Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Estabilidade da Convergência Fraca sob a Ação de Operadores Não-Lineares

por

João Henrique Santos de Andrade

Junho/2016

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Bacharelado em Matemática

Estabilidade da Convergência Fraca sob a Ação de Operadores Não-Lineares

por

João Henrique Santos de Andrade

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Junho/2016
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN
Maria Teresa Macau - CRB 15/176

A553e Andrade, João Henrique Santos de.
Estabilidade da convergência fraca sob a ação de operadores não lineares / João Henrique Santos de Andrade. - João Pessoa, 2016.
53p. : il.-

Monografia (Bacharelado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba.
Orientador: Profº Drº João Marcos Bezerra do Ó.

1. Análise matemática. 2. Convergência fraca. 3. Operador de Nemýstkii. I. Título.

UFPB/BS-CCEN CDU: 517(043.2)

Estabilidade da convergência fraca sob a ação de operadores não-lineares

por

João Henrique Santos de Andrade

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Análise

COMISSÃO EXAMINADORA

João Marcos Bezerra do Ó

____

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)

____

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Esteban Pereira da Silva

____

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva -UFPB

Junho/2016

Agradecimentos

- Ao Professor João Marcos que me orientou neste trabalho, bem como durante todos os meus anos de inciação científica. Além disso, foi o mentor na minh escolha do tema e também na escolha da área a seguir.

- A todos os meus familiares que me deram suporte e exemplo para prosseguir. Em especial a minha mãe, que sempre mostrou-me a importância de estudar.

- À Professora Flávia que sempre acreditou em mim, motivou-me a continuar, e além disso, foi responsável por apresentar-me desde cedo o fascinante mundo da matemática.

- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB pelos conhecimentos transmitidos. Especialmente aos professores Andrade, Fágner, Everaldo e Manassés que apesar de todos os compromissos profissionais, sempre me ajudaram com dúvidas e em valiosas aulas. Sendo os dois últimos responsáveis respectivamente pelas lições de Análise Funcional e Teoria de Medida, disciplinas estas que compoẽm a base do trabalho por mim escrito.

- Aos meus amigos de graduação que compartilharam comigo seus conhecimentos e suas dificuldades para que juntos pudéssemos crescer. Como também, aqueles que ensinei ou ajudei de alguma forma e fizeram-me perceber por muitas vezes que suas dúvidas também eram minhas.

- Finalmente, gostaria de agradecer aos professores: Esteban Pereira da Silva e Everaldo Souto de Medeiros que aceitaram participar da banca, e assim, colaborar com este trabalho.

"Transire suum pectus mundoque potiri".

"Aquele que transcender a si mesmo, possuirá o mundo."

Marcus Manilius

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos o clássico Lema de Brezis-Lieb, o qual é uma versão melhorada do Lema de Fatou, pois estima o erro nesta desigualdade. Veremos também sua relação com a continuidade fraca de operadores não lineares, especificamente do operador de Nemýstkii. Faremos isso com o objetivo de aplicar esta ferramenta na busca por melhores constantes para um tipo famoso de desigualdade variacional. Além disso, obteremos um resultado de imersão compacta para espaços de Sobolev, sem a necessidade de assumir qualquer condição de regularidade na fronteira.

Palavras-Chave: Convergência q.t.p, Convergência Fraca, Operador de Nemýstkii.

ABSTRACT

This work is a study on the classic lemma of Brezis and Lieb, which is a improvement of Fatou's lemma because it evaluates the gap between the integral of a functional sequence and the integral of its pointwise limit. It is also showed a relation between this result and weak continuity of nonlinear maps between Lebesgue spaces, namely Nemystkii's operators. The final goal is to apply this tool to find sharp constant for a well-known type of variational inequality. Furthermore, it is obtained a compact Sobolev embedding theorem without any regularity condition on the boundary.

Keywords: a.e Convergence, Weak Convergence, Nemystkii operators.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A convergência de funcionais é um problema antigo e de notórias aplicações em diversas áreas da matemática. Por exemplo, no cálculo das variações, usamos este tipo de resultado para garantir a existência de sequências minizantes ou maximizantes para determinados funcionais. Quando estamos lidando com operadores não-lineares, esta questão torna-se deveras difícil e uma útil ferramenta neste sentido é o lema de Brezis-Lieb. Este resultado foi proposto pelos autores em 1983 com o propósito de garantir convergência de certas sequências de funcionais $(j(u_n))_n$, apenas dispondo de hipóteses de convergência pontual e limitação uniforme na sequência $(u_n)_n$, condições estas, em certo sentido, bastante fracas.

O ponto em questão foi estudar o erro da desigualdade no lema de Fatou e as possíveis causas deste tipo de patologia. Baseados nisto, Brezis e Lieb obteram uma versão corrigida para este resultado. Um pouco mais tarde, em 2004, Eduardo Teixera e Diego Moreira em [2], estudaram a relação entre o lema de Brezis-Lieb e a continuidade sequencial fraca do operador de Nemýstkii. Sendo assim, nosso objetivo nesta monografia é estudar de maneira sistemática como isto foi feito. Para tanto, organizamos o desenvolvimento deste trabalho da seguinte maneira.

Visando suprir os pré-requisitos mínimos para a leitura deste texto, no capítulo 1, faremos uma apresentação dos resultados de Teoria da Medida, Análise Funcional e dos Espaços de Lebesgue. Demonstraremos apenas o Teorema de Ergorov e apresentamos referências.

No capítulo 2, apresentamos o resultado principal deste trabalho, o Lema de Brezis-Lieb. Faremos isto de duas formas diferentes. Primeiramente, em sua forma generalizada, requerindo hipóteses mais fracas sobre o funcional. Posteriormente, restringiremos o estudo aos Espaços de Lebesgue e obteremos o mesmo teorema para um tipo específico de funcional, o funcional energia. Todos os resultados deste capítulo foram baseados em [1].

Com o objetivo de entender de uma maneira profunda os mecanismos demonstrados no capítulo anterior, faremos, no capítulo 3, uma revisão de alguns resultados clássicos sobre convergência fraca nos espaços de Lebesgue. Estes resultados foram encontrados em [6]. Após feito isto, estudaremos as principais propiedades deste tipo de convergência e a relacionaremos com a convergência pontual, depois veremos sua relação com operados não-lineares. Mais especificamente, introduziremos o conceito de operador de Nemýstkii, baseados em [5], e, como feito em [2], daremos condições capazes de garantir a estabilidade da convergência fraca sob a ação de operadores de Nemýstkii. Já na parte final, utilizaremos o que foi obtido anteriormente e exibiremos uma prova alternativa para o lema de Brezis-lieb.

Finalmente, no último capítulo, aplicaremos de duas maneiras as ferramentas obtidas no decorrer do texto. Inicialmente, trataremos de um problema variacional famoso sobre melhores constantes nas desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev, seguindo o que foi feito em [10]. Por fim, usaremos argumentos de continuidade fraca e provaremos a compacidade de algumas imersões dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ em espaços de Lebesgue $L^q(\Omega)$.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Fazemos uma apresentação de alguns resultados de Teoria da Medida e de Análise Funcional que serão necessários para melhor compreensão dos próximos capítulos. Dividimos este capítulo em três seções contendo apenas resultados que de fato serão utilizados no decorrer do trabalho. As demonstrações dos teoremas apresentados podem ser encontradas nas referências que serão citadas adiante.

Na primeira seção, trazemos as definições básicas de σ-álgebras, medidas e mensurabilidade de funções. Para tanto, tomamos como base os textos de [7], bem como o texto de [3]. Na segunda parte, colocamos os conceitos e exemplos básicos de Análise Funcional, tais como espaços de Banach, espaços dual e bidual e reflexividade; seguimos as referências [4] e [3]. Na terceira parte, utilizamos o que foi feito nas seções anteriores e falamos sobre as propriedades básicas dos espaços de Lebesgue e seus diferentes modos de convergência, tendo como referência [3] e [7]. O leitor que esteja familiarizado com estes tópicos pode pular este capítulo, vindo a ele apenas quando julgar necessário.

1.1 Alguns resultados da Teoria da Medida

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e algumas notações que serão usados nos capítulos seguintes. Entendemos que estes conhecimentos não são abrangidos nos cursos de graduação em Matemática

1.1.1 σ-Álgebras e Medidas

Denotaremos por (Ω, Σ, μ) um *espaço de medida* onde Ω é um conjunto e

(i) Σ é uma σ-álgebra em Ω, isto é, Σ é uma coleção de subconjuntos de Ω tal que

(a) $\emptyset \in \Sigma$;

(b) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$;

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ sempre que $A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) μ é uma *medida* onde $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ satifaz

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty})A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que $\{A_n\}$ é uma família enumerável de subconjuntos disjuntos em Σ.

Os elementos de Σ são chamados de *conjuntos mensuráveis*. Por conveniência, pediremos neste trabalho também uma propriedade extra sobre este espaço. Assumiremos que

(iii) Ω é *σ-finito*, ou seja, existe uma família enumerável $\{\Omega_n\}$ de elementos de Σ tais que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$ e $\mu(\Omega_n) < \infty$, para todo n.

Os conjuntos de $E \in \Sigma$ com a propriedade $\mu(E) = 0$ são chamados de conjuntos de *medida nula* ou conjuntos nulos. Diremos também que uma determinada propriedade é valida q.t.p (ou para quase todo $x \in \Omega$) se é válida em *quase toda parte* com exceção de conjunto de medida nula.

Exemplo: Neste texto, eventualmente iremos trabalhar com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Em um espaço topológico (X, τ) em geral definimos a σ-algebra de *Borel* como a menor (no sentido da inclusão) σ-algebra contendo os abertos da topologia, assim denotaremos por $\beta(\Omega)$ esta σ-algebra e chamaremos seus elementos de *Borelianos*.

No entanto, esta σ-algebra não é completa, ou seja, existem subconjuntos de conjuntos de medida nula que não são mensuráveis, mas em algumas situações é necessário trabalhar com uma σ-algebra mais geral chamada de σ-algebra de *Lebesgue*, denotada por $\mathcal{L}(\Omega)$, contendo $\beta(\Omega)$ estritamente. Os elementos desta nova família são chamados de conjuntos *mensuráveis a Lebesgue*.

Assim, podemos definir uma medida $\lambda : \mathcal{L}(\Omega) \to [0, \infty]$ nesa σ-algebra que concorde com a idéia intuitiva de volume nos espaços euclidianos. Esta medida é chamada de *Medida de Lesbegue no* $\mathbb{R}^N$ e, as vezes, usaremos a notação $|A|$ para nos referirmos a $\lambda(A)$. Finalmente, observe que $\mathbb{R}^N = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(0, i)$, assim, $(\mathbb{R}^N, \beta(\Omega), \lambda)$ é σ-finito.

