon_n)), x(\epsilon_n)) = 0.$$

Sendo assim, usando a continuidade da métrica temos

$$d(\lim T(x(\epsilon_n)), \lim x(\epsilon_n)) = 0.$$

Portanto,

$$y = \lim T(x(\epsilon_n)) = \lim x(\epsilon_n),$$

isto é, $y \in F$. Portanto, existe $T(y)$ e pela continuidade de T,

$$\begin{aligned} T(y) &= T(\lim x(\epsilon_n)) \\ &= \lim T(x(\epsilon_n)) \\ &= y. \end{aligned}$$

Assim o resultado esta provado. □

Definição 1.1. *Um ponto $x(\epsilon)$ satisfazendo a Eq.* (1.2) *será chamado ϵ-ponto fixo de T.*

1.1 O Teorema de Contração

Definição 1.2. *Seja M um espaço métrico e $T : M \to M$ uma aplicação. Dizemos que T é uma contração se existe um número k tal que $0 < k < 1$ e*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M.$$

O próximo resultado é chamado de Teorema de Contração.

Teorema 1.4 (Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja M um espaço métrico completo não vazio. Se $T : M \to M$ é uma contração, então T tem um único ponto fixo pertencente a M.*

Demonstração. Suponha que T é uma contração, então existe $0 < k < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M.$$

Sendo assim, escolhamos um ponto $y \in M$. Então a sequência de pontos $T^n(y)$ satisfaz

$$d(T^n(y), T^{n+1}(y)) \leq kd(T^{n-1}(y), T^n(y)).$$

Afirmação 1.1.

$$d(T^n(y), T^{n+1}(y)) \leq k^n d(y, T(y)).$$

Com efeito, provaremos por indução em n.

- Para $n = 1$ temos, $d(T(y), T^2(y)) \leq kd(y, T(y))$, pois T é contração.

- Suponha o resultado para n e vamos mostrar para $n + 1$.

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}(y), T^{n+2}(y)) &= d(T^n(T(y)), T^{n+1}(T(y))) \\ &\leq k^n d(T(y), T(T(y))) \\ &\leq k^n k d(y, T(y)) \\ &= k^{n+1} d(y, T(y)), \end{aligned}$$

ficando assim demonstrada a afirmação.

Para $m \geq n$, usando a desigualdade triangular e a Afirmação 1.1 obtemos:

$$\begin{aligned} d(T^n(y), T^m(y)) &\leq d(T^n(y), T^{n+1}(y)) + d(T^{n+1}(y), T^{n+2}(y)) + \cdots + d(T^{m-1}(y), T^m(y)) \\ &\leq k^n d(y, T(y)) + k^{n+1} d(y, T(y)) + \cdots + k^{m-1} d(y, T(y)) \\ &= (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1}) d(y, T(y)) \\ &= k^n (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) d(y, T(y)) \\ &\leq k^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} k^{m-1} \right) d(y, T(y)). \end{aligned}$$

Como $0 < k < 1$, a soma $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} k^{m-1}$ é uma série geométrica convergente para $\dfrac{1}{1-k}$. Portanto,

$$d(T^n(y), T^m(y)) \leq k^n \left(\frac{1}{1-k} \right) d(y, T(y)). \tag{1.3}$$

Fazendo $m, n \to \infty$ temos que $k^n \to 0$, o que implica que $d(T^n(y), T^m(y)) \to 0$. Ou seja, a sequência $T^n(y)$ é de Cauchy em M e como M é completo esta sequência converge para um ponto $a \in M$, pelo Teorema 1.2 concluimos que a é um ponto fixo de T. Provaremos agora que a é o único ponto fixo de T. Suponha que existe $b \in M$ tal que $T(b) = b$, então

$$d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leq kd(a, b),$$

e como $0 < k < 1$ isto implica que $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$. $\square$

Faremos a seguir algumas observações que nos auxiliarão em algumas aplicações importantes do Teorema 1.4.

Observação 1.1. *Sob as condições do Teorema 1.4:*

1. *O ponto fixo a pode ser calculado como* $\lim T^n(y)$ *para qualquer* $y \in M$.

   Tal fato segue da prova do Teorema 1.4.

2. $d(T^n(y), a) \leq k^n \left(\dfrac{1}{1-k}\right) d(y, T(y))$, *para todo* $y \in M$.

   De fato, sabemos que

$$d(T^n(y), T^m(y)) \leq k^n \left(\frac{1}{1-k}\right) d(y, T(y)).$$

   Fazendo $m \to \infty$ *temos que* $T^m(y) \to a$. *Daí, segue o resultado.*

3. *Para todo* $y \in M$ *temos* $d(y, a) \leq \dfrac{1}{1-k} d(y, T(y))$.

   Com efeito, como a é ponto fixo de T, usando a desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} d(y, a) &\leq d(y, T(y)) + d(T(y), a) \\ &= d(y, T(y)) + d(T(y), T(a)) \\ &\leq d(y, T(y)) + kd(y, a). \end{aligned}$$

   Logo,

$$d(y, a) - kd(y, a) \leq d(y, T(y)),$$

   ou seja,

$$d(y, a) \leq \frac{1}{1-k} d(y, T(y)).$$

1.2 O Teorema de Cauchy-Lipschitz

Usaremos o teorema de contração para estabelecer um teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias.

Teorema 1.5 (Lipschitz)**.** *Seja f uma função contínua e lipschitziana na segunda variável, ou seja,*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq k|y - z|$$

numa vizinhnça N_1 do ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Então, a equação diferencial com condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = & f(t,y) \\ y(a) = & b \end{cases} \tag{1.4}$$

tem uma única solução numa vizinhança de a.

Demonstração. Suponhamos que vale (1.4), então $dy = f(t,y)dt$. Integrando em ambos os lados essa igualdade obtemos

$$\int_{y(a)}^{y(t)} dy = \int_a^t f(x,y(x))dx,$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$y(t) - y(a) = \int_a^t f(x,y(x))dx.$$

Portanto,

$$y(t) = b + \int_a^t f(x,y(x))dx$$

Considere um conjunto U de funções e uma aplicação T definida em U. A imagem Ty de uma aplicação y com valores $y(x)$ será dada por

$$(Ty)(t) = b + \int_a^t f(x,y(x))dx.$$

Como podemos encontrar um conjunto de funções que é mapeado em si mesmo pela aplicação T? Primeiro escolhamos uma vizinhança compacta N_2 de (a,b) contida no interior de N_1. Sendo assim, f é limitada em N_2, ou seja existe $L \geq 0$ tal que

$$|f(x,y)| \leq L, \forall x,y \in N_2.$$

Se y é uma função cujo gráfico está contido em N_2 temos

$$\begin{aligned} |Ty(t) - b| &= \left|\int_a^t f(x,y(x))dx\right| \\ &\leq \left|\int_a^t L dx\right| \\ &= L\left|\int_a^t dx\right| \\ &= L|t-a| \end{aligned}$$

Isto significa que se y é uma função contínua definida para

$$|t-a| \leq d$$

donde $|y(t)-b| \leq Ld$, então Ty também satisfaz essa condição. Devemos escolher d suficientemente pequeno para que o retângulo

$$R = [a-d, a+d] \times [b-Ld, b+Ld]$$

esteja contido em N_2. Então, definamos M como sendo o conjunto das funções contínuas com gráfico em R. Então nosso argumento mostra que M é mapeado em si mesmo por T. Usamos a cota superior para norma em M.

Para garantir que T é uma contração, devemos escollher d de forma que $dk < 1$. Então, para y e $z \in M$ temos

$$\begin{aligned}
|Ty(t) - Tz(t)| &= \left| b + \int_a^t f(x, y(x))dx - b - \int_a^t f(x, z(x))dx \right| \\
&= \left| \int_a^t f(x, y(x)) - f(x, z(x))dx \right| \\
&\leq |t-a| \sup |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \\
&\leq d \sup |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \\
&\leq dk \sup |y(x) - z(x)|
\end{aligned}$$

pois f é lipschitiziana na segunda variável. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|Ty - Tz\| &= \sup_t |Ty(t) - Tz(t)| \\
&\leq dk \sup |y(x) - z(x)| \\
&= dk\|y - z\|
\end{aligned}$$

uma vez que $dk < 1$, T é uma contração. Portanto pelo Teorema 1.2, T tem um único ponto fixo em M. Isto significa que existe uma única função em M a qual é solução de (1.4). Uma vez que qualquer solução de (1.4) está em M (para d suficientemente pequeno), segue que existe uma única solução para o Problema (1.4). $\square$

1.3 O Teorema da Função Implícita

Vamos demonstrar o Teorema da Função Implícita que é mais uma aplicação do Teorema de Contração. Antes de demonstrarmos, no entanto, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.1. *Seja N uma vizinhança de um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Suponha que $f : N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em (a,b). Se $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ para todo ponto entre (x,y) e (x,z) então, $|f(x,y) - f(x,z)| \leq \dfrac{1}{2}|y-z|$.*

Demonstração. Para cada x fixado defina a aplicação $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h_x(y) = f(x,y)$.

Sejam $(x,y),(x,z) \in N$, sem perda de generalidade, podemos supor que $y < z$. Então pelo Teorema do Valor Médio existe c no intervalo (y,z) tal que

$$|h_x(y) - h_x(z)| = |h'_x(c)||(y-z)|.$$

Então

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |h'_x(c)||y-z|.$$

Mas $h'_x(c) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c)$. Assim teremos

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)| \leq \frac{1}{2}|y-z|,$$

donde segue o resultado. □

Teorema 1.6 (Teorema da Função Implícita)**.** *Seja N uma vizinhança de um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Suponha que $f : N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em (a,b). Então se*

i) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$;

ii) $f(a,b) = 0$,

existe uma única função g que é contínua em alguma vizinhança de a e tal que $f(x,g(x)) = 0$.

