

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Uma Breve Introdução à Teoria Geométrica da Medida

por

Geovano Amaro da Silva Junior

Novembro/2018
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Bacharelado em Matemática

Uma Breve Introdução à Teoria Geométrica da Medida

por

Geovano Amaro da Silva Júnior

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Novembro/2018

João Pessoa - PB

Uma Breve Introdução à Teoria Geométrica da Medida

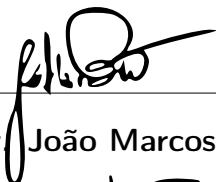
por

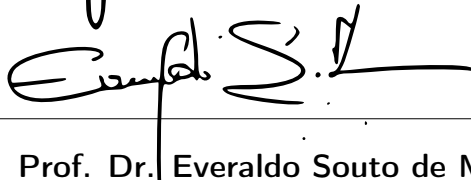
Geovano Amaro da Silva Junior

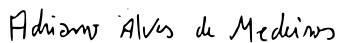
Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de Concentração: Análise

COMISSÃO EXAMINADORA


Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UNB (Orientador)


Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB


Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros -UFPB

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros -UFPB

Novembro/2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

J95b Junior, Geovano Amaro da Silva.
Uma breve introdução à Teoria Geométrica da Medida /
Geovano Amaro da Silva Junior. - João Pessoa, 2018.
50 f.

Orientação: João Marcos Bezerra do Ó.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Funções de Variação Limitada. 2. Conjuntos de
Perímetro Finito. 3. Teorema de Gauss-Green. I. do Ó,
João Marcos Bezerra. II. Título.

UFPB/CCEN

Agradecimentos

- Ao Professor João Marcos que me orientou neste trabalho e me apresentou a esse tema fascinante.
- Aos professores: Adriano Alves de Medeiros e Everaldo Souto de Medeiros, que aceitaram participar da banca, e assim, colaborar com este trabalho.
- A Professora Flávia que sempre me apoiou e acreditou em mim.
- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB;
- Aos meus amigos de graduação.
- A Rayssa Caju pelas sugestões.
- A todos os meus familiares, que me deram suporte por todos esses anos. Em especial a meus pais, Carmoziana e Geovane, meus irmãos Jefferson e Mariano e meus avós Francisco e Dalva, que sempre me apoiaram na busca por meus objetivos.

Resumo

Neste trabalho, faremos uma introdução a Teoria Geométrica da Medida através dos conjuntos de perímetro finito. Usaremos funções de variação limitada para defini-los e estabelecer algumas de suas principais propriedades. Mostraremos que para esses conjuntos vale uma versão generalizada do Teorema de Gauss-Green. As ideias resultantes serão utilizadas para estabelecer uma versão do Problema de Plateau em dimensões elevadas.

Palavras-Chave: Funções de Variação Limitada, Conjuntos de Perímetro Finito, Teorema de Gauss-Green.

Abstract

In the present work, we will make an introduction to Geometric Measure Theory through the study of sets of finite perimeter. We will use functions of bounded variation to define them and to study some of their main properties and then show that, for this kind of sets, a generalized version of the Gauss-Green Theorem follows. The resulting ideas will then be used to establish a version of the Plateau Problem in higher dimensions.

Keywords: Functions of Bounded Variation, Sets of Finite Perimeter, Gauss-Green Theorem.

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	viii
1 Preliminares	1
1.1 Medidas e Funções Mensuráveis	1
1.1.1 Medidas	1
1.1.2 Funções Mensuráveis	3
1.2 Integração	4
1.2.1 Teoremas de Convergência	4
1.2.2 Medidas Produto e o Teorema de Fubini	5
1.3 As medidas de Hausdorff e Lebesgue	7
1.4 Medidas de Borel e Medidas de Radon	8
1.4.1 Aproximações para medidas	9
1.5 Resultados Essenciais	10
2 Funções de Variação Limitada	14
2.1 Definições	14
2.2 O Teorema Estrutural para Funções de Variação Limitada	15
2.3 Aproximação por funções C^∞	16
2.4 Teorema de Compacidade	18
3 Conjuntos de Perímetro Localmente Finito.	20
3.1 Definição e Propriedades Básicas	20
3.2 A Fronteira Reduzida	21

3.3	Blow-Up da Fronteira Reduzida	25
3.4	O Teorema Estrutural	29
3.5	O Teorema de Gauss-Green	34
4	Conjuntos de Fronteira Mínima	37
4.1	O Problema de Plateau	37
4.2	Conjuntos de Fronteira Mínima	38

Introdução

A Teoria Geométrica da Medida é uma área da Análise que lida com a solução de problemas Geométricos via Teoria da Medida.

Sua importância foi bastante ampliada pelo fato de várias técnicas e ideias provenientes da mesma terem se mostrados úteis em diversas outras áreas da matemática, como Equações Diferenciais Parciais, Cálculo Variacional e Análise Harmônica.

O problema canônico que motivou o desenvolvimento da teoria é conhecido como problema de Plateau, em homenagem ao físico cego do século XIX conhecido por seus experimentos com bolhas de sabão, embora tenha sido proposto inicialmente por Joseph Louis-Lagrange em 1760.

O problema consiste em encontrar superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$, isto é, encontrar a superfície de área mínima dentre todas as quais estão delimitadas por uma dada curva. As primeiras soluções para o mesmo foram dadas independentemente por Jesse Douglas e Tibor Radó em 1930, sendo os métodos empregados por ambos eram bastante distintos um do outro. Por esse trabalho, Douglas recebeu a Medalha Fields em 1936.

No início dos anos 1960, foram propostas diversas extensões do problema para dimensões elevadas, ou seja, para superfícies k -dimensionais em espaços de dimensão $n > 3$, baseadas em novas definições do conceito de superfície, fronteira e área. O estudo do problema nesse caso se mostrou uma tarefa muito mais difícil que o do problema original resolvido por Douglas e Radó. Enquanto que para $n = 3$ as soluções são sempre regulares, descobriu-se que o mesmo não acontece em dimensões elevadas: se $n > 3$ e $k \leq n - 2$, as mesmas podem apresentar singularidades. No caso em que $k = n - 1$ (ou seja, para Hiper-Superfícies de co-dimensão 1) singularidades podem ocorrer somente quando $n \geq 8$. Para obter uma tratar do problema para superfícies de codimensão maior 1, Fleming e Federer desenvolveram a Teoria das Correntes Retificáveis. Para o caso de superfícies de codimensão 1, foi desenvolvida a Teoria dos Perímetros pelo matemático italiano Ennio

de Giorgi .

A extensão do problema de Plateau para superfícies de co-dimensão 1 como concebida por De Giorgi se deu da seguinte forma: Partindo do Teorema de Gauss-Green clássico (também conhecido como teorema de Divergência de Gauss), De Giorgi definiu uma classe de conjuntos mais abrangente do que a dos abertos com fronteira de classe C^1 de tal forma que, para esses conjuntos, fosse válida uma generalização do teorema de Gauss-Green. Esses conjuntos ficaram conhecidos como conjuntos de perímetro localmente finito. Em seguida, ele introduziu o conceito de fronteira reduzida de um conjunto de perímetro localmente finito, um subconjunto da fronteira topológica que admite um vetor normal generalizado e então prosseguiu mostrando que a fronteira reduzida pode ser escrita, a menos de um conjunto de perímetro nulo, como união enumerável de subconjuntos compactos de superfícies de classe C^1 . Isso o permitiu elaborar uma noção de hiper-superfícies sem hipóteses a priori de suavidade e formular uma versão do Problema de Plateau para tais hiper-superfícies. Por fim e de maneira surpreendente, De Giorgi provou que a solução do problema era uma hipersuperfície regular, a menos de um conjunto singular de medida nula, sendo esse o primeiro grande resultado do tipo em dimensões elevadas.

O objetivo dessa monografia é fazer um estudo introdutório da Teoria Geométrica da Medida através da Teoria dos Perímetros de De Giorgi, com base nos artigos [1], [2], [3] e [4] e na referência [6]. Organizaremos nosso trabalho da seguinte maneira: No capítulo 1, serão expostos os conceitos e resultados preliminares. No capítulo seguinte, falaremos sobre as Funções de Variação Limitada, as quais usaremos posteriormente para definir os conjuntos de Perímetro Finito. Prosseguiremos provando um Teorema Estrutural essencial ao nosso estudo. Finalizaremos o capítulo provando um teorema de aproximação e enunciando um teorema de compacidade.

No capítulo 3, introduziremos o conceito de conjunto de perímetro localmente finito e estudaremos algumas de suas principais propriedades. Finalizaremos o mesmo provando uma versão do Teorema de Gauss-Green para tais conjuntos. Encerraremos nosso estudo com o capítulo 4, o qual será bastante breve. Nele usaremos o conceito de conjunto de perímetro localmente finito para definir uma noção "enfraquecida" de hipersuperfície e elaboraremos uma versão do Problema de Plateau para as mesmas. Finalizaremos enunciaremos um resultado acerca da regularidade das soluções do referido problema.

Capítulo 1

Preliminares

O propósito desse capítulo é o de apresentar o mínimo necessário para se compreender os capítulos posteriores. Interessados nas provas dos resultados podem consultar as referências [6] e [8].