Diremos que duas funções f e g são iguais μ-quase toda parte caso $f(x) = g(x)$, para $x \in E^c$, onde $E \in \Sigma$ e $\mu(E) = 0$ e denotaremos $f = g \ \ \mu - q.t.p.$ Da mesma maneira, diremos que uma sequência de funções $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ converge μ-q.t.p se existe um conjunto $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ tal que $u(x) = \lim u_n(x)$ para todo $x \in E^c$, e denotaremos $u = \lim\limits_{n} u_n \ \ \mu - q.t.p.$ Esta versão mais fraca de convergência pontual é chamada de *convergência q.t.p* e desempenhará um papel fundamental no resultado principal deste trabalho.

1.1.2 Funções Mensuráveis e Integração

Nesta seção, apresentaremos uma extensão a ideia de integral de Riemann para uma classe mais geral de funções, a saber, as funções mensuráveis. Veremos adiante que a definição de Integral de Lebesgue permitirá-nos obter melhores resultados de convergência a respeito de sequências deste tipo de funções.

Considere (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função, diremos que u é Σ-*mensurável* quando

$$\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \Sigma, \forall \alpha > 0.$$

Neste caso, escreveremos $u \in \mathcal{M}$ para indicar isto. Quando estivermos tratando do caso $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\Sigma = \mathcal{L}(\Omega)$, diremos que u é *mensurável a Lebesgue.* No caso $\Sigma = \beta(\Omega)$, diremos que a função é *mensurável a Borel.* Observe também que toda função contínua é mensurável a Borel.

Exemplo: Dado $E \in \Sigma$ definimos a função,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in E \\ 0, & \text{se} \quad x \in E^c \end{cases}$$

Esta função é claramente mensurável e é chamada de *Função Característica* de E.

Uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita *simples* se assumir apenas uma quantidade finita de valores. Uma função mensurável simples pode ser representada da seguinte maneira,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \Sigma$. Entre todas a representações possíveis para φ existe uma única *representação padrão*, caracterizada caso a_j sejam distintos e E_j sejam não-vazios e disjuntos com $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Se φ é uma função simples mensurável com sua representação padrão. Definimos a *integral* de φ com respeito a μ da seguinte maneira

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Além disso, uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita *não-negativa* quando $u(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \Omega$. Quando além de não-negativa u também for mensurável escreveremos $u \in \mathcal{M}^+$.

Teorema 1 *Seja $u \in \mathcal{M}^+$, então existe uma sequência φ_n em $\mathcal{M}^+$ tal que*

(a) *φ_n é simples;*

(b) *$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant u(x)$ para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \mathbb{N}$; (Monotonicidade)*

(c) *$u(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.*

Em vista do teorema anterior, podemos definir a noção de *integral de Lebesgue* para uma classe mais geral de funções. Assim, seja $u \in \mathcal{M}^+$, definimos a integral de u com respeito μ da seguinte maneira

$$\int_\Omega u d\mu = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}^+} \int_\Omega \varphi d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples $\varphi \in \mathcal{M}^+$, satisfazendo $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant u(x)$ para todo $x \in \Omega$. E, caso $E \in \Sigma$, definimos a integral de u sobre E com respeito a μ por

$$\int_E u = \int_\Omega u \chi_E d\mu.$$

e, mesmo quando u não for uma função não-negativa, podemos decompor u como a diferença de duas funções não-negativas, assim

$$u = u^+ - u^-,$$

chamamos u^+ de *parte positiva* e u^- de *parte negativa*. Definidas da seguinte maneira

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = -\min\{u(x), 0\},$$

onde ambas pertencem a $\mathcal{M}^+$. Portanto, podemos definir a integral de uma função qualquer $u \in \mathcal{M}$ como segue

$$\int_\Omega u d\mu = \int_\Omega u^+ d\mu - \int_\Omega u^- d\mu.$$

Observe que na definição de integral não excluímos a possibilidade do valor obtido ser $+\infty$. No caso de ambas u^+ e u^- terem integrais finitas, denotaremos por $u \in L(\Omega, \Sigma, d\mu)$ e diremos que u é uma *função integrável*. Quando estivermos tratando da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ denotaremos $L(\Omega, \beta(\Omega), dx)$.

1.1.3 Convergência da Integral de Lebesgue

Estamos em condições de enunciar um importante resultado devido a Beppo Levi, o qual é chave para as propriedades de convergência da integral de Lebesgue.

Teorema 2 ***(Convergência Monótona)*** *Seja (u_n) uma sequência de funções em $\mathcal{M}^+$ convergindo para u. Então,*

$$\int u d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n d\mu.$$

A seguir, veremos um resultado muito útil para estimar a convergência da integral de uma sequência de funções (u_n) ainda que a sequência não seja convergente.

Teorema 3 ***(Lema de Fatou)*** *Seja (u_n) uma sequência em $\mathcal{M}^+$. Então,*

$$\int \liminf u_n d\mu \leqslant \liminf \int u_n d\mu$$

Finalmente, apresentaremos um dos resultados mais importantes sobre convergência de funções integráveis.

Teorema 4 ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma, d\mu)$ convergindo em quase todo ponto para uma função f, se existe alguma função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável, tal que $|u_n| \leq v$. Então $u \in \mathcal{L}(\Omega, \Sigma, d\mu)$ e vale que*

$$\int u d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n d\mu.$$

O teorema anterior estabelece uma condição suficiente para obter convergência na integral de um sequência de funções convergindo apenas q.t.p, por isso sua fundamental relevância.

1.2 Um breve esboço sobre Análise Funcional

No decorrer deste trabalho faremos uso de algumas definições e resultados a respeito de espaços de Banach, tais como, sua dualidade, reflexividade e compacidade. Diante disto, nesta seção traremos algumas definições e resultados clássicos de Análise Funcional .

1.2.1 Espaços Métricos e Normados

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, uma *norma* em V é uma função $||.|| : V \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $||u|| \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $u = 0$;

(b) $||\lambda u|| = |\lambda|||u||$;

(c) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ *(Desigualdade Triangular)*.

Um espaço vetorial munido de um norma é denominado *espaço vetorial normado*. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de elemento $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de *distância* de x a y, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$

(a) $d(x, x) = 0$;

(b) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

(c) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Desigualdade Triangular).*

Um *espaço métrico* é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Exemplo: Um espaço vetorial normado V torna-se um espaço métrico com a métrica induzida pela norma, dada por

$$d(x, y) = ||x - y||, \ \forall x, y \in V.$$

Nestes termos definimos também os seguintes conjuntos

(a) A *bola aberta* de centro $x_0 \in M$ e raio $r > 0$.

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\};$$

(b) A *bola fechada* de centro $x_0 \in M$ e raio $r > 0$.

$$B[x_0, r] = \overline{B_r(x_0)} = B_r(x_0) = \{x \in M : d(x, x_0) \leq r\};$$

(c) A *esfera* de centro $x_0 \in M$ e raio $r > 0$.

$$S(x_0, r) = S_r(x_0) = \{x \in M : d(x, x_0) = r\}.$$

Uma sequência em M é uma função X com domínio em $\mathbb{N}$ e contradomíno em M, denotada por (x_n) com $n \in \mathbb{N}$. A partir desse conceito obtemos diversos outros:

(a) Uma subsequência (x_k) de (x_n) é uma restrição da função X a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$;

(b) Uma sequência é dita limitada quando existe $C > 0$, tal que

$$x_n \in B[0, C], \forall n \in \mathbb{N};$$

(c) Uma sequência $(x_n) \in M$ converge para $a \in M$ quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n \in B_\epsilon(a), \forall n \leq n_0.$$

Denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e dizemos que a é limite de (x_n);

(d) Uma sequência é dita de Cauchy quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m \leq n_0;$$

(e) Um espaço métrico é dito *completo* quando toda sequência de Cauchy converge para um elemento desse espaço.

(f) Um subconjunto K de um espaço métrico é dito *compacto* quando dada um sequência (x_n) em K, existe uma subsequência (x_k) e um elemento $x \in K$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

Sejam M, N espaços métricos, uma aplicação $f : M \to N$ é dita contínua em $a \in M$, quando dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, termos $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Equivalentemente, podemos dizer que f é contínua em $a \in M$, se dada qualquer sequência (x_n) com $x_n \to a$, então $f(x_n) \to f(a)$. Dizemos que f é *contínua* quando for contínua em todos os pontos de M.

Exemplo: Dado V um espaço vetorial normado. A norma $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. De fato, utilizando a segunda versão da desigualdade triangular

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Então, dados $x, y \in V$ e $\epsilon > 0$, quando $\|x - y\| < \epsilon$, existe $\delta = \epsilon > 0$ de modo que

$$|\|x\| - \|y\|| < \delta.$$

1.2.2 Espaço de Banach

Em Análise Funcional os espaços métricos completos desempanham um papel importante devido a suas propriedades de convergência. Seja $(E, ||.||)$ um espaço vetorial normado, diremos que E é um *Espaço de Banach*, se o espaço métrico (E, d) é completo onde d é a métrica induzida pela norma $||.||$.

Exemplo:(Espaço das sequências) Seja ℓ^∞, onde ℓ^∞ denota o conjunto de todas as sequências limitadas em $\mathbb{R}$ equipado da norma dada por

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i|, \quad x = (x_n) \in \ell^\infty$$

é um espaço de Banach de dimensão infinita.

Exemplo:(Espaço Normado que não é Banach). O conjunto $\mathcal{C}([0,1])$ é um espaço vetorial. Entretanto, $\mathcal{C}([0,1])$ equipado com a norma dada por

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

não é um espaço de Banach. Pois a sequência de funções

$$f_n(x) = x^n - 1$$

que converge para

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in 0 \leq x < 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

o qual não é um elemento de $\mathcal{C}([0,1])$.

1.2.3 Aplicações Lineares

Uma aplicação $T : E \to F$ é dita *linear*, caso

$$T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sejam E e F dois espaços de Banach. Um operador linear $f : E \to F$ é dito *limitado* se existe uma constante M tal que

$$|f(x)| \leq M|x|, \forall x \in E.$$

Nos espaços vetorias normados existe uma relação entre limitação e continuidade.

Teorema 5 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $f : E \to F$ um operador linear. Então*

(i) *Se f é contínuo na origem, então f é contínuo em E;*

(ii) *O operador T é contínuo em E se, e só se f é limitado.*

Se E e F são espaços vetoriais normados, denotaremos o espaço vetorial das aplicações lineares limitadas por $\mathcal{L}(E, F)$, munido com as operações usuais de soma e produto por escalar. Definimos a norma de uma aplicação linear limitada $f : E \to F$ por

$$||f||_{E'} = \inf\{M > 0 : ||fx||_F \leq M||x||_E,\ \forall x \in E\}.$$

Vejamos a seguir que este novo espaço herda boas propriedades métricas.

