Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Bacharelado em Matemática

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais

por

Victor José Aráujo de Carvalho

Março/2014
João Pessoa - PB

Victor José Aráujo de Carvalho

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa – PB
Março de 2014

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

C331u Carvalho, Victor José Araújo de.
Uma introdução aos Espaços de Sobolev e aplicações à equações diferenciais / Victor José Araújo de Carvalho. - João Pessoa, 2014.
60 f.

Monografia (Bacharelado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba.
Orientador: Prof. Dr. João Marcos do Ó.

1. Equações diferenciais. 2. Espaços de Sobolev. 3. Espaços de Lebesgue. I. Título.

BS/CCEN CDU: 517.9(043.2)

Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Aprovado em: 31 / 04 / 2014

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Prof. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB

Elisandra F. Gloss de Moraes

____

Prof. Dr. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB

____

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB

AGRADECIMENTOS

- À Deus.

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó por ter orientado este trabalho, pelo conhecimento transmitido, por me motivar, transmitindo sua experiência de forma sábia e precisa.

- A Professora Flávia Jerônimo pela ajuda nos momentos de dificuldade, apoio, incentivo, confiança, e por ter acreditado em mim sempre.

- Aos professores da UFPB.

- A minha família, em especial a minha mãe, minha esposa Vanessa Furtado e meu irmão e grande amigo Vinicius, pela cobrança, carinho, apoio e ajuda em todas as decisões.

- Aos meus amigos do milênio, mestrado e doutorado, em especial à Ageu, Leon, Mariana, Rayssa Caju, Ricardo Pinheiro, Suelena, Theago e Zecas pela amizade e companheirismo .

- A pessoas que contribuiram de forma significante durante todo o trajeto da graduação até a presente conclusão, Alisson, Ailton e Eureni.

- A banca examinadora: Prof. Dr. Bruno Ribeiro e Prof. Dr. Everaldo Souto por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.

A minha mãe.

ABSTRACT

Our goal in this work is to present, in detail, an introduction to Sobolev spaces. Initially we will briefly review on Lebesgue spaces and some classical results of functional analysis, as the Riesz representation theorem and the theorem of Lax-Milgram, which will be crucial tools for the application of the theory constructed in solving problems in differential equations.

RESUMO

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar, de forma detalhada, uma introdução aos Espaços de Sobolev. Inicialmente faremos uma breve revisão sobre espaços de Lebesgue e alguns resultados clássicos de Análise Funcional, como o Teorema da Representação de Riesz e o Teorema de Lax-Milgram, que serão ferramentas de fundamental importância para a aplicação da teoria construída para a resolução de problemas em equações diferenciais.

SUMÁRIO

Introdução **ix**

Notações **1**

1 Resultados Preliminares **2**

1.1 Espaços de Lebesgue 2

1.2 Resultados importantes sobre integração 3

1.3 Definição e propriedades elementares dos espaços L^p 4

1.4 Reflexividade, Separabilidade e Dual de L^p 8

1.5 Convolução e Regularização 13

1.6 Critério de Compacidade em L^p 19

2 Espaços de Sobolev **20**

2.1 O Espaço de Sobolev $W^{m,p}$ 38

2.2 O espaço $W_0^{1,p}$ 38

2.3 O Dual de $W_0^{1,p}(I)$ 40

3 Aplicações **43**

3.1 O Princípio do Máximo 48

Referências Bibliográficas **50**

INTRODUÇÃO

Para motivar o estudo de espaços de Sobolev, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{em} \quad I = (a, b) \subset \mathbb{R} \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

com I limitado e f uma função contínua.

Uma solução clássica da equação acima é uma função $u \in \mathcal{C}^2(I) \cap \mathcal{C}(\bar{I})$ satisfazendo (1) que se anula na fronteira de I. O problema acima com hipótese de f não ser contínua, pode não admitir solução clássica. Portanto, se desejamos que (1) tenha solução é necessária a imposição de mais condições sobre f. Uma condição suficiente é que f seja Hölder contínua, por exemplo. Podemos tratar o problema (1) dentro do aparato das funções diferenciáveis com derivadas Hölder contínuas e obter a solução clássica.

A partir de 1950, desenvolveu-se uma outra forma de abordar tais problemas que é mais vantajosa por se aplicar a muitos outros problemas lineares e não lineares.

Neste novo método, formulamos um problema generalizado associado a (1), cuja característica desse novo problema é que uma solução clássica de (1) também é solução dele e a recíproca é parcialmente verdadeira, isto é, uma solução deste problema que possui propriedades adequadas de regularidade será solução de (1).

Para formular tal problema, necessitamos do conceito de espaço de Sobolev, que será o tema central deste trabaho.

Especificamente, no Capítulo 1 de resultados preliminares, estudamos diversos resultados de Análise Funcional e demos uma atenção principal, como não poderia deixar de ser, aos espaços L^p.

No Capitulo 2 estudamos os principais resultados no que se refere a teoria dos espaços de Sobolev, no entanto vale desde já salientar que trata-se de um trabalho de introdução a essa teoria, e sendo assim trabalhamos apenas com espaços de Sobolev cujo dominio do seu conjunto de funções é o conjunto dos números reais ou um subconjunto deste.

Por fim, no último Capítulo apresentamos algumas aplicações em equações diferenciais, assunto que, a princípio, foi o principal motivador do estudo de tais espaços.

Para a leitura deste texto consideramos requisitos indispensáveis apenas o conhecimento de um pouco de Análise Real e de Análise Funcional.

NOTAÇÕES

Notações Importantes: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto.

$\mathcal{C}(I) =$ é o espaço das funções contínuas em I
$\mathcal{C}^k(I) =$ é o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em I
$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_k \mathcal{C}^k$
$\mathcal{C}_c(I) =$ é o espaço das funções contínuas em I com suporte compacto
$\mathcal{C}_c^k(I) = \mathcal{C}^k(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$
$\mathcal{C}_c^k(I) = \mathcal{C}^\infty(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$.
Denotaremos por $C_c(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}); f(x) = 0, \forall x \in (\mathbb{R} - K), \text{ onde } K \text{ é compacto}\}$$

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Faremos a seguir uma breve revisão sobre importantes tópicos de teoria de medida e integração e análise funcional. Para maiores detalhes sobre teoria da medida indicaremos [4] e com respeito à análise funcional citamos os livros [1] e [3]

1.1 Espaços de Lebesgue

Sejam $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, isto é, Ω é um conjunto e

1. $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra em Ω, isto é, uma coleção de subconjuntos de Ω tal que:
   (a) $\emptyset \in \mathcal{M}$;
   (b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$;
   (c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, sempre que $A_n \in \mathcal{M}$ para todo n
2. $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ é uma função mensurável satisfazendo:
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$;
   (b) $\mu(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, sempre que (A_n) for uma família enumerável disjunta de membros de $\mathcal{M}$.

   Os membros de $\mathcal{M}$ são chamados de conjuntos mensuráveis e μ é dita uma medida em Ω.
3. Ω é σ-finito, isto é, existe uma família enumeravável (Ω_n) em $\mathcal{M}$ tal que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, e $\mu(\Omega_n) < \infty$, para todo n.

Os conjutos $E \in \mathcal{M}$ com a propriedade de $\mu(E) = 0$ são chamados conjuntos de medida nula. Diremos que uma propriedade é q.t.p. se tal propriedade vale em Ω exceto em uma conjunto de medida nula. Denotaremos por $L^1(\Omega, \mu)$, ou simplemente $L^1(\Omega)$, o espaço das funções integráveis de Ω em $\mathbb{R}$. Frequentemente utilizaremos $\displaystyle\int f$, em vez de $\displaystyle\int f d\mu$, e usaremos também a notação

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int |f| d\mu = \int |f|.$$

No espaço $L^1(\Omega)$ serão consideradas iguais funções que coincidem q.t.p.

1.2 Resultados importantes sobre integração

Nesta seção listaremos alguns dos resultados relevantes sobre espaços $L^p s$. Para mais detalhes veja [4].

Teorema 1.1 (Convergência Monotona, Beppo Levi). *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 que satisfaz*

1. $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$ *q.t.p em* Ω.
2. $\displaystyle\sup_n \int f_n < \infty$

Então $f_n(x)$ converge q.t.p. em Ω para um limite finito, que nós denotaremos por $f(x)$, a função f pertence a L^1 e ainda $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Teorema 1.2 (Convergência Dominada, Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 satisfazendo*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω
2. *Existe uma função $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p.*

Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 = 0$.

Lema 1.1. *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 satisfazendo*

1. *Para todo n, $f_n \geq 0$ q.t.p.*
2. $\displaystyle\sup_n \int f_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$ definimos $f(x) = \lim\inf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$

Então $f \in L^1$ e $\displaystyle\int f \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int f_n$.

Teorema 1.3. *O espaço $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \forall \varepsilon > 0,\ \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n), \text{ tal que } \|f - f_1\|_1 \leq \varepsilon.$$

Sejam $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$, dois espaços mensuraveis que são σ-finitos. Podemos definir de uma forma natural uma estrutura de espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ no produto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Teorema 1.4. ***(Tonelli)*** *Seja $F(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável satisfazendo*

1. $\displaystyle\int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty$ *q.t.p.* $x \in \Omega_1$
2. $\displaystyle\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 1.5. ***(Fubini)*** *Assuma que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então para quase todo $x \in \Omega_1$, $F(x, y) \in L^1(\Omega_2)$ e $\displaystyle\int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 \in L^1(\Omega_1)$. Analogamente para quase todo $y \in \Omega_2$, $F(x, y) \in L^1(\Omega_1)$ e $\displaystyle\int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 \in L^1(\Omega_2)$.*

1.3 Definição e propriedades elementares dos espaços L^p

Definição 1.1. *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$; definiremos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int |f(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

Definição 1.2. *Definiremos*

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \exists\ C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

com

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

Observação 1.1. *Veremos a diante que $\|\cdot\|_p$ é uma norma para o espaço L^p para $1 \leq p \leq \infty$.*

Seja $1 < p < \infty$, denotaremos por p' o expoente conjugado de p, isto é, p' é o número real que satisfaz a seguinte equação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Para $p = 1$ denotaremos $p' = \infty$ e para $p = \infty$, $p' = 1$.

Teorema 1.6 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p > 1$ e $p' > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dados $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então vale $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$, valendo a igualdade se $a^p = b^{p'}$.*

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é válida. Sejam $a, b > 0$, então

$$\begin{aligned} ab = e^{\ln(ab)} &= e^{\ln a + \ln b} \\ &= e^{\left[\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{p'}\ln b^{p'}\right]} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{p'}e^{\ln b^{p'}} \\ &\leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade, ultilizamos a convexidade da função exponencial. □

Teorema 1.7 (Desigualdade De Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, com p e p' tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f, g \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demonstração. Dividiremos em 2 casos, no caso 1 ($p = 1, p' = \infty$) e caso 2 ($1 < p < \infty$).

Caso 1: Sabemos que $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ q.t.p. Assim

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty$$

o que implica que

$$\int |f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty \int |f(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Caso 2: Considere $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_{p'} \neq 0$.

Para cada $x \in [a, b]$, pela desigualdade de Young, temos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_p}\right)^{p'}.$$

Integrando, obtemos

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'\|g\|_{p'}^{p'}} \int_a^b |g(x)|^{p'} dx$$

donde segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'\|g\|_{p'}^{p'}}\|g\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

e portanto,

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

$\square$

Teorema 1.8. *L^p é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ é uma norma para todo p, $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ segue direto das propriedades do módulo.