1.1 Medidas e Funções Mensuráveis

1.1.1 Medidas

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto não vazio e denote por 2^X o conjunto de suas partes. Uma aplicação $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ é dita uma Medida em X quando

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) se

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

então

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Definição 1.1.2. Seja μ uma medida em X e $C \subseteq X$. Então μ restrita a C , denotada por

$$\mu \lfloor C$$

é a medida definida como sendo

$$(\mu \ll C)(A) := \mu(A \cap C), \text{ para todo } A \subseteq X.$$

Definição 1.1.3. Um conjunto $A \subseteq X$ é dito μ -**mensurável** se para cada conjunto $B \subseteq X$ temos sempre

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

Teorema 1.1.1 (Propriedades elementares das medidas). *Seja μ uma medida em X .*

(i) *Se $A \subseteq B \subseteq X$, então*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(ii) *Um conjunto A é μ -mensurável se e somente se $X - A$ é μ -mensurável.*

(iii) *Os conjuntos $\emptyset$ e X são μ -mensuráveis. De maneira mais geral, se $\mu(A) = 0$, então A é μ -mensurável.*

(iv) *Se C é um subconjunto qualquer de X , então cada conjunto μ -mensurável é também $\mu \ll C$ -mensurável.*

Teorema 1.1.2 (Sequências de conjuntos mensuráveis). *Seja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos μ -mensuráveis.*

1. *Os conjuntos*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ e } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

são μ -mensuráveis.

2. *Se os conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ são disjuntos, então*

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

3. *Se $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \dots$, então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

4. Se $A_1 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \dots$ e $\mu(A_1) < \infty$, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)$$

Teorema 1.1.3 (Teorema de Lusin). *Seja μ uma medida Borel regular em $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μ -mensurável. Assuma que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é μ -mensurável e $\mu(A) < \infty$. Fixe $\epsilon > 0$. Então existe $K \subseteq A$ compacto, tal que*

(i) $\mu(A - K) < \epsilon$, e

(ii) $f|_K$ é contínua.

Teorema 1.1.4 (Teorema de Ergoroff). *Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^n$ e suponha que $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sejam μ -mensuráveis. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é μ -mensurável, com $\mu(A) < \infty$ e*

$$f_k \rightarrow f \text{ } \mu \text{ q.t.p em } A.$$

Então para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto μ -mensurável $B \subseteq A$ tal que:

(i) $\mu(A - B) < \epsilon$,

(ii) $f_k \rightarrow f$ uniformemente em B .

1.1.2 Funções Mensuráveis

Sejam X e Y espaços topológicos e μ uma medida em X

Definição 1.1.4.

(i) Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita μ -mensurável se para todo aberto $U \subseteq Y$, $f^{-1}(U)$ é μ -mensurável.

(ii) Uma função $f : X \rightarrow Y$ é Borel mensurável quando $f^{-1}(U)$ é Borel mensurável, para todo aberto $U \subseteq Y$.

Introduziremos agora um conceito central ao nosso estudo: A integral de uma função mensurável.

1.2 Integração

Definição 1.2.1.

(i) Uma função $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ é dita uma **função simples** se sua imagem é um conjunto finito.

(ii) Se g é uma função simples e positiva, definimos a **integral** de g como sendo

$$\int g \, d\mu = \sum_{0 \leq y \leq \infty} y \mu(g^{-1}\{y\})$$

(iii) Se g é uma função simples e μ -mensurável, definimos a **integral** de g como sendo

$$\int g \, d\mu = \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu,$$

onde $g^+ = \max(f, 0)$ e $g^- = \max(-f, 0)$.

(iv) Seja $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Definimos a integral superior

$$\int^* f \, d\mu = \inf \left\{ \int g \, d\mu ; g \geq f, \, g \text{ simples e } \mu\text{-integrável} \right\}$$

e a integral inferior

$$\int_* f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu ; g \leq f, \, g \text{ simples e } \mu\text{-integrável} \right\}$$

(v) Uma função μ -mensurável $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, é dita μ -integrável se $\int^* f \, d\mu = \int_* f \, d\mu$. Nesse caso, escrevemos

$$\int f \, d\mu = \int_* f \, d\mu = \int^* f \, d\mu.$$

1.2.1 Teoremas de Convergência

Teorema 1.2.1 (Lema de Fatou). *Sejam $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ funções μ -mensuráveis, $k=1,2,\dots$. Então*

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k \, d\mu.$$

Teorema 1.2.2 (Teorema da convergência monótona). *Sejam $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ funções μ -mensuráveis, $(k = 1, 2, \dots)$, satisfazendo*

$$f_1 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$$

Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$$

Teorema 1.2.3 (Teorema da convergência dominada). *Assuma que $g \geq 0$ é μ -integrável e f, f_k são μ -mensuráveis. Suponha também que*

$$f_k \rightarrow f \text{ } \mu \text{ q.t.p.}$$

e além disso

$$|f_k| \leq g \text{ } (k = 1, 2, \dots)$$

Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| d\mu = 0.$$

1.2.2 Medidas Produto e o Teorema de Fubini

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios.

Definição 1.2.2. Seja μ uma medida em X e ν uma medida em Y . Definimos a medida $\mu \times \nu : 2^{X \times Y} \rightarrow [0, \infty]$ pondo

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) \right\}$$

para todo $S \subset X \times Y$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as coleções de conjuntos μ -mensuráveis $A_i \subseteq X$ e conjuntos ν -mensuráveis $B_i \subseteq Y$ ($i = 1, \dots$) tais que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$$

A medida $\mu \times \nu$ é chamada de medida produto de μ e ν .

Definição 1.2.3.

(i) Um subconjunto $A \subseteq X$ é σ -finito com respeito a μ quando é possível escrever

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_k,$$

onde cada B_k é μ -mensurável e $\mu(B_k) < \infty$ para $k = 1, 2, \dots$

(ii) Uma função $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ é σ -finita com respeito a μ quando f é μ -mensurável e $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ é σ -finita com respeito a μ .

Teorema 1.2.4 (Teorema de Fubini). *Seja μ uma medida em X e ν uma medida em Y .*

(i) *Então $\mu \times \nu$ é uma medida regular em $X \times Y$.*

(ii) *Se $A \subset X$ é μ -mensurável e $B \subseteq Y$ é ν -mensurável, então $A \times B$ é $\mu \times \nu$ -mensurável e temos*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

(iii) *Se $S \subseteq X \times Y$ é σ -finita em relação a $\mu \times \nu$, então o conjunto*

$$S_y := \{x \mid (x, y) \in S\}$$

é μ -mensurável para ν -q.t. y ,

$$S_x := \{y \mid (x, y) \in S\}$$

é ν -mensurável para μ -q.t. x , $\mu(S_y)$ é ν -integrável e $\nu(S_x)$ é μ -integrável. Além disso,

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \int_X \nu(S_x) d\mu(x).$$

(iv) *Se f é $\mu \times \nu$ -integrável e f é σ -finita com respeito a $\mu \times \nu$ (em particular, se f é $\mu \times \nu$ -somável), então a aplicação*

$$y \rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

é ν -integrável, e a aplicação

$$x \rightarrow \int_Y f(x, y) d\nu$$

é μ -integrável. Além disso

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, d\mu(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x)$$

1.3 As medidas de Hausdorff e Lebesgue

Definição 1.3.1 (Medida de Lebesgue).

(i) A Medida de Lebesgue na reta é definida como sendo

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam } C_i \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, C_i \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) A medida de Lebesgue n-dimensional no $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$ é definida indutivamente como sendo

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \times \dots \times \mathcal{L}^1 \text{ (} n \text{ vezes)}.$$

Definição 1.3.2 (Medida de Hausdorff). Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$. Escrevemos

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

Onde

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

e

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \, dx$$

é a função Gama de Euler.

Para A e s como acima, definimos

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(A).$$

A medida de $\mathcal{H}^s$ é chamada de Medida de Hausdorff s -dimensional.

1.4 Medidas de Borel e Medidas de Radon

Dada uma medida μ em $\mathbb{R}^n$, a primeira vista não há nada que garanta que os conjuntos μ -mensuráveis não são somente $\emptyset$ e o próprio $\mathbb{R}^n$. Para contornar esse problema, existe um critério bastante útil, chamado de critério de Carathéodory, que garante a existência de uma família não trivial de conjuntos μ -mensuráveis do $\mathbb{R}^n$, os chamados borelianos. Antes de apresentarmos tal critério, precisamos de algumas definições.

Definição 1.4.1. Uma coleção $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ é dita uma σ -álgebra se

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $X - A \in \mathcal{F}$
- (iii) Se $\{A_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$

Definição 1.4.2. Se $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de X , a σ -álgebra gerada por $\mathcal{C}$ e denotada por $\sigma(\mathcal{C})$ é a menor σ -álgebra contendo $\mathcal{C}$.

Definição 1.4.3.

- (i) A σ -álgebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ é a menor σ -álgebra do $\mathbb{R}^n$ contendo os subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$.
- (ii) Uma medida em $\mathbb{R}^n$ é chamada de medida de Borel se todo Boreliano do $\mathbb{R}^n$ é μ -mensurável.

