Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

AO INFINITO E ALÉM:

Como o conteúdo matemático passa da percepção concreta à abstrata, exemplificando-se através de conceitos e resultados similares presentes na Geometria Analítica, na Álgebra Linear e na Análise Funcional.

Eudes Mendes Barboza

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (Orientador)
Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa (Co-Orientadora)

julho/2011
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

AO INFINITO E ALÉM:

Como o conteúdo matemático passa da percepção concreta à abstrata, exemplificando-se através de conceitos e resultados similares presentes na Geometria Analítica, na Álgebra Linear e na Análise Funcional.

Eudes Mendes Barboza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (Orientador)
Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa (Co-Orientadora)

julho/2011
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B239i Barboza, Eudes Mendes.
Ao infinito e além: como o conteúdo matemático passa da percepção concreta à abstrata, exemplificando-se através de conceitos e resultados similares presentes na geometria analítica, na álgebra linear e na análise funcional / Eudes Mendes Barboza. - João Pessoa, 2011.
87 f. : il.

Orientação: João Marcos Bezerra DO Ó.
Coorientação: Flávia Jerônimo Barbosa.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Geometria analítica. 3. Algebra linear. 4. Análise funcional. I. DO Ó, João Marcos Bezerra. II. Barbosa, Flávia Jerônimo. III. Título.

UFPB/BC

AO INFINITO E ALÉM:
Como o conteúdo matemático passa da percepção concreta à abstrata, exemplificando-se através de conceitos e resultados similares presentes na Geometria Analítica, na Álgebra Linear e na Análise Funcional.

por

Eudes Mendes Barboza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (Orientador)
Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa (Co-Orientadora)

Aprovada em 19 de julho de 2011.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (Orientador)

Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa (Co-orientadora)

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que estiveram comigo ao longo dessa caminhada e me ajudaram direta ou indiretamente.

1. Minha família: minhas mães donas Lourdes, minha irmã Li, minha prima Suênya e minhas tias Marta e Glória que me deram suporte para transpor as dificuldades encontradas ao logo desses últimos anos.

2. A todos os meus colegas com os quais pude contar nessa jornada acadêmica, em especial aos meninos do Milênio, que transpassaram a barreira do coleguismo e se tornaram amigos, como Gersica, Rubicelly(PAC), Enieze, em alguns casos, irmãos como Ellen, Esteban e Elize, e até mesmo, uma filha a Raissa. Valeu galera.

3. Aos meus Professores, em especial , a meus orientadores Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó e a Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa, por terem aceitado me ajudar nessa jornada e me estimulado a realizar esse trabalho. Muito obrigado.

4. A Ricardo Pinheiro, Suelen Rocha, Alissá Grimmuza, Sheldon Miriel e Nayana Lobo por terem me ajudado de forma significativa nesta fase final.

5. A meus padrinhos Val e Freire e as minhas amigas Tati, Renata (Kelly), Lu, Niedja, etc. que mesmo estando longe contribuem positivamente para o meu crescimento.

6. E a Deus, muito obrigado Senhor, por ter me erguido e amparado em todos os momentos difíceis da minha vida.

Dedicatória

À minha família, aos meus estimados professores, a meus queridos alunos e a meus fies amigos.

Resumo

O pensamento matemático vem se desenvolvendo junto com a humanidade. Atualmente, grande parte desse conhecimento apresenta-se de maneira sistematizada para o ambiente escolar e/ou acadêmico sob a forma de conteúdos para serem ensinados a indivíduos que podem se encontrar em patamares de estudo que vão dedes a Educação Básica até a Pós-graduação. No entanto, pretendemos mostrar que independentemente de grau de sofisticação em que se encontra esse tipo de conteúdo, ele guarda características intrínsecas como a gradativa evolução de um nível onde os conceitos e resultado podem ser entendidos concretamente para níveis onde a abstração é cada vez mais presente, sem, no entanto, perder o contato com a concretude que iniciou a sua teoria. Aspectos como este já haviam sido levantados por Aristóteles, e mais recentemente, Piaget através de sua concepção construtivista reforça que a ampliação do conhecimento em um contexto mais geral se dar mediante conhecimentos prévios baseados na realidade na qual o sujeito está inserido. Particularmente relativa à Matemática, a teoria piagetiana prega que através da interação com uma realidade concreta se podem atingir níveis de abstração e formalidade para os conteúdos dessa área do conhecimento. Por isso, procuramos descrever como ocorre a passagem do concreto para o abstrato na Matemática por meio de conteúdos das disciplinas do Ensino Superior: Geometria Analítica, Álgebra Linear e Análise Funcional. Mostrando como ocorre a passagem de uma realidade relativamente concreta para outra relativamente abstrata, onde o método axiomático aliado ao conceito de transposição didática contribui para que o conhecimento matemático possa ser compreendido como uma constate evolução de níveis de abstração. E que a efetiva aprendizagem em Matemática só ocorre quando é possível atravessar os níveis de abstração, tanto no sentido ascendente quanto descendente. Sendo a descrição dos conteúdos proposto uma forma bastante ampla de se compreender essa gradação.

Sumário

Introdução

A construção do pensamento matemático em seus primórdio é baseada, a princípio, em observações empíricas e que gradativamente vão se afastando da realidade e atingindo níveis de abstração cada vez maiores. Esta gradação pode ser observada por exemplo quando analisamos a evolução do conceito de número, que surgiu de maneira bastante rudimentar, ainda na pré-História, e atingiu níveis gradativos de abstração até chegar nos atuais números reais e complexos.

Na Grécia Antiga, Aristóteles pregava que o conhecimento matemático inicialmente se origina das experiências sensíveis do ser humano, e pouco a pouco, atinge níveis de abstração, mas mantém contatos com suas referências concretas. Isso aconteceu, por exemplo, com a geometria que foi sistematizada por Euclides,no século V a.C., onde todos os conceitos tinham modelos empíricos nos quais se concretizavam e posteriormente, no século XIX, foram criadas outras geometrias que, a princípio, não eram modeladas empiricamente.

Atualmente, esta evolução do pensamento pode ser acompanhada pelos conteúdos matemáticos que são apresentados em sala de aula, seja em escolas do Ensino Básico ou em aulas do Ensino Superior, onde para passar de um nível mais concreto para outro mais abstrato, é necessário a utilização do conhecimento prévio, ou seja, para se chegar a compreender um conceito abstrato faz-se necessário o uso de conhecimentos mais simples que constituem modelos mais próximos da realidade concreta.

Quando estamos trabalhando nas séries iniciais da Educação Infantil, percebemos que os números naturais são apresentados aos educandos e representados por eles de forma bastante concreta, através de conjunto de tampas, lápis, etc. Por exemplo, quando se pergunta a uma criança qual a sua idade, geralmente, ela responde mostrando os dedos. Nesta fase, ela ainda não consegue relacionar a quantidade representada pelos dedos, nem mesmo com a palavra que expressa essa quantidade. Posteriormente, a resposta a essa mesma pergunta vem em forma oral. Nesta época, a criança já, provavelmente, encontra-se em nível cognitivo que lhe permite representar simbolicamente um número natural, constituindo uma primeira forma de abstração de conceitos matemáticos.

No Ensino Superior de Matemática esse fato se repete, evidentemente com níveis de abstração cada vez maiores. Podemos encontrar esta gradação de níveis de abstração em generalizações de teoremas, como por exemplo, teorema de Stone-Weierstrass-demonstrado em 1937, por Marshall Harvey Stone- o qual é uma generalização do famoso teorema aproximação de Weierstrass - provado em 1885, por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.

Fatos como esse se repetem em toda a vida escolar de um individuo, já que os conteúdos são organizados a partir dos mais simples para o mais complexos. Dessa forma, nos fazemos o seguinte questionamento:como o pensamento matemático, apresentado sobre a forma de conteúdos progride, geralmente, de um nível próximo da realidade empírica (concreta) para uma realidade abstrata?

Acreditamos que ao se exemplificar os conceitos e resultados matemáticos de conteúdos que seguem uma gradação no nível de abstração, podemos verificar como se processa a passagem do concreto para o abstrato no pensamento matemáticos. Por isso, escolhemos apresentar e analisar conceitos e resultados da Geometria Analítica, da Álgebra Linear e da Análise Funcional, pois percebemos que os conteúdos relacionados com essas disciplinas do Ensino Superior seguem uma gradação de níveis de abstração, onde a Geometria Analítica parte de um nível mais concreto, já que seus conceitos e resultados podem ser representado por modelos tridimensionais, ficando a Álgebra Linear no intermédio, já que muitos conceitos da Geometria Analítica são generalizados para dimensão finita e, finalmente, a Análise Funcional trabalha com resultados, também, em dimensão infinita.

Por isso, nos propomos a realizar um estudo cujo principal objetivo é relatar como se processa a gradação no pensamento matemático, partindo de um conhecimento prévio mais concreto até atingir níveis de abstrações complexos, exemplificando esse fato através de conteúdos relativos à Geometria Analítica, à Álgebra Linear e à Análise Funcional.

E para isso, pretendemos: mostrar os níveis de abstração como uma característica presente nos conteúdos matemáticos; descrever como ocorre o processo de gradação do concreto para o abstrato na matemática; e exibir conceitos e resultados relativos à Geometria Analítica, à Álgebra Linear e à Análise Funcional, para exemplificar esse processo de gradação do concreto ao abstrato, enfocando aplicações e contexto sócio-histórico onde se deu o desenvolvimento dessas áreas matemáticas.

Dessa forma, primeiro procuramos justificar a relevância desse estudo para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Em seguida, mostramos os aspectos metodológicos do estudo. Posteriormente, procuramos fundamentar nossas ideias na concepção construtivista, buscando enfocar o conhecimentos matemático, para depois exibir conceitos e resultados da Geometria Analítica, da Álgebra Linear e da Análise Funcional, exibindo a gradação do pensamento matemático do concreto ao abstrato. Para enfim, fazer as discussões e as considerações finais sobre essa esquematização que defendemos a respeito do conhecimento matemático, exemplificada pelos conteúdos apresentados.

Justificativa

O ser humano tenta compreender o que acontece ao seu redor através de observações. Além isso, organiza suas ideias em estruturas conceituais, que denominaremo de modelos. Quando a estes se aplica a lógica, origina-se uma teoria. Seguindo essa padronização, temos que os modelos matemáticos possuem uma coerência lógica e produzem amplas teorias.

Enfocando a Matemática, percebemos que desde a antiguidade se discute como se dá a construção do seu pensamento. Platão defendia que os entes matemáticos já existem independente do homem e caberia ao matemático descobri-los. Já Aristóteles afirmava que a matemática é criação da mente humana, que baseada na realidade concreta, originando modelos que aos poucos vão se distanciando dessa concretude e ganhando caráter mais abstrato, muitas vezes, se tornando bastante distintos do modelo inicial.

Apesar de não haver um consenso de qual dessas duas visões é a mais precisa, notamos que atualmente há uma preocupação no processo de ensino-aprendizagem em matemática de se assumir a postura defendida por Aristóteles, já que pesquisas demonstram que o uso de material concreto, desde as séries iniciais, contribui para otimizar tal processo.

De acordo com RÊGO (2009, p.40)

‘‘ As novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica do aluno. Para tanto, faz-se necessário a introdução da aprendizagem de novos conteúdos de conhecimentos e de metodologias que (...) reconheça, identifique e considera seus conhecimentos prévios como ponto de partida e o prepare para realizar-ser. ”

No entanto, sabemos que, a cada mudança de nível escolar, os conteúdos matemáticos vão se distanciando da realidade concreta e se tornando cada vez mais abstratos. Dessa forma, ao se estudar matemática no Ensino Superior, a abstração se torna uma característica intrínseca dos conteúdos relativos às disciplinas cursadas, e é importante que os futuros profissionais que atuarão nessa área, tanto como professores do Ensino Básico quanto do Superior, tenham consciência de que o aprender e o fazer matemático se constituem em um processo bastante complexos e que na maioria das vezes, para se obter êxito nessas atividades é necessário galgar diversos níveis de abstração matemática, geralmente partindo-se do mais concreto, onde a visualização é uma fonte importante da sua assimilação, até conteúdos bastante abstratos, onde a intuição, aliada ao raciocínio lógico-dedutivo, torna-se um elemento indispensável para a compreensão dos conceitos e resultados mais abstratos.

Segundo PAIS (2002, p. 32) *" é preciso relacionar o trabalho do professor com o trabalho do matemático, não excluindo a possibilidade de conciliar essas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático condiciona uma influência considerável na prática pedagógica. "*

Assim acreditamos que uma visão de como se procede a gradação do concreto ao abstrato do pensamento matemático, através de conteúdos do Ensino Superior, pode servir de modelo para conteúdos mais simples do Ensino Médio, Fundamental e até mesmo da Educação Infantil. Já que os Parâmetros Curriculares Nacionais defendem que *"abstração, precisão, rigor lógico, caráter irrefutável de suas conclusões, bem como o extenso campo de suas aplicações"* são as principais características que devem ser trabalhadas no processo de ensino-aprendizagem da matemática em qualquer nível de ensino.

Metodologia

Neste estudos procuramos descrever como ocorrem as passagens do conhecimento matemático de um nível mais concreto para níveis mais abstratos, para isso buscamos exemplificar essa gradação através de conteúdos relativos à Geometria Analítica, à Álgebra Linear e à Análise Funcional, mostrando que os níveis de abstração como uma característica presente nos conteúdos matemáticos; descrevendo como ocorre o processo de gradação do concreto para o abstrato na matemática; e exibindo conceitos e resultados relativos à Geometria Analítica, à Álgebra Linear e à Análise Funcional

Para o desenvolvimento de um trabalho de cunho científico como este, são necessárias as delimitações dos objetivos a serem atingidos bem como a sistematização para alcançá-los. Essa sistematização, em concordância com LOUREIRO (2000, p. 9), é denominada de metodologia, já que esta "compreende o conjunto de procedimentos necessários para atingir os objetivos do trabalho".

Na fundamentação teórica procuramos ideias que corroborassem as nossa, para isso buscamos bases construtivistas enfocando o processo de ensino-aprendizagem em Matemática, e também, buscamos na concepção aristotélica sobre a Matemática embasamento para justificar a partida do conhecimento matemático do concreto até atingir níveis de abstração que tornam-se uma característica própria da Matemática.

Por fim, buscando exibir os conteúdos das disciplinas de Ensino Superior formalmente, seguindo o modelo axiomático.

As atividades que desenvolvemos para esses fins constitui o que denominamos de **pesquisa bibliográfica**, já que todo o estudo foi realizada a partir de consultas de livros, revistas, artigos. Essa pesquisa abrange duas vertentes principais.

A primeira trata-se de procurar embasamento histórico e pedagógico que vão ao encontro de nossa hipótese, para isso buscamos obras que relatem os ideias de Aristóteles, Piaget e Montessori, pois são pensadores que se enquadram na linha construtivista do pensamento e/ou da educação, procurando destacar as especificidades de suas ideias para a matemática.

Para a outra vertente, procuraremos alicerces para as áreas matemáticas que exporemos no nosso trabalho, a Geometria Analítica, a Álgebra Linear e a Análise Funcional. Para isso, utilizamos livros-textos e notas de aulas que tratem desses assuntos.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

1.1 A concepção construtivista aplicada à Matemática

Não é recente a ideia de que a aprendizagem se desenvolve em diversos estágios, partindo de um mais concreto e, gradativamente, atingindo níveis mais abstratos. Já no século XIX, Montessori defendia que a aprendizagem ocorre de maneira diferentes em três períodos, que gradualmente vão englobando conhecimentos mais abstratos:

- 1^0 **Período**(Do nascimento aos 6 anos.)
  Esta etapa é essencialmente sensorial, assim a aquisição de conhecimento ocorre por meio da exploração e da absorção do meio que circunda o indivíduo;
- 2^0 **Período**(Dos 6 aos 12 anos.)
  Nesta faixa etária, a criança já é capaz de abstrair, passando a relacionar os fatos;
- 3^0 **Período**(A partir dos 12.)
  Neste período o jovem se interessa pelo mundo e é despertado para o problema das causas e efeitos.

Vemos que a construção do conhecimento parte de um nível sensorial, ou seja, baseia-se na experiência empírica onde os sentidos são as principais referências para a compreensão da realidade que circunda cada indivíduo, passa por período intermediário, onde já se busca saber os relações entre os objetos e a realidade, e finalmente atinge o nível se distância da percepção sensorial sem, no entanto, perder o contato com ela.

A base montessoriana foi uma fonte para Piaget desenvolver sua concepção construtivista da aprendizagem, que defende que o indivíduo é protagonista da aquisição do conhecimento. Dessa maneira, *conhecer*, significar atuar sobre a realidade na qual estamos imersos. No entanto, de acordo SALVADOR(2000, p.250),

"atuar no sentido piagetiano não se pode traduzir necessariamente por ações e movimentos visíveis. esse poderia ser o caso das crianças pequenas, que, de alguma maneira, necessitam manipular a realidade que as envolve para poder entendê-la. Na maioria dos casos,porém, essa atividade é interna, mental, ainda que possa basear em objetos físicos. Um sujeito pode estar mentalmente muito ativo sem que por isso tenha de mover ou manipular objetos: quando compara, ordena, classifica conta ou faz deduções

mentais."

Obviamente, as ideias piagetianas podem e devem ser aplicadas nos mais diversos contextos educativos. Particularmente, quando trabalhamos com a aprendizagem do conhecimento matemático, notamos que Piaget serve para justificar como se processa a gradação de níveis de abstração, visto que em tese os conteúdos são organizados de maneira a facilitar a aprendizagem.

Na Matemática, principalmente, ao se estudar conteúdos mais avançados, pode-se basear em uma realidade não necessariamente concreta, mas em uma realidade matemática internalizada, ou seja, construída/adquirida pelo indivíduo a partir de sua proximidade com os conceitos de uma certa teoria matemática. Dessa forma, se aprende a partir de conhecimentos prévios. Isto é justamente o que prega a teoria construtivista, pois de acordo com MIRAS(1996,p. 58),

"As mentes de nossos alunos estão bem longe de parecerem limpas, e a concepção construtivista assume esse fato como um elemento central na explicação dos processos de aprendizagem e ensino na sala de aula. Do ponto de vistar desta concepção aprender qualquer um dos conteúdos escolares pressupõe atribuir um sentido e construir os significados implicados em tal conteúdo. Pois bem, essa concepção não é efetuada a partir do zero, nem mesmo nos momentos iniciais da escolaridade. O aluno constrói pessoalmente um significado (ou o reconstrói do ponto de vista social) com base nos significados que pôde construir previamente. Justamente graças a esta base é possível continuar aprendendo, continuar construindo novos significados ."

Essa base inicial para assimilação de um conteúdo é o que denominamos de conhecimento prévio e torna-se indispensável para a efetivação da aprendizagem. Na Matemática, o conhecimento prévio é um elemento primordial para que se avance no conhecimento. Por exemplo, ao se estudar Análise Funcional, um conhecimento prévio para se ter êxito na assimilação do conteúdos são conceitos vinculados à Álgebra Linear, que são retomados na Análise Funcional.

Segundo à concepção construtivista, as interações que ocorrem entre a realidade e o conhecimento prévio do indivíduo é organizado em forma de esquema, que corresponde, segundo SALVADOR(2009,p.250) *" ao aspecto organizativo de uma ação, a estrutura que permite que essa ação possa repetir-se e ser repetida e aplicada com ligeiras modificações - em situações distintas para conseguir objetivos similares"*

Essencialmente, podemos dizer que o construtivismo piagetiano afirmar que o sujeito vai construindo gradualmente seu conhecimento interagindo com a realidade que o envolve e que, quando esta interação é constante, permite construir novos esquemas e uma realidade própria, que se reflete para a aprendizagem através do conhecimento prévio. Por esse motivo, Piaget prega que a aprendizagem é um processo relativo e aprender depende do estágio de desenvolvimento, que para ele são divididos da seguinte forma:

- **Estágio sensório-motor** (de 0 a 2 anos)
  A inteligência é prática. O bebê começa a resolver problemas cada vez mais

complexos e cria esquemas evolutivos para organizar o mundo que o rodeia espacial, temporal e casualmente;

- **Estágio pré-operatório** (de 2 a 6 anos)
A inteligência passa a ser representativa, já que os esquemas de ações são interiorizados, tornando a criança egocêntrica, pois em sua concepção ela domina o ambiente e produz um pensamento intuitivo, baseado na percepção;

- **Estágio das operações concretas** (dos 6 aos 11 anos)
A inteligência se torna operatória, baseada em um conjunto de operações lógicas, o que, naturalmente, se reproduz em um pensamento mais lógico e formal, permitindo organizar a realidade de uma maneira mais estável, ocorrendo a conservação do seu saber;

- **Estágio das operações formais** (dos 11 aos 15 anos)
Neste estágio temos a inteligência formal que pode ser aplicada a qualquer conteúdo, pois já se tem um pensamento combinatório, ou seja, já é possível fazer todas as combinações e variantes possíveis de um fenômeno, e se formaliza o pensamento hipotético-dedutivo, uma vez que se pode raciocinar a partir de hipóteses.

Outro importante conceito da teoria piagetiana é o de adaptação ou equilibração que resumidamente foi descrita na revista NOVA ESCOLA de abril de 2011 (p. 91), como

“ Utilizados como sinônimos pelo pesquisador suíço[Piaget], os termos se referem ao processo de ampliação de conhecimento, resultado de duas etapas indissociáveis: a assimilação (interação com o meio, como forma de compreender um novo conteúdo) e a acomodação (um processo interno de construção de novas estruturas mentais que possibilitam atingir um patamar superior de conhecimento.) ”

Isso pode ser entendido da seguinte forma: existe um tendência natural em cada indivíduo de assimilar a realidade, que o cerca, aos seus esquemas, no entanto esses esquemas tendem a ser modificados quando em contato com a realidade que se assimila, gerando desequilíbrios nesses esquemas, que requerem reajustes. Então surge a necessidade de retomar um equilíbrio entre os esquemas e o fato relacionado à realidade que causou o desequilíbrio. Isto ocorre ao longo de todo o desenvolvimento. Segundo SALVADOR (2009,p.250):*“a aquisição de novos conhecimentos - como a aquisição espontânea ligada ao desenvolvimento, ou diretamente ligada a uma situação específica do ensino - implica, para Piaget, uma sucessão de desequilíbrios - ajuste -novos equilíbrios-desequilíbrios, etc.”*

Em relação à Matemática, Piaget acreditava que a relação desta com a realidade se dar através de uma profunda relação entre o sujeito pensante e o objeto. Assim, de acordo com MACHADO (2001, p. 43), para Piaget:

“A gênese das operações lógico-matemáticas deve ser buscada (...) neste aspecto de atividades coordenadoras das ações físicas mais elementares. Entretanto, à medida que se desenvolvem operações lógico-matemáticas se diferenciam crescentemente das operações físicas a que correspondiam inicialmente, é como se, paulatinamente, fossem eliminando vínculos entre eles. A partir de certo ponto, as operações formais, as

estruturas matemáticas não só se distinguem substancialmente das operações físicas como, no dizer de Piaget, superam a realidade experimental, numa última etapa, as construções axiomáticas que organizam as operações formais são elaboradas de forma independente da experiência física consistindo, às vezes, na própria negação das condições impostas pela realidade experimental. "

Com isso, podemos entender que, para a concepção piagetiana, o desenvolvimento da Matemática segue o esquema seguinte: os entes matemáticos surgiriam da interação entre o indivíduo e o objeto; em seguida, os entes se afastam do objeto concreto original, sem num entanto perder o contato quando passamos para níveis mais abstrato. Um bom exemplo para essa concepção é o que acontece com vetores, que na Geometria Analítica têm sua representação visual através de segmentos de retas orientados e que no contexto da Álgebra Linear pode representar matrizes ou funções, entre outros entes matemáticos.