Sejam $1 < p < \infty$ e $f, g \in L^p$, temos

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

e consequentemente $f + g \in L^p$. De forma semelhante provamos que $\lambda f \in L^p$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ficando demonstrado que L^p é um espaço vetorial.

Provaremos que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. As primeiras propriedades são facilmente verificadas portanto provaremos a seguir apenas a desigualdade triangular.

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^{p-1}|f + g| \leq \int |f + g|^{p-1}|f| + \int |f + g|^{p-1}|g|,$$

como $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}$ e, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p),$$

isto é

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$\square$

Definição 1.3. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.*

Teorema 1.9 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** *L^p é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos no Caso 1 consideramos $p = \infty$ e no Caso 2 $1 \leq p < \infty$.

Caso 1: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^∞. Dado um inteiro $k \geq 1$ existe um número natural N_k tal que $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ para $m, n \geq N_k$.

Portanto existe um conjunto de medida nula E_K tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega - E_k, m, n \geq N_k. \tag{1.1}$$

Considerando $E = \cup_k E_k$, temos que E é de medida nula pois é a unão enumerável de conjuntos de medida nula. Assim, para todo $x \in \Omega - E$ a sequência $(f_n(x))$ é Cauchy na reta. Logo, $f_n(x) \to f(x)$, para todo $x \in \Omega - E$. Tomando o limite em (1.1) com $m \to \infty$ obtemos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega - E, \forall n \geq N_k.$$

Dai concluímos que $f \in L^\infty$ e $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}, \forall n \geq n_k$, ou seja, $f_n \to f$ em L^∞.

Caso 2 : Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^p. Para concluirmos a afirmação é suficiente mostrar que uma subsequência converge em L^p.

Podemos extrair uma subsequência (f_{n_k}) tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Para isto procedemos da seguinte forma, escolha n_1 tal que $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}, m, n \geq n_1$, então escolha $n_2 > n_1$ tal que $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^2}, m, n \geq n_2$ e assim sucessivamente.

Afirmamos que (f_{n_k}) converge em L^p. A fim de simplificar a notação escreveremos f_k em vez de f_{n_k}, deste modo temos

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Seja

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Assim,

$$\|g_n\|_p \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como consequência do Teorema da Convergência Monótona, $g_n(x)$ tende a um limite, digamos $g(x)$, q.t.p. em Ω com $g \in L^p$. Por outro lado, para $m \geq n \geq 2$ temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x),$$

Logo para quase todo $x \in \Omega$, $(f_n(x))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e converge para um limite, digamos $f(x)$. Temos assim que,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para } n \geq 2 \tag{1.2}$$

em particular, $f \in L^p$. Finalmente concluimos que, pelo teorema da convergência dominada que $\|f_n - f\|_p \to 0$, já que $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ q.t.p. e ainda $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$. $\square$

Teorema 1.10. *Seja (f_n) uma sequência em L^p e seja $f \in L^p$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma uma função $h \in L^p$ tal que*

1. *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω*

2. *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ q.t.p em Ω e $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A conclusão é obvia quando $p = \infty$. Assim considere $1 \leq p < \infty$. Desde que (f_n) é uma sequência de Cauchy podemos voltar a prova do teorema anterior e considerar a subsequência (f_{n_k}) que denotaremos por f_k satisfazendo (1.1), tal que f_k tende q.t.p. para um limite $f^*(x)$ com $f^* \in L^p$. Além disso por (1.2) temos $|f^*(x) - f_k(x)| \leq g(x)$, $\forall k$ q.t.p. em Ω e $\forall k \in \mathbb{N}$ com $g \in L^p$. Pelo Teorema Convergência Dominada sabemos que $f_n \to f$ em L^p e assim $f = f^*$ q.t.p. Além disso temos que $|f_k| \leq |f(x)| + |g(x)|$, e o resultado segue. □

1.4 Reflexividade, Separabilidade e Dual de L^p

Seja E uma espaço normado. Denotaremos por

$$(E')' = E''$$

o espaço bidual de E. Definimos um operador linear limitado canônico

$$J : E \to E''$$

da seguinte forma: para cada $x \in E$, o funcional linear limitado $J_x : E' \to \mathbb{R}$ é dado por

$$J_x(f) = f(x), \quad \forall f \in E'$$

Afirmação 1.1. *J_x é um funcional linear limitado em E'.*

De fato

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\| = \|x\|\|f\|,$$

ou seja,

$$\|J_x\| \leq \|x\|$$

Além disso, J é uma isometria de E sobre sua imagem $J(E)$. Com efeito, pelo Teorema de Hanh-Banach, para cada $x \in E$ existe um funcional $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\| = 1$ e $f_0(x) = \|x\|$, logo

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\|=1} |J_x(f)| \geq |J_x(f_0)| = f_0(x) = \|x\|.$$

Portanto,

$$\|J_x\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Em particular, J é injetivo. Se J for também sobrejetivo, dizemos que E é reflexivo.

Definição 1.4. *Dizemos que um espaço de Banach E é reflexivo se o operador $J : E \to E''$ for um isomorfismo isometrico.*

Nosso objetivo é demonstrar que L^p é reflexivo, para $1 < p < \infty$. Para isto necessitaremos de alguns lemas cuja demonstração foge aos objetivos do nosso trabalho.

Lema 1.2. *Seja E espaço reflexivo. Se $F \subset E$ é uma subespaço vetorial fechado, então F é reflexivo.*

Lema 1.3. *Seja E espaço reflexivo e $T : E \to F$ isometria, então F é reflexivo.*

Lema 1.4. *Sejam $E_1, E_2, ..., E_n$ reflexivos, então $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ também é reflexivo.*

Teorema 1.11. *L^p é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. A prova consiste em 3 passos:
Passo 1(Primeira desigualdade de Clarkson): Seja $2 \leq p < \infty$. Afirmamos que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \qquad \forall f, g \in L^p \tag{1.3}$$

Para mostrar a desigualdade acima é suficiente mostrar que

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Primeiro note que a seguinte desigualdade é válida

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}, \forall \alpha, \beta \geq 0 \tag{1.4}$$

De fato por homogenidade podemos assumir que $\beta = 1$ sendo suficiente, para verificar (1.4), observar que a função

$$(x^2 + 1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$$

cresce em $[0, +\infty)$. Considerando $\alpha = \|\frac{a+b}{2}\|$ e $\beta = \|\frac{a-b}{2}\|$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da convexidade da função $x \mapsto |x|^{\frac{p}{2}}$, desde que $p \geq 2$.

Passo 2 : L^p é uniformemente convexo, e assim reflexivo para $2 \leq p < \infty$.

De fato, seja $\varepsilon > 0$ e seja $f, g \in L^p$ com $\|f\|_p \leq 1, \|g\|_p \leq 1, \|f - g\| > \varepsilon$. Deduzimos de (1.3) que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

e assim $\left\|\frac{f+g}{2}\right\| < 1 - \delta$ com $\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} > 0$. Portanto, L^p é uniformemente convexo e assim, pelo teorema de Milmam-Pettis, segue a reflexividade. Para mais detalhes veja [3][Theorem 3.11].

Passo 3 : L^p é reflevivo para $1 < p \leq 2$.

Seja $1 < p < \infty$. Considere o operador $T : L^p \to (L^{p'})'$ definido da seguinte forma: Seja $u \in L^p$ fixada: a função $f \in L^{p'} \mapsto \int uf$ é um funcional linear contínuo em L^p e assim definido um elemento, digamos Tu, em $(L^{p'})'$ tal que

$$\langle Tu, f\rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^{p'}.$$

Afirmamos que

$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} = \|u\|_p, \forall u \in L^p$$

De fato, pela desigualdade de Hölder, tem-se

$$|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_p \|f\|_{p'}, \forall f \in L^{p'}$$

e portanto $\|Tu\|_{(L^{p'})'} \leq \|u\|_p$. Por outro lado definimos

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \qquad (f_0(x) = 0, \text{ se } u(x) = 0).$$

Claramente temos

$$f_0 \in L^{p'}, \|f_0\|_{p'} = \|u\|_p^{p-1} \text{ e } \langle Tu, f_0\rangle = \|u\|_p^p,$$

assim

$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \geq \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|_{p'}} = \|u\|_p.$$

Assim, mostramos que T é uma isometria de L^p em $(L^{p'})'$ implicando que $T(L^p)$ é um subespaço fechado que $(L^{p'})'$, pois L^p é uma espaço de Banach. Assuma agora que $1 < p \leq 2$. Desde que, pelo passo 2, $L^{p'}$ é reflexivo, segue que $(L^{p'})'$ é também reflexivo. Nós concluimos, pelo Lema 1.2, que $T(L^p)$ é reflexivo, e consequentemente, L^p é também reflexivo. $\square$

Observação 1.2. *L^p é também uniformemente convexo para $1 < p < frm{-}e$. Isto é uma* *consequência da segunda desigualdade de Clarkson,*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^{p'} \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{1}{p-1}}, \forall f, g \in L^p.$$

Esta desigualdade é mais complicada de provar que a primeira. Claramente, implica que L^p é uniformemente convexo quando $1 < p \leq 2$.

Teorema 1.12 (Representação de Riesz)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\phi \in (L^p)^*$. Então existe uma única função $u \in L^p$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf, \forall f \in L^p.$$

Além disso

$$\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

Demonstração. Consideremos o operador $T : L^{p'} \to (L^p)^*$ definido por $\langle Tu, f \rangle = \int uf, \forall u \in L^{p'}$ e $\forall f \in L^p$. O argumento usado é o mesmo da prova do teorema anterior(passo 3), mostra que

$$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_{p'}, \forall u \in L^{p'}$$

Afirmamos que T é sobrejetiva. De fato, seja $E = T(L^{p'})$. Desde que E é uma subespaço fechado, é suficiente provar que E é denso em $(L^p)'$. Seja $h \in (L^p)''$ satisfazendo $\langle h, Tu \rangle = 0, \forall u \in L^{p'}$. Como L^p é reflexivo e $h \in L^p$, e satisfaz $\int uh = 0, \forall u \in L^{p'}$. Escolhendo $u = |h|^{p-2}$ vemos que $h = 0$. $\square$

Observação 1.3. *O teorema anterior é muito importante. Nos diz que cada funcional linear contínuo em L^p com $1 < p < \infty$ pode ser representado "concretamente"como uma integral. A função $\phi \to u$ é uma isometria linear que é sobrejetiva, o que nos permite identificar o "abstrato"espaço $(L^p)'$ com $L^{p'}$.*

No que segue vamos sistematicamente fazer a identificação

$$(L^p)' = L^{p'}.$$

Notação: O operador truncamento $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por

$$T_n r = \begin{cases} r, \text{ se } |r| \leq n \\ \frac{nr}{|r|}, \text{ se } |r| > n \end{cases}$$

Dado um conjunto $E \subset \Omega$ definimos a função característica X_E como

$$X_E(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } \ x \in E \\ 0, \text{ se } \ x \in \Omega - E \end{cases}$$

Teorema 1.13. *O espaço $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ é denso em L^p para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Primeiramente afirmamos que dado $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$ existe, uma função $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e um conjunto K compacto em $\mathbb{R}$ tal que $g = 0$ fora de K e

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

De fato, seja X_n a função característica da $B(0, n)$ e seja $f_n = X_n T_n f$. Pelo Teorema da Convergência Dominada vemos que $\|f_n - f\|_p \to 0$ e assim podemos escolher $g = f_n$ com n grande o suficiente. Em seguida, dado $\delta > 0$ existe, pelo Teorema 1.3, uma função $g_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|g - g_1\|_1 < \delta.$$