Teorema 1.4.1 (Critério de Carathéodory). *Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^n$. Se para todos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, tivermos*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ sempre que } \text{dist}(A, B) > 0,$$

Então μ é uma medida de Borel.

Teorema 1.4.2 (Medidas de Borel e Retângulos). *Sejam μ e ν duas medidas de Borel finitas em $\mathbb{R}^n$ tais que*

$$\mu(R) = \nu(R)$$

para todos os "Retângulos"

$$R := \{x \in \mathbb{R}^n; -\infty \leq a_i \leq x_i \leq b_i \leq \infty \ (i = 1, \dots, n)\}$$

Então

$$\mu(B) = \nu(B)$$

para todos os conjuntos de Borel $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.4.1 Aproximações para medidas

O objetivo dessa seção é apresentar algumas classes de medidas que admitem, em certo sentido a ser esclarecido mais adiante, boas aproximações. Mas antes, precisamos de algumas definições.

Definição 1.4.4.

- (i) Uma medida μ em X é regular se para cada conjunto $A \subseteq X$ existe um conjunto μ -mensurável B tal que $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.
- (ii) Uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é dita Borel regular se μ é de Borel e para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$, existe um boreliano B tal que $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.
- (iii) Uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon se é Borel regular e $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Uma das vantagens das medidas regulares é que algumas propriedades relacionadas a limites, válidas em geral somente para conjuntos mensuráveis, valem também para conjuntos não mensuráveis, como ilustra o teorema abaixo.

Teorema 1.4.3. *Seja μ uma medida regular em X . Se $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq A_{k+1} \dots$. Então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

A seguir, mostraremos como obter medidas de Radon a partir de Medidas Borel regulares.

Lemma 1.4.4. *Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$ e seja B um boreliano.*

(i) *Se $\mu(B) < \infty$, então para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto fechado C tal que*

$$C \subseteq B, \mu(B - C) < \epsilon.$$

(ii) Se μ é uma medida de Radon, então para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto U tal que

$$B \subseteq U, \mu(U - B) < \epsilon$$

Teorema 1.4.5. *Seja μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$. Então*

(i) *Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$,*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); A \subseteq U, U \text{ aberto}\},$$

(ii) *Para cada conjunto μ -mensurável $A \subseteq \mathbb{R}^n$, temos*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ compacto}\}.$$

1.5 Resultados Essenciais

Os teoremas abaixo enunciados serão cruciais para nosso estudo. Eles serão usados na demonstração de alguns dos resultados mais importantes dessa monografia.

Teorema 1.5.1 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch). *Seja μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(r, x))} \int_{B(x, r)} f \, d\mu = f(x)$$

para μ quase todo x .

Teorema 1.5.2 (Teorema da representação de Riesz). *Seja*

$$L : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$$

Um funcional linear satisfazendo

$$\sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \text{spt}(f) \subseteq K\} < \infty,$$

para cada compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existe uma medida de Radon μ em $\mathbb{R}^n$ e uma função

μ -mensurável $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que

$$|\sigma(x)| = 1 \text{ } \mu \text{ q.t. } x,$$

e

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \, d\mu$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Teorema 1.5.3 (Teorema da extensão de Whitney). *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Dadas funções $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $d : \rightarrow \mathbb{R}^n$, defina*

$$R(y, x) := \frac{f(y) - f(x) - d(x) \cdot (y - x)}{|x - y|}, \text{ com } x, y \in C \text{ e } x \neq y$$

e para $K \subseteq C$ compacto e $\delta > 0$, defina

$$\rho_K(\delta) := \sup\{|R(x, y)|; 0 < |x - y| \leq \delta, x, y \in K\}.$$

Se f, d são contínuas e para todo compacto $K \subseteq C$,

$$\rho_K(\delta) \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0, \tag{1.1}$$

então existe uma função $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) $\bar{f}$ é de classe C^1 ,

(ii) $\bar{f} = f$, $D\bar{f} = d$ em C .

Teorema 1.5.4. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Para $\epsilon > 0$, defina U_ϵ como sendo*

$$U_\epsilon := \{x \in U; \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}.$$

Seja $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

Com a constante c sendo escolhida tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, dx = 1,$$

e para $\epsilon > 0$ defina $\eta_\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

A η_ϵ damos o nome de mollifier padrão. Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x \in U_\epsilon$, considere

$$f^\epsilon(x) := f * \eta_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x - y) f(y) \, dy.$$

Então

(i) Para todo $\epsilon > 0$, $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

(ii) Se f é contínua em U , então

$$f^\epsilon \rightarrow f$$

uniformemente em subconjuntos compactos de U .

(iii) $f^\epsilon \rightarrow f$ em $L^1_{loc}(U)$.

Teorema 1.5.5 (Teorema de Recobrimento de Vitali). Para $B = B(x, r)$ bola fechada, denote por B^* a bola fechada $B(x, 5r)$. Se $\mathcal{F}$ é uma família não degenerada de bolas fechadas em $\mathbb{R}^n$, com

$$\sup\{\text{diam } B; B \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

então existe uma sub-coleção enumerável $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, consistindo de elementos dois a dois disjuntos, tais que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B^*.$$

Teorema 1.5.6 (Desigualdades Isoperimétricas). Seja E um conjunto limitado de perímetro finito em $\mathbb{R}^n$.

(i) Temos

$$\mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \leq C^1 \|\partial E\|(\mathbb{R}^n),$$

(ii) e para cada bola $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$,

$$\min\{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E), \mathcal{L}^n(B(x, r) - E)\}^{1-\frac{1}{n}} \leq 2C^1 \|\partial E\|((B(x, r))).$$

Sendo última desigualdade é conhecida como desigualdade isoperimétrica relativa.

Capítulo 2

Funções de Variação Limitada

O propósito desse capítulo é o de apresentar a classe de funções conhecida como Funções de Variação Limitada e estudar algumas de suas principais propriedades. No próximo capítulo, usaremos esses resultados para definir e estudar os conjuntos de perímetro localmente finito, objeto central do nosso estudo.

2.1 Definições

Definição 2.1.1. Uma função $f \in L^1(U)$ é dita de variação limitada se

$$||Df||(U) := \sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Denotaremos por $BV(U)$ o espaço das funções de variação limitada em U .

Definição 2.1.2. Uma função $f \in L^1_{loc}(U)$ é dita localmente de variação limitada em U se

$$||Df||(V) := \sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} < \infty$$

para todo aberto $V \subset\subset U$. Denotaremos por $BV_{loc}(U)$ o espaço das funções localmente de variação limitada.

Teorema 2.1.1. *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Então $BV(U)$ munido da norma*

$$||f||_{BV(U)} + ||f||_{L^1(U)} = ||Df||(U), \quad f \in BV(U)$$

É um espaço de Banach.

2.2 O Teorema Estrutural para Funções de Variação Limitada

Teorema 2.2.1 (Teorema estrutural para funções BV_{loc}). *Seja $f \in BV_{loc}(U)$. Então existem uma medida de Radon μ em U e uma função μ -mensurável*

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tais que

$$(i) \quad |\sigma(x)| = 1 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

(ii) *Para todo $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$, temos*

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = - \int_U \phi \cdot \sigma \, d\mu$$

Demonstração. Defina o funcional linear $L : C_c^1(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$L(\phi) = - \int_U \phi \cdot \sigma \, d\mu$$

para todo $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$. Visto que $f \in BV_{loc}(U)$, para todo $V \subset\subset U$, existe $C(V) > 0$ tal que

$$\sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx ; \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} < C(V)$$

Consequentemente,

$$|L(\phi)| \leq C(V) \|\phi\|_{L^\infty} \quad (2.1)$$

para todo $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$.

Seja $K \subset U$ um compacto qualquer e V um aberto tal que $K \subset V \subset\subset U$. Para todo $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{spt} \phi \subseteq K$, escolha $\phi_k \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$, ($k = 1, \dots$) tal que $\phi_k \rightarrow \phi$ uniformemente em V .

Defina

$$I(\phi) := \lim_{k \rightarrow \infty} L(\phi_k)$$

Pela desigualdade (3.1), esse limite existe e é independente da escolha da sequência $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ convergindo a ϕ . Pelo Teorema de Hanh-Banach, existe uma única extensão

linear contínua de L

$$L^* : C_c^1(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que

$$\sup\{|L(\phi)| \mid \phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1, \text{ spt } \phi \subseteq K\} < \infty$$

para todo $K \subset U$ compacto. Por fim, basta aplicar o Teorema 1.5.2 para completar prova. $\square$

A medida μ no teorema 2.2.1 será denotada por $\|Df\|$. A esta medida damos o nome de medida de variação de f em U . Uma das propriedades mais importantes das funções de variação limitada será demonstrada abaixo. Ela implica, em particular, que o perímetro de um conjunto será uma função semi-contínua inferiormente.