No entanto, essa ideia de que o pensamento matemático surge da interação com a realidade empírica e se distancia alcançados diferentes níveis de abstração, sem perder a interrelações entre os níveis, já encontrava um defensor muitos séculos antes. Aristóteles pregava, conforme MACHADO (2001 p. 21) *"a Matemática seria(...), o estudo das abstrações matemáticas elaboradas pelos matemáticos a partir dos objetos do mundo da percepção sensível "*, mas evidenciando que se deva ter uma formalização das teorias matemáticas através de um sistema de proposições articuladas que podem se distanciar dessa realidade, mas que ainda mantém um relação de identificação com aquela.

1.2 Modelo Axiomático

Como estamos tratando do conhecimento matemático é importante descrever como tal pensamento é formulado e apresentado formalmente. Por isso, optamos em fazer um breve comentário sobre os fundamentos da Matemática, destacando a escolar formalista, já que apresentaremos os conteúdos de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Análise Funcional axiomaticamente, como defende esta escola.

No final do século XVIII e início do século XIX, a matemática era vista como alicerce de muitas outras ciências, ou seja, muitas das áreas do conhecimento que se desenvolveram por volta desse período, e até mesmo antes, como a sociologia, por exemplo, utilizavam-se de modelos matemáticos para embasar suas teorias. Esse é um dos principais motivos que causaram a discussão em relação aos fundamentos da matemática, gerando três escolas para esses fundamentos que, resumidamente, especificaremos como: o Logicismo, que defende que matemática pode ser reduzida a lógica; o Intuicionismo, que prega que a intuição é o fundamento da matemática; e o Formalismo, que procura mostrar que o método axiomático desempenha tal papel. Por isso, iremos nos deter a partir de agora a falar sobre o método axiomático.

O método axiomático consiste em um procedimento no qual se aceita uma quantidade mínima de noções e proposições, a partir das quais se constrói uma teoria. Assim, apenas baseadas nessas noções e proposições é que são desenvolvidas novas ideias e proposições, apenas mediante definições e demonstrações, respectivamente. essas proposições iniciais que eram aceitas sem demonstrações são denominadas de postulados ou axiomas.

Podemos verificar vários exemplos de teorias que se desenvolveram a partir desse método com a geometria euclidiana, ainda na antiguidade, mesmo apresentando falhas lógicas uma vez que alguns resultados eram considerados sem demonstrações prévias. As geometria não-euclidianas também se desenvolveram a partir desse método.

Dentro do método axiomático podemos observar duas vertentes: a axiomática material e axiomática abstrata. A axiomática material considera algumas definições e proposições para se formalizar um sistema. Por exemplo, quando estamos tratando da geometria euclidiana, podemos verificar que no processo onde se define os entes primitivos e se aceita os axiomas básicos, contemplamos a sua axiomática material. A axiomática abstrata preocupa-se com os resultados obtidos no sistema sem preocupação com o seu significado inicial. Na geometria euclidiana, por exemplo, podemos destacar axiomática abstrata, quando estamos demonstrando teoremas, cujos resultados não são tão óbvios, a exemplo do famoso Teorema de Pitágoras.

Segundo MACHADO (2001, p. 30),

" Um teoria formal conta de entes primitivos, regras para formação de fórmulas a partir deles, axiomas ou postulados, regras de inferências e teorema. Os termos primitivos descrevem os objetos concretos de que trata a teoria. as regras de formação de fórmulas organizam o discurso a respeito destes objetos, distinguem as fórmulas bem-formuladas das que carecem de significado. Os axiomas são verdades empíricas . As regras de inferência determinam as inferências legítimas e destingem , dentre as fórmulas bem-formuladas as que constituem os teoremas, que são demonstráveis a partir dos axiomas, em última análise."

PAIS (2002, p. 30) corrobora afirmando que segundo a concepção proposta pelo formalismo*" a Matemática consistiria em um tipo de jogo formal de símbolos, envolvendo axiomas, definições e teoremas. Para trabalhar com esses elementos, existem regras que permitem deduzir sequências lógicas, representando atividades matemáticas. O significado desses elementos passa a existir a partir do momento em que as fórmulas descobertas podem ser aplicadas a problemas compreensíveis no contexto em questão. "*

Dessa forma, percebemos que as características do método axiomático permitem economizar pensamento, uma vez que teorias baseadas na mesma axiomática podem ser englobadas na teoria mais abrangente, pois sistematiza teorias, servindo assim como instrumento para o trabalho, a pesquisa e o ensino em Matemática.

Por esse motivo, vamos apresentar o conteúdos que pretendemos de forma sistematizada axiomaticamente, o que tornará mais simples a exposição de nossas ideais a respeito da evolução gradativa do pensamento matemático.

A escolha de pela apresentação dos conteúdos sob a perspectiva formalista se deve ao fato de que a ideia aprendizagem, de acordo com MOYSÉS (1995, p. 22), *" se faz em torno de conceitos, enunciados e definições. Daí, a utilização desses elementos como* *ponto de partida para o que se quer ensinar. Outra decorrência de tal enfoque é a forma de apresentar um dado conteúdo. A um conceito segue-se outro, que se articula com um terceiro, e assim por diante."*

1.3 Transposição Didática

A encadeação de conceitos e proposições em uma teoria específica pode ser ampliada um novo contexto e, para isso, necessita de um aprofundamento que permita ir do particular ao geral e o contrário também. VYGOTSKY (1987, p.70), afirma que

" um conceito se forma não pela interação de associações, mas mediante uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participam de uma combinação específica (...) Quando se examina o processo de formação em toda a complexidade, este surge como um movimento do pensamento, dentro da pirâmide de conceito, constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular."

Essa passagem de níveis precisa de uma conexão que transforme o conhecimento de um nível em outro, ou seja,

" Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. Esse trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática."

Se a evolução das ideas analisa um determinado conceito temos a transposição didática *stricto sensu.* Já se analisamos um contexto mais amplo, temos uma transposição didática *lato sensu.*

Dessa forma como pretendemos mostrar como evolui os conceitos e resultados da Geometria Analítica, passando pela Álgebra Linear, até chegarmos à Análise Funcional, descreveremos um quadro que representa uma transposição didática *lato sensu* desses conceitos e resultados.

Por tudo que foi visto, defendemos a ideia de que o conhecimento matemático, exposto sob a forma de conteúdos se desenvolve através de níveis graduais de abstração, em termos mais precisos, acreditamos que a partir de uma realidade concreta, no sentido de que tem significado para o indivíduo, elabora-se ou aprende-se um determinado conteúdo que evoluir para outra realidade relativamente mais abstrata.

Capítulo 2

Geometria Analítica

A Geometria Analítica resulta da ligação entre dois ramos da matemática: a Geometria e a Álgebra. Baseada em um sistema de coordenadas através do qual podemos estabelecer representações de pontos, retas e planos no espaço tridimensional, esta área matemática possibilita o cálculo de comprimento, área, volume de maneira bastante simples, bem como permite interpretar curvas, superfícies e sólidos, associando formas geométricas a representações algébricas.

De acordo com LIMA (1992, p.3), *"isto permite tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas. A interconexão entre Geometria e Álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na Matemática e suas aplicações."*

Essa área matemática começou a ser desenvolvida no século XVII através dos trabalhos de Viète, Fermat e Descartes que passaram a utilizar números para determinar a posição de uma figura no espaço.

Inicialmente, o desenvolvimento da geometria analítica contemplava basicamente a resolução de problemas da geometria plana. No século XIX, através do trabalho de Gauss que estabeleceu elos entre a Geometria e os números complexos, começa a tomar forma o que posteriormente se tornaria o conceito de vetor. No entanto, esta definição seria plenamente desenvolvida com a contribuição de vários estudiosos como William Rowan Hamilton, Hermann Grassmann, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace, Oliver Heaviside, entre outros. Só então, foi possível utilizar as técnicas da Geometria Analítica para potencializar a resolução de problemas geométricos com mais de duas dimensões.

No Brasil, o ensino de Geometria Analítica atualmente é iniciado no Ensino Médio. No enanto, sabemos que, neste nível da Educação Básica em nosso país, os conteúdos definidos para os programas de cada disciplina são, na maioria das vezes, completamente determinados pelos concursos vestibulares da Universidade pólo da região onde a escola se localiza. Dessa forma, por exemplo, no Ensino Médio das escolas paraibanas, a Geometria Analítica ensinado contempla apenas o seu aspecto bidimensional, restringindo-se a explanar o uso de coordenadas sem expor os conceitos e aplicações relativos a vetores. Ao passo que, nas escolas fluminenses, o ensino abrange Geometria Analítica em três dimensão, a introdução de vetores num contexto matemático. Na França, de acordo com

BITTAR (2009), o conceito de vetor é introduzido no nível de ensino que corresponde ao nosso Ensino Médio.

No Ensino Superior, esse conteúdo está presente no currículo de diversos cursos das áreas de Tecnologia e Ciências Exatas, como Matemática, Física, Química e Engenharia.

Aqui exporemos alguns tópicos da Geometria Analítica, procurando fundamentá-la conceitualmente de forma gradativa, fazendo sempre que possível a correspondência dos conceitos com suas representações geométricas.

2.1 O uso de coordenadas na reta

Os números reais podem ser naturalmente associados aos pontos de uma reta. Basta fixar um ponto O, como origem, e um ponto A diferente de O e definir o comprimento do segmento OA como unidade. À reta OA chamaremos de reta real, ou eixo real.

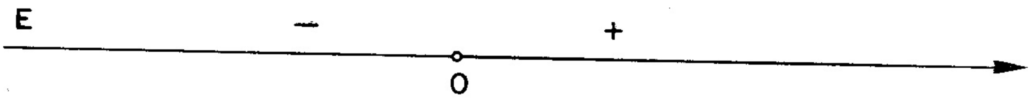

figura 1

Definição 1 *A origem O divide essa reta em duas semirretas: a que contém A denominaremos de* ***semirreta positiva****; e a outra chamaremos de* ***semirreta negativa****.*

Convencionalmente, aos pontos localizados sobre a primeira semirreta diremos pontos situados à direita de O e para os sobre a última, diremos pontos situados à esquerda de O.

A partir disso e usando o fato de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ estabeleceremos uma correspondência entre a reta real e o conjunto dos números reais.

Tomando X um ponto qualquer da reta OA, quando o comprimento de OA couber um número exato de vezes no segmento OX, diremos que a coordenada de X é o número natural n, se X está à direita de O, ou o número negativo $-n$, se X está a esquerda de O e caso X coincida com O sua coordenada será zero. Assim, qualquer número inteiro e, consequentemente, natural, pode ser representado na reta dada.

De forma mais geral, se o ponto X da reta real é tal que um segmento w caiba n vezes no segmento OA e m vezes no segmento OX, podemos tomar a coordenada de X como $\frac{m}{n}$ ou $\frac{-m}{n}$, caso X esteja à direita ou à esquerda de O, respectivamente. Notemos que se $n = 1$, então X está associado a um número inteiro.

É importante observar que da forma que os números racionais foram associados aos pontos da reta real, podemos utilizar o conceito de comensurabilidade, pois:

Definição 2 *Dois segmentos AB e CD são ditos* **comensuráveis** *quando é possível encontrar um terceiro segmento w, que caiba m vezes em AB e n vezes em CD. Caso contrário, os segmentos são ditos incomensuráveis.*

Um exemplo bastante conhecido de segmentos incomensuráveis ocorre quando comparamos a diagonal de um quadrado de lados com medidas racionais com um desses lados.

Quando comparamos um ponto X no eixo real de modo que os segmentos OX e OA são incomensuráveis diremos que o número x, correspondente ao comprimento de OX, é irracional e poremos x como a coordenada do ponto X. O número x será positivo ou negativo dependendo da posição de X relativa a O.

Dessa forma, relacionamos qualquer número real com os pontos dessa reta, já que os números reais são constituídos por números racionais e irracionais.

Reciprocamente, a partir do que foi exposto, podemos também interpretar o conjunto $\mathbb{Z}$ como sendo formado pelo número 0 e pelas coordenadas dos pontos X do eixo real, cujo segmento unitário OA cabe uma quantidade exata de vezes no segmento OX. Também, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ pode ser interpretada como as coordenadas dos pontos X cujos segmentos OX é comensurável com o segmento unitário. E mais geralmente, dado X qualquer número sobre o eixo real, o número real x é tal que $x = d(O, X)$, se X está à direita de O, $x = -d(O, X)$, se X está à esquerda de O, e zero se X coincidir com O, onde $d(O, X)$ é o comprimento do segmento OX ou a distância entre os pontos O e X.

Dessa forma, obtemos uma correspondência biunívoca entre a reta OA e o conjunto dos números reais, de modo que cada ponto X dessa reta associa-se à sua coordenada. Assim, como afirma LIMA (2006, p.57) *"O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Esta inter-relação entre Geometria e Aritmética, entre pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática atual."*A Geometria Analítica é um dos ramos que mais se desenvolveu utilizando esta correspondência, aplicando seus métodos em áreas do conhecimento como Física e Engenharia.

No contexto unidimensional, podemos associar intuitivamente a relação de ordem dos números reais com a posição de dois pontos da seguinte forma:

Proposição 1 *se o ponto X está à esquerda do ponto Y, se e somente se, $x \leq y$ e pomos $d(X, Y) = |x - y|$*

Demonstração:

Utilizaremos os fato de $d(A, B) \geq 0$, $d(A, B) = d(B, A)$ e que se A, BeC são pontos sobre a mesma reta B está entre A e C então $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

Se $X = Y$, então nada há o que provar. Supondo, a princípio, que X esteja à esquerda de Y, assim, $x \leq y$. Teremos 3 casos a analisar:

1. X e Y estão situados à direita de O, ou seja, $0 \leq x \leq y$;

2. X e Y localizam-se à esquerda de O, logo $x \leq y \leq 0$;

3. X e Y estão sobre semirretas distintas em relação à origem, isto significa que $x \leq 0 \leq y$.

Lembremos que $|x - y| = x - y$, se $x > y$, e $|x - y| = y - x$, se $y > x$. Dessa forma, no primeiro caso, temos que $d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$ e como X está entre O e Y, verificamos:

$$d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y)$$

e segue que

$$d(X, Y) = d(O, Y) - d(O, X) = y - x = |x - y|.$$

Para o segundo caso, observamos que $d(O, X) = -x$ e $d(O, Y) = -y$, agora temos Y é o ponto que está entre X e O, e assim

$$d(O, X) = d(O, Y) + d(Y, X),$$

donde

$$d(X, Y) = d(Y, X) = d(O, X) - d(O, Y) = -x - (-y) = y - x = |x - y|.$$

Já no terceiro caso, O está entre X e Y, e $d(O, X) = -x$ e $d(O, Y) = y$. Então,

$$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) = -x + y = |y - x|.$$

Se X considerarmos que X está à direita de Y a demonstração é análoga.

Uma importante aplicação desse resultado está em determinar uma expressão algébrica para um segmento de reta, o que consequentemente, pode fornecer a equação paramétrica da reta AB, expandindo o domínio do parâmetro. Veja:

Exemplo 1 *Tomando-se a reta real fixemos dois pontos quaisquer A e B, com A à esquerda de B, e suas coordenadas a e b, respectivamente. Seja X um ponto qualquer do segmento AB, cuja coordenada é o número x, dessa forma temos que $a \leq x \leq b$. Usando a correlação estabelecida entre os números reais e a reta, observamos que o segmento de reta AB contido no eixo real corresponde a o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Para cada ponto X do segmento de reta AB, temos que $d(A, X) \leq d(A, B)$, logo a razão $t = \frac{d(A,X)}{(A,B)}$ é um número entre 0 e 1. Observemos que se $X = A$, teremos $t = 0$, e no caso que $X = B$, verificamos que $t = 1$. Mas geralmente, para $t \in [0, 1]$, denotemos por X_t o ponto do segmento de reta tal que $\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = t$ verificamos que as coordenadas x_t do ponto X_t relaciona-se com as coordenadas dos pontos A e B através de*

$$\frac{x_t - a}{b - a} = t,$$

que pode ser expressa por

$$x_t = (1 - t)a + tb = a + t(b - a).$$

Exemplo 2 *Fazendo t variar em todo os números reais, obtemos a equação paramétrica para a reta real. Formalizamos, assim, uma bijeção entre o conjunto dos números reais com uma reta.*

Exemplo 3 *Quando* $t = \frac{1}{2}$, *encontramos uma representação algébrica para a coordenada do ponto médio do segmento* AB, *que é expressa por:*

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

Estes exemplos corroboram para percebemos que a correspondência entre os números reais e a reta transfere propriedades geométricas aos números reais, permitindo que façamos interpretações tanto aritméticas quanto geométrica desse conjunto.

2.2 O uso de coordenadas no Plano

O plano, por se tratar de um lugar geométrico bidimensional, pode ter a localização de cada um de seus pontos relacionada a duas coordenadas. Assim estabelecemos algumas definições para mostrar esse fato:

Definição 3 *Um* ***par ordenado*** $P = (x, y)$ *é formado por um elementos* x, *denominado primeira coordenada de* P *e outro elemento* y, *chamado de segundo elemento de* P. *Dois pares ordenados* $P = (x, y)$ *e* $Q = (a, b)$ *são iguais se, e somente se,* $x = a$ *e* $y = b$.

Definição 4 *O* ***produto cartesiano*** *dos conjuntos* X *e* Y *é o conjunto* $X \times Y$ *dos pares ordenados* (x, y) *com* $x \in X$ *e* $y \in Y$, *representado por*

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X \ e \ y \in Y\}.$$

Esta definição pode ser estendida para uma quantidade finita de conjuntos.

Tomando $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}$, obtemos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, onde os elementos (x, y) são pares de números reais. Estes pares podem ser interpretados como as coordenadas de um ponto P do plano π, e denominaremos x a **abscissa** e y a **ordenada** relativas ao ponto P, ao se fixar neste plano um par de eixos ortogonais OX e OY, com sua interseção no ponto O, o qual chamaremos de origem do **sistema de coordenadas** OXY.

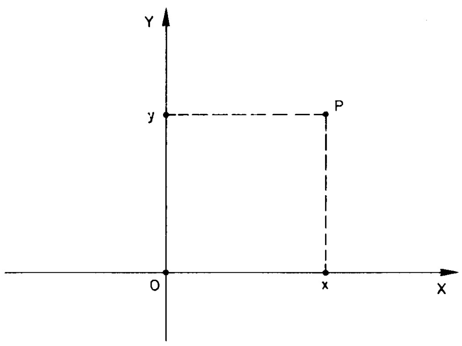

figura 2

Observando a figura, percebemos que o ponto P de π tem como abscissa o número x, que corresponde ao comprimento do segmento OY, de uma reta paralela ao eixo OX. Analogamente, a ordenada y como o comprimento do segmento que liga o ponto P ao eixo OX, por uma reta paralela a OY.É importante perceber que x e y podem ser visualizadas como as coordenadas dos pés das perpendiculares baixadas a partir de P, respectivamente, sobre os eixos OX e OY, ou seja, podem ser vistos como as coordenadas do ponto de intersecção das perpendiculares das retas OX e OY que passam por P.

Caso P pertença ao eixo OX, o par ordenado correspondente será $(x, 0)$, onde x representa a coordenada de P no eixo OX, recaindo nas condições de coordenadas sobre uma reta. Analogamente, se P está no eixo OY, suas coordenadas são representadas por $(0, y)$. E portanto, como O é a interseção desses eixos suas coordenadas são representadas por $(0, 0)$.

Dessa forma verificamos que:" *a função $f : \pi \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto P do plano π seu par de coordenadas $f(P) = (x, y)$ relativamente ao sistema de eixos OXY, é uma correspondência biunívoca. Ela permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais.*"(LIMA, 2000, p.83)

Um exemplo simples desse fato é que a localização dos pontos em relação aos eixos pode ser observadas por suas coordenadas. Observemos que os eixos ortogonais OX e OY dividem o plano π em quatro regiões, caso uma denominada quadrante.

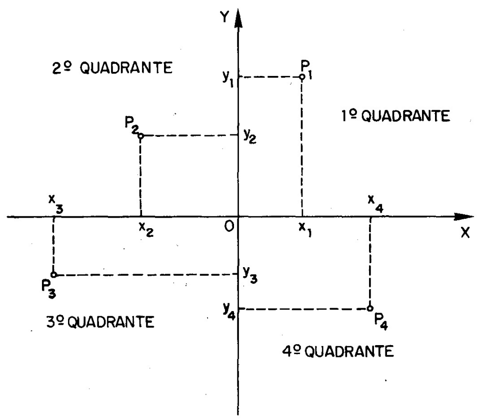

figura 3

Podemos verificar a posição de um ponto em relação aos eixos coordenados, ou seja, determinar em que quadrante eles se encontram observando as suas coordenadas.

Exemplo 4 *Os sinais das coordenadas do ponto $P = (x, y)$ variam de acordo com o quadrante. Desse modo, temos que se P pertence ao:*

- *Primeiro quadrante , então $x \geq 0$ e $y \geq 0$;*
- *Segundo quadrante, temos $x \leq 0$ e $y \geq 0$;*

- *Terceiro quadrante, verificamos que* $x \leq 0$ *e* $y \leq 0$*;*
- *Quarto quadrante, notamos que* $x \geq 0$ *e* $y \leq 0$.