Teorema 6 *Se E e F são espaços vetoriais normados, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial normado.*

Teorema 7 *Se E é um espaço vetorial normado e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach.*

1.2.4 Espaço Dual e Convergência Fraca

Um funcional é uma função $f : E \to \mathbb{R}$ linear. Seja E um espaço vetorial normado, denotaremos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por E', e o chamaremos de *espaço dual* de E. Estamos fazendo $F = \mathbb{R}$, portanto, da mesma maneira que foi feito antes, em E' definimos a seguinte norma

$$||f||_{E'} = \inf\{M > 0 : |Tx| \leq M||x||_E, \ \forall x \in E\}.$$

Teorema 8 *Se E é um espaço vetorial normado, então E' é um espaço de Banach.*

Nos espaços de Banach, podemos definir uma nova noção de convergência com o auxílio dos funcionais lineares contínuos. Esta nova convergência é chamada de *convergência fraca*, diremos que uma sequência (x_n) em E converge fraco para um elemento $x \in E$ caso

$$f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in E'$$

Neste caso, indicaremos $x_n \rightharpoonup x$.

1.2.5 Espaço Bidual e Reflexividade

Definimos o *espaço bidual* como o dual do espaço dual, e denotamos $(E')' = E''$, isto é, um elemento $\varphi \in E''$ é um funcional $\varphi : E' \to \mathbb{R}$ linear e contínuo. Existe um identificação natural entre E e E''.

Dado um $u \in E$, definimos a aplicação $J_u : E' \to E$ dada por $J_u(f) = f(u)$. Não é difícil verificar que a aplicação $u \mapsto J_u$ é sempre linear e injetiva. Além disso, quando J for sobrejetiva, isto é, $J(E) = E''$, diremos que E é um *espaço reflexivo*.

Teorema 9 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E. Então existe um elemento $x \in E$ tal que $x_n \rightharpoonup x$, a menos de subsequência.*

O Teorema de Kakutani nos fornece uma caracterização para os espaços reflexivos.

Teorema 10 ***(Kakutani)*** *Seja E um espaço de Banach, então E é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada em E possui uma subsequência convergindo fracamente a um elemento de E.*

1.3 Espaços de Lebesgue

Os espaços das funções integráveis possuem, em certo sentido, propriedades topológicas melhores do que os espaços de funções contínuas. Esses espaço são normalmente chamados de *Espaços de Lebesgue* e são a principal fonte de exemplos da Análise Funcional.

1.3.1 O Espaço L^1

Seja $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ como definido anteriormente, diremos que $f \sim g$ quando f, g forem iguais μ-quase toda parte. É fácil observar que esta relação é uma *relação de equivalência* em $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Assim, podemos definir o *espaço quociente*

$$L(\Omega, \Sigma, \mu) = \{[u] : u \in \mathcal{L}\},$$

onde $[u] = \{v \in \mathcal{L} : u \sim v\}$, ou equivalentemente $[u] = \{v \in \mathcal{L} : u = v \;\text{ q.t.p}\}$.

Observe que, da maneira que definimos $L(\Omega, \Sigma, \mu)$ os seus elementos não são de fato funções, mas, *classes de equivalência* de funções. Na maioria das vezes não faremos essa distinção.

Dada uma função $u \in L(\Omega, \Sigma, \mu)$ dizemos que u é *absolutamente integrável* quando

$$\int_\Omega |u| d\mu < \infty,$$

Definimos o espaço das funções absolutamente integráveis por

$$L^1(\Omega, \Sigma, \mu) = \{u \in \mathcal{M} : \int |u| d\mu < \infty\}.$$

Daqui em diante, usaremos a notação $u \in L^1(\Omega)$, omitindo, assim, o domínio de integração na integral. Podemos então definir uma norma em $L^1(\Omega)$ da seguinte maneira

$$||u||_{L^1} = ||u||_1 = \int_\Omega |u| d\mu.$$

Com esta norma podemos introduzir neste espaço uma noção de convergência.

Diremos que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, se $||u_n - u||_1 \to 0$. Em posse desta definição podemos anunciar os resultados de convergência já discutidos anteriormente para funções integráveis em visão da convergência em L^1.

Teorema 11 ***(Convergência Monótona)*** *Seja (u_n) uma sequência em L^1 satisfazendo*

(a) $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$ *q.t.p em* Ω,

(b) $\sup_n \int u_n < \infty$.

Então, $(u_n(x))$ converge q.t.p em Ω para um limite finito que denotaremos por $u(x)$, além disso $u \in L^1$ e $||u_n - u||_1 \to 0$.

Teorema 12 ***(Convergência Dominada)*** *Seja (u_n) uma sequência em L^1 satisfazendo,*

(a) $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω,

(b) *Existe uma função $v \in L^1$ tal que para todo n, $|u_n(x)| \leq v(x)$ q.t.p em Ω.*

Então, $u \in L^1$ e $||u_n - u||_1 \to 0$.

Teorema 13 ***(Lema de Fatou)*** *Seja (u_n) uma sequência em L^1 satisfazendo,*

(a) *Para todo n, $u_n \geq 0$ q.t.p em Ω;*

(b) $\sup_n \int u_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, definamos

$$u(x) = \liminf_{n\to\infty} u_n(x) \leqslant +\infty.$$

Então, $u \in L^1$ e,

$$\int u \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int u_n.$$

Um exemplo é o caso onde $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ consiste dos conjuntos mensuráveis a Lebesgue e μ é a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^N$. Dado $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos o *suporte* da função u como o fecho do maior aberto onde a função é não-nula, ou seja,

$$\text{supp} \;\; u = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

Denotaremos por $C_c(\mathbb{R}^N)$ o conjunto de todas as funções contínuas em $\mathbb{R}^N$ que possuem o suporte compacto, isto é,

$$C_c(\mathbb{R}^N) = \{u \in C(\mathbb{R}^N) : f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus K\},$$

onde $K \subset \mathbb{R}^N$ é compacto.

Teorema 14 ***(Densidade)*** *O espaço $C_c(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$, isto é,*

$$\forall u \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad \textit{tal que} \quad ||u - v||_1 \leqslant \varepsilon.$$

1.3.2 Propriedades Elementares dos Espaços L^p

Analogamente, definiremos o espaço das funções *p-integráveis* .Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in \mathcal{M} \cap L^1(\Omega)\}$$

com

$$||u||_{L^p} = ||u||_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p d\mu\right]^{1/p}.$$

O funcional $||.||_p$, de fato, é uma norma, chamada de *p-norma.* Definimos também

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in \mathcal{M} \text{ e } |u(x)| \leqslant C \text{ q.t.p em } \Omega\},$$

com

$$||u||_{L^\infty} = ||u||_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leqslant C\}.$$

Chamamos uma função em L^∞ de *essencialmente limitada*. Note que $|u(x)| \leqslant ||u||_\infty$ q.t.p em Ω. Daí, concluímos que $||.||_\infty$ também é uma norma, tal norma é a norma da *convergência uniforme*.

Dado $1 < p < \infty$ denotamos por p' o *expoente conjugado de Lebesgue* definido como segue

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Quando $p = 1$, definimos $p' = \infty$ e vice-versa. A desigualdade a seguir nos fornece uma condição para que o produto de duas funções esteja em L^1, temos que

Teorema 15 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Assuma que $u \in L^p$ e $v \in Lp'$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então $uv \in L^1$ e*

$$\int |uv| \leqslant ||u||_p ||v||_{p'}$$

Vejamos agora algumas resultados sobre os espaços L^p.

Teorema 16 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam $u, v \in L^p$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então,*

$$||u + v||_p \leqslant ||u||_p + ||v||_p$$

Teorema 17 *$(L^p, ||.||_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p < \infty$.*

Teorema 18 ***(Fischer-Riez)*** *L^p é uma espaço de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

O resultado a seguir nos fornece uma relação entre a convergência em L^p e a convergência q.t.p de uma sequência de funções (u_n).

Teorema 19 *Dados (u_n) uma sequência de funções em L^p e $u \in L^p$ tal que $||u_n - u||_p \to 0$. Então existe uma subsequência (u_k) de (u_n) e uma função $h \in L^p$, tais que*

(a) *$u_k(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω*

(b) *$|u_k(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$, q.t.p em Ω.*

O teorema anterior nos diz que, em posse de convergência na norma L^p, podemos garantir a existência de alguma subquência que converge para quase todo ponto. O ponto principal do nosso trabalho é estudar quando a recíproca desse fato é verdadeira, isto é, quando convergência q.t.p implica convergência na p-norma. Muito embora, para isso precisaremos de algumas hipóteses adicionais.

Dada uma sequência (u_n) em L^p, diremos que esta sequência é *uniformemente limitada* quando

$$||u_n|| \leqslant C, \ \forall n$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende nem x nem de n.

1.3.3 Reflexidade e o Dual de L^p

Desta seção em diante, trataremos apenas do caso $1 < p < \infty$.Isto porque quando $p = 1$ e $p = \infty$, L^p não é reflexivo.

Teorema 20 *L^p é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Nos espaços de Lebesgue todo funcional linear contínuo $\phi \in (L^p)'$ pode ser representado concretamente por um elemento de $L^{p'}$.

Teorema 21 ***(Representação de Riez)*** *Dados $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p)'$. Então, existe uma única funcão $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \ \forall f \in L^p,$$

e além disso,

$$||u||_{p'} = ||\phi||_{(L^p)'}.$$

Este teorema nos diz que o operador $T : L^{p'} \to (L^p)'$, definido por $\langle Tu, f\rangle = \int uf$ é uma isometria sobrejetiva, e assim, podemos fazer a seguinte identificação

$$(L^p)' = L^{p'}.$$

Teorema 22 *O espaço $C_c(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 < p < \infty$.*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Diremos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ está em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ quando existir um compacto $K \subset \Omega$ tal que $u\chi_K \in L^p$, e observe que se $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, então $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Com essa definição temos o seguinte resultado

Teorema 23 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que*

$$\int uf = 0,\ \forall f \in C_c^\infty(\Omega)$$

Então $u = 0$ q.t.p em Ω.

Como corolário do resultado anterior temos um resultado conhecido como *Lema fundamental do cálculo das variações.*

Teorema 24 ***(Du Bois-Reymond)*** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in C(\Omega)$ tal que*

$$\int uf = 0,\ \forall f \in C_c^\infty(\Omega)$$

Então $u = 0$ q.t.p em Ω.

Neste trabalho, usaremos a seguinte versão.

Teorema 25 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$\int uv = 0,\ \forall v \in L^q(\Omega),$$

onde $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $u = 0$ q.t.p em Ω.

1.3.4 Modos de Convergência

Durante esta exposição, nos deparamos com diferentes maneira de tratar sobre convergência em espaços de Lebesgue. Veremos algumas formas de relacionar estes diferentes tipos de convergência.

Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$. Em primeiro lugar, olhamos para $(L^p(\Omega), ||.||_p)$ como um espaço normado, temos

(a) **convergência forte** (na norma $||.||_p$) : $u_n \to u$, se $||u_n - u||_p \to 0$;

(b) **convergência uniforme** (na norma $||.||_\infty$) : $u_n \to u$, se $||u_n - u||_\infty \to 0$;

(c) **convergência fraca** (induzida pelo dual) : $u_n \rightharpoonup u$, se $|f(u_n) - f(u)| \to 0, \ \forall f \in (L^p(\Omega))'$.