Podemos sempre assumir que $\|g_1\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, caso contrário substituimos g_1 por $T_n g_1$. Finalmente, temos

$$\|g - g_1\|_p \leq \|g - g_1\|_1^{\frac{1}{p}} \|g - g_1\|_\infty^{1-(\frac{1}{p})} \leq \delta^{\frac{1}{p}} (2\|g\|_\infty)^{1-(\frac{1}{p})}.$$

Concluímos que por escolha de $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\delta^{\frac{1}{p}} (2\|g\|_\infty)^{1-(\frac{1}{p})} < \varepsilon.$$

$\square$

Definição 1.5. *O espaço de medida Ω é chamado separável se existir uma família enumerável (E_n) de membros de $\mathcal{M}$ tal que a σ-algebra gerada por (E_n) coincide com $\mathcal{M}$ (isso é $\mathcal{M}$ é a menor σ-algebra contendo $E_n s$).*

Exemplos 1.1. *O espaço de medida $\Omega = \mathbb{R}^n$ é separável. De fato, podemos escolher (E_n) alguma família enumerável de conjuntos abertos tal que cada conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como união de $E_n s$. Mas geralmente, se Ω é um espaço métrico separável e $\mathcal{M}$ consiste nos conjuntos de Borel isto é $\mathcal{M}$ é a σ-algebra gerada pelos conjuntos abertos de Ω, então Ω é um espaço de medida separável.*

Teorema 1.14. *Considere Ω um espaço de medida separável. Então $L^p(\Omega)$ é separavel para todo p, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Considere $\Omega = \mathbb{R}$. Seja $\mathfrak{R}$ uma familia de conjuntos de $\mathbb{R}$ da forma $\mathcal{R} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$ com $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$. Seja E o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelas funções $(X_\mathcal{R})_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$, ou seja, E consiste de combinações lineares de funções com coeficientes racionais $X_\mathcal{R}$ de modo que E e enumerável. Afirmamos que E é denso em $L^p(\mathbb{R})$. De fato, dado $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, existe alguma $f_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$. Seja $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ um cubo contendo o suporte da função f_1. Dado $\delta > 0$ é facil construir uma função$f_2 \in E$ tal que $\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$ e f_2 anula-se fora de $\mathcal{R}$ basta dividir em pequenos cubos de $\mathfrak{R}$, onde a oscilação, isto é, $\sup - \inf$ de f_1 menor que δ. Portanto temos

$$\|f_1 - f_2\|_p < \|f_1 - f_2\|_\infty |\mathcal{R}|^{\frac{1}{p}} < \delta |\mathcal{R}|^{\frac{1}{p}}.$$

Concluímos que $\|f - f_2\|_p < 2\varepsilon$, desde que $\delta > 0$ seja escolhido de modo que $\delta|\mathcal{R}|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. $\square$

1.5 Convolução e Regularização

Nosso objetivo nesta seção é construir funções suaves com propriedades especiais, propriedades as quais tornam possível, dada uma função f, não necessariamente suave, criar uma sequência de funções suaves que a aproximam via convolução.

Teorema 1.15. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ e seja $g \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}$ a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}$ e definimos*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Além disso $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$ e

$$\|f \star g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Demonstração. A conclusão é obvia onde $p = \infty$. Consideramos dois casos, no primeiro caso com $p = 1$. Considere $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Para quase todo $y \in \mathbb{R}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx = |g(y)| \|f\|_1 < \infty,$$

além disso,

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Deduzimos do Teorema de Tonelli que $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Aplicando o Teorema de Fubini, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

De onde segue o resultado para $p = 1$.

Agora vamos considerar o caso em que $1 < p < \infty$. Sabemos que, para quase todo x fixado $x \in \mathbb{R}$ a função $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ e integrável em $\mathbb{R}$, que é

$$|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in L^p(\mathbb{R}).$$

Desde que $|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}(\mathbb{R})$. Deduzimos da desigualdade de Höder que

$$|f(x-f)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dy \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

que é

$$|(f \star g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} (|f| \star |g|^p)(x).$$

Concluímos, pela primeira parte o caso onde $p = 1$ sabemos que $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$ e

$$\|f \star g\|_p^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} \|f\|_1 \|g\|_p^p,$$

logo,

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

$\square$

Notação: Dado uma função real f definimos $\check{f}(x) = f(-x)$.

Teorema 1.16. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ e $h \in L^{p'}(\mathbb{R})$. Então temos*

$$\int_{\mathbb{R}} (f \star g)h = \int_{\mathbb{R}} g(\check{f} \star h).$$

Demonstração. A função $F(x, y) = f(x-y)g(y)h(x)$ pertence a $L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ desde que

$$\int |h(x)|dx \int |f(x-y)||g(y)|dy < \infty,$$

pelo Teorema 1.15 e a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int (f \star g)(x)h(x)dx &= \int dx \int F(x,y)dy = \int dy \int F(x,y)dx \\ &= \int g(y)(\check{f} \star h)(y)dy, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. $\square$

Suporte e convolução: A noção de suporte de uma função ($suppf$) é o complemento do maior conjunto aberto em que f se anula, em outras palavras $suppf$ é o fecho do conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ Esta notação não é adequada quando lidamos com classes de equivalência, tal como nos espaços L^p.

Teorema 1.17. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Considere a família $(w_i)_{i \in I}$ para todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ tal que para cada $i \in I$, $f = 0$ q.t.p. em w_i. Considere $W = \bigcup_{i \in I} w_i$, então $f = 0$ q.t.p. em W.*

Demonstração. Desde que o conjunto I não seja enumerável não fica claro que $f = 0$ q.t.p. em W. No entanto, podemos recuperar o caso enumerável como segue. Existe uma família enumerável (O_n) de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ tal que todo conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como união de $O_n s$. Como $w_i \subset \mathbb{R}$ é aberto temos

$$w_i = \bigcup_{\substack{n \in A_i \\ A_i \subset \mathbb{N}}} O_n,$$

logo

$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{i \in I} w_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{\substack{n \in A_1 \\ A_i \subset \mathbb{N}}} O_n \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ A_i \subset \mathbb{N}}} O_n = \bigcup_{n \in B} O_n, \text{ onde } B = \bigcup_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

Uma vez que $f = 0$ q.t.p. em cada O_n com $n \in B$, concluímos daí que $f = 0$ q.t.p. em W. $\square$

Teorema 1.18. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$supp(f \star g) \subset \overline{suppf + suppg}.$$

Demonstração. Fixado $x \in \mathbb{R}$ tal que a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável pelo Teorema 1.15. Logo

$$(f \star g)(x) = \int f(x-y)(gy)dy = \int_{(x - suppf) \cap suppg} f(x-y)g(y)dy.$$

Se $x \notin suppf + suppg$, então $(x - suppf) \cap suppg = \emptyset$ e assim $(f \star g)(x) = 0$. Assim

$$(f \star g)(x) = 0 \text{ q.t.p. em } (suppf + suppg)^c.$$

Em particular,

$$(f \star g)(x) = 0 \text{ q.t.p. } int[(suppf + suppg)^c],$$

e portanto

$$supp(f \star g) \subset \overline{suppf + suppg}.$$

$\square$

Observação 1.4. *Se tanto f quanto g tem suporte compacto, então $f \star g$ também tem suporte* *compacto. Entretanto, $f \star g$ não necessariamente terá suporte compacto, se apenas uma delas tem suporte compacto.*

Definição 1.6. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e seja $1 \leq p \leq \infty$. Diremos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ pertence $L^1_{loc}(I)$ se $f X_K \in L^p(I)$ para cada compacto K contido em I.*

Note que se $f \in L^p_{loc}(I)$, então $f \in L^1_{loc}(I)$.

Teorema 1.19. *Seja $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Então $(f \star g)(x)$ está bem definida para cada $x \in \mathbb{R}$, e além disso $(f \star g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Note que para cada $x \in \mathbb{R}$ a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}$ e portanto $(f \star g)(x)$ está definida para cada $x \in \mathbb{R}$. Seja $x_n \to x$ e seja K um conjunto compacto fixado em $\mathbb{R}$ tal que $(x_n - suppf) \subset K, \forall n$. Portanto temos $f(x_n - y) = 0,\ \forall n, \forall y \notin K$. Deduzimos da continuidade uniforme da f que

$$|f(x_n - y) - f(x - y)| \leq \varepsilon_n X_K(y), \forall n, \forall y \in \mathbb{R}$$

com $\varepsilon_n \to 0$. Concluímos que

$$|(f \star g)(x_n) - (f \star g)(x)| \leq \varepsilon_n \int_K |g(y)| dy \to 0.$$

$\square$

Teorema 1.20. *Seja $f \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})(k \geq 1)$ e seja $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Então $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ e*

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g, \forall \alpha.$$

Definição 1.7. *Uma sequência regularizante $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções nos $\mathbb{R}$ tal que*

$$\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}),\ \textit{com } supp\rho_n \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \ \textit{e} \ \int \rho_n = 1.$$

Utilizaremos a notação (ρ_n) para denotar uma sequência regularizante.

Exemplo 1.1. *Vamos gerar uma sequência regularizante começando com uma única função $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ tal que $supp\rho \subset [-1, 1], \rho \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e ρ não é identicamente nula.*

Seja

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & se\ |x| < 1 \\ 0 & se\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Obtemos uma sequência regularizante tomando $\rho_n = cn\rho(nx)$ com $c = \dfrac{1}{\int \rho}$.

Teorema 1.21. *Considere $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Então $(\rho_n \star f) \to f$ uniformemente em um compacto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}$ uma conjunto compacto fixado. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ dependendo de K e de ε tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in K, \forall y \in (-\delta, \delta),$$

temos para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(\rho_n \star f)(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} [f(x-y) - f(x)]\rho_n dy.$$

Para $n > \frac{1}{\delta}$ e $x \in K$ obtemos

$$|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon.$$

□

Teorema 1.22. *Considere $f \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leq p < \infty$. Então $(\rho_n \star f) \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, fixamos uma função $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$. Pelo Teorema 1.21 sabemos que $(\rho_n \star f_1) \to f_1$ uniformemente em cada compacto de $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 1.18 temos que

$$supp(\rho_n \star f_1) \subset \overline{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)} + suppf_1 \subset \overline{(-1,1)} + suppf_1,$$

que é um conjunto compacto. Dai resuta que

$$\|(\rho_n \star f_1\|_p \to 0.$$

Finalizando

$$\|(\rho_n \star f) - f\|_p \leq 2\|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p,$$

e pelo teorema 1.15 concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|(\rho_n \star f) - f\|_p \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon,$$

e portanto $\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p = 0$. □

Corolário 1.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Então $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ é denso em $L^p(I)$ para cada $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Dado $f \in L^p(I)$ considere

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in I \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - I \end{cases},$$

de modo que $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$.

Seja (K_n) uma sequência de conjuntos compactos de $\mathbb{R}$ tais que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = I \quad \text{e} \quad dis(K_n, I^c) \geq \frac{2}{n} \forall n.$$

Podemos escolher, por exemplo, $K_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x| \leq n \text{ e } dist(x, I^c) \geq \frac{2}{n}\}$.

Considere

$$g_n = X_{K_n}\tilde{f} \text{ e } f_n = \rho_n \star g_n,$$

deste modo

$$suppf_n \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + K_n \subset I.$$

Segue que $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Mas por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^p(I)} &= \|f_n - \tilde{f}\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|(\rho_n \star g_n) - (\rho_n \star \tilde{f})\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\rho_n \star \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\leq \|g_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\rho_n \star \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Finalizando, note que $\|g_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ pelo Teorema da Convergência Dominada e $\|(\rho_n \star \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ pelo Teorema 1.22. Concluimos assim que $\|f_n - f\|_{L^p(I)} \to 0$. □

Corolário 1.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e seja $u \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int uf = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Então $u = 0$ q.t.p. em I.