Teorema 2.2.2 (Semi-continuidade inferior para medidas de variação). *Seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência em $BV(U)$ e suponha que*

$$f_k \rightarrow f \text{ em } L_{loc}^1(U).$$

Então

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U).$$

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$, $|\phi| \leq 1$. Então

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k \operatorname{div} \phi \, dx = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \phi \cdot \sigma_k \, d\|Df_k\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U).$$

Portanto,

$$\|Df\|(U) = \sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U)$$

$\square$

2.3 Aproximação por funções C^∞

Teorema 2.3.1 (Aproximação por funções C^∞). *Seja $f \in BV(U)$. Então existe uma sequência $f_k \in BV(U) \cap C^\infty(U)$ tal que*

(i) $f_k \rightarrow f$ em $L^1(U)$.

(ii) $\|Df_k\|(U) \rightarrow \|Df\|(U)$ quando $k \rightarrow \infty$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e escolha m inteiro positivo grande o suficiente de maneira que o conjunto $U_k := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+k}\}$ seja tal que $\|Df(U - U_k)\| < \epsilon$. Seja $A_1 = U$, $A_k = U_{k+1} - \overline{U}_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$). Considere $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ uma partição da unidade subordinada a $\{A_k\}$, isto é, $\xi_k \in C^\infty(A_k)$, $0 \leq \xi_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^\infty \xi_k = 1$ em U . Fixe um mollifier η tal que $\eta \geq 0$, $\eta \in C_\infty(A_1)$, $\int_{A_1} \eta \, dx = 1$. Para cada k , escolha ϵ_k tal que

$$\begin{aligned} \text{spt}(\eta_k * (f\xi_k)) &\subseteq U_{k+2} - U_{k-2} \quad (U_{-1} = \emptyset), \\ \int_U |\eta_{\epsilon_k} * (f\xi_k) - f\xi_k| dx &< \frac{\epsilon}{2^k}, \\ \int_U |\eta_{\epsilon_k} * (fD\xi_k) - fD\xi_k| dx &< \frac{\epsilon}{2^k}, \end{aligned}$$

e defina $f_\epsilon = \sum_{k=1}^\infty \eta_{\epsilon_k} * (f\xi_k)$. Então $f \in C^\infty(U)$, $\|f - f_\epsilon\|_{L^1(U)} < \epsilon$ e $\|Df\|(U) \leq \liminf \epsilon \rightarrow \|Df\|(U)$. Isso prova (i). Seja $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$, com $|\phi| \leq 1$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_U f_\epsilon \text{div} \phi \, dx &= \sum_{k=1}^\infty \int_U \eta_{\epsilon_k} * (f\xi_k) \text{div} \phi \, dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_U f \text{div}(\xi_{\eta_{\epsilon_k}} * \phi) \, dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_U f \text{div}(\xi_k \eta_{\epsilon_k} * \phi) \, dx - \int_U f(\nabla \xi_k \cdot \eta_{\epsilon_k} * \phi) \, dx \\ &= I_1^\epsilon - I_2^\epsilon. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} |I_1^\epsilon| &= \left| \int_U f \text{div}(\xi_1 \eta_{\epsilon_1} * \phi) \, dx + \sum_{k=2}^\infty \int_U f \text{div}(\xi_k \eta_{\epsilon_k} * \phi) \, dx \right| \\ &\leq \|Df\|(U) + \sum_{k=2}^\infty \|Df\|(A_k) \\ &\leq \|Df\|(U) + 3\|Df\| \\ &\leq \|Df\|(U) + 3\epsilon, \end{aligned} \tag{2.2}$$

e

$$\begin{aligned}
|I_2^\epsilon| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f(\nabla \xi_k \cdot \eta_{\epsilon_k} * \phi) \, dx \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \phi \cdot [(\eta_{\epsilon_k} * f \nabla \xi_k) - f \nabla \xi_k] \, dx \right| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sendo assim, segue das desigualdades 2.2 e 2.3 que

$$\int_U f_\epsilon \operatorname{div} \phi \, dx \leq \|Df\|(U) + 4\epsilon. \tag{2.4}$$

Tomando o supremo sobre todos os $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ tais que $|\phi| \leq 1$ na desigualdade 2.4, obtemos

$$\|Df^\epsilon\|(U) \leq \|Df\|(U) + 4\epsilon. \tag{2.5}$$

Isso prova (ii). □

2.4 Teorema de Compacidade

O teorema abaixo será necessário para provar, no próximo capítulo, a existência de planos tangentes assintóticos para conjunto de perímetro localmente finito e na prova da existência de conjuntos de fronteira mínima.

Teorema 2.4.1 (Compacidade fraca para funções de variação limitada). *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira de Lipchitz ∂U . Assuma que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência em $BV(U)$ satisfazendo*

$$\sup \|f_k\|_{BV(U)} < \infty$$

Então existem uma subsequência $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ e uma função $f \in BV(U)$ tais que

$$f_{k_j} \rightarrow f \text{ em } L^1(U)$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Demonstração. Vamos provar o teorema primeiro para o caso em que $U = \mathbb{R}^n$. Fixe $\epsilon > 0$

e considere $k \in \mathbb{N}$. Seja $f_{k,\epsilon} := f_k * \eta_\epsilon$. Então

$$\|f_{k,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

usando a propriedade $\nabla f_{k,\epsilon} = f_k * \nabla \eta_\epsilon$, temos:

$$\|f_{k,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\nabla \eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.6)$$

Segue então que $(f_{k,\epsilon})_{k=1}^\infty$ é uniformemente limitada e equicontínua. Fixe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequencia de $(f_{k,\epsilon})_{k=1}^\infty$ convergindo uniformemente em Ω . Por um argumento diagonal, podemos achar uma subsequencia $(k_j)_{j=1}^\infty$ tal que $(f_{k_j,\epsilon})_{j=1}^\infty$ converge uniformemente em Ω para todo $\epsilon = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}$. Segue portanto que :

$$\begin{aligned} \limsup_{i,j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{k_i} - f_{k_j}| \, d\mathcal{L}^n &\leq \limsup_{i,j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{k_i} - f_{k_j, \frac{1}{p}}| \, d\mathcal{L}^n \\ &\quad + \limsup_{i,j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{k_i, \frac{1}{p}} - f_{k_j, \frac{1}{p}}| \, d\mathcal{L}^n \\ &\quad + \limsup_{i,j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{k_i, \frac{1}{p}} - f_{k_j}| \, d\mathcal{L}^n \\ &\leq \frac{2}{p} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|Df_k\|(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Fazendo p tender a infinito, obtemos:

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{k_i} - f_{k_j}| \, d\mathcal{L}^n = 0.$$

Logo, $(f_{k_j})_{j=1}^\infty$ é uma sequencia de Cauchy em $L^1(\Omega)$ portanto converge para alguma $f \in L^1(\Omega)$. Pela semi-continuidade inferior da medida de variação, temos $f \in BV(\Omega)$. Por fim, por outro argumento diagonal, obtemos uma subsequencia de $(f_k)_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente para todo $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Isso acaba a demonstração no caso $U = \mathbb{R}^n$.

Seja agora $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira de Lipchitz ∂U . Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos estender f_k para $Tf_k \in BV(\mathbb{R}^n)$ tal que $Tf_k(\mathbb{R}^n - U) = 0$ e $\|Df_k\|(\partial U) = 0$. Pelo parágrafo anterior, existem uma subsequencia $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ e $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ tais que $Tf_{k_j} \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $Tf_{k_j} = f_{k_j} \rightarrow f$ em $L^1(U)$, com $f \in BV(U)$. $\square$

Capítulo 3

Conjuntos de Perímetro Localmente Finito.

Nesse capítulo, introduziremos o conceito de conjunto de perímetro localmente finito e estudaremos algumas de suas principais propriedades. Definiremos a fronteira reduzida para um conjunto de perímetro localmente finito e após um estudo de suas principais propriedades, apresentamos um teorema sobre a estrutura geral da mesma. Finalizaremos provando uma versão do Teorema de Gauss-Green para conjuntos de perímetro localmente finito.

3.1 Definição e Propriedades Básicas

Começaremos essa seção definindo o que são os conjuntos de perímetro localmente finito.

Definição 3.1.1. Um conjunto $\mathcal{L}^n$ -mensurável $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tem perímetro finito em U quando $\chi_E \in BV(U)$. Se $\chi_E \in BV_{loc}(U)$, dizemos que E tem perímetro localmente finito em U . No caso em que $\chi_E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dizemos simplesmente que E tem perímetro localmente finito. Quando $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$, dizemos que E tem perímetro finito.