Podemos também pensar em $(\Omega, \Sigma, d\mu)$ como um espaço de medida e temos mais alguns tipos

(d) **convergência pontual** : $u_n \to u$, se $|u_n(x) - u(x)| \to 0, \forall x \in \Omega$;

(e) **convergência q.t.p** : $u_n \to u$, se $|u_n(x) - u(x)| \to 0, \forall x \in \Omega$ quase toda ponto;

(f) **convergência em medida** : $u_n \xrightarrow{\mu} u$, se para dado $\varepsilon > 0$, tivermos que

$$\mu(\{x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0.$$

(g) **convergência quase uniforme** : $u_n \to u$, se dado $\varepsilon > 0$, existir $\Omega_\varepsilon \in \Sigma$ com $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $||u_n - u||_\infty \to 0$, em $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$.

Dadas todas estas maneiras de definir convergência em espaços de Lebesgue, gostaríamos de exibir resultados que relacionassem esses modos de convergência. Qual é a mais "forte"e a mais "fraca"dentre todas. No sentido que é possível obter uma através da outra mediante, algumas vezes, algum argumento adicional. Podemos citar, por exemplo, o espaço ter medida finita, ou ainda, que haver uma dominação para as sequências envolvidas. Algumas desta relações podem ser vista diretamente pela maneira como são definidas, tais como

$$\text{convergência uniforme} \quad \Rightarrow \quad \text{convergência pontual} \quad \Rightarrow \quad \text{convergência q.t.p}$$

ou

$$\text{convergência na norma} \quad \Rightarrow \quad \text{convergência fraca.}$$

Outras destas relações, porém, podem ser vistas por meio de teoremas. Sendo alguns de forma simples, enquanto outros de maneira mais sofisticada.

Teorema 26 ***(Imersões contínuas)*** *Sejam $|\Omega| < \infty$ e $1 \leqslant p < q < \infty$. Então, $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ contínuamente. Isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$||u||_q \leqslant C||u||_p.$$

Teorema 27 *Sejam $u_n \to u$ em $L^\infty(\Omega)$ e $|\Omega| < \infty$. Então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ para todo $1 < p < \infty$.*

Teorema 28 *Sejam $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então $u_n \to u$ em medida.*

Como já vimos nas preliminares, como consequência do teorema de Riesz-Fischer, temos que

Teorema 29 *Sejam $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ q.t.p.*

As recíprocas, em ambos os casos, só serão verdadeiras quando possuirmos a hipótese de dominação na sequência. Vemos que a convergência uniforme, ou em L^∞, é a forma mais forte de convergência. E a mais fraca é a convergência q.t.p. Apesar de representarem extremos diferentes, existe um teorema garantindo, sobre certas hipóteses, que pode-se obter convergência quase uniforme partindo de convergência q.t.p.

Teorema 30 ***(Severini-Egorov)*** *Sejam* (u_n) *uma sequência em* $\mathcal{M}$ *convergindo q.t.p para uma função* u *e* $|\Omega| < \infty$. *Então dado* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável* Ω_ε *tal que* $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon| < \varepsilon$ *e* $u_n \to u$ *em* $L^\infty(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$.

Demonstração:

Dados dois números naturais n, k definimos os subconjuntos $E_{n,k} \subset E$ da seguinte maneira

$$E_{k,n} = \bigcap_{i \geqslant n} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}\}.$$

Observe que essa sequência de subconjuntos é monótona encaixada, ou seja,

$$E_{1,k} \subset E_{2,k} \ldots \subset E_{n,k} \ldots$$

Portanto, utilizando as propriedades conhecidas sobre medida, temos que

$$\mu(\bigcup_{n \geqslant 1} E_{k,n}) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_{k,n}).$$

Além disso, como (u_n) converge para u quase sempre, segue que

$$\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,k}) = 0.$$

Agora fixado $\delta > 0$, sabendo que $|\Omega| < \infty$, existe para cada $k \geqslant 1$ um número natural n_k tal que

$$\mu(E_{k,n_k}) \geqslant \mu(E) - 2^{-k}\delta.$$

Definindo, $F = \bigcap_{k \geqslant 1} E_{k,n_k}$ chegamos que

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E \setminus \bigcap_{k \geqslant 1} E_{k,n_k}) \sum_{k=1}^{\infty} \delta 2^{-k} = \delta.$$

Finalmente, para mostrar que de fato, u_n converge uniformemente para u em F, escolhemos $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$ e tomando $n = n_k$ concluímos o resultado, uma vez que $F \subset E_{k,n_k}$. ■

CAPÍTULO 2

LEMA DE BREZIS-LIEB

O Lema do Brezis-Lieb é uma versão melhorada do Lema de Fatou. Pois, com este resultado obtemos uma melhor estimativa para convergência na p-norma de uma dada sequência de funções.

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida, mostraremos que se (u_n) é uma sequência uniformente limitada em $L^p(X)$, e, se $u_n \to u$ para quase todo ponto. Então,

$$\lim_{n\to\infty}\{||u_n||_p^p - ||u_n - u||_p^p\} = ||u||_p^p$$

para todo $0 < p < \infty$. Consideramos (u_n) uma sequência de funções integráveis definidas em um espaço de medida $(X, \Sigma, d\mu)$ convergindo q.t.p para uma função u. Se $(u_n) \in L^p(X)$ para todo n, é natural nos indagarmos se o limite desta sequência também pertence a $L^p(X)$, e neste caso, se

$$||u||_p = \lim_{n\to\infty} ||u_n||_p.$$

Embora a resposta para a pergunta anterior nem sempre seja afirmativa, pedindo que $(u_n) \subset L^p(X)$ seja uniformimente limitada, podemos utilizar o Lema de Fatou e garantir que $u \in L^p(X)$, pois

$$||u||_p \leqslant \liminf ||u_n||_p \leqslant C,$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de n. Nosso objetivo neste capítulo é mostrar o que mais pode ser dito sobre a $||u||_p$. Mostraremos que ao subtraírmos o termo $||u_n - u||_p^p$, obtemos a seguinte igualdade

$$\lim_{n\to\infty}\{||u_n||_p^p - ||u_n - u||_p^p\} = ||u||_p^p.$$

Na verdade, mostraremos um pouco mais, veremos que dadas uma sequência (u_n) convergindo q.t.p para um função u e um funcional contínuo $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $j(0) = 0$, teremos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X [j(u_n) - j(u_n - u)] = \int_X j(u), \tag{2.1}$$

desde que o funcional $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a sequência (u_n) satizfaçam às condições adequadas.

2.1 Caso Geral

Mostraremos quais são as condições que devemos impor sobre o funcional e sobre a sequência a fim de garantir que a igualdade em (2.1) é válida. Mais à frente, veremos que essas hipóteses são inspiradas no caso L^p.

Teorema 31 *Sejam* $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funcional contínuo com* $j(0) = 0$, $(X, \Sigma, d\mu)$ *um espaç de medida e* $u_n : X \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções mensuráveis, satisfazendo às condições:*

(f1) $j(u) \in L^1(X) \Leftrightarrow \displaystyle\int_X j(u)d\mu(x) < \infty$;

(f2) Existem duas funções contínuas não-negativas φ_ε e ψ_ε tais que

$$|j(a+b) - j(a)| \leq \varepsilon\varphi_\varepsilon(a) + \psi_\varepsilon(b) \tag{2.2}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$;

(s1) $u_n \to u$ q.t.p, ou equivalentemente, $u_n = u + v_n$ com $v_n \to 0$ q.t.p;

(s2) Existe uma constante $C > 0$ não dependendo nem de n nem de ε tal que

$$\int_X \varphi_\varepsilon(v_n)d\mu(x) \leq C < \infty;$$

(s3)

$$\int_X \psi_\varepsilon(u(x))d\mu(x) < \infty$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Sobre essas hipóteses concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |j(u_n) - j(v_n) - j(u)|d\mu = 0 \tag{2.3}$$

Observação 1 *Antes de fazer a demonstração deste fato, vejamos algumas observações importantes*

(i) *Não estamos assumindo que $j(u_n)$ ou $j(v_n)$ estão separadamente em $L^1(X)$;*

(ii) *Note que a convergência obtida em (2.3) é na topologia forte de $L^1(X)$, e é um pouco mais forte do que tratamos em (2.1). De fato, note que*

$$\left|\int_X [j(u_n) - j(v_n)]d\mu - \int_X j(u)d\mu\right| \leqslant \int_X |j(u_n) - j(v_n) - j(u)|d\mu$$

E tomando o limite quando $n \to \infty$, e obtemos

$$\left|\int_X [j(u_n) - j(v_n)]d\mu - \int_X j(u)d\mu\right| \leqslant \int_X |j(u_n) - j(v_n) - j(u)|d\mu \to 0;$$

(iii) *Pensando heuristicamente, a igualdade em (2.1) nos diz que para um $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, a integral $\int j(u + v_n)$ decompõe-se em duas partes, $\int j(u)$ e $\int j(v_n)$.*

Demonstração: Fixando $\varepsilon > 0$, definimos

$$W_{\varepsilon,n}(x) = \left[|j(u_n(x)) - j(v_n(x)) - j(u(x))| - \varepsilon\varphi(v_n(x))\right]^+, \tag{2.4}$$

onde $[a]^+ = max(a, 0)$. Daí, fazendo $n \to \infty$ em (2.4) temos que, pela continuidade de j e pela hipótese (s1), tanto $\{j(v_n(x))\}$ como $\{j(u_n(x)) - j(u)\}$ convergem a zero q.t.p. Portanto, $W_{\varepsilon,n}(x) \to 0$ q.t.p, por outro lado, temos o seguinte

$$|j(u_n) - j(v_n) - j(u)| \leq |j(u_n) - j(v_n)| + |j(u)|$$

e aplicando a desigualdade (f2), segue que

$$|j(u_n) - j(v_n) - j(u)| \leq \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n) + \psi_\varepsilon(u) + |j(u)|.$$

E uma vez que $[a]_+ \leq [b]_+$, sempre que $a \leq b$, concluímos que

$$W_{\varepsilon,n} \leq \psi_\varepsilon(u) + |j(u)|.$$

Pelas hipóteses (f1) e (s3), temos que ambas $j(u)$ e $\psi_\varepsilon(u)$ estão em $L^1(X)$. Logo, $\psi_\varepsilon(u) + |j(u)| \in L^1(X)$, e, por convergência dominada, concluímos que

$$\int_X W_{\varepsilon,n} d\mu \to 0$$

quando $n \to \infty$. Observe que $a \leq (a-b)_+ + b$, implicando que

$$|j(u_n) - j(v_n) - j(u)| \leq W_{\varepsilon,n} + \varepsilon\varphi_\varepsilon(g_n).$$

Assim,

$$I_n \equiv \int_X |j(u_n) - j(v_n) - j(u)| d\mu \leq \int_X W_{\varepsilon,n} + \varepsilon\varphi_\varepsilon(g_n) d\mu.$$

Finalmente, pela hipótese (s2) e pelo que foi visto anteriormente, temos que

$$\limsup_{n\to\infty} I_n \leq \varepsilon C.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |j(u_n) - j(v_n) - j(u)| d\mu = 0.$$