Demonstração. Olharemos para um ponto fixo da seguinte aplicação

$$T(z(x)) = z(x) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x,z(x)). \tag{1.5}$$

Note que, se y é um ponto fixo de T temos

$$T(y(x)) = y(x)$$

e como $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, segue que $\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} \neq 0$ e portanto

$$f(x, y(x)) \equiv 0.$$

Vamos encontrar um conjunto de funções M tal que T aplica M em M e além disso T é uma contração em M.

Como N é aberto, podemos escolher o retângulo fechado

$$\mathcal{R} = [a-\epsilon, a+\epsilon] \times [b-\delta, b+\delta]$$

suficientemente pequeno de modo que:

$$\left| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 1 \right| < \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{R},$$

$$\left| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x,b) \right| < \frac{1}{2}\delta \quad \text{se} \quad |x| \leq \epsilon.$$

Agora considere $\mathcal{C} = C([a-\epsilon, a+\epsilon]; \mathbb{R})$ e ponhamos

$$M = \{y \in \mathcal{C} : y(a) = b \text{ e } \|y - \beta\| < \delta\},$$

onde β é a função constante igual a b.

Seja $y \in M$ função contínua em $[a-\epsilon, a+\epsilon]$. Como f é contínua segue que

$$T(y(x)) = y(x) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x, y(x))$$

é contínua, portanto T mapeia M em $\mathcal{C}$. Mais ainda,

$$T(\beta(x)) = \beta(x) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x, \beta(x)),$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
|T\beta - \beta| &= \left| -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x,\beta) \right| \\
&= \left| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x,b) \right| \\
&< \frac{1}{2}\delta.
\end{aligned}$$

Para $(x,y) \in \mathcal{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} f(x,y) \right) \right| &= \left| \left(1 - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \right| \\
&= \left| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 1 \right| \\
&< \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 1.1, se $y, z \in M$ temos

$$|T(y(x)) - T(z(x))| \leq \frac{1}{2}|y(x) - z(x)|, \quad \forall x \in [a-\epsilon, a+\epsilon],$$

isto é, $|Ty - Tz| \leq \frac{1}{2}|y - z|$. Portanto, T é uma contração. Além disso,

$$\begin{aligned}
|Ty - \beta| &\leq |Ty - T\beta| + |T\beta - \beta| \\
&\leq \frac{1}{2}|y - \beta| + |T\beta - \beta| \\
&\leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta \\
&= \delta,
\end{aligned}$$

ou seja, $Ty \in M$, logo T mapeia M em M. Como M é completo, segue que T tem um único ponto fixo em M. Portanto nosso Problema (1.5) tem uma única solução, a qual pode ser calculada por aproximações sucessivas, usando o operador T e começando a partir de qualquer elemento de M. Ficando desta forma provado o teorema. $\square$

Vale ressaltar que o argumento usado na demonstração acima, pode ser utilizado na demonstração do Teorema da Função Implícita em espaços mais gerais. Por exemplo, se f é uma aplicação de $B \times C$ em C, onde B e C são espaços de Banach, devemos interpretar $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, como a derivada de Fréchet de f em (a,b) e substituir (i) pela existência de $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{-1}$. Interpretamos o espaço M como sendo o espaço das funções contínuas definidas numa vizinhança de $a \in B$ com valores em C.

CAPÍTULO 2

PONTOS FIXOS EM CONJUNTOS CONVEXOS E COMPACTOS

Os principais resultados deste capítulo são o Teorema do POnto Fixo de Brouwer e o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, estes teoremas afirmam basicamente que toda aplicação contínua definida de um conjunto compacto e convexo nele mesmo deve ter um ponto fixo.

2.1 A Propriedade do Ponto Fixo

Definição 2.1. *Dizemos que um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo, se toda aplicação contínua $F : X \to X$ tem um ponto fixo.*

Para mostrar que um conjunto não tem tal propriedade é suficiente encontrar uma aplicação sem pontos fixos. Considere, por exemplo, o conjunto dos números reais e a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + x$, onde $a \neq 0$. A função f é contínua mas não tem ponto fixo. Logo, $\mathbb{R}$ não tem a propriedade do ponto fixo.

Por outro lado, o intervalo $[0, 1]$ tem a propriedade do ponto fixo. De fato, seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Queremos mostrar que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ temos o que queremos. Caso contrário, defina $g(x) = f(x) - x$, então $g(0) = f(0) \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$, ou seja, $g(1) \leq 0 \leq g(0)$, como g é contínua, pois é a soma de funções contínuas segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $g(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) - x_0 = 0$. Portanto, $f(x_0) = x_0$ como queríamos.

Em geral, a propriedade do ponto fixo é bastante difícil de se estabelecer. O próximo resultado nos diz que a propriedade do ponto fixo é uma propriedade topológica. Ou seja, se dois espaços topológicos são homeomorfos e um deles tem a Propriedade do Ponto Fixo então o outro também terá tal propriedade.

Teorema 2.1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Se X é homeomorfo a Y e X tem a propriedade do ponto fixo, então Y tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja $g : X \to Y$ um homeomorfismo e $f : Y \to Y$ uma aplicação contínua. Queremos mostrar que f tem um ponto fixo. Considere a aplicação $h = g^{-1} \circ f \circ g : X \to X$, como f é contínua e g é um homeomorfismo segue que h é contínua e como X tem a propriedade do ponto fixo, existe $x_0 \in X$ tal que $h(x_0) = x_0$, ou seja, $(g^{-1} \circ f \circ g(x_0)) = x_0$. Logo, $f(g(x_0)) = g(x_0)$, pois g é homeomorfismo, portanto $g(x_0) \in Y$ é um ponto fixo de f. O que implica que Y tem a propriedade do ponto fixo pois f é qualquer. $\square$

Definição 2.2. *Sejam Y um espaço topológico e $X \subset Y$. Se existir uma aplicação contínua $r : Y \to X$ tal que $r|_X = id_X$, dizemos que r é uma retração de Y em X. Neste caso, dizemos que X é um retrato de Y.*

Exemplo 2.1. *Um subconjunto não vazio, fechado e convexo X de um espaço vetorial normado E^n ou de um espaço de Hilbert é um retrato de algum subconjunto maior.*

Com efeito, seja H um espaço de Hilbert e K um subconjunto convexo e fechado de H. Pelo Teorema da Projeção ver (cf. [1, Theorem 5.2]), sabemos que existe uma aplicação contínua chamada projeção sobre K, $P_K : H \to K$ dada por $P_K(f) = u$, onde u é tal que

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = d(f, K).$$

Por construção $P_K|_K = id_K$. Portanto, a projeção sobre o convexo K é uma retração.

Teorema 2.2. *Se Y tem a propriedade do ponto fixo e X é um retrato de Y, então X tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja r uma retração de Y em X e seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua, queremos mostrar que T tem um ponto fixo. Como r é uma retração e portanto contínua temos que $T \circ r : Y \to X$ é uma aplicação contínua. Como X é um retrato de Y temos que $X \subset Y$ e portanto $T \circ r$ é uma aplicação contínua de Y em Y e como este tem a propriedade do ponto fixo, existe $w \in Y$ tal que

$T \circ r(w) = w$. Por definição de $T \circ r$ temos que $w \in X$ e como $r|_X = id_X$ segue que $r(w) = w$, portanto

$$w = T(r(w)) = T(w),$$

logo w é um ponto fixo de T. Portanto X tem a propriedade do ponto fixo. □

Definição 2.3. *Um espaço topológico X é contrátil (à um ponto $x_0 \in X$) se existe uma função contínua $f : X \times [0,1] \to X$ tal que $f(\cdot, 0) = Id_X$ e $f(\cdot, 1) = x_0$.*

Exemplo 2.2. *A bola fechada $B[0,1]$ é contrátil a 0.*
De fato, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & B[0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & B[0,1] \\ & (x,t) & \longmapsto & (1-t)x. \end{array}$$

Note que $f(x,0) = x$ e $f(x,1) = 0$.

A fim de obtermos uma prova um pouco mais intuitiva do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, usaremos alguns fatos sobre grupos de homologia. Façamos a seguinte observação: em cada espaço euclidiano C e cada inteiro $n \geq 1$ é possível associar um único grupo $H_n(C)$ chamado n-ésimo grupo de homologia com coeficientes inteiros. Utilizaremos neste texto, duas propriedades fundamentais de grupos de homologia que não demonstraremos aqui. A saber:

(i) $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, o gupo dos inteiros;

(ii) Se C é contrátil, então $H_n(C) = \{e\}$, o grupo trivial.

Proposição 2.1. *S^n não é contrátil para $n \geq 0$.*

Demonstração. O caso $n = 0$ é fácil ver. Para $n \geq 1$, da propriedade (i) citada acima segue que $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, portanto S^n não é contrátil, pois pela propriedade (ii) o grupo de homologia de um espaço contrátil é o grupo trivial. □

Lema 2.1. *Se Y é contrátil, então qualquer retrato de Y é contrátil.*

Demonstração. Suponhamos que Y é contrátil, isto é, existe $f : Y \times [0,1] \to Y$ tal que $f(y,0) = y \quad \forall y \in Y$ e existe $y_0 \in Y$ tal que $f(y,1) = y_0, \forall \ \ y \in Y$. Seja $X \subset Y$ um retrato de Y, então existe $r : Y \to X$ contínua tal que $r|_X = id_X$.