Como fizemos quando apresentamos as coordenadas de um ponto em relação à reta, no plano podemos associar à ideia geométrica de ponto médio a uma expressão algébrica, também podemos representar algebricamente uma reta através de equações paramétricas e conseguimos determinar um algoritmo para determinar a distância entre dois pontos por meio de suas coordenadas. Veja os exemplos:

Exemplo 5 ***Equações paramétricas da reta*** *Dados os ponto* $A = (a, b)$ *e* $A' = (x, y)$ *e um número real* t*, quais as coordenadas do ponto* $X_t = (x_t, y_t)$ *localizado sobre a reta* AA' *de tal modo que* $\frac{d(A,X_t)}{d(A,A')}$ *são* $x_t = (1-t)a + tx$ *e* $y_t = (1-t)b + ty$

No caso em que a reta AA' *é horizontal ou vertical, verificamos que o argumento para obter as coordenadas de* X_t *é o mesmo utilizado para determinar as coordenadas sobre o eixo real, visto quando expomos as coordenadas sobre uma reta. Desse modo, teremos se:*

- $b = y$*, o segmento* AA' *é horizontal e*

$$X_t = (x_t, b) = ((1-t)a + tx, b);$$

- $a = x$*, o segmento* AA' *é vertical e*

$$X_t = (a, y_t) = (a, (1-t)b + ty).$$

Quando $a \neq x$ *e* $b \neq y$*, vamos observar a figura abaixo:*

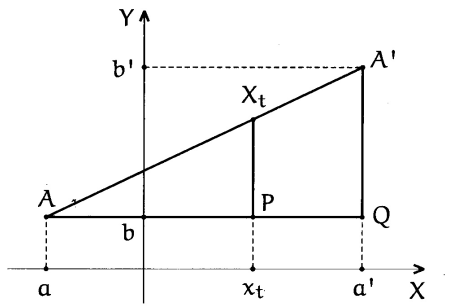

figura 4

Comparemos os triângulos retângulos APX_t *e* AQA'*, com* $P = (x_t, b)$ *e* $Q = (x, b)$*, que são semelhantes por terem um ângulo agudo em comum e dessa forma obtemos a razão de semelhança* $t = \frac{d(A,X_t)}{d(A,A')} = \frac{A,P}{A,A'}$*, resultando que* $\frac{x_t - a}{x - a} = t$*, ou equivalentemente,* $x_t = (1-t)a + tx$*. De forma análoga, chega-se que* $y_t = (1-t)b + ty$*. É importante frisar que o t é o mesmo em ambas as expressões. E temos expressões paramétricas para a reta do plano.*

É importante também, observar que se $0 \leq t \leq 1$, obtemos a expressão algébrica para o segmento AA'. E quando fazemos $t = \frac{1}{2}$, obtemos algebricamente as coordenadas do ponto médio do segmento AB, que é expressa por:

$$M = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right).$$

Uma noção geométrica básica, a distância entre dois pontos, tem seu valor determinado de maneira bastante simples na Geometria Analítica em função das coordenadas dos pontos dados.

Exemplo 6 ***Distância entre dois pontos***

Dados os pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$, afirmamos que a distância entre P e Q é expressa por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}.$$

Primeiro consideremos o caso em que P e Q tenham a mesma ordenada, desse modo $y = v$. Daí a distância $d(P, Q)$ é igual à distância $|u - x|$ entre as suas projeções sobre o eixo OX. Analogamente, se P e Q têm mesma abscissa, de modo que $x = u$, então $d(P, Q) = |y - v|$ correspondente às projeções de P e Q sobre o eixo OY. Observemos que expressões das distâncias nos casos em que o segmento é horizontal ou vertical, são casos particulares da fórmula acima quando $x = u$ e $y = v$, respectivamente. Agora, consideremos P e Q com abscissas e ordenadas distintas e tomemos o ponto $S = (u, y)$, temos que o triângulo PSQ é retângulo cuja hipotenusa é PQ, como representado na figura:

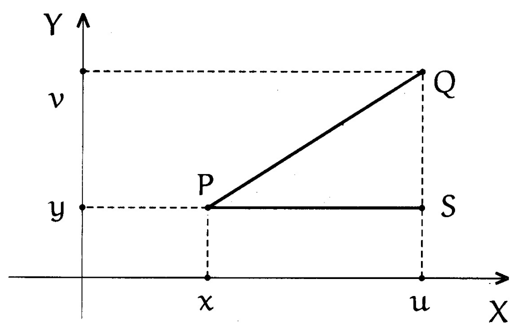

figura 5

Como P e S possuem a mesma ordenada e Q e S possuem a mesma abscissa, verificamos que:

$$d(P, S) = |x - u| \text{ e } d(S, Q) = |y - v|$$

Daí, utilizando o Teorema de Pitágoras, escrevemos

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2.$$

Assim,

$$d(P,Q)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2,$$

e finalmente

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

Particularmente se desejarmos calcularmos a distância de um ponto $P = (x,y)$ *à origem* $O = (0,0)$ *é*

$$d(P,O) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.3 O uso de coordenadas no espaço

Agora trabalharemos no espaço tridimensional euclidiano E, onde utilizaremos um sistema de eixos $OXYZ$, que consiste em três eixos OX, OY e OZ, dois a dois perpendiculares, com o ponto O em comum, que será denominado de origem do sistema. A partir dessa fixação, obtemos π_{XY}, πYZ e πXZ, os planos determinados pelos pares de eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

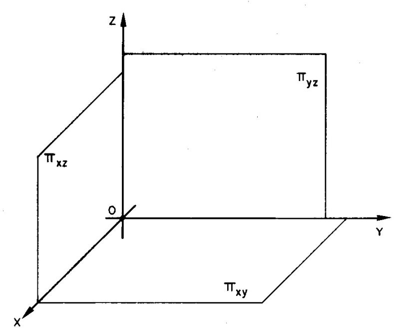

figura 6

Com essa escolha dos eixos é possível associar a cada ponto P do espaço E um terno ordenado (x,y,z) de números reais, chamados de **coordenadas de P em relação ao sistema $OXYZ$.** Essas coordenadas podem ser determinadas utilizando o seguinte procedimento: dado P um ponto qualquer tracemos a reta paralela ao eixo OZ passando por P, que intercepta o plano π_{XY} no ponto P_0. Seja (x,y) as coordenadas de P_0 no sistema OXY do plano π_{XY}. Estas são as duas primeiras coordenadas de P. Agora, tracemos a reta paralela ao eixo OX que liga P ao ponto P_1 do plano π_{YZ}. Seja (y,z) as coordenadas de P_1 no sistema OYZ do plano π_{YZ}, o número z é a última coordenada de P.

Usando a notação $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, para representar o conjunto cujos elementos são ternos ordenados (x,y,z) de números reais, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre E e $\mathbb{R}^3$, no qual cada ponto do espaço E corresponde um elemento do $\mathbb{R}^3$, a exemplo do que mostramos com a reta e $\mathbb{R}$ e o plano e $\mathbb{R}^2$.

No contexto tridimensional também poderemos determinar expressões algébricas para as retas, para o ponto médio e para a distância entre dois pontos. Por enquanto, exporemos expressões para as coordenadas do ponto médio e para determinar a distância entre dois pontos através de suas coordenadas.

Exemplo 7 ***(Ponto médio de um segmento)***

Dados os pontos $A = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $B = (a_2, b_2, c_2)$*, o ponto médio* M *do segmento* AB *tem coordenadas* $(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2})$*. De fato, se considerarmos o segmento* $A'B'$ *a projeção do segmento* AB *sobre o plano* π_{XY}*, verificamos que a* $A' = (a_1, b_1)$ *e* $B' = (a_2, b_2)$ *no sistema de coordenadas* OXY*, e teremos que* $M' = (\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2})$ *o ponto médio do segmento* $A'B'$ *é a projeção do ponto* M *sobre* π_{XY}*. E daí concluímos que as duas primeiras coordenadas de* M *são* $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}$*. Usando raciocínio análogo, agora sobre a projeção do segmento* AB *sobre o plano* π_{YZ}*, obtemos a última coordenada do ponto* M *que é* $\frac{c_1+c_2}{2}$*. Como queríamos.*

Exemplo 8 *Sejam* $OXYZ$ *um sistema de eixos ortogonais no espaço* E *e* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$*, pontos dados, a distância entre* P_1 *e* P_2*é determinada por*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Consideremos os pontos auxiliares $Q = (x_1, y_2, z_1)$ *e* $R = (x_2, y_2, z_1)$*. E temos que os segmentos de reta* P_1Q, OR *e* RP_2*, são paralelos, respectivamente, aos eixos* OY*,* OX *e* OZ*. Desse modo, considerando-se as projeções desses segmentos sobre seus respectivos eixos paralelos, obtemos*

$$d(P_1, Q) = |y_1 - y_2, d(Q, R) = |x_1 - x_2| \text{ e } d(R, P_2) = |z_1 - z_2|.$$

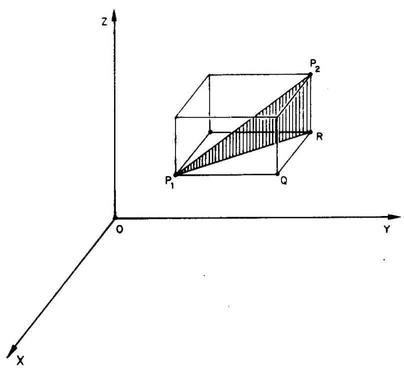

figura 7

E como estamos baseando-se em um sistema de eixos ortogonais, percebamos que os triângulos P_1QR *e* P_1RP_2 *são retângulos. Do que decorre que*

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, R)^2 + d(R, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(Q, R)^2 + d(R, P_2)^2,$$

ou seja,

$$d(P_1, P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

E obtemos

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Em particular, a distância de um ponto $P = (x, y, z)$ *à origem* $O = (0, 0, 0)$ *é* $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Podemos, considerando o espaço euclidiano tridimensional, determinar a equação paramétrica de um plano π. No entanto, essa expressão para ser deduzida de maneira simples requer ferramentas mais elaboradas do que o conhecimento que usamos para expor as expressões até o presente momento, como o conceito de vetor no $\mathbb{R}^3$.

2.4 Vetores

O uso de métodos algébricos na Geometria Analítica abrange uma gama bem variada de utilidades, que pode servir desde estudos gráficos de funções à estudos geográficos. Mas esse ramo matemático tem sua eficiência ampliada quando se acrescenta a ele o uso de vetores. De acordo com LIMA(1992, p. 86)*" Com eles a Álgebra, além de intérprete dos fatos geométricos, penetra na Geometria e passa a fazer parte dela. "*

Neste contexto, podemos definir vetor como uma classe de equivalência de segmentos orientados. Dessa forma, os vetores não dependem de um sistema de coordenadas. No entanto, pode-se estabelecer condições para que se efetue cálculos vetoriais com o auxílio das coordenadas.

Definição 5 *Dizemos que um* ***segmento*** *de reta está* ***orientado*** *quando está determinado um sentido para o percurso, chamado de* ***sentido positivo****.*

Assim, ao se fazer referência ao segmento AB , significa que o seu sentido positivo é de A para B, ao passo que para o segmento BA é de B para A.

Definição 6 *Os segmentos de reta* AB *e* CD *são* ***equipolentes****, e escrevemos* $AB \equiv CD$*, quando eles:*

- *têm mesmo comprimento;*
- *são paralelos ou colineares;*
- *têm o mesmo sentido.*

Podemos entender a primeira condição como $d(A, B) = d(C, D)$. Já a segunda condição significa que estão sobre o mesmo plano e quando são colineares que estão sobre a mesma reta. A terceira condição, no caso da colinearidade, garante que o sentido positivo de AB é o mesmo de CD, e quando são paralelos, indica ainda mais, pois além AB e CD serem paralelos e terem mesmo sentido é garantido o paralelismo entre AC e BD, em outras palavras o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo.

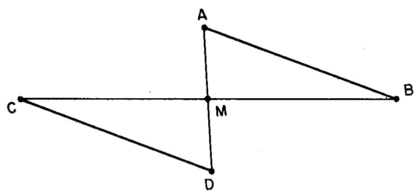

figura 8

Este fato serve para caracterizar segmentos equipolentes, no caso destes serem paralelos, pois como o quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo suas diagonais AD e BC se interceptam no ponto médio de cada uma.

Observemos que esta relação de equivalência $AB \equiv CD$ é reflexiva, pois naturalmente, $AB \equiv AB$; simétrica, já que $AB \equiv CD \Rightarrow CD \equiv AB$; e transitiva, pois quando $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, teremos $AB \equiv EF$.

Dessa maneira, termos a motivação para a seguinte definição:

Definição 7 *Quando dois segmentos orientados de reta AB e CD são equipolentes, dizemos que eles determinam o memos* ***vetor****, ou seja, um vetor é uma classe de equivalência de segmentos orientados em relação a sua equipolência.*

Indicaremos por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ o vetor que representa a classe de equivalência onde o segmento AB é representante. Dessa maneira, $AB \equiv CD$, significa a igualdade $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. É conveniente pormos o vetor nulo $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$, cujo representante é o segmento degenerado AA, cuja origem coincide com a extremidade.

A visualização de vetores pode ser observada na figura abaixo:

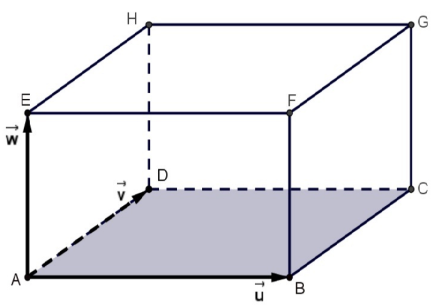

figura 9

Com esta definição de vetores podemos a partir de um ponto e um segmento orientado determinar o único vetor que é equipolente ao primeiro passando pelo ponto dado. A proposição seguinte formaliza tal fato.

Proposição 2 *Dados um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P, existe um único ponto P tal que o segmento PQ é equipolente a AB, ou seja, com $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.*

Demonstração:

Se P pertence à reta AB, basta traçar o segmento de reta PQ, com o mesmo comprimento de AB, de maneira que o sentido de PQ coincida com o de AB.

Caso P não pertença a reta AB, tracemos pelo ponto P a reta r paralela a AB e pelo ponto B a reta s paralela à reta AP, o ponto procurado a interseção das retas r e s. Veja figura.

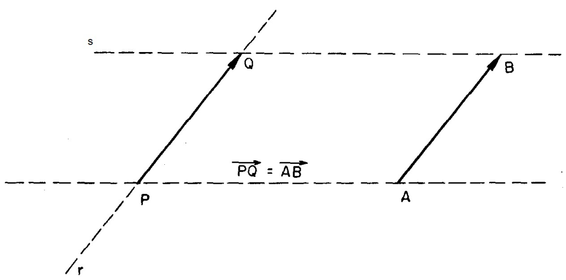

figura 10

Isto mostra que dado um vetor $\overrightarrow{v}$, poderemos representá-lo por um segmento orientado PQ, com a origem localizada em qualquer ponto P do espaço. É por esse motivo que podemos interpretar vetores como elementos que transportam um ponto P para um outro ponto Q, resgatando o sentido linguístico da palavra vetor, que provem do latim *vehere* e significa transportar.

2.5 Vetores e coordenadas

Quando determinamos as equações paramétricas de uma reta AB, em relação a um parâmetro t, verificamos que se $0 \leq t \leq 1$, esta equação determina o segmento AB, cuja origem é A e a extremidade B. Dessa maneira fixando um sistema de coordenadas $OXYZ$ no espaço euclidianos, podemos determinar um vetor por suas coordenadas.

Já sabemos que fixado um sistema de eixos ortogonais de origem O no espaço, sejam $A = (x, y, z)$ e (a, b, c) existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, o que nos motiva para a seguinte afirmação:

Afirmação 1 *As coordenadas de P são $(a - x, b - y, c - z)$.*

Demonstração:

Observando a projeção do vetor $\overrightarrow{AB}$ sobre o plano π_{XY}, temos o vetor $\overrightarrow{A'B'}$, com $A' = (x, y)$ e $B' = (a, b)$ no sistema de coordenadas OXY, de maneira análoga construímos o vetor $\overrightarrow{O'P'}$ como projeção do vetor $\overrightarrow{OP}$ sobre o plano π_{XY}. Verificamos que o segmentos $A'B'$ e $O'P'$ têm a mesma inclinação $\frac{b-y}{a-x}$ já que são paralelos, e os segmentos OA' e $P'B'$ têm inclinação $\frac{x}{y}$. Como $A'B'$ e $O'P'$, bem como OA' e $P'B'$ são lados de um paralelogramo, segue que $A'B'$ e $O'P'$ são equipolentes. Daí, temos que as diagonais sobre as retas OB' e $A'P'$ se interceptam no mesmo ponto e M e concluímos que $P' = (a - x, b - y)$.

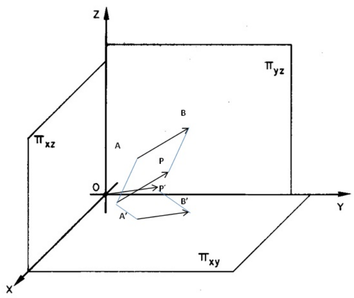

figura 11

De maneira inteiramente análoga, utilizando, agora, a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre o plano π_{YZ} e com o sistema de coordenadas OYZ , representada pelo segmento $A"B"$, onde $A" = (y, z)$ e $B" = (b, c)$. e concluímos que as coordenadas de P são $(a - x, b - y, c - z)$.

Além disso temos que

Afirmação 2 *Dados $A = (x, y, z)$, $B = (x', y', z')$, $C = (a, b, c)$ e $D = (a', b', c')$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $x' - x = a' - a$, $y' - y = b' - b$ e $z' - z = c' - c$.*

Demonstração:

De fato, existe um único $P = (x' - x, y' - y, z' - z)$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ e um único $Q = (a' - a, b' - b, c' - c)$ tal que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD}$. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, pela transitividade da relação de equivalência temos que $P = Q$, e portanto,

$$x' - x = a' - a, y' - y = b' - b\ mboxe z' - z = c' - c$$

Assim , tendo $A = (x, y, z)$ e $B = (x', y', z')$, poderemos estabelecer que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (x' - x, y' - y, z' - z)$

Observemos podemos escolher o representante $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ de maneira que a origem do segmento representante coincida com a origem $O = (0, 0, 0)$ do sistema $OXYZ$. Dessa forma as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ coincidem com as coordenadas do ponto P.

2.6 Operações com vetores

Os vetores, no contexto da Geometria Analítica, são instrumentos bastante úteis, principalmente, quando se pode efetuar entre eles operações que independam do sistema de coordenadas tomado. No entanto, poderemos perceber que as coordenadas funcionam como excelentes auxiliares em cálculos vetoriais.

Adição de vetores

A soma entre dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, indicada po $+$, pode ser definida de duas maneiras equivalentes.

Definição 8 *Representemos* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'}$ *e* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{A'A''}$ *e consideremos os segmento* AA''*, este será o representante do vetor soma de* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$*, ou seja,*

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AA''}$$

A outra definição tem sentido apenas quando os vetores não são paralelos.

Definição 9 *Representemos o vetor* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA'}$ *e* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ *e tomemos como representante da soma* $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$*, onde o segmento* AD *é a diagonal do paralelogramo que têm lados* AA' *e* AC*.*

As figuras abaixo ajudam a visualizar essa definições.

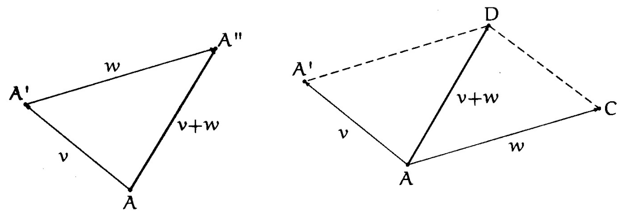

figura 12

Observemos que ambas essa definições baseiam-se em percepções geométricas dos vetores. No entanto, ao se fixar um sistema de eixos coordenados, podemos estabelecer essa operação a partir das coordenadas dos vetores.

Sabemos que as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OQ}$, coincidem com as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ e $Q = (a, b, c)$, respectivamente. Assim indicaremos $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ e afirmamos:

Afirmação 3 *Dados os vetores* $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ *e* $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$*, então* $v + w = (x + a, y + b, z + c)$*.*

Demonstração:

Consideremos $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ não paralelos, pela segunda definição temos que existe um ponto R do espaço tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OR}$, de modo que R é o quarto vértice do paralelogramo que tem dois dos seus lados os segmentos OP e OQ. Como o ponto médio M do diagonal PQ temos que

$$M = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}, \frac{z+c}{2}\right),$$

E M é, também, o ponto médio da diagonal OR, chamemos (r, s, t) as coordenadas de R, percebamos que

$$M = \left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right),$$

do que segue que

$$r = x + a, s = y + b \text{ e } t = z + c$$

No caso em que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelo podemos interpretar a soma como a transposição da extremidade do vetor $\overrightarrow{u}$, por exemplo, pelo vetor $\overrightarrow{v}$, o que nos dar novamente a expressão pretendida.

Utilizamos o fato de que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ são as somas das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e se apropriando das propriedades de soma de números reais, obtemos de maneira imediata as propriedade da soma de vetores. Assim consideremos os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$, verificamos as seguintes propriedades para a soma de vetores:

- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}$ (comutatividade);
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v})$(associatividade);
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{u}$, onde $\overrightarrow{O}$ é o vetor nulo (elemento neutro);
- Para todo $\overrightarrow{u}$ existe $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$ (inverso aditivo).

Podemos ainda considerar $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{w})$, representada por $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$ como a diferença entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Multiplicação de um vetor por um escalar

A multiplicação entre um vetor $\overrightarrow{v}$ e um número real λ, dando como resultado o vetor $\lambda\cdot\overrightarrow{v}$ é definida abaixo.

Definição 10 *Seja $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$. Se $\lambda=0$, então $\lambda\cdot\overrightarrow{u}=0$. Se $\lambda>0$, termos $\lambda\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AC}$, de modo que o sentido positivo de $\overrightarrow{AB}$ seja mantido em $\overrightarrow{AC}$ e tenhamos*

$$d(A,C)=\lambda\cdot d(A,B).$$

Para o caso em $\lambda<0$, temos que $\lambda'=-\lambda$ é positivo e definamos $\lambda'\cdot\overrightarrow{u}=-\lambda\cdot\overrightarrow{u}$ (o inverso aditivo do vetor $\lambda'\cdot\overrightarrow{u}$.

Geometricamente esta multiplicação pode causar uma ampliação ou redução do comprimento do vetor multiplicado, caso λ tenha módulo maior ou menor que 1, respectivamente. Além disso, se λ é positivo o vetor resultante da multiplicação mantém o mesmo sentido do vetor inicial, caso contrário o vetor resultante tem sentido oposto.