Demonstração. Seja $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ uma função tal que $suppg$ é um compacto contido em I. Definimos $g_n = \rho_n \star g$. Deste modo $g_n \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ desde que n seja suficientemente grande. Dai temos

$$\int ug_n = 0, \forall n \tag{1.5}$$

Como $g_n \to g$ em $L^1(\mathbb{R})$ pelo Teorema 1.22 existe uma subsequência (g_{n_k}) tal que $g_{n_k} \to g$ q.t.p. em $\mathbb{R}$. Além disso, temos $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Tomando o limite em (1.5) e pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int ug = 0. \tag{1.6}$$

Seja $K \subset I$ um conjunto compacto. Definimos como função g a função

$$g = \begin{cases} sing(u) & \text{em } K \\ 0 & \text{em } \mathbb{R} - K \end{cases}.$$

Deduzimos da equação (1.6) que $\int_K |u| = 0$ e assim $u = 0$ q.t.p. em K. Uma vez que isto é verdade para qualquer compacto $K \subset I$, concluímos que $u = 0$ q.t.p. em I. $\square$

1.6 Critério de Compacidade em L^p

É importante ser capaz de identificar se uma família de funções em $L^p(\mathbb{R})$ tem fecho compacto em $L^p(\mathbb{R})$. Lembramos que o Teorema de Ascoli-Arzelá respode a esta pergunta em $\mathcal{C}(K)$, o espaço das funções contínuas ao longo de um espaço métrico compacto K com valores em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.23 (Ascoli-Arzela)**.** *Seja K um espaço métrico compacto e seja $\mathfrak{H}$ um subconjunto limitado de $\mathcal{C}(K)$. Considerando que $\mathfrak{H}$ é uniformemente equicontínuo, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in \mathfrak{H}.$$

Então o fecho de $\mathfrak{H}$ em $\mathcal{C}(K)$ é compacto.

Teorema 1.24 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto limitado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Assuma que*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\| = 0 \quad \textit{unifomemente em } f \in \mathcal{F}.$$

Então o fecho de $\mathcal{F}\,|_{\Omega}$ em $L^p(\Omega)$ é compacto para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto mensurável com medida finita.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Em muitos problemas da matemática em geral, em particular do cálculo das variações, não é suficiente trabalhar com a noção de soluções clássicas de equações diferenciais. É necessário assim, estender o conceito de solução. Para isto introduziremos a seguir a ideia de derivadas fracas e os chamados espaços de Sobolev.

Para entender melhor a motivação por trás da ideia de soluções fracas, consideremos o seguinte problema: Dada $f \in C([a,b])$, queremos encontrar uma função u satisfazendo

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{em} \quad I = [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Uma solução clássica de (2.1) é uma função de classe C^2 em $[a,b]$ satisfazendo (2.1) no sentido usual. Sabemos que uma solução do problema acima pode ser obtida utilizando um cálculo simples. Ignoraremos tal fato e ilustraremos a seguir uma nova forma de atacar tal problema.

Multiplicando (2.1) por $\varphi \in C^1([a,b])$ e utilizando integração por partes obteremos

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi, \forall \varphi \in C^1([a,b]), \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \tag{2.2}$$

Note que (2.2) faz sentido apenas se $u \in C^1([a,b])$. De fato, é suficiente mostrar que $u, u' \in L^1(a,b)$, onde o significado de u' será dado de forma precisa mais na frente. Diremos, provisoriamente, que uma função u satisfazendo (2.2) é uma *solução fraca* de (2.1).

Os passos a seguir nos dão um esquema para a abordagem variacional da teoria de equações diferenciais parciais:

Passo A : Definiremos de maneira precisa a noção de derivada fraca, juntamente com os espaços de Sobolev e demonstraremos algumas ferramentas básicas.

Passo B : Provaremos a existência e unicidade de soluções fracas através do Teorema da Representação de Riesz e do Teorema de Lax-Milgram.
Passo C : Provaremos que na verdade as soluções fracas são de classe C^2, o que é um resultado de regularidade.
Passo D : Mostramos que na verdade a solução fraca de classe C^2 é uma solução clássica.

Uma vez motivado, introduziremos abaixo o conceito fundamental de espaços de Sobolev.

Definição 2.1. *Seja $I = (a, b)$ um intervalo aberto, definimos por*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)\}.$$

Denotaremos por $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ e para $u \in W^{1,p}(I)$ denotaremos $u' = g$.

Observação 2.1. *Na definição acima φ é chamada função teste. Podemos supor que a classe das funções teste será a classe das funções $\mathcal{C}_c^\infty(I)$. Com efeito, suponhamos que $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, deste modo, sabemos que existem aplicações ρ_n tais que $\rho_n \star \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Deste modo, se $u \in W^{1,p}$, temos*

$$\int_I u(\rho_n \star \varphi)' = -\int_I g(\rho_n \star \varphi)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u(\rho_n \star \varphi)' = -\lim_{n\to\infty} \int_I g(\rho_n \star \varphi).$$

Assim temos

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Observação 2.2. *Se $u \in \mathcal{C}^1(I) \cap L^p(I)$ e se $u' \in L^p$ (onde u' denota a derivada usual) então $u \in W^{1,p}(I)$ e a derivada usual coincide com a derivada no sentido de Sobolev que de agora em diante chamaremos de derivada fraca. Devemos mostrar que*

$$\int_I u\varphi' = -\int_I u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Denotaremos $I = (a, b)$, e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \int_a^b u\varphi' &= \int_a^b (u\varphi)' - \int_a^b u'\varphi \\ &= (u\varphi)(b) - (u\varphi)(a) - \int_a^b u'\varphi, \end{aligned}$$

mas $(u\varphi)(b) = (u\varphi)(a) = 0$, pois φ tem suporte compacto em I e portanto

$$\int_a^b u\varphi' = -\int_a^b u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Exemplo 2.1. *Seja $I = (-1, 1)$ mostraremos o seguinte:*

A função $u(x) = |x|$ pertence a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e $u' = g$ onde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 < x < 1 \\ -1 & se\ -1 < x < 0 \end{cases}.$$

De maneira geral uma função contínua em $\bar{I}$ que é $\mathcal{C}^1$ por partes em I pertence a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Com efeito

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' dx = \int_{-1}^{0} u\varphi' dx + \int_{0}^{1} u\varphi' dx,$$

integrando o lado direito da igualdade por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} u\varphi' dx &= u\varphi(0) - u\varphi(-1) - \int_{-1}^{0} u'\varphi dx + u\varphi(1) - u\varphi(0) - \int_{0}^{1} u'\varphi dx \\ &= u\varphi(0) - u\varphi(0) - \int_{-1}^{0} u'\varphi dx - \int_{0}^{1} u'\varphi dx \\ &= \int_{-1}^{0} \varphi dx - \int_{0}^{1} \varphi dx. \\ &= -\int_{-1}^{0} g\varphi - \int_{0}^{1} g\varphi \\ &= -\int_{-1}^{1} g\varphi. \end{aligned}$$

Portanto $u = |x|$ pertence a $W^{1,p}(I)$ e g é sua derivada no sentido de Sobolev.

Notação: O espaço $W^{1,p}$ equipado com a norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p,$$

ou ainda se $1 < p < \infty$, com a norma equivalente

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço H^1 equipado com o produto interno

$$(u, v) = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v'),$$

e com a norma associada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Verifica-se que as normas acima são equivalentes.

Proposição 2.1. *O espaço $W^{1,p}(I)$ é uma espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, é reflexivo para $1 < p < \infty$ e é separável para $1 \leq p < \infty$. Em particular H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em 3 etapas, na primeira parte mostraremos que $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach, na segunda parte mostraremos que tal espaço é reflexivo para $1 < p < \infty$ e por fim mostraremos que é separável se $1 \leq p < \infty$.

1. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}$, então (u_n) e (u_n') são sequências de Cauchy em L^p. Deste modo

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u_m\|_p + \|u_n' - u_m'\|_p \to 0.$$

Como L^P é completo, $u_n \to u$ e $u_n' \to g$ em L^p. Assim teremos

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u_n' \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$$

e tomando o limite

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi, \forall \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Portanto $u \in W^{1,p}(I)$ e $u' = g$. Mais ainda

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_p + \|u_n' - u\|_p \to 0$$

2. Para $1 < p < \infty$ sabemos da Teorema 1.11 que L^p é reflexivo e pelo Lema 1.4 temos que $E = L^p(I) \times L^p(I)$ é reflexivo. Defina o operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,p} &\to E \\ u &\mapsto (u, u') \end{aligned}$$

Consequentemente, munindo E com a norma do produto, temos

$$\|Tu\|_{L^p \times L^p} = \|u\|_p + \|u'\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}$$

Uma vez que $W^{1,p}$ é Banach e T é isometria segue que $T(W^{1,p})$ é Banach e consequentemente fechado em E assim pelo Lema 1.2 do Capítulo 1, $T(W^{1,p})$ é reflexivo e pelo Lema 1.3 do Capítulo 1, $W^{1,p}$ é reflexivo.

3. Considere o operador anteriormente definido, sabemos que o produto cartesiano de espaços separáveis é separável e pelo Lema 1.3 do Capítulo 1 temos que $T(W^{1,p}) \subset E$ é separável e consequentemente $W^{1,p}$ é separável.

□

Observação 2.3. *Vale salientar que na proposição anterior ganhamos como corolário o fato de que se* (u_n) *é uma sequencia em* $W^{1,p}$ *tal que* $u_n \to u$ *em* L^p *e* (u_n') *converge para algum limite em* L^p*, então* $u \in W^{1,p}$ *e* $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$*. De fato, quando* $1 < p \leq \infty$ *é suficiente que* $u_n \to u$ *em* L^p *e* $\|u_n'\|_p$ *seja limitada para concluirmos que* $u \in W^{1,p}$*.*

Teorema 2.1. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*, com* I *limitado ou não, então existe* $\tilde{u} \in \mathcal{C}(I)$ *tal que*

$$u = \tilde{u}$$

e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \forall x, y \in I.$$

Observação 2.4. *Vamos enfatizar o conteúdo do teorema anterior. Primeiramente note que se uma função* $u \in W^{1,p}$*, então toda função* v *tal que* $u = v$ *q.t.p. em* I *pertence a* $W^{1,p}$*. O Teorema afirma que cada função* $u \in W^{1,p}$*. Admite único representante contínuo em* $\bar{I}$*, isto é, existe uma função contínua em* $\bar{I}$ *que pertence a classe de equivalência de* u*. Quando nos for conveniente substituiremos* u *pelo seu representante contínuo. Finalizamos observando que "u ter um representante contínuo"não é o mesmo que "u ser contínua q.t.p.".*

Antes de demonstrarmos o teorema acima necessitaremos dos seguintes lemas:

Lema 2.1. *Seja* $f \in L^1_{loc}(I)$ *e tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0, \forall \quad \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I) \tag{2.3}$$

Então existe uma constante c *tal que* $f = c$ *q.t.p. em* I*.*

Demonstração. Fixemos a função $\psi \in \mathcal{C}^1_c(I)$ e tal que $\int_I \psi = 1$. Para algum $w \in \mathcal{C}_c(I)$ e tal que

$$\varphi' = w - \left[\int_I w\right]\psi.$$

De fato a função $h = \varphi'$ é contínua e tem suporte compacto em I, e ainda

$$\int_I h = \int_I \left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = \int_I w - \int_I \left(\int_I w\right)\psi = \int_I w - \int_I w \int_I \psi = 0$$