■

2.2 Caso $L^p(\Omega)$

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $(X, \Sigma, d\mu) = (\Omega, \beta(\Omega), dx)$ onde $\beta(\Omega)$ são os borelianos de Ω e dx é medida de Lebesgue. Sabemos do Lema de Fatou que $u \in L^P(\Omega)$. Observe que pode ocorrer $\Omega = \mathbb{R}^N$. No entanto, o caso $p = \infty$ é mais delicado, devido ao fato de $L^\infty(\Omega)$ não ser reflexivo. Não trataremos deste caso neste trabalho. Para tanto faremos uso da seguinte desigualdade

$$|a+b|^p \leqslant \begin{cases} (1+\varepsilon)|a|^p + (1+1/\varepsilon)^{p-1}|b|^p, & \text{se } \ 1 < p < \infty \\ |a|^p + |b|^p, & \text{se } \ 0 < p \leqslant 1. \end{cases}$$

Teorema 32 *Sejam $0 < p < \infty$ e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ uma sequência uniformemente limitada com $u_n \to u$ q.t.p. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \{||u_n||_p^p - ||u_n - u||_p^p\} = ||u||_p^p \tag{2.5}$$

Divideremos a demonstração deste resultado em dois casos

2.2.1 Caso $0 < p \leqslant 1$

Este caso é o mais simples, e isto se deve ao fato da função $t \mapsto |t|^p$ ser concava, o qual podemos verificar com os seguinte resultados

Lema 1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b > 0$ e $0 < p \leq 1$. Então,*

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$ a conclusão é trivial. Sendo assim, suponhamos que $b \neq 0$. Dividindo a desigualdade por b^p, temos o seguinte

$$\left(\frac{a}{b} + 1\right)^p \leqslant \left(\frac{a}{b}\right) + 1, .$$

Tomando $x = \dfrac{a}{b}$, nosso problema resume-se a estudar a desigualdade

$$(x+1)^p \leqslant x^p + 1, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Ou ainda, definindo $\phi(x) = (x+1)^p - x^p + 1$, precisamos verificar que $\phi(x) \leqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, observe que $\phi(0) = 0$, além disso,

$$\phi'(x) = p[(x+1)^{p-1} - x^{p-1}] \leqslant 0, \quad \forall x \geqslant 0$$

e

$$\phi''(x) = p(p-1)[(x+1)^{p-2} - x^{p-2}] \geqslant 0, \quad \forall x \geqslant 0$$

Ou seja, $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é descrente e concava em seu domínio, implicando que

$$\phi(x) \leqslant \phi(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

E desde que, $\phi(0) = 0$, concluímos que $\phi(x) \leqslant 0$ para todo $x \geqslant 0$. ■

Lema 2 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 < p \leqslant 1$. Então,*

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p$$

Demonstração: Temos que

$$|a+b|^p \leqslant (|a| + |b|)^p$$

Por outro lado, aplicando o lema anterior, segue que

$$(|a| + |b|)^p \leqslant |a|^p + |b|^p.$$

■

Lema 3 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então,*

$$||a|^p - |a-b|^p| \leq |b|^p$$

Demonstração: Quando $a = 0$ ou $b = 0$ a conclusão é trivial. Assim, suponhamos que $b \neq 0$, daí, divindo ambos os menbros por $|b|^p$, temos que

$$\left|\frac{|a|^p - |a-b|^p}{|b|^p}\right| = \left|\left|\frac{a}{b}\right|^p - \left|\frac{a}{b} - 1\right|^p\right| \leqslant 1,$$

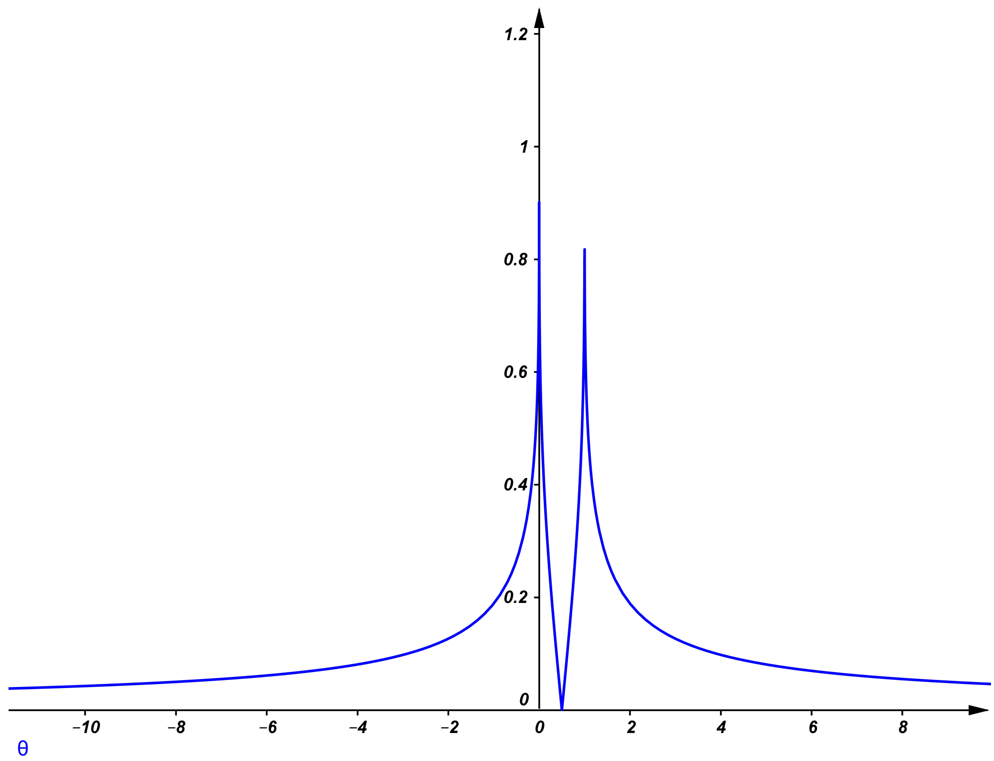


Figura 2.1: $|\theta(x)| = ||x|^{1/4} - |x-1|^{1/4}|$

Definindo $x = a/b$ e a função $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(x) = |x|^p - |x-1|^p$, nosso problema resume-se a mostrar que $|\theta(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que $\theta(0) = \theta(1) = 1$ é o valor máximo atingido, pois $\lim\limits_{|x|\to\infty} |\theta(x)| = 0$, desde que $0 < p \leq 1$. Vejamos um esboço do comportamento do gráfico quando $p = \frac{1}{4}$.

E concluímos, $||a|^p - |a-b|^p| \leq |b|^p$. ∎

Finalmente, utilizando o lema 3 com $a = u_n$ e $b = u$, temos a seguinte desigualdade

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p| \leq |u|^p$$

Isto nos diz que se admitimos $u \in L^p$ não precisamos da hipótese que (u_n) é uniformemente limitada, pois convergência dominada garante que a igualdade em (2.5) é obtida.

2.2.2 Retornando ao Caso Geral

Para provar o resultado no caso $1 \leqslant p < \infty$, aplicaremos o que foi obtido no caso geral para o funcional $j(t) = |t|^p$, ou seja, precisamos verficar que este funcional satisfaz às condições do enunciado. Em primeiro lugar, temos que $j(u) = |u|^p$. E, desde que $u \in L^p(\Omega)$, temos que $j(u) \in L^1(\Omega)$, logo a condição (f1) é satisfeita. Verifiquemos também que j satisfaz a condição de crescimento pedida na hipótese (f2). Com efeito, o resultado a seguir é uma versão corrigida da desigualdade obtida no lema 3 .

Teorema 33 *Sejam $\varepsilon > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Então*

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon)|b|^p, \tag{2.6}$$

para todo $1 < p < \infty$.

Demonstração:

Observe que a desigualdade anterior é equivalente a mostrar que

$$||x+1|^p - |x|^p| \leq \varepsilon |x|^p + C(\varepsilon), \tag{2.7}$$

mas como,

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{||x+1|^p - |x|^p}{|x|^p|} = \lim_{|x| \to \infty} \left|1 + \frac{1}{x}\right|^p - 1 = 0.$$

Assim existe $R = R(\varepsilon) > 0$, tal que, se $|x| > R$, então

$$|x+1|^p - |x|^p \leq \varepsilon |x|^p. \tag{2.8}$$

Além disso, a função $|\theta(x)| = ||x+1|^p - |x|^p|$ é contínua na bola $B_{R(\varepsilon)}(0)$, daí, por compacidade, obtemos que

$$||x+1|^p - |x|^p| \leq C(\varepsilon). \tag{2.9}$$

Somando o que foi obtido em (2.8) e (2.9), segue que

$$||x+1|^p - |x|^p| \leq \varepsilon |x|^p + C(\varepsilon). \tag{2.10}$$

Finalmente, fazendo $x = \frac{a}{b}$ em (2.10), e utilizando homogenidade encontramos a desigualdade em (2.6). Para concluir, devemos colocar esta sequência e este funcional nas condições requeridas pelo teorema anterior, para tanto, tomamos

$$\varphi_\varepsilon(x) = |x|^p \text{ e } \psi_\varepsilon(x) = C(\varepsilon)|x|^p.$$

Seja, também por (s1), a sequência $u_n = u + v_n$, temos que

$$\int_\Omega |v_n|^p dx = ||v_n||_p^p \leq ||u_n||_p^p + ||u||_p^p.$$

lembrando que existe $K > 0$ tal que $||u_n|| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$ concluímos que $||v_n|| \leq \hat{K}$ onde $\hat{K}$ não depende nem n, nem de ε. Logo, a condição (s2) também é satisfeita. Desse modo,

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon(u)dx = \int_\Omega C|u(x)|^p dx \leq C||u||_p^p$$

Segue que (s3) também é cumprida. ■

O que ocorre, em fato, é que a função $|\theta|$ é controlada pela função $|x|^p$ para valores grandes de $|x|$. Daí, definindo $\Theta(x) = \frac{\theta(x)}{|x|^p}$, temos o limite

$$\lim_{|x|\to\infty} \Theta(x) = 0$$

Como observamos nas figuras abaixo.