Como aconteceu com a soma de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar pode, também, ser apresentado através das coordenadas de um certo sistema dado. Aqui destacamos novamente que o resultado da operação independe de tal sistema, mas essa visualização do produto facilita a verificação das propriedades dessa multiplicação.

Afirmação 4 *Fixando no espaço o sistema de eixos coordenados $OXYZ$, seja $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$, então $\lambda\cdot\overrightarrow{v}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.*

Demonstração:

Para verificarmos a validade dessa afirmação, tomemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, com O a origem do sistema e $P = (x, y, z)$, se $\lambda > 0$, e $\lambda \cdot = \overrightarrow{OQ}$, com $Q = (x', y', z')$, como podemos observar na figura:

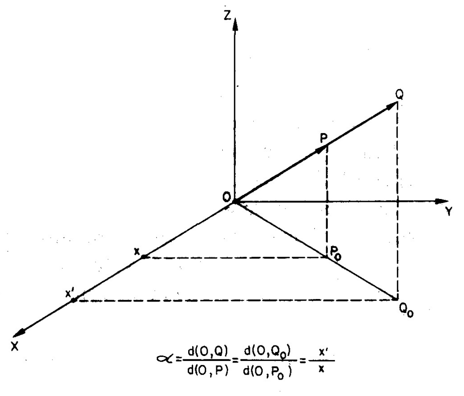

figura 13

Utilizando o conhecido Teorema de Tales, que garante que " toda paralela à base de um triângulo divide os outras dois lados em segmentos proporcionais", provaremos tal caso.

De fato, o triângulo OQQ_0, onde $Q_0 = (x', y')$ é a projeção de Q sobre o plano π_{XY}, cujas coordenadas são obtidas através do sistema OXY, é cortado pela reta PP_0, onde $P_0 = (x, y)$ é a projeção de P sobre o plano π, que é paralela à base QQ_0 do triângulo. Dessa maneira, pelo Teorema de Tales, temos que

$$\frac{d(O,Q)}{d(O,P)} = \frac{d(O,Q_0)}{d(O,P_0)}.$$

Agora consideremos o triângulo OQ_0Q_1, sobre o plano πXY, onde $Q_1 = (x', 0)$ é a projeção de Q_0 sobre o eixo OX, e tomemos a reta P_0P_1 paralela à base Q_0Q_1, onde $P_1 = (x, 0)$ é projeção de P_0 sobre o eixo OX.Novamente, pelo Teorema de Tales, teremos

$$\frac{d(O,Q_0)}{d(O,P_0)} = \frac{d(O,Q_1)}{d(O,P_1)} = \frac{x'}{x}$$

Como $\overrightarrow{OQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$, temos que $d(O,Q) = \lambda \cdot d(O,P)$, daí

$$\frac{x'}{x} = \frac{d(O,Q)}{d(O,P)} = \lambda$$

donde concluímos que $x' = \lambda x$.
Raciocínios análogos mostram que $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$, implicando que $\lambda \cdot \overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
Agora se $\lambda < 0$, tomemos $\lambda' = -\lambda$ positivo e teremos

$$\lambda \cdot \overrightarrow{v} = -(\lambda' \cdot \overrightarrow{v} = -(\lambda' x, \lambda' y, \lambda' z) = (-\lambda' x, -\lambda' y, -\lambda' z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda \cdot (x, y, z) = \lambda \cdot \overrightarrow{v})$$

Com essa caracterização da multiplicação de um vetor por um escalar através de suas coordenadas podemos verificar as propriedades dessa operação, assim como acontece com a soma. Consideremos α, β números reais e $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar gozam das seguintes propriedades:

- $\alpha \cdot (\beta \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \overrightarrow{v}$ (associatividade);
- $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ (elemento neutro);
- $\alpha \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot \overrightarrow{u} + \alpha \cdot \overrightarrow{v}$ e $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{v}$ (distributividade).

A partir do exposto, poderemos obter um outra definição.

Definição 11 *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores tais que exista um número real λ de modo que $\overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{u}$, dizemos que $\overrightarrow{v}$* ***é múltiplo de*** *$\overrightarrow{u}$.*

Observemos que se $\lambda \neq 0$, então $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, se e, somente se, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Muitas vezes se torna conveniente caracterizar a multiplicidade entre vetores por meio de suas coordenadas. Para isso, consideremos o sistema $OXYZ$ e os vetores $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$, com suas coordenadas relativas a este sistema, termos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Dados $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ para que seja múltiplo do outro é necessário e suficiente que $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - z_1x_2 = y_1z_2 - z_1x_2 = 0$.*

Demonstração:

Se um dos vetores for nulo o resultado é imediato. Agora, sem perda de generalidade fixemos $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{0}$ com $x_1 \neq 0$. Suponhamos as igualdades e ponhamos $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$, portanto $x_2 = \lambda x_1$ e como $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$, temos que $y_2 = \lambda y_1$ e considerando que $x_1z_2 - z_1x_2 = 0$ resulta que $z_2 = \lambda z_1$, logo $\overrightarrow{v_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_1}$, mostrando que a condição é suficiente. Reciprocamente, se um dos vetores, digamos $\overrightarrow{v_2}$, é múltiplo do outro. Então sendo $\overrightarrow{v_2} = \lambda \overrightarrow{v_1}$, temos que $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$ e $z_2 = \lambda z_1$, donde deduzimos que $\lambda x_1y_2 = \lambda x_2y_1$, $\lambda x_1z_2 = \lambda z_1x_2$, e $\lambda y_1z_2 = \lambda z_1x_2$. Se $\lambda \neq 0$ obtemos $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - z_1x_2 = y_1z_2 - z_1x_2 = 0$. Quando $\lambda = 0$, termos que $x_2 = y_2 = z_2 = 0$ tornado as igualdades óbvias.

Geometricamente, a multiplicidade de um vetor por outro poderá ser entendida como a colinearidade de ambos, como já falamos quando procuramos interpretar a multiplicação de um vetor por um escalar em termos geométrico. Dessa maneira, se um vetor é múltiplo um do outro então eles são colineares, ou seja, se $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ termos que os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta. E verificamos que recíproca é verdadeira, pois se existe λ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, tomemos $\lambda = \pm \frac{d(A,C)}{d(A,B)}$, onde o sinal $+$ indica que BC estão do mesmo lado da reta em relação a A e o sinal $-$, que estão em lados opostos. Uma aplicação importante desse fato é exposto no corolário abaixo:

Corolário 1 *Sejam A, B e C três pontos no espaço. Então A, B e C são colineares se e, somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares.*

A partir dos conceitos e resultados, expostos até agora relacionando os vetores o um dado sistema de coordenadas podemos determinar as equações paramétricas de uma reta qualquer do espaço, generalizando a expressão que obtivemos para uma reta situado sobre um plano determinado.

Exemplo 9 *Fixando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço, dados $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$, pelo corolário acima temos que um ponto P é colinear com A_1 e A_2, se, e somente se, existe um número real t de modo que $\overrightarrow{A_1P} = t \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$. Utilizando a notação $P = A_1 + \overrightarrow{A_1P}$, afirmamos P pertence a reta A_1A_2 equivale a dizer que*

$$P = A_1 + t \cdot \overrightarrow{A_1A_2},\ t \in \mathbb{R}.$$

Como t varia nos números reais o ponto genérico P percorre toda a reta A_1A_2, obtendo assim a chamada equação paramétrica da reta. Quando utilizamos o sistema de coordenadas onde $P = (x, y, z)$ temos que

$$x = a_1 + t(a_2 - a_1),\ y = b_1 + t(b_2 - b_1) \text{ e } y = c_1 + t(c_2 - c_1.)$$

Se fizermos a restrição $0 \leq t \leq 1$, obtemos a expressão para o segmento de reta A_1A_2.

O conceito de vetor múltiplo de outro nos fornece embasamento para a seguinte definição:

Definição 12 *Dados os números reais $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e os vetores $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}$, dizemos que o vetor $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + ... + \alpha_n \overrightarrow{v_n}$ é **combinação linear de** $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n}$*

E a partir dessa definição podemos formular o teorema abaixo:

Teorema 2 *Sejam A, B e C pontos não-colineares. O ponto D pertença ao plano determinado pelos três pontos dados se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja, existam números reais x e y tais que*

$$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Demonstração:

Inicilamente suponhamos que D pertença ao plano π que contem os pontos A, B e C. Dessa maneira a reta que passa por D e é paralela a reta AC está contida em π e como A, B e C não são colineares, temos que a reta AB é concorrente com a reta traçada por D, determinando o ponto D_1. Analogamente, traçamos outra reta passando por D, que é paralela a reta AB e corta a reta AC no ponto D_2. Agora, tomemos x e y de maneira que $\overrightarrow{AD_1} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ e $AD_2 = y \cdot \overrightarrow{AC}$. Notemo que AD_1DD_2 da forma que foi construído é um paralelogramo, e daí temos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2},$$

de outra forma,

$$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Reciprocamente, suponhamos que essa igualdade é válida e consideremos o sistema de eixos $AXYZ$, com origem no ponto A, escolhido de modo que o plano π_{xy} contenha os pontos B e C, como na figura abaixo.

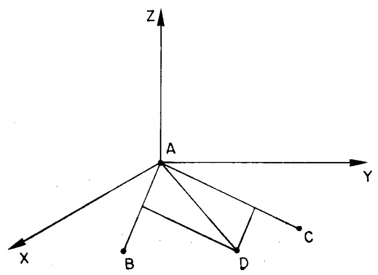

figura 14

Dessa maneira a terceira coordenada dos pontos B e C são nulas e sabemos que $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$, como A é a origem desse sistemas podemos escrever $D = x \cdot B + y \cdot C$, do que decorre que a terceira coordenada de D também é zero, logo D pertence ao plano π_{XY} que é determinado pelos pontos A, B e C.

Com esse fato podemos determinar a equação paramétrica de um plano do espaço euclidiano.

Exemplo 10 *Sejam agora $A_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3, c_3)$, pontos não colineares no espaço e π o plano que os contém como resultado do teorema anterior seque que um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se, existem números reais s, t tais que $\overrightarrow{A_1P} = s \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + t \cdot A_1A_3$, quando utilizamos a notação $B = A + \overrightarrow{AB}$, podemos afirmar que os pontos P do plano π são determinados pelos pontos não colineares A_1, A_2 e A_3 pela expressão*

$$P = A_1 + s \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + t \cdot \overrightarrow{A_1A_3}, \ \ s, t \in \mathbb{R}$$

fazendo t e s variar entre todos os números reais, essa expressão fornece a chamada equação paramétrica do plano π. Em termos de coordenadas essa expressão equivale a

$$x = a_1 + s(a_2 - a_1) + t(a_3 - a_1)$$
$$y = b_1 + s(b_2 - b_1) + t(b_3 - b_1)$$
$$z = c_1 + s(c_2 - c_1) + t(c_3 - c_1).$$

Observemos que enquanto os pontos de uma reta dependem apenas de um parâmetro t, os pontos de um plano são descritos por meio de dois parâmetros s, t. Isto decorre do fato de que a reta tem apenas uma dimensão e plano, duas.

Também podemos podemos determinar as coordenadas de um ponto qualquer do espaço, utilizando para isso três vetores, o resultado a respeito desse fato nos fornecerá uma importante definição, a de base do espaço que terá suas consequência potencializadas quando trabalharmos em espaços cuja dimensão seja maior que 3.

Teorema 3 *Sejam* $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ *e* $\overrightarrow{v_3}$ *vetores* ***linearmente independente****, isto é, nenhum é combinação linear dos outros dois. Para todo vetor* $\overrightarrow{w}$ *do espaço existe um único terno* (x, y, z) *de números reais tais que* $\overrightarrow{w} = x \cdot \overrightarrow{v_1} + y \cdot \overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$*.*

Demonstração: Sejam $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP}$,como esses vetores não são linearmente dependentes, então em virtude do *teorema 2*, os pontos A, B, C e D não estão sobre o mesmo plano. Tracemos o plano paralelo ao plano ABC, passando por P, cortando a reta AD no ponto D'. Seja $\overrightarrow{AD'} = z \cdot \overrightarrow{AD}$. De maneira análoga, seja B' o ponto onde a reta AB corta o plano que passa por P e é paralelo ao plano ACD e obtemos $\overrightarrow{AB'} = x \cdot \overrightarrow{AB}$. Finalmente, encontremos C' o ponto de interseção entre a reta AC e o plano paralelo a ABD que passa por P, donde temos $\overrightarrow{AB'} = y \cdot \overrightarrow{AB}$. As arestas AB', AC' e AD' determinam um paralelepípedo, no qual P é o vértice oposto a A

Utilizando a definição da soma de vetores observamos que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$, ou seja, $\overrightarrow{w} = x \cdot \overrightarrow{v_1} + y \cdot \overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$.

Resta provar a unicidade. Suponhamos, por absurdo, que se tenha também $\overrightarrow{w} = x' \cdot \overrightarrow{v_1} + y' \cdot \overrightarrow{v_2} + z'\overrightarrow{v_3}$, com $z' \neq z$. Assim teríamos

$$\overrightarrow{O} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w} = (x - x') \cdot \overrightarrow{v_1} + (y - y') \cdot \overrightarrow{v_2} + (z - z')\overrightarrow{v_3},$$

donde resultaria que $\overrightarrow{v_3} = \alpha\overrightarrow{v_2} + \beta\overrightarrow{v_1}$, com $\alpha = \frac{x-x'}{z'-z}$ e $\beta = \frac{y-y'}{z'-z}$. E dessa maneira, pelo *teorema 2*, o ponto D pertenceria ao plano ABC. Analogamente, percebese que não se pode ter $x \neq x'$ e $y \neq y'$.

Agora passemos a uma importante definição:

Definição 13 *No* $\mathbb{R}^3$*, um conjunto de três vetores,*$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ *e* $\overrightarrow{a_3}$*, não-coplanares, ou seja, linearmente independente, é chamado de* ***base****, pois qualquer vetor e, portanto, cada ponto do espaço tridimensional pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base.*

Se estivermos considerando um plano desse espaço podemos dizer que uma base para ele se constitui de dois vetores linearmente independentes.

É importante observar que a cada base faz-se uma relação biunívoca com o sistema de coordenadas. A partir da exposição sobre produto interno, detalharemos mais aspectos sobre uma base do $\mathbb{R}^3$.

2.7 Produto Interno

O produto interno de dois vetores no espaço euclidianos é definido como um número real, a partir do qual podemos estudar a geometria desse espaço estabelecendo cálculos para se determinar a distância entre dois pontos, o ângulo entre duas retas e, em particular, quando estas são perpendiculares.

A dedução das propriedades do produto interno, assim como ocorreu com as propriedades da soma e do produto de um vetor por um escalar, fica evidente quando esta operação é definida a partir das coordenadas dos vetores em um sistema de coordenadas.

Muito embora, destaquemos que o seu resultado independe do sistema de coordenadas escolhido. Assim,

Definição 14 *Tomemos o sistema $OXYZ$ no espaço, no qual os vetores $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$, chamamos de* ***produto interno*** *desses vetores ao número*

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

E dessa maneira, dados os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, verificamos imediatamente da definição que o produto interno de vetores goza das seguintes propriedades:

- $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$;
- $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$;
- $\langle \lambda \cdot \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$;
- $\langle \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{0} \rangle = 0$;
- $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geq 0$, e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$, teremos $\sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, como visto no *exemplo 8*, esta expressão corresponde a distância $d(O, P)$ entre os pontos O e P e definimos

Definição 15 *O* ***módulo*** *ou* ***normado vetor*** $\overrightarrow{u}$ *o número indicado por $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$, que naturalmente corresponde ao comprimento desse vetor.*

Como segmentos equipolentes têm o mesmo comprimento, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ segue que $|\overrightarrow{u}| = d(A, B)$, mostrando que o comprimento de $\overrightarrow{u}$ independe do sistema de eixos coordenados fixados.

Definição 16 *Quando $|\overrightarrow{u}| = 1$, dizemos que $\overrightarrow{u}$ é um* ***vetor unitário****.*

Afirmação 5 *Seja $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ um vetor não-nulo, teremos que $\frac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$ é um vetor unitário.*

Demonstração:

De fato, sabemos que $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então

$$\left| \frac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|} \right| = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|} |\overrightarrow{u}| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Nossa intensão a partir de agora é mostrar que, apesar de termos definidos o produto internos através das coordenadas dos vetores considerados, esta operação independe de tais eixos. Para isso, faremos algumas algumas definições e enunciaremos alguns resultados que nos auxiliará nesta tarefa.

Definição 17 *Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores não-nulos. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são* ***ortogonais*** *ou* ***perpendiculares*** *e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ quando asa retas AB e AC são perpendiculares.*

Lema 1 *Se os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares então $\langle u, v\rangle = 0$.*

Demonstração:

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, termos que $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$.

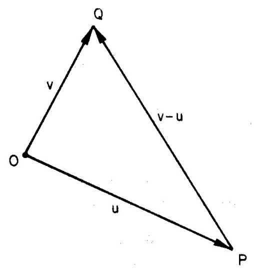

figura 15

Como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares, temos que o segmento PQ é a hipotenusa do triângulo OPQ, e pelo Teorema de Pitágoras decorre que

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2,$$

ou seja,

$$|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2.$$

Utilizando a propriedades de produto interno verificamos que

$$|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 = \langle \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\rangle = |\overrightarrow{u}|^2 + \overrightarrow{u}|^2 - 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle.$$

E comparando as duas expressões, chegamos a conclusão que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$.

Definição 18 *Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores não-nulos. O* ***ângulo θ entre esses vetores*** *é o menor ângulo entre as semirretas AB e AC.*

Notemos que quando $\alpha > 0$, temos que o ângulo entre $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o mesmo que o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, já que $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ são colineares e têm mesma direção.

Teorema 4 *Seja θ o ângulo entre os vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Temos que $\langle u, v\rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$.*

Demonstração:

Suponhamos, a princípio, que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores unitários. Ponhamos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Consideremos no plano π definido por O, A e B, tomemos $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OA^*}$ um vetor unitário e ortogonal a u.

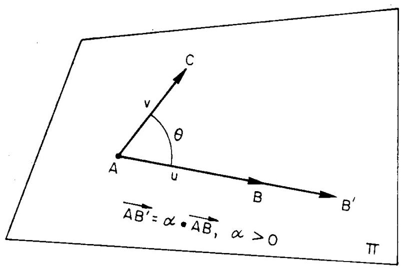

figura 16

A figura nos ajuda a visualizar que

$$\overrightarrow{v} = \cos\theta \cdot \overrightarrow{u} + \sin\theta \cdot \overrightarrow{w}.$$

Resultado que se verifica pelo fato dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ constituirem uma base para o plano π e das definições de seno e cosseno. Agora, façamos o produto interno em ambos os membros da igualdade acima com o vetor $\overrightarrow{u}$, observemos que $\langle u, u\rangle = 1$ e que $\langle u, w\rangle = 0$ pelo *Lema 1*, obtemos

$$\langle u, v\rangle = \cos\theta.$$

No caso geral, em que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são unitários, definamos $\overrightarrow{u}' = \frac{\overrightarrow{u}}{|u|}$ e $\overrightarrow{v}' = \frac{\overrightarrow{v}}{|v|}$ Então temos que $\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}| \cdot \overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}| \cdot \overrightarrow{v'}$ e, portanto,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\rangle$$

Porém, $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ são unitários , logo $\langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\rangle = \cos\theta$, donde temos

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta.$$

Esse teorema nos garante que a recíproca do *Lema 1* é verdadeira.

Corolário 2 *Se* $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$, *então os vetores não-nulos* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são ortogonais.*

Demonstração:

De fato, como $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são não-nulos segue que $|\overrightarrow{u}|$ e $|\overrightarrow{v}|$ são diferentes de zero. Portanto, para se obter $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$ devemos ter $\cos\theta = 0$, o que necessariamente implica o ângulo entre os vetores ser 90^0, ou seja, esses vetores são ortogonais.

Uma outra importante consequência do teorema anterior e a chamada **Desigualdade de Cauchy-Schwartz** que detalharemos na afirmação abaixo:

Afirmação 6 *Sejam* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *dois vetores, então*

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle| \leq |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são colineares.*

Demonstração:

Utilizando a igualdade $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}||\cos\theta|$ e o fato de que $|\cos\theta| \leq 1$, a desigualdade decorre. Observemos que $|\cos\theta| = 1$ se, e somente se, $\theta = 0^0$ ou $\theta = 180^0$, ou seja, quando $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares.

Façamos, nesse momento, uma definição que nos permitirá relacionar o representação de um vetor em um sistema de eixos ortogonais coordenadas com o produto interno .

Definição 19 *Dado o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, em cada um dos semi-eixos positivos de OX, OY e OZ tomemos pontos A, B e C, respectivamente, com $d(O,A) = d(O,B) = d(O,C) = 1$. Aos vetores $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{OC}$ chamaremos* ***vetores unitários do sistema** $OXYZ$.*

Agora mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 5 *As coordenadas de um vetor relativamente a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ são os produtos internos desse vetor pelos vetores unitários desses eixos.*

Demonstração:

Pelo *Teorema 3*, para qualquer vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ do espaço existem números x, y e z tais que $\overrightarrow{v} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2} + z \cdot \overrightarrow{e_3}$ e, também, observamos que os coeficientes x, y e z desta combinação linear são exatamente as coordenadas do ponto P relativas ao sistema $OXYZ$. Agora, tomemos o produto interno em ambos os membros da igualdade, respectivamente, por $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$, que são unitários e dois a dois ortogonais, obtemos $x = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1} \rangle$, $y = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ e $z = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_3} \rangle$. E a demonstração segue.

Este resultado é um caso particular do chamado Teorema da Representação de RIEZ, que será detalhado nas próximas seções.

Agora podemos fazer algumas considerações sobre aspectos de uma base para $\mathbb{R}^3$.

Um conjunto de três vetores não-nulos $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{u_3}$ constituem uma **base ortogonal** se, e somente se, são mutuamente ortogonais, ou seja,

$$\langle \overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{u_n} \rangle = 0, \text{para } m \neq n \text{ e } m, n = 1, 2, 3.$$

Quando esses vetores são unitários , dizemos que esta base é **ortonormal**. Usualmente, esses três vetores unitários utilizados num dado sistema de coordenadas $OXYZ$ são representados por $\overrightarrow{i} = (1,0,0), \overrightarrow{j} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$, também denominados de vetores da base dos sistema de coordenadas retangulares.

Capítulo 3

Álgebra Linear

A Álgebra Linear é um ramo da matemática que começou a se desenvolver com a busca de soluções para sistemas de equações lineares e obteve grande êxito conjuntamente com a teoria de determinantes e matrizes. Mais recentemente, inseriu-se nessa área a ideia de espaço vetorial o que potencializou bastante sua aplicação em diversas áreas do conhecimento como Economia, por exemplo.