Portanto h tem única primitiva com suporte compacto em I. Deduzimos de (2.3) que

$$\int_I f\varphi' = \int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = 0, \forall w \in \mathcal{C}_c(I).$$

isto é

$$\int_I \left[f - \left(\int_I f\psi \right) \right] w = 0, \forall w \in \mathcal{C}_c(I).$$

e portanto pelo Corolário 1.2 $f - \int_I f\psi = 0$ q.t.p. em I, isto é $f = c$ q.t.p. em I com $c = \int_I f\psi$ $\square$

Lema 2.2. *Seja $g \in L^1_{loc}(I)$. Para y_0 fixado em $I = (a, b)$*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, x \in I,$$

então $v \in \mathcal{C}(I)$ e

$$\int_I v\varphi' = \int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= \int \left[\int_{y_0}^{x} g(t)dt \right] \varphi'(x)dx \\
&= \int_a^{y_0} dx \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^{b} dx \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dt \\
&= -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^{b} dx \int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dt,
\end{aligned}$$

pelo Teorema de Fubini temos

$$\int_I v\varphi' = -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^{b} g(t)dt \int_t^b \varphi' dx.$$

Note que

$$\int_a^t \varphi'(x)dx = \varphi(t) - \varphi(a) = \varphi(t), \text{ pois} \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

De modo analogo tem-se

$$\int_t^b \varphi'(x)dx = -\varphi(t),$$

logo

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= \varphi(t) \int_a^{y_0} g(t)dt - \varphi(t) \int_{y_0}^{b} g(t)dt \\
&= -\int_I g(t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

$\square$

Demostração do Teorema anterior: Fixado $y_0 \in I$ considere

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt.$$

Como $u' \in L^p(I)$, então $u' \in L^1_{loc}(I)$. Desde modo, pelo Lema 2.2 temos

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

Por outro lado

$$\int_I u\varphi' = -\int_I u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I),$$

logo

$$\int_I (u-\bar{u})\varphi' = 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

Pelo Lema 2.1 tem-se

$$u - \bar{u} = c \text{ q.t.p. em } I. \tag{2.4}$$

Tomando

$$\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + c,$$

como $\bar{u}$ é contínua, segue que $\tilde{u} \in \mathcal{C}(I)$ e $\tilde{u} = u$ q.t.p. em I e por (2.4), da definição de $\tilde{u}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) &= \bar{u}(y) + c - \bar{u}(x) - c \\ &= \int_{y_0}^{y} u'(t)dt - \int_{y_0}^{x} u'(t)dt \\ &= \int_{x}^{y} u'(t)dt. \end{aligned}$$

□

Observação 2.5. *O Lema 2.2 mostra que a primitiva v de uma função $g \in L^p$ pertence a $W^{1,p}$, sabemos ainda que $v \in L^p$ sempre I for limitado.*

Observação 2.6. *Segue ainda do Teorema 2.1 que, se $u \in W^{1,p}$ e se $u' \in C(\bar{I})$, isto é, u' admite um representante contínuo em $\bar{I}$, então $u \in C^1(\bar{I})$, mais especificamente $\widetilde{u} \in C^1(\bar{I})$.*

Teorema 2.2. *Seja $u \in L^p$ com $1 < p < \infty$, as seguintes propriedades são equivalentes*

1. $u \in W^{1,p}$

2. *existe uma constante C tal que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}(I), \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

Além disso, nos temos que $C = \|u'\|_{L^p}$.

Demonstração. (1)⇒(2) Como $u \in W^{1,p}$, então existe $u' \in L^p$ tal que

$$\int_I u\varphi' = \int_I u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I).$$

Deste modo

$$\begin{aligned}\left|\int_I u\varphi'\right| &= \left|\int_I u'\varphi\right| \\ &\leq \left(\int_I |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |\varphi|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \|u'\|_p \|\varphi\|_{p'},\end{aligned}$$

tomando $\|u'\|_p = C$ tem-se

$$\left|\int_I u\varphi'\right| = C\|\varphi\|_{p'}, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

(2)$\Rightarrow$(1) Considere o funcional linear

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C}_c^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto G(\varphi) = \int_I u\varphi'.\end{aligned}$$

O funcional está definido em um subespaço denso de L^p $(p' < \infty)$ e G é contínuo em relação a norma de $L^{p'}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, onde $c = \|u\|_p$, então sempre que $\|\varphi' - \psi'\|_{p'} < \delta$ tem-se

$$\begin{aligned}|G(\varphi) - G(\psi)| &= \left|\int_I u\varphi' - \int_I u\phi'\right| \\ &= \left|\int_I u(\varphi - \psi)'\right| \\ &\leq c\|\varphi' - \psi'\|_{p'} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto podemos estendê-lo a um funcional linear limitado F definido em todo $L^{p'}$, aplicando o Teorema de Hanh-Banach. E pelo Teorema de Representação de Riez, existe $g \in L^p$ tal que

$$\langle G, \varphi \rangle = \int_I g\varphi, \forall \varphi \in L^{p'}.$$

Em particular

$$\int_I u\varphi' = \int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1$$

e assim $u \in W^{1,p}$. □

Observação 2.7 (Funções absolutamente contínuas e Funções de variação limitada)**.** *Quando $p = 1$, a implicação (1)$\Rightarrow$(2) permanece válida mas não vale a reciproca. Para ilustrar este fato, suponhamos I um intervalo limitado. As funções u satisfazendo (1) com $p = 1$, isto é, as funções em $W^{1,p}(I)$, são chamadas funções absolutamente contínuas. Elas são caracterizadas por*

$$\textbf{\textit{(AC)}} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ tal que para cada sequência finita de intervalos disjuntos} \\ (a_k, b_k) \subset I \textit{ tal que } \sum |b_k - a_k| < \delta, \textit{ temos } \sum |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Por outro lado, as funções u satisfazendo (2) com $p = 1$ são chamadas funções de variação limitada podem ser caracterizada de diferentes maneiras:

1. *Elas são a diferença de duas funções limitadas não-decrescentes (possibilitando descontinuidade) em I.*

2. *Elas são funções u satisfazendo a propriedade de*

$$\textbf{(VL)}\begin{cases} \exists c \text{ tal que } \sum_{i=0}^{k-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \le c, \\ \forall t_0 \le t_1 \le ... \le t_k \text{ em } I \end{cases}$$

Note que funções de variação limitada não precisam ter um representante contínuo.

Teorema 2.3. *Uma função $u \in L^\infty(I)$ pertence a $W^{1,\infty}(I)$ se, e somente se, existe constante c tal que*

$$|u(x) - u(y)| \le c|x - y|, \text{ q.t.p } x, y \text{ em } I.$$

Demonstração. Suponha que $u \in W^{1,\infty}$, sabemos do Teorema 2.1 que

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt \Rightarrow |u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right|.$$

Como $u' \in L^\infty(I)$ temos

$$|u(x) - u(y)| \le \|u'\|_\infty |x - y|, \text{ para } x, y \text{ q.t.p em } I.$$

Reciprocamente, seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$. Para $h \in \mathbb{R}$ com $|h|$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx$$

(estas integrais fazem sentido para h pequeno pois φ tem suporte compacto em I). Utilizando a hipótese sobre u temos

$$\left| \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx \right| = \left| \int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx \right| \le c|h|\|\varphi\|_1.$$

Dividindo por $|h|$

$$\left| \int_I u(x) \left[\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{|h|} \right] dx \right| \le c\|\varphi\|_1,$$

tomando limite quando $h \to 0$ obtemos

$$\left| \int_I u(x)\varphi'(x)dx \right| \le c\|\varphi\|_1, \forall \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Aplicando o Teorema anterior concluímos que $u \in W^{1,\infty}(I)$. □

Teorema 2.4. *Seja $u \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 < p < \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes*

1. *$u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$*

2. *existe uma constante c tal que para todo $h \in \mathbb{R}$*

$$\|u_h - u\|_p \leq c|h|, \ \ onde \ u_h(x) = u(x+h).$$

Além disso, podemos tomar $c = \|u'\|_p$.

Demonstração. (1)$\Rightarrow$ (2) Pelo Teorema 2.1 temos que para todo $x, h \in \mathbb{R}$

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt,$$

tomando a mudança de variável $t = x + sh \Rightarrow dt = hds$, dai

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 hu'(x+sh)ds \Rightarrow |u(x+h) - u(x)| \leq \int_0^1 |h||u'(x-sh)|ds.$$

Pela Desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &\leq \left(\int_0^1 |h|^p |u'(x+sh)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |1|^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}} \\ \Rightarrow |u(x+h) - u(x)|^p &\leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds, \end{aligned}$$

daí segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|dx &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \\ &\leq |h|^p \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx. \end{aligned}$$

Mas para $0 < s < 1$

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x+hs)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy \\ \Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq |h| \left(\int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|u_h - u\|_p \leq |h|\|u\|_p.$$

(2)⇒(1) Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Para todo $h \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} [u(x+h) - u(x)]\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(x+h)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(y)\varphi(y-h)dy - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x-h)dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder e a hipótese em (2)

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx \right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c|h| \|\varphi\|_{p'},
\end{aligned}$$

deste modo

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x+h) - \varphi(x)]dx \right| \leq c|h| \|\varphi\|_{p'}.$$

Dividindo por $|h|$ e tomando o limite quando $h \to o$ obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u\varphi' \right| \leq c\|\varphi\|_{p'}.$$

Aplicando o Teorema 2.2 concluimos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. □

Certas operações analiticas basicas tem um significado apenas para as funções definidas sobre toda a reta real (por exemplo convoluções e transformadas de Forier). Por esse motivo é conviniente quando possível extender a função $u \in W^{1,p}(I)$ para uma função $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. O seguinte resultado trata deste ponto.

Teorema 2.5 (Operador extensão). *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Existe um operado linear limitado $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$, chamado operador extensão, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$Pu|_I = u, \forall u \in W^{1,p}(I)$;*
2. *$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{L^p(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I)$;*
3. *$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I)$.*

onde c depende somente de $|I| \leq \infty$.

Demonstração. Começaremos com o caso em que $I = (0, \infty)$ mostraremos que a extensão é dada pela reflexão

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x), \text{ se } x \geq 0 \\ u(-x), \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Pela forma como Pu está definida temos claramente satisfeita a propriedade (1), e ainda

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |Pu|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{-\infty}^{0} |Pu|^p + \int_{0}^{+\infty} |Pu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\|u\|_{L^p(I)} \end{aligned}$$

Tomemos

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) \text{ se } x \geq 0 \\ -u'(-x) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Note que $v \in L^p$. De fato

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{0} |-u'(-x)|^p dx + \int_{0}^{+\infty} |u'(x)|^p dx,$$

mas

$$\int_{-\infty}^{0} |-u'(-x)|^p dx = \int_{0}^{+\infty} |-u'(y)|^p dy = \int_{0}^{+\infty} |u'(x)|^p dx < \infty,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^p dx < \infty.$$

Além disso

$$u^*(x) - u^*(0) = \int_{0}^{x} v(t)dt, \forall x \in \mathbb{R},$$

de onde segue que $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u^{*'}\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq 2(\|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}. \end{aligned}$$

Agora consideremos o caso onde I é um intervalo limitado. Sem perda de generalidade consideremos o intervalo $I = (0, 1)$. Fixemos uma função $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta \leq 1$, tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x < \frac{1}{4} \\ 0 \text{ se } x > \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Dado uma função f definida em $(0,1)$, seja

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ se } x > 1 \end{cases}.$$

Precisaremos da seguinte afirmação

Afirmação 2.1. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$. *Então*

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,+\infty) \ e \ (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u'}.$$

Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1((0,+\infty))$, então

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \eta\tilde{u}\varphi' &= \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\ &= -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi \text{ já que } \eta\varphi \in \mathcal{C}_c^1((0,1)) \\ &= -\int_0^1 (u'\eta + u\eta')\varphi. \end{aligned}$$

ficando assim demonstrada a afirmação. Voltando a prova do teorema, dado $u \in W^{1,p}(I)$ escrevemos

$$u = \eta u + (1-\eta)u.$$

A função ηu é a primeira extensão para $(0,+\infty)$ pela $\eta\tilde{u}$ e em seguida extendendo a toda reta real pela reflexão. Desta forma obtemos uma função $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que estende ηu e tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \qquad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

onde c depende de $\|\eta'\|_\infty$. Procedendo do mesmo modo com $(1-\eta)u$, ou seja, primeiro estendendo para $(-\infty,1)$ por 0 e então estendendo para toda a reta real por reflexão(desta vez sobre o ponto 1, não no ponto 0). Desta forma, obtemos uma função $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, que extende $(1-\eta)u$ e satisfaz

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|v_2\|_{L^p(I)}, \qquad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|v_2\|_{W^{1,p}(I)}$$

Então definindo $Pu = v_1 + v_2$, tal aplicação satisfaz as condições do teorema, ficando assim demonstrado o resultado. □

Certas propriedades de funções $\mathcal{C}^1$ permanecem verdadeiras para funções em $W^{1,p}$. É conveniente estabelecer estas propriedades por um argumento de densidade com base nos seguintes resultados.