Seja E de perímetro finito em U e sejam $\|D\chi_E\|$ e σ a medida de Radon e a função mensurável, respectivamente, obtidas ao se aplicar o teorema 2.2.1 a E . Escrevemos $\|\partial E\| = \|D\chi_E\|$ e $\nu_E = -\sigma$. Chamamos $\|\partial E\|(U)$ de perímetro de E em U . Abaixo, estão enunciadas algumas propriedades básicas dos conjuntos de perímetro localmente finito, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 3.1.1. *Sejam U, W abertos do $\mathbb{R}^n$ e E, F conjuntos $\mathcal{L}^n$ -mensuráveis. Então*

(i) *Se $U \subseteq W$, então $||\partial E||(U) \leq ||\partial E||(W)$, com a igualdade ocorrendo se e somente se $E \subset\subset U$.*

(ii) *$||\partial(E \cup F)|| + ||\partial(E \cap F)|| \leq ||\partial E|| + ||\partial F||$, com a igualdade ocorrendo somente se $\text{dist}(E, F) > 0$. Em particular*

$$||\partial(E \cup F)|| \leq ||\partial E|| + ||\partial F||.$$

(iii) *Se $\mathcal{L}^n(E) = 0$, então $||\partial E|| = 0$, para todo aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

3.2 A Fronteira Reduzida

Introduziremos agora um conceito, creditado a Ennio de Giorgi, referente a um subconjunto particular da fronteira de um conjunto E de perímetro localmente finito, a fronteira reduzida, denotada por $\partial^* E$. A fronteira reduzida pode ser vista como um subconjunto da fronteira topológica que admite um vetor normal generalizado. Esse conceito nos possibilitará obter um versão do Teorema de Gauss-Green para os conjuntos de perímetro localmente finito, uma classe de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ mais larga que a dos abertos limitados de fronteira C^1 . Assumiremos a partir de aqui que E é um conjunto de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.1. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x \in \partial^* E$, a fronteira reduzida de E , se

(i) $||\partial E||(B(x, r)) > 0$ para todo $r > 0$,

(ii) $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x, r)} \nu_E d||\partial E||}{||\partial E||(B(x, r))} = \nu_E(x)$,

(iii) $|\nu_E(x)| = 1$.

Lemma 3.2.1. *Seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e denote por ν a normal unitária exterior à $B(x, r)$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{E \cap B(x, r)} \text{div} \phi \, dy = \int_{B(x, r)} \phi \cdot \nu_E d||\partial E|| + \int_{E \cap \partial B(x, r)} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

para $\mathcal{L}^1$ quase todo $r > 0$.

Demonstração. Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Então

$$\int_E \operatorname{div}(h\phi) \, dy = \int_E h \operatorname{div}\phi \, dy + \int_E Dh \cdot \phi \, dy. \quad (3.1)$$

Assim, pelo Teorema Estrutural, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\phi \cdot \nu_E d||\partial E|| = \int_E h \operatorname{div}\phi \, dy + \int_E Dh \cdot \phi \, dy.$$

Seja $h_\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h_\epsilon(y) := g_\epsilon(|y - x|),$$

onde

$$g_\epsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq s \leq r \\ \frac{r-s+\epsilon}{\epsilon}, & \text{se } r \leq s \leq r + \epsilon, \\ 0, & \text{se } s \geq r + \epsilon. \end{cases}$$

Temos que

$$Dh_\epsilon(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } |y - x| < r \text{ ou } |y - x| > r + \epsilon, \\ -\frac{1}{\epsilon} \frac{y-x}{|y-x|}, & \text{se } r < |y - x| < r + \epsilon \end{cases}$$

Seja η_{ϵ_k} um mollifier e faça $h = \eta_{\epsilon_k} * h_\epsilon$ em 3.1. Tomando o limite quando $\epsilon_k \rightarrow 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} h_\epsilon \phi \cdot \nu_E d||\partial E|| \\ &= \int_E h_\epsilon \operatorname{div}\phi \, dy + \int_E Dh_\epsilon \cdot \phi \, dy \\ &= \int_E h_\epsilon \operatorname{div}\phi \, dy - \frac{1}{\epsilon} \int_{E \cap \{y; r < |y-x| < r+\epsilon\}} \phi \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \, dy. \end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada, $h_\epsilon \rightarrow \chi_{B(x,r)}$, $Dh_\epsilon \rightarrow \chi_{\partial B(x,r)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\int_{E \cap \{y; r < |y-x| < r+\epsilon\}} \phi \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \, dy = \int_r^{r+\epsilon} \left(\int_{\partial B(x,s)} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) \, ds.$$

Por fim, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$\int_{B(x,r)} \phi \cdot \nu_E d||\partial E|| = \int_{E \cap B(x,r)} \operatorname{div}\phi \, dy - \int_{E \cap \partial B(x,r)} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Para $\mathcal{L}^n$ quase todo $r > 0$. □

O seguinte teorema nos dá informações valiosas sobre o comportamento assintótico da fronteira reduzida em vizinhanças da mesma.

Lemma 3.2.2. *Existem constantes positivas $A_1, \dots, A_5$, dependendo somente de n , tais que para cada $x \in \partial^* E$,*

- (i) $\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{r^n} > A_1 > 0$,
- (ii) $\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) - E)}{r^n} > A_2 > 0$,
- (iii) $\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\|\partial E\|((B(x, r) \cap E))}{r^{n-1}} > A_3 > 0$,
- (iv) $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\|\partial E\|((B(x, r)))}{r^{n-1}} \leq A_4$,
- (v) $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\|\partial E \cap (B(x, r))\|(\mathbb{R}^n)}{r^{n-1}} \leq A_5$.

Demonstração. Fixe $x \in \partial^* E$. Usando o lema 3.2.1, obtemos que para $\mathcal{L}^1$ quase todo $r > 0$,

$$\|\partial E \cap (B(x, r))\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\partial E\|(B(x, r)) + \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x, r)). \quad (3.2)$$

Seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\phi \equiv \nu_E(x) \text{ em } B(x, r).$$

Aplicando o lema 3.2.1 a ϕ , obtemos

$$0 = \int_{E \cap B(x, r)} \operatorname{div} \phi dy = \int_{B(x, r)} \phi \cdot \nu_E d\|\partial E\| + \int_{E \cap \partial B(x, r)} \phi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1},$$

e daí, segue que

$$\int_{B(x, r)} \phi \cdot \nu_E d\|\partial E\| = - \int_{E \cap \partial B(x, r)} \phi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Visto que $x \in \partial^* E$, segue da definição da fronteira reduzida e do teorema de Lebesgue-Besicovich que

$$\begin{aligned} 1 &= |\eta_E(x)|^2 = \lim_{r \rightarrow 0} \eta_E(x) \cdot \int_{B(x, r)} \eta_E d\|\partial E\| \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_{E \cap \{r < |x-y| < r+\epsilon\}} \phi \cdot \frac{y-z}{|y-z|} dy / \|\partial E\|(B(x, r)) \right| \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, r)) / \|\partial E\|(B(x, r)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sendo assim, existe $r_0 = r_0(x)$ tal que para $\mathcal{L}^1$ quase todo r , se $0 < r < r_0$, então

$$\frac{1}{2} \|\partial E\|(B(x, r)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x, r)) \quad (3.4)$$

E segue de 3.2 que

$$\|\partial E \cap (B(x, r))\|(\mathbb{R}^n) \leq 3\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x, r)) \quad (3.5)$$

para $\mathcal{L}^1$ quase todo $0 < r < r_0$.

Considere $g(r) := \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)$. Pela fórmula da co-área, temos

$$g(r) = \int_0^r \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, s) \cap E) \, ds$$

Logo

$$g'(r) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, r) \cap E) \text{ para } \mathcal{L}^1 \text{ quase todo } r > 0.$$

Usando a desigualdade isoperimétrica, juntamente com a estimativa 3.5, obtemos

$$\begin{aligned} g(r)^{1-\frac{1}{n}} &= \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)^{1-\frac{1}{n}} \\ &\leq C \|\partial(B(x, r) \cap E)\|(\mathbb{R}^n) \\ &\leq C \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x, r) \cap E) \\ &= C_1 g'(r) \end{aligned}$$

para quase-todo $r \in (0, r_0)$. Sendo assim,

$$\frac{1}{C_1} \leq g(r)^{\frac{1}{n}-1} g'(r) = n(g^{\frac{1}{n}}(r))',$$

e portanto

$$g^{\frac{1}{n}}(r) \geq \frac{r}{C_1 n}.$$

Portanto

$$g(r) \geq \frac{r^n}{(C_1 n)^n}$$

para $r \in (0, r_0)$. Isso prova (i).

Seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div} \phi dx + \int_U \chi_{\mathbb{R}^n - E} \operatorname{div} \phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \phi dx = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div} \phi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\mathbb{R}^n - E} \operatorname{div} \phi dx$$

e segue disso que

$$\|\partial E\| = \|\partial(\mathbb{R}^n - E)\|, \quad \nu_E = -\nu_{\mathbb{R}^n - E}.$$

Consequentemente, a afirmação (ii) segue da afirmação (i).

Pela desigualdade isoperimétrica relativa,

$$\frac{\|\partial E\|(B(x, r))}{r^{n-1}} \geq C \min \left\{ \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{r^n}, \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) - E)}{r^n} \right\}$$

E o item (iii) segue de (i) e (ii) em conjunto com última desigualdade. Por 3.4, temos

$$\|\partial E\|(B(x, r)) \leq 2\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x, r)) \leq Cr^{n-1}, \quad (0 < r < r_0);$$

o que prova (iv). O item (v), por sua vez, é uma consequência da estimativa 3.5 e do item (iv). □

3.3 Blow-Up da Fronteira Reduzida

Introduziremos agora a técnica de Blow-up para conjuntos de perímetro localmente finito. Essa técnica consiste em "alargar" um dado conjunto de perímetro localmente finito com respeito a um ponto $x \in \partial^* E$, assim construindo uma sequência de dilatações tendendo a um certo conjunto limite, que por sua vez, será um semi-espaco tangente a E em x .