A teoria dos determinantes e matrizes resulta de um longo processo tecno-histórico, pois podemos encontrar vestígios de seus registros iniciais em povos, como os babilônios e os chineses. Na antiga Babilônia, enunciados decifrados em tabuletas do período aproximado entre 1800 a.C. e 1600 a.C., confirmam que os babilônios resolviam sistemas simples de até duas incógnitas, relacionados a problemas de medições, onde as incógnitas representavam grandezas geométricas como comprimento, largura ou área. Já na China, ainda no século II a.C., era conhecido um algoritmo para a resolução de sistemas lineares, cujas ideia principal é de reduzir uma matriz a sua matriz triangular equivalente, o que atualmente consiste Método de Eliminação de Gauss. Esses são alguns dos motivos que ajudam a corroborar a afirmação de BOURBAKI(1999 *apud* DOS SANTOS) de que *"a álgebra linear é um dos ramos mais antigos da matemática."*

Ainda na Idade Média, Leonardo de Pisa, no livro *Liber Abaci* do século $XIII$, apresentava soluções de sistemas de equações de sistemas lineares, reproduzindo técnicas da Antiguidade. Entre os séculos $XVII$ e XIX o desenvolvimento desse campo matemático foi bastante intenso, já que se aliaram conhecimentos da Álgebra Linear com os da Geometria Analítica.

Os estudos atuais sobre sistemas lineares começaram a ser desenvolvidos em 1678, com Leibnitz. Já o conceito de transformação linear foi bastante divulgada por Gauss a partir do século $XVIII$, em sua obra *Disquisitiones generales cerca superficies curvas*(1827), que resultou de estudos realizados para diversos governos da região, onde atualmente se localiza a Alemanha. Neste livro, Gauss estabeleceu representações paramétricas de uma superfície e determinou expressões para o cálculo de distâncias. De acordo com DOS SANTOS(p.25) *" foi nesse contexto que ganharam utilidade as descrições abreviadas de transformações lineares, baseadas em uma notação que se assemelha a que seria usada futuramente para matrizes".*

No início do XIX, podemos dizer que Álgebra Linear se responsabilizava apenas pelos estudos de equações lineares independente do número de variáveis. No entanto, os cálculos passaram a ser feitos através de arranjos retangulares com coeficientes do forma a_{ij}. Esta representação foi, posteriormente, sistematizada por James Sylvester e Arthur Caley na Teoria das Matrizes.

Atualmente, o estudo da Álgebra Linear se apresenta embasado no conceito de espaço vetorial. No Brasil, consiste em uma disciplina básica para diversos cursos do Ensino Superior das áreas de Tecnologia e Ciências da Natureza, como Física, Matemática e Engenharia, a exemplo do que acontece com a Geometria Analítica. De acordo com COELHO (2007, p.13):

"Os conceitos envolvidos em Álgebra Linear constituem atualmente ferramentas bastante úteis nas várias áreas da Matemática, quer seja explorando apenas seu aspecto mais algébrico, quer seja levando em conta os aspectos geométricos e topológicos embutidos na teoria. Com isto, ela se torna bastante útil na resolução de sistemas de equações lineares, equações diferenciais, aproximações, interpolações, reconhecimento de quádricas, apenas para citar alguns problemas matemáticos. Conceitos básicos de Álgebra Linear são normalmente ensinados em praticamente todos os cursos de graduação nas áreas de Ciências Exatas e um aprofundamento deles é essencial em muitos desses cursos, especialmente os de Matemática e Física."

Iremos expor os principais conceitos e resultados referentes ao estudo atual da Álgebra Linear. Destacamos, no entanto, que a linguagem utilizada a partir daqui será bastante formal e diferentemente da seção sobre Geometria Analítica, utilizaremos de forma reduzida a interpretação geométrica dos conceitos e resultados.

3.1 Espaços Vetoriais

Definição 20 *Um conjunto $V \neq \emptyset$ é dito* ***espaço vetorial*** *sobre um $\mathbb{K}$($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, se existem duas operações denominadas soma e produto por escalar denotada por "$+$" e "$\cdot$", respectivamente, tais que, para $v, u \in V$ e $a \in \mathbb{K}$:*

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (v,u) & \mapsto & v+u \end{array} \qquad \therefore \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (a,v) & \mapsto & av \end{array}$$

satisfazendo, para todo $a, b \in \mathbb{K}$ e todo $u, v, w \in V$:

1. $u + v = v + u$;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. *Existe* $0 \in V$ *tal que* $0 + v = v$;
4. *Para cada* v *existe* $-v \in V$ *tal que* $v + (-v) = 0$;
5. *Para cada* v, $1 \cdot v = v$, *onde* 1 *é a unidade de* $\mathbb{K}$;
6. $(ab) \cdot v = a(b \cdot v)$;

7. $(a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$*;*

8. $a\cdot(v+u) = a\cdot v + a\cdot u$*.*

Podemos observar que esta definição é generalizante, constituindo-se em um conceito essencialmente abstrato, onde qualquer conjunto munido de duas operações que gozem dessas propriedades poderá ser considerado um espaço vetorial. A seguir daremos alguns exemplos deles.

Exemplo 11 $\mathbb{K}^n = \{(a_1,...,a_n); a_i \in \mathbb{K},$ *com* $i = 1,...,n\}$*, munido das operações:*

$$(a_1,...,a_n) + (b_1,...,b_n) = (a_1+b_1,...,a_n+b_n);$$
$$c\cdot(a_1,...,a_n) = (ca_1,...,ca_n),\ \ com\ c \in \mathbb{K}.$$

Em particular, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n = \{(a_1,...,a_n); a_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1,...,n\}$, chamado de espaço euclidianos com dois subcasos importantes $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, que como já vimos anteriormente são geometricamente associado ao plano e ao espaço, respectivamente.

Exemplo 12 $M_{\mathbb{K}}(m,n) = \{$*matrizes* $m \times n$*, com* $a_ij \in \mathbb{K}$ *com* $i = 1,...,m$ *e* $j = 1,...,n\}$*, onde* $m,n \in \mathbb{N}$*, onde*

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

com as operações

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$c\cdot(a_{ij}) = (ca_{ij}),\ \ com\ c \in \mathbb{K}$$

Exemplo 13 *Seja* $X \neq \emptyset$ *definimos*

$$\mathfrak{F}(X,\mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K}\ \textit{é uma função}\}$$

munindo com as operações:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x); x \in X$ *e* $f,g \in \mathfrak{F}(X,\mathbb{K})$*;*
- $(a\cdot f)(x) = a\cdot f(x)$*, com* $a \in \mathbb{K}ef \in \mathfrak{F}(X,\mathbb{K})$*;*

é um espaço vetorial.

A partir do conceito de espaço vetorial podemos definir vetor no contexto da Álgebra Linear diferentemente de como foi definido no contexo da Geometria Analítica. Veja:

Definição 21 *Um* ***vetor*** *é um elemento qualquer de um espaço vetorial.*

Esta definição é naturalmente uma generalização da definição geométrica anterior, pois os vetores considerados como segmentos equipolentes também satisfazem as condições dessa definição já que sabemos que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são espaços vetoriais. No entanto, podemos considerar, por exemplo, matrizes e funções como vetores.

Outro importante conceito da Álgebra Linear é:

Definição 22 *Um **subespaço vetorial** W de um espaço vetorial V é um subconjunto de V tal que:*

1. $0 \in W$;
2. $u + v \in W$, *para todo* $u, v \in W$;
3. $a \cdot v \in W$, *para todo* $a \in \mathbb{K}$, *para todo* $v \in W$.

Percebamos que um subespaço vetorial $W \subset V$ é, em si, um espaço vetorial e como tal possui seus subespaços vetoriais. Agora, podemos identificar alguns subespaços dos espaços vetoriais exemplificados anteriormente:

Exemplo 14 *Os subespaços do* $\mathbb{R}^2$ *são:*$\{0\}$, *as retas que contém o* 0 *e o próprio* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 15 *Os subespaços do* $\mathbb{R}^3$ *são:*$\{0\}$, *as retas que passam pelo* 0, *os planos que passam pela origem e o próprio* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 16 $S = \{A \in M_{\mathbb{K}}(n,n); (a_{ij}) = (a_{ji})\}$ *denominado conjunto das matrizes simétricas é um subespaço das matrizes quadradas* $n \times n$, *pois:*

- $0 = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in S$
- *Sejam* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ *pertencentes a* S, *então:*
  $A + B = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (c_{ji})$, *logo* $A + B \in S$;
- *E dado* $A \in S$ *e* $c \in \mathbb{K}$ *teremos:*
  $c \cdot A = (d_{ij}) = (ca_{ij}) = c(a_{ij}) = c \cdot (a_{ji}) = (ca_{ji}) = (d_{ji})$, *logo* $c \cdot (A) \in S$.

Exemplo 17 *Seja* $X \neq \emptyset$, *tomemos* $L = \{f \in \mathfrak{F}(X,\mathbb{R}); |f(x)| \leq c$, *para todo* $x \in X$ *e para algum* $c \in \mathbb{R}_+\}$, *denominado conjunto das funções limitadas, onde* $\mathbb{R}_+$, *representa o conjunto dos números reais não negativos. Então,*

- *A função nula, que é o zero do espaço vetorial* $\mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$, *é limitada com* $c = 0$ *pertence a* L;
- *Sejam* $f, g \in L$, *daí existem* c *e* d *em* $\mathbb{R}_+$ *tais que* $|f(x)| \leq c$ *e* $|g(x)| \leq d$, *daí:*
  $|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |f(x)| \leq c + d \in \mathbb{R}_+$, *assim* $(f + g)(x) \in L$;
- *E seja* $f \in L$ *e* $a \in \mathbb{R}$, *temos:*
  $|(a \cdot f)(x)| = |a \cdot f(x)| = |a| \cdot |f(x)| \leq |a| \cdot c = m \in \mathbb{R}_+$, *portanto* $(a \cdot f)(x) \in L$
  Portanto, L *é um subespaço de* $\mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$.

Relembrando a definição de combinação linear vista ainda quando abordávamos os conceitos relativos à Geometria Analítica, podemos fazer a seguinte generalização:

Definição 23 *Seja V um espaço vetorial e $v_1, ..., v_n$, uma* ***combinação linear*** *de $v_1, ..., v_n$ é expressa por:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 \cdot v_1 + ... + a_n \cdot v_n, \text{ com } a_i \in \mathbb{K}, \text{ para } i = 1, ..., n.$$

Dessa forma, se $W \subset V$ é um subespaço vetorial e $v_1, ..., v_n \in W$, então por definição verificamos que a combinação linear desses vetores está em W. Este fato nos auxilia na seguinte definição:

Definição 24 *Sejam $W \subset V$ um subespaço vetorial e $v_1, ..., v_n \in W$, dizemos que $v_1, ..., v_n$ são* ***geradores*** *de W se, e somente se, todo $v \in W$ puder ser escrito como combinação linear de $v_1, ..., v_n$.*

Neste caso, escrevemos:

$$W = [v_1, ..., v_n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} = a_1 \cdot v_1 + ... + a_n \cdot v_n, \text{ com } a_i \in \mathbb{K}, \text{ para } i = 1, ..., n. \right\}$$

Exemplo 18 *Se tomarmos $W \subset \mathbb{R}^4$ de modo que*

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = y + z, w = -z\}.$$

Verificamos que W é subespaço de $\mathbb{R}^4$ e que $v \in W$ se, e somente se, $v = (y+z, y, z, -z) = (y, y, 0, 0)+(z, 0, z, -z) = y\cdot(1, 1, 0, 0)+z\cdot(1, 0, 1, -1)$. Logo $W = [(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1)]$.

Vale salientar que a lista de geradores pode ser infinita, no entanto, a combinação linear requer um número finito de vetores geradores.

Exemplo 19 *Fixados $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, consideremos*

$$H(a_1, ..., a_n) = \left\{ (x_1, ..., x_n); \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

denominado hiperplano associado a $a_1, ..., a_n$.
No caso em que $a_1 = 0$, para todo $i = 1, ..., n$, então $H(0, ..., 0) = \mathbb{R}^n$. Se, digamos, $a_n \neq 0$ verificamos que $H(a_1, ..., a_n)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Podemos calcular os geradores de $H(a_1, ..., a_n)$:
Tomemos $x = (x_1, ..., x_2) \in H(a_1, ..., a_n)$, assim:

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0,$$

Agora, definamos:

$$b_i = \frac{a_i}{a_n}, \text{ para } i = 1, ..., n,$$

logo

$$x_n = -b_1x_1 + ... + (-b_{n-1}x_{n-1}).$$

Então,

$$(x_1, .., x_{n-1}, x_n) = (x_1, .., x_{n-1}, -b_1x_1 + ... + (-b_{n-1}x_{n-1}) =$$

$$x_1(1, 0, 0, ..., -b_1) + x_2(0, 1, 0, ..., -b_2) + ... + x_{n-1}(0, 0, 0, ..., 1, -b_{n-1}),$$

daí $H(a_1, ..., a_n) = [(1, 0, 0, ..., -b_1), (0, 1, 0, ..., -b_2), ...(0, 0, 0, ..., 1, -b_{n-1})]$.

Veremos agora alguns resultados relacionados aos conceitos e exemplos apresentados:

Proposição 3 *Sejam V um espaço vetorial e $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de subespaços de V, onde A é um conjunto qualquer de índices. Então $\bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração:

- Se $0 \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, então $0 \in \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$;
- Tomemos $u, v \in \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$, daí $u \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ e $v \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, então $u + v \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Assim, $u + v \in \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$;
- Sejam $v \in \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$ e $a \in \mathbb{K}$, portanto $av \in W_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, logo $av \in \bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$.

Assim $\bigcap_{\alpha\in A} W_\alpha$ é um subespaço de V.

Corolário 3 *O conjunto solução de um sistema linear homogênio, com n variáveis, é um espaço vetorial de $\mathbb{K}^n$.*

Demonstração: De fato, dizer que $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{H}^n$ é uma solução de um sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m1} & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

significa que $(y_1, ..., y_n) \in H(a_{11}, ..., a_{1n}) \cap ... \cap H(a_{m1}, ..., a_{mn}) = W$, ou seja, o conjunto-solução do sistema coincide com W.

Uma observação importante a se fazer é que no caso em que o espaço vetorial é o $\mathbb{R}^3$, os hiperplanos correspondem aos planos que têm a origem como um de seus pontos. E a solução pode também ser interpretada geometricamente.

Utilizando conceitos já vistos podemos definir a soma de dois subespaços vetoriais e verificar alguns resultados relativos a este conceito.

Definição 25 *Sejam V um espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaço de V, chamamos de **Soma de** U **e** W o conjunto*

$$U + W = \{u + w; u \in U \;\; e \; w \in W\}.$$

*Notemos que $U + W$ é um subespaço vetorial de V, ao qual chamaremos de **espaço soma** $U + W$.*

Proposição 4 *Se $U = [u_1, ..., u_n]$ e $W = [w_1, ..., w_m]$, então $U + W = [u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m]$.*

Demonstração:

Tomemos $v \in U + W$, devemos mostrar que v se escreve como combinação linear de $u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m$, daí $v = u + v$ com $u \in U$ e $v \in V$. Como, $u \in U \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$. Analogamente, como $w \in W \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$. Portanto, $v = u+w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$ e o resultado segue.

Exemplo 20 *Sejam* $U, W \subset P_4 = \{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_O,$ *com* $a_i \in \mathbb{K},$ *para* $i = 0, ..., 4\}$, *onde:*

$$U = \{ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

e

$$W = [2, 1-x, x^3 - x^4]$$

Primeiramente, devemos verificar se U *é subespaço de* P_4.

- *O polinômio nulo pertence a* U, *basta tomar* $a = b = c = 0 \in \mathbb{K}$;
- *Tomemos* $p, q \in U$, *com* $p = ax^2+(a-b)x^3-(b-c)x^4$ *e* $q = dx^2+(d-e)x^3-(e-f)x^4$, *daí*

  $$\begin{aligned} p + q &= ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4 + dx^2 + (d-e)x^3 - (e-f)x^4 \\ &= (a+d)x^2 + (a+d-b-e)x^3 - (b+e-c-f)x^4, \end{aligned}$$

  tomando $g = a + d, h = b + e$ *e* $i = c + f$, *verificamos que* $p + q = gx^2 + (g-h)x^3 - (h-i)x^4$, *portanto,* $p + q \in U$.
- *E se tomando* $p \in U$*como definido no item anterior e* $\lambda \in \mathbb{K}$, *temos que*

  $$\lambda \cdot p = \lambda \cdot (ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4) = \lambda ax^2 + (\lambda a - \lambda b)x^3 - (\lambda b - \lambda c)x^4,$$

  logo $\lambda \cdot p \in U$ *Comprovando que* U *é um subespaço de* P_4.

Agora, procuremos geradores para U. *Dado* $p \in U$, *dessa forma* $p = ax^2 + (a-b)x^3 - (b-c)x^4 = a(x^2+x^3)+b(-x^3-x^4)+cx^4$, *daí concluímos que* $U = [x^2+x^3, -x^3-x^4, x^4]$. *Então aplicando a proposição anterior temos que* $U+W = [x^2+x^3, -x^3-x^4, x^4, 2, 1-x, x^3-x^4]$.

Se fizermos uma restrição em relação a interseção dos subespaços de V, U e W, teremos uma nova definição em relação ao subespaço soma $U + W$, veja:

Definição 26 *Sejam* V *um espaço vetorial e* $U, W \subset V$ *subespaços vetoriais de* V. *Se* $U \cap W = \{0\}$ *o subespaço soma* $U + W$, *será denotado por* $U \oplus W$ *e é chamado* ***soma direta de*** U ***e*** W

Exemplo 21 *Comecemos considerando uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* f *é uma* ***função par*** *quando* $f(x) = f(-x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Quando* $f(x) = -f(-x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *dizemos que* f *é uma* ***função ímpar***. *Agora, considerando ao espaço vetorial*

$$\mathfrak{f}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\},$$

munido das operações usuais com funções, verificamos que $\mathfrak{f}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *pode ser escrito como soma direta de* $W_1 = \{f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f$ *é par*$\}$ $W_2 = \{f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f$ *é ímpar*$\}$.

Primeiramente, observemos que W_1 e W_2 são subespaço de $\mathfrak{f}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e ainda que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, onde 0 representa aqui a função nula.
Agora, escrevamos

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Observamos que definindo $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, temos que g é uma função par e h é um função ímpar. Portanto, cada elemento de $\mathfrak{f}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pode ser escrito como soma de elementos de W_1 e W_2. E o resultado segue.

No contexto da Álgebra Linear podemos, também, nos apropriar do conceito de dependência linear, já visto quando tratamos da Geometria Analítica, assim relembremos:

Definição 27 *Seja V um espaço vetorial, $S \subset V$, com $S \neq$ é dito **linearmente independente** (L.I.) se, sempre que , $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$, com $v_1, ..., v_n \in V$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$, tivermos $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Em outras palavras, nenhum vetor de S é combinação linear de outros vetores de S. Dizemos, ainda, que S é **linearmente dependente**(L. D.), quando não for L.I.*

Observemos que $0 \in S$, então esse conjunto é necessariamente L.D., pois $0 = \alpha \cdot 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Passemos a uma definição mais abrangente do que a dada no contexto da Geometria Analítica.

Definição 28 *Sejam V um espaço vetorial e $\beta \subset V$, um subconjunto não-vazio, é dito uma **base de V** se:*

- *β é L.I.;*
- *β gera V, isto é, todo $v \in V$ se escreve da forma $\sum_{i=1}^{n} a_1v_i$, com $a_i \in \mathbb{K}$ e $v_i \in \beta$.*

Quando a base é um conjunto finito temos uma base finita, caso contrário temos uma base infinita.

Como se verá ao longo da exposição sobre alguns tópicos de Álgebra Linear, este conceito é uma ferramenta bastante útil para se caracterizar espaços vetoriais. Comecemos com o seguinte resultado.

Teorema 6 *Se m vetores geram um espaço vetorial V, então qualquer conjunto contendo $n > m$ vetores é L.D.*

Demonstração:

Escrevamos $V = [v_1, ..., v_m]$. Sejam $w_1, ..., w_n \in V$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$ temos

$$w_j = a_{ij}v_i + ... + a_{mj}v_m \text{ com } a_ij \in \mathbb{K}, \text{ onde } i = 1, ..., m.$$

Consideremos o sistema linear homogêneo sobre as variáveis $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & ... & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & ... & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & ... & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & ... & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Como $n > m($ o número de equações é menor que o número de variáveis) temos que este sistema admite uma solução diferente de $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, ou seja, existe $(y_1, ..., y_n) \neq (0, ..., 0)$ satisfazendo este sistema. Escrevendo

$$(a_{11}x_1 + ... + a_1nx_n) \cdot v_1 + ... + (a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n) \cdot v_m = 0_V;$$

$$x_1(a_{11}v_1 + ... + a_1nv_m) + ... + x_na_{m1}v_1 + ... + a_{mn}v_m) = 0_V;$$

$$x_1 \cdot w_1 + ... + x_nw_n = 0_V.$$

Como algum $x_i \neq 0$, então temos que $\{w_1, ..., w_n\}$ é L.D. Um resultado imediato desse teorema nos garante a unicidade do número de elementos de uma base finita para um espaço vetorial.

Corolário 4 *Se V possui uma base finita com n elementos, então qualquer outra base também possuirá n vetores.*

Demonstração:

Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Se $\beta' = \{w_1, ..., w_m\}$ outra base de V. Como β gera V e β' é L.I., temos que $m \leq n$. reciprocamnte, como β é L.I. e β' gera V, segue que $m \geq n$ e dessa forma, temos que $m = n$. Logo faz sentido definir

Definição 29 *Se V admite base finita $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$, então o número n é dito* ***dimensão*** *de V, e será denotado por $n = dimV$.*

Exemplo 22 *No $\mathbb{R}^3$ temos que qualquer conjunto de três vetores L.I. geram o espaço euclidiano, e por isso dizemos que este é um espaço tridimensional. Quando estamos nos limitando ao plano, necessitamos apenas de dois vetores linearmente independentes para gerá-lo e, portanto, temos um espaço bidimensional. Já ao nos referimos à reta, precisamos apenas de um vetor para gerá-la, basta lembrar da equação paramétrica da reta, e dessa forma, temos um espaço unidimensional.*

Uma convenção é considerar a dimensão do espaço $\{0\}$ igual a zero. Outra consideração, que faremos no contexto da Álgebra Linear, e a de trabalharmos apenas com espaços vetoriais com dimensões finitas a menos que façamos menção explicitamente.