Teorema 2.6 (Densidade). *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então exite uma sequência $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

Observação 2.8. *Em geral, não ha sequência $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$. Isso esta em contraste com os espaços L^p onde para cada função $u \in L^p(I)$ existe uma sequência $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ tal que $u_n \to u$ em $L^p(I)$.*

Demonstração. Podemos sempre supor $I = \mathbb{R}$; caso contrário estenderemos u para uma função pertecente a $W^{1,p}(\mathbb{R})$ pelo Teorema 2.5. Usaremos um técnica básica de convolução e cut-off.

(a) Convolução

Precisamos do seguinte lema

Lema 2.3. *Seja $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ e $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad e \quad (\rho \star v)' = \rho \star v'$$

Demonstração. Primeiramente suponhamos que ρ tenha suporte compacto. Sabemos pelo Teorema 1.15 que $\rho \star v \in L^p(\mathbb{R})$. Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$; pelos Teoremas 1.16 e 1.20 obtemos

$$\int (\rho \star v)\varphi' = \int v(\check{\rho} \star \varphi') = \int v(\check{\rho} \star \varphi)' = \int v'(\check{\rho} \star \varphi) = -\int (\rho \star v')\varphi,$$

Daí obtemos que

$$\rho \star v \in W^{1,p} \quad \text{e} \quad (\rho \star v)' = \rho \star v'.$$

Se ρ não tem suporte compacto, pelo Corolário 1.1, introduzimos uma sequência (ρ_n) de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \to \rho$ em $L^1(\mathbb{R})$. Daí segue que

$$\rho_n \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad (\rho_n \star v)' = \rho_n \star v'.$$

Mas $\rho_n \star v \to \rho \star v$ em $L^p(\mathbb{R})$ e $\rho_n \star v' \to \rho \star v'$ em $L^p(\mathbb{R})$ pelo Teorema 1.15, então concluimos com a ajuda da observação 2.3 que

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad (\rho \star v)' = \rho \star v'.$$

□

(b) Cut-off

Fixada uma função $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ e

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases},$$

defina a sequência

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right), \text{ para } n = 1, 2, 3...$$

Segue facilmente pelo Teorema da Convergência Dominada que se uma função f pertence $L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leq p < \infty$, então $\zeta_n f \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$.

(c) Conclusão

Escolha uma sequência regularizante (ρ_n). Afirmamos que a sequência $u_n = \zeta_n(\rho_n \star u)$ converge para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Primeiramente mostraremos que $\|u_n - u\|_p \to 0$.

De fato,

$$u_n - u = \zeta_n(\rho_n \star u) - u = \zeta_n((\rho_n \star u) - u) + (\zeta_n u - u),$$

e assim

$$\|u_n - u\|_p \leq \|\rho_n \star u - u\|_p + \|\zeta_n u - u\|_p \to 0.$$

Em seguida, pelo Lema 2.3 obtemos

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n \star u) + \zeta_n(\rho_n \star u').$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u_n' - u\|_p &\leq \|\zeta_n'(\rho_n \star u)\|_p + \|\zeta_n(\rho_n \star u') - u'\|_p \\ &\leq \frac{c}{n}\|u\|_p + \|\rho_n \star u' - u'\|_p + \|\zeta_n u' - u'\|_p \to 0, \end{aligned}$$

onde $c = \|\zeta'\|_\infty$.

$\square$

O próximo resultado é um importante protótipo para as Desigualdades de Sobolev.

Teorema 2.7. *Existe uma constante c dependendo de $|I| \leq \infty$ tal que*

(1) $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty.$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I)$ está imerso contínuamente em $L^\infty(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Mais ainda, se I for limitado então

(2) A imersão $W^{1,p}(I) \subset \mathcal{C}(I)$ é compacta para todo $1 < p \leq \infty$.

(3) A imersão $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Começaremos provando (1) para $I = \mathbb{R}$ pois o caso geral segue deste pelo Teorema 2.5. Seja $v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ se $1 \leq p < \infty$ e $G(s) = |s|^{p-1}s$.

A função $w = G(v)$ pertence a $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ e

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Assim, para $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt,$$

e pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_p^{p-1}\|v'\|_p.$$

Daí podemos concluir que

$$\|v\|_\infty \leq c\|v\|_{W^{1,p}}, \forall v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}), \tag{2.5}$$

onde c é uma constante universal que independe de p. Utilizaremos a seguir alguns argumentos de densidade. Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, então existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ pelo Terorema 2.6. Aplicando (2.5) vemos que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(\mathbb{R})$. Assim $u_n \to u$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ e obtemos (1).

Agora provaremos (2) Seja $\mathcal{H}$ a bola unitária em $W^{1,p}(I)$ com $1 < p \leq \infty$. Para $u \in \mathcal{H}$ temos

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \leq \|u'\|_p|x-y|^{\frac{1}{p'}} \leq |x-y|^{\frac{1}{p'}}, \forall x, y \in I$$

Segue então do Teorama de Ascoli-Arzela que $\mathcal{H}$ tem fecho compacto em $\mathcal{C}(\bar{I})$.

Prova de (3): Seja $\mathcal{H}$ a bola unitária em $W^{1,1}(I)$. Seja P o operador extensão do Teorema 2.5 e tome $\mathcal{F} = P(\mathcal{H})$ de modo que $\mathcal{H} = \mathcal{F}|_I$. Provaremos que $\mathcal{H}$ tem fecho compacto em $L^q(I)$, para todo $1 \leq q < \infty$ aplicando o Teorema (4.26). Claramente $\mathcal{F}$ é limitado em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, portanto $\mathcal{F}$ é também limitado em $L^q(\mathbb{R})$, uma vez que é limitado tanto em $L^1(\mathbb{R})$ quanto em $L^\infty(\mathbb{R})$. Vamos agora verificar a hipótese do Teorema de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, isto é,

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\| = 0 \quad \text{unifomemente em } f \in \mathcal{F}$$

Pela Teorema 2.4 temos, para cada $f \in \mathcal{F}$,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |h|\|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c|h|,$$

como $\mathcal{F}$ é uma subconjunto limitado de $W^{1,1}(\mathbb{R})$. Temos

$$\|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R})}^q \leq (2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{q-1}\|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} < c|h|$$

e consequentemente

$$\|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq c|h|^{\frac{1}{q}},$$

onde c independe de f o resultado segue desde que $q \neq \infty$ $\square$

Observação 2.9. *A imerão $W^{1,1}(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$ é contínua mas nunca compacta, mesmo que o intervalo seja limitado. Entretanto se (u_n) é uma sequência limitada de $W^{1,1}(I)$, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que $u_{n_k}(x)$ converge para todo $x \in I$. Quando I é ilimitado e $1 < p \leq \infty$, sabemos que a imersão $W^{1,1}(I)$ é contínua porém essa imersão nunca é compacta. No entanto, se (u_n) é uma sequência limitada em $W^{1,p}(I)$ com $1 < p \leq \infty$, existe um subsequência (u_{n_k}) e alguma $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em $L^\infty(J)$ para cada subconjunto J limitado de intervalo I.*

Observação 2.10. *Sejam I um intervalo limitado, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Pelo teorema 2.1 e por (1) podemos ver facilmente que a norma*

$$|||u||| = \|u'\|_p + \|u\|_q$$

é equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$.

Observação 2.11. *Seja I um intervalo ilimitado. Seja $u \in W^{1,p}(I)$, então $u \in L^q(I)$ para todo $q \in [p, \infty]$ visto que*

$$\int_I |u|^q \leq \|u\|_\infty^{q-p} \|u\|_p^p.$$

Mais geralmente u não pertence a $L^p(I)$ para $q \in [1, p)$.

Corolário 2.1. *Suponha que I é um intervalo ilimitado e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.6 existe uma sequência (u_n) em $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$. Afirmamos de (1) que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ escolhemos n suficientemente grande tal que $\|u_n - u\|_{L^P(I)} < \varepsilon$. Para $|x|$ grande $u_n(x) = 0$ desde que $u_n \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ e assim $|u(x)| < \varepsilon$. $\square$

Corolário 2.2 (Regra do Produto). *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I)$$

e

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.6}$$

Além disso abtemos a formúla da integral por partes

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \forall x, y \in \bar{I}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Primeiramente lembremos que $u \in L^\infty$, pelo Teorema 2.7 e daí $uv \in L^p$. Para mostrarmos que $(uv)' \in L^p$, começaremos com o caso $1 \leq p < \infty$. Sejam (u_n) e (v_n) sequências em $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ e $v_n \to v$ em $W^{1,p}(I)$. Assim $u_n|_I \to u$ e $v_n \to v$ em $L^\infty(I)$ e, novamente pelo Teorema 2.7, segue que $u_n v_n \to uv$ em $L^\infty(I)$ e também em $L^p(I)$. Dai temos

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \to u'v + uv' \text{ em } L^p(I).$$

Aplicando a Obsevação 2.3 para a sequência $(u_n v_n)$, concluímos que $uv \in W^{1,p}(I)$.

Para o caso em que $p = \infty$, sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$. Assim $uv \in L^\infty(I)$ e $u'v + uv' \in L^\infty(I)$. Resta-nos mostrar que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Para isso, fixemos um intervalo aberto $J \subset I$ tal que $supp\varphi \subset J$. Assim $u, v \in W^{1,p}(J)$ para todo $p < \infty$ e pelo que acabamos de mostrar

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi,$$

logo

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Por fim integrando (2.6) obtemos (2.7). $\square$

Corolário 2.3 (Derivada da composição). *Seja $G \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, e seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstração. Seja $M = \|u\|_\infty$. Como $G(0) = 0$, existe uma constante c tal que $|G(s)| \leq c|s|$ para todo $s \in [-M, +M]$. Assim $|G \circ u| \leq c|u|$ donde segue que $G \circ u \in L^p(I)$. Analogamente mosta-se que $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Resta-nos mostrar que

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^1. \tag{2.8}$$

Primeiramente suponha o caso em que $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência (u_n) de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$ e também em $L^\infty(I)$. Assim $(G \circ u_n)|_I \to G \circ u$ em $L^\infty(I)$ e $(G' \circ u_n)u_n' \to (G' \circ u)u'$ em $L^p(I)$. Pelas propriedades das funções $\mathcal{C}^1$ obtemos (2.8).