Queremos mostrar que X é contrátil. Considere $g : X \times [0,1] \to X$ dada por $g(x,t) = r \circ f(x,t)$. Desta forma

(i) $g(x,0) = r \circ f(x,0) = r(x) = x \quad \forall x \in X$, pois, como $X \subset Y$ temos que $f(x,0) = x$ e $r|_X = id_X$

(ii) $g(x,1) = r \circ f(x,1) = r(y_0) \quad \forall x \in X$, pois, $f(x,1) = y_0$

Portanto X é contrátil. □

Teorema 2.3. *Para $n \geq 1$ a esfera S^{n-1} não é um retrato da bola fechada $B[0,1] \subset \mathbb{R}^n$*

Demonstração. Sabemos que $B[0,1]$ é contrátil. Por outro lado, a Proposição 2.1 nos garante que S^{n-1} não é contrátil. Portanto, pelo Lema 2.1, se S^{n-1} fosse um retrato de $B[0,1]$ teríamos S^{n-1} contrátil o que é um absurdo. Portanto, S^{n-1} não é um retrato de $B[0,1]$. □

Teorema 2.4 (Brouwer). *(i) $B[0,1] \subset \mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo;*

(ii) Todo subconjunto não vazio, compacto e convexo X de um espaço vetorial normado E^n tem a propriedade do ponto fixo.

Demonstração. (i) Suponhamos que existe uma aplicação contínua $T : B[0,1] \to B[0,1]$ sem pontos fixos. Então podemos construir uma retração $r : B[0,1] \to S^{n-1}$ da seguinte forma: para cada $x \in B[0,1]$, estenda o segmento de reta de $T(x)$ passando por x até intersectar a esfera S^{n-1}, chamaremos este ponto de $r(x)$. Mas pelo Teorema 2.3 tal retração é impossível.

Portanto, toda aplicação contínua $T : B[0,1] \to B[0,1]$ tem um ponto fixo. Ou seja, $B[0,1]$ tem a propriedade do ponto fixo.

(ii) Para k suficientemente grande temos que $X \subset B[0,k]$, pois X é compacto. Pelo Exemplo 2.1 segue que X é um retrato de $B[0,k]$. Como $B[0,k]$ é homeomorfa à $B[0,1]$ e esta tem a propriedade do ponto fixo, segue do Teorema 2.1 que $B[0,k]$ tem a propriedade do ponto fixo, e como X é um retrato de $B[0,k]$ aplicando o Teorema 2.2 segue que X tem a propriedade do ponto fixo. □

2.2 Extensão para Espaços de Dimensão Infinita

Muitas aplicações de teoremas topológicos em Análise envolve espaços de dimensão infinita. O procedimento usual é estender um teorema do caso de dimensão finita para o caso de dimensão infinita. Agora, realizaremos este processo de extensão do Teorema de Brouwer ou seu análogo (Teorema de Schauder) para um espaço de Banach de dimensão infinita. Para isto, utilizaremos o seguinte lema de aproximação:

Lema 2.2. *Seja Y um espaço métrico compacto. Para cada $\epsilon > 0$, seja $P_\epsilon : Y \to Y$ uma aplicação contínua tal que $d(P_\epsilon(x), x) < \epsilon \;\; \forall x \in Y$. Suponha que cada conjunto $P_\epsilon(Y)$ tem a propriedade do ponto fixo. Então, Y tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja $T : Y \to Y$ uma aplicação contínua, então $P_\epsilon \circ T : Y \to Y$ é uma aplicação contínua, além disso, $P_\epsilon \circ T$ mapeia $P_\epsilon(Y)$ nele mesmo. De fato, seja $y \in P_\epsilon(Y)$, então $y \in Y$, portanto $(P_\epsilon \circ T)(y) = P_\epsilon(T(y)) \in P_\epsilon(Y)$, pois $T(y) \in Y$. Sendo assim, como $P_\epsilon(Y)$ tem a propriedade do ponto fixo, segue que existe $x_\epsilon \in P_\epsilon(Y)$ tal que $P_\epsilon(T(x_\epsilon)) = x_\epsilon$

Portanto, $d(x_\epsilon, T(x_\epsilon)) = d(P_\epsilon(T(x_\epsilon)), T(x_\epsilon)) < \epsilon$. E pelo Teorema 1.3 segue que T tem um ponto fixo em Y. □

Consideremos agora um espaço de dimensão infinita particular, o cubo de Hilbert.

Definição 2.4. *O cubo de Hilbert H_0 é o subespaço de l^2 que consiste dos pontos $a = (a_1, a_2, \ldots)$ tal que $|a_r| \leq \dfrac{1}{r}$ para todo r.*

Teorema 2.5. *Todo subconjunto compacto e convexo H de um espaço de Banach B é homeomorfo, por uma transformação linear, a um subconjunto compacto e convexo de H_0.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que H é um subconjunto da bola unitária do espaço de Banach B. Como H é compacto segue que dada uma cobertura aberta para H podemos extrair uma subcobertura finita e portanto enumerável, o que implica que H é separável e como os elementos de $\text{span}(H)$ são combinações lineares dos elementos do H temos que $\text{span}(H)$ é também separável, sendo assim, podemos escolher uma sequência (x_n) densa no $\text{span}(H)$.

Para $n = 1, 2, \ldots$ escolhamos f_n pertencente ao espaço dual $B^* = \{f : B \to \mathbb{R};\;\; f \text{é linear}\}$ de modo que

$$f_n(x_n) = \frac{\|x_n\|}{n}, \quad \|f_n\| = \frac{1}{n}$$

Então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & B \times [0,1] & \longrightarrow & l^2 \\ & x & \longmapsto & F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots) \end{array}$$

mapeia H em H_0. Podemos ver também que F é um operador linear limitado. De fato, dados $x, y \in B$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como $f_n \in B^* \quad \forall n$, temos que

$$\begin{aligned}
F(\lambda x + y) &= (\lambda f_1(x) + f_1(y), \lambda f_2(x) + f_2(y), \ldots) \\
&= (\lambda f_1(x), \lambda f_2(x), \ldots) + (f_1(y), f_2(y), \ldots) \\
&= \lambda(f_1(x), f_2(x), \ldots) + (f_1(y), f_2(y), \ldots) \\
&= \lambda F(x) + F(y)
\end{aligned}$$

pois, l^2 é um espaço vetorial, ficando demonstrado que F é linear. Observe ainda que, como $H \subset B$, temos

$$\|F(x)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2 \|x\|^2 \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}) \|x\|^2 \leq C\|x\|^2$$

e consequentemente F é um operador limitado. Para mostrar que F é injetiva em span(H) note que, se $x \neq y$ em span(H) temos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &= |f_n(x - y)| \\
&= |f_n(x_n + x - y - x_n)| \\
&= |f_n(x_n) + f_n(x - y - x_n)| \\
&\geq |f_n(x_n)| - |f_n(x - y - x_n)| \\
&\geq \frac{\|x_n\|}{n} - \frac{\|x - y - x_n\|}{n} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

se x_n está suficientemente perto de $x - y$. Como F é injetiva, segue que $F|_H : H \to F(H)$ é uma bijeção, além disso, F é contínua, pois cada coordenada o é, sendo assim, como H é compacto segue que $F|_H$ é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Portanto, cocluimos que $F(H) \subset H_0$ é compacto e convexo, pois homeomorfismo linear preserva estas propriedades. □

Definição 2.5. *Definamos P_n como a projeção de l^2 em um subespaço de l^2 com dimensão finita n dada por*

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Teorema 2.6. *O cubo de Hilbert tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Note que para n suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \|P_n(a) - a\| &= \|(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots) - (a_1, a_2, \ldots)\| \\ &= \|(0, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)\| \\ &\leq \left(\sum_{r=n+1}^{\infty} a_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \epsilon, \end{aligned} \tag{2.1}$$

para todo $a \in H_0$. Observe que $P_n(H_0)$ é compacto. De fato, $P_n(H_0)$ é um subespaço vetorial de dimensão finita de l^2, portanto fechado. Mais ainda, se $h = (h_1, h_2, \ldots) \in H_0$ então

$$\|P_n h\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq C$$

e portanto $P_n(H_0)$ é um subconjunto limitado, donde segue que $P_n(H_0)$ é compacto e portanto H_0 é compacto. Como $P_n(H_0)$ pode ser considerado um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$, temos do Teorema de Brouwer que $P_n(H_0)$ tem a propriedade do ponto fixo. Portanto, da Desigualdade (2.1), aplicando o Lema 2.2 segue que H_0 tem a propriedade do ponto fixo. □

Teorema 2.7. *Qualquer subconjunto não vazio, compacto e convexo X de H_0 tem a proriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Pelo Exemplo 2.1, X é um retrato de H_0. Aplicando então o Teorema 2.2, segue que X a propriedade do ponto fixo. □

Teorema 2.8 (Schauder)**.** *Todo subconjunto não vazio, compacto e convexo Y de um espaço de Banach tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Como Y é um subconjunto compacto e convexo de um espaço de Banach, segue do Teorema 2.5 que Y é homeomorfo a um subconjunto compacto e convexo X do cubo de Hilbert H_0. Do Teorema 2.7, sabemos que X tem a propriedade do ponto fixo. Como X tem a propriedade do ponto fixo e Y é homeomorfo a X temos do Teorema 2.1 que Y tem a propriedade do ponto fixo. □

Exemplo 2.3 (Exemplo de Kakutani)**.** *Uma aplicação sem pontos fixos da bola unitária em um espaço de Hilbert.*

Este exemplo mostra que a condição "Y é compacto" no Teorema de Schauder não pode ser substituida por "Y é fechado e limitado."