A seguir elencaremos algumas propriedades básica em relação à dependência linear.

Seja V um espaço vetorial.

1. Se $S \subset V$ L.I. Se $S' \subset S$ então S' é L.I.;

   Demonstração:

   Supondo, por absurdo, que S' é L.D., então existiria $v \in S'$ que poderia ser escrito como combinação linear de elementos de S'. Mas como $S' \subset S$, teríamos que existe $v \in S$ tal que v se escreve como combinação linear de elementos de S. Logo, S é L.D. Contrariando a hipótese.

2. Sejam $S \subset V$ L.D. e $S \subset S'$, então S' é L.D.;

   Demonstração:

   Como S é L.D. Tomemos $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, com $v_i \in S$ e $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, ..., n$, com algum $a_i \neq 0$. Mas como $S \subset S'$, temos que $v \in S'$ e o resultado segue.

3. Se $v_1, ..., v_n$ geram V, então podemos extrair do conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base para V;

   Demonstração:

   Se $S = \{v_1, ..., v_n\}$ é L.I., nada há o que mostrar. Se S é L.D., então podemos escrever, por exemplo, $v_n = a_1v_1 + ... + a_{n-1}v_{n-1}$ e teremos $S' = \{v_1, ..., v_{n-1}\}$, se for L.I., teremos nossa base, caso contrário, procedamos de maneira análoga, obtemos $S'' = \{v_1, ..., v_{n-2}\}$ e, novamente, se for L.I. encontramos nossa base. Caso contrário, podemos usar o mesmo argumento um número finito de vezes até obtermos um conjunto L.I., que gerará o espaço V e, portanto, será uma base para este espaço.

4. Todo $S \subset V$ L.I. pode ser completado a uma base de V;

   Demonstração:

   Se S gera V nada há o que demonstrar. Se S não gera V então existe $v_{n+1} \notin [v_1, ..., v_n]$, logo $S' = \{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\}$ é L.I. Se S' gera V então atingimos nosso objetivo, caso contrário repetimos o argumento um número finito de vezes até encontrar um conjunto β que é L.I. e gera V.

5. Seja $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$, com $dimV = n$. Então $\{v_1, ..., v_n\}$ é L.I. se, e somente se, $V = [v_1, ..., v_n]$.

   Demonstração:

$\Rightarrow$Supondo, por absurdo que existisse $S = \{v_1, ..., v_n\}$ um subconjunto L.I. de V que não o gerasse, então existiria um $v_{n+1} \notin [v_1, ..., v_n]$, de modo que $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\}$ seria L.I., e portanto teríamos um conjunto L.I. com cardinalidade maior que $dimV$, que é uma contradição.
$\Leftarrow$ Seja $V = [v_1, ..., v_n]$, supondo, por absurdo, que $S = \{v_1, ..., v_n\}$ é L.D. então por 3. poderiamos extrair uma base de S para V e teríamos $dimV < n$ (contradição).

6. $W \subset V$ subespaço vetorial de V, se $dimW = dimV$, então $W = V$.

   Demonstração:

   Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de W, portanto é um conjunto L.I de V com n elementos, logo por 4. $V = [v_1, ..., v_n]$ e segue que $W = V$.

Exemplificaremos bases de alguns espaços vetoriais de dimensão finita que já foram expostos até o momento.

Exemplo 23 *Em $V = \mathbb{K}^n$, tomemos $u_i = (0, ..., b_i, ..., 0)$, onde $b_i \neq 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Então dado $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ temos que:*

$$(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1}{b_1}u_1 + ... + \frac{x_n}{b_n}u_n,$$

e segue que $\mathbb{K}^n = [u_1, ..., u_n]$.
Agora tomemos a igualdade

$$y_1u_1 + ... + y_nu_n = (0, 0, ..., 0, 0).$$

Verificamos que $y_ib_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, donde $y_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Portanto, $\{u_1, ..., u_n\}$ é L.I. Logo $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base para $\mathbb{K}^n$ e, consequentemente, $dim\mathbb{K}^n = n$. No caso em que $b_i = 1$ de $\mathbb{K}$ para todo $i = 1, ..., n$, denotamos por $u_i = e_i$ e temos que $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 24 *Seja $V = M_{\mathbb{K}}(m, n)$ Definamos $A^{(r,s)} \in V$, onde $r = 1, 2, ..., mn$ e $s = 1, ..., mn$ de modo que $A^{(r,s)} = (a_{ij}^{rs})$, onde*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad r = i \ e \ s = j; \\ 0, & se \quad s \neq i \ ou \ s \neq j. \end{cases}$$

Verificamos de maneira análoga ao exemplo anterior que $\{A^{(r,s)}\}$ com $r = 1, 2, ..., mn$ e $s = 1, ..., mn$ é uma base de V, e temos que $dimM_{\neg}(m, n) = mn$.

Exemplo 25 *Tomando $V = P_n$, temos que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ é uma base para P_n, donde segue que $dimP_n = n + 1$.*

O resultado a seguir procuram explorar o conceito de dimensão.

Teorema 7 *Sejam $W, U \subset V$ subespaços vetoriais. Então*

$$dim(W + V) = dimW + dimU - dim(W \cap U).$$

Demonstração:

Sejam $\beta = \{v_1, ..., v_k\}$, uma de $W \cap U$, donde $dim(W \cap U) = k$, com o que já vimos β pode ser completada a bases:
$\beta' = \{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n\}$ de W, com $dimW = k + n$ e
$\beta'' = \{v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_m\}$ de U, com $dimU = k + m$.

Assim $W + U = [v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n, u_1, ..., u_m]$. Mostremos que $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n, u_1, ..., u_m\}$ é L.I.

$$\sum_{i=1}^{k} x_i v_i + \sum_{j=1}^{n} y_j w_j + \sum_{s=1}^{m} y_s u_s = 0. \tag{3.1}$$

Tomemos $u = \sum_{s=1}^{m} y_s u_s = \sum_{i=1}^{k}(-x_i)v_i + \sum_{j=1}^{n}(-y_j)w_j \in W \cap U$, pois é ao mesmo tempo combinação linear de β' e β''. Portanto existem $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_{l=1}^{m} = z_s u_s = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \Rightarrow \sum_{l=1}^{m} z_s u_s + \sum_{i=1}^{k}(-\lambda_i)v_i = 0$.
Como $\{u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_k\}$ é L.I. seque que $z_s = 0$, para todo $z_s = 1, ...m$. Retornando (4.3), teremos

$$\sum_{i=1}^{k} x_i v_i + \sum_{j=1}^{n} y_j w_j = 0.$$

Mas sabemos que $\{v_1, ...v_k, w_1, ..., w_n\}$ é L.I. e temos que $x_i = 0$ para todo $i = 1, ..., k$ e $y_j = 0$ para todo $j = 1, ..., n$. Portanto, $\beta' \cup \beta''$ é base $W + U$, e daí $dim(W + U) = k + m + n$. E percebamos que $dimW + dimU - dim(U \cup W) = k + n + k + m - k = k + m + n$ e o resultado segue.

Corolário 5 *Sejam V um espaço vetorial, $W, U \subset V$ subespaços de V e $S = W \oplus U$, então $dimS = dimW + dimU$.*

Demonstração: Basta usar o fato de que $W \cap U = \{0\}$, que tem dimensão nula.

3.2 Transformações Lineares

Agora apresentaremos um conceito bastante importante em Álgebra Linear.

Definição 30 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $T : V \to W$ é dita **transformação linear** (T.L.) se para todos $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, valem:*

- $T(u + v) = t(u) + t(v);$
- $T(av) = aT(v).$

ou equivalentemente,

$$T(v + au) = T(v) + aT(u)$$

Segue da definição que $T(0_V) =)_W$. Quando $V = W$ denominamos a transformação linear de **Operador Linear.**

Exemplo 26 *Seja a transformação linear identidade*

$$\begin{array}{rccc} Id: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & v \end{array}$$

para todo $x \in V$.

Exemplo 27 *Seja $V = M_{\mathbb{K}}(m,n)$. Fixando as matrizes $A \in M_{\mathbb{K}}(m,m)$ e $BM_{\mathbb{K}}(n,n)$. Definamos $T : V \to V$, por*

$$T(X) = AXB$$

Observemos que

- $T(X+Y) = A(X+Y)B = (AX+AY)B = AXB + AYB = T(X) + T(Y)$;
- $T(aX) = A(aX)B = aAXB = aT(X)$.

Portanto T é um operador linear.

Os resultados a seguir nos ajudarão a compreender as relações entre espaços vetoriais a partir de transformações lineares.

Teorema 8 *Sejam V, W espaços vetoriais, $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V e $\{w_1, ..., w_n\}$ um subconjunto qualquer de W. Então existe uma única transformação linear. $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, ..., n$.*

Demonstração:

Dado $v \in V$, queremos definir $T(v) \in W$ satisfazendo ao requerido. Como $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V, existem $a_1, ..., a_n$ unicamente determinados em $\mathbb{K}$ tais que $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, então fica bem definida a aplicação $T : V \to W$ por

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

Agora observemos que:

- T é linear, pois dados $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ e $a \in \mathbb{K}$, então

$$T(v + au) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + a \sum_{i=1}^{n} b_i v_i) = T(\sum_{i=1}^{n}(a_i + ab_i)v_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + ab_i)w_i = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i + \sum_{i=1}^{n} ab_i w_i = T(v) + aT(u);$$

- T satisfaz $T(v_i) = w_i$, pois $v_i = 0 \cdot v_1 + ...0 \cdot v_{i-1} + v_i + 0 \cdot v_{i+1} + ... + 0 \cdot v_n$, de modo que $T(v_i) = 0 \cdot w_1 + ...0 \cdot w_{i-1} + w_i + 0 \cdot w_{i+1} + ... + 0 \cdot w_n = w_i$ para todo $i = 1, ..., n$.

- E finalmente, mostremos a unicidade de T. Suponha que exista $S : V \to W$ uma T.L. tal que $S(v_i) = w_i$, para todo $i = 1, ..., n$. Tomemos $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$, então

$$S(v) = S(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i S(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(v),$$

  logo $S = T$.

Definição 31 ***O núcleo de uma transformação linear*** *$T : V \to N$ é subconjunto $N(T) = \{v \in V; T(v) = 0_W\}$.*

Observemos que $N(T)$ é um subespaço vetorial de V.

Proposição 5 *Uma transformação linear $T :\to W$ é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0_V\}$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos T injetiva.Tomemos $v \in N(T)$, então $T(v) = 0_W = T(0_V)$ e pela injetividade de T segue que $v = 0_V$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $N(T) = \{0_V\}$. Sejam $v, u \in V$ tais que $T(v) = T(u)$, então $T(v) - T(w) = 0_W$, e pela linearidade de T, temos que $T(v - u) = 0_W$ e, portanto, $v - u = 0_V$. Do que segue que $v = w$, demonstrando a injetividade de T.

Proposição 6 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então T é injetiva se, e somente se, $\{T(v_1), ..., T(v_n)\} \subset W$ é L.I, para qualquer $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ L.I.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Queremos mostrar que $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é L.I, dessa forma tomaremos $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ L.I. e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = 0_W$, então $T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_W)$. Daí $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in N(T) = \{0_V\}$, pois T, por hipótese é injetiva. Assim, $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_V$, e daí $a_i = 0$ para $i = 1, ..., n,$, pois $\{v_1, ..., v_n\}$ é L.I. e o resultado segue.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que T leva conjuntos L.I de V em conjuntos L.I. de W.Seja $v \in V$ com $v \neq 0_v$. Daí $\{v\}$ é L.I. e temos que $\{T(v)\}$ é L.I., e portanto $T(v) \neq 0_W$.

Definição 32 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Definimos a imagem de T como*

$$Im(T) = T(V) = \{T(v); v \in V\} \subset W.$$

É importante salientar que $Im(T)$ é subespaço vetorial de W.

Usualmente denotamos $Posto(T) = dimIm(T)$.

Proposição 7 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. T é sobrejetiva se, e somente se $W = [T(v_1), ..., T(v_n)]$ sempre que $V = [v_1, ..., v_n]$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Supondo T sobrejetiva, $V = [v_1, ..., v_n]$ e $w \in W$, então $w = T(v)$ para algum $v \in V$. Assim, $w = T(v) = T(\sum_{n=1}^{n} a_i v_i = \sum_{n=1}^{n} a_i T(v_i)$, e segue que $W = [T(v_1), ..., T(v_n)]$.

($\Leftarrow$) Supondo que para $V = [v_1, ..., v_n]$ implique que $W = [T(v_1), ..., T(v_n)]$. Tomemos $w \in W$ então $w = \sum_{i=1}^{n} b_i T(v_i) = T(\sum_{i=1}^{n} b_i(v_i)$, de modo que temos $w = T(v)$, onde $v = \sum_{i=1}^{n} b_i(v_i) \in V$. Portanto T é sobrejetiva.

Tudo que expomos até agora sobre transformação linear servirá para provarmos o importante resultado abaixo:

Teorema 9 ***(Teorema do núcleo e imagem)***

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, então $dimV = dimN(T) + dimIm(T)$.

Demonstração:

Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base $N(T)$, completemos-a a uma base $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_m\}$ de V. Mostraremos que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é uma base de $Im(T)$.
Primeiramente mostremos que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ gera $Im(T)$.
Seja $w \in Im(T)$, então $w = T(v)$, com $v \in V$. E sendo $v = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$, temos que $w = \sum_{i=1}^{m} a_i T(v_i)$, mas como $v_i \in N(T)$ para $i = 1, ..., n$, segue que $w = \sum_{i=n+1}^{m} a_i T(v_i) \in \{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$. Portanto, $Im(T) = [T(v_{n+1}), ..., T(v_m)]$.
Resta mostrar que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é L.I.
Tomemos $a_{n+1}, ..., a_m \in \mathbb{K}$, de modo que $\sum_{i=1+n}^{m} a_i T(v_i) = 0_W$. Daí, $T(\sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i) = 0_W$ e segue que $u = \sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i \in N(T)$ e, portanto, $u = \sum_{i=1}^{n} b_i(v_i)$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(v_i) = \sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i(v_i) - \sum_{i=1+n}^{m} a_i v_i = 0_V,$$

como $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}, ..., v_m\}$ é L.I. temos que $a_i = 0$ para $i = n+1, ..., m$ e $b_i = 0$ para $i = 1, ..., n$. E segue que $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é L.I.
Portanto $\{T(v_{n+1}), ..., T(v_m)\}$ é base de $Im(T)$. Assim:

$$dimN(T) + dimIm(T) = n + (m - n) = m = dimV.$$

A partir desse momento iremos apresentar definições e resultados que contribuirão para caracterizar os espaços vetoriais por meio de transformações lineares, particularmente através de sua representação matricial.

Sejam V, W espaços vetoriais. Definamos $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W; T \text{ é linear}\}$ e consideremos as operações:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(V,W) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ (T,S) & \mapsto & T+S \\ (T+S)(v) & = & T(v)+S(v), \quad \forall v \in V. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{L}(V,W) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ (a,T) & \mapsto & aT \\ (aT)(v) & = & aT(v), \quad \forall v \in V \text{ e } a \in \mathbb{K}. \end{array}$$

Com estas operações $\mathcal{L}(V,W)$ torna-se naturalmente um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Quando temos um operador linear usamos a notação $\mathcal{L}(V)$ para $\mathcal{L}(V,V)$. E quando $W = \mathbb{K}$, chamamos $\mathcal{L}(V,\mathbb{K})$ espaço dual de V e o denotamos por V^*, seus elementos são transformações lineares de V sobre o corpo $\mathbb{K}$ que são denominados de funcionais lineares.

Definição 33 *Dizemos que $T \in \mathcal{L}(V,W)$ é um **isomorfismo** se T é bijetora.*

Notemos que T é um isormofismo $\Leftrightarrow$ existe uma aplicação inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$. Percebamos ainda que T^{-1} é um isomorfismo com $(T^{-1})^{-1} = T$. Além disso, se $T \in \mathcal{L}(V,W)$ e $S \in \mathcal{L}(W,U)$ são isomorfismos, então $S \circ T : V \to U$ é um isomorfismo com $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.
Esta definição nos conduz de maneira natural à seguinte:

Definição 34 *Se existe um isomorfismo $T : V \to W$, então dizemos que esses V e W são **isomorfos** e denotamos por $V \cong W$.*

Vamos agora verificar como se dar a representação matricial de um transformação linear. Fixemos as bases ordenadas $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ de V e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ de W. Seja $T \in \mathcal{L}(V,W)$, podemos escrever

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \text{ com } j = 1, ..., n, \text{ e } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Então temos a matriz

$$[T]^\alpha_\beta = (a_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Definição 35 *Esta matriz assim é obtida é chamada **matriz de T em relação às base α e β**.*

Sabemos que dado $v \in V$, escrevemos $v = a_1 + ... + a_n v_n$, onde os escalares $a_1, ..., a_n$ são as coordenadas de v em relação à base α e podemos utilizar a seguinte notação:

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

E podemos interpretar a matriz $[T]^\alpha_\beta$ como a matriz $m \times n$ cuja j-ésima coluna corresponde $[T(v_j)]_\beta$ e podemos representar a transformação linear T por esta matriz, observando que

$$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta [v]_\alpha$$

Exemplo 28 *Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{$polinômios com grau até 3 com coeficientes reais$\}$. Considere a transformação linear $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ dada pela derivação: $D(p(x)) = p'(x)$. A matriz de D com relação a base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de V é*

$$[D]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 10 *Se $dimV = n$ e $dimW = m$, então $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{\mathbb{K}}(m, n)$.*

Demonstração: Fixemos as bases ordenadas $\alpha \subset V$ e $\beta \subset W$ e definamos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{(\alpha,\beta}: & \mathcal{L}(V,W) & \to & M_{\mathbb{R}}(m,n) \\ & T & \mapsto & [T]^\alpha_{beta}. \end{array}$$

Verificamos que $\varphi_{(\alpha,\beta} \in (\mathcal{L}(V, W), M_{\mathbb{R}}(m, n))$ e que é um isomorfismo com inversa

$$\begin{array}{rccc} \varphi^1_{(\alpha,\beta}: & M_{\mathbb{R}}(m,n) & \to & \mathcal{L}(V,W) \\ & A & \mapsto & S_A, \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} S_A: & V & \to & W \\ & [S_A(v_j)]_\beta & = & A[v_j]_\alpha, \end{array}$$

para $v_j \in V$ e $j = 1, ..., n$.

Teorema 11 *Seja V, W espaços vetoriais , com $dimV = dimW$ e $T \in \mathcal{L}(V, M)$, então são equivalentes:*

1. *T é um isomorfismo;*
2. *T é injetiva;*
3. *T é sobrejetiva;*

4. T leva base de V em base de W.

Demonstração:

(1) $\Rightarrow$ (2) Segue da definição de isomorfismo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supondo T injetiva $\Rightarrow N(T) = \{0_V\} \Rightarrow dimN(T) = 0$ e pelo teorema do núcleo e imagem temos que $dimIm(T) = dim(V) = dimW$ e como $Im(T) \subset W$ temos que $Im(T) = W$, portanto, T é sobrejetiva.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja T sobrejetora $\Rightarrow dimIm(T) = dimW = dimV \Rightarrow dimN(T) = 0 \Rightarrow N(T) = \{0_V\} \Rightarrow T$ é injetiva e dessa forma um isomorfismo.
(3) $\Leftrightarrow$ (2) Utilizemos o fato de $dimV = dimW$ associado à proposição (6) É

importante notarmos que a hipótese de finitude das dimensões de tais espaços é crucial para obter esse resultado. Consideremos $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, ..., x_i, ...); x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$ e seu subespaço $\mathbb{R}^{(\infty)} = \{(x_1, ..., x_i, ...); x_i \neq 0 \text{para uma quantidade finita de } i's\}$.

Como sempre combinações lineares são finitas, e percebemos que

$$\{e_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0, ...), \text{onde 1 ocupa a i-ésima coordenada para } i \in \mathbb{N}\}$$

é uma base para $\mathbb{R}^{(\infty)}$, logo $dim\mathbb{R}^{(\infty)} = \infty$ e segue que $dim\mathbb{R}^\infty = \infty$.
Agora definamos $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ por:
$T((x_1, ..., x_i, ...)) = (0, x_1, ..., x_i, ...)$
$S((x_1, ..., x_i, ...)) = (x_2, ..., x_i, ...)$

Notemos que T é injetiva, mas não é sobrejetiva e S é sobrejetiva, mas não e é injetiva, comprovando que o teorema acima não é válido para dimensão infinita.

Teorema 12 *Sejam V, W espaços vetoriais, então $V \cong W \Leftrightarrow dimV = dimW$.*

Demonstração:
($\Rightarrow$) Supondo que $V \cong W$, então existe um isomorfismo $\varphi : V \to W$ e como φ é injetiva, então $dimV = dimIm(\varphi) \leq dimW$. Analogamente, considerando o isomorfismo $\varphi_{-1} : W \to V$, chegamos a $dimW \leq dimV$. E, portanto, temos $dimV = dimW$.

($\Leftarrow$) Supondo que $dimV = dimW$, tomemos as bases $\alpha = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ e $\beta = \{w_1, ..., w_n\} \subset W$. Definamos a transformação linear

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & W \\ & v & \mapsto & \varphi(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i \end{array}$$

onde $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$. Então fazendo $\varphi(v_i) = w_i$ para $i = 1, ..., n$, percebemos que φ leva base de V em base de W, e, pontanto, é um isomorfismo.

Corolário 6 *Sejam V, W espaços vetoriais tais que $dimV = n$ e $dimW = m$, então $\mathcal{L}(V, M) \cong \mathbb{R}^{mn}$.*

Demonstração:

Utilizando que $\mathcal{L}(V,W) \cong M_{\mathbb{K}}(m,n) \Rightarrow dimL(V,W) = mn.$, como $dim\mathbb{K}^{mn} = mn$, pelo teorema acima o resultado segue.

Corolário 7 $dimV^* = dimV$.

3.3 Produto Interno

Através desses resultados podemos obter diversas outros associando um espaço vetorial a representação matricial de uma transformação linear, utilizando por exemplo conceitos de auto-valores, polinômio característico associados uma transformação linear. No entanto, vamos nos limitar a explorar a partir de agora espaços vetoriais com produto interno para não fugirmos de nosso objetivo.

Definição 36 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Um* ***produto interno*** *é uma aplicação $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que, para todo $v, w, u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfaz:*

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$;
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;
4. *Para todo* $v \neq 0_V$ $v \in V$ *temos* $\langle v, v \rangle \geq 0$;

Decorrem diretamente da definição as seguintes propriedades:

1. $\langle 0_V, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$;
2. $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0_V$.
3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ para qualquer $u, v, w \in V$;
4. $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ com $v, u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
5. $\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \overline{b_j} \langle u_i, v_j \rangle$, com $u_i, v_j \in V$ para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Mostraremos alguns exemplos de espaços vetoriais munidos de um produto interno.