Para o caso em que $p = \infty$ procedemos de maneira análoga ao que foi feito na prova do corolário anterior. $\square$

2.1 O Espaço de Sobolev $W^{m,p}$

Definição 2.2. *Dado um inteiro $m \geq 2$ e um real $1 \leq p < \infty$ definimos por indução o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}; u' \in W^{m-1,p}\}.$$

Definimos também

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

É de facil verificação que $u \in W^{m,p}(I)$ se, e somente se, existem m funções $g_1, g_2, ..., g_m \in L^p(I)$ tal que

$$\int_I uD^j\varphi = (-1)^j \int_I g_j\varphi, \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, 3, ..., m,$$

onde $D^j\varphi$ denota a j-ésima derivada de φ. Podemos assim considerar as derivadas sucessivas de u. $u' = g_1, (u')' = g_2, ...,$ até ordem m. Vamos denotá-las por $Du, D^2u, ..., D^mu$. O espaço $W^{m,p}(I)$ será dotado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_p + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_p,$$

e o espaço $H^m(I)$ será dotado com o produto por escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2} = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_I D^\alpha u D^\alpha v$$

Podemos verificar que a norma $\|\|_{W^{m,p}}$ é equivalente a norma

$$|||u||| = \|u\|_p + \|D^m u\|_p.$$

Mais precisamente prova-se que para cada j, $1 \leq j \leq m-1$ e para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante c dependendo de ε e de $|I| \leq \infty$ tal que

$$\|D^j u\|_p \leq \varepsilon\|D^m\|_p + c\|u\|_p, \forall u \in W^{m,p}(I).$$

Podemos estender para o espaço $W^{m,p}$ todas as propriedade contruídas para $W^{1,p}$.

2.2 O espaço $W_0^{1,p}$

Definição 2.3. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $\mathcal{C}_c^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Denotaremos também*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Podemos ainda introduzir ao espaço $W_0^{1,p}$ a norma de $W^{1,p}(I)$ e de maneira análoga introduzimos ao espaço $H_0^1(I)$ o produto por escalar de $H^1(I)$. Observe que o espaço $W_0^{1,p}$ é um espaço de Banach separável. Mais ainda, é reflexivo se $1 < p < \infty$. O espaço de Hilbert H_0^1 é separável.

Observação 2.12. *Quando $I = \mathbb{R}$ sabemos que $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, pelo Teorema 2.6 e portanto*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Observação 2.13. *Utilizando uma sequência regularizante (ρ_n) é facil verificar que*

1. *$\mathcal{C}_c^\infty(I)$ é denso em $W_0^{1,p}(I)$*
2. *Se $u \in W^{1,p}(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$ então $u \in W_0^{1,p}(I)$*

O próximo resultado caracteriza as funções em $W_0^{1,p}(I)$.

Teorema 2.8. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se $u = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Se $u \in W_0^{1,p}(I)$, existe uma sequência (u_n) em $\mathcal{C}_c^1(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$. Portanto $u_n \to u$ uniformemente em $\bar{I}$ e em consequência disso $u = 0$ em ∂I. Reciprocamente seja $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u = 0$ em ∂I. Fixada uma função $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } |t| \leq 1 \\ t \text{ se } |t| \geq 2 \end{cases}$$

e

$$|G(t)| \leq |t|, \forall \in \mathbb{R},$$

consirede $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$, pelo Corolário 2.3 temos que $u_n \in W^{1,p}(I)$. e ainda

$$supp u_n \subset \left\{ x \in I \text{ tal que } |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Assim $supp u_n$ é um subconjunto compacto de I e utilizando o fato que $u = 0$ em ∂I e $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, $x \in I$. Portanto $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ pelo que vimos na Observação 2.13. Para finalizar é facil ver que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$ pelo Teorema da Convergência Dominada. Portanto $u \in W_0^{1,p}(I)$. □

Observação 2.14. *O Teorema anterior explica o papel central desempenhado pelo espaço $W_0^{1,p}(I)$ nas equações diferenciais parciais pois são muitas vezes associados a estas equações condições de fronteira.*

Observação 2.15. *Vamos mencionar duas outras caracterizações das funções em $W_0^{1,p}$.*

1. *Seja* $1 \leq p < \infty$ *e seja* $u \in L^p(I)$. *Definimos* $\bar{u}$ *por*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & se\ x \in I \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R} - I, \end{cases}$$

   então $u \in W_0^{1,p}(I)$ *se, e somente se* $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$

2. *Seja* $1 < p < \infty$ *e seja* $u \in L^p(I)$. *Então u pertence a* $W_0^{1,p}(I)$ *se, e somente se existe uma constante c tal que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq c\|\varphi\|_{L^{p'}(I)}, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.9 (**Desigualdade de Poincaré**). *Suponha I uma intervalo limitado. Então existe uma constante c dependendo de* $|I| < \infty$ *tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq c\|u'\|_{L^p(I)}, \forall u \in W_0^{1,p}(I) \tag{2.9}$$

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(I)$ com $I = (a, b)$, onde $u(a) = 0$, temos

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Assim $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)}$ e (2.9) segue da Desigualdade de Hölder. □

Observação 2.16. *Se I é limitado, a expressão* $(u', v')_{L^2(I)} = \int_I u'v'$ *define um produto escalar em* $H_0^1(I)$ *a norma associada, isto é* $\|u'\|_{L^2(I)}$, *é equivalente a norma em* $H^1(I)$.

Observação 2.17. *Dado um inteiro* $m \geq 2$ *e um real* $1 \leq p < \infty$ *o espaço* $W_0^{m,p}(I)$ *é o fecho de* $\mathcal{C}_c^m(I)$ *em* $W^{m,p}(I)$. *Daí vemos que*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) \ tal\ que\ u = Du = D^2u = ... = D^{m-1}u = 0 \ em\ \partial I\}.$$

é essencial notar a distinção entre

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) \ tal\ que\ u = Du = 0 \ em\ \partial I\}$$

e

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) \ tal\ que\ u = 0 \ em\ \partial I\}$$

2.3 O Dual de $W_0^{1,p}(I)$

O dual de espaço $W_0^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$ é denotado por $W^{-1,p}((I)$ e o espaço dual de $H_0^1(I)$ é denotado por $H^{-1}(I)$.

Sabemos que é possível identificar L^2 com o seu dual, mas não é possível identificarmos H_0^1 com o seu dual. Obteremos, na verdade,

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1},$$

onde estas imersões são contínuas e densas.

Se I for um intervalo limitado temos

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \quad \text{para todo } 1 \leq p < \infty$$

com imersões contínuas.

Se I for um intervalo limitado temos apenas

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq 2$$

com imersões contínuas.

Os elementos de $W^{-1,p'}$ podem ser representados com a utilização das funções em $L^{p'}$. Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado

Teorema 2.10. *Seja $F \in W^{-1,p}(I)$. Então existem duas funções $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$ tais que*

$$\langle F, u \rangle = \int_I f_0 u + \int_I f_1 u', \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

e

$$\|F\|_{W^{-1,p}(I)} = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}.$$

Quando I é limitado e podemos tomar $f_0 = 0$.

Demonstração. Considere o espaço produto $E = L^p(I) \times L^p(I)$ com a norma

$$\|h\| = \|h_0\|_{L^p(I)} + \|h_1\|_{L^p(I)} \text{ onde } h = [h_0, h_1]$$

Definimos a aplicação

$$T : W_0^{1,p}(I) \to E$$

$$u \mapsto [u, u']$$

é uma isometria de $W_0^{1,p}(I)$ em E. O conjunto $G = T(W_0^{1,p}(I))$ dotado com a norma de E e $S = T^{-1} : G \to W_0^{1,p}(I)$. A aplicação $h \in G \to \langle F, Sh \rangle$ é um funcional linear contínuo em G. Pelo Teorema de Hanh-Banach, podemos estendê-lo à um funcional contínuo Φ para todo E com $\|\Phi\|_{E^*} = \|F\|$. Pelo Teorema da Representação de Riesz nós sabemos que exitem duas funções

$f_0, f_1 \in L^p(I)$ tal que
$$\langle \Phi, h \rangle = \int_I f_0 h_0 + \int_I f_1 h_1, \forall h = [h_0, h_1] \in E.$$
É facil verificar que $\|\Phi\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}$ e temos também
$$\langle \Phi, Tu \rangle = \langle F, u \rangle = \int_I f_0 u + \int_I f_1 u', \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$
Quando I é limitado o espaço $W_0^{1,p}(I)$ pode ser equipado com a norma $\|u'\|_{L^p(I)}$ como no Teorema 2.9. □

Observação 2.18. *As funções f_0 e f_1 não são as únicas determinadas por F.*

Observação 2.19. *O elemente $F \in W^{-1,p}(I)$ é usualmente identificado com a distribuição $f_0 - f_1'$ que por definição é um funcional linear $u \mapsto \int_I f_0 u + \int_I f_1 u'$ em $\mathcal{C}_c^\infty(I)$.*

Observação 2.20. *A primeira afirmação do teorema anterior também vale para o funcional linear contínuo em $W^{1,p}(I)$ para $1 \leq p < \infty$, isto é, cada funcional linear contínuo F em $W^{1,p}$ pode ser representado por*
$$\langle F, u \rangle = \int_I f_0 u + \int_I f_1 u', \forall u \in W^{1,p},$$
para algumas funções $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

Neste capítulo utilizaremos os passos descritos na motivação do capítulo anterior como um guia para a resulução de problemas interessantes em equações diferenciais. A técnica utilizada a seguir será basicamente a mesma, com algumas diferenças sutis, porém bastante relevantes.

Aplicação 3.1. *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{em} \quad I = (0,1) e f \in L^2(I) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Definição 3.1. *Uma solução clássica de* (3.1) *é uma função* $u \in \mathcal{C}^2(I)$ *satisfazendo* (3.1) *no sentido usual. Uma solução fraca de* (3.1) *é uma função* $u \in H_0^1(I)$ *satisfazendo*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1(I).$$

Existência e Unicidade

Considere o espaço de Hilbert $H_0^1(I)$ *munido com o produto interno:*

$$(u,v)_{H^1} = \int_I u'v' + \int_I u_1 v,$$

e seja $\varphi : H_0^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcional linear e contínuo dado por* $\varphi(v) = \int_I fv$. *Como* $H_0^1(I)$ *é Hilbert, aplicando o Teorema da representação de Riesz existe único* $u \in H_0^1(I)$ *tal que*

$$\varphi(v) = (u,v)_{H^1},$$

ou seja,

$$\int_I fv = \int_I u'v' + \int_I uv, \, \forall v \in H_0^1(I), \tag{3.2}$$

ou seja, u é solução fraca do problema (3.1)*. Note que, pela construção acima u é única solução fraca do problema.*

Regularidade

Note que se $f \in L^2$ e $u \in H_0^1$ é solução fraca então $u \in H^2$. De fato, observe que a igualdade (3.2) *é válida para toda $v \in H_0^1(I)$ daí vale para toda $v \in C_c^1(I)$, ou seja,*

$$\int_I u'v' = \int_I (f-u)v, \, \forall \, v \in C_c^1(I).$$

e assim, como $f - u \in L^2$, segue que $f - u = u''$ e $u' \in H^1$, ou seja, $u \in H^2$.

Se, mais ainda, assumirmos que $f \in C(\bar{I})$, então a solução fraca pertence a $C^2(\bar{I})$. De fato, observe que $(u')' = f - u \in C(\bar{I})$, portanto, pela Observação 2.6, $u' \in C^1(\bar{I})$ e, pelo mesmo argumento, $u \in C^2(\bar{I})$, ou seja a solução fraca e de classe $C^2(\bar{I})$. Precisamos agora mostrar que u é solução clássica.