Olharemos para $l^2(\mathbb{Z})$ como sendo l^2 com a base natural que consiste das sequências $e_n = (\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ com 1 na n-ésima posição. Para $x \in l^2$, podemos escrever

$$x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) = \sum x_n e_n.$$

Denotaremos como U o operador translação à direita, isto é,

$$U(x) = \sum x_n e_{n+1}.$$

Lema 2.3. *O vetor $x - U(x)$ é um múltiplo de e_0 apenas se $x = 0$.*

Demonstração. Suponha que

$$x - U(x) = \sum (x_n - x_{n-1}) e_n = \lambda e_0$$

então,

$$(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots) - (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

logo temos que $x_n = x_0$ para todo $n > 0$, e $x_n = x_{-1}$ para todo $n < 0$. Logo,

$$x - U(x) = (\ldots, x_{-1}, x_{-1}, x_0, x_0, \ldots) \tag{2.2}$$

e como $x - U(x) \in l^2$ pois l^2 é um espaço vetorial segue que (2.2) só é possível se $x_{-1} = x_0 = 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 2.9. *A bola unitátia $B \subset l^2$ não tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Definamos a aplicação

$$T(x) = (1 - \|x\|) e_0 + U(x).$$

Note que T é contínua pois U é contínua, além disso, T mapeia B em B. De fato, seja $x \in B$ então $\|x\| \leq 1$ logo,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq (1 - \|x\|)\|e_0\| + \|U(x)\| \\ &= (1 - \|x\|) + \|x\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Afirmação 2.1. *T não tem ponto fixo.*

Suponha que T tem um ponto fixo, isto é, existe $x \in B$ tal que $x = T(x)$. Então,

$$x = T(x) = (1 - \|x\|)e_0 + U(x)$$

donde, $x - U(x) = (1 - \|x\|)e_0$ e pelo lema anterior temos que $x = 0$, o que é um absurdo, pois neste caso teríamos $e_0 = 0$.

Portanto T não tem um ponto fixo, ficando assim provada a afirmação e consequentemente o teorema. $\square$

CAPÍTULO 3

QUAIS CONJUNTOS TEM A PROPRIEDADE DO PONTO FIXO?

3.1 Conjuntos Contráteis Compactos

Para efeito de Análise Funcional, esperamos que um conjunto com a propriedade do ponto fixo deve ser contrátil e compacto. Na verdade, se um conjunto não tem uma destas propriedades, geralmente podemos construir uma aplicação sem pontos fixos da seguinte maneira.

Se um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não é compacto geralmente podemos construir uma aplicação sem pontos fixos deslocando todos os pontos para um "ínfimo" em certo sentido. Assim vemos que conjuntos como um intervalo aberto, uma bola aberta, ou um subespaço, não tem a propriedade do ponto fixo. Por exemplo, a bola unitária em l^2, a qual é fechada e limitada, mas não é compacta, não tem a propriedade do ponto fixo, pois existe uma aplicação sem pontos fixos nesse conjunto.

Nos casos mais simples, onde um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não é contrátil, ele geralmente tem uma espécie de buraco no meio. Nestes casos, podemos girar ou refletir esses conjuntos ao redor do buraco. Vemos portanto que conjuntos como o círculo em $\mathbb{R}^2$, a esfera em $\mathbb{R}^3$, a garrafa de Klein, o toro ou a faixa de Möbius não tem a propriedade do ponto fixo.

Definição 3.1. *Um espaço topológico X é dito localmente contrátil se para todo $x \in X$ e todo subconjunto aberto V de X tal que $x \in V$, existe um subconjunto aberto U em X que contém x tal que $U \subseteq V$ e U é um espaço contrátil na topologia* *do subespaço V.*

Teorema 3.1 (Lefschetz)**.** *Se X é um espaço métrico compacto e localmente contrátil, em que todos os grupos de homologia são triviais, então X tem a propriedade do ponto fixo.*

Este resultado aborda uma teoria que fogem do escopo estudado neste trabalho, portando não o demonstraremos.

Teorema 3.2. *Se X é um subconjunto compacto, contrátil e localmente contrátil de $\mathbb{R}^n$, então X tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Como X é compacto, contrátil e localmente contrátil, segue que X é um retrato de algum espaço métrico. Em particular, de uma bola fechada B de $\mathbb{R}^n$. Uma vez que B tem a propriedade do ponto fixo e X é um retrato de B, segue que X tem a propriedade do ponto fixo. □

CAPÍTULO 4

EXTENSÃO DO TEOREMA DE SCHAUDER

Primeiro, apresentaremos uma forma mais geral do Teorema de Schauder e em seguida mostraremos outros resultados que nos darão uma forma alternativa de obter o Teorema de Schauder.

4.1 Segundo Teorema de Schauder

NOTAÇÃO: Escrevemos $Co(X)$ para o menor conjunto convexo que contém X, e $\overline{Co}(X)$ para o fecho de $Co(X)$.

Lema 4.1 (Projeção de Schauder)**.** *Se X é um subconjunto compacto de um espaço normado V e $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $Y \subset X$ e uma aplicação contínua $P : X \to Co(Y)$ tal que*

$$\|P(x) - x\| < \epsilon \quad (x \in X).$$

Demonstração. Como X é compacto, podemos escolher os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que os conjuntos $B(x_i, \epsilon)$ para $1 \leq i \leq n$ formam uma cobertura para X. Defina $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Para $1 \leq i \leq n$ defina

$$f_i(x) = \max\{0, \epsilon - \|x - x_i\|\}.$$

Note que,

$$f_i(x) \neq 0 \text{ se, e somente se, } x \in B(x_i, \epsilon).$$

De fato, se $x \in B(x_i, \epsilon)$ temos que $\|x - x_i\| < \epsilon$, e portanto $\epsilon - \|x - x_i\| > 0$, logo $f_i(x) = \epsilon - \|x - x_i\| \neq 0$. Por outro lado, se $f_i(x) \neq 0$, então $f_i(x) = \epsilon - \|x - x_i\| > 0$, ou seja, $\|x - x_i\| < \epsilon$ e assim, $x \in B(x_i, \epsilon)$. Portanto para cada $x \in X$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $x \in B(x_i, \epsilon)$ e portanto $f_i(x) \neq 0$. Como, por construção, as aplicações f_i são não negativas, podemos definir

$$P(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)} \quad (x \in X).$$

Por definição, P é contínua. Além disso, uma vez que $P(x)$ é uma combinação convexa dos pontos x_i os quais pertencem a $B(x, \epsilon)$, temos que $P(x) \in B(x, \epsilon)$, ou seja, P é uma aplicação de X em $Co(X)$ tal que $\|P(x) - x\| < \epsilon, \quad \forall x \in X$, ficando assim demonstrado o resultado. $\square$

Teorema 4.1 (Segundo Teorema de Schauder)**.** *Seja M um subconjunto convexo e não vazio de um espaço normado B. Se T é uma aplicação contínua de M em um subconjunto compacto $X \subset M$, então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ considere a aplicação $P_n \circ T : M \to Co(Y)$ onde P_n é aplicação dada pelo Lema 4.1 com $\epsilon = \frac{1}{n}$. Como $Y \subset X \subset M$ temos que $Co(Y) \subset M$. Portanto $P_n \circ T$ é uma aplicação contínua de um conjunto compacto e convexo de dimensão finita $Co(Y)$ nele mesmo. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, $P_n \circ T \mid_{Co(Y)}$ tem um ponto fixo x_n. Como $P_n \circ T(x_n) = x_n$ e pelo Lema 4.1 temos

$$\|T(x_n) - x_n\| = \|T(x_n) - P_n(T(x_n))\| < \epsilon$$

aplicando o Teorema 1.3 segue que T tem um ponto fixo. $\square$

Definição 4.1. *Seja $T : Y \to X$ uma aplicação onde X é um espaço topológico e Y é um conjunto. Se $T(Y)$ está contido em um subconjunto compacto de X, dizemos que T é compacta.*

Corolário 4.1. *Seja B um espaço normado e $T : B \to B$ uma aplicação compacta e contínua. Então, T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Basta considerar $M = B$ no teorema anterior pois, como T é compacta, $T(B)$ está contido em um subconjunto compacto de B. $\square$

4.2 Teorema de Rothe

Consideraremos a seguir, casos onde um conjunto M não é mapeado em si mesmo, todavia sua fronteira deve ser mapeado em M.

NOTAÇÃO: Escrevemos $int(X)$ para denotar o interior do conjunto X e ∂X para a fronteira de X.

Observação 4.1. *Seja B uma bola fechada de raio n em um espaço normado X. Definimos a retração radial em B por*

$$r(x) = \begin{cases} x, se \ \ x \in B; \\ \dfrac{nx}{\|x\|}, se \ \ x \notin B. \end{cases}$$

Então,

(i) r é uma retração contínua de X em B.

De fato, note que $r : X \to B$ é contínua e além disso, $r|_B = id_B$.

(ii) Se $r(x) \in int(B)$, então $r(x) = x$;

Com efeito, suponha que $r(x) \neq x$, então $r(x) = \dfrac{nx}{\|x\|}$, daí, $\|r(x)\| = n$, ou seja $r(x) \in \partial B$, absurdo, pois $r(x) \in int(B)$. Portanto $r(x) = x$.

(iii) Se $r(x) \notin M$, então $r(x) \in \partial M$.

Como $x \notin B$ temos $r(x) = \dfrac{nx}{\|x\|}$, logo $\|r(x)\| = n$ e, portanto, $r(x) \in \partial M$.