Exemplo 29 *Para $\mathbb{K}^n$ temos o produto interno canônico dado por*

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

com $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}$.

Exemplo 30 *Tomemos $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ o espaço das funções contínuas definidas do intervalo $[0,1]$ no corpo $\mathbb{K}$. Tomemos $f,g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$, obtemos um produto interno definido por*

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

Exemplo 31 *Considerando o espaço vetorial $M_{\mathbb{K}}(n,n)$ das matrizes quadradas de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$, tomando $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ em $M_{\mathbb{K}}(n,n)$, podemos munir esses espaço com o produto interno definido como o traço da $A\overline{B}^T$,*

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ji}}$$

denotado por $tr(A\overline{B}^T)$, onde $\overline{B}^T$ é a matriz transpostas conjugada da matriz B, ou seja, $\overline{B}^T = (\overline{b_{ji}})$.

Definição 37 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ uma função $||.|| : V \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $v,u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1. *$||v|| \geq 0$, com a igualdade se, e somente se, $v = 0_V$;*
2. *$||\lambda v|| = |\lambda|||v||$;*
3. *$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.*

Um espaço vetorial munido de um norma é denominado **espaço vetorial normado.**

Se V é um espaço vetorial munido de um produto interno, então a lei $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ define uma norma em V. No entanto, vale salientar que nem toda norma provem de um produto interno. Por exemplo, no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, consideremos a norma $||(x,y)||_{\max} = \max\{|x|,|y|\}$ que não se origina de um produto interno.

Mostraremos agora algumas propriedades de uma norma provenientes de um produto interno, quando estamos trabalhando com $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

1. (**Identidade de poralização**) Sejam $u,v \in V$ então $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 + \frac{1}{4}||u-v||^2$.

   Demonstração:

   Desenvolvendo

   $$||u+v||^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u+v,u\rangle + \langle u+v,v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$
   $$= ||u||^2 + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle + ||v||^2$$

   e

   $$||u-v||^2 = \langle u-v,u-v\rangle = \langle u-v,u\rangle - \langle u+v,v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$
   $$= ||u||^2 - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + ||v||^2,$$

daí

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 2\langle v,u\rangle + 2\langle u,v\rangle$$

como estamos trabalhando sobre $\mathbb{R}$, temos que $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$ e, portanto,

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle v,u\rangle$$

e o resultado segue.

2. (**Desigualdade de Cauchy-Schuarz**) Sejam $u, v \in V$, então

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||,$$

A igualdade vale se e somente se $\{u,v\}$ é L.D.

Demonstração:
Tomemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$e $u, v \in V$ temos:

$$\langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = \alpha^2||u||^2 - 2\alpha\beta\langle u,v\rangle + \beta^2||v||.$$

Tomemos $\alpha = ||v||^2$ e $\beta = \langle u,v\rangle$, segue que

$$0 \leq \langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = ||u||^2||v||^4 - 2||v||^2|\langle u,v\rangle| + |\langle u,v\rangle|||v||^2 = ||v||^2(||u||^2||v||^2 - |\langle u,v\rangle|).$$

Como $||v||^2 \geq 0$, verificamos que

$$||u||^2||v||^2 - |\langle u,v\rangle| \geq 0$$

ou

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Suponha agora que

$$|\langle u,v\rangle| = ||u|| \cdot ||v||.$$

Usando o cálculo acima termos que $\langle \alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v\rangle = 0$, quando $\alpha = ||v||^2$ e $\beta = \langle u,v\rangle$, o que implica $\alpha u - \beta v = 0_V$ e, portanto, $\alpha u = \beta v$. Se $v = 0_V$ então o conjunto $\{u,v\}$ é claramente L.D. Supondo, agora, que $v \neq 0_V$, logo $\alpha \neq 0$ e daí $u = \frac{\beta}{\alpha}v$, e segue que $\{u,v\}$ é L.D.
Agora, supondo que $\{u,v\}$ é L.D., então existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Assim,

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda|||v||^2 = |\lambda|||v|| \cdot ||v|| = ||u|| \cdot ||v||.$$

Notemos que

$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{||u||||v||} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||}\right|.$$

De modo que podemos estabelecer uma bijeção entre $[0,\pi]$ com $-1 \leq \frac{|\langle u,v\rangle}{||u||||v||} \leq 1$. Motivando a seguinte definição

Definição 38 *Seja V um espaço vetorial munido com o produto interno, o* ***ângulo*** *$\theta \in [0, \pi]$* ***entre*** *$u, v \in V$ se estabelece por:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{||u||||v||}\right).$$

Esta definição consiste em uma generalização a dada no contexto da Geometria Analítica, pois aqui os vetores não são apenas segmentos orientados. Dependendo do espaço vetorial podemos considerar ângulos entre matrizes, polinômios ou funções. Portanto percebemos que aqui ocorre uma exemplificação de onde se aplica a transposição didática que é um fato comum, quando estamos trabalhando com o ensino de Matemática.

Definição 39 *Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno e $u, v \in V$. Dizemos que u e v são* ***ortogonais*** *se e, somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.*

Um subconjunto $S \subset V$ é dito ortogonal se u e v são ortogonais sempre que $u, v \in S$ com $u \neq v$. E dizemos que S é **ortonormal** quando S é ortogonal e $\|v\| = 1$ para $v \in S$.

Exemplo 32 *$\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^n$, em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{K}^n$ β é ortonormal.*

Exemplo 33 *$\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ é ortogonal em relação a*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg dx.$$

Destacaoms nos exemplos acima que propriedade de ortogonalidade de um subconjunto de espaço vetorial é estritamente relacionado com o produto interno do espaço vetorial, em outras palavras, um conjunto ortogonal em relação a um produto interno pode não gozar dessa propriedade com relação a outro produto interno considerado.

Proposição 8 *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e um subconjunto $S = \{v_1, ..., v_n\}$ ortogonal de vetores não nulos, então:*

1. *Se $v \in [v_1, ..., v_n] \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, v_i\rangle}{||v_i||^2} v_i$;*
2. *S é L.I.*

Demonstração:

(1)$\Rightarrow$ Seja $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j \in [v_1, ..., v_n]$, temos que

$$\langle v, v_i\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle v_j, v_i\rangle.$$

Mas como S é ortogonal segue que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ quando $i \neq j$, então

$$\langle v, v_i \rangle = a_j \langle v_i, v_i \rangle = a_i ||v_i||^2.$$

Daí, $a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{||v_i||^2}$, e o resultado segue.

(2)$\Rightarrow$ Aplicando (1) com $v = 0_V$, temos

$$0_v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle 0, v_i \rangle}{||v_i||^2} v_i,$$

logo $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e, portanto, S é L.I.

Teorema 13 *Seja V um espaço vetorial normado munido de um produto interno com $dimV = n$, então V possui uma base ortogonal.*

Demonstração:
Tomemos $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Definamos

$$\begin{cases} w_1 & = & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_m & = & v_m & - & \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle v_m, w_j \rangle}{||w_j||^2} w_j. \end{cases}$$

com $m = 2, ..., n$.

Observemos que

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

Procedendo dessa forma, concluímos que $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$. Portanto, $\{w_1, ..., w_n\}$ é ortogonal e pela proposição anterior é L.I., segue que é uma base ortogonal para V. Para obter a base ortonormal, basta tomar $\{u_1, ..., u_n\}$, onde $u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ para $i = 1, ..., n$.

Esse processo demostrado acima é conhecido como **processo de ortogonalizarão de Gram- Schmidt**.

Definição 40 *Sejam V um espaço vetorial normado munido de um produto interno e $S \subset V$ um subconjunto não-vazio. O conjunto*

$$S^{\perp}_{\langle , \rangle} = S^{\perp} = \{v, inV; \langle v, u \rangle = 0 \ forallu \in S\}$$

*é dito **complemento ortogonal de** S com relação a $\langle , \rangle$*

Observemos que $S^{\perp} \subset V$ é um subespaço vetorial de V e se $S = W$ um subespaço de V, temos que $v \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle v, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, com $W = [w_1, ..., w_n]$.

Proposição 9 *Sejam V um espaço vetorial normado munido de um produto interno e W um subespaço de V, então $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Demonstração:

Tomemos $\{w_1, ..., w_r\}$ uma base ortogonal de W, que pode ser completada a uma base ortogonal de $V, \beta = \{w_1, ..., w_r, w_{r+1}, ..., w_n\}$, de modo que dado $v \in V$ podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i + \sum_{j=r+1}^{n} a_j w_j$$

onde $w = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i$ e $u = \sum_{j=r+1}^{n} a_j w_j$. Mostremos que $u \in W^{\perp}$. Pela que observamos devemos ter $\langle u, w_i \rangle = 0$, para $i = 1, ..., r$. De fato,

$$\langle u, w_i \rangle = \langle \sum_{j=r+1}^{n} a_j w_j, w_i \rangle = \sum_{j=r+1}^{n} a_j \langle w_j, w_i \rangle = 0,$$

pois β é uma base ortogonal de V.

Temos também que $W \cup W^{\perp} = \{0_V\}$, pois se $v \in W \cup W^{\perp}$, então $\langle v, v \rangle = 0$. Logo $v = 0_V$. E portanto o resultado segue.

Teorema 14 ***(Teorema da representação de Riesz)***
Sejam V um espaço vetorial normado munido de um produto interno e $f \in V^*$, então existe um único $w \in V$ tal que $f(v) = f_w(v) = \langle v, w \rangle$. para todo $v \in V$

Demonstração:
Tomemos $f \in V^*$ e $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormal de V, desse modo para $v \in V$, temos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,$$

com

$$a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{||u_i||^2} = \langle v, u_i \rangle.$$

Logo

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

Aplicando f, obtemos

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, \overline{f(u_i)} u_i \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)} u_i \rangle$$

definamos $w = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)} u_i$ e obtemos $f(v) = f_w(v) = \langle v, w \rangle$, para todo $v \in V$.

Agora mostremos a unicidade de w.
Supondo que exista $w' \in V$ de modo que $f(v) = f_{w'}(v) = \langle v, w' \rangle$ para todo $v \in V$. Assim,

$$\langle v, w \rangle = \langle v, w' \rangle \Rightarrow \langle v, w - w' \rangle = 0,$$

para todo $v \in V$, e portanto $w - w' = 0_V \Rightarrow w = w'$.

Como queríamos.

Este resultado generaliza o último resultado da seção sobre Geometria Analítica, mostrando a gradação entre o conceito de produto interno que pode ser visualizado no contexto da geometria analítica atribuindo características geométricas que podem ser concretizadas materialmente no espaço euclidiano em que vivemos. Já no contexto da Álgebra Linear este conceito é estendido e da mesma forma atribui características geométricas ao espaço estudado, que neste novo cotexto não pode ser visualizado concertamento, pois agora podemos nos encontrar em um espaço com dimensão maior que 3.

Capítulo 4

Análise Funcional

A Análise Funcional surgiu no início do século XX, trazendo o amadurecimento de certos conceitos, como convergência e continuidade em objetos mais abstratos que números. Nesse período, a caracterização de duais (espaços de funcionais lineares contínuos) favoreceu o o surgimento de alguns conceitos que foram formalizados em linguagem moderna com o livro de Banach em 1932. A partir de então a Análise Funcional evoluiu bastante e tem se estendido ao estudos de espaços vetoriais, não necessariamente normandos.

A análise funcional é o ramo da matemática, e mais especificamente da análise, que trata do estudo de espaços de funções. A palavra funcional remonta ao cálculo de variações, implicando uma função cujo argumento é uma função. A Análise Funcional desempenha uma importante ferramenta em ciências aplicadas, como na própria Matemática. Em particular, possui um papel importante em Equações Diferenciais Parciais.
Esta área está intimamente ligada à teoria dos Espaços métricos. Por esse motivo, o estudo preliminar desse tema faz-se necessário para um aprofundamento diante conceitos fundamentais da Análise Funcional.

O termo 'métrico' é derivado do termo *metor* (medida). O conceito de um Espaço Métrico é essencialmente devido a um matemático francês M. Fréchet, embora a definição presente em uso é dada pelo matemático alemão F. Hausdoff em 1914. Fréchet introduziu a noção em sua tese de doutorado (Univesité de Paris, 1906).

4.1 Espaços métricos

Definição 41 *Uma* ***métrica*** *num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de elemento $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a* ***distância*** *de x a y, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

1. $d(x, x) = 0$;
2. *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

3. $d(x, y) = d(y, x)$;

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 42 *Um **espaço métrico** é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Exemplo 34 *Um espaço vetorial normando V, torna-se um espaço métrico com a métrica induzida pela norma dada por*

$$d(x, y) = ||x - y||, \forall x, y \in V.$$

Exemplo 35 *Podemos observar que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ de dimensão n que pode ser munido da seguinte métrica:*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Esta é denominada a métrica euclidiana, que para efeitos geométricos é a mais usual. Porém, podemos munir o $\mathbb{R}^n$ com outras normas como:

$$d(x, y)_M = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$$d(x, y)_S = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

As métricas determinam uma distância em um espaço métrico, assim podemos obter conjuntos oriundos dessa métrica, como:

Definição 43 *Dado (M, d) um espaço métrico definimos*

*A **bola aberta** de centro $x_0 \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$*

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) < r\};$$

*A **bola fechada** de centro $x_0 \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$*

$$B[x_0, r] = \overline{B_r(x_0)} = B_r(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) \leq r\};$$

*A **esfera de centro** $x_0 \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}$*

$$S(x_0, r) = S_r(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) = r\}.$$

Definição 44 *Dado (M, d) um espaço métrico, uma sequência em M é uma função $\mathfrak{X}$ com domínio em $\mathbb{N}$ e contradomíno em M, denotada por (x_k) com $k \in \mathbb{N}$.*

A partir desse conceito obtemos diversos outros como:

- Uma subsequência de (x_k) é uma restrição da função $\mathfrak{X}$ a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$;
- Uma sequência é dita limitada quando, existe $r > 0$, tal que $x_k \in B[0, r], \forall k \in \mathbb{N}$;

- Uma sequência $(x_k) \in M$ converge para $a \in M$ quando $\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}; x_k \in B_\epsilon(a), \forall k \leq k_0$ e denotamos $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ e dizemos que a é limite de (x_k);
- Uma sequência é dita de Cauchy quando $\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}; d(x_k, x_m) < \epsilon, \forall k, m \leq k_0$;
- Um espaço métrico é dito completo quando toda sequência de Cauchy converge para um elemento desse espaço.

Estas definições nos fornece subsídios para podermos definir conceitos básicos topológicos de M.

Definição 45 *Seja $X \subseteq M$. Dizemos que $a \in M$ é um* ***ponto interior*** *de X, quando $\exists r > 0; B(a, r) \subseteq X$. Ao conjunto de todos os pontos interiores de X denotamos por $intX$ e dizemos que* ***um conjunto X é aberto*** *quando $X = intX$.*

Definição 46 *Sejam $X \subseteq M$ e $a \in M$, a é dito* ***ponto aderente*** *de X, quando a é limite de alguma sequência de elementos de X. Ao conjunto de todos os pontos aderentes de X, chamamos de fecho de X e denotamo-no por $\overline{X}$.* ***Um conjunto X é dito fechado*** *quando $X = \overline{X}$.*

Definição 47 *Sejam $X \subseteq M$ e $a \in M$, dizemos que a é* ***ponto de acumulação*** *de X, quando para todo $\epsilon > 0, B_\epsilon(a) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de X denotamos por X'. Quando um ponto não é de acumulação é dito isolado.*

Definição 48 *Um* ***conjunto*** *$X \subseteq X$* ***é dito compacto*** *quando toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita, isto é, se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$, com A_λ aberto $\forall \lambda \in L$ é tal que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A$, então existem $A_1, ..., A_k$ abertos de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$tais que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$*

Definição 49 *Um subconjunto$X$ de um espaço vetorial é dito* ***convexo*** *quando dados $a, b \in X$, então $[a, b] = \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subset X$.*

Uma outra definição muito útil para os resultados que pretendemos obter em relação à Análise Funcional corresponde a continuidade das aplicações.

Definição 50 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é* ***contínua em*** *$a \in M$, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, então temos $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Dizemos que f* ***é contínua*** *quando é contínua em todos os ponto de M.*

Exemplo 36 *Dado V um espaço vetorial normado. Temo que a norma $\|.\| : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. De fato, utilizando a desigualdade*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Então, dados $x, y \in V$ e $\epsilon > 0$, quando $\|x - y\| < \epsilon$, temos que existe $\delta = \epsilon > 0$ de modo que $|\|x\| - \|y\|| < \delta$.

Definição 51 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é* ***uniformemente contínua****, quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta$, então temos $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

4.2 Espaço de Banach

Agora passamos a um conceito básico quando estamos estudando Análise Funcional.

Definição 52 *Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial normado completo denominamo-os de* ***espaço de Banach****.*

Exemplo 37 *$\mathbb{R}$é um espaço de Banach de dimensão finita.*

Exemplo 38 ***O espaço das sequências*** *ℓ^p, com $1 \leqslant p < \infty$, onde ℓ^p denota o conjunto de todas as sequências $x = \{x_j\}$ em $\mathbb{K}$, tal que a série $\sum |x_i|^p$ converge, ou seja, $\sum |x_i|^p < \infty$. Definindo as operações lineares usuais, facilmente provamos que ℓ^p é um espaço vetorial. Mais do que isto, equipado com a norma dada por*

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x = \{x_i\} \in \ell^p$$

é um espaço de Banach de dimensão infinita.

Exemplo 39 ***O espaço das sequências*** *ℓ^∞, onde ℓ^∞ denota o conjunto de todas as sequências limitadas em $\mathbb{K}$ equipada da norma dada por*

$$\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i|, \quad x = \{x_i\} \in \ell^\infty$$

é um espaço de Banach de dimensão infinita.

Exemplo 40 Um Espaço Normado que não é Banach. *Seja $\mathcal{C}([0,1])$ é um espaço vetorial. Entretanto, $\mathcal{C}([0,1])$ equipado com a norma dada por*

$$\|f\|_R = \int_0^1 f(x)dx \tag{4.1}$$

não é um espaço de Banach. Pois tomemos a sequência de funções

$$f_n(x) = x^n - 1$$

que converge para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in 0 \leq x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

que não é um elemento de $\mathcal{C}([0,1])$.

4.3 Aplicações Lineares

Aqui podemos aplicar os conceitos topológicos e de continuidades às aplicações lineares. Podemos mesmo definir uma aplicação linear através de limite de sequência.

Exemplo 41 *Se c é o espaço das sequências convergentes $x = (x_n)$, então $T(x) = \lim x_n$ é um funcional linear em c. A linearidade é obtida através de propriedades de sequências.*

Definição 53 *Um operador linear $T : E \to F$ é dito* **limitado** *se existe uma constante M tal que*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in E. \tag{4.2}$$

Teorema 15 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear. Então:*

1. *Se T é contínua na origem, então T uniformemente contínua em E;*

2. *O operador T é contínuo em E se, e só se T é limitado.*

Demonstração:

1. Como T é contínua no zero, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - 0\| < \delta$ implicando que $\|T(x) - 0\| < \frac{\epsilon}{2}$, isto é, $\|T(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$, sempre que $\|x\| < \delta$. Sendo $\|x - y\| < \delta$, então

$$\|T(x-y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq \|T(x)\| + \|T(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Então, T é uniformemente contínua.

2. Suponha que T seja limitado. Logo, existe uma constante M tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$. Então, considerando $\|x - y\| < \delta = \frac{\epsilon}{M}$, temos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| < M\|x - y\| < M\delta = \epsilon.$$

Logo, A é contínua.

Reciprocamente, suponha que T seja contínua, então T é contínua na origem. Seja $\delta = \delta(1)$ tal que $\|A(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Tome $x \neq \theta$. Então,

$$\left\|T\Big(\frac{\delta x}{2\|x\|}\Big)\right\| = \left\|\frac{\delta}{2\|x\|}T(x)\right\| = \left\|\frac{\delta}{2\|x\|}\right\| \ \|T(x)\| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{2\|x\|}\|T(x)\| < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|.$$

Assim, $M = \frac{2}{\varepsilon}$ e, portanto, T é limitada.

Exemplo 42 *Embora aplicações lineares em espaços vetoriais normados de dimensão finita sejam sempre contínuas, o mesmo não vale para espaços vetoriais de dimensão infinita. De fato, se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita e F é um espaço vetorial normado de dimensão maior ou igual a 1, podemos sempre construir uma aplicação linear $T : E \to F$ que não é limitada. Para isso, seja β uma base para E, $\beta' \subset \beta$ um subconjunto enumerável de vetores e $y \in F$ um vetor não nulo qualquer. Definimos uma aplicação linear $T : E \to F$ definindo T em β por*

$$Tx_n = n\|x_n\|y, \ \textit{se } x_n \in \beta'$$

e

$$Tx = 0, \ \textit{se } x \in \beta \backslash \beta'.$$

T não limitada, pois

$$\|Tx_n\| = n\|y\|\|x_n\|,$$

logo não existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|Tx_n\| \leq M\|x_n\|.$$

Em particular, vemos que se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, sempre existem funcionais lineares que não são contínuos, pois podemos tomar $F = \mathbb{R}$.

Definição 54 *Se E e F são espaços vetoriais normados, denotaremos o espaço vetorial das aplicações lineares limitadas por $\mathcal{L}(E, F)$. Definimos a norma de uma aplicação linear limitada por*

$$\|T\| = \inf\{M \in \mathbb{R}; \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 10 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ uma aplicação linear limitada. Então,*

$$\|T\| = \sup_{x \in E\backslash\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Demonstração:

Para $x \neq 0$, seja

$$M = \sup_{x \in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Então, $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. Logo $M \geq \|T\|$. Reciprocamente, como por definição $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in E$, segue que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$$

para todo $x \in E\backslash\{0\}$, logo $\|T\| \leq M$. Isso prova a primeira identidade. Para provar que

$$\sup_{x \in E\backslash\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|,$$

basta notar que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|.$$

Proposição 11 *Se E e F são espaços vetoriais normados, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial normado.*

Demonstração:

Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$. Temos

$$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|$$

para todo $x \in E$, de modo que obtemos simultaneamente que $T + S \in \mathcal{L}(E, F)$ e a validade da desigualdade triangular para a norma de aplicações lineares.