Definição 3.3.1. Para cada $x \in \partial^* E$, defina o hiper-plano

$$H(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; \nu_E(x) \cdot (y - x) = 0\}$$

e os semi-espacos

$$H^+(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; \nu_E(x) \cdot (y - x) > 0\},$$

$$H^-(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; \nu_E(x) \cdot (y - x) < 0\}.$$

Defina também

$$E_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; r(y - x) + x \in E\}.$$

Observe que que $y \in E \cap B(x, r)$ se e somente se, $g_r(y) \in E_r \cap B(x, 1)$, onde $g_r(y) = \frac{y-x}{r} + x$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1 (Blow-Up da fronteira reduzida). *Assuma que $x \in \partial^* E$. Então $\chi_{E_r(x)} \rightarrow \chi_{H^-(x)}$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $r \rightarrow 0^-$.*

Demonstração. Como o perímetro é uma propriedade invariante por rotações e translações, podemos assumir sem perda de generalidade que $x = 0$, $\nu_E(x) = e_n$. Dada uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, temos que $F_n \rightarrow f$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se e somente se, para toda subsequência $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, temos que $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \rightarrow f$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então é suficiente mostrar que toda sequência $r_k \rightarrow 0$ possui uma subsequência $\{r_{k'}\}$ tal que $\chi_{E_{r_{k'}}(0)} \rightarrow \chi_{H^-(0)}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, com $|\phi| \leq 1$. Então para todo $r, L > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{E_r \cap B(0, L)} \operatorname{div} \phi dx &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{E_r \cap B(0, rL)} \operatorname{div}(\phi \circ g_r)(y) dy \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \circ g_r) \cdot \nu_E d||\partial(E \cap B(0, rL))|| \\ &\leq \frac{d||\partial(E \cap B(0, rL))||}{r^{n-1}} \leq c(L) < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $||\partial(E \cap B(0, L))||(\mathbb{R}^n) \leq c$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} ||\chi_{(E_r \cap B(0, L))}||_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(E_r \cap B(0, L))} \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(0, L)) < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $E_r \in BV(B(0, L))$ para todo $r, L > 0$ e além disso,

$$||\chi_{E_r}||_{BV(B(0, R))} \leq c + \mathcal{L}^n(B(0, R)), \quad \forall r > 0.$$

Usando o teorema da compacidade para funções BV, vemos que dada uma sequência $\{r_k\}$, $r_k \rightarrow 0$ existem uma subsequência $\{r'_{k'}\}$ e $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\chi_{E_{r'_{k'}}} \rightarrow f$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. A menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula, temos $f = \chi_F$, para

algum $F \subset \mathbb{R}^n$ localmente de perímetro finito. Além disso, usando semi-continuidade inferior, obtemos

$$||\partial F|| (B(0, L)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} ||\partial E_k|| (B(0, L)) \leq c(L) < \infty, \forall L > 0.$$

O próximo passo da demonstração será provar que $\nu_F = e_n ||\partial F||$ quase sempre. Para isso, seja $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Reindexando, se necessário, considere $E_{k'} = E_k$ e seja $\nu_k = \nu_{E_k}$. Como

$$E_k \rightarrow f$$

em $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, esse fato, juntamente com o teorema de representação para funções BV_{loc} , nos diz que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi \cdot \mu_k d||\partial E_k|| &= \int_{E_k} \text{div} \phi dy \\ &\rightarrow \int_F \text{div} \phi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi \cdot \nu_F d||\partial F||. \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Como toda função $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ é limite, em $L^1(\mathbb{R}^n)$ de funções $C_c^1(\mathbb{R}^n)$, temos que a convergência acima vale quando trocamos ϕ por $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qualquer. Concluimos que

$$\nu_k d||\partial E_k|| \rightarrow \nu_F d||\partial F||$$

fracamente no sentido das medidas de Radon. Por outro lado, o conjunto dos $L > 0$ tais que $||\partial F||(\partial B(0, L)) \neq 0$ é enumerável. Portanto, para todo $L > 0$ fora desse conjunto,

$$\int_{B(0, L)} \nu_k d||\partial E_k|| \rightarrow \int_{B(0, L)} \nu_k d||\partial F||.$$

Usando a mudança de variáveis $y \rightarrow g_r(y) = \frac{y}{r}$, vemos que

$$\begin{aligned} ||\partial E_k|| (B(0, L)) &= \frac{1}{(r'_k)^{n-1}} ||\partial E|| (B(0, r'_k)), \\ \int_{B(0, L)} \nu_k d||\partial E_k|| &= \frac{1}{r'^{n-1}} \int_{B(0, r'_k L)} \nu_k d||\partial E|| \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\|\partial E_k\|(B(0, L))} \int_{B(0, L)} \nu_k d\|\partial E_k\| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\|\partial E\|(B(0, L))} \int_{B(0, L)} \nu_E d\|\partial E\|. \\
&= \nu_E(0) = e_n
\end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\|\partial F\|(B(0, R)) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\partial E_k\|(B(0, L)),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_n \frac{\int_{B(0, L)} \nu_k d\|\partial E_k\|}{\|\partial E_k\|(B(0, L))} \\
&\leq e_n \frac{\int_{B(0, L)} \nu_F d\|\partial F\|}{\|\partial F\|(B(0, L))} \leq 1.
\end{aligned}$$

Fazendo $L \rightarrow 0^+$ na última desigualdade, segue do teorema de Lebesgue-Besicovich que $e_n \cdot \nu_F \equiv 1$ $\|\partial F\|$ -quase-sempre, e da condição de igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que $\nu_F = e_n \|\partial F\|$ quase sempre.

Para concluir a prova, basta mostrar que $F = H^-(0)$. Seja η_ϵ um mollifier e considere $f^\epsilon \equiv \eta_\epsilon * \chi_F$. Temos

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n} Df^\epsilon \cdot \phi dy &= \int_{\mathbb{R}^n} f^\epsilon \operatorname{div} \phi dy \\
&= \int_F \operatorname{div}(\eta_\epsilon * \phi) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon * (\phi \cdot e_n) d\|\partial F\|
\end{aligned}$$

Considerando certas funções $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ apropriadas e o fato de f^ϵ é de classe C^∞ , deduzimos que $\frac{\partial f^\epsilon}{\partial y_i} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$ e $\frac{\partial f^\epsilon}{\partial y_n} \leq 0$. Visto que $f^\epsilon \rightarrow \chi_F$ em $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, existe $\gamma > 0$ tal que $F = \{y \in \mathbb{R}^n; y_n \leq \gamma\}$. Se $\gamma > 0$, segue do lema 3.2.2 (ii) que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}^n(B(0, \gamma) - F) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(B(0, \gamma) - E_k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^n(B(0, \gamma r'_k) - E)}{r'^n} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

uma contradição. Caso seja $\gamma < 0$, segue do lema 3.2.2 (i) que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}^n(B(0, \gamma) \cap F) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(B(0, |\gamma|) - E_k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^n(B(0, |\gamma| r'_k) \cap E)}{r'^n} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

novamente uma contradição. Portanto, devemos ter $\gamma = 0$. Isso conclui a prova do teorema. $\square$

O próximo teorema nos fornece informações sobre o comportamento assintótico de E em vizinhanças dos pontos de $\partial^* E$. Ele mostra que, se $x \in \partial^* E$, então $H(x)$ é de fato um plano tangente assintótico a E em x . A prova do mesmo pode ser achada em [6], página 230.

Teorema 3.3.2. *Seja $x \in \partial^* E$. Então*

$$\begin{aligned}
(i) \quad &\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^n((B(x, r)) \cap E \cap H^+(x))}{r^n} = 0. \\
(ii) \quad &\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^n((B(x, r)) - E) \cap H^-(x))}{r^n} = 0, \\
(iii) \quad &\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\|\partial E\|(B(x, r))}{\alpha(n-1)r^{n-1}} = 1.
\end{aligned}$$

3.4 O Teorema Estrutural

Da forma como foi definida, a priori não há muita informação sobre a estrutura da fronteira reduzida, o que para alguns pode fazer com que ela aparente ser um conceito bastante nebuloso. O teorema principal dessa seção busca sanar esse problema, ao mostrar que a mesma possui uma estrutura bastante "comportada". Vamos começar provando um lema preliminar.

Lemma 3.4.1. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, existe uma constante $C(n) > 0$, dependendo somente de n e tal que*

$$\mathcal{H}^{n-1}(B) \leq C(n) \|\partial E\|(B)$$

para todo $B \subseteq \partial^* E$.