Teorema 4.2 (Rothe)**.** *Seja X um espaço normado, B a bola unitária em X e ∂B a esfera unitária de X. Se $T : B \to X$ é uma aplicação contínua e compacta tal que $T(\partial B) \subset B$, então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Seja r a retração radial em B. Então $r \circ T$ é compacta. De fato, como T é compacta, temos que $T(B)$ está contido em um subconjunto compacto A de X, e como r é contínua $r(A)$ é compacto, como $r(T(B)) \subset r(A)$ segue que $r \circ T$ é compacta. Então pelo Teorema 4.1, $r \circ T$ tem um ponto fixo y, ou seja

$$r \circ T(y) = y. \tag{4.1}$$

Se $y \in int(B)$ então $r(T(y)) = T(y)$, portanto $T(y) = y$ e daí T tem um ponto fixo. Caso contrário, se $y \in \partial B$, como $T(\partial B) \subset B$, $T(y) \in B$ e portanto $r(T(y)) = T(y)$, pois r é uma retração radial, por (4.1), segue que y é ponto fixo de T. □

4.3 Teoremas de Continuação

Seja M uma região, ou seja, um conjunto aberto e conexo em um espaço normado B. Uma série de teoremas abordam famílias de aplicações $U_t : M \to B$ com $0 \leq t \leq 1$

tal que U_t não tem ponto fixo na fronteira de M. Os teoremas afirmam basicamente que se U_0 satisfaz as condições adequadas que garantem um ponto fixo para U_0, esperamos que U_1 deve ter um ponto fixo.

Definição 4.2. *Sejam $N \subset B$ e $U_0, U_1 : N \to B$ funções. Dizemos que U_0 é fp-homotópica a U_1 em N se existe uma família de aplicações $U_t : N \to B,\ \ 0 \leq t \leq 1$, tal que:*

(i) $U_t(x) = U(t, x)$ é contínua em $N \times [0, 1]$;

(ii) $U(N \times [0, 1])$ está contido em um subconjunto compacto de B;

(iii) $U_t(x) \neq x$ para $x \in \partial N$.

Os teoremas de continuação tem a seguinte forma geral. Se

$$(G) \begin{cases} \text{(a) uma condição em } \ M; \\ \text{(b) uma condição em } \ U_0; \\ \text{(c)} U_1 \text{ é fp-homotópica a } U_0 \text{ em } \partial M, \end{cases}$$

então U_1 tem um ponto fixo.

O primeiro teorema de continuação aplicado a problemas não-lineares foi devido a Leray e Schauder. O Teorema de Leray-Schauder é o resultado mais famoso e mais geral da forma (G). A condição imposta sobre a aplicação U_0 nesse caso é que $\deg(id - U_0) \neq 0$, portanto este teorema não pode ser afirmado ou aplicado sem um conhecimento da teoria do grau.

Várias tentativas tem sido feitas para substituir o Teorema de Laray-Schauder por teoremas nos quais o grau não é usado. Estes teoremas usam condições menos gerais em U_0 e M, no entanto mais facilmente estabelecidas em aplicações. O resultado mais útil é o de Schaefer que pode ser reescrito como um teorema na forma (G) usando as seguintes simplificações $U_0 = 0,\ \ U_t = tU_1,\ \ M$ é uma bola no espaço B.

Vejamos agora o teorema de Schaefer

Teorema 4.3 (Schaefer)**.** *Sejam B um espaço normado e $T : B \to B$ uma aplicação contínua que é compacta em cada subconjunto limitado X de B. Então ou*

(i) a equação $x = \lambda T(x)$ tem uma solução para $\lambda = 1$, ou;

(ii) o conjunto de todas as soluções x, para $0 < \lambda < 1$ é ilimitado.

Demonstração. Seja $B(0,n)$ uma bola de centro na origem e raio n contida em B, consideremos uma retração radial r em $B(0,n)$. Então pelo Teorema de Schauder $r \circ T$ tem um ponto fixo $x \in B(0,n)$. Então ou

(i) $\|T(x)\| \leq n$ e neste caso, $r(T(x)) = T(x)$, então $T(x) = r(T(x)) = x$, ou;

(ii) $\|T(x)\| > n$, neste caso,

$$\|x\| \;=\; \|r(T(x))\| = \|\frac{n}{\|T(x)\|}T(x)\| = n$$

isto é,

$$x = r(T(x)) = \left(\frac{n}{\|T(x)\|}T(x)\right) = \lambda T(x)$$

com $\lambda = \dfrac{n}{\|T(x)\|}$, note que $0 < \lambda < 1$, pois

$$\|T(x)\| > n > 0 \Rightarrow 1 > \frac{n}{\|T(x)\|} > 0.$$

Assim, ou para algum inteiro n obtemos uma solução $T(x) = x$, ou para cada n obtemos um autovetor de norma n para algum autovalor pertencente ao intervalo $(0,1)$, neste caso o conjunto dos autovetores é ilimitado. □

4.4 Teorema de Krasnoselskii

Consideraremos a soma de uma aplicação compacta e uma aplicação contração. Esta combinação pode ocorrer na prática, quando lidamos com uma perturbação de um operador diferencial, podemos achar que tal perturbação leva a uma aplicação contração, enquanto a inversão do operador diferencial fornece uma aplicação compacta.

Consideremos o seguinte resultado.

Lema 4.2. *Seja Y um espaço normado e $X \subset Y$. Se $B : X \to Y$ é uma contração, então $(id - B) : X \to (id - B)(X)$ é um homeomorfismo. Se $(id - B)(X)$ é precompacta então X é precompacto.*

Demonstração. Como B é contínua segue que $id - B$ é uma aplicação contínua. Usando o fato de B ser uma contração, sabemos que existe $0 < k < 1$ tal que

$$\|B(x) - B(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Deste modo, obteremos

$$\begin{aligned}\|(id-B)(x)-(id-B)(y)\| &= \|x-y-(B(x)-B(y))\| \\ &\geq \|x-y\|-\|B(x)-B(y)\| \\ &\geq (1-k)\|x-y\|\end{aligned}$$

Observe que da desigualdade acima segue a injetividade da aplicação $id-B$, e como $id-B$ é sobrejetora faz sentido considerarmos sua inversa. Ainda pela desigualdade anterior, tomando $x=(id-B)^{-1}(a)$ e $y=(id-B)^{-1}(b)$, com $a,b\in(id-B)(X)$, teremos

$$\|(id-B)^{-1}(a)-(id-B)^{-1}(b)\| \leq \frac{1}{1-k}\|a-b\|$$

donde segue a continuidade da inversa e portanto concluimos que $(id-B)$ é um homeomorfismo.

Seja $Y\subset X$ precompacto, provemos que $(id-B)(Y)$ é precompacto. De fato, se $z\in(id-B)(Y)$, então $z=y+B(y)$, para algum $y\in Y$. Como Y é precompacto, dado $\varepsilon>0$ existem $\{y_1,...,y_n\}$ de modo que

$$Y\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(y_i,\frac{\varepsilon}{1+k}).$$

Deste modo, como $y\in Y$, existe y_i tal que $y\in B(y_i,\varepsilon)$. Assim,

$$\begin{aligned}\|z-y_i+B(y_i)\| &= \|y-B(y)-y_i+B(y_i)\| \\ &\leq \|y-y_i\|+\|B(y)-B(y_i)\| \\ &\leq (1+k)\|y-y_i\| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

deste modo $z\in B(y_i-B(y_i),\varepsilon)$, o que implica que $(id-B)(Y)\subset\cup_{i=1}^{n}B(y_i-B(y_i),\varepsilon)$ e portanto o conjunto é precompacto. □

Teorema 4.4 (Krasnoselskii). *Seja M um subconjunto não vazio, fechado e convexo de um espaço de Banach X. Suponha que $A,B:M\to X$ são funções e que*

(i) $A(x)=B(y)\in M \quad \forall x,y\in M$;

(ii) *A é compacta e contínua;*

(iii) *B é uma contração.*

Então existe $y \in M$ tal que

$$A(y) + B(y) = y.$$

Demonstração. Para cada $y \in M$ a equação

$$z = B(z) + A(y)$$

tem uma única solução $z \in M$. De fato, seja $f : M \to M$ tal que para cada $y \in M$, $f(z) = A(y) + B(z)$, então dados $z_1, z_2 \in M$ temos

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |A(y) + B(z_1) - A(y) - B(z_2)| = |B(z_1) - B(z_2)| \leq k|z_1 - z_2|$$

ou seja, f é uma contração e pelo Teorema de Contração, segue que existe um único $z \in M$ tal que $f(z) = z$, ou seja, $z = B(z) + A(y)$. Portanto, $z = (id - B)^{-1}(A(y)) \in M$, pois $A(y) = z - B(z) = (id - B)(z)$ o que implica que $z = (id - B)^{-1} \circ (id - B)(z)$.

Pelo Lema 4.2, $(id - B)^{-1} \circ A : M \to M$ é contínua e compacta e portanto aplicando o Teorema de Schauder $(id - B)^{-1} \circ A$ tem um ponto fixo $y \in M$. Ou seja,

$$(id - B)^{-1}(A(y)) = y$$

logo,

$$y = A(y) + B(y).$$

□

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES NÃO EXPANSIVAS

Estudaremos agora algumas generalizações do conceito de uma contração; o mais importante desse caso é o conceito de uma aplicação não expansiva.

5.1 Conjuntos Convexos Limitados

Definição 5.1. *Sejam M e N espaços métricos, uma aplicação $T : M \to N$ que satisfaz a condição*

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

é dita não expansiva.

Desta maneira, aplicações contração, isometrias e projeções ortogonais são exemplos de aplicações não expansivas. Uma aplicação não expansiva de um espaço completo não precisa ter um ponto fixo, considere por exemplo o operador translação $f \mapsto f + g$ com $g \neq 0$, em um espaço de Banach. Por outro lado, uma aplicação não expansiva não precisa ter um único ponto fixo, basta considerar $T = id$.