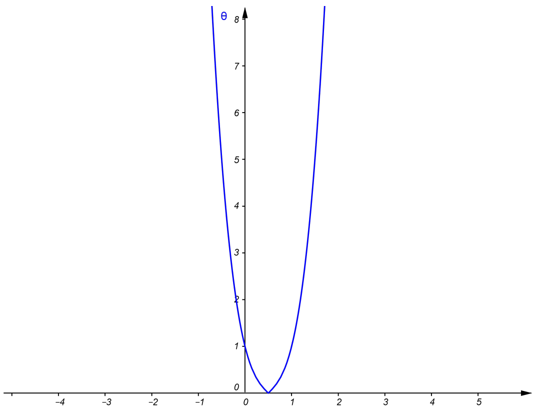


Figura 2.2: $\theta(x) = ||x|^4 - |x-1|^4|$

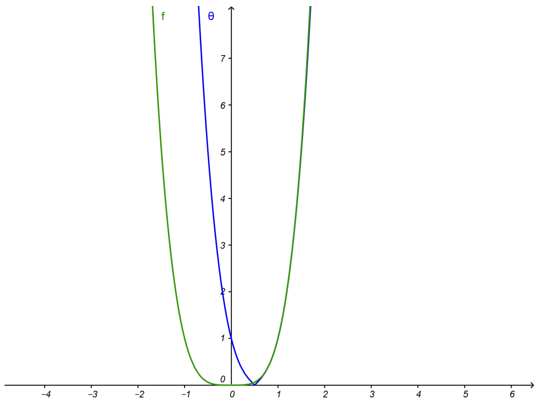


Figura 2.3: $|\theta(x)|$ e $|x|^4$

Em outras palavras, para valores grandes de x podemos escrever $\Theta(x) = \varepsilon + \frac{C(\varepsilon)}{|x|^p}$

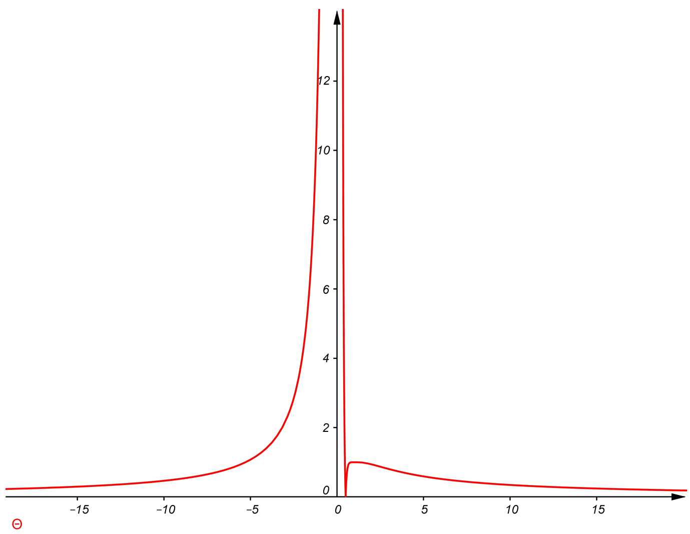


Figura 2.4: $\Theta(x)$

CAPÍTULO 3

CONVERGÊNCIA FRACA EM L^P

Neste capítulo, veremos a relação entre o resultado apresentado por Brezis e Lieb e o comportamento da convergência fraca sob a acão de uma classe de operadores não-lineares. Esta relação é de fato importante nas aplicações que aparecem em diversas áreas, mais especificamente, no Cálculo das Variações.

Em verdade, mostraremos que dada uma sequência (u_n) convergindo fracamente para u podemos garantir que

$$j(u_n) = j(u) + o(1)$$

para n suficientemente grande. Além disso, impondo condições adequadas sobre esse funcional j, podemos garantir a convergência fraca da sequêcnia $(j(u_n))$. Em outras palavras, gostaríamos de garantiar que o operador $u \mapsto j(u)$ fosse sequencialmente fracamente contínuo quando definido entre espaços de Lebesgue.

Lembremos que o foi obtido no capítulo 2, foi a partir de uma desigualdade sobre p-norma. Usaremos idéias similares e estudaremos este problema para uma classe de operadores, os operadores de Nemýstkii.

3.1 Convergência Fraca

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Dado $1 < p < \infty$, seja p' seu expoente conjugado, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Uma sequência (u_n) em $L^p(\Omega)$ *converge fracamentemente* para $u \in L^p(\Omega)$, neste caso denotaremos $u_n \rightharpoonup u$, se

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \quad \forall \varphi \in (L^p(\Omega))'.$$

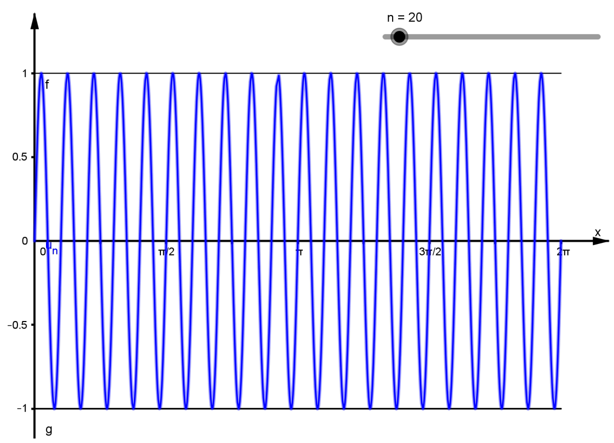
De acordo com o exposto nas preliminares, utilizando o Teorema de Representação de Riesz, temos que esta condição é equivalente a

$$\int_\Omega u_n v \to \int_\Omega uv \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega).$$

Teorema 34 ***(Lema de Riemann-Lebesgue)*** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função em $L^1((0, 2\pi))$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{sen} nx dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = 0.$$

Exemplo: Sejam $\Omega = (0, 2\pi)$ e $1 \leqslant p < \infty$, então a sequência $u_n(x) = \mathrm{sen}(nx)$ converge fraco para $u(x) \equiv 0$ em $L^p(0, 2\pi)$, como consequência do resultado acima.



Apesar disso, $\|u_n\|_p = C(p)$, ou seja, não há convergência forte. E

$$||u||_{L^p(0,2\pi)} < \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(0,2\pi)}.$$

Agora, lembremos que pelo Lema de Fatou

$$\|u\|_{L^p(0,2\pi)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(0,2\pi)}.$$

Quando ocorre $\|u_n - u\|_p \to 0$, temos trivialmente a igualdade

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

Porém, veremos que apenas sob hipótese de convergência fraca esta igualdade não será satisfeita.

Vejamos agora como podemos relacionar o fato de um sequência convergir fracamente em $L^p(\Omega)$ e o fato desta sequência ser uniformemente limitada.

Teorema 35 *Sejam $1 < p < \infty$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Então, (u_n) é uniformemente limitada. Além disso,*

$$||u||_p \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||u_n||_p$$

Temos também a recíproca deste resultado

Teorema 36 *Sejam $1 < p < \infty$ e (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ uniformemente limitada. Então existe uma subsequência, que também denotaremos por (u_n), e uma função $u \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } L^p(\Omega)$$

A mensagem passada pelo resultado anterior é que a bola fechada $B(0, C) \subset L^p(\Omega)$ é *compacta* na topologia fraca. Este resultado é conhecido como *Teorema de Kakutani* e só é válido porque $L^p(\Omega)$ é reflexivo. Isto explica o fato de deixarmos os casos $p = 1$ e $p = \infty$ de fora da nossa discurssão. Em verdade, este resultado caracteriza todos os espaços reflexivos.

3.1.1 Relação entre Convergência Fraca e Convergência q.t.p

No capítulo 1, apresentamos variadas maneiras de definir convergência de sequências de funções. Sendo algumas em espaço normados e outras em espaços de medida. Definimos convergência q.t.p e também a convergência fraca. Gostaríamos de comparar esses tipos de convergência. Quando Ω tem medida finita, temos o seguinte

Teorema 37 *Sejam $|\Omega| < \infty$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$. Então, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ $\forall x \in \Omega$ q.t.p.*

A recíproca, segue do lema de Fatou, e só é verdadeira quando as normas são uniformemente limitadas.

Teorema 38 *Sejam (u_n) um sequência em $L^p(\Omega)$ e $1 < p < \infty$. Se $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω ou em medida para u, e $||u_n||_p \leqslant C$ para todo n então, $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$.*

Quando a medida de Ω não é finita, não podemos concluir o resultado, mas podemos garantir que os limites coincidem q.t.p. Isto é uma consequência do Lema de Du-bois Reymond.

Teorema 39 *Sejam $1 < p < \infty$, $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$ e $u_n \to v$ q.t.p em Ω. Então, $u = v$ q.t.p em Ω.*

3.2 Alguns Comportamentos Típicos de Sequências fracamente Convergentes

Em posse da definição de convergência fraca em L^p, é natural nos indagarmos se uma sequência (u_n) convergindo fracamente a u também converge forte. Obviamente, este resultado não é verdadeiro em geral. Assim gostaríamos de classificar o comportamente de (u_n) que faz com que a convergência forte não ocorra. Nesta seção, mostraremos duas situações características.

3.2.1 Oscilações

Primeiramente, trataremos do problema da *oscilação*, isto é, sequências de funções que tendem a oscilar muito rapidamente gerarão problemas de convergência, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Seja $u_n(x) = 1 + \sin(nx)$ com $x \in (0, 2\pi)$ e $n = 1, 2, ...$ Observe que $u_n \rightharpoonup u \equiv 1$ em $L^p(0, 2\pi)$ para todo $1 \leqslant p < \infty$ Porém, temos que

$$\int_0^{2\pi} |u_n(x)|dx = \int_0^{2\pi} |u(x)|dx = 2\pi,$$

para todo n. Porém,

$$\int_0^{2\pi} |u_n(x) - u(x)|dx = \int_0^{2\pi} |\text{sen}(x)|dx = 4.$$

Isto é, (u_n) converge fracamente para u em L^1, embora não ocorra convergência forte.

3.2.2 Concentrações

Observe que no caso da oscilação não possuíamos convergência q.t.p da sequência (u_n). Essa hipótese adicional impede que a sequência oscile, mas, não impede sua concentração. Este é outro tipo de problema que pode ocorrer com a convergência fraca, conhecido como *concentração*. Para entender melhor esse fenômeno, vejamos o seguinte resultado.

Teorema 40 (Radon-Riesz) *Dados* $1 < p < \infty$ *e* $u_n \rightharpoonup u$ *tal que* $||u_n||_p \to ||u||_p$. *Então,* $u_n \to u$ *em* $L^p(\Omega)$.

Decorre do fato de L^p ser uniformemente convexo. Em particular, para $p = 2$, a demonstração e bem simples

Teorema 41 *Seja* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^2(\Omega)$ *e* $||u_n||_2 \to ||u||_2$. *Então* $||u_n - u||_2 \to 0$

Demonstração: Temos que,

$$||u_n - u||_2^2 = \langle u_n - u, u_n - u\rangle = \int (u_n - u)(u_n - u) = \int |u_n|^2 - \int u_n u + \int |u|^2 \to 0$$

Desde que $\int |u_n|^2 \to \int |u|^2$ e $\int u_n u \to 2\int |u|^2$. ∎

Este resultado está dizendo que para que uma sequência que converge fracamente não convirja forte é necessário que haja um problema de convergência no funcional energia, especificamente, um problema de concentração. Vejamos no seguinte exemplo.

Exemplo: Sejam $\Omega = (-1, 1)$ e $u_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $u_n(x) = n^{\frac{1}{p}}\chi_{[-1/n,1/n]}$. Note que, $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^p(-1, 1)$, mas

$$||u_n||_p^p = \int_{-1}^{1} |u_n(x)|^p dx = \int_{-1}^{1} n\chi_{[-1/n,1/n]} dx = 2$$

Portanto, (u_n) não converge forte em $L^p(-1, 1)$ e o que acontece é que a essa sequência se concentra. Observe também que $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^q(-1, 1)$ para todo $1 \leqslant q < p$. Neste caso, também ocorre convergência forte. Pois

$$\int_{-1}^{1} |u_n|^q = n^{\frac{q}{p}-1} \to 0$$

desde que $\frac{q}{p} < 1$. Assim, essa sequência não se concentra.