Demonstração. Sejam $\epsilon, \delta > 0$ e $B \supseteq \partial^* E$. Visto que $\|\partial E\|$ é uma medida de Radon, existe um aberto $U \supseteq B$ tal que

$$\|\partial E\|(U) \leq \|\partial E\|(B) + \epsilon.$$

Pelo lema 3.2.2, se $x \in \partial^* E$, então

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\|\partial E\|(B(x, r))}{r^{n-1}} > A_3.$$

Considere

$$\mathcal{F} = \left\{ B(x, r); x \in B, B(x, r) \subseteq U, r < \frac{\delta}{10}, \|\partial E\|(B(x, r)) > A_3 r^{n-1} \right\}.$$

Pelo Teorema de Recobrimento de Vitali, existem bolas disjuntas $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ tais que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, 5r_i).$$

Visto que $\text{diam } B(x_i, 5r_i) \leq \delta$ para todo $i = 1, 2, \dots$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^{n-1}(B) &\leq \sum_{i=1}^\infty \alpha(n-1)(5r_i)^{n-1} \\ &\leq \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{A_3} \sum_{i=1}^\infty \|\partial E\|(B(x_i, r_i)) \\ &\leq \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{A_3} \sum_{i=1}^\infty \|\partial E\|(B(x_i, 5r_i)) \\ &\leq \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{A_3} \|\partial E\|(U) \\ &\leq \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{A_3} (\|\partial E\|(B) + \epsilon) \end{aligned}$$

Tome então $C(n) = \frac{\alpha(n-1)5^{n-1}}{A_3}$ e faça $\epsilon, \delta \rightarrow 0$. Isso completa a prova. $\square$

Podemos agora provar o teorema principal da seção, o qual provê informações detalhadas a respeito da estrutura geral da fronteira reduzida. Ele mostra em particular que conjuntos de perímetro localmente finito tem, em certo sentido, uma "fronteira de classe C^1 ".

Teorema 3.4.2 (Teorema estrutural para conjuntos de perímetro finito - De Giorgi).

Seja E de perímetro localmente finito em $\mathbb{R}^n$.

(i) Então

$$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cup N,$$

onde

$$||\partial E||(N) = 0$$

e C_k é um subconjunto compacto de uma hiper-superfície S_k de classe C^1 ($k=1, 2, \dots$).

(ii) $\nu_E|_{S_k}$ é normal a S_k para todo $k=1, 2, \dots$

(iii) $||\partial E|| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$.

(iv) Além disso,

$$\overline{\partial^* E} = \partial E.$$

Demonstração. Para cada $x \in \partial^* E$ e $r \in \mathbb{R}$, defina $f_r : \partial^* E \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f_r(x) = \left(\frac{(\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E \cap H^+(x))}{r^n}, \frac{\mathcal{L}^n((B(x, r) - E) \cap H^-(x))}{r^n} \right)$$

Para todo $x \in \partial^* E$, segue do teorema 3.3.2 que

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_r(x) = (0, 0). \quad (3.6)$$

Pelo Teorema de Ergoroff, existe uma sequência $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \partial^* E$ de conjuntos disjuntos e $||\partial E||$ -mensuráveis, tais que

$$\begin{cases} ||\partial E||(\partial^* E - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) = 0, \quad \partial E|(F_k) < \infty, \text{ e} \\ \text{a convergência em (3.6) é uniforme para } x \in F_k \text{ (} k = 1, 2, \dots \text{)}. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Lusin, para cada i , existem uma sequência de conjuntos compactos e disjuntos $\{E_i^j\}_{j=1}^{\infty} \subset F_i$, tais que

$$||\partial E|| \left(F_i - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j \right) = 0, \quad \nu_E|_{E_i^j} \text{ é contínua.}$$

Reindexe os conjuntos $\{E_i^j\}_{i,j=1}^\infty$ e chame-os de $\{C_K\}_{K=1}^\infty$. Então

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^* E = \bigcup_{k=1}^\infty C_k \cup N, ||\partial E||(N) = 0 \\ \text{a convergência em (3.6) é uniforme em cada } C_k, \\ \nu_{E|C_k} \text{ é contínua, } k = (1, 2, \dots). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Para $\delta > 0$, defina

$$\rho_k(\delta) := \sup \left\{ \frac{\nu_E(x) \cdot (y - x)}{|y - x|}; 0 < |x - y| \leq \delta, x, y \in C_k \right\}.$$

Iremos mostrar que $\rho_k(\delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. Fixe k inteiro positivo e suponha por contradição que $\rho_k(\delta)$ não converge para 0 quando $\delta \rightarrow 0$. Então existem $\epsilon, \delta > 0$, com $0 < \delta < 1$ e $x, y \in C_k$ com $0 < |x - y| \leq \delta$ tais que $|\nu_E(x) \cdot (y - x)| > \epsilon|x - y|$. Podemos então assumir que $0 < \epsilon < 1$. Por (3.6) e (3.7), existe $0 < r < 2\delta$ tal que para todo $z \in C_k$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^n(B(z, r) \cap E \cap H^+(z)) < \frac{\epsilon^n}{2^{n+2}} \alpha(n) r^n \\ \mathcal{L}^n(B(z, r) \cap E \cap H^-(z)) > \alpha(n) \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon^n}{2^{n+2}} \right) r^n. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Considere o caso em que $\nu_E(x) \cdot (y - x) > \epsilon|x - y|$. Se $z \in B(y, \epsilon|x - y|)$, então $z = y + w$, com $w \leq \epsilon|x - y|$. Consequentemente,

$$\nu_E(x) \cdot (z - x) = \nu_E(x)(y - x) + \nu_E(x) \cdot w > \epsilon|x - y| - |w| \geq 0,$$

e visto que $\epsilon < 1$, devemos ter

$$B(y, \epsilon|x - y|) \subseteq H^+ \cap B(x, 2|x - y|). \quad (3.9)$$

Fazendo $z = x$ em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(E \cap B(x, 2|x - y|) \cap H^+(x)) &< \frac{\epsilon^n}{2^{n+2}} \alpha(n) (2|x - y|)^n \\ &= \frac{\epsilon^n \alpha(n)}{4} |x - y|^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

e fazendo $z = y$ em (3.8), implica em

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(E \cap B(y, \epsilon|x-y|)) &\geq \mathcal{L}^n(E \cap B(y, \epsilon|x-y|) \cap H^-(y)) \\
&\geq \frac{\epsilon^n \alpha(n) |x-y|^n}{2} \left(1 - \frac{\epsilon^n}{2^{n+1}}\right) \\
&> \frac{\epsilon^n \alpha(n)}{4} |x-y|^n.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Porém, aplicando $\mathcal{L}^n \llcorner E$ a ambos os lados da inclusão (3.9), obtemos uma contradição as desigualdades (3.10) e (3.11). O caso que $\nu_E(x) \cdot (y-x) < -\epsilon|x-y|$ é semelhante.

Pelo teorema de extensão de Whitney aplicado à $f = 0$, $d = \nu_E$ em C_k , concluimos que existem funções $\bar{f}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , tais que $\bar{f}_k = 0$ e $D\bar{f}_k = \nu_E$ em C_k . Considere

$$S_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \bar{f}_k = 0, D\bar{f}_k > \frac{1}{2} \right\} \quad k = (1, 2, \dots).$$

Pelo teorema da função implícita, S_k é uma subvariedade $n-1$ -dimensional do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Temos $C_k \subseteq S_k$. Isso acaba a prova das afirmações (i) e (ii).

Para provar a afirmação (iii), escolhemos um boreliano $B \subseteq \partial^* E$. Pelo lema 3.4.1, temos

$$\mathcal{H}^{n-1}(B \cap N) \leq C \|\partial E\|(B \cap N) = 0.$$

Em vista do último fato, assuma sem perda de generalidade que $B \subseteq C_1$. Por (ii), existe uma hiper-superfície $S_1 \supseteq C_1$ de classe C^1 . Considere então a medida

$$\nu := \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_1.$$

Visto que S_1 é de classe C^1 , temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\alpha(n-1)r^{n-1}} = 1 \quad (x \in B).$$

Usando este fato juntamente com o teorema 3.3.2 (iii), concluimos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(x, r))}{\|\partial E\|(B(x, r))} = 1 \quad (x \in B).$$

Visto que ν e $||\partial E||$ são ambas medidas de Radon, devemos ter pela última igualdade

$$||\partial E|| (B) = \nu(B) = \mathcal{H}^{n-1}(B),$$

de onde segue que

$$||\partial E|| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^*.$$

Por fim, seja U um aberto qualquer tal que

$$\partial^* E \cap U = \emptyset.$$

Então, por (iii),

$$||\partial E|| (U) = 0.$$

Portanto, devemos ter $\chi_E = 0$ em U , logo, $\partial E \cap U = \emptyset$. Acabamos de mostrar que se U é um aberto tal que $U \cap \partial^* E = \emptyset$, então $U \cap \partial E = \emptyset$. Tomando a contrapositiva, concluímos que $\overline{\partial^* E} = \partial E$. $\square$

3.5 O Teorema de Gauss-Green

No que se segue, continuaremos a assumir que E é um conjunto de perímetro localmente finito.

Definição 3.5.1. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x \in \partial_* E$, a fronteira essencial de E , se

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{r^n} > 0$$

e

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) - E)}{r^n} > 0.$$

Lemma 3.5.1. *Temos*

$$(i) \quad \partial^* E \subseteq \partial_* E$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E - \partial^* E) = 0.$$

Demonstração. A asserção (i) é consequência do lema 3.2.2.