Teorema 5.1. *Seja M um subconjunto limitado, fechado e convexo de um espaço de Banach B e $T : M \to M$ uma aplicação não expansiva. Então para cada $\epsilon > 0$, T tem um ϵ-ponto fixo $x(\epsilon) \in M$, isto é,*

$$\|T(x(\epsilon)) - x(\epsilon)\| < \epsilon$$

Demonstração. Vamos assumir sem perda de generalidade que $0 \in M$ e que $M \subset B(0, R)$, para algum $R > 0$. Para cada $r < 1$ considere o ponto fixo y da aplicação contração $rT : M \to M$. Desta forma temos:

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &= \|T(y) - rT(y)\| \\ &= \|(1-r)T(y)\| \\ &= (1-r)\|T(y)\| \\ &\leq (1-r)R \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

para r suficientemente próximo de 1. □

Se M é compacto, o resultado anterior e o Teorema 1.3, produz um ponto fixo para T. Portanto, temos uma prova elementar do Teorema de Schauder 2.8 para o caso de uma aplicação não expansiva. De maneira semelhante podemos produzir pontos fixos para aplicações não expansivas num conjunto compacto em forma de estrela, na forma de um cone compacto, ou algum outro conjunto compacto no qual a aplicação identidade pode ser uniformemente aproximada por aplicações de contração.

A seguir apresentaremos uma demonstração do Teorema de Browder, para isto precisaremos de alguns lemas. Vamos assumir sem perda de generalidade que H é um espaço de Hilbert real.

Definição 5.2. *Seja H um espaço de Hilbert, uma aplicação $F : H \to H$ é dita monótona se for contínua e satisfizer a seguinte relação*

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de H.

Lema 5.1. *Seja M um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H. Se $T : M \to H$ é uma aplicação não expansiva, então $id - T$ é a restrição a M de um operador monótono.*

Demonstração. Seja $r = P_M$ a projeção sobre o convexo M construída no Exemplo 2.1, em que cada ponto $h \in H$ é mapeado em um ponto u de M de modo que $d(h, u) = d(h, M)$. Uma vez que r é não expansiva, $T \circ r : H \to H$ é também não expansiva. Para $x, y \in H$ temos,

$$\begin{aligned}\langle (id - (T\circ r))(x) - (id - (T\circ r))(y), x - y\rangle &= \|x-y\|^2 - \langle T(r(x)) - T(r(y)), x - y\rangle \\ &\geq \|x-y\|^2 - \|T(r(x)) - T(r(y))\|\|x-y\| \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

de modo que $(id - T\circ r)$ é monótona. A restrição a M de $(id - T\circ r)$ é $(id - T)$, o que finaliza a prova do lema. $\square$

Lema 5.2. *Se F é monótona e u_0 e v_0 são elementos de H tal que*

$$\langle F(u) - v_0, u - v_0\rangle \geq 0$$

para todo $u \in H$ então $v_0 = F(u_0)$.

Demonstração. Para qualquer $v \in H$ e qualquer $t > 0$ escrevamos $u_t = u_0 + tv$. Como $\langle F(u) - v_0, u - u_0\rangle \geq 0$ para todo $u \in H$, para $u = u_t$ obtemos

$$\langle F(u_t) - v_0, u_0 - tv - u_0\rangle = \langle F(u_t) - v_0, tv\rangle \geq 0$$

e como $t > 0$ vemos que $\langle F(u_t) - v_0, v\rangle \geq 0$, logo

$$\langle F(u_t) - F(u_0), v\rangle \geq \langle v_0 - F(u_0), v\rangle.$$

Note que, se $t \to 0^+$ então $F(u_t) \to F(u_0)$ e daí,

$$0 = \lim_{t\to 0^+} \langle F(u_t) - F(u_0), v\rangle \geq \langle v_0 - F(u_0), v\rangle \quad \forall v \in H,$$

ou seja, $\langle v_0 - F(u_0), v\rangle = 0$ para todo $v \in H$ e portanto $v_0 - F(u_0) = 0$, isto é, $F(u_0) = v_0$. $\square$

Lema 5.3. *Se F é monótona em H e M é um subconjunto limitado, fechado e convexo de H então $F(M)$ é fechado.*

Demonstração. Suponha que $u_n \in M$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e que $F(u_n) \to v_0$. Como o conjunto M, é fechado, limitado e convexo, utilizando fatos de análise funcional a sequência u_n admite uma subsequência fracamente convergente. Podemos assumir sem perda de generalidade que u_n converge fracamente a $u_0 \in M$. Como F é monótona, para todo $u \in H$ temos,

$$\langle F(u) - F(u_n), u - u_n\rangle \geq 0. \tag{5.1}$$

Observe que, como $u_n \rightharpoonup u_0$ e $F(u_n) \to v_0$, segue que

$$\langle F(u) - F(u_n), u - u_n \rangle \to \langle F(u) - v_0, u - u_0 \rangle$$

portanto, fazendo $n \to \infty$ em (5.1)

$$\langle F(u) - v_0, u - u_0 \rangle \geq 0,$$

e aplicando o lema anterior, segue que $v_0 = F(u_0)$. □

Teorema 5.2 (Browder)**.** *Seja M um subconjunto limitado, fechado e convexo de um espaço de Hilbert H. Então, toda aplicação não expansiva $T : M \to M$ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Observemos primeiramente que $(id - T)(M)$ é um conjunto fechado. De fato, pelo Lema 5.1, existe F aplicação monótona cuja restrição é a aplicação $id - T$. Sendo assim, $(id - T)(M) = F\mid_M (M) = F(M)$ que é fechado pelo Lema 5.3. Aplicando o Teorema 5.1, dado $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, existe x_n tal que

$$\|(id - T)(x_n)\| < \frac{1}{n}$$

o que implica que $(id - T)(x_n) \to 0$. Como $(id - T)(M)$ é fechado, segue que $0 \in (id - T)(M)$, e portanto existe $x \in M$ tal que $x - T(x) = 0$, ficando assim demonstrado que T possui um ponto fixo. □

Observação 5.1. *Este resultado permanece verdadeiro para o caso de um espaço de Banach uniformemente convexo.*

Exemplo 5.1 (Beals)**.** *Se M é a bola unitária de um espaço de sequências, existe uma aplicação $T : M \to M$ sem ponto fixo.*

Com efeito, basta considerar a aplicação

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots).$$

5.2 Variável

As diferentes ideias consideradas nesta seção sempre tem alguma relação com a ideia de contração. Algumas das aplicações são consideradas não expansivas. Nosso primeiro resultado generaliza o Teorema do ponto fixo de Banach para o caso onde alguma iterada de T é uma contração.

Teorema 5.3. *Seja M um espaço métrico completo não vazio e $TM; \to M$ uma aplicação tal que T^k é uma contração, para algum inteiro $k > 1$. Então T tem um ponto fixo em M.*

Demonstração. Como T^k é uma contração, possui um único ponto fixo $a \in M$. Então,

$$T^k(T(a)) = T(T^k(a)) = T(a)$$

e sendo assim, temos que $T(a)$ é também um ponto fixo de T^k e pela unicidade temos $T(a) = a$, ou seja, a é um ponto fixo para T. □

Definição 5.3. *Diremos que T é uma aplicação encolhimento se:*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x \neq y.$$

Note que o termo "aplicação contração" tem sido usado para o mesmo conceito.

Deste modo, uma aplicação encolhimento é não expansiva, mas não precisa ser uma contração. Claramente, uma aplicação encolhimento pode ter mais de um ponto fixo.

Teorema 5.4. *Seja M um espaço métrico compacto não vazio e $T : M \to M$ uma aplicação encolhimento. Então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Como $d(T(x), x)$ é uma aplicação contínua e M é compacto, existe $z \in M$ tal que

$$d(T(z), z) = \inf_{x \in M} d(T(x), x). \tag{5.2}$$

Desta forma, $T(z) = z$, pois caso contrário teríamos

$$d(T^2(z), T(z)) < d(T(z), z)$$

contradizendo (5.1). □

Agora daremos uma versão local para o teorema de contração.

Definição 5.4. *Uma aplicação T é localmente uma (ϵ, λ)-contação se: temos $\epsilon > 0$ e $0 < \lambda < 1$ e $d(t(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ sempre que $d(x, y) < \epsilon$.*

Edelstein deu o seguinte exemplo para mostrar que tal aplicação não precisa ser uma contração.

$$M = \{e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\}, \quad T(e^{i\theta}) = e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Definição 5.5. *Um espaço métrico M é dito ϵ-chainable se dados quaisquer dois pontos $a, b \in M$ existe um conjunto finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de pontos em X com $x_0 = a$ e $x_n = b$ e tal que $d(x_{n-1} - x_n) < \epsilon \quad \forall n$.*

Teorema 5.5 (Edelstein)**.** *Seja M um espaço métrico completo ϵ-chainable e $T : M \to M$ uma (ϵ, λ)-contração. Então T tem um único ponto fixo pertencente a M.*

Demonstração. Fixado $x \in M$. Como M é ϵ-chainable existem $x_0, x_1, \ldots, x_m \in M$ tal que

$$x = x_0, \ldots x_m = T(x)$$

com $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$. Usando o fato de T ser (ϵ, λ)-contração, segue por indução que

$$d(T^r(x_i), T^r(x_{i+1})) \leq \lambda^r d(x_i, x_{i+1}) < \lambda^r \epsilon < \frac{\epsilon}{m}, \quad \forall i$$

para r suficientemente grande, pois $0 < \lambda < 1$.