3.2.3 Relação entre Convergência Fraca e Não-Linearidades

Sejam $A : L^p \to L^q$ um operador contínuo e $u_n \to u$ em L^p, então $Au_n \to Au$. Suponhamos que $u_n \rightharpoonup u$ em L^p, gostaríamos de afirmar que $Au_n \rightharpoonup Au$ em L^q. Porém, quando A é um operador não-linear, não podemos garantir tal convergência. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo: Considere $u_n(x) = \sin(nx)$ com $x \in (0, 2\pi)$ e $f(s) = s^2$, temos que,

$$u_n \rightharpoonup u \equiv 0$$

em $L^p(0, 2\pi)$ mas,

$$f(u_n) = \sin^2(nx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(nx)) \rightharpoonup \frac{1}{2} \neq 0$$

Assim, vemos que o problema de lidar com convergência fraca é que a mesma não é estável sob a ação de operados contínuos não-lineares.

3.3 Operador de Nemýstkii

Como observamos na seção passada, limites fracos não são preservados sob a ação de operados não-lineares em geral. Sendo assim, nesta seção, estudaremos uma classe de operadores para qual esse problema pode ser contornado. Todas as demonstrações desta seção podem ser encontradas em [5].

Dado um operador não-linear $A : L^p \to L^q$, olharemos para o caso onde A pode ser escrito como um *operador integral*

$$Au = \int f(x, u)$$

onde f é uma função escolhida adequadamente.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *Carathéodory* e denotamos $f \in (C)$, se

(a) para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado a função $x \mapsto f(x, s)$ é Lebesgue-mensurável;

(b) para cada $x \in \Omega$ q.t.p a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Dada uma função de Carathéodory f e uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{M}$, podemos definir outra função igualmente mensurável, denotada por $N_f(u) = f(x(u(x)))$. Neste caso, faz sentido definir o operador $N_f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dado por $N_f(u) = f(\cdot, u(\cdot))$ que chamaremos de *Operador de Nemytskii* associado a f. Este operador possui propriedades interessantes. A primeira delas é que ele é *contínuo em medida*, desde que $|\Omega| < \infty$.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,s) = |s|^p$ é uma função de Carathéodory e $N_f : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ é seu operador de Nemýstkii.

Teorema 42 ***(Continuidade em medida)*** *Sejam (u_n) uma sequência em $\mathcal{M}$ convergindo em medida para uma função $u \in \mathcal{M}$ e $|\Omega| < \infty$. Então, $N_f(u_n)$ converge em medida para $N_f(u)$.*

3.3.1 Continuidade Forte do Operador de Nemýstkii

Em particular, estamos interessados no caso que o operador de Nemytskii atua entre espaços de Lesbesgue L^p e L^q. Neste caso, podemos relacionar a *continuidade forte* deste operador com uma desigualdade envolvendo condições de crescimento nas suas variáveis.

Teorema 43 *Seja $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e $1 \leqslant q < \infty$. Então, existe uma constante $c > 0$ e uma função $b(x) \in L^q_+(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leqslant c|s|^{p/q} + b(x). \tag{3.1}$$

Além disso, este operador é contínuo e limitado.

Este resultado é verdade mesmo quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ não possui medida finita, por exemplo, quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, e, é importante observarmos alguns pontos relacionados.

(i) O operador é *fortemente sequencialmente contínuo*, isto é, se $u_n \to u$ em L^p, então $N_f(u_n) \to N_f(u)$ em L^q;

(ii) A limitação a qual nos referimos é no sentido que o operador leva conjuntos limitados de L^p em conjuntos limitados de L^q.

3.3.2 Outro Tipo de Continuidade

Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $(u_n) \subset L^p$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$. Nesta seção, estabeleceremos condição sobre p e f sob as quais poderemos garantir que

$$N_f(u_n) \rightharpoonup N_f(u).$$

Em outros termos, estamos estudando a continuidade sequencial fraca do Operador de Nemýstkii. Note que obter continuidade fraca é mais difícil uma vez que a topologia fraca possui menos abertos e consequentemente menos funções contínuas. Vejamos com um contra-exemplo que, em geral, este tipo de continuidade fraca não pode ser obtida.

Exemplo: Sejam $\Omega = (0, \frac{\pi}{2})$ e $u_n(x) = \sin nx$, pelo lema de Riemann-Lebesgue, temos que $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^2(0, \frac{\pi}{2})$ Definimos $f : (0, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, s) = s^+$. Agora, vejamos que

$$\langle 1, N_f(u_n) \rangle_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot f(x, u_n(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin nx)^+ \tag{3.2}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = nx$ na integral anterior, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin nx)^+ = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^+ dy \tag{3.3}$$

Finalmente, observe que a função $g(y) = (\sin y)^+$ é nula em intervalos da forma $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ com $k = 1, 2, ..$, assim, definimos s como o número de intervalos da forma $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, e temos a seguinte relação $n = 4s + 2$. Portanto

$$\frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^+ dy = \frac{1}{4s+2} \sum_{k=0}^{s} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y dy. \tag{3.4}$$

Tomando o limite superior quando $n \to \infty$, temos que $s \to \infty$, e segue que

$$\limsup_{n\to\infty} < 1, N_f(u_n) >_2 \geqslant \lim_{s\to\infty} \frac{1}{4s+2} \sum_{k=0}^{s} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin y dy = \lim_{s\to\infty} \frac{2s}{4s+2} = \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Logo, a sequência $N_f(u_n)$ não converge fraco em $L^2(0, \frac{\pi}{2})$.

Como já vimos anteriormente, o problema desta sequência (u_n) está no seu comportamento oscilatório, sendo assim, tentaremos alguma forma de corrigir este problema. Para isso, além de pedir que $u_n \rightharpoonup u$, pediremos também que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, excluíndo assim o problema com a oscilação da sequência.

Baseados nisto formulamos o seguinte problema: **Dada uma sequência (u_n) convergindo fracamente e q.t.p para u em L^p, sob que condições podemos garantir que $N_f(u_n)$ converge fracamente para $N_f(u)$ em L^q ?**, diremos que esta sequência (u_n) é *q.t.p fracamente sequencialmente convergente* e que, neste caso, N_f será *q.t.p fracamente sequencialmente contínuo.*

No caso $q = 1$ o problema é negativamente respondido, vejamos isto com o seguinte exemplo.

Exemplo: Sejam $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com $0 \in \Omega$. Definimos $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, s) = c|s|^p$, onde $c \in \mathbb{R} \setminus 0$. O operador de Nemýstkii $N_f : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$. Assim, consideremos $u_n = |B_n|^{-1/p}\chi_{B_n}$, onde $B_n = \{x \in \Omega : |x| < 1/n\}$. Temos que $u_n \to 0$ q.t.p em Ω e $||u_n||_p < 1$, e daí, por reflexividade, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup 0$.

Definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = \frac{x}{c}$. Seja $\Psi : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $\Psi(\xi) = \int_\Omega \psi(\xi(x))dx$, concluímos que

$$1 = |B_n| \int_\Omega \chi_{B_n}(x)dx = \int_\Omega \psi(N_f(u_n))(x)dx = \Psi(N_f(u_n)) \nrightarrow 0$$

Logo, não é verdade que $N_f(u_n) \rightharpoonup 0$ em $L^1(\Omega)$.

De fato, o que ocorre é que apesar de excluirmos o problema de oscilação pedindo a convergência q.t.p da sequência, não excluímos o problema de concetração de (u_n), como no exemplo anterior. Para os outros valores de $1 < q < \infty$ e $1 \leqslant p < \infty$ o resultado é verdadeiro, assim, temos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 44 *Seja $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ com $1 < q < \infty$ e $1 \leqslant p < \infty$. Então, o operador N_f é q.t.p fracamente sequencialmente contínuo.*

Demonstração:

Seja (u_n) em $L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ e $u_n(x) \to v(x)$ q.t.p em Ω, então $u(x) = v(x)$ q.t.p em Ω. Além disso, (u_n) é uniformemente limitada e pelo teorema a sequência $(N_f(u_n))$ é limitada em $L^q(\Omega)$ e sendo este espaço é reflexivo existe uma subsequência, que também denotaremos por $(N_f(u_n))$, tal que $(N_f(u_n)) \rightharpoonup v$. Por outro lado, é fácil ver que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ q.t.p em Ω.

Precisamos verificar que $N_f(u) = v$ q.t.p. De fato, como Ω é σ-finito, existe uma famĺia $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos mensuráveis tais que

(i) $\mu(\Omega_j) < +\infty$ para todo $j \geqslant 1$;

(ii) $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Fixando Ω_j, pelo teorema de Ergorov, dado um $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_j$ com $\mu(\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ em $L^\infty(\Omega_j \setminus \Omega_\varepsilon)$, e desde que $L^\infty(\Omega_j \setminus \Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^q(\Omega_j \setminus \Omega_\varepsilon)$ continuamente, obtemos que $N_f(u_n) \to N_f(u)$ em $L^q(\Omega_j \setminus \Omega_\varepsilon)$. Portanto, $N_f(u) = v$ em $\Omega_j \setminus \Omega_\varepsilon$. Logo, o conjunto $A_j = \{x \in \Omega : N_f(u) \neq v(x)\}$ tem medida zero, desde $A_j \subset A_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Finalmente, definindo $A = \{x \in \Omega : N_f(u) \neq v\}$, temos que

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Como $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j \geq 1$, concluímos que $\mu(A)$. ∎

3.3.3 Uma Nova Abordagem para o Lema de Brezis-Lieb

No capítulo anterior apresentamos o Lema de Brezis-Lieb. Nossso objetivo nesta seção é apresentar uma demonstração alternativa para este resultado, usando os argumentos desenvolvidos ao longo do capítulo.

Teorema 45 (Brezis-Lieb) *Sejam* $0 < p < \infty$ *e* (u_n) *uma sequência uniformemente limitada em* L^p *convergindo q.t.p para* u*. Então*

$$\lim_{n\to\infty}(||u_n||_p^p - ||u_n - u||_p^p) = ||u||_p^p. \tag{3.6}$$

Tal resultado pode ser demonstrado utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Nesta seção, todavia, temos como objetivo apresentar uma nova abordagem baseada no Teorema 44, mostrando, assim, o real motivo para que este fenômeno ocorra.

Exemplo: Por exemplo, fazendo $p = 2$ em (3.6), chegamos em

$$\lim_{n\to\infty}(||u_n||_2^2 - ||u_n - u||_2^2) = ||u||_2^2.$$

que é equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}(\int |u_n|^2 - \int |u_n - u|^2) = \int |u|^2.$$

Desenvolvendo $|u_n - u|^2$, concluímos

$$\lim_{n\to\infty}(\int |u_n|^2 - \int |u_n - u|^2) = -2\int u_n u + \int |u|^2 = \int |u|^2$$

desde que, $u_n \rightharpoonup u$ e $\int u_n u \to \int |u|^2$. Portanto, a igualdade é válida.