Proposição 12 *Se E é um espaço vetorial normado e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$, então temos

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \to 0, \text{ com } m, n \to \infty,$$

implicando que $(T_m(x))$ é uma sequência de Cauchy em F. Lembre-se que, por hipótese, F é um espaço de Banach, logo existe $\lim T_m(x) = T(x)$, para cada $x \in E$. Já que T_m é um operador linear para cada m, temos

$$T_m(\lambda x + \mu x') = \lambda T_m(x) + \mu T_m(x), \text{ para cada } x, x' \in E, \text{ e } \lambda, \mu \text{ escalares.}$$

Fazendo $m \to \infty$ nessa última equação, vemos que $T(\lambda x + \mu x') = \lambda T(x) + \mu T(x')$, ou seja, $T(x)$ é linear para cada x em X. Nosso objetivo agora é mostrar que (T_n) converge para T e que $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Seja $\epsilon > 0$. Já que (T_n) é uma sequência de Cauchy, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon, \forall n, m \geq N$. Como

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|,$$

podemos fazer $m \to \infty$ e obter $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon\|x\|$, para cada x em E, implicando que

$$\|T_n - T\| < \epsilon, \forall n \geq N.$$

Isto é o suficiente para mostrar que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para tanto, escolha $\epsilon = 1$ na desigualdade acima e tome seu correspondente $N = N(1)$. Então,

$$\|T_n(x)\| = \|T_n(x) - T_N(x) + T_N(x)\| \leq \|T_n(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| \leq$$

$$\leq \|T_n - T_N\|\|x\| + \|T_N(x)\| \leq 1 \cdot \|x\| + \|T_N(x)\|.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos $\|T(x)\| \leq \|T_N(x)\| + \|x\|$, para qualquer x em E. Concluímos que T é limitado, donde $T \in \mathcal{L}(E, F)$, o que completa a demonstração.

Definição 55 *Se E é um espaço vetorial normado, denotaremos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por E^*. Ele é chamado o* **espaço dual** *de E.*

Corolário 8 *Se E é um espaço vetorial normado, então E^* é um espaço de Banach.*

Definição 56 *Sejam E e F espaço vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação $T : E \to F$ é* **limitada inferiormente** *se existe uma constante $m > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \geq m\|x\|$$

para todo $x \in E$.

Proposição 13 *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então a inversa $T^{-1} : \Im T \to E$ existe e é linear e limitada se, e somente se T é limitada inferiormente.*

Demonstração:

Suponha que T é limitada inferiormente. Então, se $x \neq y$ segue que

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \geq m\|x - y\| \geq 0,$$

logo T é injetiva e portanto a inversa $T^{-1} : \Im T \to E$ está bem definida. Como $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, tomando T^{-1} em ambos os lados desta equação, segue também que

$$T^{-1}(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha x + \beta y = \alpha T^{-1}(Tx) + \beta T^{-1}(Ty),$$

logo T^{-1} é linear. Finalmente,

$$\|T^{-1}(Tx)\| = \|x\| \geq m^{-1}\|Tx\|$$

para todo $y = Tx \in \Im T$ e, portanto T^{-1} é limitada. Reciprocamente, suponha que $T^{-1} : \Im T \to E$ existe, é linear e limitada. Então,

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$$

para todo $x \in E$, ou seja,

$$\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Definição 57 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que E e F são* **topologicamente isomorfos** *quando existe uma aplicação linear bijetiva $T : E \to F$ tal que T e T^{-1} são limitadas.*

Corolário 9 *$T : E \to F$ é um isomorfismo topológico entre os espaços vetoriais normados E e F se, e somente se existe constante $m, M > 0$ tais que*

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|.$$

Em particular, isomorfismo topológicos preservam sequências de Cauchy e sequências convergentes. Daí, se E e F são topologicamente isomorfos, então E é um espaço de Banach se, e somente se F o é.

Proposição 14 *Sejam E e F espaços vetoriais normados de dimensão finita com a mesma dimensão. Então, E e F são topologicamente isomorfos.*

Demonstração:

Como a relação de isomorfismo topológico entre espaços vetoriais normados é uma relação de equivalência, basta mostrar que se $\dim E = n$, então E é topologicamente isomorfo a $\ell^1(n)$. seja $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para E. Considere o isomorfismo $T : \ell^1(n) \to E$ definido por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Afirmamos que T é um isomorfismo topológico. De fato, T é limitada porque

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq \left(\max_{i=1,\ldots,n} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^{n} |x_i| = M \|x\|_{\ell^1(n)}$$

onde denotamos $M = \max_{i=1,\ldots,n} \|e_i\|$. Como T é contínua, a função $x \mapsto \|Tx\|$ também é e assume um valor mínimo m na esfera unitária $B = \{x \in \ell^1(n); \|x\| = 1\}$. Necessariamente $m > 0$, pois β é um conjunto linearmente independente. Portanto,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \geq m$$

para todo $x \in E$, $x \neq 0$, o que mostra que $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$.

Corolário 10 *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é de Banach. Todo subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado.*

Corolário 11 *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita e $T : E \to F$ é linear, então T é contínua.*

Corolário 12 *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então um subconjunto de E é compacto se, e somente se ele for fechado e limitado. Além disso, se E é um espaço vetorial normado tal que a bola unitária é compacta, então E possui dimensão finita.*

4.4 Bases

Na álgebra linear, quando lidamos apenas com espaços vetoriais, sem as noções topológicas, temos o conceito de base de Hamel. Essas bases são, em geral de difícil manuseio, principalmente quando trabalhamos com espaços de dimensões infinitas. O resultado a seguir nós dar uma ideia desse fato:

Teorema 16 *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e β uma base de $\mathbb{E}$. Então β é não-enumerável.*

Demonstração: Se β fosse enumerável, poderíamos enumerar seus elementos $v_1, v_2, ..., v_n, ...$. Podemos escrever

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

Onde F_n é o subespaço gerado por $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Como cada F_n tem dimensão finita, segue que são fechados, e pelo Teorema de Baire(Ver Lima, 2007, p.190) sabemos que algum dos F_n tem interior não-vazio. Mas, isso é um absurdo, pois todo subespaço próprio de um espaço vetorial normado tem interior vazio.(Verifique!)

Definição 58 *Se $\mathbb{E}$ é um espaço de Banach, uma sequência $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é **uma base de Schauder** de $\mathbb{E}$ se cada $x \in \mathbb{E}$ puder ser representado de maneira única como*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \text{ para } x_n \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 43 $c = \{x = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}; \lim_{k\to\infty} \lambda_k < \infty\}$
possui uma base de Schauder $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\begin{cases} e_0 &= (1,1,1,...); \\ e_1 &= (1,0,0,...); \\ e_2 &= (0,1,0,...); \\ & \vdots \end{cases}$$

Com efeito, se $x = (x_1, x_2, ...) \in c$, denotamos $x_o = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ temos:

$$x = x_0 e_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_0) e_j$$

4.5 Espaço de Hilbert

Definição 59 *Dizemos que H é um* **espaço de Hilbert** *se H for um espaço vetorial com produto interno que é um espaço de Banach com a norma derivada do produto interno.*

Exemplo 44 *$\ell^2(n)$ e ℓ^2 são espaço de Hilbert.*

Proposição 15 (Identidade do Paralelogramo) *Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demonstração:

De fato,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) + (\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Teorema 17 *Seja E um espaço vetorial normado, cuja norma $\|.\|$ satisfaz a identidade do paralelogramo, então a identidade polar*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

define um produto interno em E tal que a sua norma é derivada dele.

Corolário 13 *Seja E um espaço vetorial normado. Então a norma de E deriva de um produto interno se, e somente se ela satisfaz a identidade do paralelogramo.*

Teorema 18 (Vetor que minimiza a distância) *Sejam H um espaço de Hilbert e $C \subset H$ um subconjunto convexo fechado não vazio. Para todo $x \in H$ existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\|x - y_0\| = \min_{y\in C} \|x-y\|.$$

Demonstração:

Denote $d = \inf_{y\in C} \|x-y\|$ e seja $(y_n) \subset C$ uma sequência minimizante para a distância, isto é,

$$\|x - y_n\| = d_n \to d.$$

Afirmamos que (y_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, pela identidade do paralelogramo, temos

$$\|x - y_n + (x-y_m)\|^2 + \|x - y_n - (x-y_m)\|^2 = 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right).$$

Como $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$, pois C é convexo, segue que

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2) - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \leq 2(d_n^2+d_m^2) - 4d^2 \to 0$$

quando $n, m \to \infty$. Como H é completo e C é fechado, podemos tomar $y_0 = \lim y_n \in C$.

Para provar a unicidade, suponha que existam $y_0, \tilde{y_0} \in C$ tais que

$$\|x - y_0\| = \|x - \tilde{y_0}\| = d.$$

Usando a identidade do paralelogramo novamente, temos

$$\|y_0 - \tilde{y_0}\|^2 = 2(d^2 + d^2) - 4\left\|x - \frac{y_0 + \tilde{y_0}}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

Lema 2 *Sejam H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado próprio. Então, existe $z \in H\backslash L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.*

Demonstração:

Pelo teorema anterior, dado $w \in H \backslash L$, existe $y_0 \in L$ tal que $w - y_0 \perp L$. Claramente, $w - y_0 \notin L$, logo podemos tomar

$$z = \frac{w - y_0}{\|w - y_0\|}.$$

Teorema 19 (Teorema de Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

Em particular, $H^* = H$, no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Demonstração: Como $f \in H^*$, $L = \ker f$ é fechado. Seja $L = H$, então $f \equiv 0$ e tomamos $y = 0$. Caso contrário, pelo lema anterior existe $zinH \backslash L$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$. Temos $H = [z] \oplus L$. Mais especificamente, dado $zinH$ podemos escrever

$$z = \frac{f(x)}{f(z)} z + \left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right) \tag{4.3}$$

e

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in L.$$

Afirmamos que $y = f(z)z$. De fato, fazendo o produto interno de (4.3) com o vetor $y = f(z)z$ segue que

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z + (x - fracf(x)f(z)z)\, , f(z)z \right\rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z, f(z)z \right\rangle = f(x)\langle z, z \rangle.$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz tem $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$, de modo que $\|f\|_{H^*} \leq \|y\|$ e

$$\|f\|_{H^*} \geq f\left(\frac{y}{\|y\|} \right) = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|.$$

Corolário 14 *Sejam H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Para todo $x \in H$ o único $y_0 \in L$ tal que*

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in L} \|x - y\|,$$

dado pelo teorema anterior, satisfaz

$$x - y_0 \perp L.$$

Demonstração:

Para provar a ortogonalidade do vetor $x - y_0$, primeiro mostraremos que

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0, \forall y \in L.$$

Com efeito, para todo $0 \leq t \leq 1$ temos $z = (1-t)y_0 + ty \in L$,logo

$$\|x - y_0\| \leq \|x - [(1-t)y_0 + ty]\| = \|x - y_0 - t(y - y_0)\|,$$

de modo que

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 - 2t\langle x - y_0, y - y_0 \rangle + t^2\|y - y_0\|^2,$$

donde

$$2\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq t\|y - y_0\|.$$

Fazendo $t \to 0$, segue o desejado. Agora, dado $y \in L$, para $t \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\langle x - y_0, ty - y_0 \rangle \leq 0,$$

já que L é um subespaço de H. Assim,

$$y\langle x - y_0, y \rangle \leq \langle x - y_0, y_0 \rangle$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica necessariamente que $\langle x - y_0, y \rangle = 0$.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

A nossa proposta era mostrar como o conteúdo matemático, vai galgando níveis cada vez mais elaborados e, por isso, mais abstratos, sem no entanto, deixar de ter resquícios da realidade concreta que lhe deu origem. Com esta finalidade, partimos da Geometria Analítica que pode ser entendida em termos concretos sob a visualização de modelos no espaço tridimensional euclidianos, já que seus conceitos são obtidos de forma geométrica.

Começamos na reta, em seguida mostramos os resultados no plano, para em seguida exibi-los no espaço, ou seja, trabalhamos inicialmente com elementos unidimensionais, depois bidimensionais, para em seguida vê-los no contexto tridimensional. Nesta etapa, percebemos que a visualização é uma importante ferramenta para se compreender os conceitos e resultados.

É claro, que vez ou outra, se faz necessário o uso de um conceito mais abstrato. Por exemplo, apesar de definirmos vetores de forma bastante geométrica, a partir de segmentos orientados de retas, quando formalizamos sua definição a fim de que mantenha sua característica de "transportadores" utilizamos uma ideia bastante abstrata, que é a de classes de equivalência, sem no entanto dirimir as características concreta de tais elementos. Pois a Geometria Analítica encontra muitas aplicações na Engenharia, que de uma forma simplista pode-se dizer, que concretizar tridimensionalmente cálculos provenientes dessa disciplina matemática.

Em seguida mostramos os conceitos e resultados da Álgebra Linear que a partir da definição de espaços vetoriais, monta-se toda uma estrutura abstrata, que, naturalmente, torna-se uma generalização da Geometria Analítica, ou em outro viés, a Geometria Analítica deve ser encarada como um caso particular da Álgebra Linear. A princípio, a forma como é apresentada a Álgebra Linear parece-nos que não há uma correlação aparente com a realidade concreta, porém a introdução do conceito de produto interno e a definição de norma, pode munir os espaços vetoriais de uma geometria semelhante ao espaço euclidiano. Por isso, dizemos que enquanto a Geometria Analítica se ocupa de problemas em até 3 dimensões, a Álgebra Linear trabalha em espaços de dimensão finita. Isso torna-se mais evidente, quando introduzimos a partir do conceito de aplicações lineares a definição de espaços isomorfos.

E mesmo parecendo tão abstrata, a Álgebra Linear ajuda a modelar problemas onde o número de variáveis é maior que 3, por exemplo, na Economia, quando se estuda o mercado financeiro.

Já quando passamos à Análise Funcional, fez-se necessário a introdução de conceitos topológicos que ampliaram os resultados da Álgebra Linear, principalmente, no que tange os resultados referentes às aplicações lineares, que no contexto anterior, não tinham sido trabalhados topologicamente. Salientamos, que estudo de espaços vetoriais no contexto da Análise Funcional, obtém um nível alto de abstração já que trabalha, principalmente, com os de dimensão infinita. Mas apesar desse nível elevado de abstração, a Análise Funcional encontra-se aplicação, por exemplo, para buscar consistência para sua teoria, o modelo quântico da física buscou utilizar proposições de espaço de Hilbert, obtendo bastantes êxitos com relação às frequências de radiação e sua dependência dos campos eletromagnéticos.

Dessa forma, evidenciamos que a apresentação dos conteúdos se deu de forma a sair de uma realidade concreta, de fácil visualização, e ir atingindo níveis cada vez mais elevados de abstração e formalização, sem no entanto, perder contato com a realidade que deu origem a esse conhecimento. Fato que Aristóteles, acreditava ser uma característica intrínseca ao conhecimento matemático.

Observemos, também, que a forma como foram apresentado os conteúdos segue o modelo axiomático, já que a partir de conceitos e objetos primitivos se dá o embasamento para desenvolver a teoria. É evidente que nos embasamos em outras teorias, por exemplo, quando estamos exibindo os conceitos e resultados para a Geometria Analítica nos fundamentamos também em resultados da Geometria euclidiana plana e espacial. Esse fato é bastante comum, e como propõe o próprio Piaget, não se pode construir um conhecimento sem um previamente internalizado.

Dessa forma, quando por exemplo, apresentamos os conceitos de espaço de Banach e espaços de Hilbert no contexto da Análise Funcional, não repetimos a apresentação das definições de norma e produto interno, para em seguida enunciar a caracterização de tais espaços respectivamente, já para compreendê-los era necessário o uso das definições já dadas no contexto da Álgebra Linear. Isso exemplifica uma característica da aprendizagem, representada através de conteúdos matemáticos do Ensino Superior, que pode ser encontrada em qualquer nível de aprendizagem, seja particularmente na Matemática ou em qualquer área de conhecimento. Esta característica é, de acordo com a concepção construtivista da aprendizagem, o uso de conhecimentos prévios para a aquisição de novos conhecimentos, nesto caso, o conhecimento formaliza-se através dos conteúdos matemáticos apresentado.

Como vimos, a ideia de gradação níveis mais concretos a outros mais abstratos para o pensamento matemático não é recente. Desde Aristóteles já se podia enxergar tal característica. Também vimos que essa gradação não é exclusivamente matemática, Montessori e Piaget, já defendiam que tais níveis existiam para a aprendizagem em geral, em particular para a escolar. No entanto, esse níveis eram delimitados pela faixa etária e denominados respectivamente por períodos e estágios de desenvolvimento, de acordo, com a base montessoriana e piagetiana, respectivamente.

Longe de quereremos criar uma nova classificação para esses níveis, nos propomos a estender essa nivelação, ou seja, acreditamos que a gradação dos níveis de abstração do pensamento matemático, exemplificado através de conteúdos, ocorre sempre que começamos a estudar um conteúdo mais elaborados. E essa nivelação é sempre relativa, isto é, quando estamos passando de estágio para outro, o anterior parece-nos mais concreto que o seguinte, pois como propõe a concepção construtivista interagir com a realidade não significa necessariamente estar explorando-a sensivelmente, mas essa exploração pode ocorrer de maneira completamente racional, sem que se torne menos concreta.

Por isso, acreditamos que para o pensamento matemático, a realidade concreta poderá ser sensível, onde a visão é o sentido mais utilizado para perceber essa concretude, mas essa realidade poderá ser a vir algo menos sensível. Por exemplo, quando passamos do contexto da Geometria Analítica para Álgebra Linear, temos que a primeira pode ser a realidade concreta, onde a visualização dos conceitos podem ser concretizados empiricamente, dada a sua característica geométrica. No entanto, quando já se internalizou de maneira coerente os conceitos da Álgebra Linear, ao se ter contanto com a Análise Funcional, aquela se torna sua realidade concreta. Esse fato se deve a forma axiomática que ocorre a passagem de uma área para outra, consistindo basicamente em generalizações, que desse modo são exemplos de transposição didática.

Resumidamente, podemos dizer que as exposições dos conteúdos de cada uma das disciplinas segue a seguinte linha geral: inicialmente, mostramos conceitos preliminares que embasam a teoria, em seguida enfocamos resultados que vão sendo exibidos e muitas vezes generalizados quando passamos de contexto disciplinar para outro, terminando essa etapa tanto na Geometria Analítica, quanto na Álgebra Linear e na Análise Funcional no teorema da representação de Riesz. Esse teorema tem, primeiramente, uma aplicação mostrada no contexto da Geometria Analítica, depois é demonstrado duas vezes de maneira diferente, de acordo com o contexto em que está inserido, sendo por isso um bom exemplo de como ocorre a gradação do conhecimento matemático, mostrado através de conteúdos, pois, no primeira contato com esse resultado, temos de considerar que estamos trabalhando em um ambiente tridimensional; no segundo, está implícito que o ambiente ao qual se aplica tem dimensão finita; e no último, a demonstração independe da dimensão do espaço considerado, podendo ser finita ou infinita.

Considerações Finais

A descrição feita nesse trabalho não constitui uma atividade acabada, visto que, é a penas um recorte de um contexto muito amplo: o conhecimento matemático. No entanto, percebemos que tal recorte pode constituir uma base para se refletir e se entender como se dar a ampliação do conhecimento nessa área, tanto em aspectos de produção cientifica como didáticos, respectivamente, representados pela pesquisa acadêmica e pela atuação em sala de aula em qualquer nível de ensino.

É evidente que os conteúdos escolhidos para tal análise refletem perspectivas subjetivas dos elaboradores desse trabalho. No entanto, destacamos que a nivelação proposta como característica própria do fazer e do ensinar matemáticos independe de tais conteúdos. Por isso acreditamos que tal estudo pode ajudar a compreender como ocorre a ampliação do conhecimento matemático em qualquer nível da educação. Já que exibimos um modelo de como se sai do concreto e se chega a níveis de abstração cada vez maiores no pensamento matemático.

Obviamente, não pretendemos que o nível de abstração aqui apresentado sirva de base para se entender os níveis de abstrações cabíveis à Educação Infantil, por exemplo. Mas a leitura que esse estudo nos dar a respeito da construção gradativa da abstração como característica da Matemática aliada a um exercício de transposição didática poderá ser aplicado para qualquer contexto onde ocorre assimilação do conhecimento matemático.

Referências Bibliográficas

[1] BIEZUNER, Rodney Josué. *Análise Funcional*. Pimeiro semestre de 2009. Notas de aulas. Digitado.

[2] BITAR, Marielena, MUNIZ, Cristiano Alberto. *A aprendizagem Matemática na perpectiva da teoria dos campos conceituais.(org.)* 1.ed. Curitiba: CRV, 2009.

[3] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. [trad.] GOMIDE, Elza F. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] BOLDRINI, José Luiz et. al.*Álgebra Linear*. São Paulo: Harbra, 1978.

[5] BREZIS, Haim. *Analyse Fonctionnelle: théorie et applications*. Paris: Masson, 1987.

[6] COELHO, Fávio Ulhoa e LOURENÇO, Mary Lilian.*Um Curso de Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

[7] COSTA, M. Amoroso. *As idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1971.

[8] DOS SANTOS, Robinson Nelson. *Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes*.São Paulo, 2007

[9] FERNANDES, Elisângela. *O desafio de aprender (REVISTA NOVA ESCOLA) 241*. Ano XXVI. Abril, 2005.($pp90 - 93$)

[10] HOFFIMAN, Kenneth e KUNZE, Ray. *Álgebra Linear*. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

[11] HSU, Hwei P.*Análase Vetorial*[Trad.] DE CERQUEIRA NETO, Egard Pedreira. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[12] LIMA, Elon Lages et.al. *A matemática do ensino médio - volume 3*. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Plano*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[14] LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

[15] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[16] MACHADO, Nílson José. *Matemática e Realidade*. 5 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

[17] MIRAS, Mariana et. al. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo: Ática, 1996.

[18] MORAIS Filho, Daniel Coordeiro de.*Manual de Redação Matemática.*1.ed.Campina Grnde, RG, 2009.

[19] MOYSÉS, Lucia Maria. *O desafio de saber ensinar.* 2.ed. Campinas: Papirus, 1995.

[20] PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[21] Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática/Ministro da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. 3. Ed. Brasília, 2001.

[22] PROJETO FUNDÃO - IM / UFRJ. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele.* Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

[23] PEIXOITO, Roberto.*Elementos de Geometria Analítica.*6 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955.

[24] RÊGO, Rômulo Marinho do e RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In:*O laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. LORENZAO, Sergio(org.)2ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

[25] SALVADOR, César Coll et. all. *Psicologia do Ensino.* Porto Alegre: Artmed, 2000.

[26] SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill,1987.

[27] VIGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem.* São Paulo: Martins Fontes, 1987.