Deste modo, obteremos,

$$\begin{aligned} d(T^r(x), T^{r+1}(x)) &= d(T^r(x_0), T^r(x_m)) \\ &\leq d(T^r(x_0), T^r(x_1)) + d(T^r(x_1), T^r(x_2)) + \cdots + d(T^r(x_{m-1}), T^r(x_m)) \\ &< m\frac{\epsilon}{m}. \end{aligned}$$

Usando um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 1.4 segue que $T^{n+r}(x)$ converge para um ponto fixo quando fazemos $n \to \infty$. $\square$

CAPÍTULO 6

TEOREMAS DE EXISTÊCIA PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Faremos um esboço de alguns métodos pelos quais obteremos teoremas de existência a partir de teoremas de ponto fixo.

6.1 Descrição dos Métodos

Ao longo deste capítulo, "resolver" significa provar que uma solução existe. Métodos de ponto fixo são mais aplicados na resolução de problemas não-lineares. Existem várias maneiras de reduzir um problema não-linear de existência em um problema de ponto fixo (para uma aplicação em um espaço de funções). Veremos agora um método bastante útil.

Método 6.1. *O truque de linearização de Leray e Schauder.*

Suponha que uma expressão da forma $D(f, g)$, que pode envolver f e g, de alguma forma é linear em f. (Nos casos que nos interessam $D(f, g)$ vai envolver derivadas de f e possivelmente de g). Suponha também que a equação linear

$$D(f, g) = 0 \tag{6.1}$$

tem uma única solução $f = T(g)$ para cada g em algum conjunto M. Então para encontrar uma solução em M da equação

$$D(f, f) = 0 \tag{6.2}$$

é equivalente a encontrar um ponto fixo em M da aplicação T. Desta forma uma equação não-linear particular pode ser estudada por meio de uma equação linear mais geral, juntamente com um problema de ponto fixo.

Condições de contorno e condições de diferenciabilidade podem ser incorporadas na definição do conjunto M. Assim devemos saber que (6.1) tem uma única solução, sujeito a estas condições, e deduzimos que (6.2) tem uma solução, sujeita as mesmas condições.

Para que o método funcione, T deve ser "pequeno", isto é, geralmente uma aplicação compacta ou uma contração. Isto significa que (6.1) e (6.2) devem envolver as mesmas derivadas de maior ordem, assim (6.1) deve ser ligeiramente não linear.

Por exemplo, para resolver a equação não linear

$$f'(t) + f^2(t) = \sin t \tag{6.3}$$

sujeita a condição $f(0) = 0$, tomaríamos M como o conjunto das funções satisfazendo $f(0) = 0$ e utilizaríamos uma das seguintes equações lineares

$$f'(t) + g^2(t) = \sin t, \tag{6.4}$$

ou

$$f'(t) + f(t)g(t) = \sin t. \tag{6.5}$$

Método 6.2. *Substituir a equação diferencial e suas condições de contorno por uma equação integral*

$$y = J(y). \tag{6.6}$$

A solução é então dada por um ponto fixo da aplicação $y \mapsto J(y)$. O operador J geralmente envolve uma "função de Green" obtida por algum truque especial. Mais sistematicamente uma equação do tipo (6.6) surge se o operador T mencionado no Método 6.1 pode ser expresso como um operador integral. No entanto, pode ser mais difícil de obter a expressão explicita para aplicação J como um operador integral do que aplicar o Método 6.1 diretamente. Pode ser útil ter a fórmula integral para J, se quisermos mostrar que J fornece uma contração.

Na maioria dos casos, não é fácil reduzir uma equação diferencial para a forma (6.6).

Método 6.3. *Métodos de Continuação.*

Os métodos de continuaçaço estudados anteriormente na seção 4.3 são muitas vezes usados em conjunto com o truque de linearização descrito no primeiro método.

Nesta abordagem não precisamos encontrar um conjunto M que é mapeado em si mesmo pela aplicação U_1, o que realmente nos interessa. O conjunto M é geralmente mapeado em si mesmo pela simples aplicação U_0.

Método 6.4. *Soluções Periódicas*

Soluções Periódicas de equações periódicas podem ser encontradas facilmente pelo método que descreveremos com detalhes na seção (6.4).

6.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Escreveremos y' para denotar $\dfrac{dy}{dt}$. Considere um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser escrito como um sistema de primeira ordem na forma:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \qquad\vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \tag{6.7}$$

ou de forma abreviada

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \tag{6.8}$$

onde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Vamos usar qualquer uma das normas usuais em $\mathbb{R}^n$ e escrever $|x|$ para norma de x. Olharemos para uma solução de (6.8) tal que

$$Y(a) = B, \tag{6.9}$$

onde o número real a e o ponto $B \in \mathbb{R}^n$ são dados. Assumiremos que F é contínua em Y e t, isto é, que cada f_n é contínua em $y_1, y_2, \dots, y_n$ e t.

Utilizaremos a seguir o truque de linearização descrito no primeiro método. Para encontrar uma solução de (6.8), (6.9) em algum conjunto M, consideraremos para cada $X \in M$, a solução $Y = U(X)$ da equação linear

$$Y' = F(t, X) \tag{6.10}$$

subordinada a (6.9).

Em todos os casos que nos interessam, $Y = U(X)$ é definido exclusivamente por

(6.9) e (6.10) e temos, explicitamente

$$U(X(t)) = B + \int_a^t F(s, X(s))ds. \tag{6.11}$$

Assim encontrar uma solução de (6.9), (6.8) é equivalente a exibir um ponto fixo da aplicação U dada por (6.11).

Teorema 6.1 (Cauchy-Lipschitz). *Seja (a, B) um ponto pertencente ao conjunto aberto $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Suponha que*

(i) a função $F(t, X)$ é contínua em S;

(ii) F é lipschitziana na segunda variável, isto é,

$$|F(t, X) - F(t, Y)| \leq k|X - Y|,$$

para algum $k \in \mathbb{R}$ e para todo $(t, X), (t, Y) \in S$.

Então existe uma única solução de (6.8) e (6.9) em alguma vizinhança de a.

Demonstração. Definamos o conjunto M como sendo o conjunto das funções contínuas com gráfico em $R = [a - d, a + d] \times B[B, Ld] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, logo os elementos de M são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. Vemos que a aplicação U definida por (6.11) é uma contração de M em M e pelo Teorema de Contração U tem um único ponto fixo. E este ponto fixo é uma solução de (6.8), (6.9). Podemos mostrar que qualquer solução de (6.8) e (6.9) deve de fato pertencer a M. Portanto a solução é única. □

Teorema 6.2 (Peano). *Se $F(t, Y)$ é uma função contínua de t e Y em uma vizinhança de (a, B) então o problema*

$$(*) \begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(a) = B \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução em uma vizinhança de a.

Demonstração. Podemos assumir que dado $\epsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que se $|t - a| \leq \epsilon$ então $|F(t, Y)| \leq k$. Escolha δ de modo que $\delta \leq \epsilon$ e $\delta k \leq \epsilon$. Seja

$$L = \{f : [a - \delta, a + \delta] \to \mathbb{R}^n : f \text{ é contínua } \}$$

munido com a norma da convergência uniforme. Seja M um suconjunto fechado e convexo de L que consiste das funções Y tais que $|Y(t) - B| \leq \delta k$ para todo t.

Defina

$$U(Y(t)) = B + \int_a^t F(s, Y(s))ds$$

então U mapeia M nele mesmo, uma vz que para $Y \in M$ e $|t-a| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
|U(Y(t)) - B| &= |\int_a^t F(s, Y(s))ds| \\
&\leq |\int_a^t |F(s, Y(s))|ds| \\
&\leq |\int_a^t kds| \\
&= |t-a|k \\
&\leq \delta k.
\end{aligned}$$

U é contínua, pois para $Y, Z \in M$ tal que $\|Y - Z\| \to 0$,

$$\|U(Y(t)) - U(Z(t))\| = \sup_t |\int_a^t (F(s, Y(s)) - F(s, Z(s)))ds| \to 0$$

uma vez que F é uniformemente contínua. Temos também

$$\|U(y)\| \leq |B| + \delta k$$

e

$$|U(Y(s)) - U(Y(t))| \leq |\int_s^t F(x, Y(x))dx| \leq k|s-t|.$$

Portanto, $U(M)$ é uma família uniformemente limitada e equicontínua de funções e, aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli segue que $U(M)$ é precompacto. Pelo Teorema de Schauder, U tem um ponto fixo Y, o que nos fornece uma solução para (*). $\square$

Teorema 6.3 (Picard). *Se $f(t, y)$ é uma função analítica de t e y em uma vizinhança de (a, b) então o problema*

$$(**) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = b \end{cases}$$

tem uma única solução analítica em uma vizinhança de a.

Demonstração. Podemos supor que dado $\epsilon > 0$, existem $K, L > 0$ tais que se $|t-a| \leq \epsilon$ e $|y-b| \leq \epsilon$, temos $|f| \leq K$ e $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$. Escolha $\delta \leq \min\{\epsilon, \frac{\epsilon}{K}, \frac{1}{2L}\}$.

Seja M o conjunto das funções y, analíticas em $(a-\delta, a+\delta)$ e contínuas em $[a-\delta, a+\delta]$ e tal que $|y-b| \leq \delta k$ para $|t-a| \leq \delta$. Claramente M é completo com a norma uniforme. Defina a aplicação U como em (6.11), interpretando a integral como uma integral complexa sobre um contorno. Então U mapeia M nele mesmo. Finalmente para $h, g \in M$,

$$\begin{aligned}
\|U(h) - U(g)\| &= \sup_z \left| \int_a^z f(t,h) - f(t,z)dt \right| \\
&\leq \sup_z |z-a| L \sup t |h(t) - g(t)| \\
&\leq \delta L \|h-g\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|h-g\|.
\end{aligned}$$

Portanto, o teorema de contração garante que U tem um único ponto fixo em M. Isto é, apenas uma solução de (**). Alguma solução y tem uma derivada complexa numa vizinhança de a, assim y é analítica próximo de a, logo $y \in M$ se tomarmos δ suficientemente pequeno. $\square$

6.3 Problemas com duas condições de fronteira

Considere o seguinte problema

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{6.12}$$

com $x(0) = a$ e $x(T) = b$ dados. A suposição que é feita é que f é contínua e limitada em $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O procedimento é feito para reduzir o problema a uma equação integral da forma

$$x(t) = a + \frac{(b-a)t}{T} - \int_0^T G(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds. \tag{6.13}$$

Onde $G(t,s)$ é uma função de Green. Considere a aplicação U de $C^{(1)}$ em $C^{(1)}$ qua mapeia cada x no lado direito de (6.13). Queremos um ponto fixo para U. Da limitação de f e a fórmula para $U(x)$ segue que o conjunto dos pontos $U(x)$ é precompacto. Desta forma pelo Teorema de Schauder existe um ponto fixo.