Segue da continuidade da aplicação

$$r \rightarrow \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{r^n}$$

que para $x \in \partial_* E$, existem $0 < \alpha < 1$ e $r_j \rightarrow 0$ tais que

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x_j, r_j) \cap E)}{\alpha(n)r_j^n} = \alpha.$$

Sendo assim, temos que $\min\{\mathcal{L}^n(B(x, r_j) \cap E), \mathcal{L}^n(B(x, r_j) - E)\} = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}\alpha(n)r_j^n$, de onde segue da desigualdade isoperimétrica relativa que

$$\begin{aligned} 2C_1 \|\partial E\|(B(x, r)) &\geq \min\{\mathcal{L}^n(B(x, r_j) \cap E), \mathcal{L}^n(B(x, r_j) - E)\}^{1-\frac{1}{n}} \\ &= \min\{\alpha, 1 - \alpha\}\alpha(n)r_j^n, \end{aligned}$$

logo

$$\left\{ \frac{\|\partial E\|(B(x, r_j))}{r_j^{n-1}} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\min\{\alpha, 1 - \alpha\}\alpha(n)}{2C_1},$$

e portanto

$$\frac{\|\partial E\|(B(x, r_j))}{r_j^{n-1}} \geq \left\{ \frac{\min\{\alpha, 1 - \alpha\}\alpha(n)}{2C_1} \right\}^{1-\frac{1}{n}} > 0.$$

Segue que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\|\partial E\|(B(x, r))}{r^{n-1}} > 0.$$

Visto que $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n - \partial_* E) = 0$, um argumento de recobrimento mostra que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E - \partial^* E) = 0$$

□

Definição 3.5.2. Um vetor unitário $\nu_E(x)$ para o qual o item (i) no teorema 3.3.2 vale (com H^+ e H^- como na definição 3.2.1) é chamado de vetor unitário exterior em medida normal a E em x .

Estamos agora em condições de enunciar e provar uma versão mais abrangente do Teorema de Gauss-Green.

Teorema 3.5.2 (Teorema de Gauss-Green). *Suponha que $E \subset \mathbb{R}^n$ tenha perímetro localmente finito. Temos*

(i) $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$,

(ii) Para $\mathcal{H}^{n-1}$ quase todo $x \in \partial_* E$, existe um único vetor unitário exterior em medida $\nu_E(x)$, tal que

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, dx = \int_{\partial_* E} (\phi \cdot \nu_E) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

para todo $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo Teorema Estrutural para Funções de Variação Limitada, temos

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi \cdot \nu_E) \, d\|\partial E\|. \quad (3.12)$$

Mas visto que $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n - \partial_* E) = 0$, usando o Teorema Estrutural 3.4.2 e o lema 3.2.1, concluímos que

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E,$$

e fica provado (ii). Para aprovar (i), basta notar que, como $\|\partial E\|$ é uma medida de Radon, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) = (\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E)(K) = \|\partial E\|(K) < \infty.$$

□

Capítulo 4

Conjuntos de Fronteira Mínima

O objetivo desse breve capítulo é o de aplicar a teoria dos capítulos precedentes de forma a obter uma noção de hiper-superfície que possibilite formular e resolver uma extensão satisfatória do problema de Plateau. A solução se dará por meio de um teorema de compacidade. Em seguida, enunciaremos um resultado sobre a regularidade das soluções. A demonstração do mesmo, a qual pode ser encontrada no artigo [4] é bastante técnica e não será apresentada aqui.

4.1 O Problema de Plateau

A tarefa de encontrar superfícies de menor área (superfícies mínimas) dentre todas aquelas delimitadas por uma mesma curva damos o nome de problema de Plateau. O mesmo foi formulado por Lagrange em 1760. Plateau mostrou fisicamente que superfícies mínimas podem ser obtidas através de experimentos realizados com bolhas e filmes de sabão delimitados por arames. Desde então o problema de achar superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ ficou conhecido como o problema de Plateau.

Questões importantes relacionadas ao problema de Plateau incluem, mas não se restringem, à

- (i) existência de soluções,
- (ii) unicidade de soluções,
- (iii) regularidade de soluções.

O problema de Plateau foi solucionado independentemente por Tibor Radó e Jesse Douglas em 1930. Por outro lado, estender o problema para superfícies em espaços de dimensão maior que 3 se mostrou uma tarefa bastante complicada. Formulações satisfatórias e soluções para versões do problemas de Plateau em dimensões elevadas somente apareceram no início da década de 60. Uma delas, elaborada pelo matemático Italiano Ennio de Giorgi, será apresentada na próxima seção.

4.2 Conjuntos de Fronteira Mínima

Começaremos dando uma definição mais abrangente do conceito de hiper-superfície, introduzida por Ennio de Giorgi.

Definição 4.2.1. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que S é uma Hiper-superfície se $S = \partial E$, para algum E de perímetro finito.

O próximo teorema é uma versão do Problema de Plateau para nosso conceito de hiper-superfície. Grosseiramente falando, ele diz que $S = \partial E$ é a superfície de menor área dentre todas aquelas com fronteira $\partial L \cap \partial U$.

Teorema 4.2.1 (Existência de Conjuntos de Fronteira Mínima). *Seja U aberto e limitado no $\mathbb{R}^n$ e L um conjunto de perímetro finito. Então existe E de perímetro finito coincidindo com L fora de U tal que para todo F coincidindo com L fora de U , vale a desigualdade*

$$||\partial E||(\mathbb{R}^n) \leq ||\partial F||(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Visto que U é aberto e limitado, temos que $U \subset B(0, r)$, para algum $r > 0$. Se $F = L$ fora de U , então $F = L$ fora de $B(0, r)$. Temos

$$||\partial F||(\mathbb{R}^n) = ||\partial F||(\mathbb{R}^n - B(0, r)) + ||\partial F||(\partial B(0, r)).$$

Visto que $||\partial F||(\partial B(0, r)) \geq 0$, existe

$$\alpha = \inf\{||\partial F||(\mathbb{R}^n - B(0, r)) \mid F = L \text{ fora de } U\}.$$

Portanto, basta mostrar que existe $E \subset B(0, r)$ $\mathcal{L}^n$ mensurável, com $E = L$ fora de U , tal que $||\partial E||(\mathbb{R}^n) \leq ||\partial F||(\mathbb{R}^n)$ para todo $F = L$ fora de U . Considere $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ uma

sequência minimizante, isto é, $\|\partial E_k\|((B(0, r))) \rightarrow \alpha$. Como $\|\partial E_k\|((B(0, r)))$ é limitada e $\|\chi_{E_k}\|_{L^1((B(0, r)))} \leq \mathcal{L}^n(B_r(0))$, existe C tal que

$$\|\chi_{E_k}\|_{BV(B(0, r))} \leq C$$

Seque do Teorema de Compacidade para Funções de Variação Limitada (teorema 2.4.1) que existe uma subsequência $\chi_{E_{i_k}}$ tal que

$$\chi_{E_{i_k}} \rightarrow f \in BV((B(0, r))) \text{ em } L^1((B(0, r)))$$

Visto que $\chi_{E_{i_k}}$ é ou 0 ou 1 e $\chi_{E_{i_k}} \rightarrow f$, segue que $f = \chi_E$, onde E é um conjunto $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Pela semi-continuidade inferior do perímetro, concluímos que

$$\|\partial E\|((B(0, r))) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\partial E_k\|((B(0, r))) = \alpha \leq \|\partial F\|((B(0, r)))$$

para todo F em $B(0, r)$ com $F = L$ fora de U , de onde segue que E é o conjunto procurado. $\square$

Um conjunto E como no teorema anterior é dito ter fronteira mínima em U . Para tal conjunto, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.2 (De Giorgi). *Seja E um conjunto de perímetro finito em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Se E tem fronteira mínima em U , então $\partial^* E \cap U$ é uma Hiper-Superfície localmente regular.*

Bibliografia

- [1] DE GIORGI, Ennio. Sur una teoria generale della misura $(r - 1)$ dimensionale de un espacio ad r dimensione. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4); v. 36, p. 191-213, 1954.
- [2] DE GIORGI, Ennio. Nuovi teoremi relative alla misura $(r - 1)$ dimensionale de un espacio ad r dimensione. *Riserche Mat.*, v.4, p. 95-113, 1955.
- [3] DE GIORGI, Ennio. Complementi alla teoria della misura $(n - 1)$ -dimensionale de un espacio ad n -dimensionale. *Sem. Mat. Escuela Nor. Sup. Pisa*, 1960-61.;Editrice Tecnico Scientífica, Pisa, 1961.
- [4] DE GIORGI, Ennio. *Frontiere orientate de misura minima*. Sem. Mat. Escuela Nor. Sup. Pisa, 1960-61.;Editrice Tecnico Scientífica, Pisa, 1961.
- [5] Ennio de Giorgi selected papers. Berlim: Springer-Verlag, 2006.
- [6] EVANS, Lawrence C; GARIEPY, Ronald F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. (Studies in Advanced Mathematics). Boca Raton: CRC Press. 1992.
- [7] GIUSTI, Enrico. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Boston: Birkhäuser, 1984.
- [8] LIN, Fanghua ; YANG, Xiaoming. *Geometric Measure Theory: An Introduction*. Beijing: Science Press and International Press, 2002.