Uma segunda situação é quando $p = 2m$ é um número par qualquer, nesta situação, podemos usar o binômio de Newton e temos que

$$\lim_{n\to\infty}(\int |u_n|^{2m} - \int |u_n - u|^{2m}) = \int -\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m}{i}u_n^{2m-i}\cdot(-1)^i u^i \to \int |u|^{2m},$$

pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{2m}\binom{2m}{i}(-1)^i = -1$ e por continuidade fraca, $u_n^{2m-i} \rightharpoonup u^{2m-i}$ em $L^{i'}(\Omega)$.

Observe que a chave principal para efetividade destes cálculos foi que a maior potência do desenvolvimento binômial desaparece, e para os termos de menor expoente podemos aplicar o resultado obtido. Para tratar do caso geral, novamente precisaremos de uma desigualdade envolvendo números reais.

Teorema 46 *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$. *Então, dado* $\varepsilon > 0$, *existe uma constante* $C(\varepsilon) > 0$ *e uma função* $\delta(\varepsilon) \to 0$, *quando* $\varepsilon \to 0$ *tal que*

$$||a|^p - |a-b|^p - |b|^p| \leqslant C(\varepsilon)|b||a-b|^{p-1} + \delta(\varepsilon)|b|^p. \tag{3.7}$$

Demonstração: Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{||x|^p - |x-1|^p - 1|}{|x-1|^{p-1}}.$$

Observe que

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \infty$, pela regra de L'Hôpistal; e

(ii) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi(x) = p$, utilizando o Teorema do Valor Médio.

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leqslant C(\varepsilon)|x-1|^{p-1}, \tag{3.8}$$

sempre que $|x-1| > \varepsilon$. Por outro lado, se $|x-1| \leqslant \varepsilon$, temos

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leqslant \varepsilon^p + \tilde{\delta}(\varepsilon), \tag{3.9}$$

onde $\tilde{\delta}(\varepsilon) = \sup\limits_{|t-1| \leqslant \varepsilon} ||t|^p - 1|$. Somando as desigualdades obtidas em (3.8) e (3.9), obtemos

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leqslant C(\varepsilon)|x-1|^{p-1} + \varepsilon^p + \delta(\varepsilon), \tag{3.10}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, dados números a e b, fazemos $x = \frac{a}{b}$, e concluímos o desejado. ∎

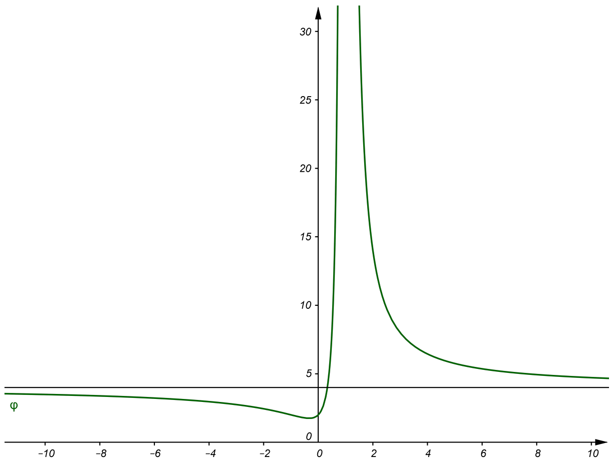


Figura 3.1: $\varphi(x) = \frac{||x|^p - |x-1|^p - 1|}{|x-1|^{p-1}}$ e $p = 4$

Concluindo, usaremos o que foi feito e provaremos o Lema de Brezis-Lieb, no caso $1 < p < \infty$.

Teorema 47 *Seja (u_n) em $L^p(\Omega)$ uniformemente limitada com $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| = 0. \tag{3.11}$$

Demonstração: Usando a desigualdade (3.7) com $a = u$ e $b = u_n$, temos

$$\int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| \leqslant C(\varepsilon) \int_\Omega |u||u_n - u|^{p-1}dx + \delta(\varepsilon) \int_\Omega |u|^p dx. \tag{3.12}$$

Definimos a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,s) = |s - u(x)|^{p-1}$, e temos que $N_f : L^p(\Omega) \to L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ está bem definido, e pelo Teorema 44, segue que $N_f(u_n) \rightharpoonup 0$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Portanto, quando $n \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$ em (3.12) obtemos a igualdade (3.6). ■

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES

No cálculo das variações, um problema frequente é mostrar que o mínimo ou máximo de um funcional é atingido. As maiores fonte de dificuldades, em geral, são as não-linearidades dos funcionais, somado ao fato que o máximo de informação que podemos obter sobre a sequência de funções é sua convergência fraca. Neste contexto, traremos um esboço de como o lema de Brezis-Lieb pode ser usado com este propósito. Veremos também como a continuidade fraca sequencial do operador de Nemýstkii poder ser usada para obter imersões de Sobolev compactas.

4.1 Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev

Consideremos $A : L^p \to L^q$ um operador linear limitado e K a melhor constante da desigualdade

$$||Af||_q \leq K||f||_p.$$

Gostaríamos de saber se existe $f \in L^p$ com $1 \leq p \leq q < \infty$, tal que a igualdade $||Af||_q = K||f||_p$ é atingida.

Este problema é motivado pela Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev em $L^p(\mathbb{R}^N)$, onde $A(x,y) = |x-y|^{-\lambda}$, com $0 < \lambda < N$, satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} = 1 + \frac{1}{q}$ é o núcleo da convolução, $A * |x|^{-\lambda} : L^p \longrightarrow L^q$.

Então, existe uma constante $K = K(p, N, \lambda)$ tal que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)dy}{|x-y|^\lambda} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{4.1}$$

Demonstração: Definindo $K = \sup\limits_{f \in L^p}\{R(f) : f \neq 0\}$ onde $R(f) = \frac{||Af||_q}{||f||_p}$, nosso problema fica resumido a mostrar que $R(f) = K$ para alguma $f \in L^p$. Vejamos um esboço de como este resultado foi provado, e para maiores detalhes consulte [10].

Suponnhamos que podemos encontrar uma sequência $\{f_n\}$ uniformemente limitada, satisfazendo:

(i) $R(f_n) \to K$

(ii) $f_n \to f$ q.t.p

(iii) $f \neq 0$

A dificuldade agora é verificar que $R(f) = K$, a qual podemos contornar utilizando o lema de Brezis-Lieb, mas para isso precisaremos da seguinte condição adicional

(iv) $Af_n \to Af$ q.t.p

Assim, temos que

$$K^p = \lim_{n\to\infty} \frac{||Af_n||_q^p}{||f_n||_p^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\{||Af||_q^q + ||Ag_n||_q^q\}^{p/q}}{\{||f||_p^p + ||g_n||_p^p\}}. \tag{4.2}$$

onde $f_n = f + g_n$ com $g_n \to 0$ q.t.p. Além disso, desde que $p/q \leq 1$ e $(a+b)^t \leq a^t + b^t$ para $a, b > 0$ e $t \leq 1$, unido a maneira como o operador foi definido, $||Ag_n||_q \leq K||g_n||_p$. Segue que

$$K^p \leq \frac{||Af||_q}{||f||_p}.$$

Assim, f é a maximizante procurada. ■

4.2 Imersões de Sobolev

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos o *espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ da seguinte maneira,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\}$$

Essas funções g_i são únicas q.t.p e isto nos permite definir $g_i = \partial_i u$ e denotá-la por i-ésima *derivada fraca* de u. Note que $W^{1,p}(\Omega) \leqslant L^p(\Omega)$. Este novo subespaço herda todas as propriedades funcionais de $L^p(\Omega)$, tal que reflexividade. Usaremos agora o resultado que obtemos sobre continuidade sequencial fraca para verificar que o operador inclusão $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ é um *operador compacto.*

Teorema 48 *Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\Omega)$ uniformemente limitada, então, existe uma subsequência de (u_n) que converge q.t.p fracamente em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Segue do fato que $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo e de sua imersão contínua em $L^p(\Omega)$, para maiores detalhes confira [3]). ■

Teorema 49 *Sejam $|\Omega| < \infty$ e (u_n) em $L^p(\Omega)$ uma sequência q.t.p fracamente convergente, com $1 < p < \infty$, então $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $1 \leqslant q < p$.*

Demonstração: Fixando $0 < \varepsilon < p - 1$, definimos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = |s|^{p-\varepsilon}$. O operador associado $N_f : L^p(\Omega) \to L^{p/p-\varepsilon}(\Omega)$ está bem definido e o Teorema 44 nos garante que $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ em $L^{p/p-\varepsilon}(\Omega)$. Isto nos diz que

$$\int_\Omega |u_n|^{p-\varepsilon} \to \int_\Omega |u|^{p-\varepsilon}.$$

Portanto, $u_n \to u$ q.t.p e $||u_n||_{p-\varepsilon} \to ||u||_{p-\varepsilon}$. Pelo Lema de Radon-Riesz, garantimos que $u_n \to u$ em $L^{p/p-\varepsilon}(\Omega)$. Além disso, desde que $|\Omega| < \infty$, temos que $L^{p-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ sempre que $1 \leqslant r \leqslant p-\varepsilon$. Logo $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ para todo $p \in [1, p-\varepsilon]$. Tomando $\varepsilon \to 0$ concluímos o desejado. $\blacksquare$

Em particular se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto de medida finita, segue dos Teorema 48 e Teorema 49 o seguinte

Teorema 50 *Sejam $|\Omega| < \infty$ e $1 < q < p$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ compactamente, sem necessidade de qualquer hipótese sobre a fronteira.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brezis, H., Lieb, E.: *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proceedings of American Mathematical society, 1983.

[2] Moreira, D., Teixeira, E.:*On the behaviour of weak convergence under nonlinearities and applications*, Proceedings of American Mathematical Society, 2004.

[3] Brezis, H.:*Analyse Functionnelle, Théorie e applications*, Masson, Paris, 1983.

[4] Saxe, K.:*Beginning Functional Analysis*, Springer, New York, 2002.

[5] De Figueiredo, D.:*Lectures on Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research, 1989.

[6] Lawrence, E.:*Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, Conference Board Mathematical Science, Chicago, 2011.

[7] Barttle, R.:*The elements of integration and Lebesgue measure*, Jonh Willeys & Songs Inc, Nova York, 1995.

[8] Willem, M.:*Minimax Theorems*, Birkhaeuser, 1997.

[9] De Figueiredo,D.:*Análise de Fourrier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2009.

[10] Lieb, E.:*Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Annals of Mathematics, 1983.

[11] Brezis, H., Niremberg, L.:*Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Communications on pure and applied Mathematics, 1983.

[12] Adimurthi, Tintarev, C.:*On the Brezis-Lieb lemma without pointwise convergence condition*, Nonlinear Differential Equations and Applications, 2015.