Lema 6.1 (Gráfico Fechado)**.** *Sejam M um espaço métrico e N um espaço métrico compacto. Se $U : M \to N$ é fechada então U é contínua.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em M tal que $x_n \to y \in M$, mas $U(x_n) \nrightarrow$

$U(y)$ como N é compacto temos que $U(x_n) \to z \in N$, com $z \neq U(y)$. Portanto teríamos (y, z) no gráfico de U o que é ukma contradição. Logo, $U(x_n) \to U(y)$ o que implica que U é contínua como queríamos. $\square$

Agora mostraremos que usando o truque de linearização, podemos resolver o problema sem considerar a função de Green. Definimos a aplicação U de $C^{(1)}$ em $C^{(1)}$ como segue: para $y \in C^{(1)}$, $U(y) = x$ é a única solução de

$$x''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad x(0) = \quad x(T) = b$$

(x é encontrado por duas integrações, escolhendo as constantes corretamente). Aplicando 4.1, mostraremos que $U(C^{(1)})$ é precompacto em $C^{(1)}$. Se $x = U(y)$ temos $|x''(t)| \leq K \quad \forall t$. Uma vez que $x(0) = a, \quad x(T) = b$, um simples argumento mostra que o limite independe de x para $|x'(t)|$ e $|x(t)|$. Tendo tais limites para x, x' e x'', vemos que o conjunto dos pontos $x = U(y)$ é precompacto em $C^{(1)}$. Um argumento elementar mostra que U de $C^{(1)}$ em $C^{(1)}$ é fechado. Desta forma pelo Lema 6.1 U é contínua e pelo Corolário 4.1 U tem um ponto fixo. Este ponto fixo de U é a solução de (6.12).

6.4 Existência de Soluções Periódicas

Um método de ponto fixo para encontrar soluções periódicas de problemas dinâmicos foi usado por Poincaré (1912). Essencialmente, o mesmo método é usado no teorema abaixo.

Teorema 6.4. *Considere a equação*

$$X'(t) = F(X, t), \tag{6.14}$$

onde X e F assumem valores em $\mathbb{R}^n$. Assuma que

(i) Para cada ponto P_0 na bola fechada B^n existe uma única solução $[0, \infty)$ tal que $X(0) = P_0$;

(ii) Se $X(0) \in B^n$ teremos $X(t) \in B^n$ para todo $t > 0$;

(iii) $X(t)$ depende continuamente de $X(0)$;

(iv) F tem período $T > 0$ como uma função de t;

Então a Equação (6.14) tem solução com período T.

Demonstração. Para cada $P_0 \in B^n$ considere o ponto $P_T = X(T)$, para solução $X(T)$ tal que $X(0) = P_0$. Por (ii), (iii) e pelo Teorema de Brouwer, a aplicação $P_0 \to P_T$ tem um ponto fixo, digamos Z. Consideremos a solução com $P_0 = P_T = Z$. Claramente esta solução tem período T. □

Uma técnica similar foi usada por Browder (1965, 1973) para obter soluções periódicsa da equação de evolução

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t,u). \tag{6.15}$$

Aqui cada $A(t)$ é um operador linear em um espaço de Hilbert H e $f(t,u)$ uma aplicação de um subconjunto de $\mathbb{R} \times H$ em H. Algumas suposições são feitas para garantir que (6.15) tem uma única solução em $[s, +\infty)$ para cada $s \geq 0$ e cada valor de $u(s)$ dado. Outras hipóteses, de monotonicidade, sobre os operadores lineares $A(t)$ e os operadores não lineares $f(t,\cdot)$ garantem que a aplicação $u(s) \to u(t)$ é não expansiva para $t > s$.

Para obter uma solução periódica no caso onde $A(t)$ e $f(t,u)$ tem período p como função de t. A hípotese final é que para algum $R > 0$,

$$\operatorname{Re}(f(t,u),u) < 0 \text{ para } \|u\| = R, \quad t \in [0,p].$$

Esta hipótese é usada no cálculo de $\dfrac{d\|u(t)\|^2}{dt}$, que se torna negativa para $\|u(t)\| = R$. Assim a solução $u(t)$ que entrou na bola de raio R deve permanecer dentro da bola. Assim $u(0) \to u(p)$ fornece uma aplicação da bola nela mesma que tem um ponto fixo pelo teorema de Browder. A solução com $u(0) = u(p)$ é uma solução de período p.

6.5 Equações Diferenciais Parciais: Uso da Função de Green

Vamos considerar uma região limitada $\mathcal{G}$ do plano, com fronteira suave Γ, tal que o fecho de $\mathcal{G}$ é $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup \Gamma$. Denotaremos P e Q como sendo pontos de $\mathcal{G}$. Desejamos resolver o problema

$$\begin{cases} \Delta f(P) = -h(P, f(P)) \text{ em } \mathcal{G}, \\ f = f_0 \text{ em } \Gamma, \end{cases} \tag{6.16}$$

onde Δ é o operador de Laplace $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, e f_0 é uma função contínua em Γ dada.

A discussão aparece mais claro se usarmos o truque de linearização. Considere para alguma $g \in C(\bar{\mathcal{G}})$, a equação linear

$$\begin{cases} \Delta f(P) = -h(P, g(P)) \text{ em } \mathcal{G}, \\ f = f_0 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \tag{6.17}$$

Lema 6.2. *Para cada g contínua em $\mathcal{G}$ e cada f_0 contínua em Γ, existe uma única solução f da Equação* (6.17)*, a qual é dada explicitamente por*

$$f(P) = \phi(P) + \int\int_{\mathcal{G}} G(P,Q)h(Q,g(Q))dQ \tag{6.18}$$

onde ϕ é a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \ \ em\ \mathcal{G} \\ \phi = f_0 \ \ em\ \Gamma \end{cases} \tag{6.19}$$

e G é a função de Green da região $\mathcal{G}$.

Considere o espaço métrico completo $M = C(\bar{\mathcal{G}})$. Para $g \in M$, seja $f = U(g)$ a solução de (6.17). O lema anterior garante que a aplicação U está bem definida e que $f = U(g)$ é dada explicitamente como em (6.18). Usando (6.18), vemos que U mapeia M nele mesmo e que para g e $j \in M$ temos

$$\begin{aligned} \|U(g) - U(j)\| &= \sup_P \left|\int\int_{\mathcal{G}} G(P,Q)(h(Q,g(Q)) - h(Q,j(Q)))dQ\right| \\ &\leq \sup_P \left|\int\int_{\mathcal{G}} G(P,Q)dQ\right| \sup_Q |h(Q,g(Q)) - h(Q,j(Q))|. \end{aligned}$$

Desta maneira se h satisfaz a condição de Lipschitz, isto é,

$$|h(Q,f) - h(Q,g)| \leq \theta|f-g|, \tag{6.20}$$

onde

$$\theta < \left(\sup_P \left|\int\int_{\mathcal{G}} G(P,Q)dQ\right|\right)^{-1},$$

então U é uma contração.

E portanto se a condição (6.20) for satisfeita, então o problema (6.16) tem uma única solução. De fato, pois uma vez que (6.20) é satisfeito temos que U é uma contração e portanto tem um único ponto fixo, e este é ponto que queremos.

6.6 O Truque de Linearização para Equação Diferencial Parcial

Consideremos uma região do plano $\mathcal{G}$ cuja fronteira é Γ. O truque de linearização foi desenvolvido por Leray e Schauder para equações diferenciais parciais. Considere por exemplo a equação

$$a(x,y,z)z_{xx} + b(x,y,z)z_{xy} + c(x,y,z)z_{yy} = 0 \text{ em } \mathcal{G} \tag{6.21}$$

com condição de fronteira $\phi(z) = 0$ sobre Γ.

Cosideremos para uma função arbitrária w a solução $z = U(w)$ da equação linear

$$a(x,y,w)z_{xx} + b(x,y,w)z_{xy} + c(x,y,w)z_{yy} = 0$$

sujeito a $\phi(z) = 0$ em Γ.

Condições em $\mathcal{G}, \Gamma, a, b, c$ (de continuidade, elipticidade, etc) são escolhidas para garantir que U esta bem definida e é precompacto. A dificuldade de encontrar um conjunto M de funções, o qual é transformado nele mesmo, levado por Leray e Schauder (1934) usa um argumento de continuação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[2] DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analisys*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[3] LIMA, E. L. *Curso de Análise vol. 1*, 12.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2008.

[4] LIMA, E. L. *Curso de Análise vol. 2*, 11.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2009.

[5] LIMA, E. L. *Topologia dos Espaços Métricos*, 4.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2007.

[6] MEDEIROS, L. A e ANDRADE, N. G. *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos, 1978.

[7] SOTOMAYOR TELLO, J. M. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro : IMPA, 1979.

[8] SMART, D. R. *Fixed point theorems*, Cambridge University Press, New York, 1974.