De fato, como $u \in C^2(\bar{I})$ e $u(0) = u(1) = 0$ e satisfaz (3.1)*, utilizando integração por partes obtemos*

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0, \, \forall \, \varphi \in C_c'(I).$$

Portanto, pelo Corolário 1.2, segue que

$$-u'' + u = f \;\; em \; I,$$

e portanto u é solução clássica do problema desde que $u \in C^2(\bar{I})$.

Se $f \in H^k(I)$, com k um inteiro maior ou igual a 1, é fácil verificar por indução que a solução da equação pertence a $H^{k+2}(I)$.

O método descrito anteriormente é extremamente flexível e pode ser adaptado para uma grande diversidade de problemas, como faremos a seguir.

Aplicação 3.2. *Considere o seguinte problema não homogêneo com condições de Dirichlet.*

$$\begin{cases} \quad -u'' + u = f & em \quad I = (0,1) \\ u(0) = \alpha, \; u(1) = \beta \end{cases} \tag{3.3}$$

com α, $\beta \in \mathbb{R}$ dadas e $f \in L^2(I)$.

Fixemos uma função u_0 tal que $u_0(0) = \alpha$ e $u_0(1) = \beta$. Considerando a aplicação $\widetilde{u} = u - u_0$, *temos que u satisfaz* (3.3) *se, e somente, se* $\widetilde{u}$ *satisfaz*

$$\begin{cases} -\widetilde{u}'' + \widetilde{u} = f + u_0'' - u_0 \quad em \quad I = (0,1) \\ \widetilde{u}(0) = 1 = \widetilde{u}(1) = 0 \end{cases} . \tag{3.4}$$

Reduzimos o nosso problema inicial as condições da Aplicação 3.1, daí segue que 3.4 possui solução.

Aplicação 3.3. *Consideramos agora o caso geral*

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \quad em \quad I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$, $q \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$, $r \in C(\bar{I})$*e* $f \in L^2(I)$ *são dados, com* $p(x) \geq \alpha$, $\forall x \in I$,$q > 0$. *Se u é uma solução clássica de* (3.5) *temos*

$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv, \forall\, v \in H_0^1.$$

Considere o espaço $H_0^1(I)$ *e*

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv,$$

uma forma bilinear contínua. Em geral, esta forma não é simétrica. Porém vamos recuperar sua simetria como segue.

Considere R a primitiva de $\frac{r}{p}$ *e seja* $\zeta = \exp(-R)$. *Multiplicando a equação* (3.5) *por* ζ *obtemos*

$$-\zeta pu'' - \zeta p'u' + \zeta ru' + \zeta qu = \zeta f, \tag{3.6}$$

desde que $\zeta' p + \zeta r = 0$. *Note que*

$$\begin{aligned} -(\zeta pu')' &= -\zeta pu'_{\zeta}(p'u' + pu'') \\ &= -\zeta' pu' - \zeta p'u' - \zeta pu'' \\ &= \zeta ru' - \zeta p'u' - \zeta pu''. \end{aligned}$$

Então obtemos de (3.6) *que*

$$-(\zeta pu')' + \zeta qu = \zeta f. \tag{3.7}$$

Definimos em H_0^1 *a forma bilinear simétrica contínua, como no exemplo anterior*

$$a(u,v) = \int_I \zeta pu'v' + \int_I \zeta quv.$$

De maneira análogo ao que fizemos usando o Teorema de Representação de Riesz garantimos existência e unicidade de solução para o problema (3.7) *e, consequentemente, para o problema inicial.*

Aplicação 3.4. *Considere o problema homogêneo com condições de Neumann.*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & em \quad I = (0,1) \\ u'(0) = \alpha, \ u'(1) = \beta \end{cases} \tag{3.8}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* f *uma função dada.*

Se u *é uma solução fraca de* (3.8) *temos*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1), \forall v \in H^1(I).$$

Trabalharemos no espaço $H^1(I)$ *pois, a priori, não temos qualquer informação sobre* $u(0)$ *e* $u(1)$.

Considere $\varphi : H^1(I) \to \mathbb{R}$ *definido por* $\varphi(v) = \int_I fv$. *Como* H^1 *é Hilbert, aplicando o Teorema da Representação de Riesz existe um único* $u \in H^1(I)$ *tal que*

$$\varphi(v) = (u, v)_{H^1},$$

ou seja,

$$\int_I fv = \int_I u'v' + \int_I uv, \forall\, v \in h^1(I),$$

isto é, u *é uma solução fraca de* (3.8). *De* (3.8) *segue, como anteriormente, que* $u \in H^2(I)$. *Usando a identidade* (3.8) *novamente obtemos*

$$-\int u''v + u'v\big|_0^1 + \int uv = \int fv, \forall\, v \in H^1,$$

ou seja,

$$\int (-u'' + u' - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \forall\, v \in H^1. \tag{3.9}$$

De (3.9) *temos*

$$\int (-u'' + u' - f)v = 0, \forall\, v \in H_0^1(I),$$

pelo Corolário 1.2 obtemos $-u'' + u = f$, *e retornando a* (3.9) *segue que*

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \forall\, v \in H^1.$$

e desde que $v(0)$ *e* $v(1)$ *são arbitrários, deduzimos que* $u'(0) = u'(1) = 0$.

Aplicação 3.5 (O problema de valor de fronteira em $\mathbb{R}$)**.** *Considere o problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 & \text{com } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{3.10}$$

com $f \in L^2(\mathbb{R})$. Uma solução clássica de (3.10) é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ satisfazendo (3.10) no sentido usual. Uma solução fraca de (3.10) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv, \forall v \in H^1(\mathbb{R}).$$

Temos primeiramente que provar que qualquer solução classica u é uma solução fraca; vamos verificar primeiro que $u \in H^1(\mathbb{R})$. Tomemos uma sequência (ζ_n) de função cut-off como na prova do Teorema 2.6. Multiplicando (3.10) por $\zeta_n u$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} u'(v'u)\zeta_n + \int_{\mathbb{R}} u^2 v\zeta_n = \int_{\mathbb{R}} fvu\zeta_n$$

e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u'(\zeta_n u' + \zeta_n' u) + \int_{\mathbb{R}} \zeta_n u^2 = \int_{\mathbb{R}} \zeta_n fu,$$

daí deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_n(u'^2 + u^2) = \int_{\mathbb{R}} \zeta_n fu + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n'' u^2. \tag{3.11}$$

Mas

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n'' u^2 \leq \frac{C}{n^2}\int_{n<|x|<2n} u^2 \text{ com } C = \|\zeta''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e $\frac{C}{n^2}\int_{n<|x|<2n} u^2 \to 0$ quando $n \to \infty$, desde que $u(x) \to 0$ com $|x| \to \infty$.

Pela Desigualdade de Hölder, obtemos ainda a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_n fu \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n u^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n f^2$$

e assim substituindo-a em (3.11) concluímos que $\int_{\mathbb{R}} \zeta_n(u'^2 + u^2)$ permanece limitado quando $n \to \infty$ e portanto $u \in H^1(\mathbb{R})$. Assumindo que u é uma solução clássica de (3.10), temos

$$\int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv, \forall v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}). \tag{3.12}$$

Por densidade (e desde que $u \in H^1(\mathbb{R})$) tal fato vale para todo $v \in H^1(\mathbb{R})$. Portanto u é uma solução fraca para (3.10). Para obtermos existência e unicidade da solução fraca é suficiente *aplicarmos o Teorema de Representação de Riesz no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R})$. Verifica-se facilmente que a solução fraca u pertence a $H^2(\mathbb{R})$ e além disso se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ então $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Concluímos assim, usando a proposição anterior, dado que $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, o problema (3.10) tem única solução clássica que, além disso, pertence a $H^2(\mathbb{R})$.*

3.1 O Princípio do Máximo

Teorema 3.1. *Seja $f \in L^2(I)$ com $I = (0,1)$ e seja $u \in H^2(I)$ a solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ em } I \\ u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta. \end{cases} \tag{3.13}$$

Então temos, para cada $x \in I$,

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_I f\} \leq u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}.$$

Demonstração. **(Método de truncamento de Stampacchia)**

Sabemos que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1(I). \tag{3.14}$$

Fixemos uma função $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que

1. G estritamente crescente em $(0, +\infty)$,
2. $G(t) = 0$ para $t \in (-\infty, 0]$.

Consideremos $K = \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}$ e suponhamos que $K < \infty$. Mostraremos que $u \leq K$ em I. De fato, a função $v = G(u - K)$ pertence a $H^1(I)$ e o mesmo para $H_0^1(I)$, desde que

$$u(0) - K = \alpha - K \leq 0 \text{ e } u(1) - K = \beta - K \leq 0.$$

Aplicando v em (3.14), obtemos

$$\int_I u'^2 G'(u - K) + \int_I uG(u - K) = \int_I fG(u - K),$$

e somando $-\int_I KG(u - K)$ a ambos os lados obtemos

$$\int_I u'^2 G'(u - K) + \int_I (u - K)G(u - K) = \int_I (f - K)G(u - K).$$

Mas $(f-K) \leq 0$ e $G(u-K) \geq 0$, donde segue que $(f-K)G(u-K) \leq 0$, e portanto

$$\int_I (u-K)G(u-K) \leq 0.$$

Desde que $tG(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ a desigualdade anterior implica que $(u-K)G(u-K) = 0$ q.t.p. donde segue que $u \leq K$ q.t.p. em todo I, desde que u é contínua para todo x.

Obtemos o outro lado da desigualdade aplicando $-u$, ficando assim demonstrado o resultado. □

Corolário 3.1. *Seja u uma solução de* (3.13)

1. *Se $u \geq 0$ em ∂I e se $f \geq 0$ em I, então $u \geq 0$ em I.*

2. *Se $u = 0$ em ∂I e se $f \in L^{\infty}(I)$, então $\|u\|_{L^{\infty}(I)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(I)}$.*

3. *Se $f = 0$ em I, então $\|u\|_{L^{\infty}(I)} \leq \|u\|_{L^{\infty}(\partial I)}$.*

Demonstração. 1. Supondo $\alpha, \beta \geq 0$ e $f \geq 0$, então pelo teorema anterior

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_I f\} \leq u(x), \forall x \text{ em } I.$$

Daí segue que $u \geq 0$.

2. Supondo $\alpha, \beta = 0$ e $f \in L^{\infty}(I)$, ou seja $\exists\ C$ tal que $|f(x)| \leq C$. Mas

$$u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\} \leq \max\{\alpha, \beta, \|f\|_{L^{\infty}(I)}\}, \forall x \in I$$

Dai segue que $\|u\|_{L^{\infty}(I)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(I)}$.

3. Supondo $f = 0$ em I, temos

$$u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, 0\} = \max\{u(0), u(1), 0\} \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\} = \|u\|_{L^{\infty}(\partial I)}, \forall x \in I.$$

Dai segue que $\|u\|_{L^{\infty}(I)} \leq \|u\|_{L^{\infty}(\partial I)}$.

□

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate studies in mathematics, American mathematical society, ed.19, (1998).

[2] Lima, E. L., *Curso de análise volume* 2, Projeto Euclides Rio de Janeiro: IMPA, ed.11 2009.

[3] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations* , Springer New York 18 (5 e 6), $1043 - 1054$, 1993.

[4] Isnard, Carlos. *Introdução à medida e integração*, Projeto Euclides Rio de Janeiro: IMPA, ed, 2 2009.